

加速器束流动力学期刊论文导读 (2023 年 1 月)

受“京师物理”公众号启发，我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊，与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布，在 http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article 可以找到过去的导读文档。限于成员水平，导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流，我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2023 年 1 月) 结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]	jcytsai@hust.edu.cn
周剑晖	[5]、[6]	
李嘉鹏	[7]	

目录

1	高增益自由电子激光的准线性理论 [NIMA 475] Quasilinear theory of high-gain FEL saturation	3
2	自由电子激光是好看的玩具还是有效 (有用) 的工具? [NIMA 528] FELs, nice toys or efficient tools?	5
3	一般横截面束流管壁的阻抗计算 [PRE 47] Coupling impedance of beam pipes of general cross section	8
4	(时变) 非自治系统线性微分方程的不稳定解 Unstable Solutions of Nonautonomous Linear Differential Equations	12
5	超快电子衍射实验中电子脉冲传播的解析模型 [JAP 99] Analytic model of electron pulse propagation in ultrafast electron diffraction experiments	14
6	超快电子衍射理论: 电子束特性的作用 [JAP 104] Theory of ultrafast electron diffraction: The role of the electron bunch properties	18
7	用双臂迈克尔逊干涉仪产生飞秒微束团串 [PRAB 20-10] Generation of a femtosecond electron microbunch train from a photocathode using twofold Michelson interferometer	23

1 高增益自由电子激光的准线性理论 [NIMA 475]

Quasilinear theory of high-gain FEL saturation

1.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：N.A. Vinokurov, Z. Huang, O.A. Shevchenko, and K.-J. Kim (主要机构：BINP)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016890020101525X>

1.2 摘要

对饱和特性的认识有助于更好地评估高增益自由电子激光效能。这篇论文通过对耦合 Maxwell-Vlasov 方程的准线性近似，研究自由电子激光的饱和特性。

1.3 贡献或创新点

- 创新点：这是一篇较早期讨论高增益自由电子激光从线性/指数增长进入饱和区间的工作，通过对耦合 Maxwell-Vlasov 方程的准线性近似，研究自由电子激光的饱和特性。
- 贡献：这里提到的准线性近似适用于当激光辐射场为近似单频（或单模）情况下，即不考虑存在谐波辐射场的情况。单模情况下允许谱宽不超过 Pierce 参数，即 $\Delta\omega \leq \rho$ 。更具体说，构建的准线性理论基于以下两个假设：
 - 辐射场包络 A 无时间或相位 (ψ) 依存关系；
 - 电子束相空间分布 $f(\psi, \eta, \xi)$ 包含谐波成分，为 ψ 的周期性函数，有

$$f(\psi, \eta, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\eta, \xi) e^{in\psi}$$

基于以上两个假设，本来的电子束相空间方程（或 Vlasov）方程

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial f}{\partial \psi} - 2 \operatorname{Re}(A e^{i\psi}) \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

可以写为

$$\frac{\partial f_n}{\partial \xi} + i\eta n f_n = A \frac{\partial}{\partial \eta} f_{n-1} + A^* \frac{\partial}{\partial \eta} f_{n+1}$$

结合辐射场包络方程

$$\frac{dA}{d\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\psi} f \, d\eta d\psi$$

可以得到以下准线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + i\eta f_1 &= A \frac{\partial f_0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_0}{\partial \xi} &= 2 \operatorname{Re} \left(A^* \frac{\partial}{\partial \eta} f_1 \right) \\ \frac{dA}{d\xi} &= \int f_1 \, d\eta \end{aligned}$$

这篇论文进一步“改进”，给出如下形式的方程组，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + i\eta f_1 &= A \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + A^* \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^\xi e^{-2i\eta(\xi-\xi')} A(\xi') \frac{\partial}{\partial \eta} f_1(\eta, \xi') \, d\xi' \\ \frac{\partial f_0}{\partial \xi} &= 2 \operatorname{Re} \left(A^* \frac{\partial}{\partial \eta} f_1 \right) \\ \frac{dA}{d\xi} &= \int f_1 \, d\eta \end{aligned}$$

可以看到，准线性理论还不需要引入电子束的高次谐波。但是如果分析后饱和动力学，则需要引入高次谐波。

1.4 其它

这篇论文或许提供能够推广既有单次通过微束团不稳定性理论自小信号 (线性) 区间至大信号 (饱和) 区间的思路。可以通过粒子跟踪模拟验证单频假设适用性。

此处的准线性近似在线性/指数增长至饱和时适用，但是，后饱和将不再适用。更多讨论可以参考 [1] 的 §4.4。

参考文献

- [1] Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and R. Lindberg, Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers: Principles of Coherent X-Ray Generation, Cambridge University Press (2017)

2 自由电子激光是好看的玩具还是有效 (有用) 的工具? [NIMA 528] FELs, nice toys or efficient tools?

2.1 基本信息

- 分类：自由电子激光
- 作者：A.F.G. van der Meer (FOM Institute for Plasma Physics, 荷兰)
- 类型：其它
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444517272500109>

2.2 摘要

自由电子激光是一种精巧、有趣的装置，推进它的效能给加速器物理学家带来挑战。尽管如此，促进自由电子激光装置建设研究的合理性在于其作为独特的辐射光源的潜力。自从提出并初步实验验证可行性至今已经经过 25 年，人们好奇这个工具的效能与科研产出效率。这篇论文作者根据 10 年运行 FELIX 作为用户实验的经验回顾自由电子激光器扮演的角色是好看的玩具或是有效 (有用) 的工具。

2.3 贡献或创新点

- 贡献：这篇论文根据 FELIX 作为中红外 (mid-IR) 与远红外 (far-IR) 用户装置，总结其装置特性参数与科研产出。FELIX 装置示意图如下 Fig. 1，参数如 Table 1。FELIX 实验大致可以分为两类：relaxation 与 spectroscopy。前者例子有原子吸收后的暂态反应，如 Fig. 2(氢)、Fig. 3 (氘)、far-IR FEL 脉冲作为 probe 的研究，如 Fig. 4。后者关于光谱学实验，如 Fig. 5 与 Fig. 6。

这篇论文在 Section 4 根据装置科研产出的论文数与三代光源同步辐射装置相比。前者每年约产出 20-25 篇论文，而后者以 40 条束线为例，一年约产出 500 篇论文。排除投入建设与运行成本的差异 (同步辐射储存环高了约 15 倍)，两种装置的产出效率其实差不多。由此来看，自由电子激光装置勉强算是有效 (有用) 的工具。但是，从总产出论文数看，贡献却是几乎可以忽略的。

这篇论文在 Section 5 提到，需要考量自由电子激光输出特性的独特性，才能与其它科学装置相比时体现优越性。在红外光波段，或许不是太有竞争力。在短波长

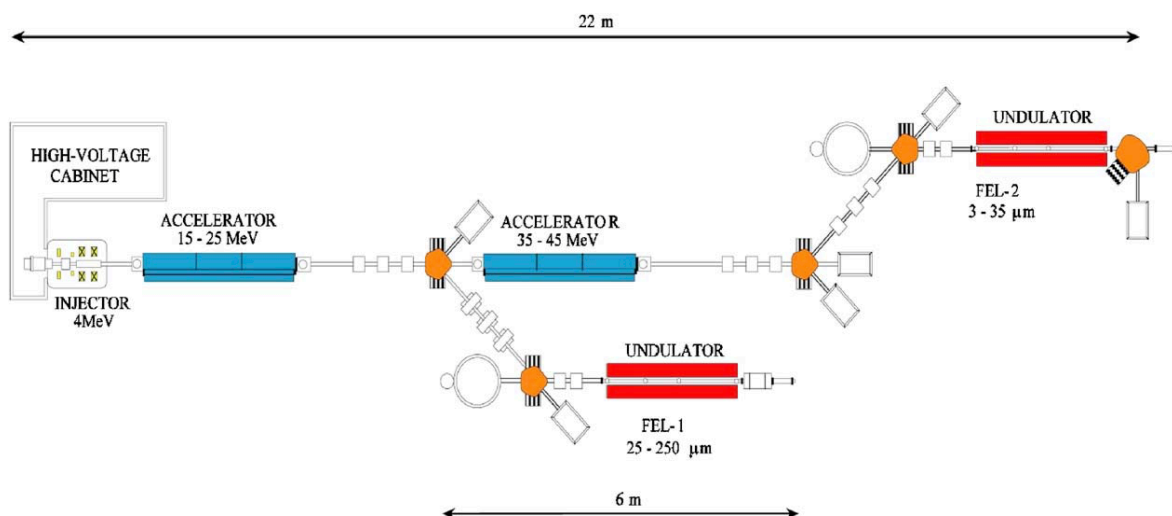


Fig. 1. General layout of FELIX showing the two beamlines for far- and mid-infrared generation.

Table 1
Characteristic parameters of FELIX

Tuning range	3–250 μm (3300–40 cm ⁻¹)
Rapid tuning	> 1 octave in a minute
Micropulse rep. rate	1 ns, 40 ns, single pulse
Macropulse rep. rate	up to 10 Hz
Micropulse energy	1–50 μJ
Micropulse power	up to 100 MW
Macropulse duration	4–8 μs
Bandwidth (adjustable)	0.4–6% (transform limited)
Polarization	> 99%
Beam quality	near diffraction limit
Beam hours	> 3000
Unscheduled downtime	< 5%

如 X 射线，则需要进一步观察。

论文最后提到，目前 FELIX 有两个波荡器输出，分别涵盖 $25 \sim 250 \mu\text{m}$ 与 $3 \sim 35 \mu\text{m}$ 。即将建设的 FELICE 具有特殊的谐振腔结构，允许直接腔内实验 (intra-cavity experiment)，将涵盖其间的 $3 \sim 100 \mu\text{m}$ 波段范围，且能够输出 10 J 脉冲能量，大约 100 倍 FELIX 的输出脉冲能量，示意图如 Fig. 7。

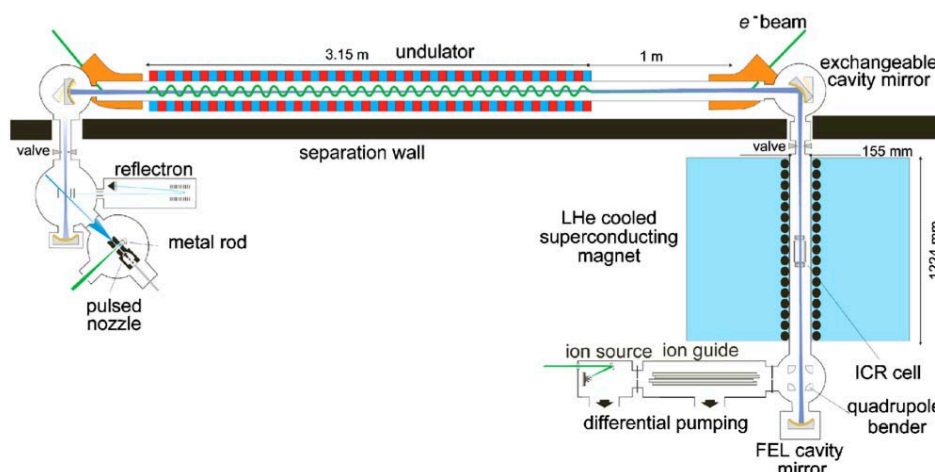


Fig. 7. General layout of the FELICE cavity including two intra-cavity setups: for IR-REMPI and IR-MPD experiments a high-resolution FTICR mass spectrometer and a molecular beam machine.

2.4 其它

关于 FELICE 的更详细介绍，可以参考 [1]。

参考文献

- [1] B.L. Militsyn et al., FELICE—the free electron laser for intra-cavity experiments, NIMA 507 (2003) pp.494-497. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900203009033>

3 一般横截面束流管壁的阻抗计算 [PRE 47]

Coupling impedance of beam pipes of general cross section

3.1 基本信息

- 分类：尾场、阻抗计算
- 作者：Robert L. Gluckstern, Johannes van Zeijts, and Bruno Zotter (主要机构：U. of Maryland)
- 类型：理论
- 链接：<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.47.656>

3.2 摘要

这篇论文推导了电阻壁横向与纵向阻抗的计算，考虑极端相对论粒子束与任意的管壁横截面。得到的阻抗表示式包含了金属管壁面上切向磁场的积分，其可以通过求解单极子与二极子的二维泊松方程得到。利用得到的阻抗显形式，考虑了横向截面为椭圆与矩形的情况，与极限情况下的圆截面与平行板情况。

3.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文定义阻抗时，采用更直观的定义方式。对于纵向阻抗，当驱动束流为 $J_z = I_0 \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) \exp(-jkz)$ 时，有

$$\begin{aligned}
 Z_{\parallel}(k) &= -\frac{1}{I_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z e^{jkz} \\
 &= -\frac{1}{|I_0|^2} \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* \\
 &= -\frac{L}{|I_0|^2} \oint dS E_z H_{1s}^* \\
 &= \frac{Z_0}{|I_0|^2} (1+j)(kL\delta/2) \oint dS |H_{1s}|^2
 \end{aligned}$$

对于横向阻抗，更具体说，源于驱动束流 $J_z = I_0 \delta(y) \exp(-jkz) [\delta(x - x_1) - \delta(x + x_1)]$

的横向二极 (dipole) 阻抗, 有

$$\begin{aligned}
Z_x(k) &= -\frac{1}{2kI_0x_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial E_z}{\partial x} e^{jkz} \\
&= -\frac{1}{4kx_1^2 |I_0|^2} \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* \\
&= -\frac{L}{4kx_1^2 |I_0|^2} \oint dS E_z H_{1s}^* \\
&= \frac{Z_0}{4x_1^2 |I_0|^2} (1+j)(L\delta/2) \oint dS |H_{1s}|^2
\end{aligned}$$

以上化简用到了法拉第定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ 与全电流定律 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - j\omega\epsilon\mathbf{E}$ 。此外, 可以通过 Leontovich 边界条件关联金属管壁上的电场与磁场, 有

$$E_z \cong -k\delta(1+j)Z_0H_{1s}/2$$

- 贡献: 根据上面对阻抗的定义可知, 求解横向或纵向阻抗即为求解金属管壁表面沿着横向角向的磁场 H_{1s} 。这个求解可以进一步与电场及标量位函数关联, 可写成

$$Z_0H_{1s} = E_{1n} = -\exp(-jkz)\nabla_{\perp}\Phi(x, y)$$

其中, 标量位函数为如下二维泊松方程的解

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi(x, y) = -Z_0I_0\delta(x - x_1)\delta(y - y_1)$$

这篇论文的 Section IV 与 Section V 为求解如上二维泊松方程, 分别考虑在椭圆坐标 (Sec. IV) 与直角坐标 (Sec. V) 情况, 包含存在镜像电荷对 Φ 的贡献。注意, 这里的讨论涉及特殊函数 Tschebyscheff polynomial。

有了位函数 Φ 之后, 可以求得阻抗, 对椭圆横截面, 有纵向阻抗

$$\frac{Z_{\parallel}(k)}{n_h Z_0} = \frac{(1+j)\delta}{2b} G_0(u_0)$$

其中, $n_h = kL/2\pi$

$$\begin{aligned}
G_0(u_0) &= \frac{\sinh u_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q_0^2(v)dv}{[\sinh^2 u_0 + \sin^2 v]^{1/2}} \\
Q_0(v) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos 2mv}{\cosh 2mu_0}
\end{aligned}$$

与横向阻抗

$$\frac{Z_{1x}(k)}{Z_0} = \frac{L(1+j)\delta}{2\pi b^3} G_{1x}(u_0)$$

其中

$$G_{1x}(u_0) = \frac{\sinh^3 u_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q_{1x}^2(v) dv}{[\sinh^2 u_0 + \sin^2 v]^{1/2}} Q_{1x}(v) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) \frac{\cos(2m+1)v}{\cosh(2m+1)u_0}$$

y 方向阻抗类似。

对矩形横截面，有纵向阻抗

$$\frac{Z_{\parallel}(k)}{n_h Z_0} = \frac{(1+j)\delta}{2b} F_0\left(\frac{b}{a}\right)$$

其中

$$F_0(\lambda) = \pi \left[\sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2(n\pi/2\lambda)} + \lambda \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2(n\pi\lambda/2)} \right]$$

与横向阻抗

$$\frac{Z_{1x}(k)}{Z_0} = \frac{L(1+j)\delta}{2\pi b^3} F_{1x}\left(\frac{b}{a}\right)$$

其中

$$F_{1x}(\lambda) = \frac{\pi^3}{8} \left[\sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{n^2}{\sinh^2(n\pi/2\lambda)} + \lambda^3 \sum_{\substack{n=2 \\ \text{even}}}^{\infty} \frac{n^2}{\cosh^2(n\pi\lambda/2)} \right]$$

y 方向阻抗类似。

下图 Fig. 1 与 Fig. 2 分别给出 $G_{0,1x,1y}$ 与 $F_{0,1x,1y}$ 的数值结果，可以看到椭圆与矩形结构有一定程度的相似性。

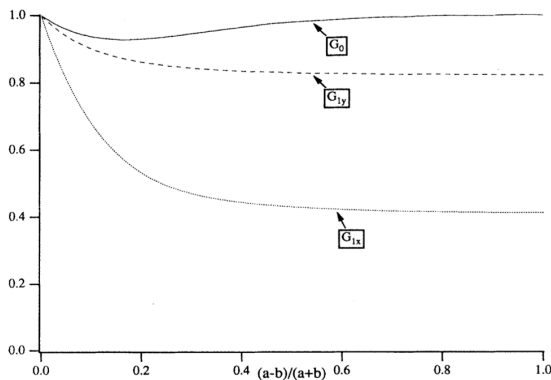


FIG. 1. Numerical values of $G_0(q)$, $G_{1x}(q)$, and $G_{1y}(q)$ for the elliptical pipe as a function of the “nome” $q = (a-b)/(a+b)$.

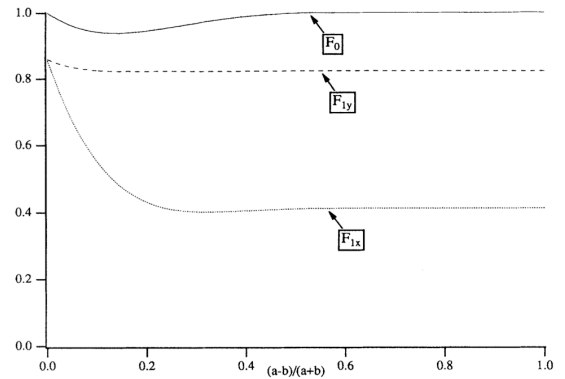


FIG. 2. Numerical values of $F_0(q)$, $F_{1x}(q)$, and $F_{1y}(q)$ for the rectangular case as a function of $q = (1-\lambda)/(1+\lambda) = (a-b)/(a+b)$.

利用以下积分恒等式

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dz}{\cosh^2 z} &= 1 \\ \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\cosh^2 z} &= \frac{\pi^2}{12} \\ \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\sinh^2 z} &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

这篇论文最后讨论了渐进情况，当椭圆截面退化为圆、矩形退化为平行板情况。

3.4 其它

这篇论文采取的阻抗定义有别于 [1] 假设金属管壁为圆柱轴对称分布结构。这个差别可能连带影响高阶阻抗与尾场函数的表示式形式，宜留意。

参考文献

- [1] A.W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993). <https://www.slac.stanford.edu/~achao/wileybook.html>

4 (时变) 非自治系统线性微分方程的不稳定解

Unstable Solutions of Nonautonomous Linear Differential Equations

4.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：Kresimir Josic and Robert Rosenbaum (University of Houston)
- 类型：其它
- 链接：<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/060677057>

4.2 摘要

对于 $x' = A(t)x$ 这类 (时变) 非自治动力系统, $A(t)$ 的特征值不能完全决定系统稳定性的事实的众所周知的。作为反例, 一般会给出一矩阵 $A(t)$, 其具有实部为负的特征值常量而系统对应的输出函数 $x(t)$ 随时间递增。这篇论文给出一个符合直觉、几何的解释, 并针对论文里的讨论给出可能的推广课题。

4.3 贡献或创新点

- 贡献：一般控制理论或是微分方程稳定性的讨论限于考虑 (时不变) 自治 (autonomous) 动力系统, 即 $x' = Ax$, 其系统稳定性要求矩阵 A 的特征值落在复频率平面的左半平面。然而, 对于 (时变) 非自治动力系统, 即 $x' = A(t)x$, 以上结论并不总是成立。
- 创新点：对于 (时变) 非自治动力系统, 通过构建 $A(t)$ 对应的不同形式的特征值, 如：特征值皆为负实数、一正一负实数等, 总是能够找到对应不稳定解。或者, 特征值皆为正实数, 但输出函数 $x(t)$ 为稳定解。因此, 这篇论文尝试通过几何的、直观的方式解释这个现象。

论文基本思路为, 先构造一自治矩阵 $A(t_0)$, 特别地, 在这篇论文中选最终导致不稳定解的矩阵, 形成一集合 \mathcal{B} 。接着, 这篇论文先研究 \mathcal{B} 中矩阵 B 的动力学, 参考 §2.1 与 §2.2。

对于非自治矩阵，这篇论文通过“旋转矩阵 R ”将之与 \mathcal{B} 关联，即

$$R(t, \omega) = e^{tG(\omega)} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad G(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

有

$$x' = A(t)x = (R(t, \omega)B[R(t, \omega)]^{-1})x$$

从 §3 的结论，知

$$\text{unstable autonomous} \quad \Rightarrow \quad \text{unstable non-autonomous}$$

或等价地

$$\text{stable non-autonomous} \quad \Rightarrow \quad \text{stable autonomous}$$

最后，这篇论文 §4.3 将连续时间系统推广到离散时间。

4.4 其它

这篇论文值得琢磨，预备知识仅需线性代数与部分微分方程知识。

5 超快电子衍射实验中电子脉冲传播的解析模型 [JAP 99]

Analytic model of electron pulse propagation in ultrafast electron diffraction experiments

5.1 基本信息

- 分类: 超快电子衍射 (UED)
- 作者: A.M. Michalik and J.E. Sipe
- 类型: 理论
- 链接: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.2178855>

5.2 摘要

超快电子衍射 (ultrafast electron diffraction) 是驱动理解基本超短物理和化学过程的最有前途的实验技术之一。UED 典型的实验可以认为由三个阶段组成, 第一个是超短激光脉冲从光电阴极发射一定数量的电子; 第二个是使束电子向目标的传播; 第三个是衍射来自目标的电子。在第二个阶段的一些早期研究中已经求解了 N 个电子的运动的牛顿方程, 这些电子的运动的初始条件由给定的分布函数决定。遵循这一点, 原则上可以通过对许多这样的数值运行进行平均, 但即使使用现代计算机进行计算, 该过程仍旧非常耗时。

这篇文章提出了一个平均场分析模型 (mean-field analytic model) 来研究超快电子衍射实验中使用的电子脉冲的传播。其中假设一个高斯形式并引入三个随时间变化的参数来表征电子脉冲, 尽管该近似模型会丢失一些细节的信息, 但仍然可以快速轻松地求解以给出脉冲动力学。该模型与 N 体数值模拟 (N-body numerical simulation) 的结果显示出极佳一致性。该模型是探索 UED 电子脉冲动力学便捷替代方案, 并可作为改进 UED 实验设计的工具。

5.3 贡献或创新点

- 创新点: 该文章使用两个假设来研究 UED 中电子脉冲传播。第一个是平均场近似, 它为分布函数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ 生成通常的经典动力学方程。第二个是用具有几个时间相关参数的高斯函数来近似演化分布函数。

从由库仑力相互作用 (库伦势 $V(\mathbf{r})$) 具有 N 个粒子的经典系统 (位置 \mathbf{r}_i , 动量 \mathbf{p}_i) 的运动方程出发, 引入一个正式分布函数 $f_D(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = \sum_{i=1}^N \delta[\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}] \delta[\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}]$ 从而得到该分布函数所满足的演化方程:

$$\frac{d\mathbf{r}_i(t)}{dt} = \frac{\mathbf{p}_i(t)}{m},$$

$$\frac{d\mathbf{p}_i(t)}{dt} = - \sum_j \frac{\partial \bar{V}[\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)]}{\partial \mathbf{r}_i(t)},$$

$$\frac{\partial f_D(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)}{\partial t} = - \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_D(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f_D(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \iint d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' \bar{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_D(\mathbf{r}', \mathbf{p}'; t)$$

对上式取平均, 并取最简单的近似 $\langle f_D(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) f_D(\mathbf{r}', \mathbf{p}'; t) \rangle = \langle f_D(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) \rangle \langle f_D(\mathbf{r}', \mathbf{p}'; t) \rangle$ 可以得到近似方程:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)}{\partial t} = - \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \iint d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}', \mathbf{p}'; t)$$

接下来该文章假设了电子的高斯分布, 并且引入了几个随时间变化的参数 (粒子在空间中的分布 $\sigma_{T,z}$, 平均动量通过脉冲的色散 $\gamma_{T,z}$, 以及位置相关平均动量的动能分布 $\eta_{T,z}$) 表征分布函数, 构建上式的近似解。可以做该近似的原因在于我们总可以选取这些参数, 使得分布函数在前几个时刻是符合运动方程演化的。需要注意的是, 此处没有考虑外加电场的作用, 并且电子束的质心是在原点处静止的, 另外这里的引入时间相关的变量也是一种近似, 其保证分布函数在前几个时刻是表现正常的。

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{2}{m} \gamma_i,$$

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{1}{m} \left(\eta_i + \frac{\gamma_i^2}{\sigma_i} \right) + \frac{Ne^2}{6\sqrt{\sigma_i}\pi} L_i(\xi),$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = - \frac{2\gamma_i\eta_i}{m\sigma_i},$$

在忽略库仑力的情况下, 上述方程可以获得完全解析的结果。即便考虑库仑力作用, 也只需进行积分计算即可获得数值结果, 并且相较于 N 体数值模拟有更快的速度。

$$\sigma_{T,z}(t) = ct^2/m^2 + b_{T,z},$$

$$\gamma_{T,z}(t) = ct/m,$$

$$\eta_{T,z}(t) = \frac{b_{T,z}}{t^2/m^2 + b_{T,z}/c}.$$

- 贡献：这篇文章提出了一个平均场分析模型 (mean-field analytic model)，该模型是 UED 中的电子脉冲传播问题一个很好的近似，可以快速轻松地求解以给出脉冲动力学。该模型是探索 UED 电子脉冲动力学便捷替代方案，并可作为改进 UED 实验设计的工具。在本文最后还讨论了非静止的电子束质心和引入外加驱动电场的情况。

部分数值结果：

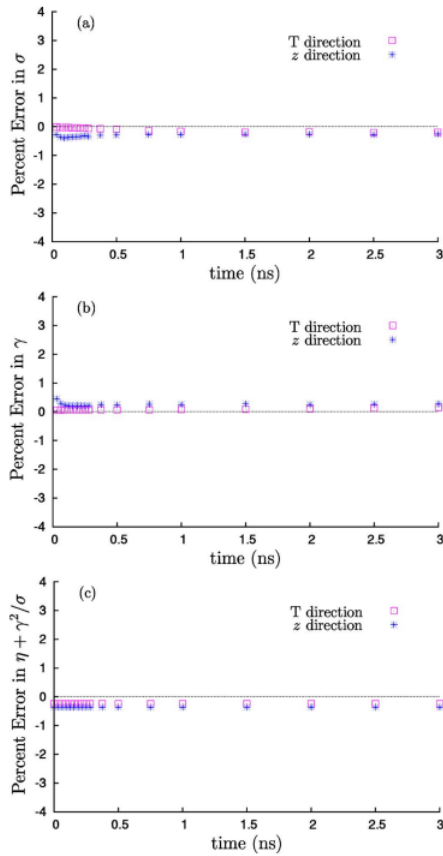


FIG. 1. (Color online) No Coulomb interaction. Relative error between moments calculated from the Gaussian model and N -body simulation. Note in (c) that $\eta + \gamma^2/\sigma$ is a constant of motion.

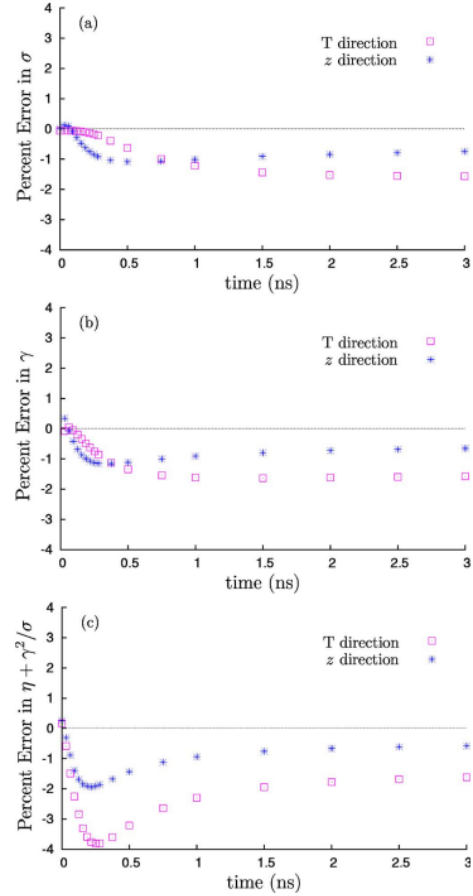


FIG. 2. (Color online) With Coulomb interaction. Relative error between moments calculated from the Gaussian model and N -body simulation.

忽略和不忽略库仑力作用的误差分别在 0.5% 和 4% 内，考虑库仑力而带来的误差实际源于模型本身的误差。如 Fig. 5 和 Fig. 6 所示，计算出的局部动量分布在给

定时间确实表现出一些空间变化，这并非不遵循模型的初始条件。随着脉冲的演化，具有不同速度的电子在空间中散开，这使得本该按照高斯分布函数所分布的电子在各处都有丢失。由 Fig. 5 和 Fig. 6 可知在 z 方向上该现象尤其显着，因为库仑相互作用增强了最初定位良好的电子束。虽然高斯模型及其假设无法捕获通过脉冲传播的动量演化的全部细节，但它很好地描述了电子分布的平均值，它只是未能正确地详细描述这些分布的后期值，这些值与其初始值相比微不足道。

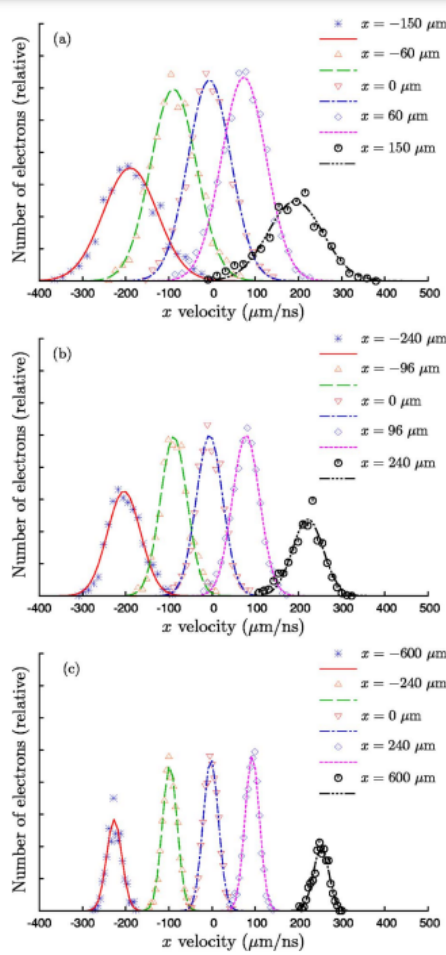


FIG. 5. (Color online) Velocity distribution (x component) for a chosen number of bins throughout the electron pulse for (a) $t=0.5$ ns, (b) $t=1.0$ ns, and (c) $t=2.5$ ns. The chosen bins lie on the x axis, with the x position shown in the legend. The Gaussian model predicts $1/m\sqrt{\eta_T} = 54.3 \mu\text{m/ns}$ for $t=0.5$ ns, $1/m\sqrt{\eta_T} = 32.0 \mu\text{m/ns}$ for $t=1.0$ ns, and $1/m\sqrt{\eta_T} = 13.4 \mu\text{m/ns}$ for $t=2.5$ ns. A Gaussian fit is plotted for each set of binned electrons. The fitted widths vary with position with average values of (a) $56.1 \mu\text{m/ns} \pm 13\%$ at 0.5 ns, (b) $33.8 \mu\text{m/ns} \pm 13\%$ at 1.0 ns, and (c) $17.3 \mu\text{m/ns} \pm 4\%$ at 2.5 ns.

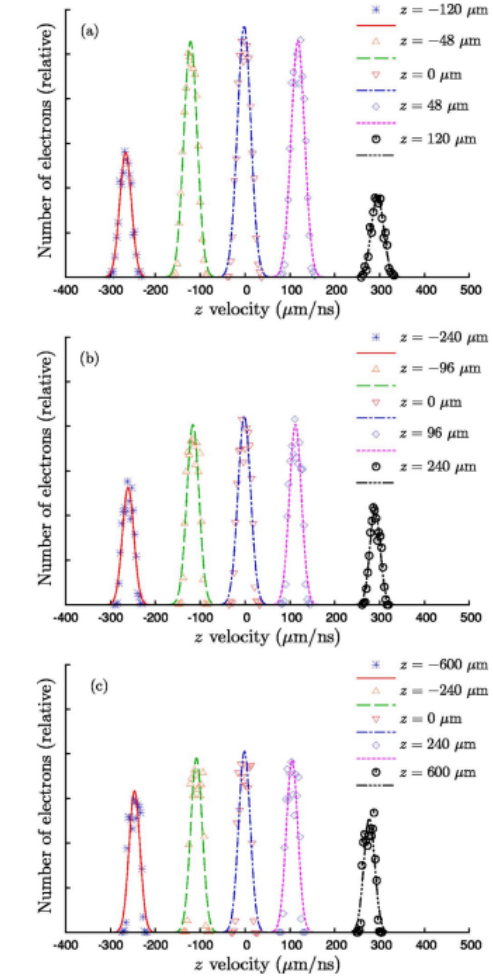


FIG. 6. (Color online) Velocity distribution (z component) for a chosen number of bins throughout the electron pulse for (a) $t=0.5$ ns, (b) $t=1.0$ ns, and (c) $t=2.5$ ns. The chosen bins lie on the z axis, with the z position shown in the legend. The Gaussian model predicts $1/m\sqrt{\eta_T} = 7.2 \mu\text{m/ns}$ for $t=0.5$ ns, $1/m\sqrt{\eta_T} = 3.3 \mu\text{m/ns}$ for $t=1.0$ ns, and $1/m\sqrt{\eta_T} = 1.2 \mu\text{m/ns}$ for $t=2.5$ ns. A Gaussian fit is plotted for each set of binned electrons. The fitted widths vary with position with the average values of (a) $14.4 \mu\text{m/ns} \pm 9\%$ at 0.5 ns, (b) $13.1 \mu\text{m/ns} \pm 11\%$ at 1.0 ns, and (c) $12.6 \mu\text{m/ns} \pm 4\%$ at 2.5 ns.

5.4 其它

本篇论文还扩展讨论了电子束质心以恒定速度移动和受到均匀恒定的施加电场的情况，前者只需要从一个惯性系移动到另一个惯性系，而后者只需在分析模型的演化方程中多引入一项电场项。

6 超快电子衍射理论: 电子束特性的作用 [JAP 104]

Theory of ultrafast electron diffraction: The role of the electron bunch properties

6.1 基本信息

- 分类: 超快电子衍射 (UED)
- 作者: A.M. Michalik, E.Ya. Sherman, and J.E. Sipe
- 类型: 理论
- 链接: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.2973157>

6.2 摘要

超快电子衍射 (ultrafast electron diffraction) 是驱动理解基本超短物理和化学过程的最有前途的实验技术之一。UED 典型的实验可以认为由三个阶段组成, 第一个是超短激光脉冲从光电阴极发射一定数量的电子; 第二个是使束电子向目标的传播; 第三个是衍射来自目标的电子。本篇文章将重点讨论第三阶段。

该文章提出了超快电子衍射实验中使用的电子束散射的一般形式。为了执行散射计算, 本文将描述散射前电子束的经典分布函数与渐近维格纳分布相关联。使用单次散射和远场近似, 推导出衍射信号的表达式, 并讨论不同束参数对测量的衍射通量的影响。该文章还确定了横向和纵向相干长度, 并讨论了这些长度尺度在衍射图案形成中的重要性。

6.3 贡献或创新点

- 创新点:
 - 该文章将首先提出了单粒子维格纳分布函数, 之后将其与入射电子束相关联, 最终发现它包括束中分散和未分散成分的所有三种可能组合。对于 N 电子束, 有单粒子维格纳函数:

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{p}; t) = \int \frac{d^3 r'}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}'/\hbar} \text{Tr} [\rho_N \psi^\dagger(\mathbf{u} + \mathbf{r}'/2, t) \times \psi(\mathbf{u} - \mathbf{r}'/2, t)]$$

其中 ρ_N 是 N 粒子密度算符， $\psi(\mathbf{u}, t)$ 是湮灭在位置 \mathbf{u} 时间 t 的电子的场算符，由此可以得到电流密度算符的期望值

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{m} W(\mathbf{u}, \mathbf{p}; t) &= \int \frac{d^3 p d^3 u'}{(2\pi\hbar)^3} \text{Tr} [\rho_N \psi^\dagger(\mathbf{r} + \mathbf{u}'/2, t) \psi(\mathbf{r} + \mathbf{u}'/2, t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'} \left(\frac{\hbar}{im} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}'/\hbar} \right) \\ &= \text{Tr} \left[\rho_N \psi^\dagger(\mathbf{u}, t) \left(\frac{\hbar}{2mi} \nabla \right) \psi(\mathbf{u}, t) + \text{h.c.} \right] \equiv \mathbf{j}(\mathbf{u}, t) \end{aligned}$$

对于相互作用的电子来说，一般不可能找到 $W(\mathbf{u}, \mathbf{p}; t)$ 的封闭动力学方程组。但在 UED 实验中，电子束在到达目标时通常会膨胀很多，以至于当发生散射时，电子之间的库仑斥力可以忽略不计。也就是说，电子只看到导致它们散射的势能；该文章中认为这个势能与时间无关，这使得可以得到近似的运动方程

$$\frac{\partial W(\mathbf{u}, \mathbf{p}; t)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial W(\mathbf{u}, \mathbf{p}; t)}{\partial \mathbf{u}} + \frac{2}{\hbar} \sin \left(\frac{\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) V(\mathbf{u}) W(\mathbf{u}, \mathbf{p}; t)$$

本文章利用单粒子散射模型对电子束的散射进行讨论，对于单粒子系统有 Wigner 函数

$$\begin{aligned} \bar{W}(\mathbf{u}, \mathbf{p}; t) &= \int \frac{d^3 u'}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}'/\hbar} \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}'/2 | \rho(t) | \mathbf{u} + \mathbf{u}'/2 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{u}/\hbar} \langle \mathbf{p} + \mathbf{p}'/2 | \rho(t) | \mathbf{p} - \mathbf{p}'/2 \rangle \end{aligned}$$

由于上方程中对 Wigner 函数而言是线性的，我们可以通过将密度算符 ρ 的求迹放大为 N 而不是 1 来达到单粒子问题和多体问题之间的过渡，这使得可以在单粒子条件下利用该方程近似处理多体问题，最终通过散射理论 [1] 获得结果

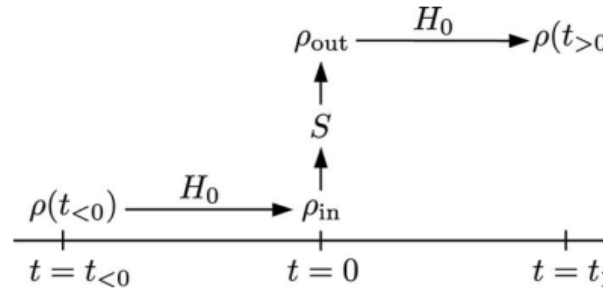


FIG. 3. A schematic view of the asymptotic-in and asymptotic-out scattering states. The free electron Hamiltonian is defined as $H_0 = \mathbf{P}^2/2m$.

$$\rho_{\text{out}} = \rho_0 + \rho_{\text{hol}} + \rho_{\text{diff}},$$

其中 ρ_0 描述了未发生散射的输出信号的贡献。 ρ_{hol} 描述了全息贡献，因为它捕获了束的未散射部分和散射部分之间的干涉。最后， ρ_{diff} 描述了衍射贡献，这是由于束的分散部分与自身的干涉而产生的。将时间 t 处通过立体角 $d\Omega$ 在方向 \mathbf{r} 上的通量表示为 $\Gamma(\mathbf{r}, t)$ ，与 ρ 相同， $\Gamma(\mathbf{r}, t)$ 包含三部分，其中 $\Gamma(\mathbf{r}, t)_{\text{diff}}$ 是本文研究的对象。

$$r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}(r, t) d\Omega \equiv \Gamma(\mathbf{r}, t) d\Omega$$

- 该文章的另一创新点是，提出了对于 $\Gamma(\mathbf{r}, t)_{\text{diff}}$ 的远场分析，包括 Fraunhofer 型分析，以及更通用的 Fresnel 型分析，前者的讨论中可以得到以下条件和结果

$$\frac{R_j \theta_{\text{osc}}^2 p}{\hbar} = \frac{R_j}{r} \ll 1,$$

$$\frac{R_j \theta_{\text{osc}} p}{\hbar} = \frac{R_j}{r \theta_{\text{osc}}} \ll 1.$$

$$\Gamma_{\text{diff}}(\mathbf{r}, E) \sim \frac{mp^3}{(2\pi\hbar)^2} \int d\hat{\mathbf{m}} d\hat{\mathbf{l}} G(p\hat{\mathbf{l}}, p\hat{\mathbf{m}}) f(p\hat{\mathbf{r}} \leftarrow p\hat{\mathbf{m}}) \times f^*(p\hat{\mathbf{r}} \leftarrow p\hat{\mathbf{l}})$$

上式可以写成如下形式，正好对应 Fraunhofer 衍射条件 [2]。另外，并不是所有情况都满足上式对应的条件， $\frac{R_j \theta_{\text{osc}}^2 p}{\hbar} = \frac{R_j}{r} \ll 1$ 通常在 UED 实验中得到满足，但 $\frac{R_j \theta_{\text{osc}} p}{\hbar} = \frac{R_j}{r \theta_{\text{osc}}} \ll 1$ 不同。对于典型的 UED 几何结构，不等式 $\frac{R_j \theta_{\text{osc}} p}{\hbar} = \frac{R_j}{r \theta_{\text{osc}}} \ll 1$ 要求 $R \ll 1 \mu\text{m}$ ，其中 R 是从原点到样品中原子的距离。对于以大分子为中心的渐近入射电子束是满足此条件的；但在薄膜几何结构中 (如该论文 Fig. 5)，典型原子的 R 值可能远大于 $1 \mu\text{m}$ 。由于入射束的大小约为 $100 \mu\text{m}$ ，**样品中散射入射束中电子的原子将具有肯定会违反条件 $\frac{R_j \theta_{\text{osc}} p}{\hbar} = \frac{R_j}{r \theta_{\text{osc}}} \ll 1$** 。从后续的 Fresnel 型分析中得到的结果中，也会存在相同的问题。但在考虑到 Wigner 函数和密度算符的属性之后，可以对上式进行近似，这也使得 Fresnel 型分析中得到的结果实际上是衍射信号最终表达式的正确形式，并且可以发现束的大小清楚地限制了哪些原子对散射信号有贡献。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{diff}}(\mathbf{r}, E) \sim & \frac{mp^3}{(2\pi\hbar)^2} \int d\hat{\mathbf{m}} d\hat{\mathbf{l}} G(p\hat{\mathbf{l}}, p\hat{\mathbf{m}}) \\ & \times \sum_j e^{-ip(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{m}}) \cdot \mathbf{R}_j / \hbar} e^{ip\gamma(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{R}_j) / \hbar} f_j(p\hat{\mathbf{r}} \leftarrow p\hat{\mathbf{m}}) \\ & \times \sum_k e^{ip(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{l}}) \cdot \mathbf{R}_k / \hbar} e^{-ip\gamma(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{R}_k) / \hbar} f_k^*(p\hat{\mathbf{r}} \leftarrow p\hat{\mathbf{l}}), \end{aligned}$$

- 贡献：在本文中推导出了 UED 实验中使用的电子束绕射通量的一般表达式。在该篇文章的方法中，描述传播过程中电子束的经典分布在目标处与渐近维格纳函数相关联，提出了适合实验条件的衍射表达式的远场分析，并研究了束参数对衍射信

号的影响，从而简化了衍射表达式。简化包括适用于分子等小物体散射的 Fraunhofer 型分析，以及更通用的 Fresnel 型分析，该分析产生适用于较大目标 (如薄膜) 散射的表达式。导出的衍射信号用表征入射电子束、原子散射振幅和晶体结构的参数表示。该表达式提供了入射束的特性如何影响观察到的衍射图案的见解。

另外，该文章的结果表明，对于小分子大小的物体，衍射图案是由散射体决定的。对于大物体，布拉格峰依赖于束和目标属性的复杂相互作用，其中无法明确区分束和目标参数的影响。文中模拟确实说明了不同参数值下布拉格峰的变化，例如，峰宽随着横向束尺寸 Δu_T 的增加而减小。这样的模拟对于理解 UED 实验中使用的不同电子束的信号分辨率如何变化非常重要。

文章的一些数值结果：

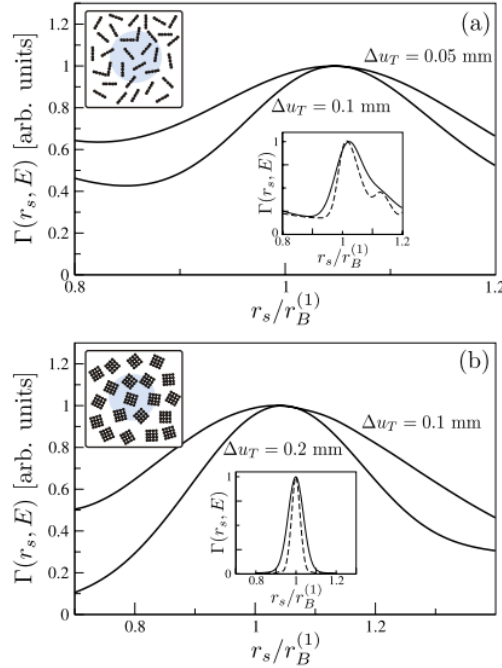


FIG. 14. (Color online) A sample numerical calculation of the diffracted signal using the final expression for $\Gamma(\mathbf{f}, E)$ (53) and a Gaussian model for the Wigner distribution with an electron energy of 50 keV ($\lambda=0.055$ Å). Main plots: (a) $\Delta p_T = p/500$ and $L_T = 17$ Å. The targets are linear clusters, 32 unit cells in length, unit cell 4 Å. (b) $\Delta p_T = p/250$ and $L_T = 17$ Å. The targets are square clusters, 32×32 unit cells, unit cell 4 Å. Insets: $\Delta p_T = p/500$, narrow peak $L_T = 35$ Å, wider peak $L_T = 17$ Å. All other parameters are the same except the target radius is $1 \mu\text{m}$ in size. The local bunch spread $\Delta p_T^{\text{loc}}/p = \lambda/2\pi L_T$ and the diffraction-limited Bragg spot width $\theta_{\text{Bragg}}^{(1)}/N_{\text{nc}}$ are of the same order of magnitude and both significantly to the width of the peaks in the insets.

6.4 其它

在本文章后续章节的讨论中，回顾了电子束分布的高斯模型，给出了衍射信号的示例数值计算，并进一步阐述了束参数的作用并得出了与模型无关的结论。

参考文献

- [1] J. R. Taylor, Scattering Theory, John Wiley & Sons, New York (1972).
- [2] G. R. Fowles, Introduction to Modern Optics, 2nd ed. Holt Rinehart and Winston (1975)

7 用双臂迈克尔逊干涉仪产生飞秒微束团串 [PRAB 20-10]

Generation of a femtosecond electron microbunch train from a photocathode using twofold Michelson interferometer

7.1 基本信息

- 分类: 激光和粒子束
- 作者: M. Shevelev, A. Aryshev, N. Terunuma, and J. Urakawa
- 类型: 实验
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.103401>

7.2 摘要

近年来从事高梯度尾场加速器设计的研究人员热衷于超短电子束的产生。其中一种比较有吸引力的产生超快电子束的方法是用激光照射光阴极。这篇论文介绍了基于商用钛蓝宝石 (Ti:Sa) 激光器的射频激光系统的设计和测试。根据作者提出的方案, 这套激光系统可以产生四个具有连续可变延迟的飞秒激光脉冲。除此之外, 这篇论文还用这套激光系统完成照射碲化铯 (Cs_2Te) 半导体光阴极产生电子微束团串 (electron microbunch train) 的演示实验。实验中采用了常规的测量来表征微束团的特性并证明可以控制电子微束团串的主要参数。

7.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇论文的作者利用两个脉冲之间的干涉现象可以产生数量和形状可变的激光脉冲串原理, 采用迈克尔逊干涉仪 (Michelson interferometer, 简称 MI) 并使用多个分束器和光延迟线来产生 2^k (k 为整数) 个光脉冲串。本文中对干涉仪进行设计并描述了光阴极射频枪激光脉冲串的时间分布, 用双臂迈克尔逊干涉仪 (twofold MI) 产生了四个飞秒激光脉冲进行实验并调节了束团之间的时间延迟。
- 贡献: 原始的激光产生原理为钛蓝宝石 (Ti:Sa) 振荡器产生脉冲并通过衍射光栅进行啁啾达到皮秒脉冲长度, 之后利用再生放大器 (regenerative amplifier) 和放大器将脉冲自数微焦 (μJ) 提高到毫焦 (mJ), 放大后的脉冲通过光栅压缩到飞秒级。本文将 MI 置于再生放大器后可以有效解决对于 266 nm 光需要特殊光学元件的问题, 下图为所使用的双通道迈克尔逊干涉仪的原理图。实验在 LUCX 装置上进行, 使用 Ce:YAG (掺铈钇铝石榴石) 屏幕对束团进行观测。

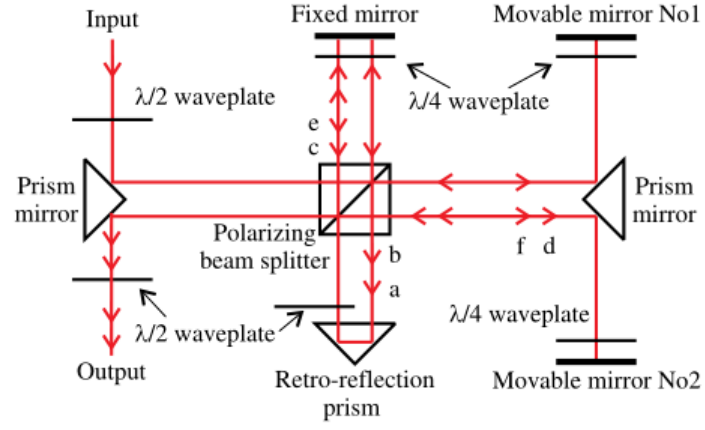


图 1: 双通道迈克尔逊干涉仪原理图

7.4 部分结果

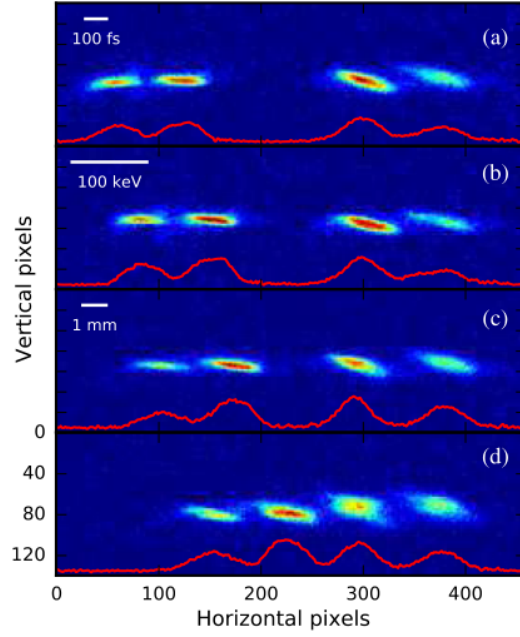


图 2: 图中 (a) 束团对之间的时间间隔为 1.2 ps; (b) 束团对之间的时间间隔为 1.1 ps; (c) 束团对之间的时间间隔为 0.88 ps; (d) 束团对之间的时间间隔为 0.66 ps。