

## 加速器束流动力学期刊论文导读 (2022 年 11 月)

受“京师物理”公众号启发,我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊,与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布,在 [http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh\\_CN/article/2191806/content/1551.htm#article](http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article) 可以找到过去的导读文档。限于成员水平,导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流,我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2022 年 11 月) 结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]、[6]	jcytsai@hust.edu.cn

## 目录

1	稳态微聚束波荡器辐射的平均与统计特性 [JSR xx]	
	Average and statistical property of coherent radiation from steady-state microbunching	3
2	储存环自由电子激光的同步运动 [Appl. Phys. 19]	
	Behavior of synchrotron motion in a storage-ring laser	10
3	自由电子激光振荡器的增益与饱和 [PRE 55]	
	Gain and saturation in free-electron laser oscillators	12
4	自由电子激光振荡器增益与饱和的一种简单理论 [NIMA 407]	
	A simple theory of gain and saturation in FEL oscillators	15
5	扭曲四极铁组的空间电荷效应 [NIMA 557]	
	Space-charge effects in twisted quadrupoles	19
6	螺线管与 RF 耦合器导致的横向耦合过程束团发射度的准确相消条件 [PRAB 21-01]	
	Exact cancellation of emittance growth due to coupled transverse dynamics in solenoids and rf couplers	24

## 1 稳态微聚束波荡器辐射的平均与统计特性 [JSR xx]

### Average and statistical property of coherent radiation from steady-state microbunching

#### 1.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：X.J. Deng, Y. Zhang, Z.L. Pan, Z.Z. Li, J.H. Bian, C.-Y. Tsai, R.K. Li, A.W. Chao, W.H. Huang and C.X. Tang (主要机构：清华大学，北京)
- 类型：理论
- 链接：

#### 1.2 摘要

近年有越来越多基于稳态微聚束 (steady-state microbunching, SSMB) 机制的储存环光源的研究。此种光源结合了微聚束束团的相干特性，与储存环的高重频特性，其辐射光源具有高平均功率、窄带频谱特性。辐射波可以长从 THz 延伸至软 X 射线。这种新型光源提供了基于粒子加速器的光子科学应用与工业应用 (如：极紫外光刻技术) 一个新的发展契机。

这篇论文探讨稳态微聚束波荡器辐射的平均与统计特性，证明基于稳态微聚束机制，当电子束团能过达到平均电流 1 A、微聚束束长 3 nm 时，能够产生 1 kW 连续波模式的相干极紫外辐射。通过理论分析，这篇论文引入横向形状因子 (transverse form factor)，用来量化束团横向有限分布对辐射场的影响。这篇论文证明束团横向分布对窄带辐射频谱有明显影响。此外，这篇论文讨论了辐射的量子过程与电子束的离散特性，输出辐射存在涨落，可能由于逐圈或逐个微束团。另外，还讨论了基于此种辐射场特性作为束测的潜在应用。

#### 1.3 贡献或创新点

- 贡献：这篇论文的介绍部分对 SSMB 有清晰的描述，也与传统电子同步辐射储存环的特性有些比较。论文主题围绕 SSMB 形态的电子束微束团特性分析，从第一原理出发，考虑三维刚性束团，给出此种 (微) 束团在波荡器中的辐射特性，包含

辐射特性 (基波、谐波的辐射功率、张角、频谱宽度等) 随单一束团横纵向尺寸影响与量子涨落造成的影响等。

- 创新点：这篇论文从第一原理出发，通过矢量位函数  $\mathbf{A}$  分析电磁辐射特性。

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega}(\theta, \varphi, \omega) = 2|\mathbf{A}(\theta, \varphi, \omega)|^2$$

对于单电子与电子束团，其矢量位函数  $\mathbf{A}$  的关联如下：

$$\mathbf{A}_{\text{beam}} = N_e \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_{\text{point}} \left( \theta, \varphi, t + \frac{x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi}{c} + \frac{z}{\beta c} \right) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

因此，单电子与电子束团的电磁辐射角频谱就可以关联如下：

$$\left. \frac{d^2W}{d\omega d\Omega}(\theta, \varphi, \omega) \right|_{\text{beam}} = N_e^2 |b(\theta, \varphi, \omega)|^2 \left. \frac{d^2W}{d\omega d\Omega}(\theta, \varphi, \omega) \right|_{\text{point}}$$

辐射频谱可以将上式对立体角积分得到。辐射能量则是再对频率范围  $(0, \infty)$  积分得到。至于单电子在波荡器中的辐射角频谱，可以参考 [1] 一书的 §7.3.4 (p.676)。

为了进一步探讨电子束团尺寸、分布对辐射特性的影响，这篇论文引入横向与纵向形状因子 (form factor)，有

$$\begin{aligned} b(\theta, \varphi, \omega) &= b_{\perp}(\theta, \varphi, \omega) \times b_z(\omega) \\ b_{\perp}(\theta, \varphi, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) e^{-i\omega \left( \frac{x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi}{c} \right)} dx dy \\ b_z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) e^{-i\omega \frac{z}{\beta c}} dz \end{aligned}$$

其中，纵向形式即为熟悉的群聚因子。

与辐射功率更相关的因子可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} FF(\omega) &= FF_{\perp}(\omega) FF_z(\omega) \\ FF_{\perp}(\omega) &= \frac{\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi |b_{\perp}(\theta, \varphi, \omega)|^2 \left. \frac{d^2W}{d\omega d\Omega}(\theta, \varphi, \omega) \right|_{\text{point}}}{\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left. \frac{d^2W}{d\omega d\Omega}(\theta, \varphi, \omega) \right|_{\text{point}}} \\ FF_z(\omega) &= |b_z(\omega)|^2 \end{aligned}$$

因此，辐射能量谱就可以写成

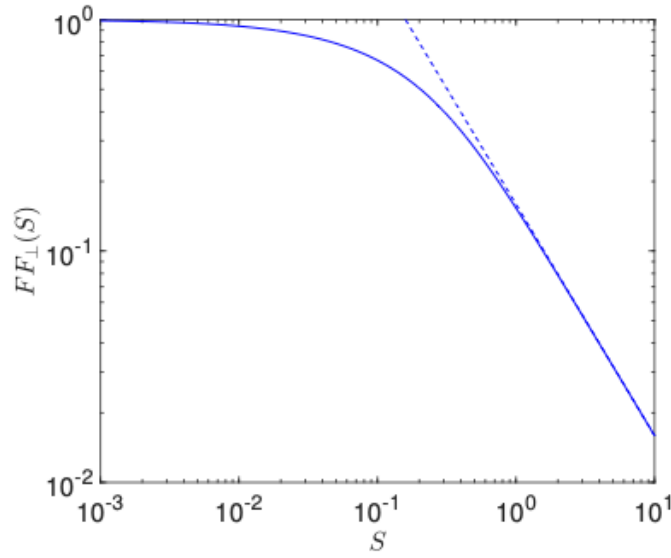
$$\left. \frac{dW}{d\omega} \right|_{\text{beam}} = N_e^2 FF_{\perp}(\omega) FF_z(\omega) \left. \frac{dW}{d\omega} \right|_{\text{point}}$$

假设电子束团在经历波荡器辐射过程中为刚性束团，并假设束团分布为高斯分布，则横向形状因子可以解析的写成如下形式：

$$FF_{\perp}(H, \sigma_{\perp}, \omega) = \frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mathcal{D}(\omega)}$$

分子、分母显形式参考该论文 Eqs.(24, 25)。  $FF_{\perp}$  随归一化参数  $S(\sigma_{\perp}, L_u, \omega) = \frac{\kappa_3}{4\kappa_2} = \frac{\sigma_{\perp}^2 k_u \omega}{2N_u \pi} = \frac{\sigma_{\perp}^2 \omega}{L_u}$  的关系如下图 Figure 3。横向束团尺寸对辐射特性的影响体现在  $FF_{\perp}$  的行为。在渐进情况下，有

$$FF_{\perp}(S) = \begin{cases} 1, S \ll 1, \text{ below diffraction limit} \\ \frac{1}{2\pi S}, S \gg 1, \text{ above diffraction limit.} \end{cases}$$



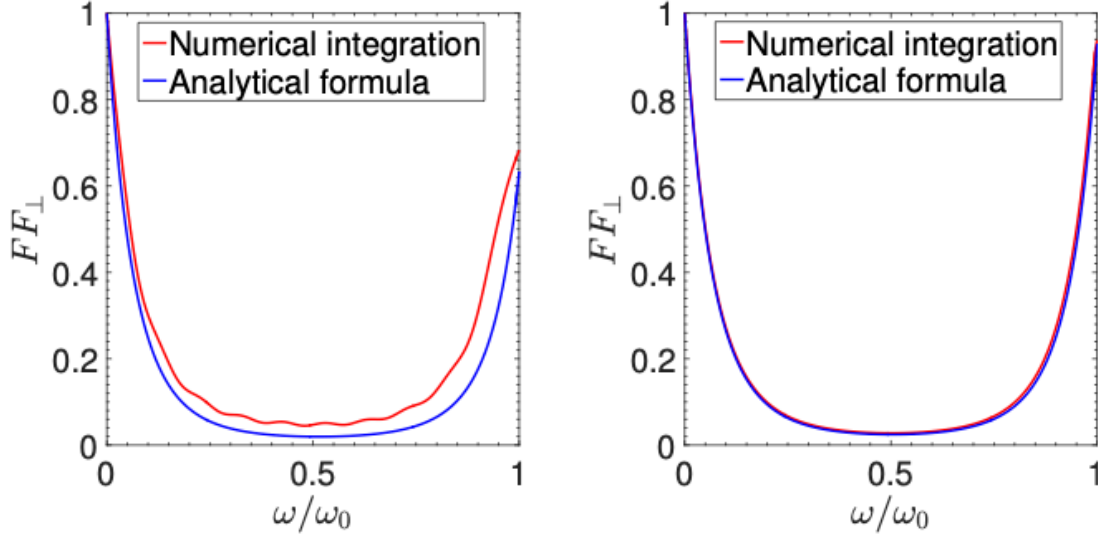
**Figure 3**

The universal function  $FF_{\perp}(S)$  and its asymptotic value above diffraction limit. The solid line comes from Eq. (27), the dashed line from the asymptotic relation above diffraction limit Eq. (29).

为了进一步简化  $FF_{\perp}$  的显形式，这篇论文假设主要谐波成分集中在  $\omega = H\omega_0$  附近，并且  $S \ll 1$ ，则化简后的  $FF_{\perp}$  有

$$FF_{\perp}(H, \sigma_{\perp}, \omega) \approx e^{-4N_u \pi S \left(H - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} FF_{\perp}(S)$$

下图 Figure 4 给出两种不同波荡器长度情况下，利用简化后的  $FF_{\perp}$  公式与基于  $FF_{\perp}(H, \sigma_{\perp}, \omega) = \frac{\mathcal{N}(\omega)}{\mathcal{D}(\omega)}$  结果的比较。论文 Section 3 后半部与 Section 4 讨论了谐波的辐射功率、张角、频谱宽度等。



**Figure 4**

The comparison of the transverse form factor, between that calculated from our simplified analytical formula Eq. (30) and that from the direct numerical integration of Eq. (12) for the case of  $H = 1$ , with  $N_u = 10$  (left) and  $N_u = 100$  (right), respectively. Other related parameters used in the calculation:  $E_0 = 400$  MeV,  $\lambda_0 = 13.5$  nm,  $\lambda_u = 1$  cm,  $K = 1.14$ ,  $\sigma_{\perp} = 5$   $\mu\text{m}$ .

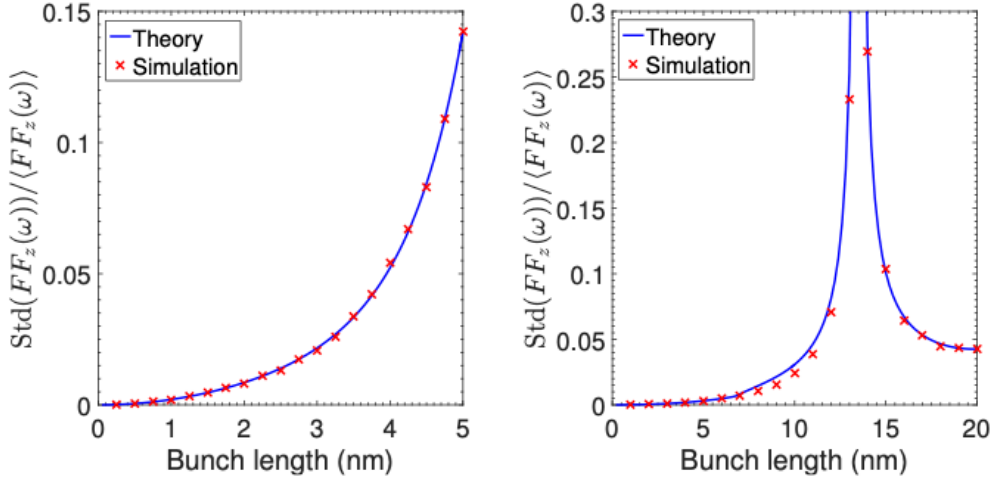
考虑无微群聚结构的电子短束团，有辐射输出功率公式如下：

$$P_{H, \text{ peak}} [\text{kW}] = 1.183 N_u H \chi [J J]_H^2 I_P^2 [A] F F_{\perp}(S) |b_{z,H}|^2$$

关于相干辐射功率对波荡器周期数的定标定律与衍射效应，由 Eq.(43) 给出。Eq.(43) 的物理解释：当电子束经历波荡器初期 ( $N_u$  较小时)，衍射效应还不明显，因此辐射功率随  $N_u$  有二次 (quadratic) 关系。当经历波荡器中期或晚期 ( $N_u$  较大时)，衍射效应开始明显  $S$  变小，因此辐射功率降为随  $N_u$  一次关系。

注意到，上式对于估算 SSMB 束团辐射输出功率不够准确，但可以作为辐射功率下限的估算。

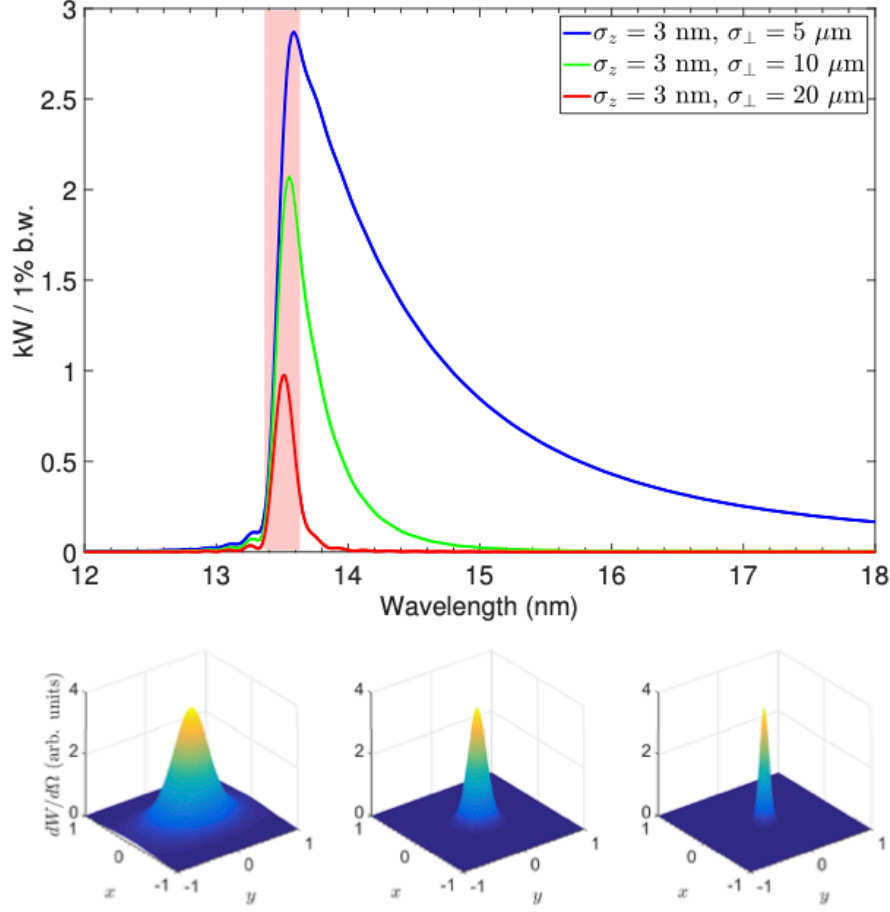
接着，这篇论文讨论辐射的量子过程与电子束的离散特性，输出辐射存在涨落，可能由于逐圈或逐个微束团。部分结果如下图 Figure 6。



**Figure 6**

Fluctuation of 13.5 nm coherent radiation power v.s. bunch length with  $N_e = 2.2 \times 10^4$ . The bunch is assumed to be Gaussian in the left and uniformly distributed in the right, and the theoretical fluctuation is calculated according to Eq. (51), omitting the term  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N_e^2}\right)$ . For each parameters choice,  $1 \times 10^3$  simulations are conducted to obtain the fluctuation.

这篇论文的 Section 6 讨论了一个接近 SSMB 理想设计指标的辐射输出脉冲特性，包含频谱与空间分布。此结果是利用这篇论文的 Eqs.(7,11,16) 通过数值计算得到。在理想设计指标下，能够得到在 13.5 nm 附近、1 kW 平均辐射功率输出。



**Figure 7**

An example EUV SSMB radiation calculation with a microbunch length of  $\sigma_z = 3$  nm and different transverse sizes  $\sigma_{\perp}$ . The upper part shows the energy spectrum. The total radiation power are 39 kW, 7 kW, 1.7 kW, corresponding to  $\sigma_{\perp} = 5, 10, 20$   $\mu\text{m}$ , respectively. The shaded area corresponds to wavelength of  $13.5 \pm \frac{13.5}{100}$  nm. The bottom part shows spatial distribution of radiation energy plotted in 3D view in the  $(x, y)$  space with  $x = \gamma\theta \cos \varphi, y = \gamma\theta \sin \varphi$ . From left to right:  $\sigma_{\perp} = 5, 10, 20$   $\mu\text{m}$ . Parameters used for the calculation:  $E_0 = 400$  MeV,  $I_{\text{avg}} = 1$  A,  $\lambda_L = 1064$  nm,  $\lambda_r = \frac{\lambda_L}{79} = 13.5$  nm,  $\lambda_u = 1$  cm,  $K = 1.14$ ,  $N_u = 79$ .



## 参考文献

- [1] Alexander Wu Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020)

## 2 储存环自由电子激光的同步运动 [Appl. Phys. 19]

### Behavior of synchrotron motion in a storage-ring laser

#### 2.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：D.A.G. Deacon (Stanford University)
- 类型：理论
- 链接：<https://link.springer.com/article/10.1007/BF00900545>

#### 2.2 摘要

这篇论文给出一维、线性化的储存环自由电子激光分析，包含束团能散、束长与关联 (*correlation*)<sup>1</sup>等物理量的动态过程与平衡行为。列写的方程组对应束团二阶矩的动力学方程。分析方法适用于一般线性差分方程组。这篇论文也讨论了该方法的适用条件。

#### 2.3 贡献或创新点

- 创新点：当时已经开展的关于储存环自由电子激光的研究方法分三类：一维纵向 Fokker-Planck 法、Boltzmann 法、Monte Carlo 法。后两者为全数值模拟，考虑了线性与非线性过程。这篇论文采解析法，考虑一维、线性化过程。列写的方程组不是直接解 Fokker-Planck 方程，而是对应束团二阶矩的动力学方程。
- 贡献：关于涉及纵向 FEL 动力学，零阶效应为纵向动力学本身，横向动力学对纵向的影响可以视为一阶微扰。数学上看，将一动力学系统线性化<sup>2</sup>之后，等同于将矩谱 (momentum spectrum) 解耦，因此可以独立地 (不与其它高阶矩关联) 分析二阶矩的动力学过程。分析电子束动力学时，激光视为瞬时固定 (instantaneously fixed) 的物理量。整体系统的演化计算可采片段 (piecewise) 近似。

论文从纵向、一维单粒子运动方程开始

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= E_n - G(E_n) + S(E_n, \theta) + V \sin k\phi_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n - \frac{2\pi\alpha}{E_s} E_{n+1} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>该论文称此为第三个相关的物理量。

<sup>2</sup>即，所有运动方程可以耦合，但是每个方程的动力学变量都呈线性。

其中,  $G$  为增益函数,  $S$  为随机变量。对长束团, FEL 对束团的逐圈效应可以近似为一 energy kick 与随机影响。

接着, 这篇论文考虑束团二阶矩特性, 定义束团能散为  $\sigma_e^2 \equiv \bar{E}^2 - \bar{E}^2$ 、 $\sigma_\phi^2 \equiv \bar{\phi}^2 - \bar{\phi}^2$  与  $\sigma_{e\phi}^2 = \bar{E}\bar{\phi} - \bar{E}\bar{\phi}$ , 则有

$$\frac{\Delta}{\Delta n} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_e^2 \\ \sigma_\phi^2 \\ \hat{\sigma}_{e\phi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 - 2C & \chi^2 & 2\chi(1 - C) \\ (1 - C)^2 & -\chi(2 - \chi) & -2(1 - \chi)(1 - C) \\ -(1 - C)^2 & \chi(1 - \chi) & -C - 2\chi(1 - C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_e^2 \\ \sigma_\phi^2 \\ \hat{\sigma}_{e\phi}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{S}^2 \\ \hat{S}^2 \\ -\hat{S}^2 \end{pmatrix}$$

或写成紧凑形式,

$$\frac{\Delta}{\Delta n} \Sigma^2 = \mathbf{A} \Sigma^2 + \mathbf{V}$$

以上为动力学系统的一般方程, 其稳态解有

$$(\Sigma^2)_{\text{static}} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}$$

完整解可以以  $\mathbf{A}$  的特征基底展开并线性叠加, 结合稳态解得到

$$\Sigma^2 = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{V} + \sum_{j=1}^3 a_j (1 + \lambda_j)^n \mathbf{P}_j$$

这篇论文剩下部分即探讨这些解在平衡态与逐圈暂态过程的特性, 细节此次不论。

## 2.4 其它

关于构建参考储存环自由电子激光的逐圈运动方程, 可以参考 [1, 2, 3]。

## 参考文献

- [1] A. Renieri, Storage ring operation of the free-electron laser: The amplifier, Il Nuovo Cimento B volume 53, pages160-178 (1979). <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02739308>
- [2] G. Dattoli and A. Renieri, Storage ring operation of the free-electron laser: The oscillator, Il Nuovo Cimento B volume 59, pages1-39 (1980). <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02739044>
- [3] G. Dattoli, A. Renieri, and G. Voykov, Storage-ring free-electron-laser amplifiers and the microwave instability, Phys. Rev. E 55, 2056 (1997). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.55.2056>

### 3 自由电子激光振荡器的增益与饱和 [PRE 55]

#### Gain and saturation in free-electron laser oscillators

##### 3.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：Vinit Kumar and Srinivas Krishnagopal (Centre for Advanced Technology, 印度)
- 类型：理论
- 链接：<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.55.1887>

##### 3.2 摘要

这篇论文给出关于自由电子激光振荡器 (free electron laser oscillator, FELO) 增益的理论计算，包含低增益、大信号的情况 (即，自由电子激光振荡器饱和情况)。导出了增益对调谐参数 (detuning parameter) 与光场强度 (intensity) 函数关系的解析形式，即  $G = G(\alpha, \epsilon_L^2)$ 。这篇论文进一步将 Dattoli 等人的  $G(I)$  参量化形式推广，使包含可变调谐，形成三参量、递归形式、推广的增益函数 (generalized gain function) 公式，适用于大信号至振荡器达饱和情况。

当光场较强时，最佳调谐量会往较大值 ( $\alpha > 2.6$ ) 方向偏移。此外，与以往熟悉的结果不同，在调谐较小情况下，随着光场增加，增益逐渐下降；但是，当调谐较大时，随着光场增加，增益还能维持一个范围，并理解由于高阶增益系数  $g_4$  导致。这篇论文最后利用所得到的结果与既有的两个实验比较，得到一致结果。

##### 3.3 贡献或创新点

- 创新点：从 Colson 的一维 FEL 方程组出发，利用微扰技巧，将电子相位  $\psi$ 、动量  $\mu$ 、增益函数  $G$  展开至五阶<sup>3</sup>，得到解析形式的增益函数对  $\alpha$  与  $\epsilon_L^2$  的关系， $G = G(\alpha, \epsilon_L^2)$ 。接着，这篇论文对  $G = G(\alpha, \epsilon_L^2)$  再进一步推广，基于 Dattoli 等人先前的参量化形式，形成三参量、递归形式、推广的增益函数。

---

<sup>3</sup>由于增益有场的平方关系，增益函数展开后的奇数阶为零。

- 贡献：从 Colson 的一维 FEL 方程组出发

$$\frac{d\mu}{d\tau} = -\epsilon_L \sin \psi \quad (1)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \mu \quad (2)$$

$$\frac{d\epsilon_L}{d\tau} = j_e \langle \sin \psi \rangle \quad (3)$$

利用微扰法，将相关量展开至五阶

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 + \epsilon_L \mu_1 + \epsilon_L^2 \mu_2 + \epsilon_L^3 \mu_3 + \epsilon_L^4 \mu_4 + \epsilon_L^5 \mu_5 + \dots \\ \psi &= \psi_0 + \epsilon_L \psi_1 + \epsilon_L^2 \psi_2 + \epsilon_L^3 \psi_3 + \epsilon_L^4 \psi_4 + \epsilon_L^5 \psi_5 + \dots \\ \frac{dG}{d\tau} &= \frac{dG_0}{d\tau} + \epsilon_L \frac{dG_1}{d\tau} + \epsilon_L^2 \frac{dG_2}{d\tau} + \epsilon_L^3 \frac{dG_3}{d\tau} + \epsilon_L^4 \frac{dG_4}{d\tau} \end{aligned} \quad (4)$$

对电子相位在  $[0, 2\pi]$  范围内取平均，得到

$$G(\alpha, \epsilon_L^2) = 2j_e [g_0(\alpha) + \epsilon_L^2 g_2(\alpha) + \epsilon_L^4 g_4(\alpha)] \quad (5)$$

其中，

$$\begin{aligned} g_0(\alpha) &= \frac{1}{\alpha^3} \left[ 1 - \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \right], \\ g_2(\alpha) &= \frac{1}{8\alpha^7} \left[ 33 - \left( 24 - \frac{13}{2}\alpha^2 \right) \cos \alpha - (9 - \alpha^2) \cos 2\alpha - \left( \frac{53}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha^3 \right) \sin \alpha - \frac{11}{2}\alpha \sin 2\alpha \right], \\ g_4(\alpha) &= \frac{1}{13824\alpha^{11}} \left[ (200080 + 1728\alpha^2) - (76070 - 58296\alpha^2 - 288\alpha^4) \cos \alpha \right. \\ &\quad - (107152 - 48960\alpha^2 + 576\alpha^4) \cos 2\alpha \\ &\quad - (16858 - 4176\alpha^2) \cos 3\alpha - (154033\alpha - 7272\alpha^3 + 36\alpha^5) \sin \alpha \\ &\quad \left. - (122896\alpha - 8568\alpha^3) \sin 2\alpha - (13845\alpha - 468\alpha^3) \sin 3\alpha \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

由上可知，随着光场振幅增加，最佳的调谐量会改变而往较大值偏移。对于 free-running FELO，这个结果将导致振荡器中的光场出现啁啾 (chirp)，符合预期。

这篇论文接着按 Dattoli 等人的参量化形式  $G(I) = G_0 \frac{(1 - e^{-I/I_s})}{I/I_s}$  进一步推广，得到

$$G(\alpha, \epsilon_L^2) = 2j_e a_0 \frac{1 - \exp[-(a_2 \epsilon_L^2 + a_4 \epsilon_L^4)]}{a_2 \epsilon_L^2 + a_4 \epsilon_L^4} \quad (7)$$

其中，

$$\begin{aligned} a_0(\alpha) &= g_0(\alpha) \\ a_2(\alpha) &= -2 \frac{g_2(\alpha)}{g_0(\alpha)} \\ a_4(\alpha) &= \frac{4}{3} \left[ \frac{g_2(\alpha)}{g_0(\alpha)} \right]^2 - 2 \left[ \frac{g_4(\alpha)}{g_0(\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

注意到，这里与 Dattoli 公式中的  $I_s$  不同的地方是，此式不需要对数值模拟结果拟合。

### 3.4 其它

作为应用，这篇论文考虑了低增益 FEL0，逐圈光场演化遵循以下递回关系

$$\epsilon_{L,n+1}^2 = \epsilon_{L,n}^2 + [G(\alpha, \epsilon_{L,n}^2) - \ell] \epsilon_{L,n}^2 \quad (9)$$

其中， $\ell$  为振荡器损耗 (round-trip loss)。这里的场为腔内 (intracavity) 场。

这篇论文 Section IV 讨论了振荡器的基本物理结果，细节此处不论。Section V 与当时两组 FEL0 实验比较，得到一致结果。Section VI 则是讨论了低增益情况下，Madey 定理尽在二阶量成立，对于更高阶情况不再成立。

这篇论文讨论的是 coasting/unbunched beam 进入波荡器的分析。对于 prebunched beam，是否能够推广这里的结果，值得琢磨。

## 4 自由电子激光振荡器增益与饱和的一种简单理论 [NIMA 407]

### A simple theory of gain and saturation in FEL oscillators

#### 4.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：Vinit Kumar and Srinivas Krishnagopal (Centre for Advanced Technology, 印度)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168900297013727>

#### 4.2 摘要

这篇论文接续上一篇导读，基于 Maxwell-Lorentz 方程，给出关于自由电子激光振荡器 (free electron laser oscillator, FELO) 增益的理论计算。比起之前工作，分析中包含了 inhomogeneous broadening 效应<sup>4</sup>。导出的增益公式包含了增益对调谐参数 (detuning parameter)、光场强度 (intensity)、与能散的函数关系的解析形式，即  $G = G(\alpha, \epsilon_L^2, \sigma_\alpha)$ 。

#### 4.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文接续作者们上一篇工作 [1]，但是额外包含了束团有限能散的效应。处理方式利用先前结果对束团能散分布进行卷积，称 grand gain function

$$\tilde{G}(\alpha_0, \epsilon_L^2, \sigma_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha, \epsilon_L^2) \exp\left[-\frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right] d\alpha, \quad (10)$$

随后分析为了得到解析形式的表示式，将  $g_{0,2,4}$  根据 Dattoli 等人建议，写为近似的  $h_{0,2,4}$  形式。

- 贡献：相比于 [1]，这篇论文将  $g_{0,2,4}$  写成近似形式  $h_{0,2,4}$  之后

$$h_i(\alpha) = a_i \exp(-b_i \alpha^2) \sin(c_i \alpha), \quad i = 0, 2, 4 \quad (11)$$

其中,  $a_0 = 0.0833, b_0 = 0.025, c_0 = 0.5, a_2 = -0.000953, b_2 = 0.0488, c_2 = 0.859, a_4 = 0.0000117, b_4 = 0.07315, c_4 = 1.22$ 。

---

<sup>4</sup>即，有限能散、发射度效应等。

写成  $h$  形式之后，积分结果的解析形式可以写出，有最终的三参量、递归形式、推广的增益函数形式

$$\tilde{G}(\alpha, \varepsilon_L^2, \sigma_\alpha) = 2j_e \eta_0 \frac{1 - \exp[-(\eta_2 \varepsilon_L^2 + \eta_4 \varepsilon_L^4)]}{\eta_2 \varepsilon_L^2 + \eta_4 \varepsilon_L^4} \quad (12)$$

其中，

$$\begin{aligned} \eta_0(\alpha, \sigma_\alpha) &= \tilde{h}_0(\alpha, \sigma_\alpha) \\ \eta_2(\alpha, \sigma_\alpha) &= -2 \frac{\tilde{h}_2(\alpha, \sigma_\alpha)}{\tilde{h}_0(\alpha, \sigma_\alpha)} \\ \eta_4(\alpha, \sigma_\alpha) &= \frac{4}{3} \left[ \frac{\tilde{h}_2(\alpha, \sigma_\alpha)}{\tilde{h}_0(\alpha, \sigma_\alpha)} \right]^2 - 2 \left[ \frac{\tilde{h}_4(\alpha, \sigma_\alpha)}{\tilde{h}_0(\alpha, \sigma_\alpha)} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

考虑有限能散的情况，增益将随能散增加而下降，对于较低的调谐情况更是明显。相对地，有限能散对饱和功率的影响则相对较不敏感。如下图。

## 参考文献

- [1] Vinit Kumar and Srinivas Krishnagopal, Gain and saturation in free-electron laser oscillators, Phys. Rev. E 55, 1887 (1997). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.55.1887>



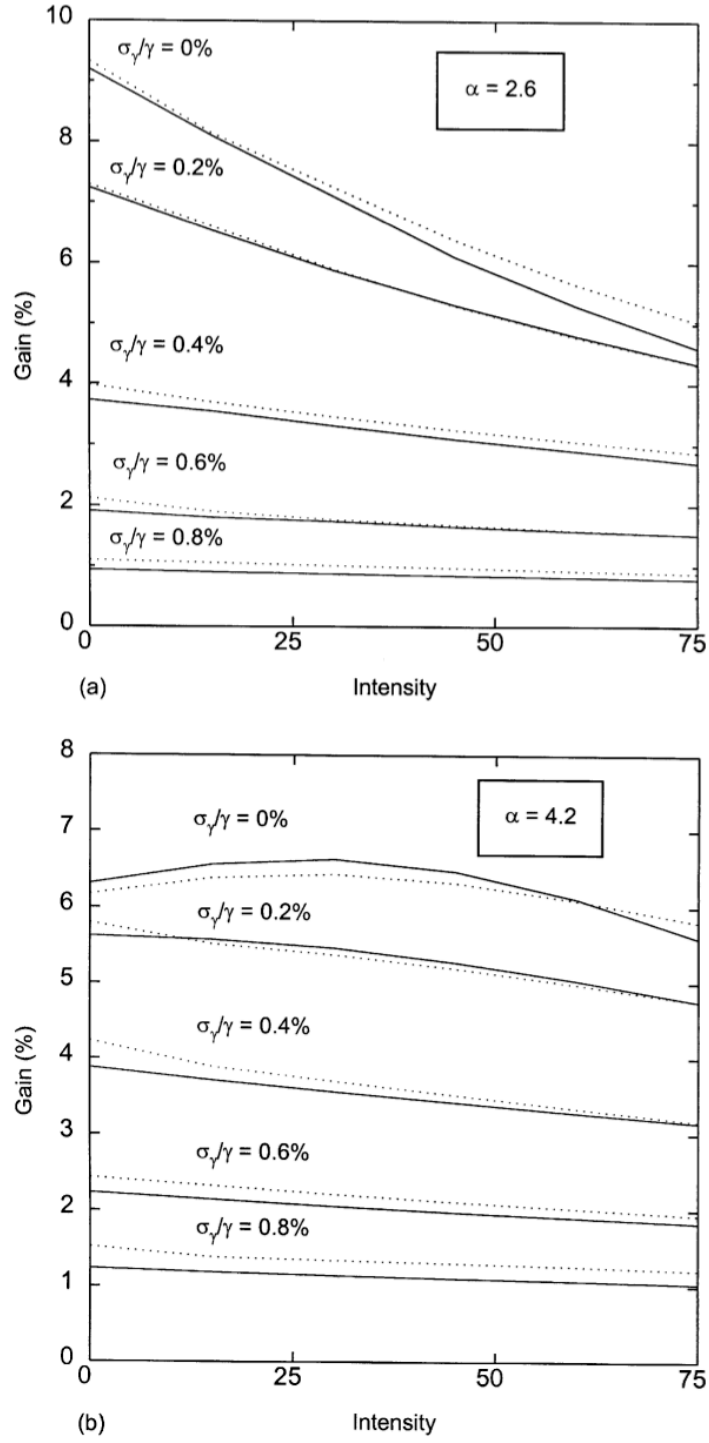


Fig. 1. Plots of the total gain as a function of the (dimensionless) optical intensity  $\varepsilon_L^2$  for different energy spreads ( $\sigma_\gamma/\gamma$ ), (a) for  $\alpha = 2.6$ , and (b) for  $\alpha = 4.2$ . Solid lines are the analytic curves and the dotted lines are the simulation curves. The analytic curves are obtained from Eq. (7)

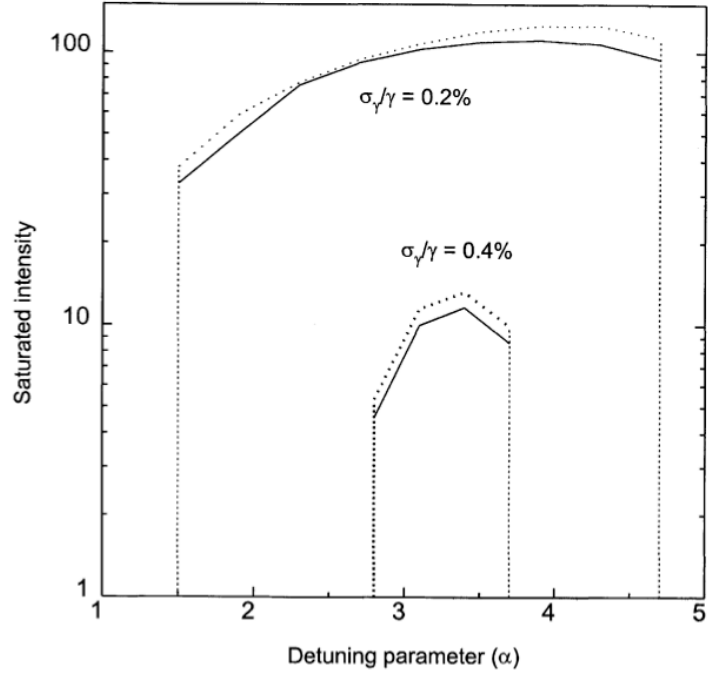


Fig. 3. Plot of the (dimensionless) saturated intensity  $e_{L,sat}^2$  in an FEL oscillator as a function of the detuning parameter  $\alpha$  for two different values of the relative energy-spread,  $\sigma_\gamma/\gamma = 0.2\%$  and  $0.4\%$ , respectively. Solid lines are the analytic curves and the dotted lines are the simulation curves. The analytic curves correspond to the solution of Eq. (9).

## 5 扭曲四极铁组的空间电荷效应 [NIMA 557]

### Space-charge effects in twisted quadrupoles

#### 5.1 基本信息

- 分类：多粒子动力学
- 作者：Dragan Toprek (VINCA Institute of Nuclear Sciences, 塞尔维亚)
- 类型：理论、数值模拟
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168900205022412>

#### 5.2 摘要

这篇论文通过解析与数值解，给出考虑空间电荷效应下，质子束在扭曲 (twisted) 四极铁组的动力学演化过程。这里假设束团为均匀、椭圆分布，推导了包含空间电荷效应时四极铁的传输矩阵。四极铁包含边缘场效应。

#### 5.3 贡献或创新点

- 贡献：这篇论文讨论的质子<sup>5</sup>动能为 10 eV 与 25 keV<sup>6</sup>，不同电流情况下，在扭曲四极铁组传输的动力学过程。分析先从横向空间电荷场开始

$$\begin{aligned} E_x^{\text{SC}} &= \frac{4I}{4\pi\epsilon_0\gamma^2va(a+b)}x, & x \leq a \\ E_y^{\text{SC}} &= \frac{4I}{4\pi\epsilon_0\gamma^2vb(a+b)}y, & y \leq b \end{aligned}$$

考虑了空间电荷场的四极铁薄透镜近似传输矩阵有

$$M_Q = \begin{pmatrix} 1 & \ell_Q & 0 & 0 \\ -K_x\ell_Q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_Q \\ 0 & 0 & K_y\ell_Q & 1 \end{pmatrix}$$

其中，

$$\begin{aligned} K_x &= K - \frac{4qI}{4\pi\epsilon_0mv^3a(a+b)} \equiv K - \Delta K_x \\ K_y &= K + \frac{4qI}{4\pi\epsilon_0mv^3b(a+b)} \equiv K + \Delta K_y \end{aligned}$$

<sup>5</sup>静止能量为 0.938 GeV。

<sup>6</sup>对质子而言， $\gamma \approx 1$ 。

与

$$K = \begin{cases} \frac{2qU}{mv^2 r_0^2} & \text{for electric quadrupole} \\ \frac{qB}{mvr_0} & \text{for magnetic quadrupole} \end{cases}$$

厚透镜的传输矩阵稍微复杂，有

$$M_{\text{TQ}}(L_Q) = \begin{bmatrix} C_1 & \frac{L_P}{g\pi} \left( g_1 S_1 - \frac{S_2}{g_2} \right) & \frac{S_2}{g_2} & \frac{L_P}{g\pi} (C_2 - C_1) \\ -\frac{\pi}{L_P} \frac{g}{g_1} S_1 & C_1 & 0 & \frac{S_1}{g_1} \\ -\frac{S_1}{g_1} & \frac{L_P}{g\pi} (C_1 - C_2) & C_2 & \frac{L_P}{g\pi} \left( \frac{S_1}{g_1} - g_2 S_2 \right) \\ 0 & -\frac{S_2}{g_2} & \frac{\pi}{L_P} \frac{g}{g_2} S_2 & C_2 \end{bmatrix}$$

其中，

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \frac{1}{L_Q} \sqrt{-K_x + K_y + K_x K_y L_Q^2} \\ g &= \tilde{K} \left( \frac{L_P}{\pi} \right)^2, \quad g_1 = \sqrt{1+g}, \quad g_2 = \sqrt{1-g} \\ S_1 &= \sin \left( \pi \frac{L_Q}{L_P} g_1 \right), \quad S_2 = \sin \left( \pi \frac{L_Q}{L_P} g_2 \right) \\ C_1 &= \cos \left( \pi \frac{L_Q}{L_P} g_1 \right), \quad C_2 = \cos \left( \pi \frac{L_Q}{L_P} g_2 \right) \end{aligned}$$

描述束团使用  $\sigma$  矩阵，定义为

$$\sigma(z) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

这篇论文忽略细节，给出根据 Ref. [1] 的结果，将扭曲四极铁组出口处的  $\sigma$  矩阵写为如下参数形式

$$\sigma(z) = R \left( \frac{kz}{2} \right) \begin{bmatrix} 4 \frac{k^2 + 4\tilde{K}}{k^2} A_H^2 + \frac{k^2}{\tilde{K}^2} A_L^2 & 0 & 0 & 2 \frac{k}{\tilde{K}} A_L^2 \\ 0 & 16 \frac{\tilde{K}^2}{k^2} A_H^2 & 8 \frac{\tilde{K}}{k} A_H^2 & 0 \\ 0 & 8 \frac{\tilde{K}}{k} A_H^2 & 4 A_H^2 + \frac{k^2 - 4\tilde{K}}{\tilde{K}^2} A_L^2 & 0 \\ 2 \frac{k}{\tilde{K}} A_L^2 & 0 & 0 & 4 A_L^2 \end{bmatrix} R \left( -\frac{kz}{2} \right)$$

由此可以导出束团的 (推广的)Twiss 参数，此处不论。

这篇论文第二部分为数值计算，列写每个粒子的运动方程如下

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{q}{m} \frac{G_E}{\gamma v_z^2} \{ [x - kxx'y] \cos kz \\ &\quad + \left[ y + \frac{k}{2} (x^2 - y^2) x' \right] \sin kz \} + \frac{qI}{\pi \epsilon_0 m \gamma^3 v_z^3} \frac{1}{a(a+b)} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'' = & -\frac{q}{m} \frac{G_E}{\gamma v_z^2} \left\{ -[y + kxyy'] \cos kz \right. \\
& \left. + \left[ x + \frac{k}{2} (x^2 - y^2) y' \right] \sin kz \right\} + \frac{qI}{\pi \epsilon_0 m \gamma^3 v_z^3} \frac{1}{b(a+b)} y \\
T_k'' = & -qG_E \left[ x'^2 - y'^2 + 2k(xy' + x'y) - \frac{k^2}{2} (x^2 - y^2) \right] \\
& \times \cos kz - 2qG_E \left[ x'y' - k(xx' - yy') - \frac{k^2}{2} xy \right] \sin kz \\
& + qG_E \frac{q}{\gamma} \left\{ \left[ x^2 + y^2 + \frac{k}{2} (x^2 - y^2) (xy' + x'y) \right] \right. \\
& \times \sin^2 kz + [x^2 + y^2 - kxy(xx' - yy')] \cos^2 kz \\
& \left. + \left[ \frac{k}{2} (x^2 - y^2) (xx' - yy') - kxy(xx' - yy') \right] \right. \\
& \left. \times \sin kz \cos kz \right\}
\end{aligned}$$

这篇论文第三部分给出两个例子，分别考虑 10 eV 与 25 keV、不同电流下质子束团沿扭曲四极铁组的动力学演化过程。

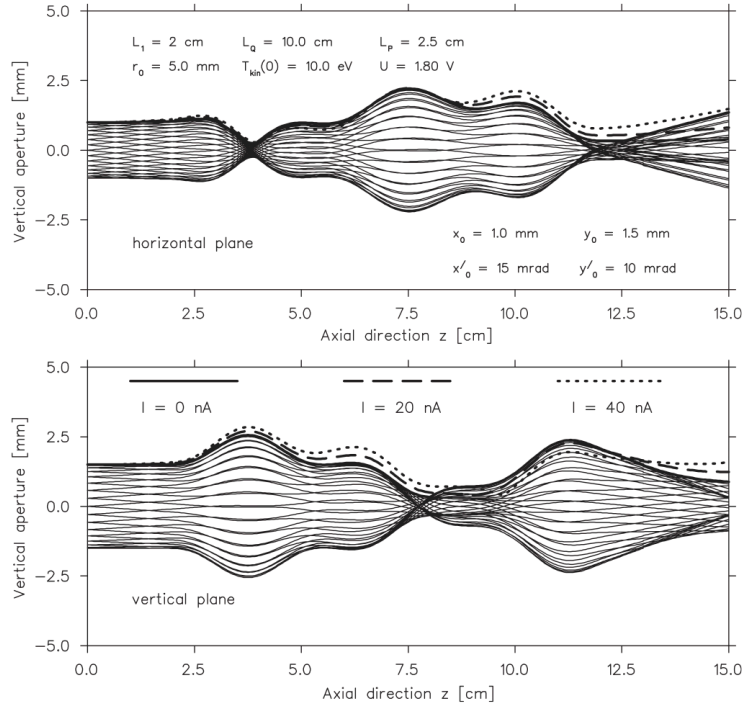


Fig. 1. Rays trace (thin full line) in the horizontal (upper part) and the vertical (lower part) of 10 eV proton beam (beam current  $I$  is zero) through the beam line segment consisting of two drift lengths separated by the electric twisted quadrupole. The thick lines presented the beam envelope for different values of the beam current  $I$ . The markers are explained in the text.

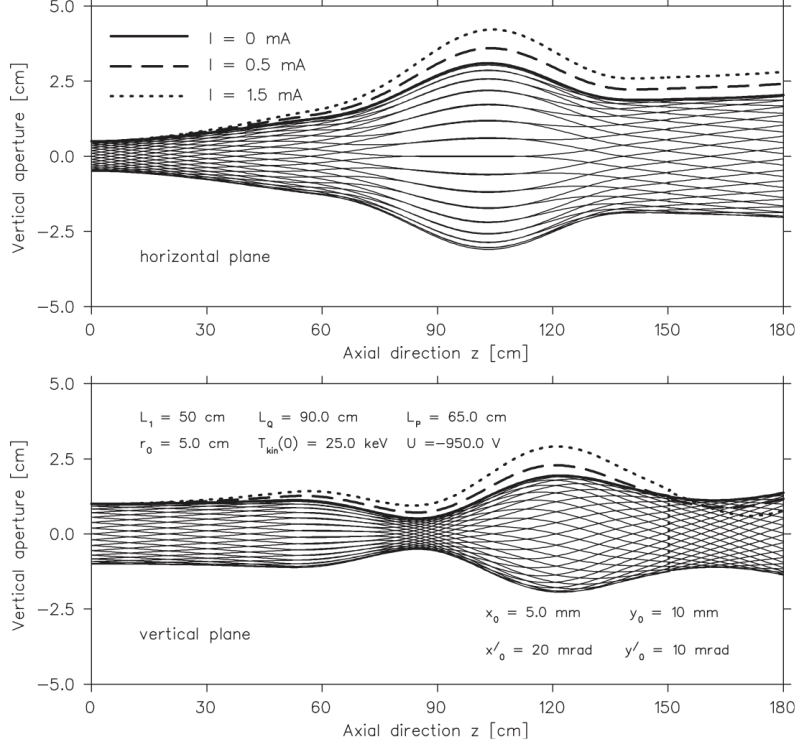


Fig. 3. Rays trace (thin full line) in the horizontal (upper part) and the vertical (lower part) of 25 keV proton beam (beam current  $I$  is zero) through the beam line segment consisting of two drift lengths separated by the electric twisted quadrupole. The thick lines presented the beam envelope for different values of the beam current  $I$ . The markers are explained in the text.

## 5.4 其它

这篇论文采用的理论模型细节可参考 [1]。此外，空间电荷主导的束团动力学，有时候需要采取切片分析，特别是当优化发射度为考量目标时。可参考 [2, 3, 4, 5]。

## 参考文献

- [1] A. Morita and Y. Iwashita, Analysis of helical quadrupole focusing channel, PRST-AB 6, 014001 (2003). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.6.014001>
- [2] P. Sing Babu, A. Goswami, and V. S. Pandit, Effect of nonuniform radial density distribution on the space charge dominated beam bunching, Phys. Plasmas 18, 113104 (2011). <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3660672>
- [3] J. R. Harris, B. R. Poole, and J. W. Lewellen, Solenoid transport of beams with current-dependent initial conditions, Journal of Applied Physics 122, 093302 (2017). <https://doi.org/10.1063/1.5000698>

- [4] J. R. Harris, Transport of intense beams with current-dependent initial conditions in linearly tapered solenoid channels, *Laser and Particle Beams* 37, 312-323 (2019).<https://doi.org/10.1017/S0263034619000612>
- [5] P. Sing Babu, A. Goswami, and V. S. Pandit, Studies of space-charge-dominated multispecies beam in a solenoid based beam transport line, *Physics of Plasmas* 19, 113112 (2012).<https://doi.org/10.1063/1.4768457>

## 6 螺线管与 RF 耦合器导致的横向耦合过程束团发射度的准确相消条件 [PRAB 21-01]

**Exact cancellation of emittance growth due to coupled transverse dynamics in solenoids and rf couplers**

### 6.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：David H. Dowell, Feng Zhou, and John Schmerge (SLAC)
- 类型：理论、模拟、实验
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.21.010101>

### 6.2 摘要

电子枪或注入器中的旋转弱磁场或射频 (radio frequency, RF) 电场分量将耦合束团的横向水平与垂直方向的运动，引入横向维度间的关联，降低束团亮度。这篇论文讨论两种常见的束团横向耦合机制：

1. 螺线管前的四极铁；
2. 电子枪注入器中斜 RF 耦合器产生的斜射频电场分量。

这篇论文分析表明，可以通过引入一静四极场修正上述两种耦合，从而抵消引起的束团发射度增加，抵消程度取决于束团纵向长度。这篇论文包含构建问题的理论模型与利用数值模拟与实验量测印证方案的有效性。

### 6.3 贡献或创新点

- 创新点：利用横向四维线性传输矩阵分析横向束团耦合动力学过程，给出在不考虑空间电荷效应的纯光学情况下，抵消发射度增长的条件。
- 贡献：这篇论文对高占空比 (duty factor)、高重频或高平均电流操作的电子枪注入器系统具有实际应用意义，因为这种操作模式下，一般束团横向尺寸较大，容易感受到非线性场分量而产生畸变 (aberration)。比如，对 spherical aberration 而言，发射度增长与束团横向尺寸四次方成正比；对 chromatic aberration 而言，发射



度增长与束团横向尺寸平方成正比。

这篇论文考虑的上游非线性畸变用旋转或斜四极场表征，其实是一种抽象、简化描述，实际情况下，此种畸变源可能来自上游的任何位置。由于非线性畸变会影响电子束亮度，重新设计一电子枪或注入器未必实际，这篇论文提供的修正/抵消方案具有实际意义，能够在维持既有的设计或既有运行的注入器系统情况下(低成本)，在下游引入一静四极场修正上述两种耦合，从而抵消引起的束团发射度增加。

这篇论文从定义 rotated quadrupole field 开始。Rotated quadrupole field 可以通过叠加 normal quadrupole 与 skew quadrupole 得到，其中，normal 不会导致发射度增长(仅改变束团形状)，仅有 skew 会造成发射度增加。因此，修正时仅需要 skew quadrupole corrector。Rotated quadrupole 的传输矩阵可以写为

$$R_{\text{rotquad}}(\alpha, f) = R_{\text{rot}}(-\alpha)R_{\text{quad}}(f)R_{\text{rot}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\cos 2\alpha}{f} & 1 & \frac{-\sin 2\alpha}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\sin 2\alpha}{f} & 0 & \frac{\cos 2\alpha}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

其中， $\frac{1}{f} = \frac{e}{\beta\gamma mc} L_{\text{eff}} \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x,y=0}^\circ$

束团则以  $\sigma$  矩阵描述，线性传输过程按如下演化

$$\Sigma(1) = R_{\text{rotquad}} \Sigma(0) R_{\text{rotquad}}^T$$

其中，四维归一化发射度为  $\epsilon_{n,4D} = \beta\gamma\sqrt{\det \Sigma}$ 。经过选择四极铁后，不会产生额外的四维发射度，但是横向  $x, y$  二维发射度会改变，量化如下

$$\epsilon_{n,x} = \beta\gamma \sqrt{\det \begin{vmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xx'} \\ \Sigma_{xx'} & \Sigma_{x'x'} \end{vmatrix}}$$

经过旋转四极铁后，束团二维发射度改变为

$$\epsilon_{n, \text{rotquad}} = \beta\gamma \frac{\sigma_x \sigma_y}{f} |\sin 2\alpha| = \sigma_x \sigma_y \frac{eQ}{mc} |\sin 2\alpha|$$

为束团横向尺寸乘积  $\times$  集成梯度  $Q \times$  四极铁旋转角度正弦值。

这篇论文第二部分构建螺线管模型，包含边缘场效应。边缘场  $B_z(z)$  随  $z$  的改变引起非零  $B_r$ ，从而导致电子获得角向速度而开始(在螺线管中)旋转。对对称螺线管而言，相反的  $B_z(z)$  在出口刚好消掉入口处  $B_z(z)$  引起的效应，离开螺线管之

后，电子不再旋转。

由于  $B_z(z)$  不仅产生  $B_r$ ，还有  $B_\theta$ ，利用  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  可写为如下形式<sup>7</sup>

$$B_r + \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

其中， $B_\theta$  如果与  $B_z$  强度无关，则称为 stray quadrupole field；如果与  $B_z$  强度有关，则称为 anomalous quadrupole field。量化多少为 stray 与多少为 anomalous 不容易，可通过实验量测或数值计算。

对于旋转四极铁与螺线管组合，束团经过之后产生的发射度增加可写为

$$\epsilon_{n,\text{quad}+\text{sol}}(\alpha) = \sigma_{x,\text{sol}} \sigma_{y,\text{sol}} \frac{eQ}{mc} |\sin 2(KL + \alpha)|$$

其中，螺线管传输矩阵在该论文 Eq. (17) 给出

$$\begin{pmatrix} \cos^2 KL & \frac{\sin KL}{K} & \sin KL \cos KL & \frac{\sin^2 KL}{K} \\ -K \sin KL \cos KL & \cos^2 KL & -K \sin^2 KL & \sin KL \cos KL \\ -\sin KL \cos KL & -\frac{\sin^2 KL}{K} & \cos^2 KL & \frac{\sin KL \cos KL}{K} \\ K \sin^2 KL & -\sin KL \cos KL & -K \sin KL \cos KL & \cos^2 KL \end{pmatrix}$$

束团二维发射度随旋转四极铁角度改变如下图。

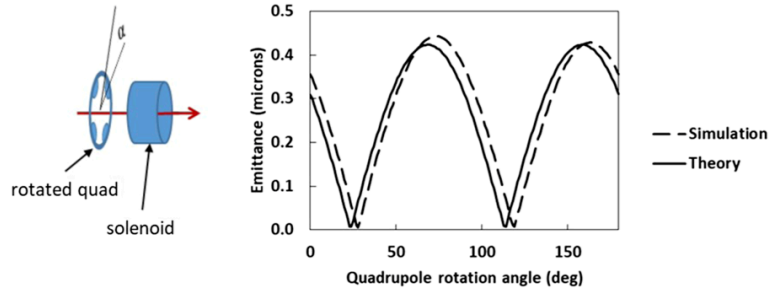


FIG. 4. The emittance growth for a quadrupole-solenoid system (shown on the left) as a function of the quadrupole rotation angle. The theory (solid line) is computed using Eq. (21) and the simulation (dashed line) is done with the GPT code. The initial beam size at the solenoid is 1 mm-rms for both the  $x$  and  $y$  planes. The quadrupole and solenoid fields are the same as Fig. 3.

注意到，这里假设初始束团无发射度，无能散，不考虑空间电荷效应。这里四维发射度不变，但是二维发射度增加，意味着横向  $x, y$  发生耦合。这里的发射度增加不是切片失配导致的投影发射度增加。因此，当满足  $KL + \alpha = \frac{\pi}{2}$  时，发射度增加  $\rightarrow 0$ ，不是补偿切片失配，而是修正束团横向耦合。

<sup>7</sup>概念上类似于倾斜二极铁产生的聚焦效应：产生了  $y$  方向额外聚焦，减弱了  $x$  方向聚焦，总和为横向净弯转。

这篇论文 Section IV.B 考虑 quadrupole+solenoid+quadrupole 组合，称 qsq 组合，其中，第二个四极铁 (称 quad corrector) 用来修正上游束团 (剩余的) 横向耦合。在 qsq 出口位置的二维发射度可以写成

$$\epsilon_{n,qsq} = \beta\gamma \left| \frac{\sigma_{x,sol}\sigma_{y,sol}}{f_1} \sin 2(KL + \alpha_1) + \frac{\sigma_{x,cor}\sigma_{y,cor}}{f_{cor}} \sin 2\alpha_{cor} \right|$$

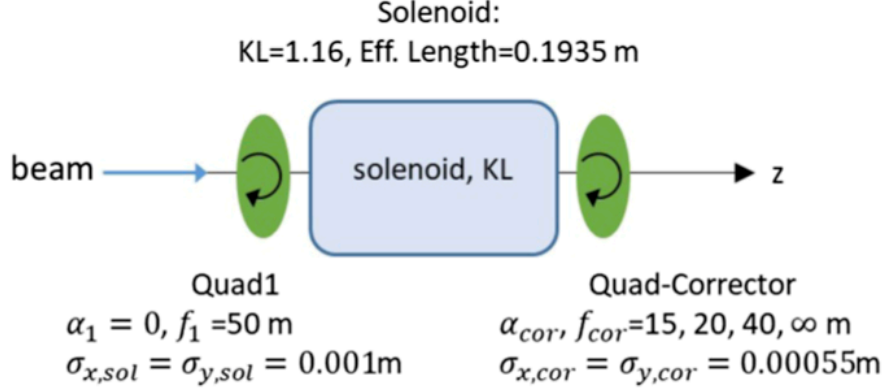


FIG. 5. Quadrupole-solenoid-quadrupole configuration and parameters used to compare emittance growth computed with the analytic model and numerical simulations shown in Fig. 6. The beam energy is 6 MeV.

通过调整 quad corrector 的聚焦长度与旋转角度，在 qsq 出口的发射度如下图所示，可以看到，理论预测与粒子跟踪模拟结果大致一致。

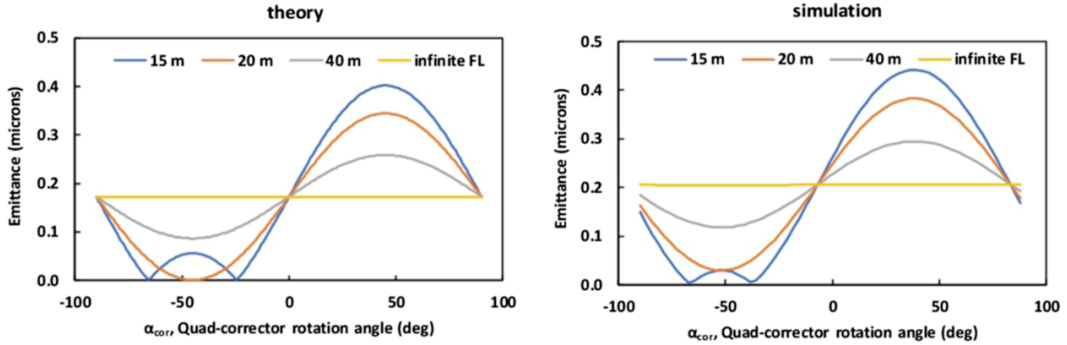


FIG. 6. Comparison of the transverse coupled emittance for a  $q_1s_{ol}q_{cor}$  configuration as a function of the quad-corrector rotation angle as computed by Eq. (23) (left) and a numerical simulation (right). The configuration and parameters are given in Fig. 5. The emittance growth is for quad1 with a fixed focal length of 50 m and quad-corrector focal lengths of 15, 20, 40, and infinite meters. The beam energy is 6 MeV. The 15-, 20-, and 40-m focal lengths correspond to 21.5, 14.3, and 5.4 G, respectively, integrated fields.

到目前为止，这里考虑的情况为存在螺线管前端的旋转四极磁场与修正耦合发射度条件。这篇论文第二部分 Section V 考虑螺线管前端注入器中 RF 耦合器产生

的斜射频电场分量

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x,0} + \frac{\partial E_x}{\partial x}x + \frac{\partial E_x}{\partial y}y \\ E_y &= E_{y,0} + \frac{\partial E_x}{\partial y}x - \frac{\partial E_x}{\partial x}y \end{aligned}$$

接着，化简、构建此 energy kick 形成的线性传输矩阵，有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\text{coupler}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{0x} + \tilde{v}_{xx}x + \tilde{v}_{xy}y \\ \tilde{v}_{0y} + \tilde{v}_{xy}x - \tilde{v}_{xx}y \end{pmatrix}$$

其中， $\tilde{v}_{0x,0y}$  为 dipole kick，可通过 steering dipole 修正， $\tilde{v}_{xx}$  为 normal quadrupole field，不贡献耦合发射度。 $\tilde{v}_{xy}$  为 skew quadrupole field，将贡献耦合发射度，将通过这篇论文提出的方案进行修正/抵消。

通过分析，得到在 RF 耦合器之后，在切片  $s$  的耦合发射度增加为

$$\epsilon_{n, \text{coupler}}(s) = \frac{eV_{\text{acc}}}{mc^2} \sigma_x^2 \left| v_{xy}^r \cos\left(\frac{\omega s}{c} + \phi_{\text{head}}\right) + v_{xy}^i \sin\left(\frac{\omega s}{c} + \phi_{\text{head}}\right) \right|$$

其中，指标 (superscript)  $r$  表示实部， $i$  表示虚部。这里假设  $s = 0$  为束团头部， $\phi_{\text{head}}$  为束团头部与 RF 的相位。投影发射度可通过积分平均得到，写成

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{n, \text{coupler}} \rangle &= \frac{\int_0^{l_{\text{bunch}}} \epsilon_{n, \text{coupler}}(s) ds}{\int_0^{l_{\text{bunch}}} ds} \\ &= \frac{eV_{\text{acc}}}{mc^2} \sigma_x^2 \left| (v_{xy}^r \cos \phi_{\text{head}} + v_{xy}^i \sin \phi_{\text{head}}) - (v_{xy}^r \sin \phi_{\text{head}} + v_{xy}^i \cos \phi_{\text{head}}) \frac{\Delta \phi_{\text{bunch}}}{2} \right| \end{aligned}$$

通过这篇论文 Section V.C 分析，证明以上的横向 (切片  $\phi_s$ ) 耦合发射度增加可以通过在下游一旋转四极铁

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\text{rotquad}} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos 2\alpha}{f}x - \frac{\sin 2\alpha}{f}y \\ -\frac{\sin 2\alpha}{f}x + \frac{\cos 2\alpha}{f}y \end{pmatrix}$$

从而修正/抵消，只要同时满足如下旋转四极铁“角度”与“焦距”

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{cor}} &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\tilde{v}_{xy}}{\tilde{v}_{xx}} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{v_{xy}^r \cos \phi_s - v_{xy}^i \sin \phi_s}{v_{xx}^r \cos \phi_s - v_{xx}^i \sin \phi_s} \\ \frac{1}{f_{\text{cor}}} &= \frac{eV_{\text{acc}}}{\beta \gamma mc^2} \sqrt{\tilde{v}_{xx}^2 + \tilde{v}_{xy}^2} = \frac{eV_{\text{acc}}}{\beta \gamma mc^2} \sqrt{(v_{xx}^r \cos \phi_s - v_{xx}^i \sin \phi_s)^2 + (v_{xy}^r \cos \phi_s - v_{xy}^i \sin \phi_s)^2} \end{aligned}$$

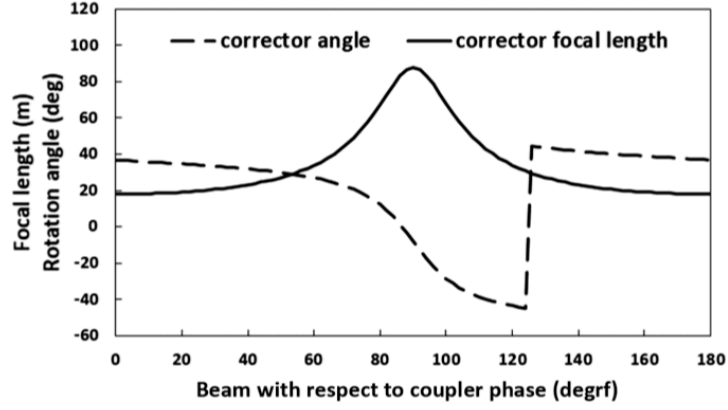


FIG. 10. The correction quadrupole rotation angle (dashed line) and focal length (solid line) vs the beam to coupler rf phase for a high-power coupler of a SRF linac. The corrector rotation angle is discontinuous near the coupler phase of  $\sim 125$  degrf where the denominator of Eq. (50) is zero and the  $\frac{1}{2}\tan^{-1}$  function jumps to stay within its principal value range of  $-45^\circ$  and  $45^\circ$ .

#### 6.4 其它

这篇论文提出此耦合发射度修正/抵消方案后，针对当前 LCLS-II 注入器设计参数，给出修正后结果，如下图。模拟结果显示，修正后预期得到与完美情况给出的束团发射度结果。

此外，这篇论文提出的利用旋转弱四极铁磁场修正束团传输过程可能的横向耦合，使得传输过程更“线性”的方案具有一般性，比如，也可以用在磁压缩器中，尽量减小在色散  $R_{16}$  段，纵向能散可能引起的横向  $x$ - $y$  耦合。

这篇论文 Eq. (35) 应为  $\epsilon_n = \beta\gamma\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$ ，为笔误。

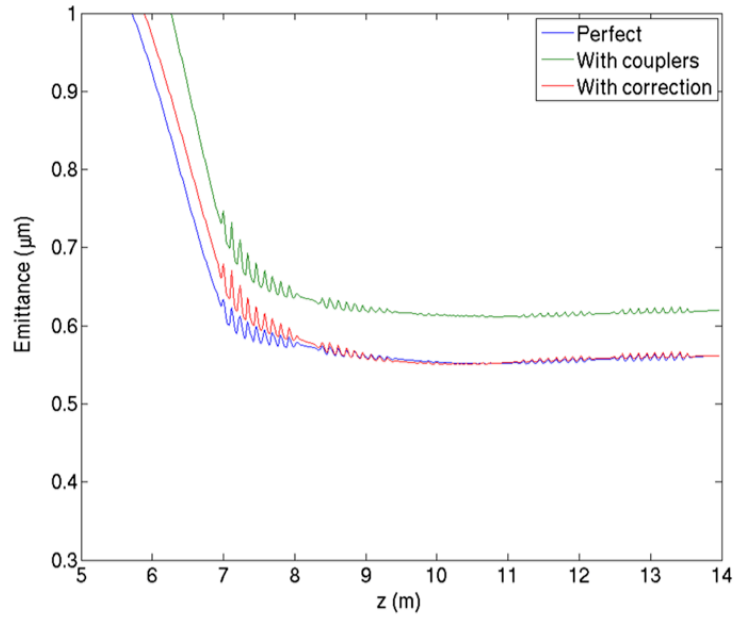


FIG. 11. LCLS-II injector emittance evolution with a perfect rf field (blue line), with 3D rf coupler fields (green line), and emittance cancellation using a weak (0.9 G) rotated ( $-17.2^\circ$ ) correction quadrupole (red line) for 300 pC.