

加速器束流动力学期刊论文导读 (2022 年 9 月)

受“京师物理”公众号启发,我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊,与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布,在 http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article 可以找到过去的导读文档。限于成员水平,导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流,我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2022 年 9 月) 结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]、[6]	jcytsai@hust.edu.cn

目录

1	鞍点近似法简介 Explaining the Saddlepoint Approximation	3
2	激光-电子储存环 [PRL 80] Laser-Electron Storage Ring	5
3	基于同轴电缆的束团阻抗量测 Beam impedance measurements – Coaxial Wire Method	8
4	利用 90° 汤姆逊散射产生飞秒 X 射线 [NIMA 341] Generation of femtosecond X-rays by 90° Thomson scattering	10
5	PEP 与 PETRA 单束团不稳定性分析 [NIMA 221] Single beam stability in PEP and PETRA	12
6	基于 SPEAR 同步加速器参数的束团拉伸计算机模拟 [NIMA 203] Computer simulation of bunch lengthening in SPEAR	16

1 鞍点近似法简介

Explaining the Saddlepoint Approximation

1.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：C. Goutis and G. Casella (Cornell)
- 类型：数理基础
- 链接：<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00031305.1999.10474463>

1.2 摘要

这是一篇关于鞍点近似数学技巧与背后基本概念的介绍性质的论文。在渐进分析 (asymptotic analysis) 中，准确估算密度或分布函数时，鞍点近似法 (saddlepoint approximation) 是一个非常有力的工具。这篇论文从泰勒级数展开到积分的拉普拉斯近似开始，搭配几个简单例子，然后正式进入鞍点近似法介绍。其中还使用到逆傅里叶变换公式与 Edgeworth 展开，推导单变量鞍点近似法。最后讨论含有指数函数密度分布函数的最大似然估计 (maximum likelihood estimation, MLE)。

1.3 贡献或创新点

- 贡献：鞍点近似法涉及的数学过程为：将一个希望求解的量写成积分表示式¹，把被积分函数根据积分变量展开，保留前几项，对其积分。对前几项的积分涉及复变函数积分、涉及逆傅立叶变换等。

这篇论文首先介绍被积分函数的两种近似方式——为经典的拉普拉斯近似 (single Taylor series)，另一为积分泰勒展开 (integrated Taylor expansion)——这篇论文用了两个例子说明，第一个例子为 Gamma 分布函数 (Gamma distribution)，第二个例子为 Student 的 t 分布函数。

这篇论文 §3.2 介绍利用 Edgeworth 展开，较偏重统计学方法，此处不论。

¹这种以积分表达一个欲求的物理量总是可以做到的，例如：束团发射度、能散等都可以通过对相空间分布函数积分表示。其它方法还有通过“卷积”积分 (convolution integral) 形式写出。一般总是可以将被积分函数如 $f(x)$ 写成 $f(x) = e^{h(x)}$ 。虽然没有严格数学证明，但这里要求积分存在。

1.4 其它

鞍点近似的更严谨应用除了将积分估算出来, 还需要对其误差尺寸 (size of the error) 进行估计。这部分较复杂, 此处不论。

此处介绍的鞍点近似法的一个特例为最速下降法 (steepest descent) 或最速上升法 (steepest ascent), 宜留意。

对于同步辐射或有些电磁辐射计算, 特别是频谱计算, 可应用鞍点近似法准确估算渐进积分。此外, 求解高增益自由电子激光的电子束分布分析过程也可应用最速下降法。

一个可能有帮助的参考链接:<https://math.stackexchange.com/questions/2315801/maximum-likelihood-estimator-of-two-independent-random-variables-that-share-a-me>

2 激光-电子储存环 [PRL 80]

Laser-Electron Storage Ring

2.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：Zhirong Huang and Ronald D. Ruth (SLAC)
- 类型：理论
- 链接：<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.80.976>

2.2 摘要

这篇论文提出一个基于紧凑型“激光-电子储存环”(Laser-Electron Storage Ring, LESR)概念的电子冷却或产生 X 射线方案。基本思路为将一束强激光局限在谐振腔中，与逐圈进来的电子束交互作用，此处电子束能量可以从数个至数百个 MeV。由于电子束逐圈与激光相互作用导致较快速的阻尼效应以对抗束内散射 (intrabeam scattering, IBS) 效应，因此电子束发射度能够很快降至更小值。X 射线也可以同时通过康普顿背散射效应产生，以用作成像等用途。

2.3 贡献或创新点

- 创新点：过去对“激光-电子”交互作用效应的应用多半着重在其产生的辐射，这篇论文讨论“激光-电子”交互作用对电子束的影响，特别是应用在电子束冷却方面。同时考虑在“激光-电子”交互作用下产生 X 射线的可行性。

“激光-电子储存环”的概念示意图如下图 Fig. 1。电子束在储存环中逐圈运行，激光场在谐振腔中来回振荡，并与电子束作用。LESR 概念将利用“激光-电子”交互作用的辐射激光冷却 (radiative laser cooling, RLC) 效应对抗束内散射 (intrabeam scattering, IBS) 效应。此处电子束能量可以从数个至数百个 MeV。电子逐圈由于辐射失去的能量在 RF 微波谐振腔中补偿。

- 贡献：强激光在 LESR 概念中类似于连续重复的弯转段，可以视为强场 wiggler 或 undulator，电子束经过时放出辐射，并且在 RF 谐振腔获得补偿。如果相位合适，电子束将获得快速阻尼效应或电子冷却。既然强激光扮演 wiggler 或 undulator 角

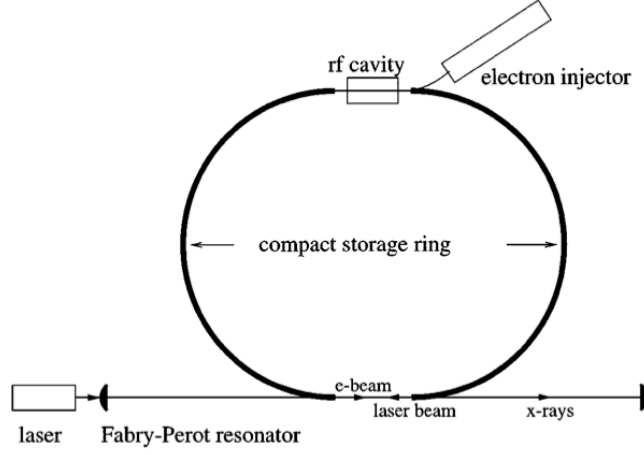


FIG. 1. The schematic diagram of a laser-electron storage ring.

色，那么就存在 Compton 或 Thomson 散射机制，也就能产生高频电磁辐射。此处激光与电子束是“头对头”(counter-propagate) 交互作用。

此前 Telnov 提出的激光冷却方案为单个单次电子经过强激光后损失 90% 能量 (参考能量为 5 GeV)，发射度减少 10 倍。考虑到这类束团参数剧烈变化的电子储存环设计不实际 (如：直线加速器、磁聚焦结构系统等)，这篇论文基于类似概念，降低电子束能量为 100 MeV 以减少波荡器辐射能量损失 ($\propto \gamma^2$)，提出多圈 ($\sim 10^3$) 运行的较可行方案。此处电子储存环在 100 MeV 能量区间分析与熟悉的 GeV 量级电子储存环不太一样的地方有二：空间电荷效应、基于 LESR 的激光冷却 (RLC) 机制。后者为电子束与激光场在谐振腔中的核心机制，如下图 Fig. 2 所示。

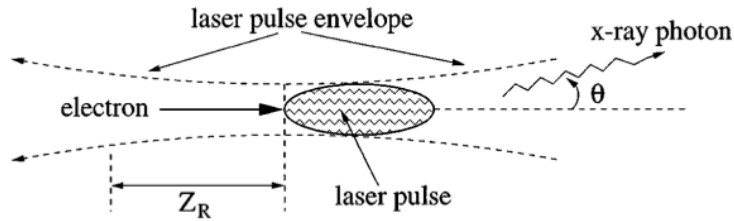


FIG. 2. The laser-electron interaction region.

这篇论文除了利用既有的电子储存环束流模型，并将激光场视为波荡器，因此也利用波荡器辐射特性的结果，综合分析 LESR 的可行性。同时，考虑了對抗 (波荡器辐射阻尼与量子激发效应) 平衡电子束的束内散射效应与空间电荷的频移 (tune shift) 效应，这类分析方式清楚、简洁。

这篇论文最后给出两种操作模式，一为应用在电子冷却的暂态模式，另一为产生

X 射线的稳态模式。初步设计参数见该论文 Table I。

2.4 其它

这篇论文分析电子束动力学过程非常简洁,假设电子束与激光场是“头对头”(counter-propagate or head-on collision) 交互作用。这里的分析方法原则上适用于电子束与激光场同向 (co-propagate) 传播但共振频率/条件不再一样。至于同向传播激光场再加上波荡器时,这里的分析方法是否合适则值得琢磨。

此外,这里分析忽略了环上其它部件(如: arc) 的辐射阻尼与量子激发效应,是基于波荡器中的效应更显著,并且束团长度在 mm 量级。对于 SSMB,当束团长度在 $\sim 10 \text{ nm} \sim 0.1 \text{ }\mu\text{m}$ 量级时,可能需要同时考虑波荡器与 arc 的效应。

3 基于同轴电缆的束团阻抗量测

Beam impedance measurements – Coaxial Wire Method

3.1 基本信息

- 分类：束测
- 作者：Giuseppe Di Massa and Maria Rosaria Masullo (主要机构：INFN，意大利)
- 类型：实验
- 链接：https://accelconf.web.cern.ch/p91/PDF/PAC1991_0789.PDF

3.2 摘要

这篇论文利用合成电信号脉冲技巧，结合同轴电缆，测量加速器真空部件的阻抗。在微波频段，标准的网络分析仪即能够量测此类阻抗。数据处理过程需要用到快速傅里叶变换 (FFT)。

3.3 贡献或创新点

- 贡献：在加速器设计阶段，如果能够通过“模拟”实验方法求得部分部件阻抗，将对接续设计有一定帮助。这篇论文基于 M. Sands 与 J. Rees [1] 提出的实验方法，考虑如下图 Fig. 1 的两种同轴电缆结构，其中第二种中间结构为想测量的真空部件

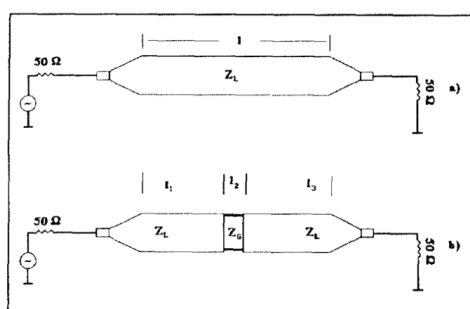


Figure 1 - Schematic diagram of experimental set-up:
a) reference pipe; b) test structure.

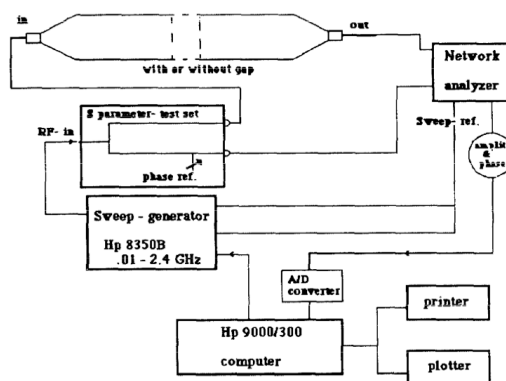


Figure 2 - The layout of the set-up used for the measurement.

基本原理为：对于 Fig. 1 中的参考情况，假设阻抗 Z_L 已知，通过一电流 $i_1(t)$ ，则可以量到电讯号脉冲能量损失为

$$U_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_L i_1^2(t) dt$$

相同的电讯号送入 Fig. 1 中的测试情况，假设电流改变为小量，即 $i_2(t) = i_1(t) + \Delta i$ ，其中， $\Delta u \ll i_1$ ，则可以量到电讯号脉冲能量损失为

$$U_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_L i_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 2Z_L i_1(t) \Delta i dt$$

上面两式相减后与如下尾场函数导致能量损失相对比，有

$$U = q \int_{-\infty}^{+\infty} W_b I(t) dt$$

得

$$W_b(t) = -2 \frac{Z_L}{q} \Delta i(t)$$

再将尾场函数做傅里叶变换，得到阻抗为

$$Z(\omega) I_1(\omega) = -2Z_L [I_1(\omega) - I_2(\omega)]$$

通过网络分析仪可以将 $I_{1,2}(\omega)$ 信号与 S 矩阵的 S_{12} 参数对应，因此有

$$Z(\omega) = 2Z_L \frac{S_{12} - S_{12}^{\text{ref}}}{S_{12}^{\text{ref}}}$$

3.4 其它

具体实验设置参考上图 Fig. 2，此处不论。

参考文献

- [1] M. Sands and J. Rees, A bench measurement of the energy loss of a stored beam to a cavity, SLAC-PEP-NOTE-95 (1974) https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc880230/m2/1/high_res_d/878797.pdf

4 利用 90° 汤姆逊散射产生飞秒 X 射线 [NIMA 341]

Generation of femtosecond X-rays by 90° Thomson scattering

4.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：K.-J. Kim, S. Chattopadhyay, and C.V. Shank (主要机构：LBL)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0168900294903808>

4.2 摘要

这篇论文提出一种产生飞秒硬 X 射线的方案，利用一道短脉冲可见光激光与成 90° 的低能量电子束散射，这种散射称 Thomson 散射。此时电子束横向尺寸比纵向尺寸小，Thomson 散射产生的飞秒硬 X 射线沿着电子束团前进方向传播，不是沿着激光反方向²。这篇论文用简单模型分析产生的 X 射线辐射特性，利用这种 Thomson 散射与波荡器辐射类似的特性。基于目前可得的飞秒可见光激光与高亮度电子束，能够产生 1 Å、300 fs 的硬 X 射线，包含 10% 谱宽内的光子数约 10^5 。

4.3 贡献或创新点

- 创新点：示意图如下图 Fig. 1。飞秒量级可见光激光与横向压缩电子束进行 Thomson 散射，产生沿着电子束行进方向的 X 射线。与 Thomson 背散射类似，产生的辐射场波长 $\propto 1/\gamma^2$ 。差别在于，Thomson 背散射产生的辐射场脉冲长度约为电子束长与入射激光脉冲长度的平均。但是，这里的方案则可以产生飞秒长度 X 射线脉冲。
- 贡献：这篇论文利用简洁理论模型估算出在 Fig. 1 架构下，Thomson 散射产生的 X 射线辐射场特性，包含辐射波长、光子数等，以电子束与入射激光场特性参数表示。这里仅取最后结果，当一束电子束穿过入射激光场之后，等价于电子束经过一段波荡器，产生的总光子数可以写为

$$\Delta n = 113 n_e J \lambda_L \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{(\sigma_r^2 + \sigma_w^2)(\sigma_z^2 + \sigma_\lambda^2 + \sigma_w^2 + \sigma_L^2)}}$$

²沿着激光传播反方向称 Thomson 背散射 (Thomson backscattering)。

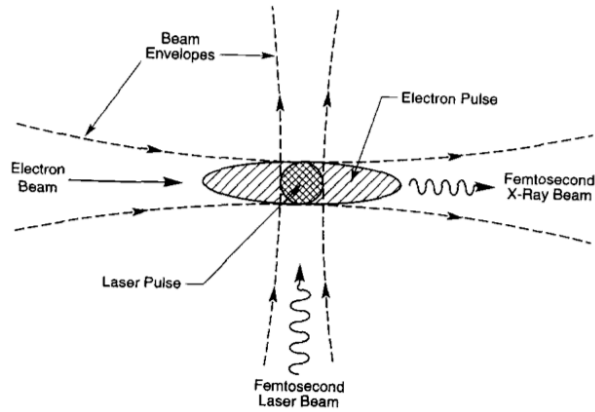


Fig. 1. A schematic illustration of 90° Thomson scattering.

其中， J 为激光脉冲能量 (单位：焦耳)、 λ_L 与 σ 以 μm 计。

下面 Table 1,2,3 给出初步估算的电子束与入射激光参数与产生的 X 射线参数。

Table 1
Electron beam

Energy	32 MeV ($\gamma = 63$)
RMS pulse length (σ_z)	3 ps
Charge/pulse	1.6 nC
Normalized rms emittance	5 mm mrad
Focussed transverse rms width (σ_x)	50 μm

Table 2
Laser beam

Wavelength (λ_L)	8000 \AA
Energy/pulse	0.2 J
RMS pulse length (σ_L / c)	170 fs
Focussed transverse rms width (σ_w)	50 μm
Power density (dP/dA)	$3 \times 10^{19} \text{ W/m}^2$

Table 3
Generated X-ray beam

Wavelength (λ_1)	1 \AA
RMS pulse length (σ_T)	300 fs
Number of photons ($\Delta\lambda / \lambda = 0.1$)	2.7×10^5
Collection angle (2θ)	$2 \times 5 \text{ mrad}$

4.4 其它

这篇论文使用的分析方法值得琢磨。

5 PEP 与 PETRA 单束团不稳定性分析 [NIMA 221]

Single beam stability in PEP and PETRA

5.1 基本信息

- 分类：多粒子动力学
- 作者：R.H. Siemann (Cornell University)
- 类型：数值模拟
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0167508784900012>

5.2 摘要

这篇论文利用计算机粒子跟踪模拟研究 PEP 与 PETRA 电子同步加速器储存环中的单束团不稳定性。模拟的输入参数为单粒子六维相空间运动参数与基于 RF 谐振腔参数计算得到的尾场 (wakefield)。在模拟中观察到集体效应具备的一些特征，并且阈值电流也与理论估算定量一致。由于需要的输入参数在加速器设计阶段就可以知道，因此此模拟结果可以用来评估潜在的束团稳定性问题。

5.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文是早期关于利用计算机粒子跟踪模拟的工作，详细给出计算机演算过程用到的六维³相空间运动方程。论文作者在这个工作的一个创新点是，将束团横纵向分布偏离高斯分布的部分用 Hermite 多项式展开，然后将展开的系数 (表征偏离不同阶 Hermite 多项式的程度) 与横纵向尾场关联。此做法值得琢磨。
- 贡献：单粒子纵向运动方程有

$$\begin{aligned}
 t_m(n) &= t_m(n-1) + \frac{\alpha T_0}{E_0} \epsilon_m(n) \\
 \epsilon_m(n) &= \epsilon_m(n-1) - \frac{2T_0}{\tau_e} \epsilon_m(n-1) - \frac{2T_0}{\tau_1} \bar{\epsilon}(n-1) - U_0 \{1 - \cos[\omega_{rf} t_m(n-1)]\} \\
 &\quad - \hat{U} \sin[\omega_{rf} t_m(n-1)] \sin \phi_s + 2\sigma_{e0} \sqrt{\frac{T_0}{\tau_e}} P_m(n) + V_m^L(n-1)
 \end{aligned}$$

其中，

$$V_m^L(n-1) = V_m^0(n-1) + x_m(n-1)V_m^x(n-1) + y_m(n-1)V_m^y(n-1)$$

³这篇论文中的 z 表示 x 或 y 。纵向坐标以 t 表示。

注意，此处 V_m^0 为主宰项。但是，当纵向尾场的横向坐标依存关系 $V_m^{x,y}$ 贡献不能忽略时，可能出现 synchrobetatron 共振⁴。

单粒子横向运动方程有

$$\begin{aligned}
z_m(n) &= \{M_{11}[\epsilon_m(n)] z_m(n-1) + M_{12}[\epsilon_m(n)] z'_m(n-1)\} \left(1 - \frac{T_0}{\tau_z}\right) \\
&\quad + \sqrt{\frac{2E_z \beta_z T_0}{\tau_z}} R_m(n) + M_{12}[\epsilon_m(n)] \frac{W_m^z(n-1)}{E_0}, \\
z'_m(n) &= \{M_{21}[\epsilon_m(n)] z_m(n-1) + M_{22}[\epsilon_m(n)] z'_m(n-1)\} \left(1 - \frac{T_0}{\tau_z}\right) \\
&\quad + \sqrt{\frac{2E_z T_0}{\beta_z \tau_z}} S_m(n) + M_{22}[\epsilon_m(n)] \frac{W_m^z(n-1)}{E_0}.
\end{aligned}$$

其中， m 是 particle index， n 是 revolution number。这些方程以 RF 谐振腔入口为起/终点，每一圈先经过 RF 谐振腔，再经过环，然后回到谐振腔起点。以上方程中的符号定义参考下面 Table 1。

Table 1
Definitions of symbols used in eqs. (1) and (3).

Symbol	Definition
t_m	deviation from the zero current phase stable time ^{a)}
ϵ_m	deviation from energy equilibrium ^{a)}
α	momentum compaction
T_0	beam revolution period
E_0	beam energy
τ_e	radiation damping time for energy oscillations
τ_D	Robinson damping time
$\bar{\epsilon}$	mean energy displacement $\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \epsilon_m\right)$
U_0	average synchrotron radiation energy loss per turn
\dot{U}	peak energy gain from rf
ω_{rf}	angular frequency of the rf
ϕ_s	zero current synchronous phase angle $[= \cos^{-1}(U_0/\dot{U})]$
$\sigma_{\epsilon 0}$	natural energy spread of the beam
P_m, R_m, S_m	Gaussian distributed random numbers with mean = 0 and rms = 1
V_m^L	longitudinal wakefield
x_m, y_m	betatron oscillation coordinates ^{a,b)}
x'_m, y'_m	slopes of betatron oscillation coordinates ^{a,b)}
M_{11}, \dots, M_{22}	the elements of the 2×2 transfer matrix (there are separate matrices for horizontal and vertical)
τ_x, τ_y	radiation damping times for betatron oscillations
E_x, E_y	natural emittances of the beam
β_x, β_y	betatron oscillation amplitude functions at the rf cavities
W_m^x, W_m^y	transverse wakefields

^{a)} These quantities are defined at the beginning of the rf cavity.

^{b)} Throughout x denotes horizontal, y denotes vertical and z is used to denote either.

接着，如何将以上方程中的横纵向尾场与束团特性关联，论文作者采一种创新方

⁴注意，这里的 $V_m^{x,y}$ 不是横向尾场。横向尾场记为 $W_m^{x,y}$ 。

法。先将束团分布偏离高斯分布的部分以 Hermite 多项式展开如下

$$\rho(t) = \exp\left(\frac{-(t-\bar{t})^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{l=0}^L a_l H_{el}\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma}\right)$$

$$\rho(t)x(t) = \exp\left(\frac{-(t-\bar{t})^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{l=0}^L b_l H_{el}\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma}\right)$$

其中，每圈束团完整分布可以通过将所有粒子投影 (histogram) 到 t 坐标得到。

然后，展开系数可以因此关联

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M t_m(n),$$

$$\sigma(n) = (1 - E_1) \sigma(n-1) + E_1 \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [t_m(n) - \bar{t}(n)]^2 \right\}^{1/2},$$

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi l! \sigma(n)}} \frac{Q}{M} \sum_{m=1}^M H_{el}\left(\frac{t_m - \bar{t}}{\sigma(n)}\right)$$

$$b_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi l! \sigma(n)}} \frac{Q}{M} \sum_{m=1}^M x_m H_{el}\left(\frac{t_m - \bar{t}}{\sigma(n)}\right)$$

$$c_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi l! \sigma(n)}} \frac{Q}{M} \sum_{m=1}^M y_m H_{el}\left(\frac{t_m - \bar{t}}{\sigma(n)}\right)$$

其中， E_1 是某一系数。

横纵向尾场可以以展开的系数写出，有

$$V_m^L = \sum_{l=0}^L (a_l V_l^0(t_m - \bar{t}) + (x_m b_l + y_m c_l) V_l^1(t_m - \bar{t}))$$

$$W_m^x = \sum_{l=0}^L b_l W_l(t_m - \bar{t}), \quad \text{and} \quad W_m^y = \sum_{l=0}^L c_l W_l(t_m - \bar{t})$$

至此，剩下的工作便是将以 Hermite 多项式为基底的横纵向尾场写出，为该论文 Section 3 内容。这些“规范”的横纵向尾场将形成 look-up table，对于不同的束长 σ 与不同的阶 l 。

根据这篇论文介绍，纵向有限束长⁵的尾场 (wakefield) 由 BCI 程序计算得到，横向尾场则由 DBCI 程序得到。也许目前可以用 CST 计算得到。PEP 包含 8 种不

⁵有限，但尽量短的束长。这么做是希望计算出来的阻抗可以延伸至更高频率，或者，对应到时域能分辨更短距离的尾场。

同尺寸的 RF 谐振腔，此处先各别计算，然后必要的时候加总平均，一定程度上利用了平均/平滑近似 (smooth approximation)。尾场与谐振腔尺寸有很强的依存关系，参考该论文 Fig. 2。注意，这里的尾场为短距尾场，仅考虑单束团内部动力学，非长距、多圈动力学。

5.4 其它

这篇论文给出了不同尺寸下的横纵向尾场，作为练习，可直接截取论文里的数据当作已知，进行粒子跟踪模拟数值实验。

6 基于 SPEAR 同步加速器参数的束团拉伸计算机模拟 [NIMA 203]

Computer simulation of bunch lengthening in SPEAR

6.1 基本信息

- 分类：多粒子动力学
- 作者：R. Siemann (Cornell University)
- 类型：理论、数值模拟
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0167508782906081>

6.2 摘要

这篇论文是基于 SPEAR 机器参数下开展的计算机粒子跟踪模拟，讨论由于短距集体效应导致的束团拉伸。SPEAR 的全称为 Stanford Positron Electron Accelerating Ring，1972 年建成运行，为 SLAC — 3 GeV 储存环。在此加速器上关于基本粒子物理的重要成果有：1974 年发现 J/ψ 粒子；1976 年发现 τ 粒子。

6.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文工作可以视为上一篇导读工作的前期工作，仅考虑纵向动力学。给出计算机演算过程用到的纵向二维相空间运动方程。这个工作的创新点是，将束团横纵向分布偏离高斯分布的部分用 Hermite 多项式展开，然后将展开的系数（表征偏离不同阶 Hermite 多项式的程度）与横纵向尾场关联。这里利用了“指数平均”(exponential average) 技巧，取 $E_1 = 0.006$ 。
- 贡献：论文中最后讨论到低于阈值电流与高于阈值电流的逐圈模拟结果。出现在低于阈值电流的束团尺寸振荡是由于有限个模拟粒子⁶导致，因为振荡振幅随着粒子数增加 $\propto 1/\sqrt{\text{粒子数}}$ 。高于阈值电流时，束团振荡振幅的逐圈模拟结果则与粒子数没有明显关系，因此被认为是集体效应导致。

6.4 其它

这篇论文可以作为初阶关于粒子跟踪模拟的练习，尾场函数与阻抗可以直接由该论文 Fig. 1 截取。此外，中间过程的阶段结果也在论文中给出。

⁶该论文用了 1000 个宏粒子表征一个束团。