

加速器束流动力学期刊论文导读 (2022 年 4 月)

受“京师物理”公众号启发，我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊，与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布，在 http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article 可以找到过去的导读文档。限于成员水平，导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流，我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2022 年 4 月) 导读成员¹负责结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]、[6]、[7]	jcytsai@hust.edu.cn
秦伟伦	[??]	qinweilun1991@gmail.com
宋怡方	[??]	yifangsong@hust.edu.cn

¹宋怡方为电磁所樊宽军教授研究生。

目录

1	自由电子激光振荡器与主动锁模激光器等价性研究: 时空结构与时空、时频动力学 [PRA 84] Equivalence between free-electron-laser oscillators and actively-mode-locked lasers: Detailed studies of temporal, spatiotemporal, and spectrotemporal dynamics	3
2	超短光脉冲在自由空间传播的空间与时间特性 [JMO 50] Spatial and temporal properties of ultrashort pulses propagating in free space	6
3	超短脉冲在自由空间的传播: 高斯脉冲束的时空耦合 [JMO 46] Free-space propagation of ultrashort pulses: Space-time couplings in Gaussian pulse beams	9
4	超短高斯脉冲光束 [PRE 58] Ultrashort pulsed Gaussian light beams	11
5	飞秒光脉冲传播 [Opt. Comm. 53] Propagation of femtosecond light pulses	14
6	固定束腰超短光脉冲在自由空间的传播特性 [OLT 39] Propagation properties of ultrashort pulsed beams with constant waist width in free space	17
7	短瑞利长度自由电子激光 [PRST-AB 9-03] Short Rayleigh length free electron lasers	19

1 自由电子激光振荡器与主动锁模激光器等价性研究：时空结构与时空、时频动力学 [PRA 84]

Equivalence between free-electron-laser oscillators and actively-mode-locked lasers: Detailed studies of temporal, spatiotemporal, and spectrotemporal dynamics

1.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：C. Bruni, T. Legrand, C. Szwaj, S. Bielawski, and M. E. Couprie (主要机构：Universite Paris-Sud 11, 巴黎第十一大学, 法国)
- 类型：数值模拟、实验
- 链接：<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.84.063804>

1.2 摘要

这篇论文从实验与数值上证明自由电子激光振荡器 (free electron laser oscillator, FELO) 与主动锁模激光器具有非常类似的行为。起因为它们具有非常类似的 Haus 方程的形式与结构：主要区别为对增益 (gain) 介质的描述。这篇论文比较了 Nd:YVO₄ 激光与储存环自由电子激光。由于在自由电子激光中能够更直接地观察激光脉冲形状与频谱，可以通过对比从而探索锁模激光的动力学。

1.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文系统地讨论了自由电子激光振荡器与主动锁模激光器的异同。
- 贡献：自由电子激光振荡器与主动锁模激光器有类似，也有截然不同的地方，如：
 - 主动锁模激光器装置小、成本低，由于涉及的时间尺度短，实验上不容易直接观察动力学过程。
 - 自由电子激光振荡器规模大、机器时间不容易取得。但是，涉及的时间尺度慢了几个数量级。因此，实验上能够得到锁模物理过程更直接的信息与频谱随时间的演化动力学。

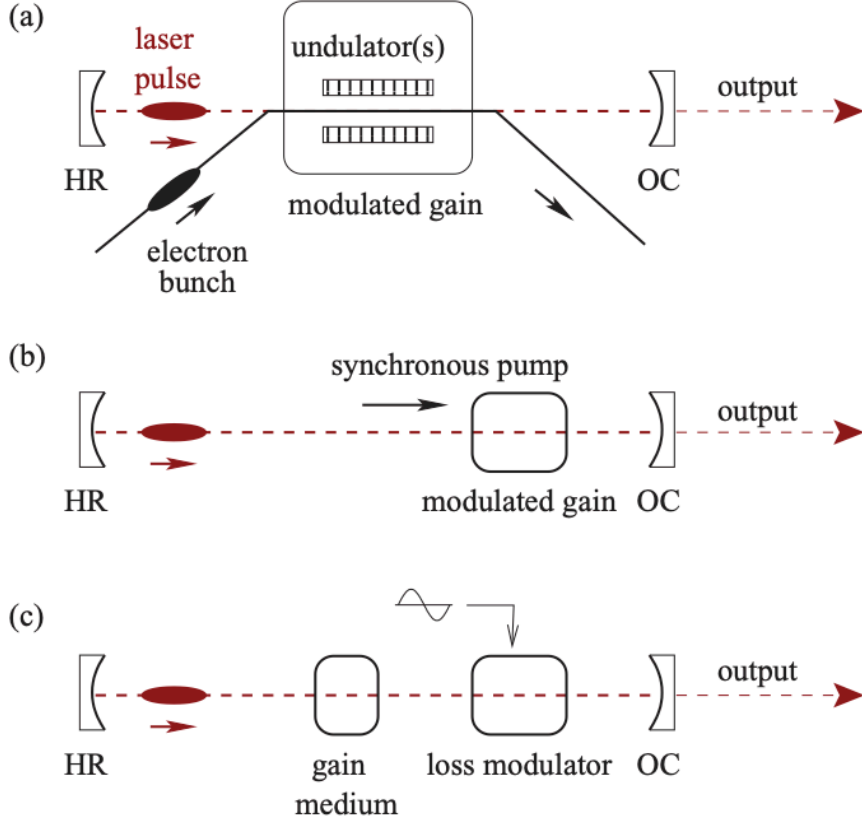


FIG. 1. (Color online) Paradigm of (a) free-electron-laser oscillators, (b) classical mode-locked lasers with a synchronous pump, and (c) classical mode-locked lasers with loss modulation. A main comparison point concerns the modulation of gain or losses at (or near) the round-trip frequency (or a multiple). HR denotes the high-reflection mirror and OC denotes the output coupler.

在自由电子激光中，有以下 Haus master equation 描述电场的时空动力学

$$e_T + ve_\theta = -e + g(T)f(\theta) [e - \alpha e_\theta + e_{\theta\theta}] + iDe_{\theta\theta} + \sqrt{\eta}\xi$$

其中，

$$f(\theta) = \exp - \left(\frac{\theta^2}{2\sigma_b^2} \right)$$

与

$$g(T) = \frac{A}{\sigma(T)} \exp \left(\frac{-[\sigma^2(T) - 1]}{2} \right)$$

其中， $\sigma(T)$ 满足以下方程

$$\frac{d\sigma^2(T)}{dT} = \frac{1}{T_s} \left(1 - \sigma^2(T) + \int_0^L |e(T, \theta)|^2 d\theta \right)$$

在经典主动锁模激光器中，有以下 Haus master equation 描述电场的时空动力学

$$e_T + ve_\theta = -e - \mu\theta^2 e + g(T) [e - \alpha e_\theta + e_{\theta\theta}] + iDe_{\theta\theta} + \sqrt{\eta}\xi$$

其中，

$$\frac{dg(T)}{dT} = \gamma \left(R - g(T) - g(T) \int_0^L |e(T, \theta)|^2 d\theta \right)$$

以上方程中， T 是 round-trip time (slow time)，以 cavity field decay time τ_c 为单位； θ 是 pulse temporal duration (fast time)，以 reference time t_U 为单位。此外，

- $\alpha e_\theta \Rightarrow$ 描述增益介质的等效折射率；对 FELO 而言，当电子束团长度比 t_U 长时，一般忽略此项。
- $\sqrt{\eta}\xi \Rightarrow$ 自发辐射噪声。
- $D \Rightarrow$ 谐振腔色散 (cavity dispersion)。对飞秒激光脉冲重要，对长激光脉冲则可以忽略。
- $e_{\theta\theta} \Rightarrow$ 扩散效应。在 FELO 中，体现在电子束与激光场交互作用，即滑移效应 (slippage)。在经典锁模激光中，常利用现象学决定其数值。
- 等式右边的 $e_\theta \Rightarrow$ 表征辐射激光场的传播速度由于介质存在而小于光速的效应。在 FELO 中，称为 lethargy。对长辐射脉冲而言，此项可以忽略。

1.4 其它

更好地消化这篇论文需要经典激光相关背景知识，值得琢磨。

2 超短光脉冲在自由空间传播的空间与时间特性 [JMO 50]

Spatial and temporal properties of ultrashort pulses propagating in free space

2.1 基本信息

- 分类：电磁辐射
- 作者：Baida Lu and Zhijun Liu (主要机构：华中科技大学)
- 类型：其它
- 链接：<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500340308235188>

2.2 摘要

这篇论文利用瑞利衍射积分 (Rayleigh diffraction integral) 与解析复信号表示方法 (analytic signal complex representation), 得到了超短光脉冲在自由空间传播的方程, 能够让我们研究这类超短脉冲的空间与时间特性。通过这个方程, 可以看到光脉冲随着离轴越多而有形变 (deformation)、展宽 (broadening)、频谱红移 (redshifting)、变窄 (narrowing) 与变形 (distortion)。此外, 在进场看到脉冲分布形式改变, 在远场脉冲分布形式则大致不变。

2.3 贡献或创新点

- 创新点：与以往分析从麦克斯韦波方程开始, 这篇论文分析超短光脉冲在自由空间传播, 从瑞利衍射积分开始, 有

$$u(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} u^0(s_0, \omega) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-iks}}{s} \right) d^2\mathbf{r}_0$$

其中, $s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$ 。

- 贡献：通过 $kr \gg 1$ 近似, 积分可以进一步写成

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ik}{2\pi} \int_{\Sigma} u^0(\mathbf{r}_0, \omega) \frac{e^{-iks}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} d^2\mathbf{r}_0$$

对于远场情况, 即, $s \approx r + \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2(xx_0 + yy_0)}{2r}$, 积分化简为

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ik \cos \theta}{2\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_{\Sigma} u^0(\mathbf{r}_0, \omega) \exp \left[-\frac{ik}{2r} (x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0) \right] d^2\mathbf{r}_0$$

其中，初始脉冲如果是高斯分布，则有 $u^0(\mathbf{r}_0, \omega) = f(\omega) \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{2w_0^2}\right)$ 。

值得注意的是，束腰与频率成分有关， $w_0 = \sqrt{l/k}$ 。

目前考虑在自由空间传播，衍射孔径可以假设为无穷大，因此积分 Σ 取 $\pm\infty$ ，得

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \frac{il \cos \theta}{r + il} f(\omega) \exp(-ikr) \exp\left[-\frac{klr \sin^2 \theta}{2(r + il)}\right]$$

引入 complex analytic signal，定义为

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u(\mathbf{r}, \omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

有

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{il \cos \theta}{r + il} F\left[t \rightarrow \frac{r}{c} + \frac{ilr \sin^2 \theta}{2c(r + il)}\right]$$

其中， $F(t)$ 为在 $r = 0$ 处的初始脉冲时间分布

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

再做傅立叶变换，有

$$\hat{u}(\mathbf{r}, \omega) = 2h(\omega) \frac{il \cos \theta}{r + il} f(\omega) \hat{e}^{-ikr} \exp\left[-\frac{klr \sin^2 \theta}{2(r + il)}\right]$$

注意到，此式与上式不同，多了 Heaviside step function。

这篇论文后面考虑超短高斯脉冲在自由空间的传播特性，得到

$$u(r, t) = \frac{il \cos \theta}{r} F\left(t - \frac{r}{c} + \frac{il \sin^2 \theta}{2c}\right)$$

其中一个特性为相位偏移

$$\tau = -\frac{r}{c} + \frac{l^2 r \sin^2 \theta}{2c(r^2 + l^2)} + \frac{ilr^2 \sin^2 \theta}{2c(r^2 + l^2)}$$

在时域与频域，分别有解析解

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{il \cos \theta}{r + il} \exp\left(-\frac{a_g^2 t'^2}{T^2}\right) \left\{ \exp(i\omega_c t') \left[1 - \operatorname{erf}\left(-\frac{T\omega_c}{2a_g} - i\frac{a_g t'}{T}\right)\right] \right. \\ \left. + \exp(-i\omega_c t') \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{T\omega_c}{2a_g} - i\frac{a_g t'}{T}\right)\right] \right\}$$

与

$$\begin{aligned} \hat{u}(\mathbf{r}, \omega) = & \frac{T}{\sqrt{2}a_g} h(\omega) \frac{il \cos \theta}{r + il} \left\{ \exp \left[-\frac{T^2 (\omega - \omega_c)^2}{4a_g^2} \right] \right. \\ & \left. + \exp \left[-\frac{T^2 (\omega + \omega_c)^2}{4a_g^2} \right] \right\} e^{-ikr} \exp \left[-\frac{l\omega r \sin^2 \theta}{2c(r + il)} \right] \end{aligned}$$

这篇论文以下给出短高斯光脉冲随时间在自由空间传播的结果，此处略去。

2.4 其它

$f(\omega)$ 为给定的辐射光频谱。

3 超短脉冲在自由空间的传播：高斯脉冲束的时空耦合 [JMO 46]

Free-space propagation of ultrashort pulses: Space-time couplings in Gaussian pulse beams

3.1 基本信息

- 分类：电磁辐射
- 作者：C.F.R. Caron and R.M. Potvliege (University of Durham, 英国)
- 类型：其它
- 链接：<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500349908231378>

3.2 摘要

这篇论文讨论超短脉冲在自由空间的传播情况下时空耦合与旁轴近似的适用范围，假设高斯脉冲分布并且频谱成分都有相同的瑞利长度 (Rayleigh length)²。推导了描述脉冲电场的简单形式，发现对于包含次/单一周期的超短脉冲或距离焦点远处的场，时空耦合效应是显著的。

3.3 贡献或创新点

- 贡献：一般来说，描述激光脉冲用以下形式

$$\mathcal{E}(r, t) = \chi(z - ct)E(r) \exp[ik(z - ct)]\hat{e}$$

其中， $\chi(z - ct)$ 为描述时间包络时 (预先知道) 的函数。这种 χ 描述方式在当脉冲非常短时，会使得 $\mathcal{E}(r, t)$ 不再很好地满足 Maxwell 方程。此外，这种描述方法隐含了将时间与空间“解耦”。考虑衍射效应的话，对低频成分的影响比对高频成分的影响更大，因此，时空解耦不再成立。即，超短脉冲的时间、空间、频率成分三者的关系变得更复杂。

这篇论文先考虑两种频谱，一个为高斯频谱

$$f_1(\omega) = \frac{(s\omega/\omega_0)^{s+1}}{\omega\Gamma(s+1)} \exp(-s\omega/\omega_0)$$

²瑞利长度 $Z_R = kw_0^2/2$ ，因此，表示脉冲不同频率成分有不同的束斑大小 (spot size)。

一个为更接近真实情况的频谱分布函数

$$f_2(\omega) = N \cos^{2n} [\pi (\omega - \omega_0) b / (2c\xi)] \exp(-\eta\omega b/c), \quad |\omega - \omega_0| \leq c\xi/b$$

$$= 0, \quad |\omega - \omega_0| > c\xi/b$$

其中，归一化常数 $N_0 = 2^{2n-1}(n!)^2 b / [(2n)! c\xi]$ 。

已知频谱函数后，对应的时域电场函数可以利用下式得到

$$\mathcal{E}_{\text{GPB}}(\rho, z, t) = E_f \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{1 + 2iz/b} \exp\left(-\frac{k\rho^2/b}{1 + 2iz/b}\right) \exp[i(kz - \omega t)] d\omega \hat{x}$$

分别有，对于高斯频谱

$$\mathcal{E}_{\text{GPB}}(\rho = 0, z = 0, t) = E_f \exp[-(s+1) \ln(1 + i\omega_0 t/s)] \hat{x}$$

与真实频谱

$$\mathcal{E}_{\text{GPB}}(\rho, z, t) = \frac{E_f}{1 + 2iz/b} \exp\left(-\frac{k_0\rho^2/b}{1 + 2iz/b}\right) \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \times \frac{\sinh Q}{Q} \frac{\pi^2}{\pi^2 + Q^2} \hat{x}$$

其中， $Q = [-i(z - ct)/b + (\rho^2/b^2)/(1 + 2iz/b) + \eta] \xi$ 。

光脉冲的时间-空间耦合可以从上面表示式中与位置 z 相关的项看出，影响脉冲内电场振荡。此外，脉冲包络也随着 z 变形。这些物理图像也可以直接从下式看出

$$\mathcal{E}_{\text{GPB}}(\rho, z, t) = \frac{E_f}{1 + 2iz/b} \int_0^\infty f(\omega) \exp\left(-\frac{\omega}{c} \frac{\rho^2/b}{1 + 4z^2/b^2}\right) \times \exp\left\{i\omega \left[\frac{z}{c} \left(1 + \frac{2\rho^2/b^2}{1 + 4z^2/b^2}\right) - t\right]\right\} d\omega \hat{x}$$

其中，乘在 $f(\omega)$ 上的指数项，随着越高频 ω 越大或脉冲横向分布约外侧 ρ 越大而衰减越快。这使得脉冲包络变形，且脉冲频谱分布也将改变（低频成分相对占比变高）。上式第二行的指数项表征当脉冲横向分布约外侧 ρ 越大引起相位差

$$\delta t = \frac{z}{c} \frac{2\rho^2/b^2}{1 + 4z^2/b^2}$$

在轴上 ($\rho = 0$) 的电场表示式可以简化为

$$\mathcal{E}_{\text{GPB}}(\rho = 0, z, t) = \frac{E_f}{1 + 2iz/b} \int_0^\infty f(\omega) \exp[i\omega(z/c - t)] d\omega \hat{x}$$

注意到，此时没有时间-空间耦合。

3.4 其它

假设不同频率成分的瑞利长度一样的情况下（比如：共焦 (confocal) 谐振腔），常见的描述激光脉冲的形式

$$\mathcal{E}(r, t) = \chi(z - ct) E(r) \exp[ik(z - ct)] \hat{e}$$

在除了少数振荡的超短脉冲外，一般还是能够使用的。

4 超短高斯脉冲光束 [PRE 58]

Ultrashort pulsed Gaussian light beams

4.1 基本信息

- 分类：电磁辐射
- 作者：Miguel A. Porras (Universidad Politecnica de Madrid, 西班牙)
- 类型：理论
- 链接：<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.58.1086>

4.2 摘要

这篇论文首次给出一族用来描述超短光脉冲在自由空间传播的旁轴波方程的解。这些脉冲解允许任意的时间分布形式与横向近高斯形式，可以视为两面镜组成的锁模激光器里的激光脉冲。这篇论文接着研究这类超短光脉冲的特性，如：脉冲时间延迟、变形、频移等。衍射、脉冲能量的空间分布等也在这篇论文里有些讨论。当光脉冲仅包含几个振荡周期时，这些效应变得不可忽略。

4.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文采用多色光解析信号复表示法 (analytic signal complex representation)，求解一族旁轴波方程的脉冲高斯束 (pulse Gaussian beam, PGB) 解。
- 贡献：这篇论文分析由 Maxwell 波方程出发

$$\Delta\psi - 2i\frac{\omega_0}{c}\frac{\partial\psi}{\partial z} - 2i\frac{\omega_0}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

对于行进波，可以写成如下形式

$$\Delta_{x,y}\psi - 2ik_0\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{2}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t'}$$

引入脉冲内振荡周期与脉冲长度的比值 T_0/T ，有

$$\Delta_{x,y}\psi - 2ik_0\frac{\partial}{\partial z}\left[\psi + \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{T_0}{T}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\tau'}\right] = 0$$

可以看到，当脉冲长度包含许多电场振荡周期时，上式退化为熟悉的旁轴波方程

$$\Delta_{x,y}\psi - 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z}\psi = 0$$

这篇论文即探讨包含 T_0/T 项时，短脉冲在自由空间传播时的时间-空间耦合特性。

这篇论文 Section III 推导 ψ_p 的形式, 并说明该论文 Ref.[2] 中假设 $p(t') = e^{-t'^2/T^2} \cos(\omega_0 t')$ 形式后，可能不正确或产生极点的原因。由此而必须使用解析信号复表示法。

利用解析信号复表示法，可以得到脉冲内电场函数为

$$E(r, z, t') = \frac{iz_R}{q(z)} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(\omega - \omega_0) + f^*(-\omega - \omega_0)] \exp\left[\frac{-i\omega r^2}{2cq(z)}\right] \exp(i\omega t') d\omega$$

其中，假设了脉冲不同频率成分具有相同的瑞利长度 z_R 与束腰。对于锁模激光系统，这个假设基本成立。上式中， $f(\omega)$ 为仅包含正频率的频谱。

这篇论文在 Section IV 利用电场表示式 $E(r, z, t') = \frac{iz_R}{q(z)} \psi_p(t'_c) \exp(i\omega_0 t'_c)$ ，其中两个重要复参数的特性

$$t'_c = t' - \frac{r^2}{2cq(z)}$$

与

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{k_0 a^2(z)}$$

描述短脉冲在自由空间传播的特性，并由下图形象化描述其物理图像对应。

另外，还讨论了脉冲能量的空间分布

$$\begin{aligned} W(r, z) &= \left[\frac{a_0}{a(z)}\right]^2 \exp\left[-\frac{2r^2}{a^2(z)}\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \left| \psi_p\left(t'' + i\frac{r^2}{\omega_0 a^2(z)}\right) \right|^2 \\ &= \left[\frac{a_0}{a(z)}\right]^2 \exp\left[-\frac{2r^2}{a^2(z)}\right] g\left[\frac{r^2}{a^2(z)}\right] \end{aligned}$$

其中， g 为 pulse form function.

这篇论文 Section V 考虑了三种不同形式的 $p(t')$ ，分别有

- $p(t') = \frac{\Delta t}{\sqrt{t'^2 + \Delta t^2}} \cos[\omega_0 + \tan^{-1}(t'/\Delta t)]$
- $p(t') = \text{sinc}\left(\frac{2t'}{\Delta t}\right) \cos(\omega_0 t')$
- $p(t') = \exp(-t'^2/\Delta t^2) \cos(\omega_0 t')$

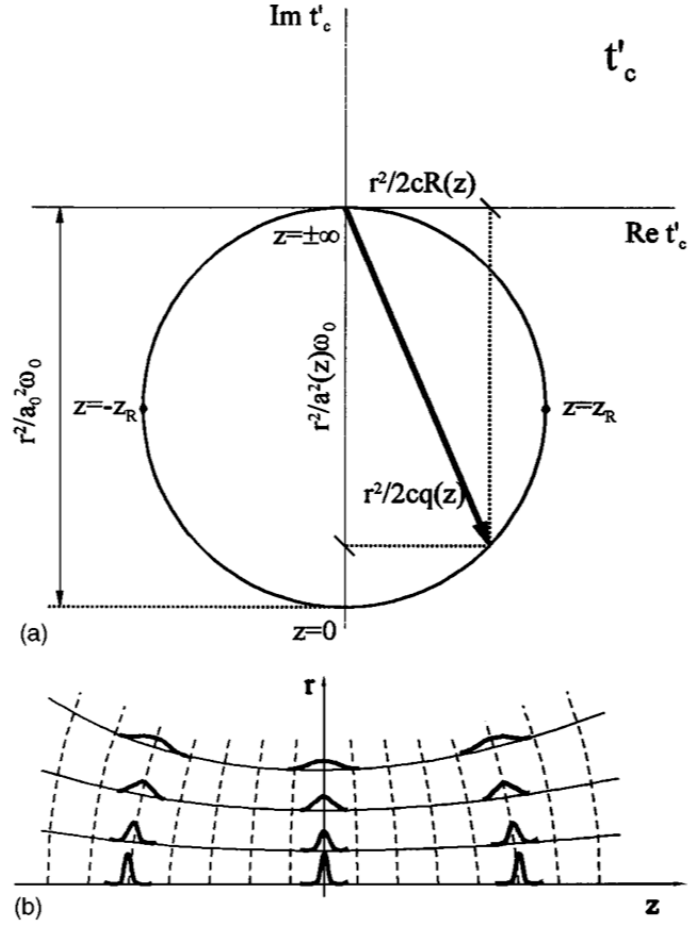


FIG. 1. (a) Displacement in the complex plane t'_c of $\psi_p(t'_c)$ to obtain the pulse envelope as the cut along the real axis. (b) Schematic drawing of the PGB, showing the pulse time delay and broadening.

5 飞秒光脉冲传播 [Opt. Comm. 53]

Propagation of femtosecond light pulses

5.1 基本信息

- 分类：电磁辐射
- 作者：I.P. Christov (Sofia University, 保加利亚)
- 类型：其它
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0030401885900185>

5.2 摘要

这篇论文利用标量衍射理论分析飞秒激光脉冲在自由空间传播的时间、空间特性。

5.3 贡献或创新点

- 贡献：这篇论文是早期分析超短脉冲（但还不是少数振荡周期情况）在自由空间传播特性的论文。从波动方程出发，得到以平面波叠加的电（磁）场表示式

$$A(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint A(k_x, k_y, \omega) \exp \{i[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]\} dk_x dk_y d\omega$$

其中， $k_z = (\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$ 。

再利用旁轴近似 $k_z = \omega/c - \frac{1}{2}(c/\omega)(k_x^2 + k_y^2) + \dots$ ，上式可以进一步化简为

$$A(x, y, z, \eta) = (2\pi)^{-3/2} \int g(\omega) e^{i\omega\eta} \iint f(k_x, k_y) e^{-i[k_x x + k_y y - \frac{1}{2} \frac{c}{\omega} (k_x^2 + k_y^2) z]} dk_x dk_y d\omega_1$$

其中， $\eta = t - z/c$ ， $f(k_x, k_y)$ ， $g(\omega)$ 分别为 $f(x, y)$ ， $g(t)$ 的傅立叶变换，有初始分布 $A(x, y, z=0, t) = f(x, y)g(t)$ 。这篇论文讨论初始分布为高斯分布情况，其中，

$$f(x, y) = A_0 \exp \left[- (x^2 + y^2) / a^2 \right]$$

$$g(t) = \exp \left(-t^2 / T^2 + i\omega_0 t \right)$$

则有电场的一般表示式

$$A(x, y, z, \eta) = \frac{A_0 T}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{d\omega}{1 - i2zc/\omega a^2} \exp \left(i\omega\eta - \frac{(\omega - \omega_0)^2 T^2}{4} - \frac{x^2 + y^2}{a^2 - i2zc/\omega} \right).$$

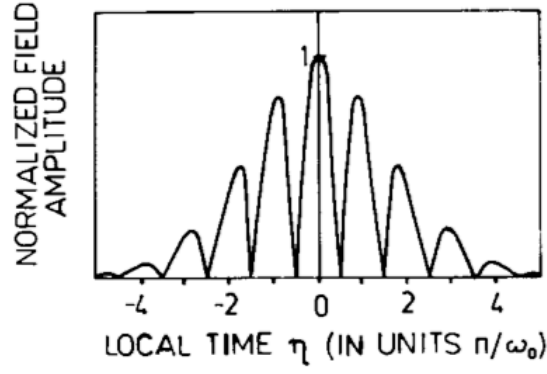


Fig. 1. Pulse field configuration (absolute value) in local time $\eta = t - z/c$ at $z = 0$, for a pulse with duration $2T = 4$ fs (full width at level e^{-1}) and central frequency $\omega_0 = 3.8 \times 10^{15}$ Hz.

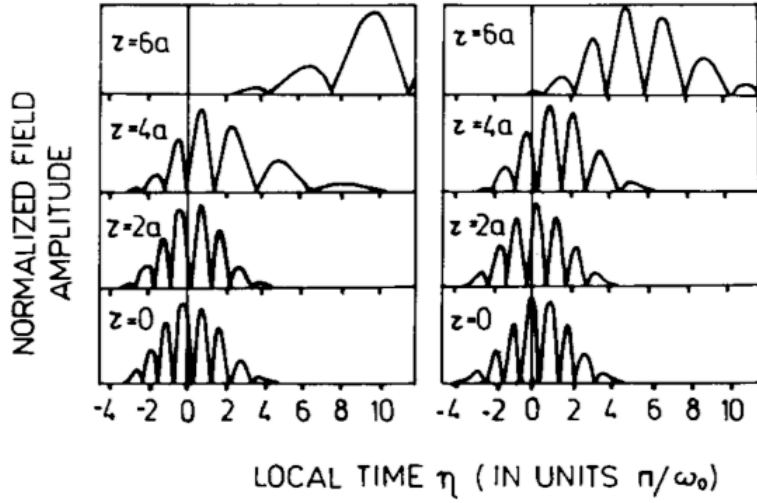


Fig. 2. Pulse field configuration (absolute value) in local time $\eta = t - z/c$ for a pulse with duration $2T = 4$ fs, for various distances r from the beam axis: (a) $z = 400$ cm and (b) $z = 800$ cm.

论文后半部在此结果基础上进行讨论，如上图，可以看到，脉冲外侧部分随着时间传播衍射更明显，并且，衍射主要为长波长成分。下面 Fig. 2(b) 由于光脉冲横向尺寸也随着传播增加，因此，在固定 $\tau = 6a$ 位置下，只剩较短波长成分。

6 固定束腰超短光脉冲在自由空间的传播特性 [OLT 39]

Propagation properties of ultrashort pulsed beams with constant waist width in free space

6.1 基本信息

- 分类：电磁辐射
- 作者：Qihui Zou and Baida Lu (BNL)
- 类型：其它
- 链接：<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0030399205001957>

6.2 摘要

这篇论文基于瑞利衍射积分 (Rayleigh diffraction integral) 与解析信号复表示 (analytic signal complex representation) 描述固定束腰超短光脉冲在自由空间的传播特性。这个方法具有一些优势，因为不需要旁轴近似、也不需要给定脉冲包络函数或远场近似。远场近似或旁轴近似则是作为这里分析的特例。在分析之后，这篇论文接着演示了少周期或单周期超短高斯脉冲在自由空间传输特性。

6.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文基于瑞利衍射积分与解析信号复表示，得到超短光脉冲在时间、空间传播的表示式，用来描述固定束腰超短光脉冲在自由空间的传播特性。
- 贡献：一般分析超短光脉冲的传播特性主要考虑两种情况：
 1. 固定束腰
 2. 固定衍射长度

这篇论文考虑第一种情况，在当电场可以写成 $E_0(x_0, y_0, z = 0, t) = F(x_0, y_0, z = 0)f(t)$ 形式的情况下成立，其中， F 称 beam shape， f 称 pulse shape。

这篇论文从瑞利衍射积分开始，

$$E(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} E^0(\mathbf{r}_0, \omega) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) d^2\mathbf{r}_0$$

对于 $kr \gg 1$ 情况下, 有

$$E(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ik}{2\pi} \int_{\Sigma} E^0(\mathbf{r}_0, \omega) \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial R}{\partial z} d^2\mathbf{r}_0$$

近似表示式有 (注意, 此时还不算做“远场”近似)

$$E(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ik \cos \theta}{2\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \int_{\Sigma} \int E^0(\mathbf{r}_0, \omega) \exp \left[-\frac{ik}{2r} (x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0) \right] dx_0 dy_0$$

利用单边傅立叶变换, 时域的电场函数为

$$E^+(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} E(\mathbf{r}, \omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

其中, 当频谱给定, 并假设横向分布为高斯形式时, 电场可以写为

$$E(\mathbf{r}, \omega) = S(\omega) \frac{il \cos \theta}{r + il} \exp \left(-i \frac{r}{c} \exp \left[-\frac{rl \sin^2 \theta \omega}{2c(r + il)} \right] \right)$$

如果时间上的脉冲分布为如下显形式,

$$f(t) = \exp \left[-\left(a_g \frac{t}{T} \right)^2 \right] \cos(\omega_c t)$$

则最终电场表达式为

$$\begin{aligned} E^t(\mathbf{r}, t) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} E(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi p}} \int_0^{\infty} \frac{il \cos \theta}{r + il} \exp(i\omega t') \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{rl \sin^2 \theta \omega}{2c(r + il)} \right] \left\{ \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{4p} \right] + \exp \left[-\frac{(\omega + \omega_c)^2}{4p} \right] \right\} d\omega \end{aligned}$$

对应的频谱有

$$E(\mathbf{r}, \omega) = h(\omega) \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{il \cos \theta}{r + il} \left\{ \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{4p} \right] + \exp \left[-\frac{(\omega + \omega_c)^2}{4p} \right] \right\} \times \exp \left[-\frac{rl \sin^2 \theta \omega}{2c(r + il)} \right]$$

其中, $h(\omega)$ 为 Heaviside 函数。

这篇论文后半部分即讨论利用上面两式对于超短光脉冲在自由空间传播时分别在时域与频域的特性。

6.4 其它

研究仅有几个振荡周期的超短脉冲的时空动力学一般用包络函数描述未必准确, 应直接描述包含快速振荡项的电场函数。

7 短瑞利长度自由电子激光 [PRST-AB 9-03]

Short Rayleigh length free electron lasers

7.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：W. B. Colson, J. Blau, R. L. Armstead, P. P. Crooker, R. Vigil, T. Voughs, and B. W. Williams (NPS)
- 类型：数值模拟
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.9.030703>

7.2 摘要

传统的自由电子激光振荡器 (FEL oscillator) 情况下，一般在波荡器内辐射场的瑞利长度约为波荡器长度的 $1/3$ 至 $1/2$ 。这个选择能够使增益或束团-辐射耦合达到最大。在高功率红外光或紫外光波段 FEL，辐射光场可能伤害光学反射镜；为了避免对镜子的伤害，可以增加辐射光场在镜面上的尺寸或减小场强，此时可以调整（减短）辐射场在波荡器中的瑞利长度。但是，这也将伴随着 FEL 交互作用有些改变。这篇论文通过引入一种新的坐标系统，利用数值模拟探讨辐射场自波荡器出口至镜面的衍射效应。模拟发现，这种情况下，辐射场波前变形，不再是高斯基模；还发现，此种情况也影响单次经过增益与接近饱和时引出的场强。

7.3 贡献或创新点

- 创新点：减短瑞利长度意味着进一步压缩在波荡器中的辐射场，一定程度上能有效增加自由电子激光振荡器的增益。另一方面，辐射场在反射镜面尺寸较大（假设谐振腔尺寸固定），可以减少对镜面的伤害。

传统的自由电子激光振荡器 (FEL oscillator) 情况下，一般在波荡器内辐射场的瑞利长度约为波荡器长度的 $1/3$ 至 $1/2$ 。这个结果可以从该论文 Section I 中给出的估算得到 $G = P/P_0 - 1 \propto \frac{1}{z_0 + \frac{1}{12z_0}}$ ，其中， $z_0 = Z_0/L$, $Z_0 = \pi W_0^2/\lambda$ 为瑞利长度。当 $z_0 = \sqrt{1/12} \approx 0.3$ 时，即 $Z_0 = 0.3L$ 时， G 最大。

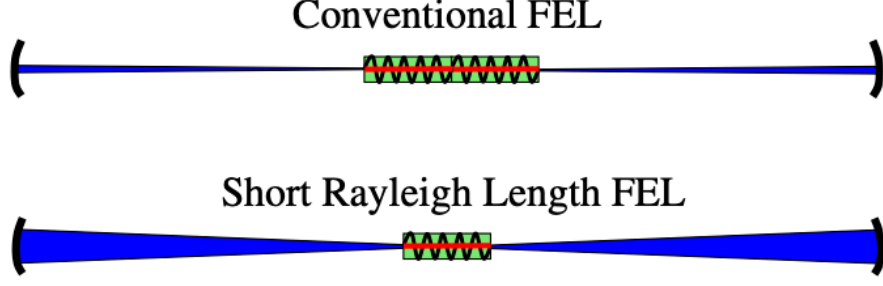


FIG. 1. (Color) Schematic comparison of the conventional and short-Rayleigh length FEL designs.

这篇论文通过引入一种新的坐标系（“扩张坐标”），能够有效考虑辐射场衍射过程快速膨胀的空间分布，利用数值模拟探讨辐射场自波荡器出口至镜面的衍射效应。

- 贡献：这篇论文首先给出波荡器中辐射场在存在衍射效应时，其振幅与相位随波荡器坐标的改变，如图 Fig. 2

沿波荡器 z 轴，有

$$a(\tau) = a_0 [1 + (\tau - \tau_w)^2 / z_0^2]^{-1/2}$$

与

$$\phi(\tau) = -\tan^{-1}[(\tau - \tau_w) / z_0]$$

其中, τ_w 为波荡器中点坐标。对于偏轴情况 ($r \neq 0$), 更细节推导, 见该论文 Section II.C。

这篇论文 Section III 描述了在计算机程序里如何实现“扩张坐标”(expanding-coordinate)。在他们的 FEL 程序里, 在波荡器里用直角坐标, 辐射场离开波荡器后, 在谐振腔自由空间区域则用扩张坐标。扩张坐标能够考虑衍射效应, 并与既有理论与 ray tracing 方法比较验证其适用性。

7.4 其它

关于“扩张坐标”的描述, 可以参考该论文 Section II.D。

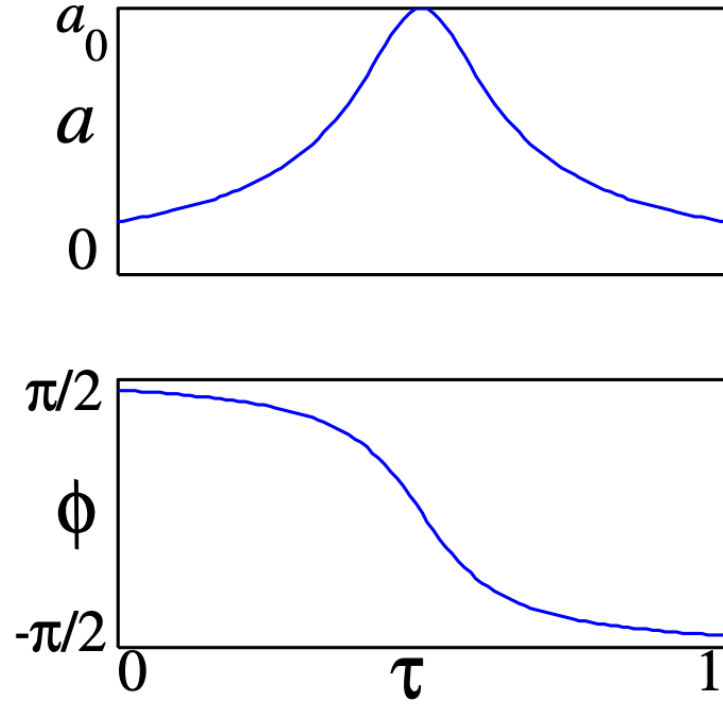


FIG. 2. (Color) Dimensionless optical field amplitude $a(\tau)$ and phase $\phi(\tau)$ versus dimensionless time $\tau = ct/L$, for a short-Rayleigh length FEL, $z_0 = 0.1$. Note the rapid change in amplitude and phase near the optical waist at the center of the undulator, $\tau = \tau_w = 0.5$.