



Controle não linear baseado em dados: estrutura de controladores e uso de informação auxiliar

João Carlos Vilela de Castro

Texto de qualificação submetido à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Luis Antonio Aguirre, Ph.D.

Belo Horizonte, março de 2021

Contents

| | |
|--|-------------|
| Resumo | v |
| Abstract | vii |
| Lista of Figures | x |
| List of Symbols | xi |
| List of abbreviations and acronyms | xiii |
| 1 Introduction | 1 |
| 2 Basic concepts in system identification | 5 |
| 2.1 Data Collection and pre-processing | 6 |
| 2.2 Choice of Model Class | 6 |
| 2.3 Structure Selection | 6 |
| 2.4 Parameter Estimation | 8 |
| 2.5 Model Validation | 9 |
| 2.6 Randomized Model Structure Selection | 11 |
| 2.7 Control System Setup and Notations | 16 |
| 2.7.1 The control system | 17 |
| 2.7.2 The process | 17 |
| 2.7.3 The controller | 18 |
| 2.7.4 The feedback system | 19 |
| 2.7.5 Notation simplification | 19 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.7.6 | The control objective | 19 |
| 2.8 | The Ideal Controller | 23 |
| 3 | Virtual Reference Feedback Tuning | 25 |
| 3.1 | Initial Considerations | 26 |
| 3.2 | The Ideal Control Design Problem – The Matched Control | 28 |
| 3.3 | Controller Parameter Identification | 29 |
| 3.4 | The Unmatched Control and the Filter Selection | 30 |
| 3.5 | Aplication Examples | 32 |
| 3.5.1 | Final Considerations of the Chapter | 37 |
| 4 | Randomized Controller Structure Selection | 39 |
| 4.1 | Methodology | 40 |
| 4.2 | Preliminary Results | 42 |
| 5 | Conclusões | 49 |
| 5.1 | Considerações finais | 49 |
| 5.2 | Propostas de continuidade | 49 |
| A | VRFT Complements | 59 |
| A.1 | Proof. for Theorem ?? for linear case | 59 |
| A.2 | Proof of the VRFT filter choice (Theorem 3.4.1) | 60 |

Resumo

Em procedimentos convencionais o projeto de controladores é feito a partir de um modelo matemático que representa o processo a se controlar. A outra abordagem, que difere em essência da convencional, com estudos crescentes nas últimas décadas, é a de projeto de controladores baseado em dados (DDC do inglês Data-Driven Control). No DDC, o projeto do controlador não faz uso direta ou indiretamente do modelo do processo e todo o projeto é feito a partir de dados amostrados diretamente do processo. Grande parte das técnicas DDC são métodos iterativos baseados principalmente no método do gradiente para minimizar algum índice de custo. Contudo algumas técnicas, em especial a VRFT, do inglês Virtual Reference Feedback Tuning, permitem, por um procedimento em batelada, realizar a minimização deste índice a partir de técnicas usuais no âmbito da identificação de sistemas. No contexto de identificação de sistemas é consenso que a estrutura do modelo – quais regressores o compõem – tem forte influência no desempenho dinâmico. Neste sentido esta pesquisa de doutorado tem buscado um método para auxílio na seleção da melhor estrutura do controlador a partir de uma estratégia de controle VRFT para sistemas não lineares. Esta seleção é feita por uma abordagem aleatorizada de seleção de estruturas de modelos já conhecida no âmbito de identificação de sistemas, mas que é, neste trabalho, adaptada para lidar com identificação de controladores. Afim de reduzir custo computacional e tornar o procedimento mais viável, o uso de técnicas de aprendizado por reforço é considerado. Por fim, o uso de informações auxiliares, que tem mostrado benefícios no contexto de identificação de sistemas, é analisado no contexto da identificação de controladores, por meio de restrições que levam em conta características previamente conhecidas no projeto do controlador.

Palavras-chave: Controle baseado em dados; Controle livre de modelo; Aprendizado por reforço; Seleção de estruturas; Sistemas não lineares.

Abstract

In conventional procedures, the controller's design is based on a mathematical model that represents the process to be controlled. Another approach, which differs in essence from the conventional one, with growing studies in the last decades, is the design of data-driven controllers, or Data-Driven Control (DDC). In DDC approach, the controller design does not make direct or indirect use of the process model, and the entire project is made from data sampled directly from the process. Most of the DDC techniques are iterative methods based mainly on gradient methods to minimize some cost index. However, some techniques, in particular the Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT), allow, through a batch procedure, to minimize this index with usual techniques from systems identification field. In the systems identification context, there is a consensus that the model's structure - which regressors comprise it - has a strong influence on dynamic performance. In this sense, this doctoral research has sought for a method to assist in the selection of the best controller structure tuned by a VRFT control strategy for non-linear systems. The structure selection is made by a randomized model structure selection approach already known in the scope of systems identification, but which, in this work, is adapted to deal with the identification of controllers models. In order to reduce computational cost and make the procedure more viable, the use of reinforcement learning techniques is considered. Finally, the use of auxiliary information, which has shown benefits in the context of system identification, is analyzed in the context of the controllers identification, through restrictions that take into account previously known characteristics in the design of the controller.

Keywords: Data-Driven Control; Model-Free Control; Reinforcement Learning; Structure Selection; Nonlinear Systems.

List of Figures

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Evolução dos RIPs durante as iterações do algoritmo RaMSS. | 16 |
| 2.2 | Resposta temporal para os dados de amostrados (preto tracejado - -), treinamento (círculos vermelhos o), até a iteração 1000, e de validação (vermelho contínuo) a partir da milésima iteração. Para melhor visualização apenas as iterações de 850 a 1150 são mostradas. | 16 |
| 2.3 | Sistema de controle. | 17 |
| 3.1 | Experiment to obtain the data used to identify the controller parameters by the VRFT method: real data in <i>black solid lines</i> (-), virtual data in <i>blue dashed lines</i> () and the cotroller to tune, in <i>red dashed block</i> (). | 26 |
| 3.2 | Typical cost functions for $J_{VR}(\theta)$ (-) and $J_{RM}(\theta)$ (). | 29 |
| 3.3 | Temporal evolution of the signals: input of process \tilde{u} ; output of process \tilde{y} ; the calculated virtual reference \tilde{r} ; and the calculated virtual error \tilde{e} ; considering the top to bottom graphs sequence. | 33 |
| 3.4 | Closed-loop system response to a square reference signal (upper graph) and absolute error (lower graph) for: case A (); case B (); case C (); and case D (). The response of the reference model is represented by (-) in the upper graph. | 36 |
| 4.1 | Typical evolution of RIPs for choosing regressors for case 1 and 2. | 44 |
| 4.2 | Resposta do sistema em malha fechada (gráfico superior) e respectivos erros absolutos (gráfico inferior) utilizando os controladores identificados no caso A () e no caso B (). Os sinais de referência () e de reposta do modelo de de referência (-) são mostrados no gráfico superior. | 44 |
| 4.3 | Evolução dos RIPs para diferentes valores da parâmetro α considerando dados sem ruído. (Caption ainda será mudada.) | 45 |
| 4.4 | Evolução dos RIPs para diferentes valores da parâmetro α considerando dados COM ruído. (Caption ainda será mudada.) | 46 |
| 4.5 | Densidades de probabilidades para os regressores escolhidos para diferentes valores de α , caso sem ruído.(Caption ainda será mudada.) | 46 |
| 4.6 | Densidades de probabilidades para os regressores escolhidos para diferentes valores de α , caso COM ruído.(Caption ainda será mudada.) | 47 |

List of Symbols

Chapter 1

y_k Output signal $\in \mathbb{R}^p$, at time k ;

Chapter 2

N number of sampled data;

N_p number of sampled models;

\mathcal{I}

\mathcal{I}_j^+

\mathcal{I}_j^-

\mathcal{J} performance index

\mathcal{M} universe set of all considered possible models

$\tilde{\mathcal{M}}$

\mathcal{R} set of all model candidate regressors

f^*

\tilde{f}

$\mathbb{E}[\cdot]$ expected value operator

Chapter 3

Chapter 4

u_k vector input signal $\in \mathbb{R}^m$, at time k ;

u_k vector input signal $\in \mathbb{R}^m$, at time k ;

Chapter 5

List of abbreviations and acronyms

| | |
|--------|--|
| AIC | Akaike's Information Criterion; |
| AICc | Corrected Akaike's Information Criterion; |
| ARMAX | AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs; |
| ARX | AutoRegressive model with eXogenous inputs; |
| BIC | Bayesian Information Criterion; |
| CLS | Constrained Least Squares |
| EP | Error Prediction; |
| ERR | Error Reduction Ratio; |
| FPE | Final Prediction Error; |
| ILS | Iterative Least Squares; |
| IV | Instrumental Variables; |
| LTI | Linear Time Invariant; |
| LTV | Linear Time Variant; |
| MA | Moving Average; |
| MACSIN | Modeling, Analysis, Control and Nonlinear Systems Group; |
| MS1PE | Mean Square Prediction Error for one step ahead; |
| MSPE | Mean Square Prediction Error; |
| NARMAX | Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs; |
| NARX | Nonlinear AutoRegressive model with eXogenous inputs; |
| OLS | Ordinary Least Squares; |
| PPGEE | Graduate Program in Electrical Engineering; |
| PRBS | Pseudo Random Binary Signal; |
| RIP | Regressor Inclusion Probabilitty; |
| RLS | Recursive Least Squares; |
| RMSE | Root Mean Error Square |
| RaMSS | Randomized Model Structure Selection; |
| SISO | Single-Input Single-Output; |
| SNR | Signal Noise Ratio; |
| UFMG | Universidade Federal de Minas Gerais; |

Introduction

The use of feedback control in mechanisms developed by humans is marked by the 1769 James Watt's invention, known as the Watt regulator and developed to regulate steam-machines spin velocities. From this time until the beginning of the 20th century, control designs were based on trial and error methods. With the emergence of theoretical publications on the subject, such as that of (Tolle, 1921), mathematical models were increasingly used in the design of controllers, mainly in the form of differential equations (Takahashi et al., 1972).

In the 30s and 50s the so-called Classical Control Theory originates, expressing itself basically in the frequency domain and in the s -plane, with models given by transfer functions, based on methods developed mainly by Nyquist, Bode, Nichols and Evans.

In the 1960s, a new control theory approach arises, using parametric models and state space representation. this approaches gives rise to the so-called Modern Control Theory and its main branches, such as systems identification, adaptive control, robust control, optimal control and stochastic control, which have been widely studied and developed until today, but still with many challenging topics, both in theoretical and practical aspects (Hou and Wang, 2013).

In both approaches, the classical control theory, mainly based on the use of transfer functions and linear systems, as in the modern control theory, mainly based on state space representations of linear and non-linear systems, a mathematical model of the process to be controlled is required Such model can be obtained via phenomenological modeling, or via systems identification methods. In the former case, the model is obtained using known laws from specific fields of science resulting in equations that represent it. In the latter case, using input-output data collected from the process and using systems identification techniques, models that represent the process are obtained, with a certain degree of reliability.

Several methodologies for identifying linear and non-linear models are available in the literature (Aguirre, 2015; Ljung, 1999).

Models obtained using first principles or even by systems identification can result in high order models, with a high degree of non-linearity, which makes difficult or even impractical their use for control purposes.

Furthermore, modelling processes can be an arduous task and sometimes even impracticable, requiring steps to validate and determine the structure of the model.

For this reason, traditional model-based control methods (MBC) are unpractical in

colocar referencias
aqui...

some cases. Besides, several processes generate and store large amounts of data and the use of this data for controller design would be very convenient (Hou and Wang, 2013).

Since the input and output data of a plant contains information about its dynamics, as long as it is properly excited, it may seem unnecessary to apply the identification theory to obtain a mathematical model of the plant for controller design (Ikeda et al., 2001). Furthermore, in an attempt to obtain a model that is faithful to the behaviour of the process, a very complex model can be arrived at, and a process of order reduction may be necessary during the controller design. In this case, additional effort in identifying the model may be unnecessary when designing the controller.

In this sense, in several practical control cases in which a mathematical model describing the plant is not available, or is too complex or the uncertainty in the model is too great for the use of MBC strategies, it is very convenient to obtain the controller from measurements obtained directly from the plant.

According to Campi et al. (2002), this problem has attracted the attention of control engineers since the work published by Ziegler and Nichols (1942), and several extensions have been proposed since then. Such procedures, despite being similar to trial and error procedures, were widely used in the industry, perhaps due to their simplicity of design, even if at the expense of final performance losses.

Around the 1990s, new approaches to controller design without the use of models for plants began to appear in the literature, which later came to be called control based on data (DDC). Hou and Wang (2013) claim that the term *data-driven* was first proposed in computer science and only recently entered the vocabulary of the control community and, to date, there are some DDC methods known by different names, such as “*data-driven control*”, “*data-based control*”, “*modelless control*”, among others. Hou and Wang (2013) propose the following definition for DDC, based on 3 other definitions:

Definition 1.1 (Data-Driven Control). (Hou and Wang, 2013) Data-driven control includes all control theories and methods in which the controller is designed by directly using on-line or off-line I/O data of the controlled system or knowledge from the data processing but not any explicit information from mathematical model of the controlled process, and whose stability, convergence, and robustness can be guaranteed by rigorous mathematical analysis under certain reasonable assumptions.

Therefore, the DDC is different from the MBC in essence, since the controller design does not make direct or indirect use of the process model. Although at first, they look like adaptive control methods, DDC methods differ from these in that, at first, they do not need any model information, and parameter settings depend on large batches of data, instead of only a few samples of the input-output signals.

Some conceptually distinct approaches using DDC appear in the literature in the last years, among them*: *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT), *Iterative Feedback*

*it was chosen here to mention some techniques that the author found most relevant to this proposal,

Tuning (IFT), *Frequency Domain Tuning* (FDT), *Correlation Based Tuning* (CbT), originally presented by [Campi et al. \(2002\)](#), [Hjalmarsson et al. \(1994\)](#), [Kammer et al. \(2000\)](#) and [Karimi et al. \(2002\)](#), respectively.

Since the input and output data of a plant contains information about its dynamics, as long as it is properly excited, it may seem unnecessary to apply the identification theory to obtain a mathematical model of the plant for controller design ([Ikeda et al., 2001](#)). In addition, having obtained a model faithful to the plant, it may be necessary to reduce its order in the design of the controller. In this sense, in several practical control cases in which a mathematical model describing the plant is not available, or is too complex or the uncertainty in the model is too great for the use of MBC strategies, it is very convenient to obtain the controller from measurements obtained directly from the plant.

According to [Campi et al. \(2002\)](#), this problem has attracted the attention of control engineers since the work published by [Ziegler and Nichols \(1942\)](#) and several extensions have been proposed since then. However, around the 1990s, new approaches to controller design without the use of models for plants began to appear in the literature, which later came to be called control based on data (*DDC - from English, data-driven control*). [Hou and Wang \(2013\)](#) claim that the term *data-driven* was first proposed in computer science and only recently entered the vocabulary of the control community and, to date, there are some DDC methods, however they are characterized by different names, such as “*data-driven control*”, “*data-based control*”, “*modelless control*”, among others. [Hou and Wang \(2013\)](#) propose the following definition for DDC, based on 3 other definitions found on the Internet:

Definition 1.2 (Data-Driven Control). ([Hou and Wang, 2013](#)) Data-driven control includes all control theories and methods in which the controller is designed by directly using on-line or off-line I/O data of the controlled system or knowledge from the data processing but not any explicit information from mathematical model of the controlled process, and whose stability, convergence, and robustness can be guaranteed by rigorous mathematical analysis under certain reasonable assumptions.

Therefore, the DDC is different from the MBC in essence, since the controller design does not make direct or indirect use of the process model. Although at first, they look like adaptive control methods, DDC methods differ from these in that, at first, they do not need any model information, and parameter settings depend, in general, on large batches of data, instead of only a few samples of the input-output signals.

Some conceptually distinct approaches using DDC appear in the literature in the last years, among them[†]: *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT), *Iterative Feedback*

however others can be found in the literature ([Spall, 1992](#); [Safonov and Tsao, 1995](#); [Karimi et al., 2007](#); [Huang and Kadali, 2008](#); [Schaal and Atkeson, 1994](#); [Shi and Skelton, 2000](#))

[†]it was chosen here to mention some techniques that the author found most relevant to this proposal, however others can be found in the literature ([Safonov and Tsao, 1995](#); [Karimi et al., 2007](#); [Huang and Kadali, 2008](#); [Schaal and Atkeson, 1994](#); [Shi and Skelton, 2000](#))

Tuning (IFT), *Frequency Domain Tuning* (FDT), *Correlation Based Tuning* (CbT), originally presented by [Campi et al. \(2002\)](#), [Hjalmarsson et al. \(1994\)](#), [Kammer et al. \(2000\)](#) and [Karimi et al. \(2002\)](#), respectively. Most of these methodologies use the concept of optimization from the minimization of a cost function, in general, measured in terms of the H_2 norm of a signal. Several DDC methods available in the literature do this optimization in an iterative way, among them, the IFT, CbT, ILC, ADP. Others do so in batches, such as the VRFT and *Noniterative data-driven model reference control* methods.

In iterative cases, the minimization of the cost function is done, typically, by gradient descent methodologies, from input-output data collected in a batch way ([Bazanella et al., 2008](#)). One drawback of these methodologies is the lack of conditions that guarantee convergence to a global minimum for the cost function in many cases. Extensions to improve the convergence properties and even reduce the number of required in-process experiments have been the subject of studies in last years ([Huusom et al., 2009](#)).

In non-iterative cases, convergence to a global minimum is generally not an issue. The VRFT method, presented by [Guardabassi and Savaresi \(2000\)](#); [Campi et al. \(2002\)](#) to deal with the design of SISO systems and results in a linear controller is an example. In order to solve the problem of convergence to a global minimum of a H_2 performance criterion, the VRFT focus on making the cost function be optimized sufficiently “well behaved” making optimization converge properly.

At first, given ideal conditions, convergence to the global minimum is not a problem when using the VRFT method, as it is a batch method. In addition, VRFT has no initialization problems and does not access the plant several times for experimentation, in contrast to iterative methods, allowing to maintaining the normal process operation. Extensions for non-linear controllers designs have been proposed since then ([Jeng and Lin, 2014, 2018](#)).

Vou terminar aqui ainda. Levar para o lado da seleção de estrutura. Se for preciso, resumo um pouco o texto anterior.

Basic concepts in system identification

In order to describe natural phenomena or even mechanisms and processes created by the humans, over the centuries, different ways of representing such phenomena through mathematical expressions, known as mathematical models, or simply models, have been developed.

To obtain such models, in general, two approaches can be used: modeling by the first principles, or modeling by systems identification techniques. In the first case, the models are obtained from applications of laws, in general of physics, developed and documented over the years of observations of phenomena, natural or not, by scientists from the most diverse areas. In the second case, mathematical models are obtained from analyzes made on signal data collected from the system to be modeled using identification techniques developed for this purpose. In both cases, the models obtained are mathematical expressions that describe the approximate behavior of the modeled process.

In the present work, it is not of interest to obtain a model for the process, but a model for the controller. However, the methodologies used to identify systems can be used directly, or in some cases, with specific adaptations for the purpose of identifying controllers. In this sense, identification techniques used in the scope of model identification have been used in the design of data-driven controllers, targeting both linear ([Campi et al., 2002](#)) and non-linear ([Campi and Savaresi, 2006](#)) controller models.

Over the years, with the increase in the computer's processing power as well as the ease in the acquisition and storage of data, the use of techniques for identifying nonlinear models has increasingly shown to be interesting for predictions or even for better understanding of phenomena. Likewise, it is expected that non-linear controllers designed by data-oriented control techniques will often result in controllers with better performance or even greater robustness.

From a few decades ago, the task of modeling nonlinear systems has been studied, where some great works stand out ([Billings, 1980](#); [Leontaritis and Billings, 1985a,b](#); [Korenberg et al., 1988](#); [Billings et al., 1989](#); [Chen et al., 1990](#); [Chen and Billings, 1992](#); [Aguirre and Billings, 1995](#); [Aguirre et al., 2000](#); [Zhu, 2005](#)). The system identification process basically consists of the following steps: (1) Data collection; (2) Choice of model type; (3) Structure selection; (4) Estimation of parameters; (5) model validation. The following sections briefly address each of these steps.

2.1 Data Collection and pre-processing

The first step in the identification of systems models is the data collection. In this process, some care must be taken regarding the sampling interval considered when collecting signals, from the system to be identified. Care should also be taken when choosing the signal used to excite the process, when possible. The input signals must be designed in such a way as to excite the dynamics of the system in the frequency range of interest, through the choice of signals with adequate spectral powers. In this case it is said that the signal must be *persistently exciting*. Signals such as filtered white noise or binary pseudo-random signals (PRBS) are commonly used in practice.

The proper choice of the amplitude of the input signal is also a factor that deserves caution. For example, the signal should not be such as to cause the process response to exceed certain thresholds, close to an operating point, which guarantee a behavior close to linear in the case of the identification of linear models. Likewise, when the identification is of a non-linear model, the amplitude must be such that it explores the non-linear characteristics of the process. Problems such as oversampling, outliers, or cases in which the excitation signals cannot be previously chosen, can be resolved or mitigated by prior treatment of the data, a process known as pre-processing.

2.2 Choice of Model Class

There are several model classes that can be used to describe the input-output relationship of a process. These classes have different structures that are more or less suitable for a particular application. For example, for non-linear systems, the structure of the model must be complex enough to represent the non-linearities of interest. Among the several usual classes in the representation of models, the following stand out: base radial functions ([Broomhead and Lowe, 1988](#)), neural networks ([Haykin, 1994](#)), wavelets ([Strang, 1989](#)), Volterra series ([Billings, 1980](#)), polynomials and rationals functions ([Billings et al., 1989](#)).

2.3 Structure Selection

Once the class of a model is defined, choosing its structure (i.e., number, degree, time lags, of terms in a NARX polynomial model) becomes the next task, before identifying its parameters. This can be a difficult task, since we want to find a model with the lowest possible variance and polarization (bias), and these two quantities are contradictory. In short, the model must be rich enough to capture the dynamics and repeat the behavior of the modeled system, but not so much as to model the noise present in the sampled signals. If the model is very simple, it may not fit well with the training data, and if too complex (with many terms), it can affect the behavior prediction for data other than

those used in training.

In an attempt to find a solution to this problem, approaches have been presented in recent decades. Among them, the Akaike's Information Criterion (AIC) gained attention, as well as its corrected version, (AICc). The AIC, was introduced by [Akaike \(1974\)](#), and is defined as

$$AIC(n_\theta) = N \ln[\sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta)] + 2n_\theta, \quad (2.1)$$

where N is the number of sampled data, $\sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta)$ the variance of the residue and $n_\theta = \dim[\hat{\theta}]$ the number of parameters of the model. According to [Aguirre \(2015\)](#), (2.1) can be analyzed by the following: "Bs terms are included in the model, the number of degrees of freedom n_d increases, allowing a more accurate adjustment to the data. Thus, $\sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta)$ decreases as n_d increases . . .", but ". . . after a certain moment, the decrease in the variance of the residuals resulting from the inclusion of a new term is insignificant and would not justify the inclusion of the respective term ". In short, the first term of (2.1) quantifies the decrease in the variance of the residuals due to the inclusion of a term, whereas the second term penalizes the inclusion of each term.

In order to correct a problem presented by the AIC that increases the probability of the AIC to select models with a high number of parameters when the sample size is small, which leads to an over-adjustment, the AICc appears ([Cavanaugh, 1997](#)), given by the equation

$$AICc = AIC + \frac{2k^2 + 2k}{n - k - 1}.$$

Other criteria similar to AIC can also be found in the literature, among them, the Bayesian Information Criterion (BIC), ([Schwarz, 1978](#)); and the Final Prediction Error (FPE) ([Kashyap, 1977](#)).

Other approaches, already considered classic, that differ from the previously mentioned criteria can be found in the literature, with emphasis on the Error Reduction Ratio (ERR) ([Billings et al., 1989](#)). In this approach, the reduction in noise variance that occurs when a new term is included in the model is quantified and normalized with respect to the output variance. The ERR resulting from the inclusion of the i -th regressor is given by

$$[ERR]_i = \frac{MS1PE(v_{i-1}) - MS1PE(v_i)}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle},$$

where $i = 1, 2, \dots, m$ and m is the number of tested candidate terms; $MS1PE v_i$ the one-step ahead error of the model with i terms, or regressors; and v represents a family of models with nested structures such that $v_{i-1} \subset v_i$.

Extensions to the ERR criterion are possible, such as ERR_2 ([Alves et al., 2012](#)), which uses 2-steps ahead prediction instead of 1. Another criterion similar to the ERR is the Simulation Error Reduction Ratio (SRR), introduced by ([Piroddi and Spinelli, 2003](#)), and which is advantageous in non-ideal conditions, often resulting in more compact

parece que faltou falar de y.

models, but with higher computational costs. It is given by

$$[\text{SRR}]_i = \frac{MSSE(v_{i-1}) - MSSE(v_i)}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle},$$

where $MSSE v_i$ now represents the mean square simulation error for the model with i regressors, which implies the use of free-run simulation.

More recent techniques, many of which are based on Monte Carlo approaches, have been introduced to the academic community in recent years. For the purposes of this research, the Randomized Model Structure Selection method, or simply, RaMSS (Falsone et al., 2014, 2015), stands out.

2.4 Parameter Estimation

Acabar de traduzir daqui!

No processo de identificação de sistemas dinâmicos, mais especificamente utilizando estimação paramétrica, uma vez que os dados são colhidos, pré-processados e a classe do modelo e sua estrutura são escolhidos, o problema passa ser o de se determinar os melhores parâmetros para este modelo. A este processo dá-se o nome de estimação de parâmetros. O objetivo é encontrar uma função paramétrica $\hat{f}(\varphi_k, \hat{\theta}) : \mathbb{R}^{n_{\hat{\theta}}} \mapsto \mathbb{R}$ que se aproxime da função ideal e em geral, desconhecida, $f(\varphi_k) : \mathbb{R}^{n_{\theta}} \mapsto \mathbb{R}$ por meios de dados de treinamento amostrados. Desta forma

$$y_k = f(\varphi_k) \approx \hat{f}(\varphi_k, \hat{\theta}),$$

em que $\varphi_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_{\theta}}$ é o vetor de regressores, formado por combinações lineares ou não lineares da saída $y_{k-1}, \dots, y_{k-n_y}$ (e.g. modelos FIR) e/ou entrada $u_{k-1}, \dots, u_{k-n_u}$ (e.g., modelos ARX, ou NARX) e até mesmo do resíduo $\xi_k, \dots, \xi_{k-n_{\xi}-1}$ (e.g., modelos ARMA, NARMAX); $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{n_{\hat{\theta}}}$, é um vetor de parâmetros estimados; $y_k \in \mathbb{R}$, o sinal amostrado no instante k ; e $n_{\hat{\theta}}, n_y, n_u$ representam respectivamente: o número de parâmetros e os máximos atrasos na saída e na entrada.

Considerando que a função ideal $f(\varphi_k)$ possa ser escrita na forma paramétrica

$$y_k = f(\varphi_k, \theta), \quad (2.2)$$

em que $\theta \in \mathbb{R}^{n_{\theta}}$ é o vetor de parâmetros ideal, e assumindo que f é linear nos parâmetros e que tanto f quanto θ não mudam em relação ao tempo k , pode-se escrever (2.2) na seguinte forma matricial

$$\mathbf{y} = \Psi \theta, \quad (2.3)$$

em que $\Psi = [\varphi_k \ \varphi_{k-1} \ \dots \ \varphi_{k-N+1}]^T$ e $\mathbf{y} = [y_k \ y_{k-1} \ \dots \ y_{k-N+1}]^T$.

Se $N = n_\theta$ restrições, o vetor de parâmetros θ pode ser determinado por

$$\theta = \Psi^{-1}y.$$

Porém se $N > n_\theta$ restrições são tomadas, o sistema é dito sobre-determinado e a matrix X passa a ser não quadrada e não invertível. Uma solução é reescrever (2.3) de forma que a solução não seja exata, a partir da introdução de um termo de erro $\xi \in \mathbb{R}^N$, conhecido como vetor de *resíduos*, resultando em

$$y = \Psi\hat{\theta} + \xi.$$

Para que o modelo capture o comportamento do processo modelado, é intuitivo que o vetor de parâmetros estimados $\hat{\theta}$ seja escolhido de forma que ξ seja reduzido em algum sentido. Na estratégia conhecida como Mínimos Quadrados Ordinário ou, simplesmente, mínimos quadrados ou LS (do inglês Least Squares), uma função de custo relacionada ao vetor de resíduos é definida como

$$J_{LS} = \sum_{k=1}^N \xi(k)^2 = \xi^T \xi = \|\xi\|^2.$$

Prova-se que o vetor $\hat{\theta}_{LS}$, definido como o conjunto de parâmetros que minimiza J_{LS} pode ser calculado por meio da pseudo-inversa de Ψ , de forma que (Aguirre, 2015):

$$\hat{\theta}_{LS} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T y. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) representa o estimador dos mínimos quadrados, onde os parâmetros são determinados pela minimização da função de custo referente ao somatório do quadrado dos erros de modelagem. Alternativas numéricas mais interessantes que o algoritmo clássico de (2.4) podem ser encontradas (Aguirre, 2015; Ljung, 1999), porém o fundamento básico permanece o mesmo.

2.5 Model Validation

Tendo sido estimados os parâmetros que minimizam o resíduo em algum sentido, como por exemplo em função do somatório do quadrado dos erros de modelagem, caso dos mínimos quadrados apresentado em (2.4), deve-se avaliar o desempenho do modelo quando este estiver sujeito a excitações diferentes daquelas submetidas durante o processo de identificação (treinamento).

Para isso, é comum utilizar-se de um conjunto de dados amostrados diferente daquele usado no processo de identificação. A este conjunto de dados dá-se o nome de conjunto de validação. É usual colher-se uma certa quantidade de dados do processo, sujeito a um sinal de excitação adequado, e posteriormente dividir o conjunto de dados

resultante em um conjunto de treinamento e outro de validação.

O passo seguinte consiste em utilizar-se de algum índice de desempenho de forma a quantificar a qualidade da previsão em um teste conhecido como *free-run simulation*. Nessa simulação, o modelo obtido no processo de identificação é submetido ao mesmo sinal de excitação sob o qual fora submetido o conjunto de validação. Os resultados simulados e colhidos armazenados previamente são então comparados a partir de alguma métrica. Dentre as métricas mais usuais, destacam-se o *Mean Square Error* (MSE) e a *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE).

O MSE é dado por

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2,$$

sendo M o número de amostras, y_k o dado amostrado no intervalo k e \hat{y}_k a predição do modelo. O MSE pode ser calculado tanto sobre os dados de treinamento quanto sobre dados de validação. Porém, para fins de validação, os dados de validação devem ser utilizados, uma vez que assim pode-se obter uma medida do desempenho para o modelo se comportando fora do ambiente de treinamento. Um bom modelo, em geral, deve apresentar o MSE sobre os dados de validação próximo ao MSE sobre os dados de treinamento.

Baseados no MSE, definem-se dois outros índices de desempenho: o *Mean Square Prediction Error*, ou MSPE, e o *Mean Square Simulation Error*, ou MSSE. O MSPE é definido como o MSE utilizando como dados de predição do modelo \hat{y}_k dados de predição um passo a frente. Já o MSSE, utiliza dados de simulação livre como dados de predição \hat{y}_k nos cálculos. Versões modificadas do MSPE podem ser também usadas, como o MS2PE, que utiliza predição de 2 passos a frente.

O MAPE, por sua vez, calcula o desvio absoluto da predição em relação aos dados observados e é, em geral, calculado em porcentagem, na forma

$$\text{MAPE} = \frac{100}{N\sigma(\mathbf{y})} \sum_{k=1}^N |y_k - \hat{y}_k| \%, \quad (2.5)$$

em que $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ e $\sigma(\mathbf{y})$ representa o desvio padrão de \mathbf{y} .

Diferentes formas de escolha dos dados de treinamento e validação em relação à usual apresentada em (2.5) podem ser usados. Uma destas formas é a “leave-one-out cross-validation”, em que apenas um dado, de todo o conjunto de dados é usado de cada vez (Allen, 1974).

Além da validação quantitativa em geral recorre-se ainda a uma avaliação qualitativa, na qual é realizada uma comparação gráfica, quanto ao comportamento dinâmico, entre a curva do sinal amostrado e a curva do sinal estimado pelo modelo resultante.

2.6 Randomized Model Structure Selection

O método RaMSS, apresenta uma abordagem aleatorizada para escolha de uma estrutura de modelo adequada por meio da amostragem de modelos de um conjunto de modelos \mathcal{M} . Introduzido por [Falsone et al. \(2014\)](#) e aperfeiçoado em [Falsone et al. \(2015\)](#), o método realiza a tarefa de seleção de estrutura de maneira probabilística que, apesar do caráter aleatório, evita a busca exaustiva necessária para analisar todos os regressores do conjunto de regressores candidatos, definido por \mathcal{R} , que seria necessário ao se utilizar força bruta em uma estratégia puramente Monte Carlo.

O método procura iterativamente pelo melhor subconjunto de regressores no conjunto \mathcal{R} visando maximizar a acurácia da predição do modelo segundo um índice definido. Isto é feito através de modelos candidatos, subconjuntos de \mathcal{M} , construídos a partir de regressores amostrados do conjunto \mathcal{R} com a probabilidade de escolha dada por uma função de probabilidade estimada chamada de RIP (*Regressor Inclusion Probability*). Uma vez escolhido um modelo candidato, este é avaliado de acordo com algum critério de desempenho e os RIP são atualizados. A cada iteração, N_p modelos são tomados de \mathcal{M} e índices de desempenho são calculados para a atualização dos RIP. Estes índices são, em geral, baseados no MSPE, MSSE ou uma combinação dos dois, e são usados para calcular um índice médio de desempenho do regressor avaliado. Assumindo um conjunto \mathcal{M} de $N_p = \dim(\mathcal{M})$ modelos em que alguns contêm o j -ésimo regressor, um índice que mensura o *desempenho médio do regressor*, que pode ser usado no cálculo do RIP é definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j &= \mathcal{I}_j^+ - \mathcal{I}_j^- \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{J}(\Phi)|\phi_j \in \Phi] - \mathbb{E}[\mathcal{J}(\Phi)|\phi_j \notin \Phi], \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo $j = 1, \dots, m$, em que $m = \dim(\mathcal{R})$ é o número de regressores considerados, $\mathcal{J}(\Phi)$ representa o vetor contendo os índices de desempenho para os modelos escolhidos, Φ é o conjunto de regressores candidatos, ϕ_j o j -ésimo regressor e $\mathbb{E}[\cdot]$ é o operador de esperança matemática*. Desta forma, o índice de desempenho \mathcal{I}_j compara o desempenho médio dos modelos contendo o j -ésimo regressor (\mathcal{I}_j^+) com o desempenho dos modelos que não contêm este mesmo regressor (\mathcal{I}_j^-). Como em geral a esperança matemática da equação (2.6) não pode ser calculada de forma analítica, esta é, na prática, feita por estimação, tomando modelos do modelo universo \mathcal{M} e calculando a média amostral, resultando em

$$\mathcal{I}_j^+ = \frac{1}{n_j^+} \sum_{i \in \mathcal{M}_j^+} \mathcal{J}_i^+ \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_j^- = \frac{1}{n_j^-} \sum_{i \in \mathcal{M}_j^-} \mathcal{J}_i^-,$$

onde $\mathcal{M}_j^+ \subset \mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_j^- \subset \mathcal{M}$, representam os conjuntos de todos os modelos que, respectivamente, contêm e não contêm o j -ésimo regressor ϕ_j , com $n_j^+ = \dim \mathcal{M}_j^+$ e $n_j^- = \dim \mathcal{M}_j^-$. Os termos \mathcal{J}_i^+ e \mathcal{J}_i^- representam os respectivos índices de desempenho

*Caso o evento condicional tenha probabilidade nula de ocorrer, a esperança é assumida nula.

para os casos que contêm e que não contêm ϕ_j .

Assumindo que o modelo real definido por f^* , o qual se deseja encontrar, pertence ao conjunto de todas as possíveis estruturas (conjunto universo) \mathcal{M} , deve ser possível achar este modelo explorando o conjunto de modelos \mathcal{M} e tomando os modelos com melhor desempenho. O problema de se achar o modelo real em função de um índice pode ser representado por

$$f^* = \operatorname{argmax}_{\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{M}}} \mathcal{J}(\tilde{f}), \quad (2.7)$$

onde \mathcal{J} é algum[†] índice de desempenho calculado para os modelos candidatos \tilde{f} tomados do conjunto universo não redundante $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}^\ddagger$, oev mesmo por \mathcal{M} .

No sentido de achar a estrutura correta do modelo, ou seja f^* , o algoritmo RaMSS amostra N_p modelos de \mathcal{M} , calcula o desempenho $\mathcal{J}(\tilde{f})$ para cada modelo candidato \tilde{f}_i , com $i = 1, \dots, N_p$ e estima a média sobre todos os modelos que envolvem o regressor ϕ_j . Isto é feito para cada um dos $m = \dim(\mathcal{R})$ regressores do conjunto \mathcal{R} de regressores candidatos.

Considerando que o índice de desempenho \mathcal{J} em (2.7) tenha valores no intervalo $[0, 1]$, i.e. $\mathcal{J}(\tilde{f}) \in \mathbb{R} : \mathcal{J}(\tilde{f}) \in [0, 1]$, seu valor esperado, considerando \mathcal{P}_j a distribuição de probabilidade ao se escolher o regressor ϕ_j como variável aleatória Φ na realização de uma amostra de modelo em $\tilde{\mathcal{M}}$, será dado por

$$\mathbb{E}[\mathcal{J}] = \sum_{\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{M}}} \mathcal{J}(\tilde{f}) \mathcal{P}_j(\Phi = \tilde{f}) \quad (2.8)$$

Se \mathcal{P} é variado sobre todas as possíveis distribuições em $\tilde{\mathcal{M}}$, o máximo de (2.8) é obtido ao se concentrar toda a massa de probabilidade no modelo mais adequado. Com isso, a solução do problema de otimização pode é obtida por

$$\mathcal{P}_j^* = \operatorname{argmax}_{\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{M}}} \mathbb{E}[\mathcal{J}(\Phi)] \quad (2.9)$$

e é tal que $\mathcal{P}_j = 1$. Assim, resolvendo (2.9) seleciona-se o modelo mais adequado, ou modelo real f^* , com a mesma solução de (2.7).

O método RaMSS estima \mathcal{P}_j e, conseqüentemente, o melhor modelo como se segue. A cada iteração, N_p modelos candidatos são montados a partir de m regressores candidatos. A escolha de cada regressor ϕ_j componente de um modelo candidato é feita a partir de um processo de Bernoulli, por uma variável aleatória associada a cada

[†]A definição de \mathcal{J} adotada na proposta original do RaMSS é apresentada mais adiante no texto (vide eqs. 2.6 a 2.6).

[‡]Note que no conjunto universo é comum o aparecimento de modelos redundantes, oev seja, modelos similares que não incluem termos estatisticamente relevantes. Na prática é comum que estes sejam removidos e a amostragem seja realizada em um conjunto reduzido do modelo universo, definido por $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$.

regressor ϕ_j tal que

$$\rho \approx \text{Be}(\mu_j),$$

onde possíveis resultados são: 1, com probabilidade (de sucesso) μ_j de ocorrer; e 0, com probabilidade $(1 - \mu_j)$; sendo $\mu_j \in [0, 1]$, com $j = 1, \dots, m$ e m o número de regressores candidatos. Caso $\rho = 1$, o regressor ϕ_j estará presente no modelo candidato construído, caso contrário, não.

Assume-se que variáveis aleatórias ρ_j são independentes[§] e define-se um vetor $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]^T$ como o vetor de *Probabilidade de Inclusão de Regressor* (RIP). Note que o RIP, ou $\boldsymbol{\mu}$ é quem dita a distribuição de probabilidade \mathcal{P}_j sobre os modelos em $\tilde{\mathcal{M}}$ (ou \mathcal{M}), ou seja, dado um $\boldsymbol{\mu}$ conhecido, a probabilidade de se obter um modelo de estrutura \tilde{f} em qualquer subconjunto de n_θ regressores será

$$\mathcal{P}_j(\tilde{f}) = \prod_{j: \phi_j \in \tilde{f}}^{n_\theta} \mu_j \prod_{j: \phi_j \notin \tilde{f}}^{m-n_\theta} (1 - \mu_j),$$

para qualquer $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{M}}$.

O procedimento é executado de modo que a cada iteração os regressores são escolhidos de acordo com o processo de Bernoulli, onde a probabilidade de escolha μ_j de cada regressor ϕ_j é representada pelo vetor de RIP. O vetor de RIP, $\boldsymbol{\mu}$ é refinado por sucessivas iterações de uma regra de atualização definida como

$$\mu_j(i+1) = \mu_j(i) + \gamma I_j, \quad (2.10)$$

onde γ é um parâmetro de projeto, I_j o índice de desempenho definido em (2.6) e i o índice da iteração do algoritmo.

Depois de algumas iterações é esperado que os desempenhos médios dos modelos que contém os regressores certos fiquem significativamente maiores que os que não contém, fazendo com que os regressores “corretos” sejam mais prováveis de serem incluídos no modelo final. O método não garante que $\boldsymbol{\mu}$ será limitado. Para evitar que os valores do RIP cresçam, ou decresçam indefinidamente, uma saturação dos elementos em uma faixa com valor mínimo maior ou igual a 0, e máxima, menor ou igual a 1, é aplicada pelo algoritmo.

O parâmetro de projeto γ , de (2.10) é escolhido de forma a controlar a velocidade de convergência. Valores maiores tendem a levar a uma convergência mais rápida mas pode também levar a não convergência do método. Para lidar com este problema de

[§]Apesar de existirem resultados na literatura (Bianchi et al., 2016) sugerindo que uma abordagem utilizando distribuição Bernoulli condicionada e multivariada pode resultar em melhorias na acurácia do processo de seleção de modelos, um procedimento inicial adotado neste trabalho considera independência.

convergência, [Falsone et al. \(2015\)](#) propõem um parâmetro adaptativo, dado por

$$\gamma = \frac{1}{10(\mathcal{J}_{\max} - \tilde{\mathcal{J}}) + 0.1},$$

onde \mathcal{J}_{\max} representa o índice de desempenho do melhor modelo e $\tilde{\mathcal{J}}$ representa o índice de desempenho médio na iteração corrente. A proposta do passo adaptativo é de que, se $\tilde{\mathcal{J}}$ está longe do melhor índice de desempenho, γ é feito pequeno de modo a compensar a grande variância provável daquela população de modelos. Porém, se $\tilde{\mathcal{J}}$ é próximo de \mathcal{J}_{\max} , os modelos amostrados têm baixa variância de desempenho, o que indica que o RIP deve ser atualizado em maior valor.

O método RaMSS, como apresentado originalmente pelos autores, utiliza como base para o cálculo do índice de desempenho médio \mathcal{J} , grandezas relacionadas ao MSPE e ao MSSE, definidos na seção 2.5. O índice de desempenho médio é calculado como um valor exponencial destes índices ponderados por um ganho K , utilizado como parâmetro de projeto. Desta forma tem-se,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_p &= e^{-K \cdot \text{MSPE}}, \\ \mathcal{J}_s &= e^{-K \cdot \text{MSSE}}.\end{aligned}$$

Note que \mathcal{J}_p e \mathcal{J}_s terão valores no intervalo $[0, 1]$, onde valores próximos a 1 correspondem a um melhor desempenho, e próximos a 0, a piores desempenhos.

O valor final de \mathcal{J} é calculado como

$$\mathcal{J} = \alpha \mathcal{J}_s + (1 - \alpha) \mathcal{J}_p$$

onde $\alpha \in [0, 1]$ é um parâmetro definido pelo projetista. O parâmetro K define a sensibilidade do índice de desempenho, onde a diferença entre modelos é amplificada para valores maiores de K .

Passadas algumas iterações o espera-se que vetor de RIP, μ , convirja para uma distribuição de equilíbrio. O modelo final será o modelo correto esperado do sistema e será composto pelos regressores associados aos RIP com valores maiores que certo limiar definido pelo projetista. Assumindo-se que o modelo real $f^* \in \mathcal{M}$, este limiar em geral é ajustado para um valor próximo a 1.

O pseudo-código para o método RaMSS descrito é apresentado no Algorithm 1. Na sequência é apresentado um exemplo para identificação de sistema utilizando o

método.

Algorithm 1: RaMSS algorithm

```

 $\mathbf{y}, N_p, m, \mu_{\min}, \mu_{\max}, K, \Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ 
while  $iter < iter_{\max}$  do
   $\mu \leftarrow \mu_0$  for  $i = 1 : N_p$  do                                     // Model Sampling
     $\tau \leftarrow 0$ 
     $\psi(k) \leftarrow []$                                                  // Initialize model
    for  $i = 1 : m$  do
       $r_j \leftarrow \text{Be}(\mu_j)$                                          // Sample from a Bernoulli distribution
      if  $r_j = 1$  then
         $\psi(k) \leftarrow [\psi^T(k) \ \phi_j]^T$ 
         $\tau \leftarrow \tau + 1$ 
    for  $h = 1 : \tau$  do
       $\tilde{\psi}(k) \leftarrow \text{non-redundant}(\psi(k))$                        // Remove redundant terms
       $\hat{\mathbf{y}} \leftarrow \text{Predict}(\tilde{\psi}(k))$ 
       $\mathcal{J}_i \leftarrow e^{-K \cdot \text{MSPE}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})}$ 
  for  $j = 1 : m$  do                                                 // RIP Update
     $\mathcal{J}^+ \leftarrow 0; \mathcal{J}^-; n^+ \leftarrow 0; n^- \leftarrow 0;$ 
    for  $i = 1 : N_p$  do
      if  $\phi_j(k) \in \tilde{\psi}(k)$  then
         $\mathcal{J}^+ \leftarrow \mathcal{J}^+ + \mathcal{J}_i$ 
         $n^+ \leftarrow n^+ + 1$ 
      else
         $\mathcal{J}^- \leftarrow \mathcal{J}^- + \mathcal{J}_i$ 
         $n^- \leftarrow n^- + 1$ 
       $\mathcal{I}_j \leftarrow \left( \frac{\mathcal{J}^+}{\max(n^+, 1)} \frac{\mathcal{J}^-}{\max(n^-, 1)} \right)$ 
       $\mu_j \leftarrow \mu_j + \gamma \mathcal{I}_j$ 
       $\mu_j \leftarrow \max(\min(\mu_j, \mu_{\max}), \mu_{\min})$ 

```

Example 2.6.1 (Identificação de um modelo não-linear utilizando o RaMSS). Como exemplo ilustrativo da utilização do algoritmo RaMSS na escolha de estrutura e identificação de sistemas é usado um modelo de um pequeno aquecedor elétrico, com dissipação variável. A variação da dissipação é resultado do acionamento de um ventilador. O sinal de entrada é a tensão elétrica aplicada ao aquecedor e a saída é o sinal amplificado de um termopar. Mais detalhes sobre este modelo podem ser encontrados em (Aguirre, 2015), seção 16.6.

Figure 2.1: Evolução dos RIPs durante as iterações do algoritmo RaMSS.

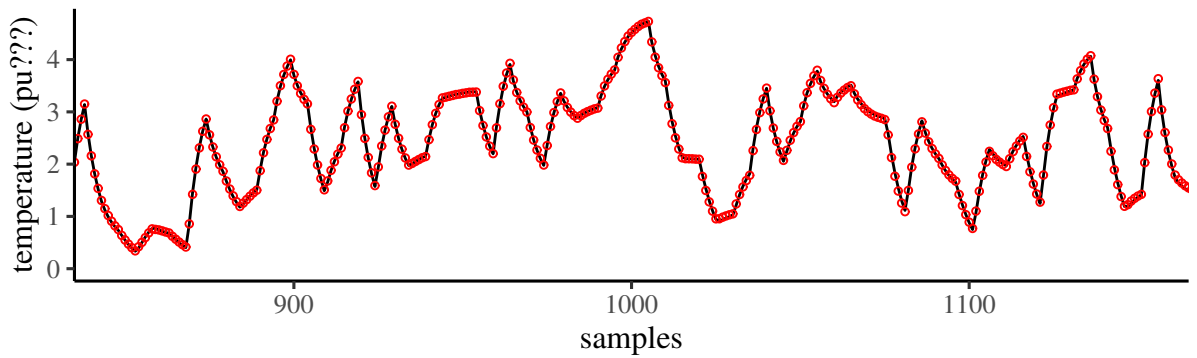


Figure 2.2: Resposta temporal para os dados de amostrados (preto tracejado - -), treinamento (círculos vermelhos \circ), até a iteração 1000, e de validação (vermelho contínuo) a partir da milésima iteração. Para melhor visualização apenas as iterações de 850 a 1150 são mostradas.

2.7 Control System Setup and Notations

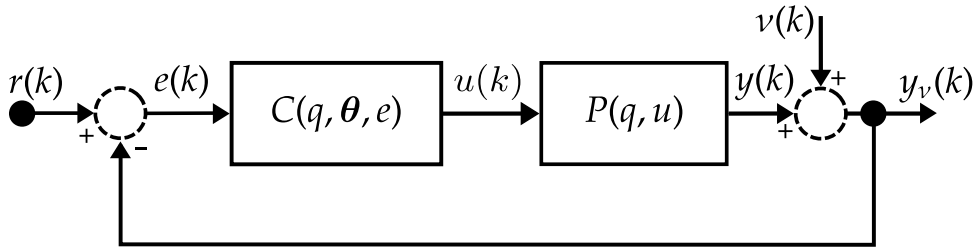
Nesta seção apresenta-se o sistema em malha fechada considerado, definindo as equações para seus componentes e introduzindo a notação utilizada ao longo do texto. Como pretende-se lidar com sistemas não lineares, adota-se a notação apresentada em [Campi and Savaresi \(2006\)](#). Quando lidando com sistemas lineares, porém, esta notação

pode parecer mais pesada que o necessário e uma notação mais usual pode ser adotada. Essas notações, são apresentadas no escopo do sistema de controle considerado e são detalhadas nas próximas subseções.

2.7.1 The control system

Considera-se um sistema de controle clássico do tipo SISO de um grau de liberdade, que pode ou não se encontrar sobre efeito de ruídos no sinal de saída. A Figura 2.3 apresenta o diagrama de blocos deste sistema, onde $C(q, \theta, e)$ representa o Controlador, função do vetor de parâmetros θ e $P(q, u)$, o modelo do processo, ou planta, que pode ser ou não conhecido. Os sinais $r(k)$, $u(k)$, $v(k)$, $e(k)$, $y(k)$, e $y_v(k)$ são, respectivamente, os sinais de referência, controle, ruído, erro rastreamento, saída do processo e, por último, saída com ruído (ou sinal medido).

Corrigir aqui. Usar somente P e C no diagrama e corrigir neste parágrafo



Mudar $e(k)$, $u(k)$, $y(k)$ e y_v , para $e_\theta(k)$, $u_\theta(k)$, $y_{\theta y}(k)$? Terei que mudar no texto também. Vide 3.3.

Figure 2.3: Sistema de controle.

2.7.2 The process

O processo, ou planta, P é um processo não-linear discreto no tempo do tipo SISO, com dinâmica não linear descrita como

$$y(k) = p(y(k-1), \dots, y(k-n_{py}), u(k-1), \dots, u(k-n_{pu})),$$

onde p é uma função representando o processo, n_{py} é o máximo atraso na saída, n_{pu} é o máximo atraso na entrada e k o índice temporal.

Por simplificação, é considerado que o atraso de tempo puro de u para y em P é 1, mas o procedimento pode ser estendido sem problemas para atrasos maiores.

Considera-se P como um mapa não-linear que opera de \mathbb{R}^N para \mathbb{R}^N . Quando sujeito às condições iniciais *i.c.* = $(y(0), \dots, y(1-n_{py}), u(-1), \dots, u(1-n_{pu}))$ e a um sinal de entrada no intervalo $[0, N-1]$ definido como $u(0:N-1) \triangleq [u(0) \cdots u(N-1)]^T$, P gera uma saída dada por

$$y(1:N) = P[u(0:N-1), \text{ i.c. }]. \quad (2.11)$$

Adotam-se as seguintes hipóteses:

Assumption 2.1 (Process smoothness). A função p que representa o processo é suave.

Assumption 2.2 (Uniqueness of the solution). Para quaisquer condições iniciais dadas, se $u_1(0:N-1) \neq u_2(0:N-1)$, então $P[u_1(0:N-1), i.c.] \neq P[u_2(0:N-1), i.c.]$.

A hipótese 2.1 garante a invertibilidade do mapa P . A invertibilidade de P para um sinal de entrada definido no intervalo $[0:N-1]$ implica na invertibilidade do mapa em um intervalo $[0:T]$, com $T \leq N-1$ (Campi and Savaresi, 2004).

2.7.3 The controller

O controlador considerado, assim como o processo, é representado por um modelo não-linear (que pode também ser linear). Para fins de identificação dos parâmetros pelo método VRFT, assunto abordado no capítulo 3, assume-se que uma estrutura (ou classe) é previamente escolhida. Este controlador pode ser descrito como

$$u(k) = c(u(k-1), \dots, u(k-n_{Cu}), e(k), \dots, e(k-n_{Ce})), \quad (2.12)$$

em que n_{Cu} e n_{Ce} são os máximos atrasos no sinal de controle (saída do controlador e no sinal de erro de rastreamento (entrada do controlador).

Assim como para o processo, o controlador é sujeito às condições iniciais $i.c. = u(-1), \dots, u(-n_{Cu}), e(-1), \dots, e(-n_{Ce})$ e quando alimentado com o sinal de erro $e(0:N-1)$, gera o sinal de controle $u(0:N-1)$, que é representado por

$$u(0:N-1) = C[e(0:N-1), i.c.]. \quad (2.13)$$

Neste trabalho, um dos objetivos é selecionar um controlador adequado dada uma classe fixa de controladores pelo método VRFT, conforme abordado no capítulo 3. Essa classe é formada por todos controladores parametrizados por

$$u(k) = c(u(k-1), \dots, u(k-n_{Cu}), e(k), \dots, e(k-n_{Ce}); \theta), \quad (2.14)$$

sendo $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ um vetor de n_θ parâmetros. O controlador parametrizado por θ será aqui indicado por C_θ , e o sinal de controle (2.12) fica na forma

$$u_\theta(0:N-1) = C_\theta[e(0:N-1), i.c.], \quad (2.15)$$

com

$$e(0:N-1) \triangleq r(0:N-1) - y(0:N-1)$$

representando o erro de rastreamento.

A seguinte hipótese é assumida para o controlador:

Assumption 2.3. O controlador c é representado por uma função escalar parametrizada

como em (2.14), e assumido suave, ou de forma simplificada

$$c : \mathbb{R}^{n_{Cu}+n_{Ce}+1+n_\theta} \mapsto \mathbb{R} \text{ é suave.}$$

2.7.4 The feedback system

As interconexões do sistema em malha fechada apresentado na Figura 2.3, juntamente com as equações do processo (2.11) e do controlador (2.13) resultam na relação

$$\begin{aligned} y(1:N) &= P[u(0:N-1), i.c.] \\ &= P[C[e(0:N-1), i.c.], i.c.] \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.7.5 Notation simplification

Por simplificações nas notações, considera-se as condições iniciais da planta e do controlador nulas. Tal requerimento não é necessário, porém só leva a complicações desnecessárias, principalmente na notação. Além do mais, se N é grande o suficiente, as condições iniciais influenciam pouco para casos estáveis. Além disso, os argumentos temporais são omitidos, resultando no uso dos símbolos: u para representar $u(0:N-1)$, r para $r(0:N-1)$, e para $e(0:N-1)$ e y para $y(1:N)$. Note o avanço temporal de y em relação às outras variáveis. Desta forma, representa-se $y(0:N)$ é representado por Dy , sendo D uma matriz nilpotente de deslocamento em atraso definida como

$$D \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, (2.16) pode ser rescrita como

$$y = P[C[r - Dy]] \quad (2.17)$$

Ou, utilizando o controlador parametrizado de (2.15),

$$y_\theta = P[C_\theta[r - Dy_\theta]] \quad (2.18)$$

2.7.6 The control objective

Um elemento fundamental para projeto e análise de controladores na teoria de controle baseada em otimização, como é o caso do VRFT, é o conceito de *desempenho de controle*. Na forma geral, este conceito pode ser expresso como a solução de um

problema definido como

$$\min_{\theta} J(\theta),$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ é um vetor de n_{θ} parâmetros adotado como variável decisão e $J(\theta)$ é uma *função de custo*[¶]. Quanto menor o valor de $J(\theta)$, melhor o desempenho segundo algum critério adotado. Dependendo do objetivo de controle, ou até mesmo por questões de garantias analíticas de estabilidade, diferentes funções de custo podem ser adotadas. Uma abordagem muito comum é escolher uma função de custo baseada na norma-2 quadrática média^{||} na forma

$$\|x(k)\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x(k)]^2 \triangleq \bar{\mathbb{E}}[x(k)]^2 \quad (2.19)$$

em que $x(k)$ representa uma função genérica, N , o número de amostras e $\bar{\mathbb{E}}[\cdot]$, um operador definido como

$$\bar{\mathbb{E}}[x(k)] \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x(k)],$$

que representa o cálculo da média amostral, e será usado no decorrer do texto em substituição ao somatório, por conveniência.

O critério apresentado em (2.19) é conhecido como *critério de desempenho H_2* e é o que se adota neste trabalho e, para fins de objetividade, será o único abordado neste texto.

O critério H_2 , para fins de controle, é definido de acordo com o objetivo de controle. Estes objetivos, em geral, são adotados como: (1) rastreamento de referência, (2) rejeição de ruídos e (3) economia de esforço de controle. Critérios mistos adotando mais de um destes objetivos, podem também ser definidos, como é o caso do (4) composite performance criteria. As próximas seções tratam destes critérios com um pouco mais de detalhes.

The Reference Tracking Objective

Um dos principais objetivos do controle em malha fechada é fazer com que o sinal controlado siga um sinal de referência desejado, de modo que sejam o mais próximo possível. Desprezando-se o efeito do ruído na saída, e considerando um controlador parametrizado, a resposta do sistema em malha fechada é dada por (2.18).

Esse objetivo pode ser traduzido como a minimização de uma função custo dada

[¶]Outros termos também são conhecidos na literatura, como *índice (ou função) de desempenho*, ou ainda, *função objetivo*.

^{||}A norma-2 de um sinal discreto, ou vetor, $x(t)$ é definida como $\|x(t)\| \triangleq \sqrt{\sum_{t=1}^N [x(t)]^2}$. Elevando esse valor ao quadrado temos a norma-2 quadrática, que representa a energia do sinal que, dividida pelo número de amostras, como em (2.19), resulta em sua energia média.

pela norma-2 do erro de rastreamento, na forma

$$J_r^N(\theta) \triangleq \|r - y_\theta\|^2. \quad (2.20)$$

The Reference Model Objective

Um fato bem conhecido na comunidade de controle é que na prática é impossível fazer com que a saída siga perfeitamente o sinal de referência durante todo o tempo, ou seja (2.20) nunca será zero. Para contornar esse fato uma saída é relaxar o objetivo de rastreamento por outro que satisfaça pré-requisitos desejados (como tempo de acomodação, instante de pico, sobressalto máximo, dentre outros), mas que seja menos exigente que a referência original.

Esse novo objetivo é traduzido para um modelo conhecido como *modelo de referência* representado aqui por um mapa de \mathbb{R}^N para \mathbb{R}^N , que mapeia um sinal de referência, digamos, \tilde{r} para um sinal de saída \tilde{y} com um comportamento desejado**.

$$M : \tilde{r} \in \mathbb{R}^N \mapsto \tilde{y} \in \mathbb{R}^N \quad (2.21)$$

Este mapa, a princípio pode ser um modelo não linear, desde que seja suave e invertível. Porém, em geral, por conveniência, é escolhido como um modelo linear, mas ainda sim deve ser invertível. Defini-se a seguinte hipótese:

Assumption 2.4 (Invertibilidade do modelo de referência). M é triangular inferior e invertível.

O fato de M ser adotado como triangular inferior garante que será causal, com atraso puro maior ou igual a 1. Um exemplo de escolha típica para M , para o caso linear, é o filtro

$$M(q) = \frac{b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_{Mr}} q^{-n_{Mr}}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_{My}} q^{-n_{My}}} \quad (2.22)$$

sendo n_{Mr} e n_{My} os máximos atrasos pra a referência e para a saída, respectivamente, e q um operador de atraso. No domínio do tempo, (2.22) corresponde a

$$\tilde{y}(k) = -a_1 \tilde{y}(k-1) - \dots - a_{n_{My}} \tilde{y}(k-n_{My}) + b_1 \tilde{r}(k-1) + \dots + b_{n_{Mr}} \tilde{r}(k-n_{Mr})$$

Uma vez definido o modelo de referência que traduz o comportamento desejado em malha fechada, o novo objetivo de controle é traduzido como

$$J_{RM}^N(\theta) \triangleq \|y_\theta - \tilde{y}\|^2 = \|P[C_\theta[\tilde{r} - Dy_\theta]] - M[\tilde{r}]\|^2 \quad (2.23)$$

sendo $\tilde{y} = M[\tilde{r}]$ o sinal de saída do modelo de referência desejado, quando sobre efeito de um sinal de referência r . Tal critério é conhecido como *critério do modelo de referência*.

**o símbolo \sim enfatiza que estes sinais são para o modelo de referência.

The Noise Rejection Objective

Outro objetivo comum em sistemas de controle é minimizar o efeito do ruído no sinal de saída. O sinal de saída devido somente a atuação do sinal de ruído no processo pode ser escrito como

$$y_{\theta v}(\theta) \triangleq S_{\theta}[v] = v - P[C_{\theta}[Dy_{\theta v}],$$

em que $v \triangleq v(0:N)$ representa o sinal de ruído e S_{θ} um mapa de ruído para a saída do processo, ou seja $M : v \mapsto y_{\theta v}$, que, para o caso linear, é também conhecido como função sensibilidade. Quando analisada a magnitude deste sinal em função de alguma norma, tem-se o critério de desempenho de rejeição de ruído $J_v^N(\theta)$ que, utilizando a norma-2, é dado por

$$J_v^N(\theta) \triangleq \|y_{\theta v}\|^2 = \|S_{\theta}[v]\|^2.$$

Assim como no caso do rastreamento, não é possível a eliminação completa do efeito do ruído e um relaxamento neste critério é desejável, pelos mesmos motivos. Neste caso é definida uma função sensibilidade desejada S_M^{++} e adota-se o critério

$$J_{RMv}^N(\theta) \triangleq \|S_{\theta}[v] - S_M[v]\|^2.$$

The Economy of Control Effort Objective

Um objetivo comum no projeto de controladores, principalmente na área de controle ótimo, é a minimização do esforço de controle. Para minimizar o sinal de controle o seguinte índice pode ser definido:

$$J_u^N(\theta) \triangleq \|u(k)\|^2, \quad (2.24)$$

sendo $u(k)$ o sinal de controle. Porém este índice não deve ser usado sozinho, uma vez que $J_u^N(\theta) = 0$ implicaria em $u \equiv 0$. Portanto o que se faz é utilizar-se de uma combinação deste índice, com outros, por exemplo, com o objetivo de rastreamento de referência, resultando em

$$J_{\lambda}^N = J_{RM}^N(\theta) + \lambda J_u^N(\theta)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$ representa um parâmetro de ajuste. Ao se utilizar de controladores baseados em modelo de referência, como o caso do VRFT a ser visto no 3, um efeito de economia de esforço de controle pode ser obtido ao se escolher um modelo de referência adequado. Portanto, neste trabalho a inclusão do índice (2.24) na função de custo é desconsiderado.

⁺⁺O índice M é utilizado para manter a analogia com o índice utilizado pelo modelo de referência para o caso de rastreamento.

The Composite Performance Objective

Outro objetivo, mais realista que o de rastreamento de referência, é o *composite performance*, que objetiva tanto reduzir o erro de rastreamento quanto rejeitar efeitos do ruído na saída. Este critério é dado por

$$J_T^N(\theta) \triangleq \|y_{\theta v} - \tilde{y}\|^2,$$

em que, diferentemente de \tilde{y} em (3.1), o sinal $y_{\theta v} = P[C_\theta[r - y_\theta]] + S[v]$ depende do ruído. O critério final será a soma dos dois critérios anteriores, uma vez que a referência e o ruído são sinais independentes estatisticamente e pode ser escrito como

$$J_T^N(\theta) = \|P[C_\theta[r - Dy_\theta]] - M[r]\|^2 + \|S[v]\|^2.$$

2.8 The Ideal Controller

Considerando o sistema realimentado apresentado em (2.17), e assumindo a invertibilidade de P e que M é triangular inferior, resolvendo (2.17) para C , é possível calcular o controlador ideal, que resulta nos parâmetros ótimos para C_θ , desde que C_θ tenha mesma estrutura (ou pertença à mesma classe) do controlador ideal. Este controlador ideal é definido como:

$$C_0 \triangleq P^{-1}(I - MD)^{-1}M,$$

onde I é a matriz identidade e C^i é o controlador ideal.

Quando o C_0 é usado na malha fechada, o mapa de r para y é dado por M , ou seja, $y = M[r]$

Para o caso linear SISO (Single Input Single Output), se o modelo do processo é conhecido e considerando que este é de fase mínima, o controlador ideal C_0 pode ser escrito na forma de função de transferência como

$$C_0(z) = \frac{M(z)}{P(z)(1 - M(z))}, \quad (2.25)$$

em que $P(z)$ e $M(z)$ representam respectivamente as funções de transferência do processo e do modelo de referência.

Note que, se o processo é de fase não mínima, devido a zeros fora do círculo unitário no plano- z , a inversa de $P(z)$ em (2.25) resulta em instabilidade do sistema. Soluções para este problema têm sido apresentadas há décadas para projetos MBC, como por exemplo regras para sintonia de PID, como a desenvolvida por Skogestad (2003). Uma abordagem no mais recente, no âmbito do DDC, é apresentada por Campestrini et al. (2011).

Virtual Reference Feedback Tuning

The *Virtual Reference Feedback Tunning* method, or simply VRFT, proposed by [Campi et al. \(2002\)](#), is a procedure that aims to design closed loop controllers based only on data sampled from the process, without the need for a model that describes that process itself. Thus, it is classified as a data-based control method, or DDC.

The main objective of this method is to adjust the parameters of a controller, defined by a parametric function like (2.14), using the process sampled data only, so that the output signal of the controlled process, $y_\theta(k)$ behaves as close as possible to the output signal \tilde{y} of a previously defined reference model as defined in (2.21). To reach this objective, VRFT aims to optimize the tracking error by minimizing a performance index $J_{RM}^N(\theta)$ as stated in (3.1), rewritten here for convenience:

$$J_{RM}^N(\theta) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k, \theta) - \tilde{y}(k)]^2 = \|y_\theta - \tilde{y}\|^2, \quad (3.1)$$

where N represents the number of data samples, $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N]^T \in \mathbb{R}^N$ a vector of parameters and k a temporal index. The signal $y_\theta(k) \in \mathbb{R}$ represents the output of the system controlled with the parametrized controller C_θ , and $\tilde{y}(k) \in \mathbb{R}$ are the output of a reference model M , both subject to the same reference signal.

To achieve the objective of minimizing (3.1), [Campi et al. \(2002\)](#), for the linear case, and [Campi and Savaresi \(2006\)](#), for the non-linear case, show that, under certain conditions, presented in sequence, when minimizing a cost index defined as

$$J_{VR}^N(\theta) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [u(k) - C_\theta(q, \theta)\bar{e}(k)]^2, \quad (3.2)$$

the index $J_{RM}(\theta)$ defined in (3.1) is also minimized.

Notation: The symbol “tilde” will be adopted on the variables to indicate that they represent data obtained, or calculated, from the data collection experiment, used for the purpose of identifying the controller parameters.

According to the notation adopted, $\tilde{u}(k)$ in (3.2) represents the input signal applied to the process during data collection, $C(q, \theta)$ the controller model to be adjusted and

$\tilde{e}(k)$ is the so-called *virtual error*, defined as

$$\tilde{e}(k) = \tilde{r}(k) - \tilde{y}(k), \quad (3.3)$$

where $\tilde{r}(k)$ is a signal called *virtual reference*, obtained by filtering the output $\tilde{y}(k)$ by the inverse of the reference model M defined in (2.21) and in (2.22) for a linear case. So, for a linear reference model, the virtual reference can be defined as

$$\tilde{r}(k) = M^{-1}(q)\tilde{y}(k). \quad (3.4)$$

The term, $\tilde{y}(k)$ in (3.3) and (3.4), represents the sampled output signal used in the experiment.

Figure 3.1 shows a block diagram with the steps used in the experiment to obtain the controller parameters via the VRFT procedure.

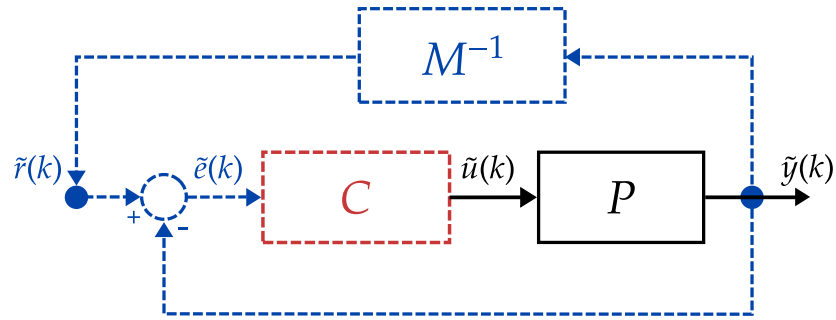


Figure 3.1: Experiment to obtain the data used to identify the controller parameters by the VRFT method: real data in *black solid lines* (—), virtual data in *blue dashed lines* (---) and the controller to tune, in *red dashed block* (---).

The term “virtual” is adopted in the reference \tilde{r} and in the tracking error \tilde{e} signals to emphasize that none of these signals are physically available, but only calculated for controller design purposes. The dashed lines (in blue) in Figure 3.1 represent these virtual data, and the red block represents the controller under which the vector of parameters θ need to be adjusted.

The condition for $J_{RM}(\theta)$ and $J_{VR}(\theta)$ reach their minimum values for the same parameter solution θ are presented in sequence, right after some definitions and Assumptions that are important for the rest of the chapter.

3.1 Initial Considerations

This Section presents some definitions and Assumptions used in the rest of the chapter.

Assumption 3.1 (The Process). It is assumed that the process is the one presented in Section 2.7.2 and therefore, it is a nonlinear process, assumed to be smooth (Assumption 2.1) and invertible (Assumption 2.2).

Definition 3.1 (Ideal Controller). The ideal controller is defined as in the Section 2.8 and is represented by the map C^* , which maps $\tilde{e} \mapsto \tilde{u}$. For the linear case, the notation $C^*(q, \theta)$ is used for temporal representations or $C^*(z, \theta)$ for transfer functions.

Considering that a structure for the controller is previously chosen (i.e. if it is linear or not, how many parameters are considered, or what regressors are considered in construction), it is said that this structure is defined by a \mathcal{C} class. That is, the \mathcal{C} class represents all possible controllers using the same structure.

Assumption 3.2 (Matched control). The ideal controller belongs to control model class considered, i.e. $C^*(q) \in \mathcal{C}$, or, equivalently

$$\exists \theta_0 : C(q, \theta_0) = C^*(q).$$

Assumption 3.3 (Noise free). The system is considered to be not affected by noise.

Unless otherwise noted, this chapter assumes that there are no measurement noise, that is, $v(k)$ is null and $y_v(k) = y(k)$ (see Figure 2.3).

Assumption 3.4 (The asymptotic counterpart). The measured signals $\tilde{u}(k)$ and $\tilde{y}(k)$ are considered realizations of stationary and ergodic stochastic processes so, when the number of available data grows ($N \rightarrow \infty$), the following holds*:

$$J_{VR}^N(\theta) \rightarrow J_{VR}(\theta) = \mathbb{E} [(\tilde{u} - C_\theta[\tilde{e}])^2],$$

so, J_{VR} is the *asymptotic counterpart* of J_{VR}^N and for the rest of text J_{VR} will be used in place of J_{VR}^N for analysis purposes.

Assumption 3.5 (Linear parametrized controller). The controller is assumed to be linear in the parameters, as (2.14), and will be represented by the map C_θ , or by $C_\theta(q, \theta, \tilde{e})$, depending on the context. If it is linear, $C_\theta(q, \theta)$ is used as a function of time, or $C_\theta(z, \theta)$ when in the form of a transfer function.

Note that, from Assumption 3.5, we can write the controller $C_\theta(q, \theta, \tilde{e}) = \varphi^T \theta$, with φ being a vector of regressors as discussed in Section 2.4. Thus, considering the Assumption 3.4, we have

$$J_{VR}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\tilde{u}(k) - \varphi^T(k) \theta]^2 = \|\tilde{u}(k) - \varphi^T(k) \theta\|^2 \quad (3.5)$$

where Ψ is xx the regressors matrix, as defined in the Section 2.4, equation 2.3.

*The operator $\mathbb{E}[\cdot]^2$ represents the expected value operator of a quadratic random variable: $\mathbb{E}[\cdot]^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\cdot)^2$.

Definition 3.2 (SR q process (Bazanella et al., 2012)). A quasi-stationary process is said to be sufficiently rich of order q – or simply SR q – if its spectrum has at least q nonzero components.

Definition 3.3 (Persistence of excitation (Bazanella et al., 2012)). A quasi-stationary vector φ is said to be persistently exciting if $\bar{\mathbb{E}}[\varphi(k)\varphi(k)^T] > 0$

Assumption 3.6. The signal \tilde{r} used in the excitation of process P is persistently exciting (definition), which implies being SR q (definition).

colocar uma Assumption que esta definição é satisfeita? Acho que basta a PoE que a SR q já se satisfaz.

3.2 The Ideal Control Design Problem – The Matched Control

As already mentioned, the proposal of the VRFT procedure is to show that when solving the problem of minimizing $J_{VR}(\theta)$, that is, finding the vector of parameters θ that leads to this solution, the cost function related to the reference model output tracking error, $J_{RM}(\theta)$ is also minimized with the same parameters, i.e.

$$\theta_0 = \underset{\forall \theta \in \mathbb{R}_\theta^n}{\operatorname{argmin}} J_{VR}(\theta) = \underset{\forall \theta \in \mathbb{R}_\theta^n}{\operatorname{argmin}} J_{RM}(\theta).$$

Considering that *all* the Assumptions in the previous section are satisfied, Campi et al. (2002) shows that this is possible for the linear case, as well as for the nonlinear case (Campi and Savaresi, 2006). They define the following theorem:

Theorem 3.2.1 (Campi and Savaresi (2006)). *If θ_0 gives the perfect tracking, i.e. $\|y_{\theta_0} - M[\tilde{r}]\|^2 = 0$, then, θ_0 is a minimizer of $\|C_\theta[\tilde{e}] - \tilde{u}\|^2$.*

Proof:

As $\|y_{\theta_0} - M[\tilde{r}]\|^2 = 0$, it is possible to deduce that

$$y_{\theta_0} = \tilde{y}. \quad (3.6)$$

As y_{θ_0} is the closed loop response of the plant with the controller C_{θ_0} , and \tilde{y} the plant P response from an input \tilde{u} ,

$$y_{\theta_0} = P[C_{\theta_0}[\tilde{r} - Dy_{\theta_0}]] \quad \text{and} \quad \tilde{y} = P[\tilde{u}].$$

Considering the Assumption 2.2, it is possible to conclude that

$$C_{\theta_0}[\tilde{r} - Dy_{\theta_0}] = \tilde{u}. \quad (3.7)$$

From (3.6),

$$\tilde{r} - Dy_{\theta_0} = \tilde{r} - D\tilde{y} = \tilde{e}$$

which, replacing in (3.7), results in

$$C_{\theta_0}[\tilde{e}] = \tilde{u},$$

which implies in $\|C_{\theta}[\tilde{e}] - \tilde{u}\|^2 = \|\tilde{u} - \tilde{u}\|^2 = 0$.

Using the $J_{VR}(\theta)$ index in place of $J_{RM}(\theta)$ has the great advantage of not requiring the knowledge of a model for the process, which classifies VRFT as a DDC strategy. Another great advantage is that, when considering controllers linear in the parameters, the $J_{VR}(\theta)$ cost function becomes quadratic, which facilitates its minimization and allows to find its global minimum. The Figure 3.2 exemplifies this case. While $J_{RM}(\theta)$ may have local minimums that make it difficult to locate the global minimum, $J_{VR}(\theta)$, as long as linear in the parameters, results in a function with only a well-defined global minimum.

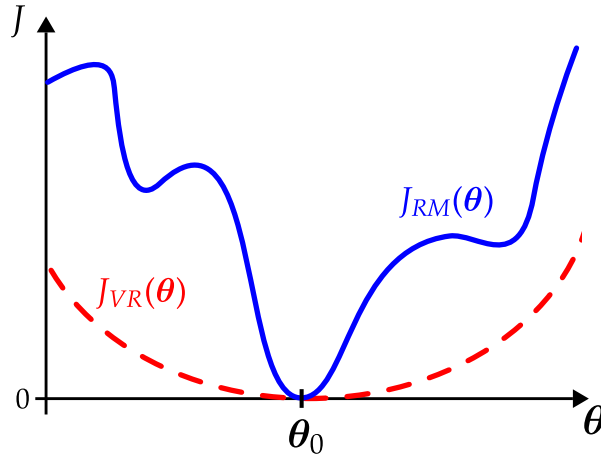


Figure 3.2: Typical cost functions for $J_{VR}(\theta)$ (---) and $J_{RM}(\theta)$ (—).

Note that the Theorem 3.2.1 is valid if the Assumption 3.2 is satisfied. In a general case, the structure, or class of C^* is unknown, which ends up leading to the choice of a structure for C_{θ} belonging to a class \mathcal{C} such that Assumption 3.2 is not satisfied, i.e. $C^* \notin \mathcal{C}$. A great contribution of VRFT is the choice of filters that, applied to the sampled signal \tilde{u} and the predicted signal $C_{\theta}[\tilde{e}]$, bring the estimated value of θ closer to the optimum value θ_0 . This subject is discussed in more detail in the Section 3.4.

3.3 Controller Parameter Identification

It is considered again that *all* the hypotheses of the Section 3.1 are satisfied, and that the data acquisition and calculation of virtual values experiment, as described at the beginning of the chapter and illustrated by Figure 3.1, is applied in order to obtain the necessary data. Thus, the vector of parameters that minimizes $J_{VR}(\theta)$, as (3.5), can be

estimated by

$$\boldsymbol{\theta} = \left[\sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}(k)^T \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}(k) \tilde{u}(k). \quad (3.8)$$

Note that (3.8) is the same equation presented in (2.4), however the latter is presented in a matrix form, and the former in the form of a summation. Therefore, the solution can be written in terms of the ordinary least squares algorithm (OLS) or its derivatives. Attention is paid to the fact that, in this chapter, the estimated parameter vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ of (2.4) is considered only as $\boldsymbol{\theta}$ for reasons of simplification of notation.

When the Assumption 3.3 is not satisfied, that is, the sampled is corrupted by noise, the OLS method may not be adequate due to the possible polarization of the estimator parameters caused by these noises (Aguirre, 2015). A common approach used to reduce the effects of this polarization, within the scope of VRFT, is to make use of the instrumental variable estimator, or VI (Young, 1970). Although, for the purposes of this qualification, noise effects on measurements have not yet been analyzed, and it is assumed that the estimators used are given by OLS estimators.

Another possibility to deal with polarization is to use the extended least squares estimator, or ELS (Ljung, 1999; Aguirre, 2015) in place of OLS, which, as the VI estimator, has the property of reducing polarization (at the cost of an increase in variance). This approach was adopted by Retes and Aguirre (2019) to structure selection in process model identification with good results. We intend to adapt the methodology for controller structure selection and parameter identification in this work. However, it is still in the study phase and will be presented as a future proposal in Chapter 5.

3.4 The Unmatched Control and the Filter Selection

As discussed at the end of the Section 3.2, if the Assumption 3.2 is not satisfied, i.e. $C^* \notin \mathcal{C}$, the Theorem 3.2.1 no longer applies. Note that this is a recurring situation in practice, since there is, frequently, few information about the process.

However, Campi and Savaresi (2006) presents a filter that, when applied to the data used to find the minimizer of $J_{VR}(\boldsymbol{\theta})$, produces well-tuned controllers, even when the controller belongs to a class \mathcal{C} other than the C^* class, as long as this class is not “too far”, that is, the controller should not be too under-parameterized with respect to the control objective.

To achieve the mentioned objective, an increased and filtered cost function is assumed, given by

$$J_{VR}(\boldsymbol{\theta}^+) \triangleq \|F[C_{\boldsymbol{\theta}^+}[\tilde{e}]] - F[\tilde{u}]\|^2$$

where F represents the mentioned filter and:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}^+ &\triangleq [\boldsymbol{\theta}^T \tilde{\theta}]^T, \quad \tilde{\theta} \in \mathbb{R}; \\ C_{\theta^+} &\triangleq C_{\theta} + \tilde{\theta} (C^* - C_{\Delta}),\end{aligned}$$

where $C_{\Delta} = C_{\theta}$ is computed for $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$. It can be verified that:

- C^* é obtido for $\boldsymbol{\theta}_0^+ \triangleq [0^T \ 1]^T$;
- $\{C_{\theta}\}$ it is obtained by imposing $\tilde{\theta} = 0$.
- C_{Δ} represents the part of C^* that cannot be explained by the chosen controller family.

A new expanded cost function for the reference model is defined as

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{\theta}^+) &\triangleq \|y_{\theta^+} - M[\tilde{\mathbf{r}}]\|^2 \\ \text{with } y_{\theta^+} &= P[C_{\theta} + [\tilde{\mathbf{r}} - D y_{\theta^+}]].\end{aligned}$$

The ideal control objective is to minimize $J_{MR}(\boldsymbol{\theta})$, or

$$\boldsymbol{\theta}_0^+ = \underset{\boldsymbol{\theta}^+ \in \mathbb{R}^{n_{\theta^+}}}{\operatorname{argmin}} J_{MR}(\boldsymbol{\theta}^+).$$

[Campi and Savaresi \(2006\)](#) prove that the objective of minimizing $J_{MR}(\boldsymbol{\theta}^+)$ can be achieved with good approximation by selecting a filter that guarantees equality between expansions in Taylor series up to the term of degree 2 for $J_{MR}(\boldsymbol{\theta}^+)$ and $J_{VR}(\boldsymbol{\theta}^+)$. By doing this expansion (see [Section A.2](#)) it is possible to show that one must have

$$\left. \frac{\partial^2 J_{VR}(\boldsymbol{\theta}^+)}{\partial \boldsymbol{\theta}^{+2}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0^+} = \left. \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta}^+)}{\partial \boldsymbol{\theta}^{+2}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0^+}. \quad (3.9)$$

If this equality is guaranteed, $J_{MR}(\boldsymbol{\theta}^+)$ and $J_{VR}(\boldsymbol{\theta}^+)$ will be close each other when they are smaller than one, and consequently the parameters that minimize $J_{VR}(\boldsymbol{\theta}^+)$, minimize $J_{MR}(\boldsymbol{\theta}^+)$. For this to happen, the following theorem is defined:

Theorem 3.4.1 ([Campi and Savaresi \(2006\)](#)). *If*

$$F = (I - MD) \left(\left. \frac{\partial P[u]}{\partial u} \right|_{\tilde{u}} \right) \quad (3.10)$$

then (3.9) is satisfied.

The proof of the Theorem [3.4.1](#) is presented in the [Section A.2](#) of the [Appendix A](#).

A problem presented by the filter [\(3.10\)](#) is the dependence on the knowledge of a model for the plant. Possible solutions can be obtained using an approximate identified

model, which causes the method to lose the characteristic that qualifies it as a DDC system. However, the expression $(\partial P[\mathbf{u}]/\partial \mathbf{u})|_{\tilde{\mathbf{u}}}$ is not used for design, only as a filter for the data used in the parametric estimation and an accurate identification is not required. Furthermore, according to [Campi and Savaresi \(2006\)](#), in many cases, disregarding the derivative of the process and rewriting the filter equation simply as $F = (I - MD)$ results in good results, although there is no guarantee of good approximation.

To use the filter, it is sufficient that the sampled signal, $\tilde{\mathbf{u}}$ and the signal $C_\theta[\tilde{e}]$ are filtered as follows:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_f &= F[\tilde{\mathbf{u}}], \\ \tilde{C}_f &= F[C_\theta[\tilde{e}]].\end{aligned}$$

When the controller is linear in the parameters, we can write

$$F[C_\theta[\tilde{e}]] = F[\Psi_C \boldsymbol{\theta}] = F[\Psi_C] \boldsymbol{\theta} \implies \tilde{C}_f = F[\Psi_C] \boldsymbol{\theta}.$$

From the filtered data ($F[\tilde{\mathbf{u}}_f]$ and $F[\tilde{C}_f]$), the VRFT procedure is applied in order to minimize the filtered cost function

$$J_{VR_f}(\boldsymbol{\theta}) = \|F[\Psi_C] \boldsymbol{\theta} - F[\tilde{\mathbf{u}}]\|^2,$$

and the vector parameter that minimizes this cost function can be found by solving

$$F[\Psi_C]^T (F[\Psi_C] \boldsymbol{\theta} - F[\tilde{\mathbf{u}}]) = 0,$$

where Ψ_C represents the regressors matrix, a function, in general, of the virtual error \tilde{e} , the input signal of the process $\tilde{\mathbf{u}}$ and possibly a vector of residues. The equation 3.4 can be solved, for example, by the OLS estimator or by non-polarized estimators for noisy cases. The solution will be the vector of estimated parameters $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, that makes the matrix of regressors not correlated with the residual error of the identified controller model ($F[\Psi_C] - F[\tilde{\mathbf{u}}]$).

Falar um pouco sobre o modelo de referência? (uma nova secao) Problema do atraso de transporte e o problema de se exigir mais do que se pode.

3.5 Application Examples

Example 3.5.1. (Controller Parameter identification for a Linear System usinv VRFT procedure)

To exemplify the VRFT procedure, a simple case is presented, where the intention is to identify a controller for a second order linear system, according to the VRFT procedure. The adopted model is given by a “artificial” system, taken from [Wei and Billings \(2008\)](#), and described in the following difference equation, presented as an ARX

model:

$$y_k = -1.7y_{k-1} - 0.8y_{k-2} + u_{k-1} + 0.81u_{k-2} + \eta_k, \quad (3.11)$$

where, $u_{k-i} \in \mathbb{R}$ e $y_{k-i} \in \mathbb{R}$, represent, respectively, the input and output signals for a delay i in respect to k ; k is the time index; and η_k represents the noise in the output signal, which for the purposes of this example, is considered null, i.e. $\eta_k = 0$. It is considered that the controller must be such that the output of the controlled system follows a reference trajectory imposed by a first order linear system reference model, with the smallest possible error. So, the reference model is chosen So, the reference model is chosen as

$$M(z) = \frac{1 - A}{(z - A)z^{d-1}} \quad (3.12)$$

where d is the desired pure time delay, $A = e^{-T_s/\tau_M}$ a quantity related to the desired time constant for the closed loop system, given by τ_M , and T_s the sampling time used in the sampling (or decimation) process.

From the application of an input signal $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N]^T$, as a step shape to the process, where $\tilde{u} = u$ (see (3.11)), the response $\tilde{y} = [y_1, \dots, y_N]^T$ is observed. The figure 3.3 shows the temporal evolution of these signals (first two top graphs). The

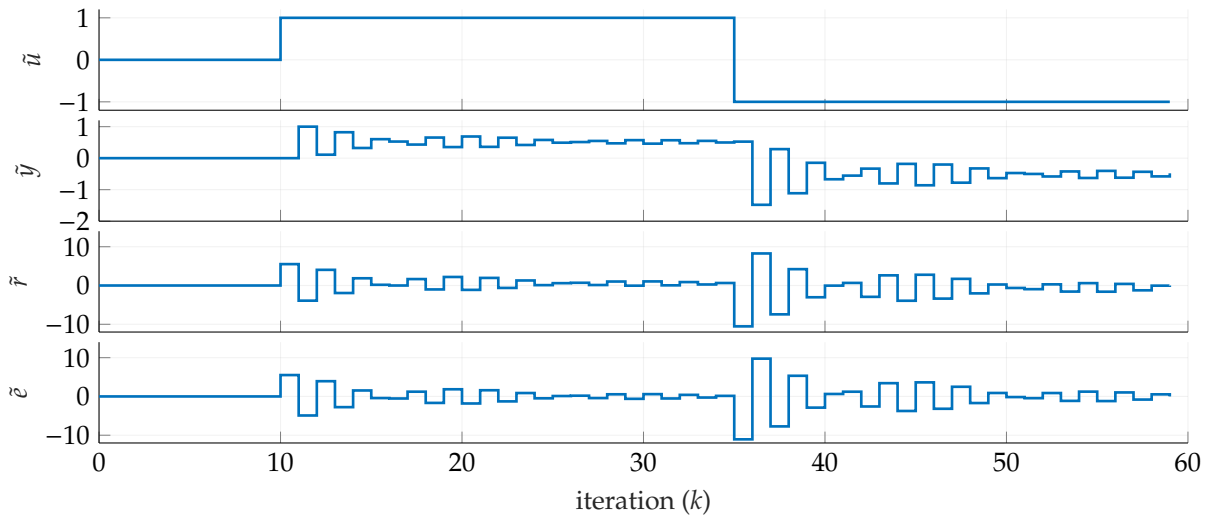


Figure 3.3: Temporal evolution of the signals: input of process \tilde{u} ; output of process \tilde{y} ; the calculated virtual reference \tilde{r} ; and the calculated virtual error \tilde{e} ; considering the top to bottom graphs sequence.

process (3.11) can be written in the form of a transfer function as

$$P(z) = \frac{b_{p1}z + b_{p2}}{z^2 + a_{p1}z + a_{p2}}, \quad (3.13)$$

where $a_{p1} = 1.7$, $a_{p2} = 0.8$, $b_{p1} = 1$ and $b_{p2} = 0.81$ are the process parameters, given in (3.11).

Form $\tilde{\mathbf{y}}$ collected, and the reference model (3.12), considering $d = 1$, the virtual reference could be expressed as (3.4), in the transfer function forma

$$\tilde{\mathbf{r}}_k = M^{-1}(q)\tilde{\mathbf{y}} = \frac{q - A}{1 - A}\tilde{\mathbf{r}}_k. \quad (3.14)$$

In (3.14), q (time shift operator) is adopted instead of z (z -transform variable) to emphasize that we are dealing with time responses. This procedure will be adopted throughout this text when needed.

Note that (3.14) is a non causal system. However, since $\tilde{\mathbf{y}}$ is available in advance, in batch, the calculation can be performed. With $\tilde{\mathbf{r}}$, the virtual error $\tilde{\mathbf{e}}$ can be easily calculated from (3.3), as

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \tilde{\mathbf{r}}_k - \tilde{\mathbf{y}}_k$$

Figure 3.3 shows this *virtual* values (2 bottom ones) calculated over the sampled data $\tilde{\mathbf{u}}$ and $\tilde{\mathbf{y}}$ (2 top ones).

As the process in this example is considered known, the ideal controller $C^*(z)$ can be calculated according to (2.25), replacing (3.12) and (3.13), i.e.

$$\begin{aligned} C^*(z) &= \frac{M(z)}{P(z)(1 - M(z))} \\ &= \frac{(1 - A)z^2 + (Aa_{p1} - a_{p1})z - a_{p2} + Aa_{p2}}{b_{p1}z^2 + (b_{p2} - b_{p1})z - b_{p2}} \\ &= \frac{0.1813z^2 + 0.3082z + 0.145}{z^2 - 0.19z - 0.81} \end{aligned}$$

which can be rewritten in the time domain as:

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1 - A}{b_{p1}}e_k + \frac{Aa_{p1} - a_{p1}}{b_{p1}}e_{k-1} + \frac{Aa_{p2} - a_{p2}}{b_{p1}}e_{k-2} - (b_{p2} - b_{p1})u_{k-1} + b_{p2}u_{k-2} \\ &= \begin{bmatrix} e_k & e_{k-1} & e_{k-2} & u_{k-1} & u_{k-2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^* \end{aligned} \quad (3.15)$$

with ideal parameters given by $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta_1^* \ \theta_2^* \ \theta_3^* \ \theta_4^* \ \theta_5^*]^T$. Using the parameters of the process (see (3.12) and (3.11)), assuming a constant time of $\tau = 5$ and a sample time of $T_s = 1$, we have $A = 0.8187$ and

$$\boldsymbol{\theta}^* = \begin{bmatrix} 0.181 & 0.308 & 0.145 & 0.19 & 0.81 \end{bmatrix}^T. \quad (3.16)$$

If the ideal parameters are not known, they can be estimated using the sampled data, $\tilde{\mathbf{u}}$ and $\tilde{\mathbf{y}}$ instead of \mathbf{u} and \mathbf{y} in (3.15) and, by constructing a matrix of regressors as, for example (it's not the only choice), given by

$$\boldsymbol{\Psi}^T = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 & \dots & \varphi_k & \dots & \varphi_N \end{bmatrix}$$

where $\varphi_k^T = [\tilde{e}_k \ \tilde{e}_{k-1} \ \tilde{e}_{k-2} \ \tilde{u}_{k-1} \ \tilde{u}_{k-2}]$ is the vector of regressors. Using parameter estimation techniques such as the OLS method, it is possible to estimate θ with good approximation. If the excitation signal is persistently exciting, and there is no correlated noise affecting the output, when the number of samples N tends to infinity, i.e. $N \rightarrow \infty$, θ tends to θ^* . In this example, noise is disregarded and θ is estimated by

$$\hat{\theta} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi \tilde{u}$$

Performing the procedure described for the data presented, the following cases are considered for controller design:

case A (Matched Case) A controller in which the vector of regressors φ has the same structure as the ideal controller is considered. That is, $\mathcal{C}^* \in \mathcal{C}_A$, where \mathcal{C}^* is the class of the ideal controller and \mathcal{C}_A , the controller class of the case A;

case B (Unmatched Case) It is considered a sub-parameterized controller, with vector of regressors given by $\varphi_B^T = [\tilde{e}_k \ \tilde{e}_{k-1} \ \tilde{e}_{k-2} \ \tilde{u}_{k-1}]$, i.e. $\mathcal{C}^* \notin \mathcal{C}_B$;

case C (PID Unmatched Case) It is considered a sub-parameterized controller with a vector of regressors built according to the structure of a PID controller, defined as

$$\begin{aligned} C_C(q) &= \left(K_p + K_i \frac{q}{q-1} + K_d \frac{q-1}{q} \right) \tilde{e}_k \\ &= \left(K_p + K_i \frac{q}{q-1} + K_d \frac{q-1}{q} \right) (\tilde{r}_k - \tilde{y}_k) \\ &= \left(K_p + K_i \frac{q}{q-1} + K_d \frac{q-1}{q} \right) \left(\frac{q-A}{1-A} - 1 \right) \tilde{y}_k \\ &= \left(K_p + K_i \frac{q}{q-1} + K_d \frac{q-1}{q} \right) \frac{q-1}{1-A} \tilde{y} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_k}{1-a} & \frac{\tilde{y}_{k+1}}{1-a} & \frac{\tilde{y}_{k+1} - 2 * \tilde{y}_k + \tilde{y}_{k-1}}{1-a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

The vector of regressors, in this case, is described by

$$\varphi_C^T = \left[(\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_k)/(1-a) \quad (\tilde{y}_{k+1})/(1-a) \quad (\tilde{y}_{k+1} - 2 * \tilde{y}_k + \tilde{y}_{k-1})/(1-a) \right]$$

Note that, although the regressor in case B has fewer terms than the regressor in case A, the controller belongs to the class of controller A, since it can be written by

$$C_C(z) = \frac{(Kd + Ki + Kp)z^2 + (-2Kd - Kp)z + Kd}{z^2 - z}$$

however, the controller class in case A is broader (class B is contained in class A). By the same procedure of identification described earlier, the following parameters are

obtained for the 3 cases:

$$\begin{aligned}\theta_A^T &= [0.181 \quad 0.308 \quad 0.145 \quad 0.19 \quad 0.81] = \theta^* \\ \theta_B^T &= [0.168 \quad 0.166 \quad 0.039 \quad 0.988] \\ \theta_C^T &= [-0.202 \quad 0.351 \quad 0.0229]\end{aligned}$$

Figure 3.4 shows the temporal response of the closed-loop system with the controllers obtained for the 3 cases, together with the signal from the reference model. It is considered a square reference signal and that a disturbance of magnitude 0.5 is applied at the output, at time $k = 75$. The figure also shows the answer for a fourth case to be discussed ahead.

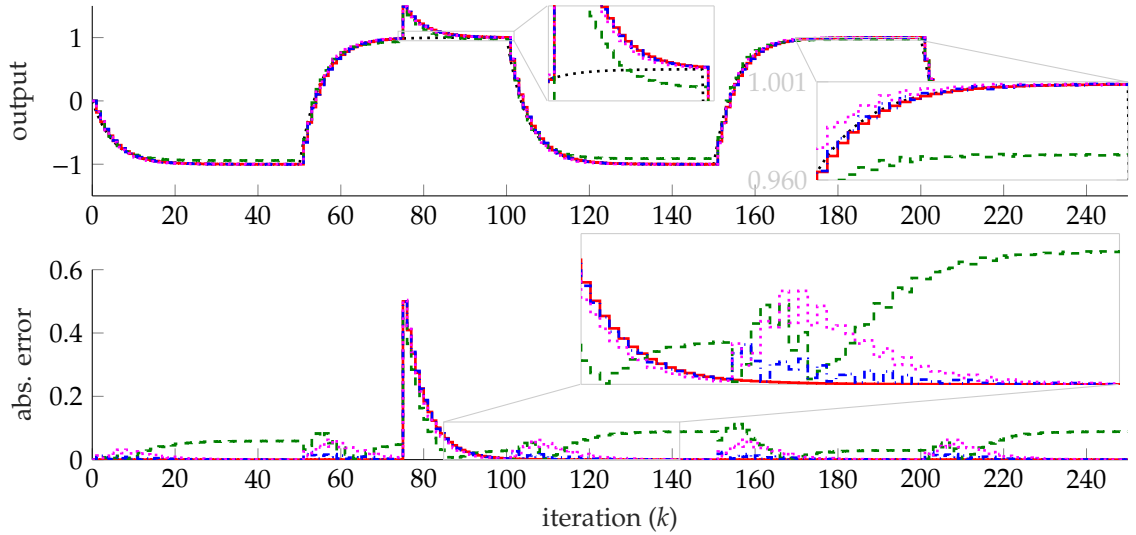


Figure 3.4: Closed-loop system response to a square reference signal (upper graph) and absolute error (lower graph) for: case A (—); case B (---); case C (-.-.); and case D (.....). The response of the reference model is represented by (.....) in the upper graph.

Note that in Case A, because it has the same structure and parameters as the ideal controller, it has an identical response to the reference model (except, obviously, at the transient period after the application of the disturbance). Differently, Case B presents some tracking error, even on steady state. This can be explained by the fact that the controller model was not able to reproduce an integration effect. This effect can be observed when the sum of the coefficients of the terms in \tilde{u} that make up the regressor, results in 1. In this case, the coefficient of \tilde{u}_{k-1} (only regressor in \tilde{u}) is $0.988 \approx 1$, but not exactly 1. Case 3, due to the way in which the regressor is built, a restriction is imposed on the controller structure in such a way that an integrator effect is forced, which allows the controller to be expressed with only 3 regressors. The result, as can

be seen in Figure 3.4, is the elimination of tracking error in steady state, even under the effect of external disturbance. It is emphasized here that, although the integration effect is not present in case B, this can be imposed, for example, with the use of methods such as *Restricted Least Squares*, or CLS (Draper and Smith, 1998). Case D presented below considers this modification applied in case B, restricting the coefficient of \tilde{u}_{k-1} to be equals one and imposing an integrator in controller. The time response is also shown in Figure 3.4.

case D In this case, it is considered that the CLS procedure is adopted after the parameter estimation in case B. The $c = S\theta_B$ restriction is assumed, with $c = 1$ and $S = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$. The new parameter vector θ_D is calculated by (Draper and Smith, 1998):

$$\theta_D = (\Psi^T \Psi)^{-1} \tilde{y} - (\Psi^T \Psi)^{-1} S^T \left[(\Psi^T \Psi)^{-1} S^T \right]^{-1} (S\theta_B - c)$$

where $\Psi^T = [\varphi_B(1) \ \varphi_B(2) \ \dots \ \varphi_B(N)]$ represents the regressor matrix, and $\varphi_B(k) = [\tilde{e}_k \ \tilde{e}_{k-1} \ \tilde{e}_{k-2} \ \tilde{u}_{k-1}]^T$, with $k = 1, \dots, N$, is the vector of regressors at instant k .

As can be seen in Figure 3.4, the error in steady state is eliminated, as expected.

3.5.1 Final Considerations of the Chapter

A benefit of specifying the controller as in case C of the Example 3.5.1, is that it starts from a priori knowledge (i.e., it is known that the controller must have an integrator). For many cases, where is desired to tune a pre-existing controller, such as controllers in the PID family, this can be very useful. This fact has great appeal in industrial applications.

However, there are cases where a precise control is needed. Especially for strongly non-linear systems, where a controller with an adequate pre-established structure (which may be non-linear) can be difficult to obtain. In this sense, the main focus of this work is on the selection of this appropriate structure with no (or some) prior knowledge. Only from sampled data. As will be seen later, in Chapter 4, a method for searching the appropriate controller structure by a randomized approach is proposed. In this case, it will be necessary to easily generate a sufficiently large universe of models. For this purpose, representing these controllers using polynomial structures like NBRX (or NBRMBX) models, generically, as done in case B of Example 3.5.1, instead of predefined structures as done in case C, is an advantage. In order to take advantage of known or desired information about the controller, a proposal of this work is to include this information in the identification process in a posteriori way, using, for example, the CLS estimator, as shown in case D of the example.

As will be seen, the VRFT method will be one of the main tools used for the framework proposed in chapter 4.

Randomized Controller Structure Selection

In this chapter, proposals for the design of DDC controllers, with regard to the choice of controller structure are presented. The methodology used, as well as the preliminary results obtained in a first stages of this research are presented.

In this research, focus has been given to the study and development of structure selection techniques for the model of feedback controllers in a DDC design fashion. The intention is, at first, in the scope of non-linear control systems, to adapt known techniques of structure selection in the area of systems identification to deal with the control case, where the system to be identified becomes the controller. To achieve these objectives, it was decided, to use polynomial models to represent the controllers, initially with NARX structures. This choice is convenient due to the structural flexibility characteristic and the ability of these models to describe non-linear systems (Pearson, 1999; Martins et al., 2013).

As mentioned in Chapter 2, one of the main steps in the system identification procedure from data is the step of choosing the model structure. Works that aim to help on this task have been proposed, as is the case of the papers published by Baldacchino et al. (2012, 2013) and Falsone et al. (2014, 2015), in which a random approach is used in order to select the best candidates among the possible regressors in the formation of the model to be identified.

Vou colocar aqui mais referências neste sentido, de seleção de estruturas

More recently, Retes and Aguirre (2019) extended the RaMSS strategy for choosing NARMAX model structures, which take into account the effect of noise on signals in order to reduce the polarization in parametric estimates.

In the scope of controller design based on data, more specifically by the VRFT method, in which the controller parameters are adjusted by conventional identification techniques such as OLS, ILS, IV, among others, the same problem of choosing the model structure occurs, with the difference that the model now represents the controller, and no longer the process. Therefore, analogies must be able to be made intended to use the RaMSS method in order to extend it for the purpose of identifying the most suitable structure for the controller.

In this sense, the present work has been directed to the study of the possibilities and consequences of using these technologies for control purposes, aiming to choose the most suitable controller structure.

Pretendo colocar um paragrafo aqui comentando o que será apresentado no restante do capítulo.

4.1 Methodology

A terminar... Vou mexer no início e fim desta seção ainda, enquanto estiver traduzindo.

Visando atingir o objetivo final de se utilizar uma estratégia para estrutura e identificação paramétrica de controladores a partir de uma abordagem DDC, pretende-se neste trabalho, fazer uso das duas metodologias abordadas em capítulos anteriores: o VRFT, para sintonia de parâmetros do controlador e o RaMSS, para seleção da melhor estrutura do controlador. A partir de do estudo e adaptações de trabalhos anteriores (Retes and Aguirre, 2019), tem-se desenvolvido um algoritmo capaz de unir as duas estratégias com o objetivo de auxiliar tanto na seleção de estruturas, quando na sintodia de controladores não-lieares (ou lineares). O algoritmo tem servido de framework para estudo e validação da abordagem proposta, a partir de simuações numéricas. Neste sentido, parte dos esforços da pesquisa tem se voltado para a implemetação numérica deste framework. Em uma primeira etapa, foi analisado o comportamento do algoritmo na identificação de modelos de processos, a partir do algoritmo RaMSS, como proposto originalmente. Alguns dos resultados de validação desta etapa são apresentados no Capítulo 2, sob a forma do Exemplo 2.6.1.

Uma vez validado o funcionamento do algoritmo, o método VRFT, discutido no Capítulo 3 é acrescentado ao processo, de forma que o desempenho do RaMSS em selecionar estruturas para um controlador possa ser avaliado na prática. Nesta etapa, o algoritmo RamSS, utilizado no Capítulo 2 é ligeiramente modificado para lidar com a esimação paramétrica via VRFT, para primeiros testes de projeto de controladores. Neste cenário se espera alguns primeiros resultados, sem maiores compromissos com bons desempenhos, mas de são de grande valia para análise e comparação das modificações propostas. Alguns destes resuldados são apresentados pelos exemplos da seção 4.2 a seguir, mais especificamente no exemplo ??.

Como abordado no Capítulo 3, sob certas condições, o controlador pode ser identifi-cados por procedimentos tradicionais de identificação de sistemas pelo método VRFT. Caso as condições necessárias não sejam satisfeitas (vide a Assumption 3.2 – matched control) um filtro pode ser projetado de forma que a minimização do índice de custo relativo aos sinais de entrada e saída do controlador, dado por $J_{VR}(\theta)$ resulte também na minimização do índice de custo $J_{MR}(\theta)$ relativo ao erro de rastreamento de um modelo de referência. Esta relação é garantida pelo filtro desde que a estrutura do modelo não seja muito “distante” da estrutura ideal, i.e. desde que não seja muito subparametrizada.

Uma proposta é utilizar o procedimento RaMSS para tentar identificar a estrutura ideal para o controlador, ou pelo menos uma estrutura próxima que gere bons resultados ao se utilizar o procedimento VRFT. A identificação desta estrutura é feita a partir de

Talvez colocar o Título como: “The RaCSS Methodology”?

dados colhidos sob a abordagem VRFT. Na tentativa de validar a proposta simulações são feitas em diferentes cenários. Em um primeiro cenário o procedimento RaMSS é aplicado a um processo linear onde seu modelo e o modelo do controlador ideal são previamente conhecidos. O intuito aqui é analisar o comportamento do procedimento na seleção de regressores candidatos a um eventual controlador. Uma análise ao estilo Monte Carlo é aplicada ao processo em 2 casos: no primeiro, o procedimento é realizado sem influência de ruídos nos dados utilizados; no segundo, ruídos são acrescentados aos dados no intuito de simulação de um ambiente mais realista. O Exemplo 4.2.1 analisa estes casos.

O procedimento RaMSS foi originalmente proposto para lidar com identificação de processos, e não controladores. A atualização do vetor de probabilidades para inclusão dos regressores (RIPs) é feita baseando-se em índices de desempenho visando avaliar a qualidade de predição do modelo. Esta predição é feita sobre dados de treinamento, utilizando uma versão exponencial do MSSE, e possivelmente, no intuito de aumentar a robustez, sobre dados de validação (free run simulation) por meio de uma versão exponencial do MSSE. No entanto, para fins de controle, tais índices podem não ser os melhores. Principalmente o índice baseado no MSSE, que exige maior custo computacional sob a proposta de promover melhoras na robustez do modelo identificado. O efeito é uma melhor predição do sinal de saída do do modelo identificado, mesmo quando excitado com sinais diferentes daqueles usados na identificação. Apesar de carecer de mais estudos, a princípio este índice não parece trazer muitos benefícios quando utilizado para fins MSS do controlador, uma vez que o intuito final, no projeto de um controlador, é fazer com que o sinal de saída do processo (e não do controlador), tenha um comportamento desejado.

Neste sentido, propõe-se adaptações ao método RaMSS original visando objetivos mais adequados a MSS de controladores. Uma modificação estudada, é a substituição da versão exponencial do MSSE, dada por $J_s = e^{-K \cdot MSSE}$, por uma que leve em conta o rastreamento do sistema em malha fechada, um dos principais objetivos do controlador. Este novo índice é definido como

$$J_r = e^{-K \cdot MSTE},$$

onde $MSTE$, é o erro médio quadrático de rastreamento, definido como

$$MSTE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_{rm}(k) - y(k))^2.$$

Uma vez que a escolha de estrutura é feita pelo método RaMSS modificado, incorporando elementos da estratégia VRFT, e que o intuito é a seleção de estrutura e parâmetros para controladores, batiza-se, aqui, esta estratégia de *Randomized Controller Structure Selection*, ou RaCSS.

Resultados preliminares do uso deste índice são apresentados nesta qualificação.

Os Exemplos 4.2.2 e 4.2.3 apresentam alguns destes resultados e uma análise geral é feita no Capítulo 5.

colocar a referencia correta aqui.

batizar o método de RaCSS.

Ressalta-se que os resultados apresentados são preliminares e conclusões concretas ainda não puderam ser apresentadas. No Capítulo 5, propostas para continuidade do trabalho, como inclusão de informações auxiliares ao procedimento, objetivando incorporar características previamente desejadas ou conhecidas para o controlador, assim como possivelmente o uso de estratégias de aprendizado por reforço, no intuito de reduzir o custo computacional devido ao uso de informações da malha fechada do controlador são apresentadas.

Por fim, discussões a respeito de estabilidade, convergência, polarização e robustez são apresentadas, ainda não em um contexto de garantias, mas como conjecturas de passos que pretende-se aprofundar na sequência da presente pesquisa.

4.2 Preliminary Results

Example 4.2.1 (Second order Linear System – continued.). Consider the 2nd-order linear system describe in Example 3.5.1:

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2}.$$

According to the VRFT strategy (Chapter 3), one must first define a class of allowable controllers \mathcal{C} , containing the desired controller structure, and define a reference model that expresses the desired close loop system's behavior.

In this example, we want to analyze the use of the RAmSS algorithm directly, without modifications, in order to find the best structure for a controller designed from the VRFT strategy. In order to examine the behavior of the RaMSS Algorithm in finding the best set of regressors, we proceed as follows.

A feasible reference model is defined, that is, with a relative degree equal to or greater than that of the process. For simplicity, a 1st order model with the same relative degree of the process is chosen, as Example 3.5.1, given by the transfer function

$$T_d(z) = \frac{1 - A}{z - A},$$

The parameter adopted here is the same as Exemple 3.5.1, i.e. $A = -T_s/\tau_d = 0.8187$. The ideal controller, represented by an ARX model, will be given by the structure composed of the regressors presented in (3.15), represented here by

$$u_k = \theta_0 e_k + \theta_1 e_{k-1} + \theta_2 e_{k-2} + \theta_3 u_{k-1} + \theta_4 u_{k-2},$$

and will have the parameters shown in (3.16), described here as

$$\theta^* = [\theta_0^* \quad \theta_1^* \quad \theta_2^* \quad \theta_3^* \quad \theta_4^*]^T = [0.181 \quad 0.308 \quad 0.145 \quad 0.19 \quad 0.81]^T.$$

Using the RaMSS algorithm, as discussed in the section 2.6, the procedure is performed for 2 cases:

case A the universe set \mathcal{M} is taken as all possible 3rd degree non linear models formed by the monomials up to 4 delays for input \tilde{e}_k (virtual error) and output \tilde{u}_k (virtual process input) collected data. No noise is considered in this case.

case B the same case as case A, but now with a noise given by a gaussian distribution, i.e. $v \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, where $\mu = 0$ is the mean, and $\sigma = 0.1$ is the standard deviation.

The simulation parameters for the 2 cases are shown in the table 4.1.

Table 4.1: Parameters for simulating the RaMSS algorithm of the example 4.2.1

| Caso | o | n_e | n_m | N_p | N_i | K_J | γ |
|------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 1 | 1 | 7 | 4 | 100 | 100 | 1 | 0.1 |
| 2 | 2 | 7 | 4 | 100 | 100 | 1 | 0.1 |

MEXER NESTA TABELA AINDA! Valores estão errados. Já os modifiquei. Definir parâmetros, etc. Colocar os mais essenciais por aqui e os menos, no appendice.

Em uma primeira análise o procedimento RaMSS é aplicado a um conjunto de dados de 700 amostras, obtido via procedimento VRFT, em que o filtro do VRFT é considerado unitário, i.e os dados não são filtrados. O mesmo conjunto de dados é aplicado para os 2 casos. A cada iteração escolhe-se aleatoriamente, por uma processo de Bernoulli, 100 modelos candidatos a serem analisados.

Applying the procedure in both cases, the following controllers are obtained, for a specific realization:

$$\begin{aligned} u_1(k) &= 0.193u_1(k-1) + 0.805u_1(k-2) + 0.001u_1(k-3) \\ &\quad + 0.181e_1(k) + 0.307e_1(k-1) + 0.1441 \\ u(k) &= 0.751u_2(k-1) + 0.241u_2(k-2) - 0.33u_2(k-3) + 0.322u_2(k-4) \\ &\quad + 0.174e_2(k) + 0.197e_2(k-1) + 0.048e_2(k-2) + 0.049e_2(k-3) + 0.0591 \end{aligned}$$

where the index subscribed to the variables represent the respective cases. The evolution of RIPs during a typical execution is shown in 4.1.

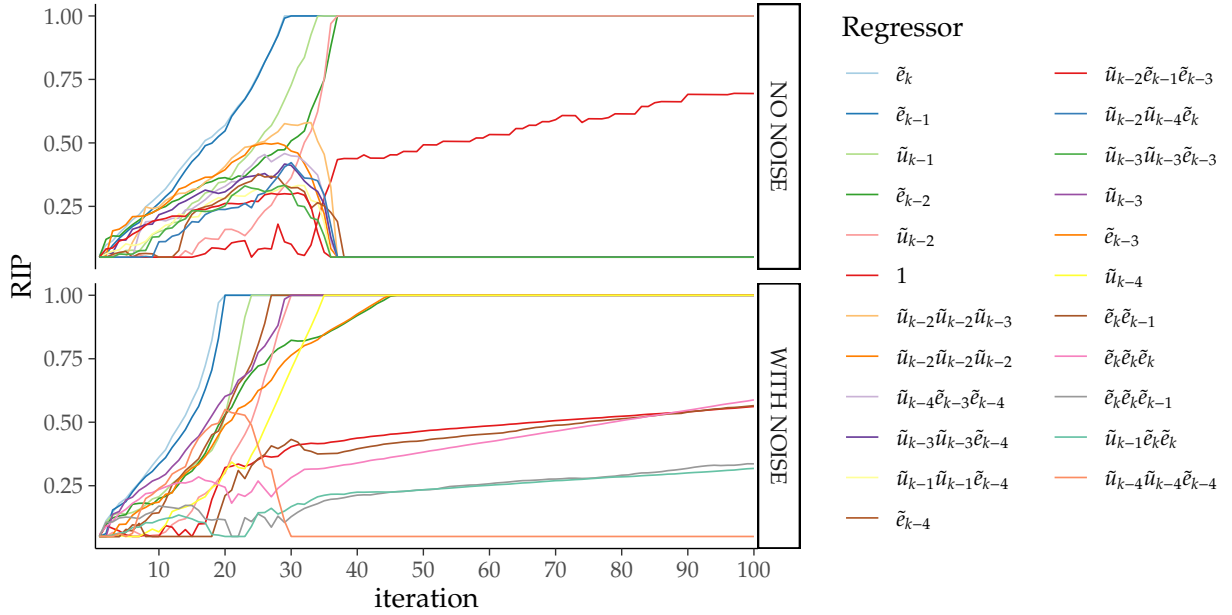


Figure 4.1: Typical evolution of RIPs for choosing regressors for case 1 and 2.

A figura 4.2 mostra a resposta temporal para os 2 casos.

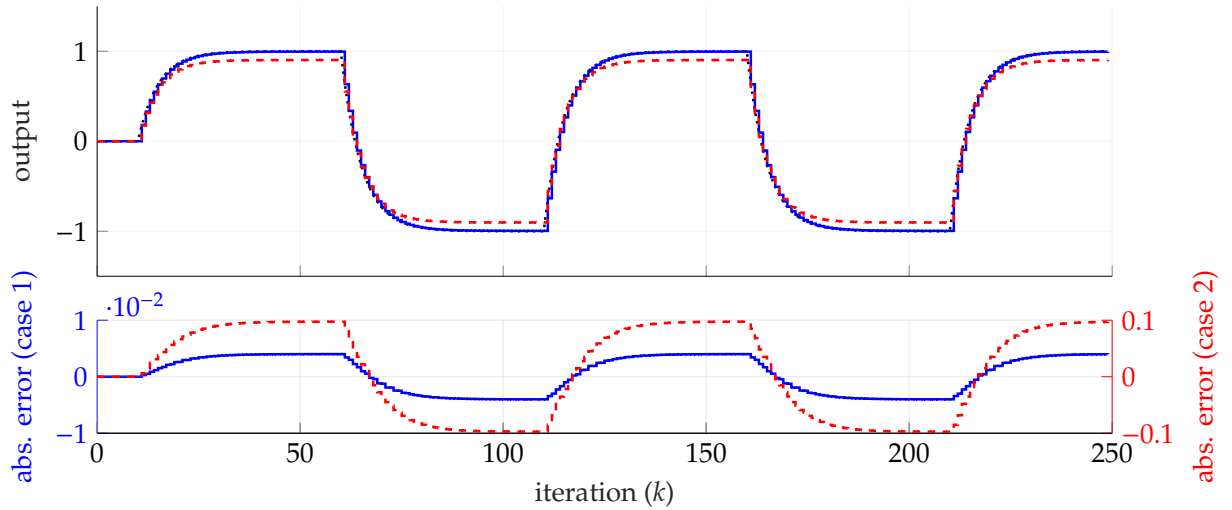


Figure 4.2: Resposta do sistema em malha fechada (gráfico superior) e respectivos erros absolutos (gráfico inferior) utilizando os controladores identificados no caso A (—) e no caso B (---). Os sinais de referência (·····) e de reposta do modelo de de referência (·····) são mostrados no gráfico superior.

Ainda em construção, por enquanto só coloquei alguns dos gráficos que irei utilizar. Comparações, com tabelas comparando resultados do RaCSS com o ERR também serão ainda colocados. Logicamente, com devidas análises.

Example 4.2.2 (RaCSS aplicado a um sistema linear de 2^a ordem).

Neste exemplo aplico o “RaCSS” ao mesmo sistema de 2a ordem do exemplo anterior, mas agora usando informação do erro de rastreamento no cálculo dos RIPs.
 Por enquanto estão somente os gráficos, ainda falta análise e algumas tabelas comparativas com ERR.

Evolução dos RIPs para um caso típico:

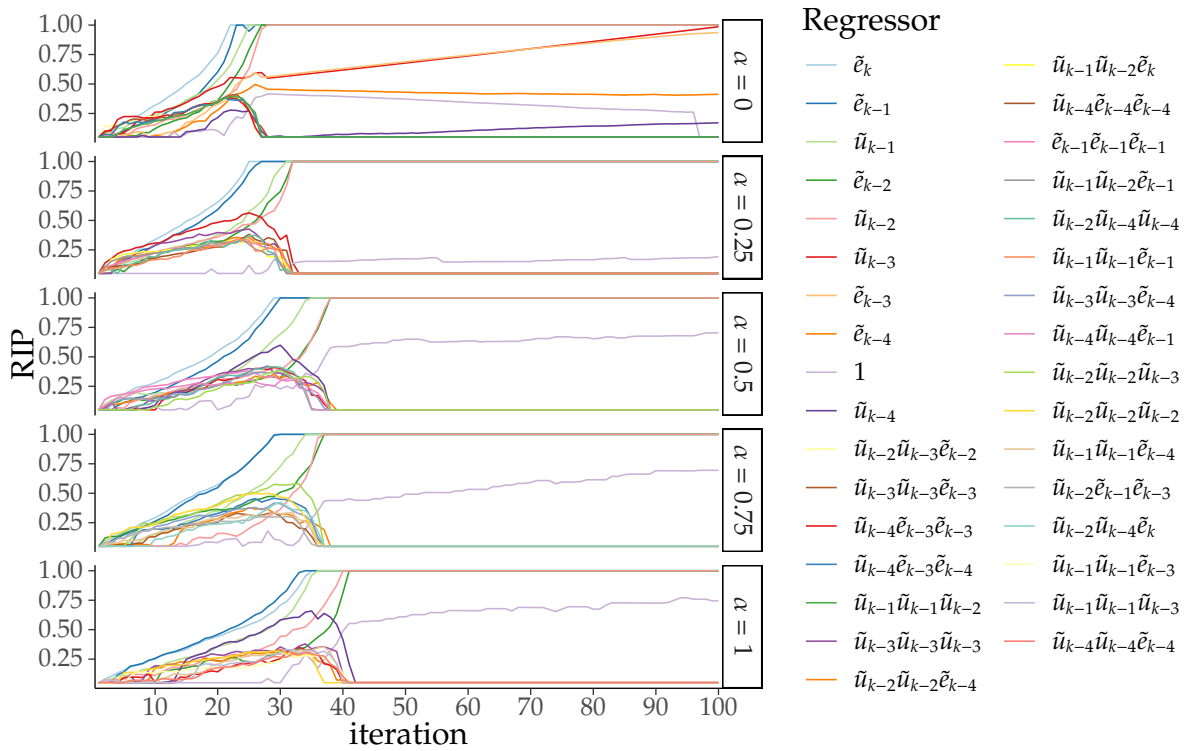


Figure 4.3: Evolução dos RIPs para diferentes valores da parâmetro α considerando dados sem ruído. (Caption ainda será mudada.)

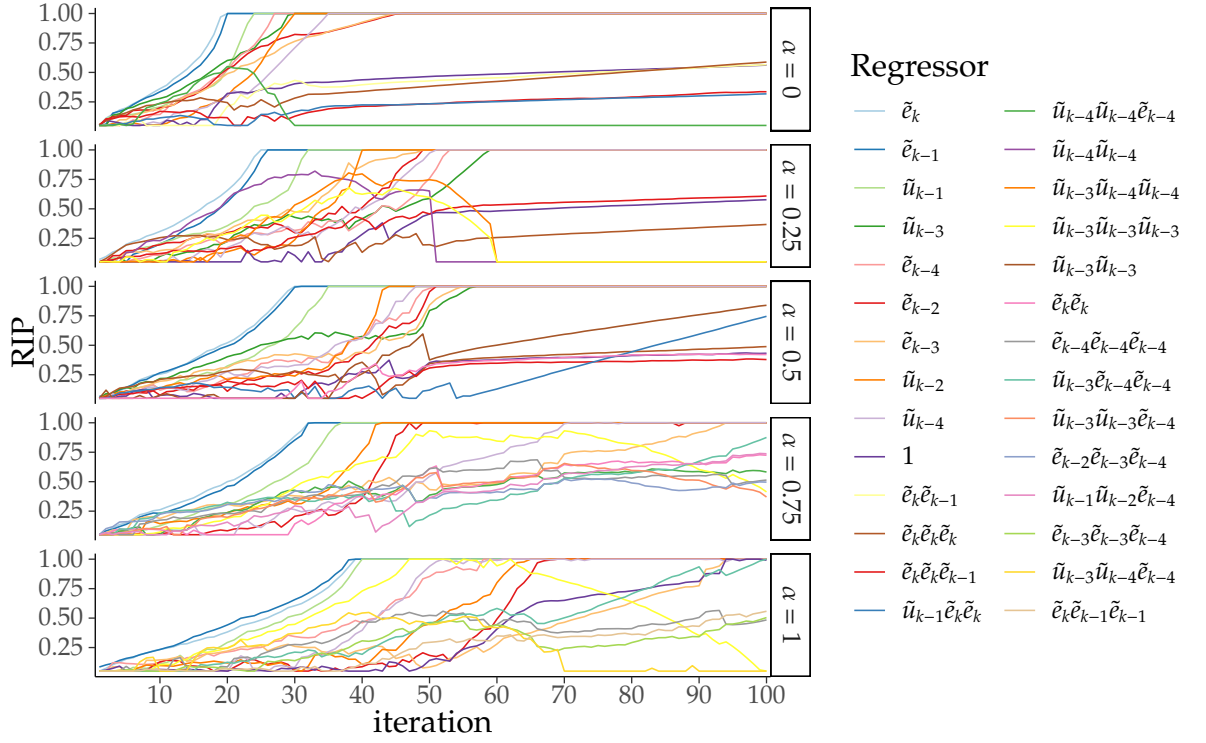


Figure 4.4: Evolução dos RIPs para diferentes valores da parâmetro α considerando dados COM ruído. (Caption ainda será mudada.)

Convergência dos regressores para 100 simulações para cada parâmetro α diferente:

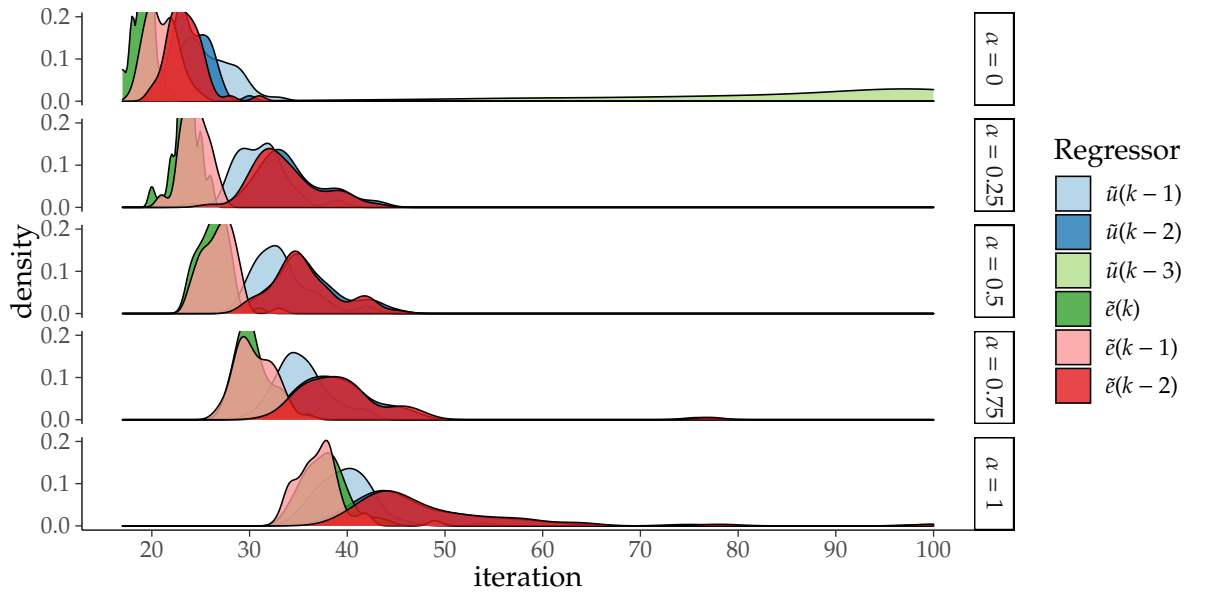


Figure 4.5: Densidades de probabilidades para os regressores escolhidos para diferentes valores de α , caso sem ruído. (Caption ainda será mudada.)

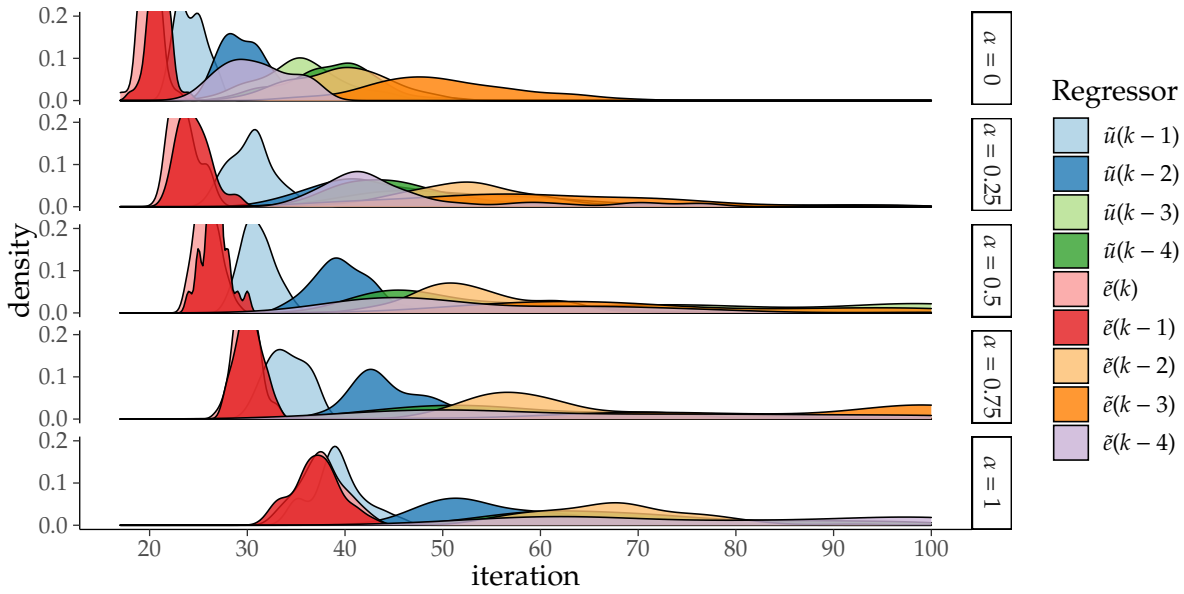


Figure 4.6: Densidades de probabilidades para os regressores escolhidos para diferentes valores de α , caso COM ruído. (Caption ainda será mudada.)

Example 4.2.3 (RaCSS aplicado a um sistema não-linear).

Neste exemplo a ideia é avaliar o comportamento do “RaCSS” a um sistema não-linear. Tomei um modelo de um aquecedor com dissipação variável adotado no seu livro. A ideia é apresentado o modelo no exemplo 2.6.1 da seção 2.6, no sentido do RaMSS para identificar o modelo. Depois aproveito o mesmo aqui para identificar o controlador. Por enquanto estão somente os gráficos, ainda falta análise e algumas tabelas comparativas com ERR.

Conclusões

5.1 Considerações finais

5.2 Propostas de continuidade

A principal foco desta pesquisa tem sido o estudo e desenvolvimento de metodologias de projeto de controladores DDC, com foco especial na seleção de estruturas do controlador com o uso da técnica VRFT.

Em particular, o método RaMSS, tem se mostrado promissor para a aplicação desejada. Esse método faz apelo às técnicas exploratórias que recorrem a buscas aleatórias ao estilo Monte Carlo, mas com mecanismos de seleção que reduzem drasticamente o custo computacional, evitando uma busca exaustiva, ao mesmo tempo em que tenta garantir uma seleção adequada de modelos. Apoiado nesta técnica, algumas adaptações têm sido estudadas no sentido de lidar com a identificação e seleção de estrutura do controlador e não mais do processo.

Neste sentido, lida-se atualmente com questões que, apesar de estarem sendo abordadas no decorrer da pesquisa, resultados mais concretos ainda não foram alcançados. Porém, as experiências e estudos têm-se mostrado promissoras, no sentido que, do ponto de vista do autor, bons resultados podem ser alcançados. Na sequência apresentam-se itens específicos a serem abordados, que podem ser tomados como propostas de continuidade:

Uma primeira proposta diz respeito ao estudo do uso de índices de desempenho que melhor representem a realidade do controlador ao se atualizar os termos de RIPs. Como já abordado, originalmente o RaMSS utiliza medidas como o MSPE e MSSE para esta atualização. Para fins de modelagem de processos físicos, onde muitas vezes a predição do comportamento entrada-saída é o alvo, tais índices se mostram adequados [Falsone et al. \(2015\)](#). Porém, ao se abordar o problema da identificação do controlador, a redução do erro de predição, seja ele de passo a frente, como no caso do MSPE ou de simulação livre, como no caso do MSSE, nem sempre é o indicativo de que haverá erro de redução de rastreamento do modelo de referência. E, para sistemas de controle, é este erro de rastreamento se torna o principal alvo em sistemas de controle. Um estudo sobre o uso deste índice está em andamento. O que se tem observado é que minimizar o MSPE diretamente pela estratégia RaMSS apesar de muitas vezes apresentar bons resultados, não dá garantias que o rastreamento ótimo é alcançado, i.e. aquele em

conforme resultados apresentados na seção ???

não esquecer de explicar o porque destes resultados mesmo quando minimizando o MSPE, que no caso de con-

que o erro de rastreamento médio quadrático é mínimo.

Como alternativa, propõe-se o uso de algum índice que leve em conta o resultado em malha fechada ao se aplicar os controladores intermediários identificados e selecionados pelo procedimento. Algo parecido tem sido usado no que diz respeito a identificação de processos em que o erro quadrático médio de simulação (MSSE) é utilizado em substituição ao MSPE (Aguirre et al., 2010). Neste caso, segundo (Pirotti and Spinelli, 2003), o uso de informações da simulação-livre pode melhorar a robustez na seleção de estrutura do processo quando sob condições de identificabilidade parciais.

O MSSE depende da simulação livre, que em suma é a resposta em malha aberta a um sinal de excitação conhecido. Algo parecido poderia ser utilizado ao se avaliar a estrutura no procedimento VRFT, porém, neste caso, seria desejável a resposta do sistema em malha fechada com o controlador obtido a partir da estrutura avaliada. O grande problema neste caso é que esta simulação passa a ser dependente de um modelo, ainda que aproximado, do processo, ou do próprio processo. Porém, como estratégias DDC visam exatamente não identificar um modelo para o processo, tal situação pode ser um empecilho prático. Uma proposta de solução para este problema é apresentada mais a frente neste texto.

Uma segunda proposta, a qual também vem sendo analisada, consiste no uso de informações auxiliares durante o processo de identificação dos parâmetros do controlador. Apesar de já terem sido desenvolvidas técnicas para incorporar informação auxiliar no processo de identificação, por exemplo via restrições e otimização multi-objetivo (Barroso, 2006), todas estas restrições dizem respeito à planta. Neste sentido surgem questões como: de que forma estas técnicas podem ser usadas na abordagem DDC? Seria possível encontrar um análogo da informação auxiliar, usada em métodos tradicionais, para estratégias DDC, em que não há informação da planta? Poderia esta ser definida, por exemplo, a partir restrições que garantam aspectos relevantes ao controle, como limitações de ganho devido a saturação de atuadores, inserção de integradores no controlador, além de aspectos relativos a robustez? Neste sentido, um procedimento para garantir a presença de integradores no modelo do controlador já vem sendo estudado, mas ainda sem resultados conclusivos.

Outra proposta a ser estudada diz respeito ao estudo do uso de filtros no processo de identificação do controlador, como é comum na estratégia VRFT. Na estratégia, quando o controlador ideal, ou compatível, não pertence à classe de controladores considerada, ou seja, a hipótese 3.2 não é satisfeita, um filtro a ser aplicado ao sinal usado no processo de identificação deve ser projetado a fim de se aproximar de uma solução ótima, conforme apresentado por Campi et al. (2002); Campi and Savaresi (2006) e discutido no Capítulo 3.

Uma quarta proposta diz respeito ao problema levantado anteriormente, onde o sinal de saída, e conseqüentemente o erro de rastreamento são requeridos para o cálculo do índice de atualização dos RIPs no procedimento RaMSS. Como a simulação da resposta em malha fechada (ou mesmo malha aberta) é inviável em estratégia DDC,

terminar este pensamento

devido a uma falta de modelo para o processo, pretende-se fazer do uso de técnicas de Aprendizado por Reforço (RL), abordadas no Capítulo ??, para que dados colhidos do processo real, enquanto em funcionamento, possam ser usados para o cálculo em tempo real dos RIP e consequentemente para escolha de melhor estrutura.

Algumas técnicas de RL se mostram promissoras neste caso, uma vez que muitas vezes levam à otimização de índices de desempenho a partir de dados amostrados, sem a necessidade do modelo do processo, ao mesmo tempo em que evitam o alto número de realizações amostrais como em metodologias Monte Carlo. Dentre elas a estratégia TD Learning, tem sido considerada, com uma atenção ao método conhecido como Q-learning [Watkins and Dayan \(1992\)](#), que permite que um controlador possa ser ajustado em uma abordagem conhecida como *off-policy* que permite o aprendizado de uma política de controle enquanto o sistema em malha fechada se encontra sob o efeito de outra. No âmbito deste trabalho, o sentimento é que deva ser possível o uso de uma estratégia parecida juntamente com o concito do RAMSS, possa se atualizar os RIPs e consequentemente a estrutura, e talvez até parâmetros, do controlador com um menor esforço e, se possível, com provas de convergência.

Colocar referência

Por fim, análises a respeito de robustez, na presença de ruídos de medição ou de processos devem ser também levadas em conta, principalmente em uma etapa final. Inclusão de termos de média móvel ao procedimento RAMSS tem sido cogitado como alternativa a reduzir a polarização durante a etapa de identificação, em alternativa ao uso de estratégias baseadas em variáveis instrumentais, comuns no procedimento VRFT.

Bibliography

- Aguirre, L. A. (2015). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares: Teoria e Aplicação*. Editora UFMG, Belo Horizonte, fourth edition.
- Aguirre, L. A., Barbosa, B. H. G., and Braga, A. P. (2010). Prediction and simulation errors in parameter estimation for nonlinear systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(8):2855–2867.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. (1995). Dynamical effects of overparametrization in nonlinear models. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 80(1-2):26–40.
- Aguirre, L. A., Donoso-Garcia, P. F., and Santos-Filho, R. (2000). Use of a priori information in the identification of global nonlinear models-a case study using a buck converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(7):1081–1085.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723.
- Allen, D. M. (1974). The Relationship between Variable Selection and Data Agumentation and a Method for Prediction. *Technometrics*, 16(1):125–127.
- Alves, M. A., Corrêa, M. V., and Aguirre, L. A. (2012). Use of self-consistency in the structure selection of NARX polynomial models. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 15(1):1.
- Baldacchino, T., Anderson, S. R., and Kadiramanathan, V. (2012). Structure detection and parameter estimation for NARX models in a unified EM framework. *Automatica*, 48(5):857–865.
- Baldacchino, T., Anderson, S. R., and Kadiramanathan, V. (2013). Computational system identification for Bayesian NARMAX modelling. *Automatica*, 49(9):2641–2651.
- Barroso, M. F. S. (2006). *Otimização Bi-Objetivo Apliada à Estimação de Parâmetros de Modelos Não-Lineares: Caraterização e Tomada de Decisão*. PhD thesis, UFMG.

- Bazanella, A. S., Campestrini, L., and Eckhard, D. (2012). *Data-Driven Controller Design*. Communications and Control Engineering. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Bazanella, A. S., Gevers, M., Mišković, L., and Anderson, B. D. (2008). Iterative minimization of H_2 control performance criteria. *Automatica*, 44(10):2549–2559.
- Bianchi, F., Falsone, A., Prandini, M., and Piroddi, L. (2016). A randomised approach for NARX model identification based on a multivariate Bernoulli distribution. *International Journal of Systems Science*, 48(6):1203–1216.
- Billings, S. (1980). Identification of nonlinear systems—a survey. *IEE Proceedings D Control Theory and Applications*, 127(6):272.
- Billings, S. A., Chen, S., and Korenberg, M. J. (1989). Identification of MIMO nonlinear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *International Journal of Control*, 49(6):2157–2189.
- Broomhead, D. S. and Lowe, D. (1988). Radial basis functions, multi-variable functional interpolation and adaptive networks. Technical report, Royal Signals and Radar Establishment Malvern (United Kingdom).
- Campestrini, L., Eckhard, D., Gevers, M., and Bazanella, A. (2011). Virtual Reference Feedback Tuning for non-minimum phase plants. *Automatica*, 47(8):1778–1784.
- Campi, M. C., Lecchini, A., and Savaresi, S. (2002). Virtual reference feedback tuning: A direct method for the design of feedback controllers. *Automatica*, 38(8):1337–1346.
- Campi, M. C. and Savaresi, S. M. (2004). Invertibility of nonlinear maps. Int. rep., Univ. Brescia, Brescia, Italy.
- Campi, M. C. and Savaresi, S. M. (2006). Direct nonlinear control design: The virtual reference feedback tuning (VRFT) approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1):14–27.
- Cavanaugh, J. E. (1997). Unifying the derivations for the Akaike and corrected Akaike information criteria. *Statistics & Probability Letters*, 33(2):201–208.
- Chen, S. and Billings, S. A. (1992). Neural networks for nonlinear dynamic system modelling and identification. *International Journal of Control*, 56(2):319–346.
- Chen, S., Billings, S. A., Cowan, C. F. N., and Grant, P. M. (1990). Practical identification of NARMAX models using radial basis functions. *International Journal of Control*, 52(6):1327–1350.
- Draper, N. R. and Smith, H. (1998). *Applied Regression Analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, New York, 3rd ed edition.

- Falsone, A., Piroddi, L., and Prandini, M. (2014). A novel randomized approach to nonlinear system identification. In *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6516–6521.
- Falsone, A., Piroddi, L., and Prandini, M. (2015). A randomized algorithm for nonlinear model structure selection. *Automatica*, 60:227–238.
- Guardabassi, G. O. and Savaresi, S. M. (2000). Virtual reference direct design method: An off-line approach to data-based control system design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5):954–959.
- Haykin, S. S. (1994). *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Macmillan ; Maxwell Macmillan Canada ; Maxwell Macmillan International, New York : Toronto : New York.
- Hjalmarsson, H., Gunnarsson, S., and Gevers, M. (1994). A convergent iterative restricted complexity control design scheme. *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2(December):1735–1740.
- Hou, Z. S. and Wang, Z. (2013). From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective. *Information Sciences*, 235:3–35.
- Huang, B. and Kadali, R. (2008). Dynamic modeling, predictive control and performance monitoring. In *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, page 249.
- Huusom, J. K., Poulsen, N. K., and Jørgensen, S. B. (2009). Improving convergence of iterative feedback tuning. *Journal of Process Control*, 19(4):570–578.
- Ikedo, M., Fujisaki, Y., and Hayashi, N. (2001). A model-less algorithm for tracking control based on input-output data. In *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, volume 47, pages 1953–1960.
- Jeng, J.-C. and Lin, Y.-W. (2014). Controller design for nonlinear hammerstein and wiener systems based on VRFT method. In *Computer Aided Chemical Engineering*, volume 33, pages 547–552.
- Jeng, J.-C. and Lin, Y.-W. (2018). Data-driven nonlinear control design using virtual-reference feedback tuning based on the block-oriented modeling of nonlinear systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 57(22):7583–7599.
- Kammer, L., Bitmead, R., and Bartlett, P. (2000). Direct iterative tuning via spectral analysis. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.98CH36171)*, volume 3, pages 2874–2879. IEEE.
- Karimi, A., Mišković, L., and Bonvin, D. (2002). Convergence analysis of an iterative correlation-based controller tuning method. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 35(1):413–418.

- Karimi, A., van Heusden, K., and Bonvin, D. (2007). Non-iterative data-driven controller tuning using the correlation approach. In *2007 European Control Conference (ECC)*, volume 3536, pages 5189–5195. IEEE.
- Kashyap, R. (1977). A Bayesian comparison of different classes of dynamic models using empirical data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5):715–727.
- Korenberg, M., Billings, S. A., Liu, Y. P., and McILROY, P. J. (1988). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems. *International Journal of Control*, 48(1):193–210.
- Leontaritis, I. J. and Billings, S. A. (1985a). Input-output parametric models for non-linear systems Part I: Deterministic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):303–328.
- Leontaritis, I. J. and Billings, S. A. (1985b). Input-output parametric models for non-linear systems Part II: Stochastic non-linear systems. *International Journal of Control*, 41(2):329–344.
- Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall, New Jersey, US.
- Martins, S. A. M., Nepomuceno, E. G., and Barroso, M. F. S. (2013). Improved Structure Detection For Polynomial NARX Models Using a Multiobjective Error Reduction Ratio. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 24(6):764–772.
- Pearson, R. K. (1999). *Discrete-Time Dynamic Models*. Topics in Chemical Engineering. Oxford University Press, New York.
- Piroddi, L. and Spinelli, W. (2003). An identification algorithm for polynomial NARX models based on simulation error minimization. *International Journal of Control*, 76(17):1767–1781.
- Retes, P. F. L. and Aguirre, L. A. (2019). NARMAX model identification using a randomised approach. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 31(3):205.
- Safonov, M. G. and Tsao, T.-C. (1995). The unfalsified control concept: A direct path from experiment to controller. *Feedback Control, Nonlinear Systems, and Complexity*, pages 196–214.
- Schaal, S. and Atkeson, C. G. (1994). Robot juggling: Implementation of memory-based learning. *IEEE Control Systems*, 14(1):57–71.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, 6(2):461–464.

- Shi, G. and Skelton, R. E. (2000). Markov data-based LQG control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 122(3):551.
- Skogestad, S. (2003). Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control*, page 19.
- Spall, J. (1992). Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(3):332–341.
- Strang, G. (1989). Wavelets and Dilation Equations: A Brief Introduction. *SIAM Review*, 31(4):614–627.
- Takahashi, Y., Rabins, M. J., and Auslander, D. M. (1972). *Control and Dynamic Systems*. Addison-Wesley, California.
- Tolle, M. (1921). *Regelung Der Kraftmaschinen*. Springer, Berlin.
- Watkins, C. J. C. H. and Dayan, P. (1992). Q-learning. *Machine Learning*, 8(3-4):279–292.
- Wei, H. L. and Billings, S. A. (2008). Model structure selection using an integrated forward orthogonal search algorithm assisted by squared correlation and mutual information. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 3(4):341.
- Young, P. (1970). An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. *Automatica*, 6(2):271–287.
- Zhu, Q. (2005). An implicit least squares algorithm for nonlinear rational model parameter estimation. *Applied Mathematical Modelling*, 29(7):673–689.
- Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of ASME*, 64:759–768.

VRFT Complements

A.1 Proof. for Theorem ?? for linear case

Para o caso linear, uma forma de demonstrar tal resultado é rescrevendo (3.5) como

$$\begin{aligned}
 J_{VR}(\boldsymbol{\theta}) &= \|(\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\varphi}(k)\|^2 \\
 &= \left\| (\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta})^T C_\theta(q) \frac{1 - M(q)}{M(q)} P(q) \tilde{u}(k) \right\|^2 \\
 &= \left\| (\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta})^T C_\theta(q) \frac{1}{C_0(q)} P(q) \tilde{u}(k) \right\|^2
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde foi usado o fato que $\tilde{u}(k) = C_0 \tilde{e}(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_0^T \boldsymbol{\varphi}$ e que

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = C_\theta(q) \tilde{e}(k) = C_\theta(q) \frac{1 - M(q)}{M(q)} \tilde{y}(k),$$

sendo $\tilde{y} = P(q) \tilde{u}(k)$.

Aplicando o teorema de Parserval [Ljung \(1999\)](#), em (A.1) e rearranjando os termos, pode-se rescrevê-la como

$$J_{VR}(\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T A_{VR} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0),$$

onde

$$A_{VR} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|C_0(e^{j\omega})|^2} C_\theta(e^{j\omega}) C_\theta(e^{j\omega})^* C_\theta^*(e^{j\omega}) \Phi_u(e^{j\omega}) d\omega$$

Desde que $C_0(z)$ não tenha zeros no círculo unitário, nota-se que $J_{VR}(\boldsymbol{\theta}_0) = 0$ se $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$, e será a única solução que resulta em um mínimo desde que $A_{VR} \neq 0$. Considerando o espectro do sinal de entrada $\tilde{u}(k)$ como discreto, i.e.

$$\Phi_u(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^q \lambda_k \delta(\omega - \omega_k)$$

sendo λ_k um valor real positivo e $\delta(\cdot)$ a função delta de Dirac, de forma que

$$A_{VR} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^q \frac{1}{|C_0(e^{j\omega})|^2} C_\theta(e^{j\omega}) C_\theta(e^{j\omega}) C_\theta^*(e^{j\omega}) \lambda_k$$

Como $C_\theta(e^{j\omega})$ e sua conjugada transposta são matrizes definidas positivas, A_{VR} será uma soma ponderada de matrizes definidas positivas. O posto desta soma é dada por $\min(q, p)$ onde p é a ordem de A_{VR} . Portanto, caso o espectro do sinal de entrada $\Phi_u(e^{j\omega}) \geq p$, i.e., seja suficientemente rico de ordem $q \geq p$ (definition 3.6), ou o vetor de regressores seja persistentemente excitante (definition 3.6), A_{VR} é definida positiva e $\theta = \theta_0$ é a única solução ótima (Bazanella et al., 2012).

A.2 Proof of the VRFT filter choice (Theorem 3.4.1)

Note que

$$\tilde{u} = C_{\theta_0^+}[\tilde{e}] \quad (\text{A.2})$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= P^{-1}[\tilde{y}] = P^{-1}[(I - MD)^{-1}(I - MD)\tilde{y}] \\ &= P^{-1}[(I - MD)^{-1}(M\tilde{r} - MD\tilde{y})] = P^{-1}[(I - MD)^{-1}M\tilde{e}] = C^0[\tilde{e}] \\ &= C_{\theta_0^+}[\tilde{e}]. \end{aligned}$$

De forma semelhante

$$\tilde{y} = y_{\theta_0^+} \quad (\text{A.3})$$

uma vez que, $\tilde{y} = P[\tilde{u}]$ a partir de (A.2), assumindo $\tilde{e} = \tilde{r} - D\tilde{y}$, tem-se que $\tilde{y} = P[C_{\theta_0^+}[\tilde{e}]] = P[C_{\theta_0^+}[\tilde{r} - D\tilde{y}]]$. Como $y_{\theta_0^+} = P[C_{\theta_0^+}[\tilde{r} - Dy_{\theta_0^+}]]$, \tilde{y} e $y_{\theta_0^+}$ corresponde ao mesmo \tilde{r} no mapa $r \mapsto y$ dado por $y = P[C_{\theta_0^+}[r - Dy]]$. Uma vez que tal mapa, dado um r há somente um y correspondente, conclui-se (A.3). De (A.3) é possível concluir que

$$\tilde{r} - Dy_{\theta_0^+} = \tilde{e}, \quad (\text{A.4})$$

que, em (A.2), resulta em

$$\tilde{u} = C_{\theta_0^+}[\tilde{r} - Dy_{\theta_0^+}]. \quad (\text{A.5})$$

Por simplicidade e maior clareza no desenvolvimento, adota-se a seguinte notação:

$$x_{\theta^+} \triangleq F[C_{\theta^+}[\tilde{e}]] - F[\tilde{u}] \quad (\text{A.6})$$

$$w_{\theta^+} \triangleq y_{\theta^+} - \tilde{y} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta^+} \triangleq \begin{bmatrix} \partial g_1 / \partial \theta_1^+ & \dots & \partial g_1 / \partial \theta_j^+ & \dots & \partial g_1 / \partial \theta_{n_{\theta^+}}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial g_i / \partial \theta_1^+ & \dots & \partial g_i / \partial \theta_j^+ & \dots & \partial g_i / \partial \theta_{n_{\theta^+}}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial g_N / \partial \theta_1^+ & \dots & \partial g_N / \partial \theta_j^+ & \dots & \partial g_N / \partial \theta_{n_{\theta^+}}^+ \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Sendo (A.8) (em que g é uma função genérica) definida tal que o (i, j) -ésimo elemento é $\partial g(i) / \partial \theta_j^+$, de modo que as colunas (j) correspondem às derivadas de g em relação a diferentes parâmetros e as linhas (i) correspondem à evolução temporal.

Usando (A.6) e (A.7), as função de custo (??) e (3.1) são rescritas como

$$J_{\text{VR}}(\theta^+) = \|x_{\theta^+}\|^2 \quad J(\theta^+) = \|w_{\theta^+}\|^2$$

Calculando a primeira e segunda derivadas de $J_{\text{VR}}(\theta^+)$ com respeito ao vetor de parâmetros θ^+ , para aproximação por séries de Taylor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\text{VR}}(\theta^+)}{\partial \theta^+} &= \frac{\partial x_{\theta^+}^T x_{\theta^+}}{\partial \theta^+} = 2x_{\theta^+}^T \left(\frac{\partial x_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right), \\ \frac{\partial^2 J_{\text{VR}}(\theta^+)}{\partial \theta^{+2}} &= 2x_{\theta^+}^T \left(\frac{\partial^2 x_{\theta^+}}{\partial \theta^{+2}} \right) + 2 \left(\frac{\partial x_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right)^T \left(\frac{\partial x_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right). \end{aligned}$$

Utilizando (A.6) e (A.2) e calculando as derivadas para o ponto de equilíbrio θ_0^+ , resulta em

$$J_{\text{VR}}(\theta^+) \Big|_{\theta_0^+} = \frac{\partial J_{\text{VR}}(\theta^+)}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial^2 J_{\text{VRFT}}(\theta^+)}{\partial \theta^{+2}} \Big|_{\theta_0^+} = 2 \left(\frac{\partial x_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} \right)^T \left(\frac{\partial x_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} \right) \quad (\text{A.10})$$

Fazendo o mesmo procedimento para $J(\theta^+) = \|w_{\theta^+}\|^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\theta^+)}{\partial \theta^+} &= \frac{\partial w_{\theta^+}^T w_{\theta^+}}{\partial \theta^+} = 2w_{\theta^+}^T \left(\frac{\partial w_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right), \\ \frac{\partial^2 J(\theta^+)}{\partial \theta^{+2}} &= 2w_{\theta^+}^T \left(\frac{\partial^2 w_{\theta^+}}{\partial \theta^{+2}} \right) + 2 \left(\frac{\partial w_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right)^T \left(\frac{\partial w_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right). \end{aligned}$$

Usando (A.7) e (A.3):

$$J(\theta^+) \Big|_{\theta_0^+} = \frac{\partial J(\theta^+)}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial^2 J(\theta^+)}{\partial \theta^{+2}} \Big|_{\theta_0^+} = 2 \left(\frac{\partial w_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} \right)^T \left(\frac{\partial w_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} \right). \quad (\text{A.12})$$

Somando os termos de (A.9) a (A.10), e os (A.11) e (A.12), tem-se, respectivamente uma aproximação de segunda ordem por séries de Taylor. E para que o objetivo do filtro (??) seja alcançado, ou seja $J_{\text{VR}}(\theta^+) \approx J(\theta^+)$, comparando (A.10) com (A.12), deve-se ter

$$\frac{\partial x_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} = \frac{\partial w_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} \quad (\text{A.13})$$

Usando a notação

$$\frac{\partial P[u]}{\partial u} \triangleq \begin{bmatrix} \partial P[u]_1 / \partial u_0 & \dots & \partial P[u]_1 / \partial u_{(j-1)} & \dots & \partial P[u]_1 / \partial u_{(N-1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial P[u]_i / \partial u_0 & \dots & \partial P[u]_i / \partial u_{(j-1)} & \dots & \partial P[u]_i / \partial u_{(N-1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial P[u]_N / \partial u_0 & \dots & \partial P[u]_N / \partial u_{(j-1)} & \dots & \partial P[u]_N / \partial u_{(N-1)} \end{bmatrix}$$

e resolvendo o lado esquerdo de (A.13), considerando que o filtro F é linear, chega-se a

$$\frac{\partial x_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} = \frac{\partial F[C_{\theta^+}[\tilde{e}]]}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} = F \left(\frac{\partial C_{\theta^+}[\tilde{e}]}{\partial \theta^+} \Big|_{\theta_0^+} \right) \quad (\text{A.14})$$

Como $C_{\theta_0^+} = \tilde{u}$, ver (A.2), o lado direito de (A.13) é calculado como

$$\begin{aligned} \frac{\partial P[u]}{\partial u} \Big|_{\tilde{u}} \frac{\partial C_{\theta_0^+}[e]}{\partial e} \Big|_{\tilde{e}} &= \frac{\partial P[C_{\theta_0^+}[e]]}{\partial e} \Big|_{\tilde{e}} \\ &= \frac{\partial (I - MD)^{-1} M[e]}{\partial e} \Big|_{\tilde{e}} \\ &= (I - MD)^{-1} M. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Aplicando a regra da cadeia, em $(\partial y_{\theta_0^+}/\partial \theta^+)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial y_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} &= \left. \frac{\partial P[C_{\theta^+}[\tilde{r} - Dy_{\theta^+}]]}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} \\ &= \left. \frac{\partial P[u]}{\partial u} \right|_{C_{\theta_0^+}[\tilde{r} - Dy_{\theta_0^+}]} \left\{ \left. \frac{\partial C_{\theta^+}[\tilde{r} - Dy_{\theta^+}]}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} - \left. \frac{\partial C_{\theta_0^+}[e]}{\partial e} \right|_{\tilde{r} - Dy_{\theta_0^+}} \left. \frac{\partial Dy_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} \right\} \end{aligned}$$

Usando (A.4) e (A.5),

$$\left. \frac{\partial y_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} = \left. \frac{\partial P[u]}{\partial u} \right|_{\tilde{u}} \left\{ \left. \frac{\partial C_{\theta^+}[\tilde{e}]}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} - \left. \frac{\partial C_{\theta_0^+}[e]}{\partial e} \right|_{\tilde{e}} \left. \frac{\partial Dy_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} \right\}$$

e então

$$\left. \frac{\partial P[u]}{\partial u} \right|_{\tilde{u}} \left. \frac{\partial C_{\theta^+}[\tilde{e}]}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} = \left. \frac{\partial y_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} + \left. \frac{\partial P[u]}{\partial u} \right|_{\tilde{u}} \left. \frac{\partial C_{\theta_0^+}[e]}{\partial e} \right|_{\tilde{e}} \left. \frac{\partial Dy_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+}.$$

Substituindo em (A.15) resulta em

$$\left. \frac{\partial y_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} + (I - MD)^{-1} M \left. \frac{\partial Dy_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} = \left. \frac{\partial P[u]}{\partial u} \right|_{\tilde{u}} \left. \frac{\partial C_{\theta^+}[\tilde{e}]}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+},$$

que, multiplicando por $(I - MD)$, nos dá

$$\left. \frac{\partial y_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} - MD \left. \frac{\partial y_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} + M \left. \frac{\partial Dy_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} = (I - MD) \left. \frac{\partial P[u]}{\partial u} \right|_{\tilde{u}} \left. \frac{\partial C_{\theta^+}[\tilde{e}]}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+}$$

Por fim, o termo do lado direito de (A.13), pode ser escrito como

$$\left. \frac{\partial w_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} = \left. \frac{\partial y_{\theta^+}}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+} = (I - MD) \left. \frac{\partial P[u]}{\partial u} \right|_{\tilde{u}} \left. \frac{\partial C_{\theta^+}[\tilde{e}]}{\partial \theta^+} \right|_{\theta_0^+}$$

que, comparando com (A.14), conclui-se que

$$F = (I - MD) \left(\left. \frac{\partial P[u]}{\partial u} \right|_{\tilde{u}} \right).$$

