

加速器束流动力学期刊论文导读 (2023 年 10 月)

受“京师物理”公众号启发，我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊，与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布，在 http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article 可以找到过去的导读文档。限于成员水平，导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流，我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2023 年 10 月) 结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]	jcytsai@hust.edu.cn
李嘉鹏	[??]	

目录

1	极短束团的暂态电阻壁尾场函数 [SLAC-PUB-11178] Transient resistive wall wake for very short bunches	3
2	有限纵向同步振荡对横向头尾不稳定性的影响 [NIM 193] The influence of finite synchrotron oscillation frequency on the transverse head-tail effect	7
3	小孔的衍射理论 [PR 66] Theory of diffraction by small holes	11
4	尾场与阻抗 [LNF-94/041] Wake Fields and Impedance	16
5	针对 European XFEL 二次束流的自由电子激光振荡器的数值模拟 [WEPD29] Numerical Simulations of an XFEL for the European XFEL Driven by a Spent Beam	18

1 极短束团的暂态电阻壁尾场函数 [SLAC-PUB-11178]

Transient resistive wall wake for very short bunches

1.1 基本信息

- 分类：尾场与阻抗计算
- 作者：Gennady Stupakov (SLAC)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.slac.stanford.edu/cgi-bin/getdoc/slac-pub-11178.pdf>

1.2 摘要

对圆柱对称金属真空管道，追赶长度大约为圆柱半径平方除以束长，即 $s \approx b^2/2\sigma_z$ 。既有标准的电阻壁尾场函数仅适用于金属管道长度长于追赶长度的情况，即稳态情况。这篇论文给出当金属管道长度与追赶长度差不多时的尾场函数分析，属于暂态情况。

1.3 贡献或创新点

这篇论文通过考虑下图中，源粒子与测试粒子经过从理想导体金属真空管道进入一段有限电导率金属真空管道时，考虑追赶效应后修正的尾场分析。

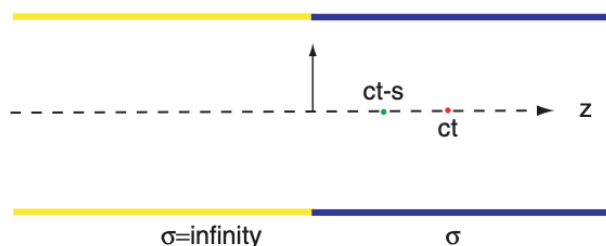


Figure 1: A round pipe of radius b has wall conductivity σ at $z > 0$; the wall conductivity at $z < 0$ is infinite. Two point charges separated by the distance s propagate along the axis of the pipe with the speed of light c .

- 创新点：在此之前的尾场函数一般忽略追赶效应，这篇论文通过分析从理想导体金属真空管道进入一段有限电导率金属真空管道时的电阻壁尾场，讨论了此追赶效应的影响。

- 贡献：这篇论文 Section 1 给出了简短明了的背景介绍，值得琢磨。Section 2 先罗列了分析步骤，然后在 Section 3、Section 4 一步步实现。此处忽略细节，仅总结步骤：

1. 在粒子还在理想导体金属真空管道时，其空间电荷电磁场视为尚未受到扰动情况。
2. 进入有限电导率金属真空管道时，管壁上的磁场按微扰法，可以当做理想导体金属真空管道时的横向磁场。
3. 利用 Leontovich 边界条件，可以写出管壁上的纵向电场 $E_z(r=b)$ 。
4. 解中空区域的 E_z 场方程。这篇论文利用格林函数法，采 Hertz 势。

$$\Pi(z, r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{cJ_0(\mu_m r/b)}{\mu_m J_1(\mu_m)} J_0\left(\frac{\mu_m c}{b} \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}}\right) h\left(t - \frac{|z|}{c}\right)$$

5. 将纵向尾场函数与纵向电场关联，有

$$w_\ell(s, t) = -\frac{c}{q} \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{E}(s, t')$$

注意，此处尾场函数不同于经典情况，还包含时间 t 的依存关系。

6. 定义尾场势 W 为

$$w_\ell(s, t) = \frac{\partial W(s, t)}{\partial s}$$

7. 求解后，有尾场势

$$W(s, t) = W_0(s)R(v)$$

其中， W_0 为稳态尾场势，而 $R(v)$ 为修正项， $v = \sqrt{2cts/b^2}$ 。对电阻壁来说，修正项为

$$R(v) = 1 - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m v \sin(\mu_m v) + \cos(\mu_m v) - 1}{\mu_m^3 v^2 J_1(\mu_m)}$$

其中， μ_m 为贝索函数 J_0 的第 m 个根。修正项 R 如下图 Fig. 3:

8. 根据得到的尾场函数 (势)，这篇论文最后考虑了高斯束团在考虑追赶效应下，经过一段有限电导率电阻壁时的束团整体尾场情况，

$$w_{\text{bunch}}(s, \ell) = \frac{1}{\ell} \int_s^\infty ds' \lambda(s') w_\ell(s' - s, \ell/c)$$

如下图 Fig. 4 所示：

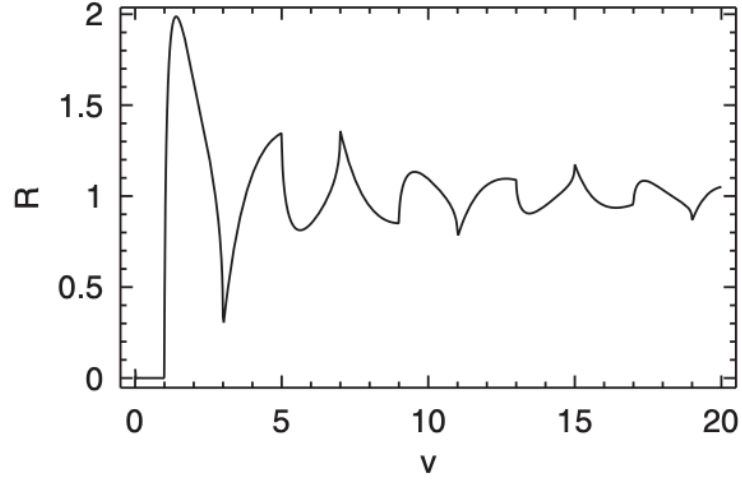


Figure 3: Plot of the function R .

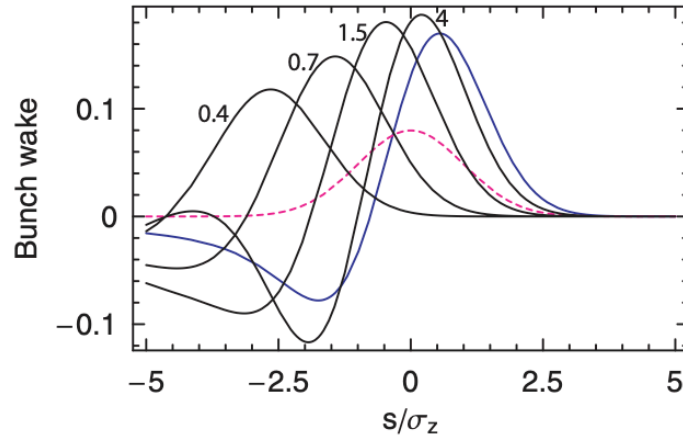


Figure 4: Wake for a Gaussian bunch for different values of the parameter $2l\sigma_z/b^2$ indicated by a number near each curve. The blue curve shows the wake in the limit $l = \infty$, and the dashed magenta line is the Gaussian distribution of the bunch.

1.4 其它

这篇论文采 CGS 单位制。

这篇论文对局域与全域位置坐标，与时间坐标的关系采 $s = ct - z$ ，其中， s 为局域位置坐标。与其它有效教科书采 $z = s - ct$ 不同，其中， s 为全域位置坐标。此差别宜留意。

2 有限纵向同步振荡对横向头尾不稳定性的影响 [NIM 193]

The influence of finite synchrotron oscillation frequency on the transverse head-tail effect

2.1 基本信息

- 分类：多粒子集体效应
- 作者：Richard Talman (CERN)
- 类型：理论、计算
- 链接：[https://doi.org/10.1016/0029-554X\(82\)90234-8](https://doi.org/10.1016/0029-554X(82)90234-8)

2.2 摘要

基于 Pellegrini 与 Sands 关于横向头尾不稳定性的理论模型，这篇论文给出了改进的分析，考虑了纵向同步振荡 tune Q_s 的影响，集体效应利用了宽带谐振腔阻抗模型。对于短束长情况，当横向 betatron tune shift ΔQ 接近 Q_s 时，两个振荡模之一出现放大效应 (blow up)。基于此改进的分析，这篇论文给出了单束团阈值电流。此外，还讨论了此效应对 LEP 加速器的影响。

2.3 贡献或创新点

根据 [1]，这篇论文讨论的属于强头尾不稳定性 (strong head-tail instability)。

- 创新点：大致有二。

一、这篇论文一开始写出的头尾粒子运动方程具有一般性，不同于现今教科书里的简化后的形式。这是因为这篇论文当时 (1982 年) 仍处于构建头尾不稳定性理论模型的早期阶段，对关键物理效应还未明确前，谨慎处理讨论每个效应可能的影响，值得借鉴。其中，“假设”了粒子自身不受自身尾场影响 ($\eta = 0$)、忽略辐射阻尼效应 ($h' = 0$)、忽略追赶效应 (或推迟效应)。

二、化简后写出的运动方程为一组二阶、耦合微分方程，采 Bogoliubov & Mitropolsky 法求解。此法具有一般性，值得借鉴。

- 贡献：参考下图

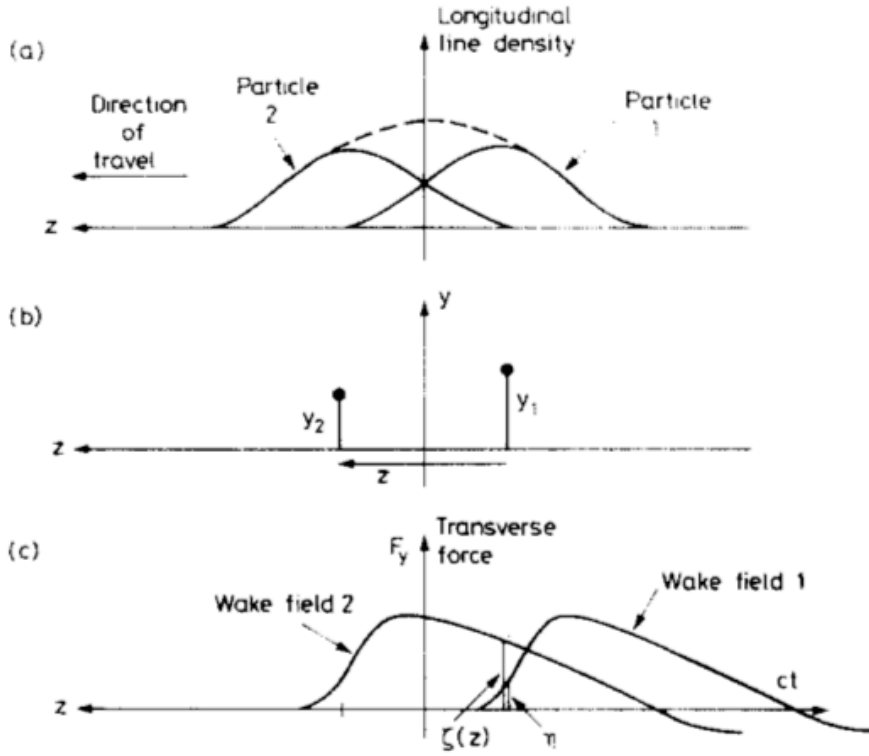


Fig. 1. (a) Sketch of particle distributions. (b) Definition of coordinates. (c) Sketch of transverse wake fields.

对头部粒子 (2) 与尾部粒子 (1) 而言，其运动方程分别有

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2h'\dot{y}_1 + Q^2 \left[1 - \frac{\xi Q_s A}{\alpha c'} \sin Q_s t \right] y_1 &= -4Q\Delta\eta y_1 - 4Q\Delta\zeta(z)y_2 \left(t - \frac{z}{c'} \right) \\ \ddot{y}_2 + 2h'\dot{y}_2 + Q^2 \left[1 - \frac{\xi Q_s A}{\alpha c'} \sin Q_s t \right] y_2 &= -4Q\Delta\eta y_2 - 4Q\Delta\zeta(z)y_1 \left(t - \frac{z}{c'} \right) \end{aligned}$$

考虑到同步振荡，头尾两粒子的纵向相对坐标应满足

$$z = z_2 - z_1, \quad z_2 = -z_1 = (A/2) \cos Q_s t$$

以上为一组二阶、耦合、延迟微分方程，通过一些假设 (细节此处不论)，将推迟项按泰勒展开，得到如下简化后的一组二阶、耦合、微分方程，有

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + Q^2 y_1 + 2Q\Delta y_2 &= R_1 \\ \ddot{y}_2 + Q^2 y_2 + 2Q\Delta y_1 &= R_2 \end{aligned}$$

其中，等式右边驱动项有

$$R_{1,2} = 2Q\Delta y_{2,1} - 2h'y_{1,2} \pm \frac{Q^2\xi Q_s A}{\alpha c'} \sin Q_s t y_{1,2} - 4Q\Delta\eta y_{1,2} \\ - 4Q\Delta\zeta (\pm A \cos Q_s t) \left(y_{2,1} \mp \dot{y}_{2,1} \frac{A}{c'} \cos Q_s t \right)$$

此式适用于短束团情况。后面将假设尾场 $\zeta(z)$ 为 step function，即

$$\zeta(z) = U(z) = 0 \quad z < 0 \\ = 1 \quad z > 0$$

注意到，这篇论文里提到电子束团称短束团，提到质子束团称长束团。此外，上面的运动方程中， c' 与 h' 表征的时间尺度不太一样，以绕行一圈时间为单位时间，而不是以“秒”为单位时间。考虑了 step function 尾场之后，头尾粒子的差别就体现出来了，于是

$$R_1 = D \sin Q_s t y_1 - 2Q\Delta [-1 + 2U(\cos Q_s t)] y_2 \\ R_2 = -D \sin Q_s t y_2 - 2Q\Delta [-1 + 2U(-\cos Q_s t)] y_1 \\ D = Q^2\xi Q_s A / (\alpha c')$$

这篇论文接着采 Bogoliubov & Mitropolsky 法求解以上耦合微分方程组。第一步，定义正交坐标 (normal coordinate) $d_{1,2}$

$$d_1 = y_1 + y_2 \\ d_2 = y_1 - y_2$$

然后，以正交坐标改写以上方程，有

$$\ddot{d}_1 + Q_1^2 d_1 = S_1 \\ \ddot{d}_2 + Q_2^2 d_2 = S_2 \\ Q_{1,2}^2 = Q^2 \pm 2Q\Delta \simeq (Q \pm \Delta)^2 \\ S_{1,2} = (D \sin Q_s t \pm 4Q\Delta T_t) d_{2,1}$$

可以看到，形式上看起来变得简单许多。对非 step-function wake，或是一般形式的阻抗函数，利用傅里叶级数展开后保留少数几项，此法仍适用。

第二步，按阶迭代。先从第一阶开始，令 $d_1 = a \cos \psi$, $d_2 = 0$ ，代入 $S_{1,2}$ 与 $d_{1,2}$ 的方程，可以得到 a, ψ 需要满足的方程，有

$$\frac{da}{dt} = A^{(1)}(a) + A^{(2)}(a) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} = Q_1 + B^{(1)}(a) + B^{(2)}(a) + \dots$$

一般保留 $A^{(1)}, B^{(1)}$ 即可。求解 a, ψ 后, $d_{1,2}$ 解形式的下一阶迭代可写成

$$d_1 = a \cos \psi + u_1(a, Q_s t, \psi)$$

$$d_2 = u_2(a, Q_s t, \psi)$$

再将以上代入 $S_{1,2}$ 与 $d_{1,2}$ 的方程。

这篇论文 Section 3 给出方程式, Section 4 给出求解过程, Section 5 与既有理论比较, Section 6 考虑了更一般的阻抗, 细节此处不论。后面基于 LEP 与 CESR 的几个参数, 利用此模型论证头尾不稳定性可能的阈值电流, 并与实验上的观察比较。

2.4 其它

由于此模型为双粒子模型, 只能体现两种模式, 称 sum mode(较低频) 或 difference mode(较高频)。这篇论文给出的模型仅适用于短束团情况。对质子束, 束长可能很长, 甚至出现蛇形 (snake bunch), 此时双粒子模型不再适用。

参考文献

- [1] A.W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993). <https://www.slac.stanford.edu/~achao/wileybook.html>

3 小孔的衍射理论 [PR 66]

Theory of diffraction by small holes

3.1 基本信息

- 分类：尾场与阻抗计算
- 作者：H.A. Bethe (Cornell 大学)
- 类型：理论
- 链接：<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.66.163>

3.2 摘要

这篇论文分析电磁辐射通过波长远大于其孔径的“小孔径”情况，找到一个满足 Maxwell 方程组和边界条件的完整解。尽管该解适用于理想导体平面屏幕上的圆形小孔，但该方法可适用于更一般的问题，比如更大的孔径。

该方法基于在衍射孔中使用虚构的磁电荷和磁电流，好处是此法能自动满足完美导体屏上的边界条件。通过巧妙调整磁电荷和磁电流，使其在孔中产生正确的切向磁场和法向电场，得到的结果与 Kirchhoff 方法的结果完全不同，给出了对应的衍射电场和磁场值。衍射场可视为由位于孔平面的磁矩和垂直于其的电矩引起。

这篇论文给出的理论适用于由小孔耦合的谐振腔体相互激发的问题。此理论给出了与普通耦合电路相似的方程。两个耦合腔体的相位和幅度关系并不是唯一确定，而是存在两种稍有不同频率的振荡模式。此外，这篇论文还处理了从一个腔体到另一个腔体的激励问题。

3.3 贡献或创新点

- 创新点：一般（在当时）分析电磁辐射的衍射时，采 Kirchhoff 方法。既有的 Kirchhoff 方法适用于“大孔径”情况，即孔径尺寸大于电磁辐射波长。此外，Kirchhoff 原始方法以标量 (scalar) 形式描述¹，但是电磁辐射场应为向量 (vector)。无论是 Kirchhoff 原始方法或改进的方法，在衍射孔附近的导体平面均不满足切向电场为零的边界条件。完整的向量解且满足边界条件的衍射场曾由 Sommerfeld 给出，但

¹后来由 J.A. Stratton 将 Kirchhoff 原始标量理论推广到向量的等价形式。

是形式过于复杂。

因此，这篇论文给出的创新点可以视为：分析特别针对“小孔径”情况，且理论模型满足 Maxwell 方程组和对应的边界条件。

- 贡献：这篇论文 Section 2，作者先从 Kirchhoff 方法开始，考虑一维波动方程 $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ ，利用格林定理，将通解写为

$$u(r) = \int d\sigma \left[-\frac{\partial u_0}{\partial x'}(r') \varphi(|r - r'|) + u_0(r') \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right]$$

其中， $\varphi(r) = e^{ikr}/r$ 。在理想导体平面圆孔外要求 $u(x=0) = 0$ 。Kirchhoff 方法宣称：在圆孔外要求： $u_0 = 0, \partial u_0 / \partial x' = 0$ ，在圆孔里要求 u_0 已知。对小孔情况，不妨假设圆孔里的 u_0 为常数，则上式可化简为

$$u(r) = -A \left[\frac{\partial u_0}{\partial x'} \varphi(r) + u_0 \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} \right]$$

接着，这篇论文论证了 Kirchhoff 方法无法满足边界条件 $u(x=0) = 0$ 。

再利用 Stratton 推广的向量 Kirchhoff 方法，其理想导体衍射平面后方 (包含衍射屏) 的电场可写为

$$E(r) = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma [ikn \times H(r') \varphi - (n \times E(r')) \times \text{grad} \varphi - n \cdot E(r') \text{grad} \varphi]$$

经过论证，发现积分里的第一与第三项均可满足切向电场连续特性。对于法向电场，则对应积分里的第二项。如果要处理衍射屏入射与出射两侧沿 x 方向的电场，则需要保留第二项以满足法向的边界条件。

这篇论文 Section 3，作者利用 Maxwell 方程组与边界条件，给出了衍射屏圆孔内与外必须满足的边界条件，作为后面继续分析的根本约束条件，有

$$E_{1\text{tan}} = E_{2\text{tan}} \text{ in the hole}$$

$$E_{1\text{tan}} = E_{2\text{tan}} = 0 \text{ for } x = 0 \text{ outside the hole}$$

$$H_{2\text{tan}} - H_{1\text{tan}} = H_{0\text{tan}} \text{ in the hole}$$

$$\Rightarrow H_{2\text{tan}} = \frac{1}{2} H_{0\text{tan}} \text{ in the hole}$$

$$\Rightarrow E_{2x} = \frac{1}{2} E_{0,x} \text{ in the hole}$$

这篇论文 Section 4，求解 Maxwell 方程，试着建构等效的磁电荷 η 和磁电流 K 。思路主要参考 Stratton 一书，细节此处不论。最终给出衍射后的电场与磁场，分

别有

$$E(r) = \int K(r') \times \text{grad } \varphi d\sigma$$

$$H(r) = \int (ikK(r')\varphi - \eta(r') \text{grad } \varphi) d\sigma$$

现在的目标变成求解电磁辐射场在小孔衍射时，在圆孔上的等效磁电荷 η 和磁电流 K 。最终结果为

$$K = \frac{1}{\pi^2} \left(ik(a^2 - r'^2)^{\frac{1}{2}} H_0 + \frac{1}{2(a^2 - r'^2)^{\frac{1}{2}}} r' \times E_0 \right)$$

$$\eta = -\frac{1}{\pi^2(a^2 - r'^2)^{\frac{1}{2}}} r' \cdot H_0$$

万事具备，这篇论文 Section 5 开始计算圆孔后方的衍射电磁场，给出

$$E = \frac{1}{3\pi} k^2 a^3 \varphi_0 \kappa \times (2H_0 + E_0 \times \kappa)$$

$$H = -\frac{1}{3\pi} k^2 a^3 \varphi_0 \kappa \times (2H_0 \times \kappa - E_0)$$

其中， κ 为衍射方向的单位向量。以上满足

$$H = \kappa \times E$$

$$E = -\kappa \times H$$

与平面电磁波一致。此外，这篇论文还计算了坡印廷向量，此处不论。

这篇论文 Section 6 比较了以上解与 Kirchhoff 解。给出不同的定标关系，有

$$H_B \sim k^2 a^3 H_0 H_K \sim k a^2 H_0$$

这篇论文 Section 7 考虑在圆孔内与圆孔外附近的场的行为，在 Section 8 考虑了此理论模型的可能推广。最后，这篇论文的 Section 9 讨论了一个实际应用，即带有小圆孔的谐振腔受到外部电磁场激励或谐振腔圆孔内电磁场耦合到外部的演化方程。这一节的分析根据 Condon 的思路：向量位函数模式分解。考虑向量位函数以谐振腔正交基底模式 A_m 展开，写为

$$A = \sum_m p_m(t) A_m(r)$$

代入 Maxwell 方程组，等式右边激励项与电流密度有关

$$\frac{d^2 p_m}{dt^2} + \frac{\omega_m}{Q_m} \frac{dp_m}{dt} + \omega_m^2 p_m = \frac{4\pi I}{V} \int A_m \cdot ds$$

此式与电路理论 RLC 或力学中的谐振子方程类似。注意到，在 Condon 原始论文中，激励源为电流回路。这篇论文的分析为磁电流与磁荷，对应的向量位函数为 F ，正交基底写为 F_m

$$F = \sum_m q_m(t) F_m(r)$$

伴随的正交关系为 $\int F_l \cdot F_m dV = V \delta_{lm}$ 。电场与磁场与之关联，有

$$H = \frac{1}{c} \sum_m \frac{dq_m}{dt} F_m(r)$$

$$E = \sum_m q_m k_m A_m(r)$$

其中， $A_m = \text{curl } F_m / k_m$ 。

经过推导，可以得到谐振子方程以 F_m 的形式，有

$$\frac{d^2 q_m}{dt^2} + \frac{\omega_m}{Q_m} \frac{dq_m}{dt} + \omega_m^2 q_m = -\frac{4\pi c^2}{V} \int d\sigma K \cdot F_m$$

进一步化简，考虑最低阶贡献，有

$$\frac{d^2 q_m}{dt^2} + \frac{\omega_m}{Q_m} \frac{dq_m}{dt} + \omega_m^2 q_m = \frac{4}{3} \frac{c^2 a^3}{V} [k_m E_{0x} A_{mx}(0) - 2ik H_0 \cdot F_m(0)]$$

于是，问题转化为针对特定情况，一旦找到 E_0, H_0 ，则向量位函数 A 的展开系数 q_m 随时间演化即可求得。这篇论文分三种情况讨论：

1. 电磁辐射场从谐振腔圆孔外部激励
2. 电磁辐射场从谐振腔圆孔内部耦合出来
3. 电磁辐射场在圆孔内部、外部都非零

这篇论文讨论了第二种情况，给出 q_m 的解，有

$$q_m = \frac{4}{3} A \frac{a^3}{V} \sin \omega_1 t \frac{\omega_1}{\omega_m^2 - \omega_1^2} [2\omega_1 F_1(0) \cdot F_m(0) - \omega_m A_{1x}(0) A_{mx}(0)]$$

物理图像为，谐振腔圆孔内的第 m 阶模通过圆孔耦合出来后，其它 $\neq m$ 的模混进辐射场，在空间中与第 m 阶模同时存在。对 $m = 1$ 情况，这篇论文继续讨论，包含其耦合出来后的模式频率，根据圆孔位置不同而有些微改变。

这篇论文的 Section 10 接着上一节结果，讨论从一个谐振腔到两个谐振腔，两谐振腔通过中间小孔的耦合时，场激励的动力学过程，值得仔细琢磨。Section 11 则是讨论两谐振腔通过中间小孔的耦合时，存在圆孔“错位”的情况。

3.4 其它

此论文采 CGS 单位制。讨论谐振腔圆孔时，参考的论文 E.U. Condon 亦为经典论文，有 E.U. Condon, Forced Oscillations in Cavity Resonators, J. App. Phys. 12, 129 (1941). <https://doi.org/10.1063/1.1712882>

4 尾场与阻抗 [LNF-94/041]

Wake Fields and Impedance

4.1 基本信息

- 分类：尾场与阻抗
- 作者：L. Palumbo, V.G. Vaccaro, and M. Zobov (主要机构：INFN-LNF，意大利)
- 类型：理论、综述
- 链接：<https://cds.cern.ch/record/276437>

4.2 摘要

电磁相互作用方面的知识对于优化粒子加速器性能以实现更高的电流最为必要，特别是在束流与周围环境之间的相互作用。由于束流产生的场对自身产生反馈效应，加速器可能发生许多集体不稳定现象。基本上，这些场产生了额外的尾场电压和能量增益，影响了纵向动力学，并且产生了横向动量脉冲，使束流偏转。这篇论文描述了这种相互作用与典型电磁部件的主要尾场、阻抗特征。

4.3 贡献或创新点

贡献：这是一篇早期总结讨论加速器中尾场与阻抗 – 特别是阻抗 – 的佳作。在大约 60 页的篇幅中，梳理了许多加速器中关于尾场与阻抗这套描述方式的套路与相关电磁部件的特性分析，值得仔细琢磨。值得一提的有以下几点：

- 定义尾场函数的方式从先定义 loss factor 开始，loss factor 的定义则从洛伦兹力对源粒子或测试粒子做功开始，物理图像相对清晰，且避开了复杂的数学
- 定义尾场函数的方式与经典教科书 [1] 不太一样，采更直观的方式定义
- 将 loss factor 的定义与坡印廷定理相关联，给出如下结果：

$$k = -\frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} E_z \left(z, t = \frac{z}{v} \right) dz = (+) \frac{1}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S \mathbf{P} \cdot \hat{n} dS$$

在论文里，最后等号给出负号 (-)，应该为正号 (+)。猜测可能源于作者在前面列写坡印廷定理时，与普遍电磁学教科书采的惯例不太一样导致

- 对多数阻抗谱,最容易与粒子束团产生能量交互的模称同步模 (synchronous mode), 即 $k = \omega/c$ 。此一结果可结合尾场函数定义涉及积分上下限为 $(-\infty, \infty)$, 利用平面波展开而证明。通过这个例子也说明了在真实加速器中, 其实不止 $k = \omega/c$ 同步模能与粒子束交换能量, 根本原因为积分上下限不是 $(-\infty, \infty)$, 而是 $(-L/2, L/2)$
- 对束团存在横向位置偏差的情况, 需要采多极展开, 于是介绍了经典教科书 [1] 中关于利用 $\cos m\theta$ 环束的尾场函数定义方式
- 此论文在 §6 介绍了均匀横截面的阻抗估算, 包含不同横截面的空间电荷场、不同横截面的电阻壁尾场。分析电阻壁尾场时, 避开使用 Leontovich 边界条件, 而是直接从 Maxwell 波方程出发, 但没有完整推导, 仅简短讨论
- 此论文较精彩的部分为 §7, 讨论了非均匀横截面的阻抗估算与物理图像论证。先从追赶长度 (catch-up distance) 开始, 包含许多具有代表性的例子, 如:
 1. step-in、step-out
 2. taper-in、taper-out
 3. 单个谐振腔: 等效 RLC 模型
 4. 衍射模型: 更高频近似
 5. 多个谐振腔周期性串列结构
 6. 浅层类腔结构阻抗
 7. 束测元件的宽带阻抗评估: 为少数讨论此议题的综述论文
 8. 开孔的阻抗
 9. 宽带谐振腔阻抗模型、使用动机与两种改进模型, 包含 Hofmann-Zotter 模型、Heifets-Bane 模型

4.4 其它

这篇论述内容与物理图像讨论值得仔细琢磨、借鉴。

参考文献

- [1] A.W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993). <https://www.slac.stanford.edu/~achao/wileybook.html>

5 针对 European XFEL 二次束流的自由电子激光振荡器的数值模拟 [WEPD29]

Numerical Simulations of an XFELO for the European XFEL Driven by a Spent Beam

5.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：J. Zemella, J. Rossbach, C.P. Maag, and H. Sinn (主要机构：DESY)
- 类型：模拟
- 链接：<https://accelconf.web.cern.ch/FEL2012/papers/wepd29.pdf>

5.2 摘要

欧洲自由电子激光器 (European XFEL) 位于德国汉堡的 DESY 实验室，为一 X 射线自由电子激光 (x-ray free-electron laser, XFEL) 实验室。按目前基线设计，辐射光脉冲将基于 SASE 过程在长波荡器中产生。辐射光脉冲的波长将在 5 nm 至 0.05 nm 之间。由于 SASE 脉冲在纵向相干性不好，目前正在进行大量研究以克服 SASE 脉冲的统计波动。几年前，Kim 等人提出了一种基于能量回收直线加速器 (energy-recovery linac, ERL) 的自由电子激光振荡器 (XFEL oscillator, XFELO)，利用钻石布拉格晶体构建 X 射线范围内的高反射腔体。由于 European XFEL 将基于超导加速器结构，它将提供高重频、一长串电子束，这可能也适用于 XFELO。特别是，在 SASE 自由电子激光器出口处的废弃或二次束仍然可能适用于驱动 XFELO。这篇论文使用二次束电子束的数值模拟，呈现以用于 European XFEL 上基于钻石晶体的 XFELO 振荡器。

5.3 贡献或创新点

- 创新点：以往考虑 XFELO 设计或模拟时，一般假设注入的电子束为新鲜电子束。这篇论文基于 European XFEL 经过 SASE 产生辐射光之后的即将废弃的电子束，即二次束。利用二次束是否仍能够驱动 XFELO，为这篇论文创新点。
- 贡献：经过 SASE、高增益 FEL 过程后，电子束品质下降。下面 Table 1 总结二次束的一些参数与 XFELO 谐振腔的设计参数。Table 2 则总结利用二维圆柱对称

GINGER 数值模拟程序给出的关于 XFEL 的输出特性参数。

Table 1: Electron Beam Parameters and Cavity Parameters Used for Numerical Simulation [15]

beam energy E_B	GeV	14.5
bunch charge q	nC	1.0
bunch length (rms) t_B	fs	75.6
peak current I_A	kA	4.9
normalized emittance ε_n	mm mrad	1.0
slice energy spread σ_E	MeV	0.45 resp. 10
energy chirp E_{Chirp}	MeV	10.0
betafuncion $\beta_{x,y}$ at ω_0	m	6.0
radiation wavelength λ_R	nm	0.1029
undulator length L_U	m	15.0
undulator periode λ_U	m	0.03
cavity length L_{Cav}	m	66.62
focal length f	m	18.82
round-trip reflectivity R_{Cav}	%	87.5
output coupling T_{Cav}	%	4

Table 2: Results of the Numerical Simulation for the Photon Pulses of an XFEL

rms slice energy spread σ_E	MeV	0.45	10.0
detuning parameter η	$\cdot 10^{-4}$	0	6.36
gain per passage		1.1	0.105
round-trips to saturation		26	190
photon pulse energy E_P	μJ	286	211
rms photon pulse length t_P	fs	42.8	52.2
relative spectral width f_{rel}	$\cdot 10^{-7}$	8.17	7.6
time bandwidth product		0.64	0.73
photon beam size at ω_0 σ_{ω_0}	μm	14.0	
photon beam size at L_1 σ_{L1}	μm	39.2	
opening angle θ_R	μrad	2.33	
couple out photon per pulse	$\cdot 10^9$	5.93	4.37
peak brilliance PB	$\text{B} \cdot 10^{34}$	1.1	0.69

利用 GINGER，这篇论文给出两种不同初始能散的驱动电子束对后端 XFEL 的演化过程，如图 Fig. 3。从时域分布看，电子 rms 束长约 75 fs，辐射脉冲 (rms) 约 52 fs。

这篇论文接着讨论晶体热导 (thermal conductivity) 问题，更具体地说，讨论了弹

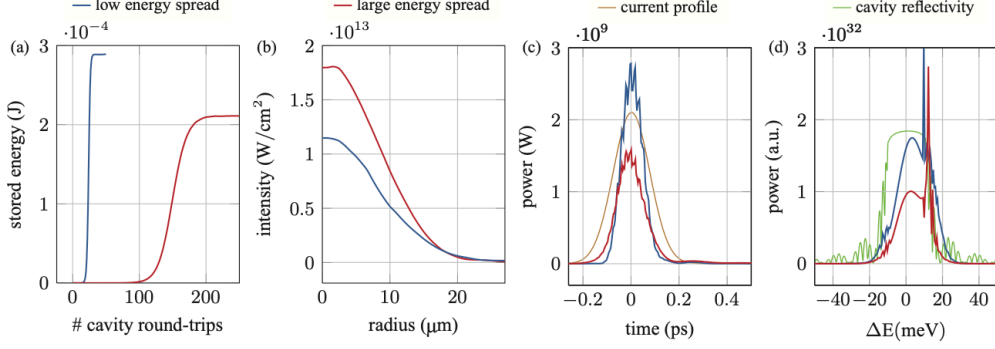


Figure 3: The results of numerical simulation with an electron bunch with a charge of 1 nC (see Tab. 1); (a) Stored photon pulse energy versus number of cavity round-trips; (b) Intensity of photon pulse at saturation versus radial position of simulated grid at the center of the undulator; (c) Power of photon pulse at saturation in time domain at the end of the undulator; (d) Power of photon pulse at saturation in frequency domain at the end of the undulator. The large energy spread case describes the case of a spent beam from a SASE FEL (red).

道热传输 (ballistic heat transport)²。数值计算根据傅立叶定律的热扩散方程

$$q = -\lambda \nabla T$$

其中, q 为 heat flux, λ 为热导率, T 为温度。衡量热传导一般采等效热导率, 有

$$\lambda_{\text{eff}}(T) = \frac{\lambda(T)}{\frac{4}{3} \frac{\ell(T)}{L} + 1}$$

其中, L 为晶体厚度, ℓ 为平均自由路径 (mean free path), 有 $\ell(T) = \frac{3\lambda(T)}{c_V(T)v_s}$, c_V 为比热, v_s 为声速。下图 Figs. 4、5 给出不同厚度的晶体 L_C , 对于不同辐射脉冲长度 t_{sep} 情况下, 单发辐射脉冲导致的晶体温度随时间上升的趋势。温度上升后, 可能使晶体的 Bragg 中心能量/波长产生偏移。

²弹道热传输指的是在材料中的热传导过程, 其中热载体, 如声子 (晶格的量子振动) 或电子, 在材料内移动而不会遭受明显的散射或与其他粒子的碰撞。在此背景下, “弹道”类比于其在物理学中的含义, 表明载体自由且无阻碍地移动。在弹道热传输中, 热载体在传播过程中保持其一致性和能量。这种现象通常在非常洁净和高度有序的材料中观察到, 如单晶固体或某些纳米结构, 其中热载体的平均自由程远远大于材料的尺寸。在这种材料中, 通常导致热阻力的散射机制被大大减小, 使热传导非常高效。然而, 需要注意的是, 弹道热传输通常限于非常具体的条件和材料。在大多数实际情况和日常材料中, 热传导涉及弹道和扩散传输的组合, 其中载体既经历散射又发生碰撞, 导致更典型的扩散热流。

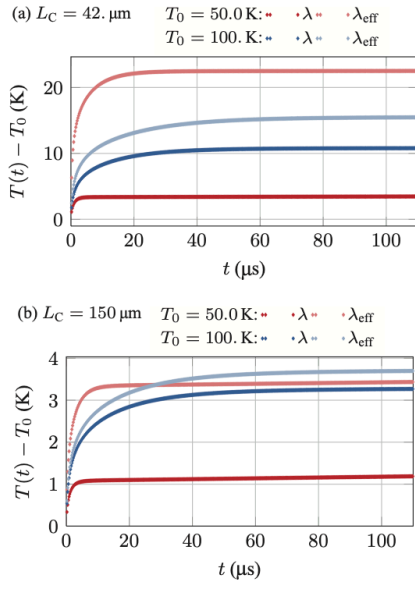


Figure 4: Temperature of a Diamond crystal before absorbing the following $2 \mu\text{J}$ pulse with an rms width of $39 \mu\text{m}$ and pulse separation of 222 ns for a crystal thickness of (a) $42 \mu\text{m}$ and (b) $150 \mu\text{m}$.

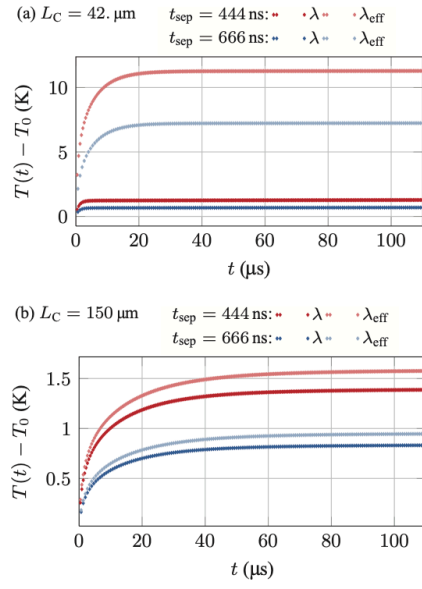


Figure 5: Temperature of a Diamond crystal before absorbing the following pulse for different pulse separation times of (a) $42 \mu\text{m}$ and (b) $150 \mu\text{m}$ thickness.