

加速器束流动力学期刊论文导读 (2022 年 12 月)

受“京师物理”公众号启发,我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊,与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布,在 http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article 可以找到过去的导读文档。限于成员水平,导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流,我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2022 年 12 月) 结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]、[??]	jcytsai@hust.edu.cn

目录

1	自由电子激光谱带宽的演化与极限 [NIMA 304]	
	The evolution and limits of spectral bandwidth in free electron lasers	3
2	一种“先辐射段、后振荡器”的自由电子激光设计 [PRST-AB 16-02]	
	Oscillator seeding of a high gain harmonic generation free electron laser in a radiator-first configuration	6
3	高增益单次经过自由电子激光饱和的简单模型 [NIMA 393]	
	A simple model of gain saturation in high gain single pass free electron lasers	10
4	在储存环与传输系统中考虑横向空间电荷效应与横向耦合的束流包络计算	
	Calculation of beam envelopes in storage rings and transport systems in the presence of transverse space charge effects and coupling	12
5	微束团辐射“尾部-头部”作用	
	Microbunch radiative tail-head interaction	13

1 自由电子激光谱带宽的演化与极限 [NIMA 304]

The evolution and limits of spectral bandwidth in free electron lasers

1.1 基本信息

- 分类：自由电子激光
- 作者：Kwang-JeKim (LBL)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0168900291909089>

1.2 摘要

这篇论文考虑几个不同情况下，自由电子激光振荡器谱带宽的特性。对储存环自由电子激光振荡器，接近饱和时，谱带宽由 supermode 理论给出，为波荡器增益谱宽 (gain bandwidth) 与电子束长对应的傅立叶变换极限宽度 (transform-limited bandwidth) 的几何平均。对基于直线加速器的自由电子激光振荡器，极限情况下的谱带宽仅由电子束长的傅立叶变换极限宽度决定。对于直流 (DC) 电子束，极限谱带宽由 Schawlow-Townes 公式给出，但是达到此极限带宽将非常缓慢。

1.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文讨论了自由电子激光振荡器中能够达到的辐射谱带宽极限，试图澄清在两种不同情况下，基于储存环与基于直线加速器驱动的自由电子激光振荡器的辐射谱带宽极限。这篇论文与同样作者在 PRL 的另一篇论文¹相似，但是这里给了较多推导细节，值得琢磨。
- 贡献：这篇论文先给出“瞬时辐射功率谱”应遵循的逐圈演化方程，有如下形式

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{dP(\omega, \tau; n)}{d\omega} \right) = (g(\omega, \tau; n) - \alpha) \frac{dP(\omega, \tau; n)}{d\omega} + \frac{dS}{d\omega}$$

其中， g 为功率增益， α 为每一圈内总衰减系数。 ω 为共振频率， τ 可视为束团内相对束团中心的时间/位置， ω 与 τ 互为傅立叶变换对， n 为 round-trip pass。

¹Kwang-Je Kim, Spectral bandwidth in free-electron-laser oscillators, Phys. Rev. Lett. 66, 2746 (1991).
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.66.2746>

$P(\omega, \tau; n)$ 为辐射场的 Wigner 分布，或者可以视为瞬时 (τ) 辐射功率谱。

接着，这篇论文考虑两种不同情况下的自由电子激光振荡器，分别由储存环 (Section 3) 与直接加速器 (Section 4) 驱动。

对储存环而言，增益视为常数，即振荡器饱和是由于电子束能散与束长“逐圈”增加导致，在该圈波荡器内部 ponderomotive potential well 的动力学视为几乎不变，因此单次通过增益 (single-pass gain) 视为不变。平衡时由束团能散增加导致的 (inhomogeneous gain reduction) 与辐射阻尼 (使束团能散减小) 决定，称 Renieri limit。在此情况下，可以解出以上方程的瞬时辐射功率谱，辐射谱宽与时域脉冲宽度按如下定义

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\iint (\omega - \omega_0)^2 \frac{dP}{d\omega} d\omega d\tau}{\iint \frac{dP}{d\omega} d\omega d\tau}, \quad \sigma_\tau^2 = \frac{\iint \tau^2 \frac{dP}{d\omega} d\omega d\tau}{\iint \frac{dP}{d\omega} d\omega d\tau}$$

可以得到其明显形式为

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega_0} = \sigma_N \sqrt{\frac{1}{g_0 n}}, \quad \sigma_\tau = \sigma_\tau^e \sqrt{\frac{1}{g_0 n}}$$

可以看到，逐圈随 n ，在时域与频域均变窄，一直达到傅立叶变换极限，满足 $\sigma_\omega \sigma_\tau = \frac{1}{2}$ ，此时 $n \geq n_c = \frac{2\pi c \sigma_\tau^e}{g_0 \lambda N}$ ，而有极限辐射谱带宽

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{2N} \frac{\lambda}{4\pi c \sigma_\tau^e}}$$

为波荡器增益谱宽 (gain bandwidth) 与电子束长对应的傅立叶变换极限宽度 (transform-limited bandwidth) 的几何平均。

基于直线加速器的自由电子激光振荡器模式，逐圈注入的电子束是新鲜的，并且平衡发生在电子束在波荡器中有明显同步振荡时，大约对应半个同步振荡周期。单次经过增益会随着辐射场振幅增加而减小，到饱和时为定值。此处分析假设束团长度大于辐射中心波长。在此情况下，通过定性论证得到极限辐射谱带宽为

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = \frac{\lambda}{4\pi c \sigma_\tau^e}$$

或半高全宽 (FWHM) 有

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{\text{FWHM}} \geq \frac{0.44\lambda}{c(\Delta\tau)_{\text{FWHM}}}$$

定量求解上面辐射功率谱函数的演化方程，可以得到在达到饱和圈数 n_s 的极端情况下，有

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\omega}{\omega_0} &= \sigma_N \sqrt{\frac{1}{g_0 n}}; \quad n \ll n_s \\ &= \sigma_N \sqrt{\frac{1}{\alpha n}}; \quad n \gg n_s\end{aligned}$$

其中， $n_s = \frac{1}{g_0(\tau)} \ln \left(\frac{P_s(\tau)}{P_0(\tau)} \right)$ 。

1.4 其它

对 SSMB 激光调制器而言，动力学更像是 storage-ring FEL 或 linac FEL? 或者是两种形态混合?

2 一种“先辐射段、后振荡器”的自由电子激光设计 [PRST-AB 16-02] Oscillator seeding of a high gain harmonic generation free electron laser in a radiator-first configuration

2.1 基本信息

- 分类：自由电子激光
- 作者：P. Gandhi, G. Penn, M. Reinsch, J. S. Wurtele, and W. M. Fawley (主要机构：UC Berkeley)
- 类型：理论、模拟
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.16.020703>

2.2 摘要

横纵向相干、高重频、大范围可调的自由电子激光源 (free electron laser, FEL) 是各种实验应用的理想平台。单次经过、超导直线加速器驱动的自由电子激光能够提供足够的、横向相干的峰值与平均输出功率。但是，纵向相干性则较难达到，特别是高重频，由于上游调制激光功率受限。要产生纵向相干的自由电子激光通常采振荡器模式。这篇论文通过一维理论与数值方法分析一种“先辐射段、后振荡器”的自由电子激光设计方案，能够同时提供横纵向相干、高重频自由电子激光，其中，振荡器跟随在辐射段之后，利用振荡器输出作为电子束调制激光。这个方案先让新鲜的电子束产生高增益高次谐波放大 (HGHG)，因为谐波放大对电子束能散要求较高，再让用过的电子束进入振荡器，其输出效能对电子束能散要求较小。这篇论文针对软 X 射线 FEL 方案给出半解析单次经过传输模型，与数值模拟结果一致。

2.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文给出一种新的横纵向相干、高重频、大范围可调的自由电子激光源产生方案，将辐射段放在作为调制的振荡器之前。这样的做法使新鲜的电子束 (fresh beam) 担任较困难的任务：谐波发光，再让用过的电子束 (used beam) 作为使调制激光的振荡器起振。方案示意图如下 Fig. 1。这篇论文以软 X 射线为辐射输出目标，调制激光则在中心波长 13.4 nm 附近，受益于该波段有成熟的光学部件。

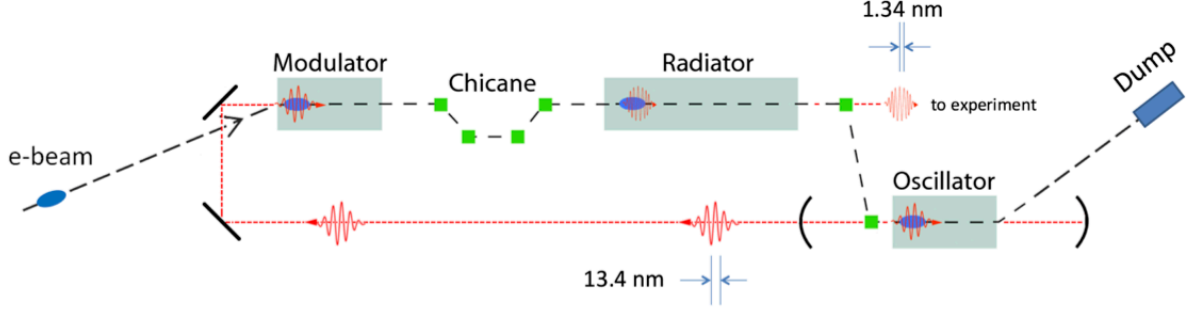


FIG. 1. A diagram of the HGHG “radiator-first” scheme.

- 贡献：这篇论文针对振荡器、调制器与放大器构建理论模型。从振荡器开始，利用 logistic FEL model

$$I(z) = I_0 \frac{\exp(\Gamma z)}{1 + \frac{I_0}{I_{\text{sat}}} [\exp(\Gamma z) - 1]}$$

先针对辐射衍射效应，将 Pierce parameter 修正，有 $\rho_2 = \frac{1}{1+\eta_T}$ ，其中， $\eta_T \approx 0.45\eta_d^{1/2}$ ，

$$\eta_d = \frac{\lambda}{2\Gamma_{1D}\Sigma_A} = \frac{\lambda\lambda_w}{8\pi\sqrt{3}\rho\Sigma_A}$$

则 logistic model 中的 growth rate 与 intensity 分别按如下修正

$$\begin{aligned} \Gamma(\sigma_r) &= (1 - \sigma_r^2/\rho_2^2) (\rho_2/\rho) \Gamma_{1D} \\ I_{\text{sat}}(\sigma_r) &= (1 - \sigma_r^2/\rho_2^2)^2 c_f \rho_2 P_{\text{beam}} / \Sigma_{\text{eff}} \end{aligned}$$

其中， σ_r 为 radiator 出口或 oscillator 入口的相对能散。注意到，这里对辐射衍射效应与能散分别推广，其中，衍射效应视为静态效应，而能散增加则为逐圈效应。此外，以上 logistic model 假设仅有一个主导的 eigenmode Γ 主导。由于振荡器操作在低增益区间，剩下两个 eigenmode，因此，将 logistic model 中的 $e^{\Gamma z}$ 做如下推广

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{9} \left| \exp(2ik_w \rho z) + 2 \cosh(\sqrt{3}k_w \rho z) \exp(-ik_w \rho z) \right|^2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \left[2 \cosh(\Gamma z) + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}\Gamma z}{2}\right) \cosh\left(\frac{\Gamma z}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

最终给出如下推广的 logistic model

$$I_k = RI_{k-1} \frac{G(L, \sigma_k)}{1 + \frac{RI_{k-1}}{I_{I_k} \sigma_k} [G(L, \sigma_k) - 1]}$$

接着，对 modulator 效应推广，电子束逐圈经过 modulator 时，能散增加按如下方式估算

$$\sigma_m(X) = \sigma_0 \sqrt{1 + \frac{A^2}{2} X}$$

经过 chicane 之后，产生的密度调制有

$$b_n(X) = e^{-n^2 B^2/2} J_n(nAB\sqrt{X})$$

微束团电子束经过 radiator 时，假设仍处在线性/指数放大区间²，则辐射强度有

$$I_r(X) = \frac{1}{9} \rho_r I_{\text{beam}} |b_n(X)|^2 e^{C_r[1-\sigma_m(X)^2/\rho_r^2]}$$

增加后的束团能散为

$$\sigma_r^2 = \sigma_m^2 + 2\rho_r^2 |P|^2 = \sigma_m^2 + 2\rho_r I_r / I_{\text{beam},r}$$

总结以上修正，这篇论文给出在 oscillator 出口处的逐圈非线性映射关系如下

$$X_k = \frac{RX_{k-1}G_k}{1 + \frac{RX_{k-1}}{(1-\sigma_k^2/\rho^2)^2} (G_k - 1)}$$

其中， R 为 mirror power reflectivity。

这篇论文 Section IV 介绍了当时在 Lawrence Berkeley Laboratory 的项目 NGLS (Next Generation Light Source)，基于此种子 FEL 方案的设计参数。在 Section V 则应用构建的模型与一维数值计算分析此方案的效能。为了找到固定点 (fixed point) 解，对不同初始束团能散，有如下图 X_k - X_{k+1} 映射 其中，与 $X_k = X_{k+1}$ 的交点为解。当解为稳态解 (stable fixed point) 时，解在该点斜率的绝对值应 < 1 。对图中黑线情况，斜率绝对值为 0.45，小于 0.5，表征存在 damped mechanism，一定程度上提供了对抖动 (fluctuation) 的稳定机制；对束团能散较小情况，即红色点线，斜率绝对值为 0.98，接近 1，预期稳定性较差。对图中黑线情况，在 radiator 出口的稳态输出功率 (steady-state power) 仅有 radiator 本身单次经过、高增益饱和功率 (saturation power) 的 0.2 倍。

2.4 其它

关于调制振荡器在放大器之前的方案，之前由 Dattoli 等人研究过，可参考 [1]。此外，此 radiator-first 方案在这篇论文应用在 HGHG FEL；应用在 EEHG FEL 的可行性在 [2] 也研究过。

这篇论文 Section V 提到一个将辐射衍射效应加入 1-D FEL model 的近似方式，将场方程做如下修正

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{z}} = -\langle e^{-i\theta} \rangle \rightarrow -\langle e^{-i\theta} \rangle \frac{\Sigma_A}{\Sigma_{\text{eff}}}$$

²好处是，这个阶段的电子束进入下游振荡器时，能散还不至于太大。一旦电子束在 radiator 进入饱和，则电子束能散 $\sigma_r \sim \rho$ ，变大但好处是浮动幅度较小。

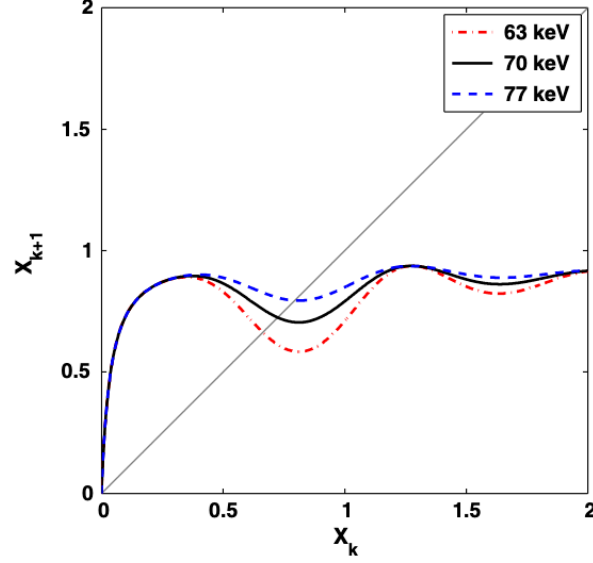


FIG. 4. Normalized intensity at the end of the oscillator as a function of that of the previous pass. Three values of the initial energy spread are considered, with all other parameters held fixed. The diagonal line indicates possible equilibrium points. For the nominal 70 keV case, the slope of the map at the equilibrium point is -0.45 . All three cases are stable.

其中， $\frac{\Sigma_A}{\Sigma_{\text{eff}}}$ 按如下关系给出

$$\Sigma_{\text{eff}}^{1/3} = \Sigma_A^{1/3} \left(1 + a_1 \eta_d^{1/2} \right)$$

参考文献

- [1] G. Dattoli, L. Giannessi, P.L. Ottaviani, MOPA optical klystron FELs and coherent harmonic generation, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A 507, 26 (2003). <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168900203008283?via%3Dihub>
- [2] G. Penn and M. Reinsch, Designs and numerical calculations for echo-enabled harmonic generation at very high harmonics, J. Mod. Opt. 58, 1404 (2011). <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500340.2011.596628>

3 高增益单次经过自由电子激光饱和的简单模型 [NIMA 393]

A simple model of gain saturation in high gain single pass free electron lasers

3.1 基本信息

- 分类：自由电子激光
- 作者：G. Dattoli, L. Giannessi, P.L. Ottaviani, and M. Carpanese (ENEA)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168900297004440>

3.2 摘要

这篇论文给出一种 logistic 模型，描述自由电子激光辐射场强自线性区间 (small signal) 至饱和 (large signal) 的动力学演化过程。模型构建基于 Bloch 方程，一种用于描述传统激光动力学的方程。除了高增益单次经过情况，这篇论文还推广 logistic 模型至自由电子激光振荡器模式。

3.3 贡献或创新点

- 贡献：这篇是作者 G. Dattoli 等人常用的基于 logistic 模型描述自由电子激光辐射场动力学过程的早期论文，描述了 logistic 模型的推导过程。这篇论文从以下方程组开始³

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}n(z) &= -\frac{\sigma}{h\nu}n(z)I(z) \\ \frac{d}{dz}I(z) &= \sigma n(z)I(z)\end{aligned}$$

其中，进一步化简要求满足动力学为绝热 (adiabatic) 过程，则以上方程可化简为

$$\frac{d}{dz}I(z) = \sigma \left(1 - \frac{I(z)}{\bar{I}}\right) I(z).$$

其解有

$$I(z) = \frac{I_0}{9} \frac{\exp[\chi\rho z/\lambda_u]}{1 + (I_0/9\rho I_e) \{\exp[\chi\rho z/\lambda_u] - 1\}}$$

³该论文中没有详细讨论这组方程的推导。

其中, $\chi = 4\pi\sqrt{3}$ 。

至此为止为单次经过放大器模式的解。经过适当调整, 适用于振荡器模式的解可以写为

$$I(n) = I_0 \frac{\exp\{[(1-\eta)G - \eta]n\}}{1 + (I_0/I_{e,i}) [\exp\{[(1-\eta)G - \eta]n\} - 1]}$$

其中,

$$I_{e,i} = \frac{2}{\pi} \frac{1-\eta}{\eta} G \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1.8}{1+G} \frac{G(1-\eta) - \eta}{\eta} \right] \right\} I_s$$

与

$$I_s \text{ (MW/cm}^2\text{)} = 6.9 \times 10^2 \left(\frac{\gamma}{N} \right)^4 [\lambda_u \text{ (cm)} K f_B(\xi)]^{-2}.$$

这篇论文最后提到, 为了更准确描述振荡器中辐射场强度逐圈演化的动力学过程, 应将上式中的指数项做如下代换

$$\exp\{[(1-\eta)G - \eta]n\} \rightarrow [(1-\eta)(1+G)]^n$$

4 在储存环与传输系统中考虑横向空间电荷效应与横向耦合的束流包络计算

Calculation of beam envelopes in storage rings and transport systems in the presence of transverse space charge effects and coupling

4.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：I. Borchardt, E. Karantzoulis, H. Mais and G. Ripken (DESY)
- 类型：理论
- 链接：<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01548283>

4.2 摘要

这篇论文给出一种在储存环与传输系统中考虑横向空间电荷效应与横向耦合情况，描述无限长条形束团 (coasting beam) 横向包络的方法。通过定义一个五维 x - p_x - z - p_z - $\Delta p/p$ 空间 (超) 椭圆⁴，存在外部空间电荷场时，此五维椭圆可以通过一 5×5 矩阵 $B(s)$ 描述其运动状态，称束团形状矩阵 (bunch shape matrix)，此矩阵包含了对椭圆构型的完整描述。这里分析将磁聚焦结构元件视为薄透镜近似。

4.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇为早期尝试使用“束团形状矩阵”描述束团整体运动的论文，可以看到作者为了分析束团相空间分布的椭圆构型，推导许多相空间投影在局部维度的几何量，且以解析形式表示。近年随着计算机普遍使用，一般已经能够通过数值方法将相空间椭圆可视化表示。此外，这篇论文在构建束团形状矩阵的运动方程时，讨论了其适用范围与模型假设，值得琢磨。
- 贡献：由于这篇论文没有假设极端相对论情况，因此适用于中低能电子或重离子。

⁴这篇论文中的 x 为横向水平方向， z 为横向垂直方向。

5 微束团辐射“尾部-头部”作用

Microbunch radiative tail-head interaction

5.1 基本信息

- 分类：尾场、阻抗计算
- 作者：Ya.S. Derbenev, J. Rossbach, E.L. Saldin, and V.D. Shiltsev
- 类型：理论
- 链接：<https://cds.cern.ch/record/291102>

5.2 摘要

这篇论文为相干同步辐射早期经典论文之一，讨论了微束团⁵在弯转段的“尾部-头部”作用。由于弯转时有限曲率半径，束团尾部粒子辐射的光子能够在直线传播时赶上沿曲线运动的头部粒子。这个“尾部-头部”作用可能导致显著的、沿着束团内部改变的能量差异，从而影响此微束团动力学。

5.3 贡献或创新点

- 创新点：这是一篇相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 早期经典论文之一，点出了 CSR 对短束团动力学的冲击。21 世纪特别由于电子枪快速发展，电子束团亮度提高，束长能够得到进一步压缩，因此 CSR 效应变得逐渐重要。此外，CSR 导致的微束团不稳定性也与 21 世纪快速发展的自由电子激光密切相关。
- 贡献：分析相对论电子在一般运动轨迹的电磁辐射可以利用 Lienard-Wiechert 场。这篇论文则是通过对标量 A_0 、矢量 \vec{A} 位函数，分析电子在弯转过程的辐射效应。基于 Derbenev 的一维 CSR 模型，讨论其对高斯分布束团的影响。主要结果可以总结如下：

在极端相对论情况下，一维 (纵向)、无边界自由空间、稳态、单位长度 CSR 尾场函数可以写成

$$\mathcal{W}_{\parallel}(z) = -\frac{2}{3^{1/3}\rho^{2/3}}\frac{1}{z^{1/3}}\frac{\partial}{\partial s} \quad (1)$$

⁵指束团长度与临界同步辐射波长相当或更短时的情况。

其中, ρ 为弯转半径, z 为纵向坐标 (一般为束长内范围, $z > 0$ 表示在中心粒子前方)。对于高斯分布束团 $\lambda(z) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma_z) e^{-z^2/2\sigma_z^2}$, 单位长度沿着束团由于 CSR 引起的 (局部) 能量改变有

$$\frac{d\mathcal{E}(z)}{cdt} = Ne^2 \int_{-\infty}^z \mathcal{W}_{\parallel}(z - z') \lambda(z') dz' \quad (2)$$

其中, N 是束团总电子个数, $\frac{d\mathcal{E}(z)}{cdt} < 0$ 表示局部分布的电子损失能量, > 0 表示局部分布的电子得到能量。

对高斯分布的电子束, 可将上面表示式进一步写为

$$\frac{d\mathcal{E}(z)}{cdt} = -\frac{2Ne^2}{(3\rho^2)^{1/3}} \int_{-\infty}^z \frac{1}{(z - \zeta)^{1/3}} \frac{\partial \lambda(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta = -\frac{2Ne^2}{\sqrt{2\pi}3^{1/3}\rho^{2/3}\sigma_z^{4/3}} I_0\left(\frac{z}{\sigma_z}\right) \quad (3)$$

其中,

$$I_0(x) = \int_{-\infty}^x d\chi \frac{1}{(x - \chi)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial \chi} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad (4)$$

单位长度而言, CSR 导致束团整体有一个净能量损失/偏移 (net energy loss/offset), 为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \langle \Delta E \rangle_{\text{CSR}} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \lambda(\zeta) \frac{d\mathcal{E}(\zeta)}{cdt} \\ &= \frac{2Ne^2}{\sqrt{2\pi}3^{1/3}\rho^{2/3}\sigma_z^{4/3}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta I_0\left(\frac{\zeta}{\sigma_z}\right) \frac{e^{-\zeta^2/2\sigma_z^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \\ &\approx -0.350472 \frac{Ne^2}{\rho^{2/3}\sigma_z^{4/3}} \end{aligned} \quad (5)$$

为负值, 符合预期。

此外, CSR 还将使束团获得投影能散 (energy spread), 为⁶

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \sigma_{\Delta E, \text{CSR}} &= \frac{2Ne^2}{\sqrt{2\pi}3^{1/3}\rho^{2/3}\sigma_z^{4/3}} \sqrt{|\langle I_0^2 \rangle - \langle I_0 \rangle^2|} \\ &\approx 0.245987 \frac{Ne^2}{\rho^{2/3}\sigma_z^{4/3}} \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$\langle I_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} I_0(x) dx \approx 0.63351 \quad (7)$$

$$\sigma_{I_0}^2 = |\langle I_0^2 \rangle - \langle I_0 \rangle^2| \approx 0.19771 \quad (8)$$

5.4 其它

这篇论文使用 CGS/Gauss 单位制。

⁶在 Derbenev 原始论文中的 Eq.(29), 其数值 0.22 不甚准确, 应为 0.246。