

## 加速器束流动力学期刊论文导读 (2023 年 8 月)

受“京师物理”公众号启发，我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊，与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布，在 [http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh\\_CN/article/2191806/content/1551.htm#article](http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article) 可以找到过去的导读文档。限于成员水平，导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流，我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2023 年 8 月) 结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]	jcytsai@hust.edu.cn
周剑晖	[6]、[7]、[8]、[9]	
李嘉鹏	[??]	

## 目录

1	一个 beta 函数失配参量 [SLAC-AP-85] A beta mismatch parameter	3
2	六维束包络方程：一种模拟加速器束动力学互动模拟的超快计算方法 [PR Applied 19-05] Six-Dimensional Beam-Envelope Equations: An Ultrafast Computational Approach for Interactive Modeling of Accelerator Structures	5
3	有限尺寸激光束的反射式体布拉格光栅理论与实验 [JQE 44] Finite Beams in Reflective Volume Bragg Gratings: Theory and Experiments	9
4	自由电子激光中一种避免寄生压缩的束团压缩方法 [TUPMA033] A bunch compression method for free electron lasers that avoids parasitic compression	14
5	储存环中相干扭摆器辐射引起的微波不稳定性阈值研究 [PRAB 26 05] Microwave instability threshold from coherent wiggler radiation impedance in storage rings	18
6	注入失配 Injection mismatch	23
7	注入失配和相空间稀释 [FN-458] Injection Mismatch and Phase Space Dilution	27
8	Betatron 失配如何影响束团尺寸和束团密度? [ISR-TH/69-32] How does betatron mismatch affect beam size and beam density?	31
9	Filamentation 后的束团分布函数 Beam Distribution Function after Filamentation	34

# 1 一个 beta 函数失配参量 [SLAC-AP-85]

## A beta mismatch parameter

### 1.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：M. Sands (SLAC)
- 类型：理论、模拟
- 链接：<https://www.slac.stanford.edu/pubs/apnotes/slac-ap-085.pdf>

### 1.2 摘要

这篇论文定义了一个物理量，称“beta 失配 (beta mismatch)” $M$ ，用来量化束流传输过程积累的光学误差。这个参量通过比较实际量测到的与理想设计的值之间的比较而获得。这个量拥有一个特点，即，它是一准不变量 (quasi-invariant)，在没有光学误差发生的位置，这个  $M$  保持不变，而在误差集中的位置上  $M$  会改变。这篇论文还定义了一个辅助量，称“失配相位 (mismatch phase)” $\psi_M$ ，用来表征在归一化相空间中的旋转 (orientation) 失配。

### 1.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文尝试通过失配束团传输过程中，横向相空间相对于理想情况下的差异定义失配参量。参考如下 Fig. 8，作者选择以 (归一化) 相空间椭圆中的长轴为参量进行量化，定义了  $M$ 。此外，有些失配情况未必导致相空间椭圆中的长轴改变，而是相空间旋转失配，因此，作者在这篇论文第二部分定义了失配相位  $\psi_M$  用来量化此现象。
- 贡献：略去讨论细节，将  $M$  与  $\psi_M$  的定义分别总结如下：

$$M \equiv \frac{1}{2} \left[ \tilde{\beta}_e + \tilde{\gamma}_e + \sqrt{(\tilde{\beta}_e + \tilde{\gamma}_e)^2 - 4} \right]$$

$$\psi_M \equiv \theta_0 + \phi_m$$

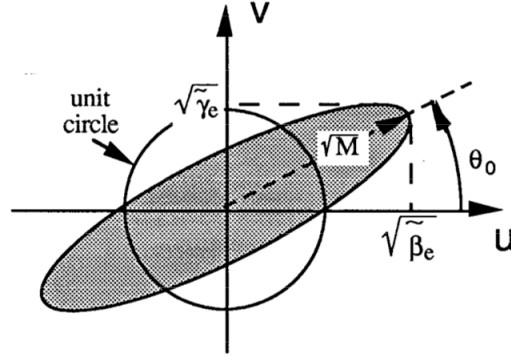


Fig. 8. Geometry of the rationalized phase ellipse and the mismatch parameter  $M$  for a beam of unit emittance.

其中,  $\phi_m$  为匹配情况的 betatron phase, 失配情况引起的非纯圆相空间旋转角度可估算如下

$$\tan 2\theta_0 = -\frac{2\tilde{\alpha}_e}{\tilde{\beta}_e - \tilde{\gamma}_e}$$

注意, 由于  $\tan$  反函数的多值性, 取值需要留意, 细节参考该论文 7) 的讨论。

下图 Fig. 11 是根据一个例子计算得到的  $M$  与  $\psi_M$ 。

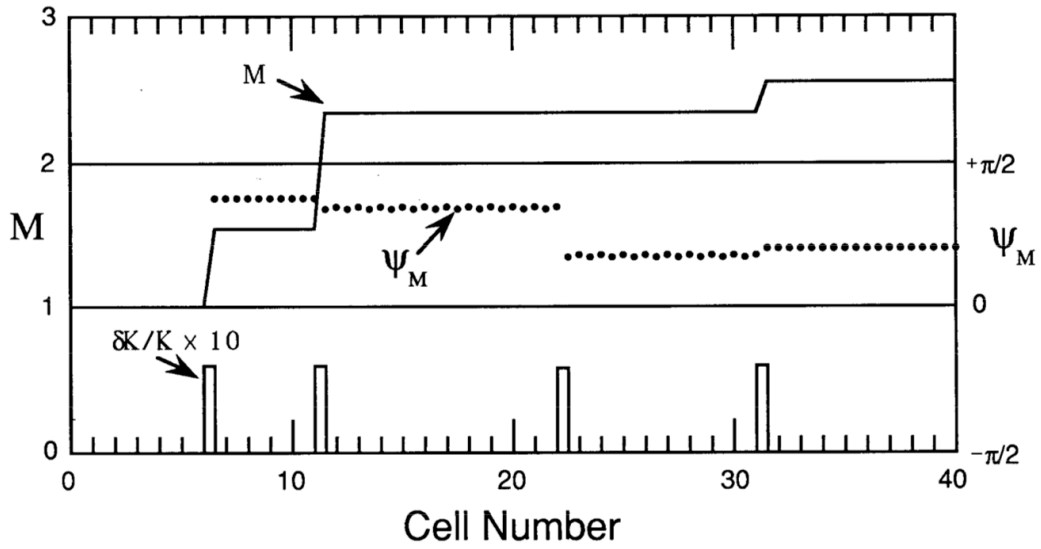


Fig. 11. The same as Fig.10 except that the mismatch phase  $\psi_M$  is also shown. Note that the scale of  $\psi_M$  is at the right.

## 2 六维束包络方程：一种模拟加速器束动力学互动模拟的超快计算方法 [PR Applied 19-05]

### Six-Dimensional Beam-Envelope Equations: An Ultrafast Computational Approach for Interactive Modeling of Accelerator Structures

#### 2.1 基本信息

- 分类：多粒子束流动力学
- 作者：M.D. Kelisani, S. Barzegar, P. Craievich, and S. Doeberl (主要机构：CERN)
- 类型：理论、模拟
- 链接：<https://journals.aps.org/prapplied/abstract/10.1103/PhysRevApplied.19.054011>

#### 2.2 摘要

高品质束团的设计和实现需要精确高效的在线 (online) 建模工具。目前，较全面的束流动力学研究由于计算效率的关系，在互动式系统设计中成本高昂且具有挑战性。这篇论文提出一种精确、高速的分析加速器组件束流动力学的方法，并将其与传统的 PIC (particle in cell) 代码的结果进行比较。通过使用强大的数值计算技术，此方法评估了加速器中束团在六维相空间中分布的时间演化。引入了描述束团包络在六维相空间中演化的矩 (moment) 方程。计算了三维空间电荷、外部力和发射度力，并在分析上对不同类型的束团包络是不敏感的。将得到的力代入束团包络方程，建立了一组包含简单代数表达式的六个修改方程，完整描述了束流动力学。整个解决方案考虑了电子束的非相干能散。通过研究束流在加速器的各个组件中的传输来验证模型的准确性。应用这种分析方法不仅形成了一种物理思维方式，指出了影响带电粒子束团行为的因素，而且具有比当今直线加速器设计的粒子跟踪代码快至少三个数量级的超快计算速度。最后，使用该模型成功设计了一种用于先进质子驱动等离子体尾场加速实验的光阴极注入器，对模型的可行性进行了检验测试。

### 2.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文由洛伦兹力方程开始，定义  $u = x, y, z$ ，推导出束团六维相空间坐标的对应的六个包络物理量  $\sigma_u = \sqrt{\langle \Delta u^2 \rangle}$ ,  $\Lambda_u = \sqrt{\langle \Delta u'^2 \rangle}$ ，满足以下方程

$$\sigma_u'' + \frac{\gamma_0 \gamma_0'}{\gamma_0^2 p_0^2} \sigma_u' = F_u^e + F_u^s + F_u^\varepsilon$$

与

$$\frac{d\Lambda_u}{dz_0} + \frac{\gamma_0 \gamma_0'}{\gamma_0^2 p_0^2} \Lambda_u = G_u^e + G_u^s$$

其中，等式右边上标“e”表示外部（非束团本身）提供的电磁场，“s”表示空间电荷力，“ε”表示束团发射度“等效的”驱动项。

概念上，借助于流体动力学 (hydrodynamics) 理论，计算宏观量，并假设与束团细部结构无关，如： $\sigma_x = \sigma_x(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z)$ 。数值计算上，将最耗时的空间电荷积分以查表方式插值得到，大大缩短计算时间。

- 贡献：上面公式中，等式右边各项的显形式分别有

$$\begin{aligned} F_u^e &= -\frac{\eta}{\beta_0^2 \sigma_u} \left\langle \frac{(\vec{E}^e \cdot \vec{\beta}) \beta_u \Delta u}{\gamma} \right\rangle - \frac{\eta^2 c^2 (1 - \hat{u} \cdot \hat{z})}{4\beta_0^2 \sigma_u} \left\langle \frac{(\vec{B}^{\text{SM}} \cdot \hat{z})^2 \Delta u^2}{\gamma^2} \right\rangle \\ &\quad + \frac{\eta}{\beta_0^2 \sigma_u} \left\langle \frac{(\vec{E}^e + \vec{\beta}_c \times \vec{B}^e - (1 - \hat{u} \cdot \hat{z}) \vec{\beta}_c \times \vec{B}^{\text{SM}}) \cdot \Delta u \hat{u}}{\gamma} \right\rangle, \\ F_u^s &= -\frac{\eta}{\beta_0^2 \sigma_u} \left\langle \frac{(\vec{E}^s \cdot \vec{\beta}) \beta_u \Delta u}{\gamma} \right\rangle + \frac{\eta}{\beta_0^2 \sigma_u} \left\langle \frac{(\vec{E}^s + \vec{\beta}_c \times \vec{B}^s) \Delta u \hat{u}}{\gamma} \right\rangle, \\ F_u^\varepsilon &= \frac{\Lambda_u^2 - \sigma_u'^2}{\sigma_u} \\ G_u^e &= -\frac{\eta}{\beta_0^2 \Lambda_u} \left\langle \frac{(\vec{E}^e \cdot \vec{\beta}) \beta_u \Delta u'}{\gamma} \right\rangle - \frac{\eta^2 c^2 (1 - \hat{u} \cdot \hat{z})}{4\beta_0^2 \Lambda_u} \left\langle \frac{(\vec{B}^{\text{SM}} \cdot \hat{z})^2 \Delta u \Delta u'}{\gamma^2} \right\rangle \\ &\quad + \frac{\eta}{\beta_0^2 \Lambda_u} \left\langle \frac{(\vec{E}^e + \vec{\beta}_c \times \vec{B}^e - (1 - \hat{u} \cdot \hat{z}) \vec{\beta}_c \times \vec{B}^{\text{SM}}) \Delta u' \hat{u}}{\gamma} \right\rangle \\ G_u^s &= -\frac{\eta}{\beta_0^2 \Lambda_u} \left\langle \frac{(\vec{E}^s \cdot \vec{\beta}) \beta_u \Delta u'}{\gamma} \right\rangle + \frac{\eta}{\beta_0^2 \Lambda_u} \left\langle \frac{(\vec{E}^s + \vec{\beta}_c \times \vec{B}^s) \Delta u' \hat{u}}{\gamma} \right\rangle. \end{aligned}$$

其中， $\beta_u = \beta_0 (\hat{u} \cdot \hat{z} + \Delta u')$ 、 $\eta = q/mc^2$ ，上标“SM”表示螺线管磁场。束团投影发射度可以按  $\varepsilon_u = \sqrt{\langle \Delta u^2 \rangle \langle \Delta u'^2 \rangle - \langle \Delta u \Delta u' \rangle^2} = \sigma_u \sqrt{\Lambda_u^2 - \sigma_u'^2}$  计算。能散按如下三

阶展开估算

$$\frac{1}{\gamma} \cong \frac{1}{\gamma_0} \left\{ 1 - p_0^2 \Delta z' - \frac{p_0^2 \gamma_0^2}{2} \Delta z'^2 - \frac{p_0^4 \gamma_0^2}{2} \Delta z'^3 - \frac{p_0^2}{2} (1 + p_0^2 \Delta z') (\Delta x'^2 + \Delta y'^2) \right\}$$

上面式子中与空间电荷力相关的项还需要进一步化简，预期化简为  $\vec{\sigma}$  与  $\vec{\Lambda}$  的形式。这篇论文假设束团为高斯、非耦合分布，则化简后的显形式有

$$\begin{aligned} F_x^s &\cong + \frac{f_b}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \times \frac{\alpha_x}{\sigma_x \sigma_z} - \frac{f_b}{\gamma_0} \left\{ \frac{(\Lambda_x^2 + 2\sigma_x'^2) \alpha_x - \sigma_x'^2 \alpha_{xx}}{2\sigma_x \sigma_z} + \frac{8\Lambda_y^2 \alpha_x - \sigma_y'^2 \alpha_{xy}}{16\sigma_x \sigma_z} + \frac{(1 - p_0^2) (2\Lambda_z^2 \alpha_x - \sigma_z'^2 \alpha_{xz})}{4\sigma_x \sigma_z} \right\} \\ &\quad - \frac{f_b}{\gamma_0} \left\{ \frac{(\Lambda_x^2 + 2\sigma_x'^2) \alpha_x - \sigma_x'^2 \alpha_{xx}}{\sigma_x \sigma_z} + \frac{\sigma_x' \sigma_y' (8\alpha_y - \alpha_{xy})}{8\sigma_z \sigma_y} + \frac{(1 - p_0^2) \sigma_x' \sigma_z' (2\gamma_0^2 \sigma_z^2 \alpha_z - \sigma_x \sigma_y \alpha_{xz})}{2\sigma_x \sigma_y \gamma_0^2 \sigma_z^2} \right\}, \\ F_y^s &\cong + \frac{f_b}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \times \frac{\alpha_y}{\sigma_y \sigma_z} - \frac{f_b}{\gamma_0} \left\{ \frac{(\Lambda_y^2 + 2\sigma_y'^2) \alpha_y - \sigma_y'^2 \alpha_{yy}}{2\sigma_y \sigma_z} + \frac{8\Lambda_x^2 \alpha_y - \sigma_x'^2 \alpha_{xy}}{16\sigma_y \sigma_z} + \frac{(1 - p_0^2) (2\Lambda_z^2 \alpha_y - \sigma_z'^2 \alpha_{yz})}{4\sigma_y \sigma_z} \right\} \\ &\quad - \frac{f_b}{\gamma_0} \left\{ \frac{(\Lambda_y^2 + 2\sigma_y'^2) \alpha_y - \sigma_y'^2 \alpha_{yy}}{\sigma_y \sigma_z} + \frac{\sigma_y' \sigma_x' (8\alpha_x - \alpha_{xy})}{8\sigma_z \sigma_x} + \frac{(1 - p_0^2) \sigma_y' \sigma_z' (2\gamma_0^2 \sigma_z^2 \alpha_z - \sigma_x \sigma_y \alpha_{yz})}{2\sigma_y \sigma_x \gamma_0^2 \sigma_z^2} \right\}, \\ F_z^s &\cong + \frac{f_b}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \times \frac{\alpha_z}{\sigma_x \sigma_y} - \frac{f_b}{\gamma_0} \left\{ \frac{3(1 - p_0^2) (2(\Lambda_z^2 + 2\sigma_z'^2) \alpha_z - \sigma_z'^2 \alpha_{zz})}{4\sigma_x \sigma_y} + \frac{2\gamma_0^2 \sigma_z^2 \Lambda_x^2 \alpha_z - \sigma_x'^2 \sigma_x \sigma_y \alpha_{xz}}{4\sigma_x \sigma_y \gamma_0^2 \sigma_z^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\gamma_0^2 \sigma_z^2 \Lambda_y^2 \alpha_z - \sigma_y'^2 \sigma_x \sigma_y \alpha_{yz}}{4\sigma_x \sigma_y \gamma_0^2 \sigma_z^2} \right\} - \frac{f_b}{\gamma_0} \left\{ \frac{\sigma_x' \sigma_z' (2\alpha_x - \alpha_{xz})}{2\sigma_x \sigma_z} + \frac{\sigma_y' \sigma_z' (2\alpha_y - \alpha_{yz})}{2\sigma_y \sigma_z} \right\}, \\ G_x^s &= + \frac{f_b \sigma_x'}{\beta_0^2 \gamma_0^3 \Lambda_x} \frac{\alpha_x}{\sigma_x \sigma_z} - \frac{f_b \sigma_x'}{2\gamma_0 \Lambda_x} \left\{ 3 \frac{3\Lambda_x^2 \alpha_x - \sigma_x'^2 \alpha_{xx}}{\sigma_x \sigma_z} + \frac{8\Lambda_y^2 \alpha_x - \sigma_y'^2 \alpha_{xy}}{8\sigma_x \sigma_z} + (1 - p_0^2) \frac{2\Lambda_z^2 \alpha_x - \sigma_z'^2 \alpha_{xz}}{2\sigma_x \sigma_z} \right\} \\ &\quad - \frac{f_b \sigma_y'}{8\gamma_0 \Lambda_x} \left\{ \frac{8\Lambda_x^2 \alpha_y - \sigma_x'^2 \alpha_{xy}}{\sigma_y \sigma_z} \right\} - \frac{f_b \sigma_z'}{2\gamma_0 \Lambda_x} \left\{ (1 - p_0^2) \frac{2\gamma_0^2 \sigma_z^2 \Lambda_x^2 \alpha_z - \sigma_x'^2 \sigma_x \sigma_y \alpha_{xz}}{\sigma_x \sigma_y \gamma_0^2 \sigma_z^2} \right\}, \\ G_y^s &= + \frac{f_b \sigma_y'}{\beta_0^2 \gamma_0^3 \Lambda_y} \frac{\alpha_y}{\sigma_y \sigma_z} - \frac{f_b \sigma_y'}{2\gamma_0 \Lambda_y} \left\{ 3 \frac{3\Lambda_y^2 \alpha_y - \sigma_y'^2 \alpha_{yy}}{\sigma_y \sigma_z} + \frac{8\Lambda_x^2 \alpha_y - \sigma_x'^2 \alpha_{xy}}{8\sigma_y \sigma_z} + (1 - p_0^2) \frac{2\Lambda_z^2 \alpha_y - \sigma_z'^2 \alpha_{yz}}{2\sigma_y \sigma_z} \right\} \\ &\quad - \frac{f_b \sigma_x'}{8\gamma_0 \Lambda_y} \left\{ \frac{8\Lambda_y^2 \alpha_x - \sigma_y'^2 \alpha_{xy}}{\sigma_x \sigma_z} \right\} - \frac{f_b \sigma_z'}{2\gamma_0 \Lambda_y} \left\{ (1 - p_0^2) \frac{2\gamma_0^2 \sigma_z^2 \Lambda_y^2 \alpha_z - \sigma_y'^2 \sigma_y \sigma_x \alpha_{yz}}{\sigma_y \sigma_x \gamma_0^2 \sigma_z^2} \right\}, \\ G_z^s &= + \frac{f_b \sigma_z'}{\beta_0^2 \gamma_0^3 \Lambda_z} \times \frac{\alpha_z}{\sigma_x \sigma_y} - \frac{f_b \sigma_z'}{2\gamma_0 \Lambda_z} \left\{ 3(1 - p_0^2) \frac{6\Lambda_z^2 \alpha_z - \sigma_z'^2 \alpha_{zz}}{2\sigma_x \sigma_y} + \frac{2\gamma_0^2 \sigma_z^2 \Lambda_x^2 \alpha_z - \sigma_x'^2 \sigma_x \sigma_y \alpha_{xz}}{2\sigma_x \sigma_y \gamma_0^2 \sigma_z^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\gamma_0^2 \sigma_z^2 \Lambda_y^2 \alpha_z - \sigma_y'^2 \sigma_x \sigma_y \alpha_{yz}}{2\sigma_x \sigma_y \gamma_0^2 \sigma_z^2} \right\} - \frac{f_b \sigma_x'}{2\gamma_0 \Lambda_z} \left\{ \frac{2\Lambda_x^2 \alpha_x - \sigma_x'^2 \alpha_{xx}}{\sigma_x \sigma_z} \right\} - \frac{f_b \sigma_y'}{2\gamma_0 \Lambda_z} \left\{ \frac{2\Lambda_y^2 \alpha_y - \sigma_y'^2 \alpha_{yy}}{\sigma_y \sigma_z} \right\} \end{aligned}$$

其中,  $f_b = \eta q_b / 8\pi \sqrt{\pi} \epsilon_0$ 。剩下  $\alpha_{x,y,z,xx,yy,zz,xy,xz,yz}$  为“空间电荷系数”，取值在 0 到 1 之间，参考下图 Fig. 1，可通过数值积分方式得到。

为了进一步加快计算效率，这篇论文将螺线管场型的分量形式写出，

$$\vec{B}^{\text{SM}} = (\mu^{\text{SM}} + \Delta z \mu_z^{\text{SM}}) \hat{z} - \frac{\Delta x}{2} \mu_z^{\text{SM}} \hat{x} - \frac{\Delta y}{2} \mu_z^{\text{SM}} \hat{y}$$

此外，也考虑了静电透镜，

$$\vec{E}^{\text{el}} = (\epsilon^{\text{cl}} + \Delta z \epsilon_z^{\text{cl}}) \hat{z} - \frac{\Delta x}{2} \epsilon_z^{\text{cl}} \hat{x} - \frac{\Delta y}{2} \epsilon_z^{\text{cl}} \hat{y}$$

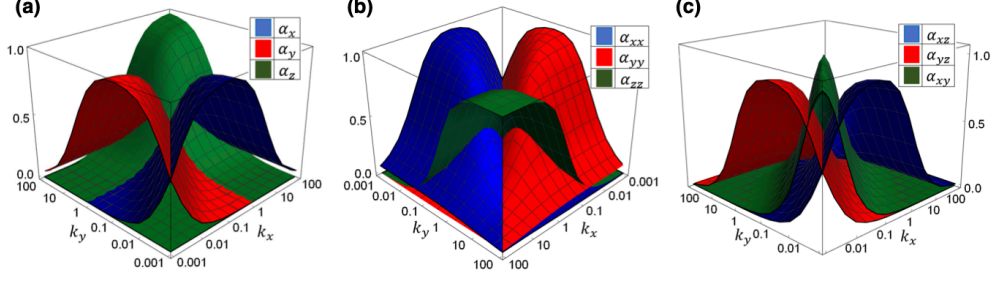


FIG. 1. Space-charge coefficients (a)  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ , and  $\alpha_z$ ; (b)  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$ , and  $\alpha_{zz}$ ; and (c)  $\alpha_{xz}$ ,  $\alpha_{yz}$ , and  $\alpha_{xy}$ , in terms of  $k_x = \sigma_x/\gamma_0\sigma_z$  and  $k_y = \sigma_y/\gamma_0\sigma_z$ .

与四极铁，

$$\overrightarrow{B^{\text{QM}}} = \frac{p_0 k^{\text{QM}}}{\eta c} (\Delta y \hat{x} + \Delta x \hat{y})$$

与射频腔，

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\text{rf}} &= (\mathcal{E}^{\text{rf}} + \Delta z \mathcal{E}_z^{\text{rf}}) \hat{z} - \frac{\Delta x}{2} \mathcal{E}_z^{\text{r}} \hat{x} - \frac{\Delta y}{2} \mathcal{E}_z^{\text{rf}} \hat{y} \\ \vec{B}^{\text{rf}} &= -\frac{\Delta y}{2c} \mathcal{E}_t^{\text{rf}} \hat{x} + \frac{\Delta x}{2c} \mathcal{E}_t^{\text{rf}} \hat{y}, \end{aligned}$$

并以此化简  $F_u^e, G_u^e$  项。

这篇论文 Section V 以 AWAKE run 2 注入段为例，给出了利用此六维包络方程计算结果与 ASTRA 计算结果的比较，结果契合地非常好。

## 2.4 其它

根据这篇论文 Section VI 提到，考虑将此工具结合机器学习算法，则，作为线上优化或辅助调试工具。此外，这篇论文虽尚未讨论切片束受到空间电荷力的动力学过程，但是其模拟结果似乎显示基于此模型计算仍可以得到与 ASTRA 相比高度满意的一致性。猜想可能非线性已经隐藏在 (这篇论文里相对复杂地多的) 包络运动方程了。



### 3 有限尺寸激光束的反射式体布拉格光栅理论与实验 [JQE 44]

#### Finite Beams in Reflective Volume Bragg Gratings: Theory and Experiments

##### 3.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：Jonas E. Hellstrom, Bjorn Jacobsson, Valdas Pasiskevicius, and Fredrik Laurell (主要机构：KTH 皇家技术学院，瑞典)
- 类型：理论、实验
- 链接：<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4407560>

##### 3.2 摘要

这篇论文提出了一个理论模型来描述有限尺寸激光束入射到反射体布拉格光栅 (volume Bragg grating) 上的特性。这篇论文还给出了验证此理论模型的实验结果。通过这些结果，确定了反射体布拉格光栅的某些特性，例如光束腰径、入射角和光束轮廓，这些特性直接影响包含这些光栅的激光腔设计。最后，这篇论文还展示了这些光栅如何作为空间模向滤波器的作用。

##### 3.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇考虑了 TE 极化 (或称 s 极化) 激光束斜向入射的情况，还考虑了正向入射但是激光束横向尺寸非常小的情况，分析反射后激光束的 (横向) 特性。对过去既有的基于平面波假设的理论模型，以上这两种情况未必成立。理论分析基于以下 Fig. 1 情况。分析方法采两种：平面波分解 (plane wave decomposition)、耦合波方程 (coupled mode equation)。
- 贡献：考虑周期调制的折射率材料， $n(z) = n_0 + n_1 f(z)$ ，满足 Bragg 条件  $\mathbf{k}_N = \mathbf{k}_M - m\mathbf{K} + 2\delta$  为前提下，求解波方程

$$[\nabla^2 + \beta^2 + 4\beta\kappa f(z)] E(\mathbf{r}) = 0$$

略去细节，假设入射场  $M$  与反射场  $N$  构成总的电场分布

$$E(\mathbf{r}) = M(\mathbf{r}) + N(\mathbf{r}) = \tilde{M}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_M \cdot \mathbf{r}} + \tilde{N}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_N \cdot \mathbf{r}}$$

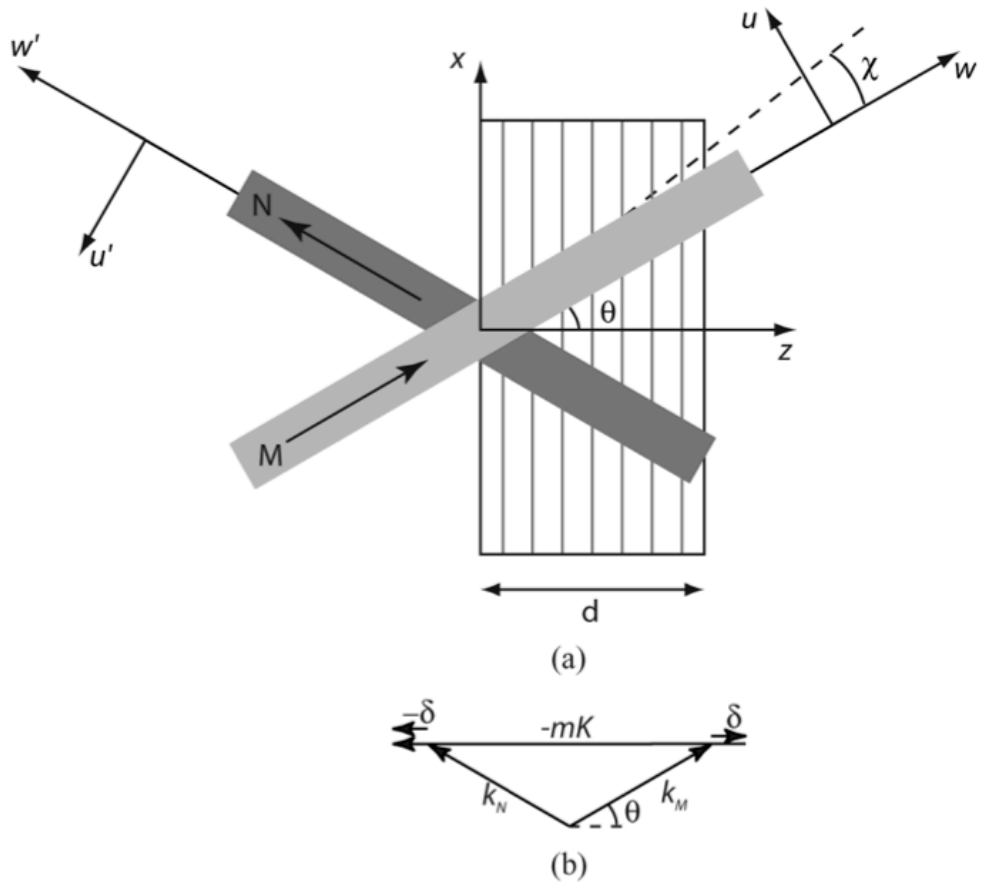


Fig. 1. Illustration of the setup and definitions of coordinates in (a) real space and (b) momentum space.

代入波方程，可推导得到其分别需要满足以下耦合方程

$$\begin{aligned}\bar{M}_z &= i\delta\bar{M} + \kappa'\bar{N} \\ \bar{N}_z &= \kappa'\bar{M} - i\delta\bar{N}\end{aligned}$$

其中，下标  $z$  表对  $z$  偏微分， $\kappa = \pi n_1/\lambda$ ,  $\kappa' = \kappa/\cos\theta$  为耦合强度， $\delta$  表征波矢失配 (wavevector mismatch)。基于此方程的解，可以进一步得到反射激光束的一些特性，如 power reflectivity

$$R_{\text{pw}}(\delta) \equiv \left| \frac{N(x, y, 0)}{M_{\text{in}}(x, y, 0)} \right|^2 = \frac{\kappa'^2 \sinh^2(\sqrt{\kappa'^2 - \delta^2}d)}{\kappa'^2 \cosh^2(\sqrt{\kappa'^2 - \delta^2}d) - \delta^2}$$

其中，谱零点之间的谱宽有

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda_B}{\cos\theta_0 k_B} \delta_0 = \lambda_B \sqrt{\frac{n_1^2}{n_0^2 \cos^4\theta_0} + \frac{4\Lambda^2}{d^2}}.$$

有限谱宽其实对激光束的不同入射角度给出约束，有如下关系

$$\Delta\theta_o = \frac{2\delta_0}{\sin\theta_0 k_B} = \frac{1}{\tan\theta_0} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_B}$$

或写成

$$\frac{\pi}{4} n_0 \frac{w_{e-2}}{\lambda_B} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_B} > \sin\theta_0$$

这篇论文 Section II-D 给出了另一种基于耦合波方程的分析方法，得到以下非常类似平面波分析方法的耦合方程，虽然物理图像稍有不同

$$\begin{aligned}\check{M}_z &= i\delta'\check{M} + \kappa'\check{N} \\ \check{N}_z &= \kappa'\check{M} - i\delta'\check{N}.\end{aligned}$$

这篇论文的 Section III 针对得到的理论模型进行实验量测验证。例如，反射激光束的反射率与谱宽随入射激光束的入射角有分别如下图 Fig. 2 与 Fig. 3 关系：

对不同激光波长 (1063.3 nm 的附近小范围内) 正向入射的反射率有

此外，斜向入射时，输出激光束横向分布有

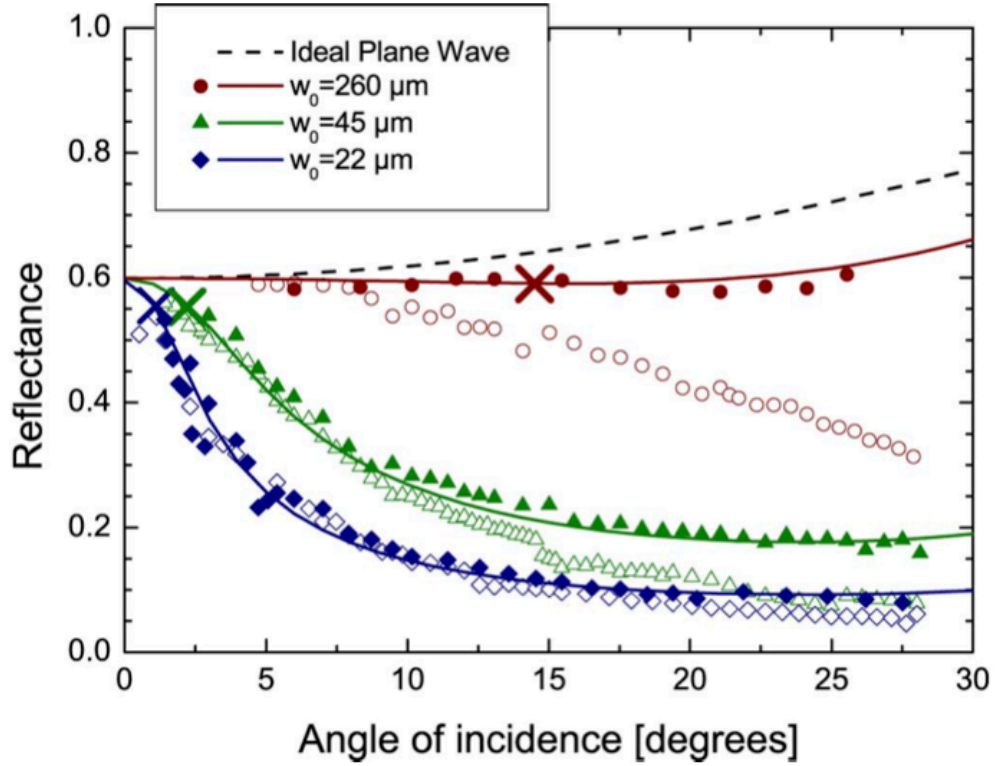


Fig. 2. Reflectivity dependence on incidence angle for various beam waists at grating A. Experiments with s-polarization (filled symbols) and p-polarization (empty symbols) as well as theoretical simulations for s-polarization (lines) are illustrated. Crosses indicate the approximate planewave limits using the rule-of-thumb.

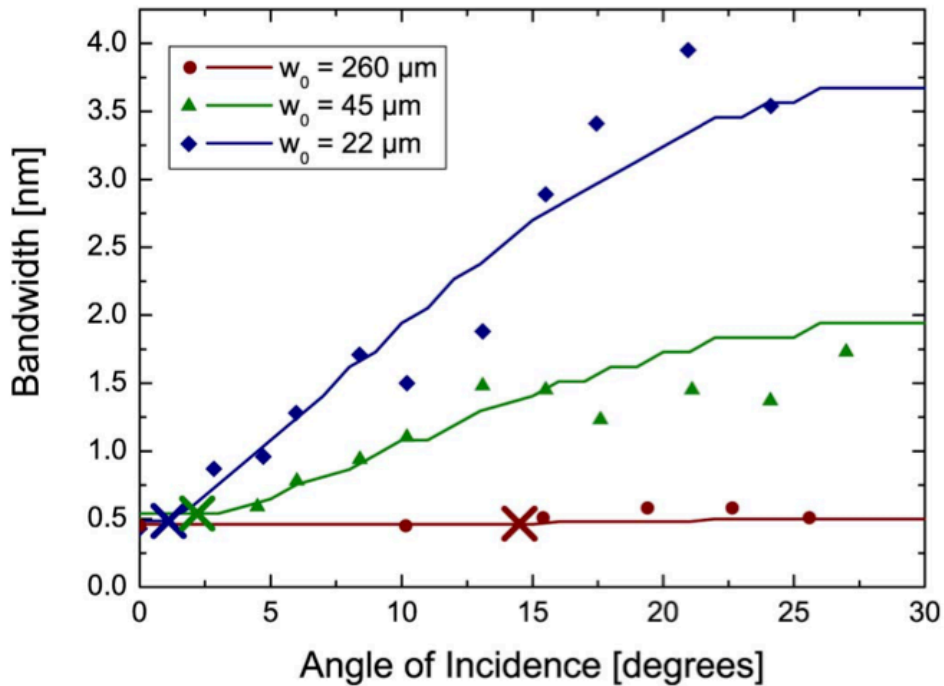


Fig. 3. Reflectivity bandwidth dependence on incidence angle for various beam waists for s-polarization, using grating A. Experiments are presented with symbols and theoretical simulations with lines, while the approximate planewave limits are presented with crosses.

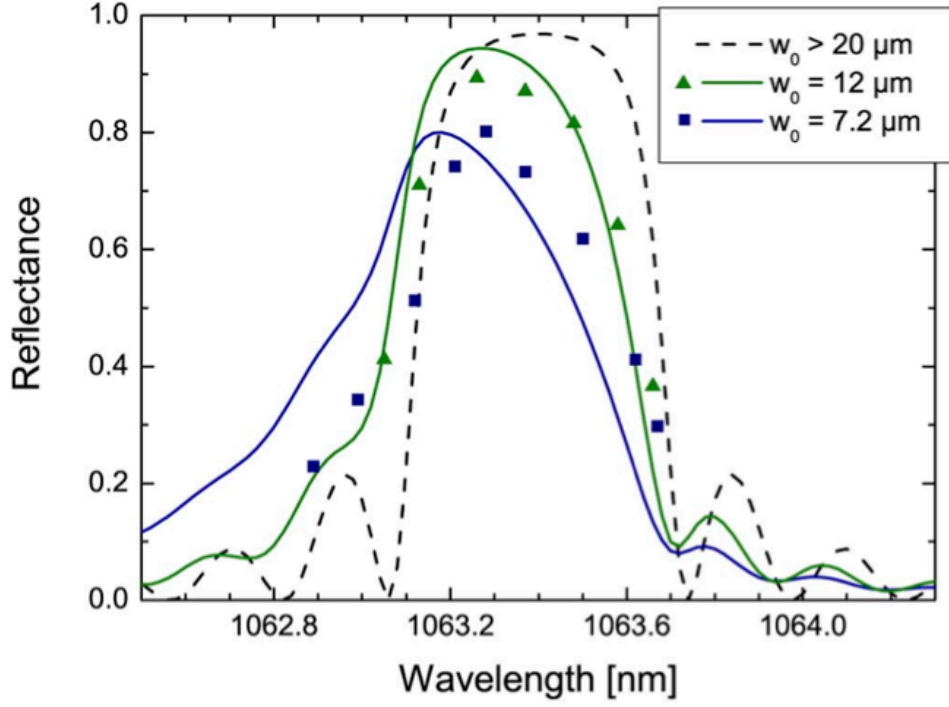


Fig. 4. Reflectivity dependence on wavelength for various beam waists at normal incidence. Experiments are presented with symbols and theoretical simulations with lines.

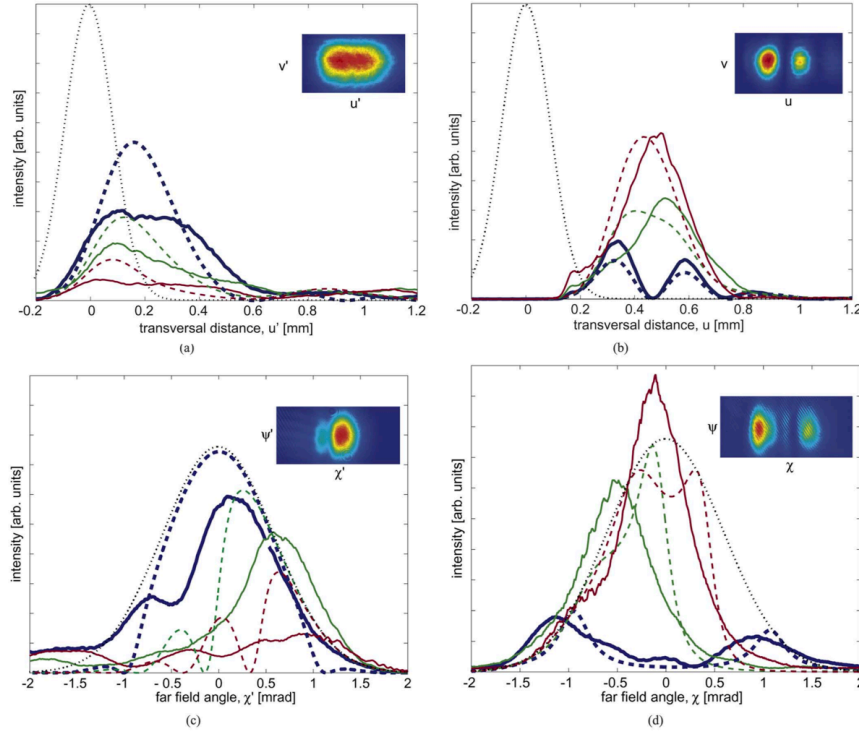


Fig. 5. Transverse intensity distribution at oblique incidence of grating B for various wavelengths, ranging from perfect Bragg matching at 1019.9 nm (thick blue/dark grey), to 1020.2 nm (thin green/light grey) and 1020.3 nm (thin red/dark grey), both experimental data (solid) and theoretical predictions (dashed). Dotted line gives incident beam profile for comparison. Insets give the experimental beam profiles at perfect Bragg matching. The internal angle of incidence is  $16^\circ$  and the beam waist is  $165 \mu\text{m}$ . (a) Near-field reflection (b) Near-field transmission (c) Far-field reflection (d) Far-field transmission.

## 4 自由电子激光中一种避免寄生压缩的束团压缩方法 [TUPMA033]

### A bunch compression method for free electron lasers that avoids parasitic compression

#### 4.1 基本信息

- 分类：多粒子集体效应
- 作者：S.V. Benson, D.R. Douglas, C.D. Tennant, F.G. Wilson, and D.C. Nguyen  
(主要机构：JLab)
- 类型：模拟
- 链接：<https://accelconf.web.cern.ch/ipac2015/papers/tupma033.pdf>

#### 4.2 摘要

几乎所有现有的高能 ( $> \text{几 MeV}$ ) 直线加速器驱动自由电子激光 (free electron laser, FEL) 通过利用射频 (RF) 波形上升沿的偏心 (off-crest) 加速和通过 chicane 进行束团输运来压缩电子束长度。这种方法至少存在三个缺点：

1. 很难校正由于射频波形曲率产生的像差；
2. 上升段加速加剧了空间电荷引起的纵向相空间失真；
3. 所有负动量压缩因子的磁压缩器在最后的压缩过程中会产生寄生压缩，增加了相干同步辐射导致的发射度增长。

通过在射频波形下降沿进行加速并使用具有  $M_{56} > 0$  的压缩器，可以避免上述缺陷。这种方法具有多个优点：

1. 在支持像差补偿的束线中很容易实现；
2. 纵向空间电荷 (longitudinal space charge, LSC) 引起的相空间失真在射频波形下降段倾向于增强色散；
3. 具有  $M_{56} > 0$  的压缩器可以配置以避免寄生的过度压缩。

这篇论文讨论这种束团压缩方案，并给出 2012 年 4 月通过 JLab UV Demo FEL<sup>1</sup>装置进行的成功束流测试的结果。

---

<sup>1</sup>操作在 FEL oscillator 模式。

### 4.3 贡献或创新点

- 创新点：基于直线加速器驱动 FEL 的装置，一般初始电子束长会拉长，使峰值电流较低，以避免纵向空间电荷效应 (LSC)、相干同步辐射效应 (CSR)、RF 波形曲率效应等。传统多数采用 RF 上升沿，配合下游  $M_{56} < 0$  的磁压缩器 (比如 chicane) 对束团进行压缩。参考下图 Fig. 1。注意，此处束团“头部”指向“后 (左)”。

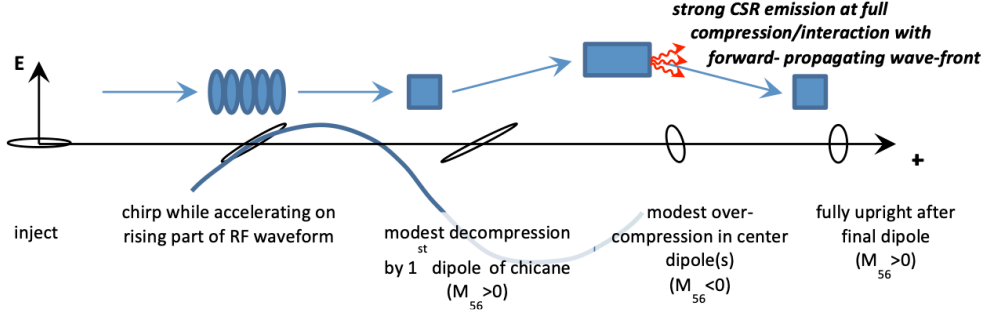


Figure 1: Canonical bunch compression in a free-electron laser using negative momentum compaction. Higher energy machines typically use a two-stage compressor, which still uses chicane to compress the beam.

这篇论文讨论另一种构形，即考虑采用 RF 下降沿，配合下游  $M_{56} > 0$  的磁压缩器对束团进行压缩。由于能量回收直线加速器 (energy recovery linac, ERL) 的  $180^\circ$  在“自然”情况下，其  $M_{56} > 0$ ，因此，这在以 ERL 驱动 FEL 装置有此额外好处。

- 贡献：这篇论文描述束团经历 RF 加速器与下游 chicane 的动力学过程，考虑了空间电荷效应与相干同步辐射效应。在纯光学情况下，束团经历四个 dipole 的动力学过程为：在第一个 dipole，束团稍微拉伸一些，中间两个 dipoles 缩短，甚至稍微过压缩 (又称寄生压缩)，在最后一个 dipole 稍微拉伸，最终 (希望) 达到最佳压缩 (又称临界压缩)。Chicane 存在恒为正的  $T_{566} = -\frac{3}{2}M_{56} > 0^2$ ，并且 CSR 与 LSC 都倾向于使束团头部获得能量，尾部失去能量。由此可知，采上升沿与  $M_{56} < 0$  方案将导致寄生压缩。

如果改采用 RF 下降沿，配合下游  $M_{56} > 0$  的磁压缩器对束团进行压缩，则可以避免寄生压缩的情况。此外，由于能量回收直线加速器 (energy recovery linac, ERL) 的  $180^\circ$  arc 在“自然”情况下，其  $M_{56} > 0$ ，作为以 ERL 驱动 FEL 装置有此额外好处。另外，此时  $180^\circ$  arc 的  $T_{566}$  的符号可调 (通过六极铁)，因此可以灵活用来修正束团非线性曲率。参考下图 Fig. 2。

### 4.4 其它

这篇论文后半部分简单描述了利用 JLab UV Demo FEL 调整  $180^\circ$  arc 的  $M_{56}$  分别为  $> 0$  与  $< 0$  情况，观察其下游 FEL oscillator 起振后的效能，发现新方案的效能

<sup>2</sup>假设这里 chicane 的  $R_{56}$  按束团头尾负正的惯例。

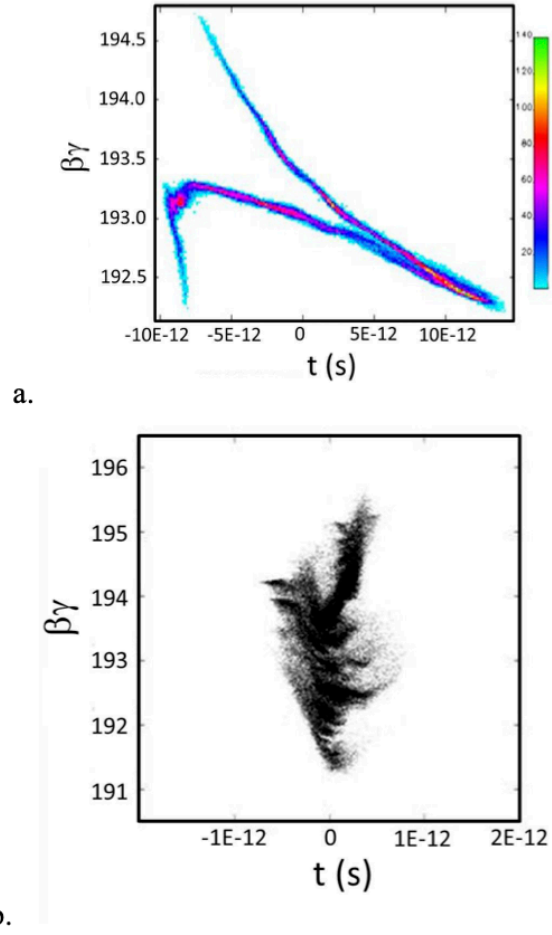


Figure 2: Compression in a system with negative momentum compaction (a) with strong CSR can lead to an incompressible longitudinal distribution, while compression in a system with positive momentum compaction (b) leads to a more compact phase space.



不需要尽力优化情况下，就能够达到按传统惯例方案所能达到的效能，借此间接地验证新方案的有效性。

这篇论文对 RF 加速过程与束团压缩动力学描述物理图像清晰，值得仔细琢磨。

## 5 储存环中相干扭摆器辐射引起的微波不稳定性阈值研究 [PRAB 26 05]

### Microwave instability threshold from coherent wiggler radiation impedance in storage rings

#### 5.1 基本信息

- 分类：多粒子集体效应
- 作者：A. Blednykh, M. Blaskiewicz, R. Lindberg, and D. Zhou (主要机构：BNL)
- 类型：理论、模拟
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.26.051002>

#### 5.2 摘要

对于包含扭摆器的储存环，如用于对撞机的阻尼环，这篇论文详细讨论了相干扭摆器辐射 (coherent wiggler radiation, CWR) 对微波不稳定性阈值的贡献。这里考虑了三种不同的相干扭摆器辐射阻抗模型：自由空间稳态模型、平行板屏蔽稳态模型和矩形腔屏蔽模型。这篇论文比较了 CWR 的场动力学，结果表明，在考虑腔屏蔽时，宽带未屏蔽的 CWR 变得主导。为了抑制带腔屏蔽的窄带阻抗成分，这篇论文提出采用调谐 (detuned) 阻尼扭摆器。此外，这篇论文提出一种新的、简单的解析方法来求解色散关系和检测由 CWR 驱动的微波不稳定性阈值。对电子离子对撞机储存环冷却器，该理论与的 Vlasov-Fokker-Planck 的数值模拟求解进行比较，并确认了在负动量压缩因子情况下，微波不稳定性阈值将更高。

#### 5.3 贡献或创新点

- 创新点：过去考虑储存环中存在扭摆器导致的微波不稳定性的分析基本局限于使用简化的自由空间模型，且假设 coasting beam，如 J. Wu et al., PRST-AB 6, 040701 (2003) 的工作。这篇论文更深入分析当储存环中扭摆器段的占比较高时，其对束团集体效应的影响。这篇论文除了 VFP 数值模拟，还给出基于色散方程解的阈值公式。

- 贡献：这篇论文考虑的相干扭摆器阻抗模型为低频近似，即考虑的频段为低于临界频率 (critical photon frequency)，从而可以忽略电子与辐射场的相对滑移。考虑低频近似的合理性由束团长度决定，关心的束团长度约为 0.3 mm。同时，临界波数  $k_c \gg 2\pi/\sigma_z$ ，进一步确认低频近似合理性。

这篇论文 Section II.B 给出简化的带有平行板屏蔽的扭摆器阻抗的解析公式 Eq. (9) 与 (11)，与自由空间扭摆器阻抗的比较如下图，给出了两种不同 chamber height 的阻抗与尾场情况。尾场计算根据 0.3-mm 高斯分布，其中，束团头部为左。关于阻抗，可以看到，存在金属平行板时，出现共振结构，在时域形成 (相对) 长程尾场尾巴；同时，降低低频成分，导致在时域中短程尾场振幅较小。

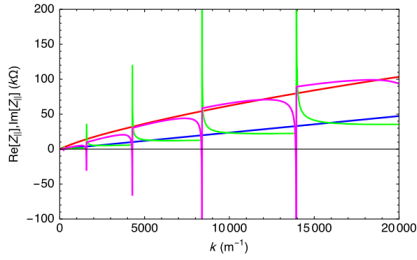


FIG. 2. Comparison of CWR impedance in free space and parallel-plates shielding (full chamber height is 15 mm) for the 16 DWs of the backup storage ring cooler. Blue and red lines are real and imaginary parts of CWR impedance in free space. Green and magenta lines are real and imaginary parts of CWR impedance in parallel-plates shielding (Note that the amplitudes of resonance peaks should go to  $\pm\infty$  according to Eq. (11). Because of off-resonance sampling, the plot shows finite amplitudes).

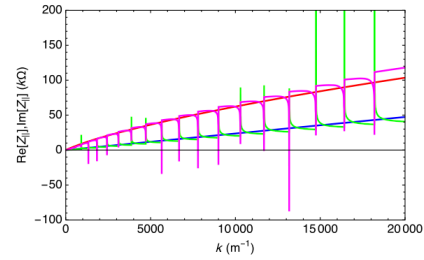


FIG. 4. Comparison of CWR impedance in free space and parallel-plates shielding for the 16 DWs of storage ring cooler. The full chamber height is 60 mm. Blue and red lines are real and imaginary parts of CWR impedance in free space. Green and magenta lines are real and imaginary parts of CWR impedance in parallel-plates shielding (Note that the amplitudes of resonant peaks should go to  $\pm\infty$  according to Eq. (11). Because of off-resonance sampling, the plot shows finite amplitudes).

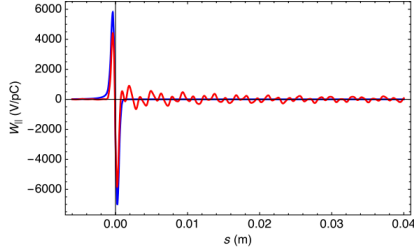


FIG. 3. Comparison of CWR wakefield of a 0.3-mm Gaussian bunch in free space and parallel-plates shielding (full chamber height is 15 mm) for the 16 DWs of backup storage ring cooler. Blue and red lines are for free space and parallel-plates shielding, respectively.

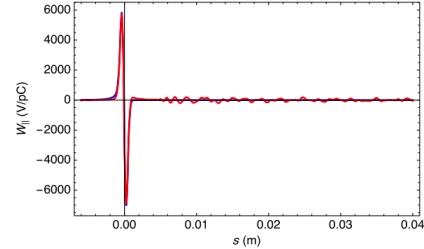


FIG. 5. Comparison of CWR wakefield of a 0.3-mm Gaussian bunch in free space and parallel-plates shielding for the 16 DWs of the backup storage ring cooler. The full chamber height is 60 mm. Blue and red lines are for free space and parallel-plates shielding, respectively.

对于存在矩形金属管壁屏蔽的扭摆器阻抗计算，除了解析公式，这篇论文还利用数值程序 CSRZ 计算扭摆器阻抗。讨论参考该论文 Section II.C.3。

这篇论文尝试给出抑制扭摆器阻抗的方案，特别是共振频率附近的阻抗成分。思路源于对多 cell 加速腔结构的高阶模抑制，即让每个 cell 的尺寸有些微差异，从而改变共振频率。对扭摆器，可以些微改变扭摆器周期。通过此方式计算得到的阻抗与尾场，与固定周期相比，有如下图结果。

该论文 Section II 与 III 介绍了关于扭摆器阻抗与尾场的计算。Section IV 介绍单束团集体不稳定性分析。关于集体不稳定性分析，这篇论文采“高频”情况下的色散方程 [2]，其可改写为

$$\frac{Z_{\parallel}(k)}{k} = \frac{i}{f(I_b) G(A)}$$

其中， $A = \Omega / (ck\eta\sigma_p)$ 、 $f(I_b) = \frac{I_b}{2\pi(E/e)\eta\sigma_p^2\sigma_z}$ 。方程中的  $G(A)$  为色散积分，存在解析形式

$$G(A) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{pe^{-p^2/2}}{A+p} = \sqrt{2\pi} + i\pi A e^{-\frac{A^2}{2}} \left\{ \text{sgn}\{\text{Im}[A]\} + i \text{erfi}\left[\frac{A}{\sqrt{2}}\right] \right\}$$

再将色散方程的实部与虚部分开写， $\frac{Z_{\parallel}(k)}{k} = Z_r(k) + iZ_i(k)$ 、 $G(A_r) = G_r(A_r) + iG_i(A_r)$ 。整理之后，可以将阈值电流写成如下关系<sup>3</sup>

$$f_{\text{th}} = \frac{Z_r}{G_i(Z_r^2 + Z_i^2)} = \frac{Z_i}{G_r(Z_r^2 + Z_i^2)}$$

注意到，这里面  $A \in \mathbb{C}$  的实部  $A_r$  为待解，可通过数值方法将此式

$$\frac{G_i(A_r)}{G_r(A_r)} = \frac{Z_r(k)}{Z_i(k)}$$

解出。

对 dipole CSR，应用上述拆解分析，可以得到如下阈值电流公式<sup>4</sup>

$$I_{\text{th}}(\lambda) = \frac{3^{5/6}(2\pi)^{5/3} (E/e)\eta\sigma_p^2\sigma_z}{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) G_i Z_0 R^{1/3} \lambda^{2/3}}$$

对 wiggler CSR，同样应用上述拆解分析，可以得到如下阈值电流公式

$$I_{\text{th}}(\lambda) \approx \frac{8\pi\sqrt{2\pi}(E/e)\eta\sigma_p^2\sigma_z}{L Z_0 \theta_0^2 \ln \frac{2k_w \lambda}{\pi \theta_0^2}}$$

这篇论文 Section IV 针对 BNL 的 backup storage ring cooler 讨论了在 CWR 影响下的微波不稳定性阈值。通过 VFP solver 得到的阈值约为 5 mA，比先前类似的分析 31 mA 低了不少，但是此处分析没有完整考虑其它部件的阻抗贡献。更多讨论见 Section IV，此处细节不论。

---

<sup>3</sup>思路或源于 M. Korostelev, A. Wolski, and A. Thorley, Wake field analysis and modelling of microwave instability in the ILC damping ring, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A 659, 36 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.nima.2011.08.021>。

<sup>4</sup>与 Ref. [2] 的结果

$$I_{\text{th}}(\lambda) \approx \frac{4\pi^{7/6} (E/e)|\eta|\sigma_p^2\sigma_z}{\sqrt{2} Z_0 R^{1/3} \lambda^{2/3}}$$

几乎一致。

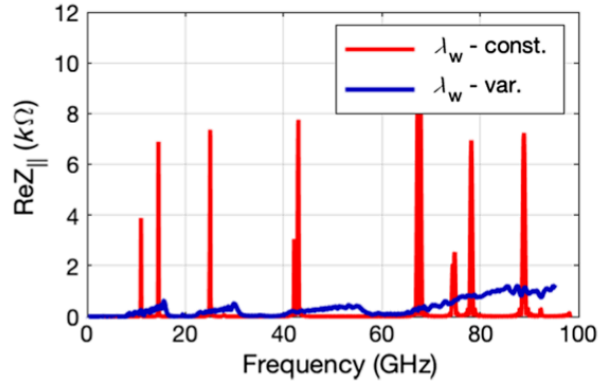


FIG. 10. Real part of the longitudinal impedance for one DW with constant and varied period lengths.

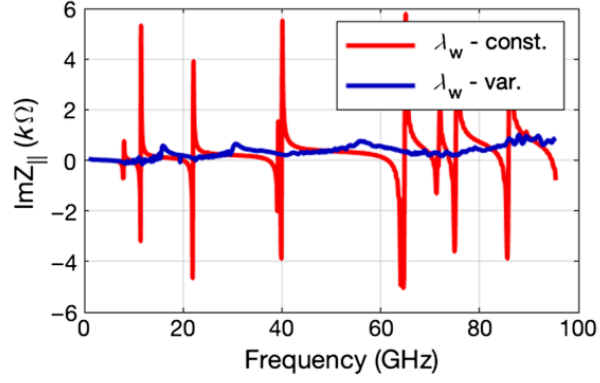


FIG. 11. Imaginary part of the longitudinal impedance for one DW with constant and varied period lengths.

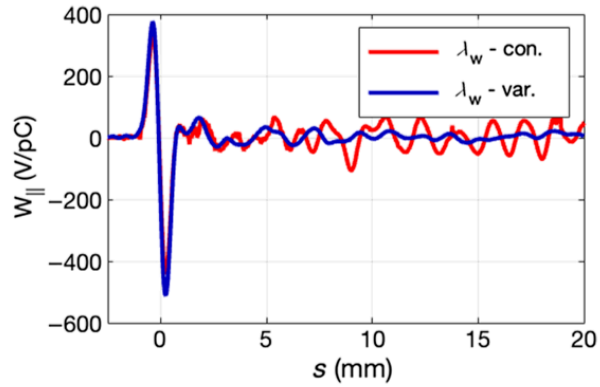


FIG. 12. Comparison of CWR wakefields for the DW with constant and varied period lengths for a 0.3 mm Gaussian bunch length.

## 5.4 其它

关于金属管壁对束团的影响，上下平板屏蔽辐射，抑制或使束团稳定；左右旁板则可能反射并放大辐射影响。因此，对  $\lambda > \lambda_{\text{CSR}} = 2\sqrt{\frac{b^3}{R}}$ ，上下平板的存在使束团趋向稳定。然而，由于左右旁板存在而产生的低频共振则可能使束团不稳定。

将色散方程的实部与虚部分开写并分析，此思路值得琢磨。另外，关于相干扭摆器辐射阻抗的计算细节，可以参考 [1]。

## 参考文献

- [1] D. Zhou, Coherent synchrotron radiation and microwave instability in Electron Storage Rings, Ph.D. thesis, The Graduate University for Advanced Studies (2011) [https://research.kek.jp/people/dmzhou/publications/thesis\\_dmzhou\\_final.pdf](https://research.kek.jp/people/dmzhou/publications/thesis_dmzhou_final.pdf)
- [2] G. Stupakov and S. Heifets, Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation, Phys. Rev. ST Accel. Beams 5, 054402 (2002). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402>

## 6 注入失配

### Injection mismatch

#### 6.1 基本信息

- 分类: 束流动力学
- 作者: K. Wittenburg (主要机构: DESY)
- 类型: 理论
- 链接: [https://indico.cern.ch/event/115334/sessions/5216/attachments/50209/72205/Exercise\\_mismatch\\_solutions\\_new.pdf](https://indico.cern.ch/event/115334/sessions/5216/attachments/50209/72205/Exercise_mismatch_solutions_new.pdf)

#### 6.2 摘要

在质子和离子加速器中的注入失配可以大致分为三类, 包括: 离轴注入 (off axis injection) 失配、轨道失配 (orbit mismatch) 以及光学参数  $\alpha, \beta, \gamma$  失配。任意一种失配都将导致束团的发射度增长。离轴失配将导致 orbit oscillation, 这些振荡可以很容易被 BPM 所检测到。轨道失配则可以通过正确设置转向磁铁、kicker 和 septum(挡板) 来纠正。然而, 光学参数的失配却不能被 BPM 检测到, 这篇笔记将主要讨论这一情况。

#### 6.3 主要内容

- Betatron mismatch: 这篇笔记中重点讨论注入失配中的光学参数失配, 也即 betatron mismatch(以下都使用这一称法)。与只是关注 filamentation 发生后束团横向发射度增长的一些文章不同 [1, 2, 3], 这篇笔记还重点讨论了由 betatron mismatch 引起的 beam Twiss 的振荡。

这篇笔记使用 one-turn map, 并假设 lattice Twiss 为  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ , 对应发射度  $\varepsilon_0$ 。对于束团在加速器里的第  $i$  圈或第  $i$  周期, 其在下一圈或下一周期的 beam Twiss 的可以表示为:

$$\begin{pmatrix} \beta_{i+1} \\ \alpha_{i+1} \\ \gamma_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & SC' + S'C & -SS' \\ C'^2 & -2S'C' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_i \\ \alpha_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$$

其中,  $C$  和  $S$  为 one-turn 传输矩阵中的元素, 这里需要注意传输矩阵应为 lattice 性质, 所以应该由 lattice Twiss 表示:

$$\begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha_0 \cdot \sin \mu & \beta_0 \cdot \sin \mu \\ -\gamma_0 \cdot \sin \mu & \cos \mu - \alpha_0 \cdot \sin \mu \end{pmatrix}$$

以  $\beta$  函数为例, 这篇笔记给出了第  $(i+1)$  圈或第  $(i+1)$  周期的 beam Twiss 的具体表达式  $\beta_{i+1}$

$$\beta_{i+1} = \beta_i \cdot \cos^2 \mu + (\alpha_0^2 \cdot \beta_i - 2\alpha_0\beta_0\alpha_i + \beta_0^2\gamma_i) \cdot \sin^2 \mu + (\alpha_0 \cdot \beta_i - \beta_0\alpha_i) \cdot 2 \cdot \sin \mu \cdot \cos \mu$$

从上面的式子我们可以观察到, 由 mismatch 导致的  $\beta$ -oscillation, 如下 Fig.M2 显示了在 20 圈内的  $\beta$  振荡, 其幅度在 180 和 310 之间。而当没有 mismatch 时, 有  $\alpha_i = \alpha_0, \beta_i = \beta_0, \gamma_i = \gamma_0$ , Twiss 参数将保持为常数不会发生振荡。

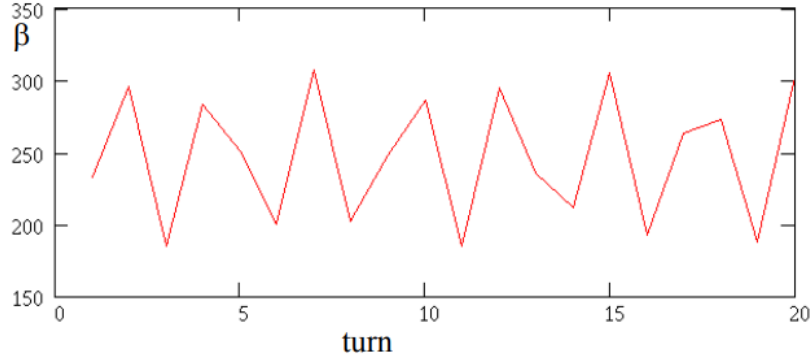


Fig. M2:  $\beta$ -oscillation amplitudes

★ 这篇笔记给出了以往 betatron mismatch 推导中 [1, 2, 3] 未涉及的部分, 即 betatron mismatch 会导致 beam Twiss 的振荡。注意这篇文章使用的是 one-turn map, betatron mismatch 情况下在 periodic lattice 中经过任意周期后的 beam Twiss 应取决于这段距离的 phase advance。

## 6.4 其它

这篇笔记还讨论了 betatron mismatch 引起的束团相空间宽度 (对  $x$  轴的投影宽度) 的振荡。如 Fig.M4 所示, 对于这篇笔记所考虑的例子来说 (10% 的  $\beta$  偏差), 在粒子的不同相位导致 filamentation 之前, betatron mismatch 将导致横向相空间形状振荡, 至少持续约十圈。待 filamentation 完成后, 粒子填充更大的相空间面积, 这种振荡被 smooth out, 最终相空间宽度近似为常数。

★ 由 betatron mismatch 带来的影响可总结如下几点 (注意 periodic lattice 条件):



1. 束团 beam Twiss 的振荡，该振荡的频率是原 betatron 振荡频率的两倍，并且该振荡不会随着在 lattice 里的周期数或环中的圈数而消退。
2. 束团相空间的 filamentation, 束团的分布函数将偏离原高斯分布。注意, 在 transfer line 中或在环中的第一圈, filamentation 不会很明显可以忽略 [4]。
3. 束团发射度的增长, 这一现象实际上是在 filamentation 发生之后出现的, 即“成丝”慢慢填充更大的相空间面积。

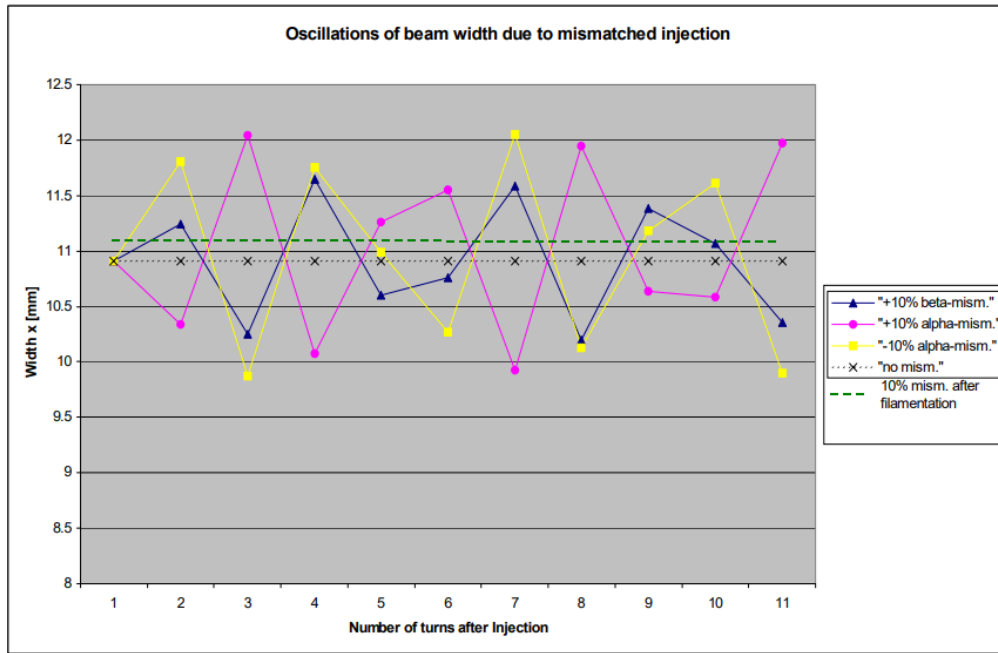


Figure M4: Oscillations of the beam width due to mismatched injection. Note also the small difference of the beam width after filamentation.

## 参考文献

- [1] F. J. Decker, C. Adolphsen, W.J. Corbett, et al. Dispersion and betatron matching into the linac[R]. Stanford Linear Accelerator Center, Menlo Park, CA (USA), 1991. <https://www.osti.gov/biblio/5550468>
- [2] M. J. Syphers. Injection mismatch and phase space dilution[J]. Fermilab note FN-458, (1987). <https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-3/367cfb6bb69601413d9f8067fcaa8a6a>
- [3] J. Y. Tang, Emittance dilution due to the betatron mismatch in high-intensity hadron accelerators. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment 595.3 (2008): 561-567. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168900208011601>
- [4] G. Arduini, (1999). Mismatch measurements (No. CERN-OPEN-99-075).<https://cds.cern.ch/record/398065/files/open-99-075.pdf>

## 7 注入失配和相空间稀释 [FN-458]

### Injection Mismatch and Phase Space Dilution

#### 7.1 基本信息

- 分类: 束流动力学
- 作者: M.J. Syphers (主要机构: Fermi National Accelerator Laboratory)
- 类型: 理论
- 链接: <https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-3/367cfb6bb69601413d9f8067fcaa8a6a>

#### 7.2 摘要

对于现代高能质子加速器设施来说, 在束团传输系统的设计中, 主要关注的是匹配 betatron 振幅函数、色散函数, 还有加速器中的理想轨迹。如果没有提供适当的匹配, 则将出现横向发射度的增加, 即粒子在横向相空间中占据的面积会增加。偏离理想条件的 mismatch 对横向相空间发射度的影响程度是这篇论文的主题。

#### 7.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇论文主要研究 injection mismatch 对束团横向相空间发射度的影响, 需要注意的是 injection mismatch 并不单指 betatron mismatch。Injection mismatch 可以分为以下三类, 其中 betatron mismatch 其实是第三类的 amplitude function mismatch。
  1. **Injection Position Mismatch:** 指的是束团在注入时的轨迹与理想轨迹有偏差, 但 lattice Twiss 参数和色散函数均与束团匹配。
  2. **Dispersion Function Mismatch:** 指的是束团在注入时的色散函数与传输线的色散函数有偏差, 而束团的轨迹以及 Twiss 参数均和 lattice 的理想情况匹配。
  3. **Amplitude Function Mismatch:** 指的是束团在注入时的 beam Twiss 参数与 lattice Twiss 有偏差, 而 lattice 的理想轨迹和色散函数均与束团匹配。

这篇论文分别讨论了这三种不同的 mismatch 情况, 并给出了不同情况下束团横向相空间发射度的变化。

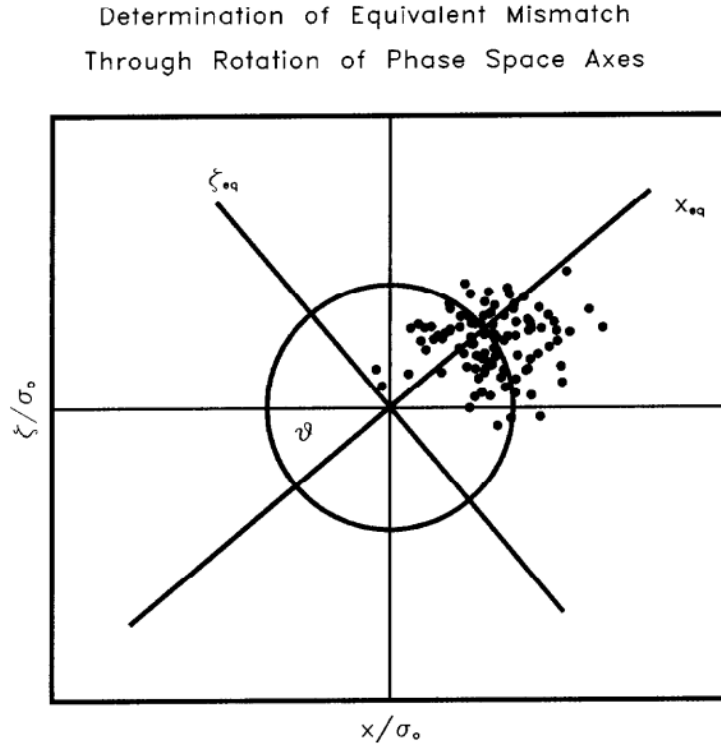
- 贡献：在这篇论文中，用角标“1”来表示与 lattice 相关的变量，用角标“2”来表示与束团相关的变量。并且，这篇论文使用归一化坐标  $(x, \zeta)$  来表示束团的相空间。以下是这篇论文对几种 mismatch 的考虑：

– **Injection Position Mismatch:**

对于这种情况，束团与 lattice Twiss 参数  $(\alpha, \beta)$  和色散函数  $(D, D')$  都相等，即  $\beta_1 = \beta_2, \alpha_1 = \alpha_2, D_1 = D_2, D'_1 = D'_2$ 。如果  $\Delta x$  和  $\Delta x'$  是束团轨迹和 lattice 理想轨迹的位置和斜率的偏差，那么在归一化坐标下有  $\zeta_2 = \zeta_1 + \Delta\zeta$ 。

如 Figure.1 所示，这相当于将  $x_2, \zeta_2$  轴旋转了一定角度  $\theta$ ，并且该角度由  $\tan \theta = \Delta\zeta / \Delta x$  给出。因此这一问题可以简化为分布函数在位置上偏移一定量  $\Delta x_{eq}$  的问题并进行进一步推导。

**Figure 1**



– **Dispersion Function Mismatch:**

在这种情况下，beam Twiss 参数和轨迹都与 lattice Twiss 参数和理想轨迹匹配，即  $\beta_1 = \beta_2, \alpha_1 = \alpha_2, x_2 = x_1, x'_2 = x'_1$ 。对于与理想动量  $p$  偏差了  $\Delta p$  的粒子来说，其在加速器内的平衡轨迹将由  $(x_2, x'_2) = (D\Delta p/p, D'\Delta p/p)$  给出，其中  $D$  为色散函数。动量  $\Delta p/p$  的分布假设为高斯分布，其平均值为零，方差

为  $\sigma_p^2$ 。变量  $\delta$  定义为：

$$\Delta p/p = \sigma_p \delta$$

在归一化坐标下，对于特定动量的粒子有  $(x_2, \zeta_2) = (D\sigma_p\delta, \Lambda\sigma_p\delta)$ ，其中  $\Lambda \equiv \beta D' + \alpha D$ 。所以因为动量偏差导致的粒子轨迹偏差可以写为：

$$\xi = x_2 - D\sigma_p\delta, \quad \eta = \zeta_2 - \Lambda\sigma_p\delta$$

在束团和 lattice 的色散函数具有偏差的情况下有  $D_2 = D_1 + \Delta D, D'_2 = D'_1 + \Delta D'$ ，由此这篇文章定义了色散函数的等效失配 (equivalent mismatch)  $\Delta D_{\text{eq}}$ 。

$$\Delta D_{\text{eq}} \equiv \left( \Delta D^2 + (\beta \Delta D' + \alpha \Delta D)^2 \right)^{1/2}$$

#### – Amplitude Function Mismatch:

对于这一情况，束团的轨迹与色散函数均与 lattice 的理想情况匹配，即  $x_1 = x_2 = x, x'_1 = x'_2 = x', D_1 = D_2, D'_1 = D'_2$ 。在归一化坐标下，由 lattice 确立的初始分布函数可以写为：

$$n(x_1, \zeta_1) = \frac{e^{-[x_1^2 + \zeta_1^2]/2\sigma_1^2}}{2\pi\sigma_1^2}$$

注意到在 amplitude function mismatch 情况下， $(x_1, \zeta_1)$  与  $(x_2, \zeta_2)$  的关系为：

$$x_1 = x_2, \quad \zeta_1 = (\alpha_1 - \beta_1\alpha_2/\beta_2)x_2 + \beta_1\zeta_2/\beta_2$$

假设由 lattice 传输的束团发射度为  $\epsilon_0$ ，对应的束团尺寸为  $\sigma_0^2$ ，利用  $\beta_1/\sigma_1^2 = \beta_2/\sigma_0^2$  以及  $dx_1d\zeta_1/dx_2d\zeta_2 = \beta_1/\beta_2$  将分布函数的坐标进行替换得到：

$$n_0(x, \zeta) = \frac{e^{-[x^2 + (\alpha_1 x + \beta_1(s - \alpha_2 x)/\beta_2)^2]\beta_2/2\beta_1}}{2\pi}$$

注意，这篇文章在这里将下标的“2”进行了省略，并且这里还利用了  $\sigma_0^2 = 1$ 。上式  $e$  指数中括号里的项可以重写为  $ax^2 + 2bx\zeta + c\zeta^2$ ，其中：

$$a = 1 + (\alpha_1 - \alpha_2\beta_1/\beta_2)^2, b = (\beta_1/\beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2\beta_1/\beta_2), c = (\beta_1/\beta_2)^2$$

在归一化坐标下，随着束团在 lattice 里传输，其横向相空间将不断进行旋转，所以：

$$\xi = x \cos \theta + \zeta \sin \theta$$

$$\eta = -x \sin \theta + \zeta \cos \theta$$

选择特定的  $\theta$  以便使得与  $\xi\eta$  有关的项为 0，该角度由  $\tan 2\theta = 2b/(a - c)$  给出，由此可以将  $e$  指数括号内的项化简为：

$$ax^2 + 2bx\zeta + c\zeta^2 = A\xi^2 + B\eta^2$$

将  $a, b, c$  的具体形式代入上式后即可得到：

$$A = (\beta_1/\beta_2) \left[ D + (D^2 - 1)^{1/2} \right]$$
$$B = (\beta_1/\beta_2) / \left[ D + (D^2 - 1)^{1/2} \right]$$

其中， $D$  与前面几节中讨论的色散函数  $D$  不同，并且结果与 F.J.Decker 的  $B_{mag}$  相同 [1]：

$$D \equiv (\beta_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 - 2\alpha_1\alpha_2) / 2$$

## 参考文献

- [1] F. J. Decker, C. Adolphsen, W.J. Corbett, et al. Dispersion and betatron matching into the linac[R]. Stanford Linear Accelerator Center, Menlo Park, CA (USA), 1991.  
<https://www.osti.gov/biblio/5550468>

## 8 Betatron 失配如何影响束团尺寸和束团密度? [ISR-TH/69-32]

### How does betatron mismatch affect beam size and beam density?

#### 8.1 基本信息

- 分类: 束流动力学
- 作者: P.M. Hanney and E. Keil (主要机构: CERN)
- 类型: 理论
- 链接: <https://cds.cern.ch/record/955182/files/CM-P00059234.pdf>

#### 8.2 摘要

这篇论文主要研究 betatron mismatch 对横向束团尺寸以及横向束团密度的影响。具有 mismatch 的束团的横向相空间会在传输过程中发生 filamentation, 经过一段传输距离后, 束团的横向相空间会因为 filamentation 占据更大的相空间面积, 从而导致发射度增加。这篇论文主要考虑了以下几个问题:

1. 如果给定初始束团的横向密度分布, 那么发生 filamentation 后的密度分布会是什么样?
2. 由仅检测空间密度的检测器所看到的可见束团密度分布是什么样的?
3. Mismatch 对 ISR 储存环亮度的影响是什么?

#### 8.3 贡献或创新点

- 创新点: 这是一篇早期研究 betatron mismatch 的论文, 文章中的部分符号容易引起混淆。这篇论文中使用归一化坐标  $(x, x')$  来表示 matched 束团的横向相空间, 其中振幅为  $a$  的 betatron 振荡由半径为  $a$  的圆表示。普通坐标和归一化坐标的转化可以参考 [1], 在普通坐标  $(X, X')$  下, Hill 方程的解给出粒子在横向相空间中的轨迹:

$$X^2 + (\beta(s)X' + \alpha(s)x)^2 = \beta(s)A^2$$

其中,  $A$  为运动常数并由初始条件确定,  $\alpha(s), \beta(s)$  为 Twiss 参数。通过定义新坐标  $x' = \beta X' + \alpha X$  并代入上式即可转化为归一化坐标  $(x, x')$ 。

如 Fig.1 所示，在归一化坐标中发射度为  $\pi R^2$  的 matched 束团相空间由半径为  $R$  的圆表示，具有相同发射度的 mismatched 束团的相空间则由轴分别为  $zR$  和  $R/z$  的椭圆表示，其中  $z \geq 1$  在这篇文章中被定义为 mismatch parameter。

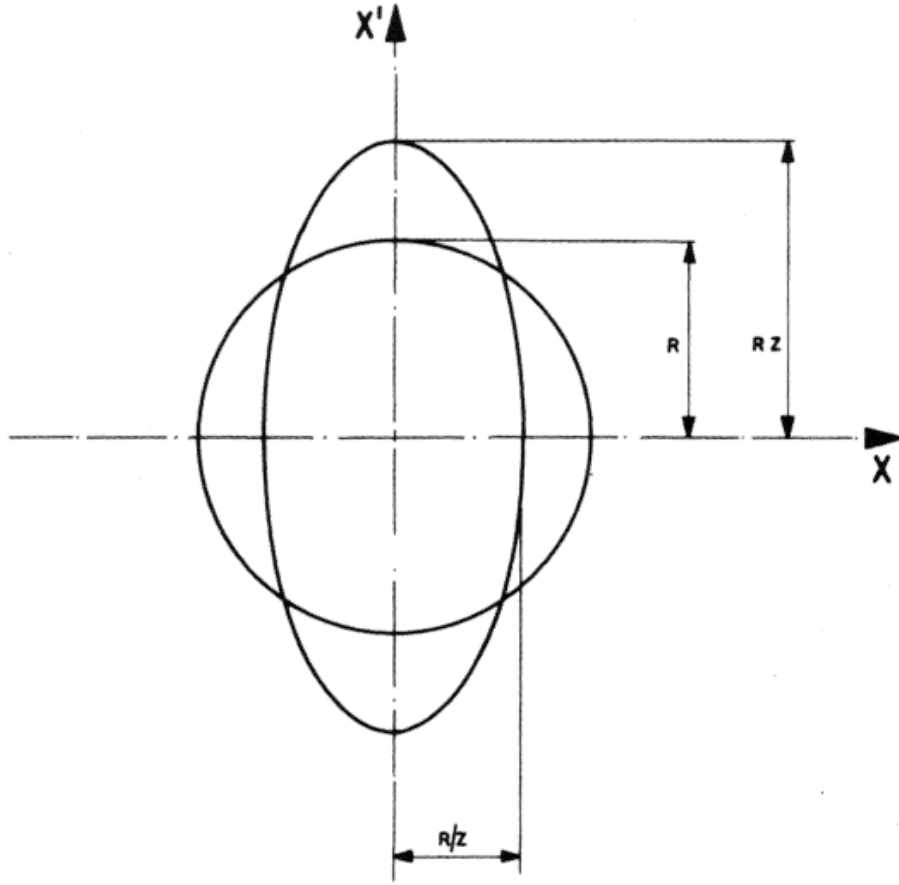


Fig.1

- 贡献：这篇论文同时使用极坐标  $(r, \varphi)$  和归一化坐标  $(x, x')$ ，给定 matched 束团的归一化密度分布  $f(r)$ ，那么 mismatched 束团的密度分布函数  $F(r, \varphi, z)$  为（注意这里的  $z$  在文中被定义为 mismatch parameter）：

$$F(r, \varphi, z) = f \left[ (rz \cos \varphi)^2 + \left( \frac{r}{z} \sin \varphi \right)^2 \right]$$

这篇文章指出，filamentation 会 smooth out 密度分布函数的方位角变化，并产生新的分布函数  $\bar{F}$ ：

$$\bar{F}(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi, z) d\varphi$$

★Filamentation 的过程在哪里？ $\Rightarrow$  这篇论文并不关心 filamentation 的具体过程，而是更关注 filamentation 发生后在相空间填充的新椭圆。上面的处理可以看到，“成丝”其实隐含在与被平均掉的正弦和余弦函数相关的项。 $\varphi$  的物理意义是束团的



phase advance, 所以需要束团在发生 mismatch 后传输较长时间才可以使得“成丝”完全填充新的相空间椭圆。

此外, 这篇文章还给出了可见束团密度分布函数  $G(x, z)$ , 这可以通过对  $\bar{F}$  在  $x'$  上的积分获得:

$$G(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F} \left( \sqrt{x^2 + x'^2}, z \right) dx'$$

最后这篇论文假设在 ISR 储存环中的两个对撞束团完全重叠, 由此, ISR 的亮度将与  $L(z)$  成正比:

$$L(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, z) dx$$

## 8.4 其它

注意这篇论文中使用的一些符号以及定义, 特别是其定义的 mismatch parameter  $z$  与较为熟知的  $B_{mag}$  不同。

## 参考文献

- [1] M. J. Syphers. Injection mismatch and phase space dilution[J]. Fermi-lab note FN-458, (1987). <https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-3/367cfb6bb69601413d9f8067fcaa8a6a>

## 9 Filamentation 后的束团分布函数

### Beam Distribution Function after Filamentation

#### 9.1 基本信息

- 分类: 束流动力学
- 作者: T.O. Raubenheimer, F.-J. Decker and J. T. Seeman (主要机构: SLAC)
- 类型: 理论
- 链接: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/505858>

#### 9.2 摘要

这篇论文主要研究和计算 betatron mismatch 引起的 filamentation 后的束团分布函数。在解读直线对撞机中的束团测量结果和发射度 (emittance) 稀释成因时, 这种分布函数是有用的。同时, 这种分布函数在考虑稀释相空间密度的方法时也较为重要, 这可能是未来直线对撞机中的机器保护系统设计时所需要考虑的一点。这篇论文还将所得分布函数与 SLAC 直线加速器测得的束团分布进行了比较。

#### 9.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇论文主要计算由 betatron mismatch 引起 filamentation 后的束团分布函数。在周期性 lattice 中, 粒子将进行 betatron 振荡, 其位置  $x$  和角度  $dx/ds = x'$  可以通过作用 and 角度变量  $J, \phi$  用类似于谐振子的形式表示:

$$x = \sqrt{2J\beta(s)} \cos(\psi(s) + \phi)$$

$$x' = \sqrt{\frac{2J}{\beta(s)}} (\sin(\psi(s) + \phi) + \alpha(s) \cos(\psi(s) + \phi))$$

其中,  $\alpha(s), \beta(s)$  为由 lattice 确定的 Twiss 参数,  $\psi(s)$  为 phase advance。假设束团的 beam Twiss 为  $\alpha^*, \beta^*$ , 那么由束团 beam Twiss 给出的位置  $x$  和角度  $dx/ds = x'$  可以结合振幅  $J^*$  和相位  $\phi^*$  写为如下形式:

$$x = \sqrt{2J^*\beta^*} \cos \phi^*$$

$$x' = \sqrt{2J^*/\beta^*} (\sin \phi^* - \alpha^* \cos \phi^*)$$

利用上述已有的结果，可以建立  $J$  与  $J^*$  以及  $\phi$  与  $\phi^*$  之间的联系：

$$J = J^* \left[ \left( \frac{\beta^*}{\beta} + \left( \alpha \sqrt{\frac{\beta^*}{\beta}} - \alpha^* \sqrt{\frac{\beta}{\beta^*}} \right)^2 \right) \cos^2 \phi^* + 2 \left( \alpha - \alpha^* \frac{\beta}{\beta^*} \right) \cos \phi^* \sin \phi^* + \frac{\beta}{\beta^*} \sin^2 \phi^* \right]$$

其中，

$$\tan \phi = \frac{\beta}{\beta^*} \tan \phi^* + \left( \alpha - \alpha^* \frac{\beta}{\beta^*} \right).$$

从上式可以看出，如果束团与 lattice 是匹配的，那么将有  $J = J^*, \phi = \phi^*$ 。此外，以作用-角度坐标表示的束团分布函数将与角度坐标无关，且均方根束团发射度等于粒子作用量的期望值  $\langle J \rangle$ 。

这篇文章的巧妙点在于，计算由 mismatch 引起的 filamentation 后的束团分布函数时，假设了角度坐标与 filamentation 后的作用量无关，由此分布函数被表示为：

$$g(J)dJ = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi^*}{2\pi} g^*(J^*) dJ^*$$

其中， $J^* = J/X(\phi^*)$  并且  $X(\phi^*) = a \sin^2 \phi^* + 2b \sin \phi^* \cos \phi^* + c \cos^2 \phi^*$ ，其中：

$$a = \frac{\beta}{\beta^*}, \quad b = \alpha - \alpha^* \frac{\beta}{\beta^*}, \quad c = \frac{\beta^*}{\beta} + \left( \alpha \sqrt{\frac{\beta^*}{\beta}} - \alpha^* \sqrt{\frac{\beta}{\beta^*}} \right)^2$$

为了进一步分析，这篇文章假设初始束团在  $x, x'$  中具有双高斯分布，并且通过对相空间的旋转操作（或说选取特定的角度）以消去  $X(\phi^*)$  中的交叉项得到：

$$X(\phi^*) = \lambda_1 \cos^2(\phi^* - \theta) + \lambda_2 \sin^2(\phi^* - \theta)$$

其中，

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{c-a}{2b} - \frac{1}{2b} \sqrt{(c-a)^2 + 4b^2} \right)$$

最后，这篇文章将积分变量从  $\phi^*$  变为  $1/c^2 - 1/X$ ，获得了以 mismatch parameter  $B_{mag}$  [1] 表示的结果：

$$g(J) = \frac{e^{-JB_{mag}/\epsilon}}{\epsilon} I_0 \left( \frac{J}{\epsilon} \sqrt{B_{mag}^2 - 1} \right),$$

- 贡献：根据上述已有的结果可以计算到  $x$  平面的投影，该投影其实就是测量的束团分布，可以通过下式进行计算：

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{g(J(x, x'))}{2\pi}$$

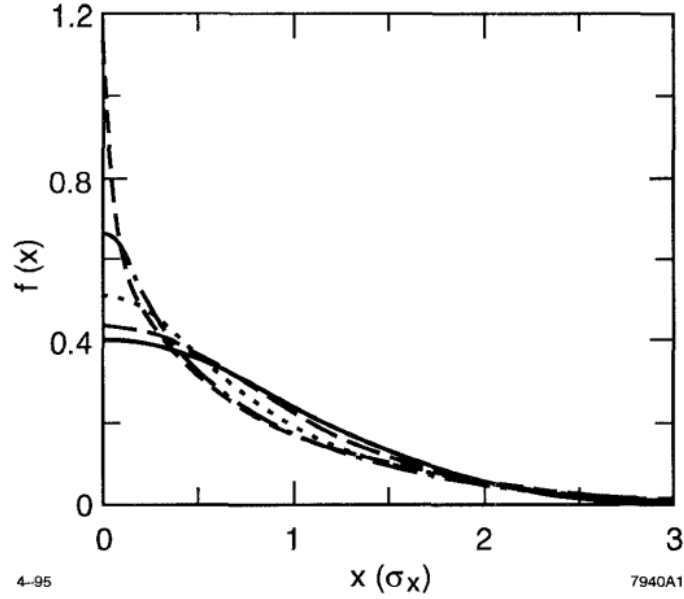


Figure. 1.  $f(x)$  versus the rms beam size for  $B_{\text{mag}} = 1.0$  (solid),  $B_{\text{mag}} = 1.25$  (dashes),  $B_{\text{mag}} = 2.0$  (dots),  $B_{\text{mag}} = 5.0$  (dash-dot), and  $B_{\text{mag}} = 50.0$  (dashes).

Fig.1 中绘制了不同  $B_{\text{mag}}$  值下分布函数  $f(x)$  与均方根光束尺寸  $\sqrt{\beta B_{\text{mag}}} \epsilon$  的关系图。

此外，这篇论文还将所得分布函数与 SLAC 直线加速器测得的束团分布进行了比较。如 Fig.2 所示，其中显示了 SLC 中具有大非高斯尾部的 filamented 束团的测量轮廓。该束团是由 SLAC 加速器低能量端螺线管的误差 (error) 产生的。束团的分布是在束团相空间发生 filamentation 之后进行测量的；这可以通过比较在不同 betatron 相位测量的束团轮廓来确定。在 Fig.2 中， $B_{\text{mag}} \approx 5$ ，数据与唯象“超高斯”函数 (‘super-gaussian’function) 拟合，拟合数据和测量轮廓显示出合理的一致性。另外，数据中可见的小不对称可能是由于横向尾场造成的。

## 参考文献

- [1] F. J. Decker, C. Adolphsen, W.J. Corbett, et al. Dispersion and betatron matching into the linac[R]. Stanford Linear Accelerator Center, Menlo Park, CA (USA), 1991. <https://www.osti.gov/biblio/5550468>

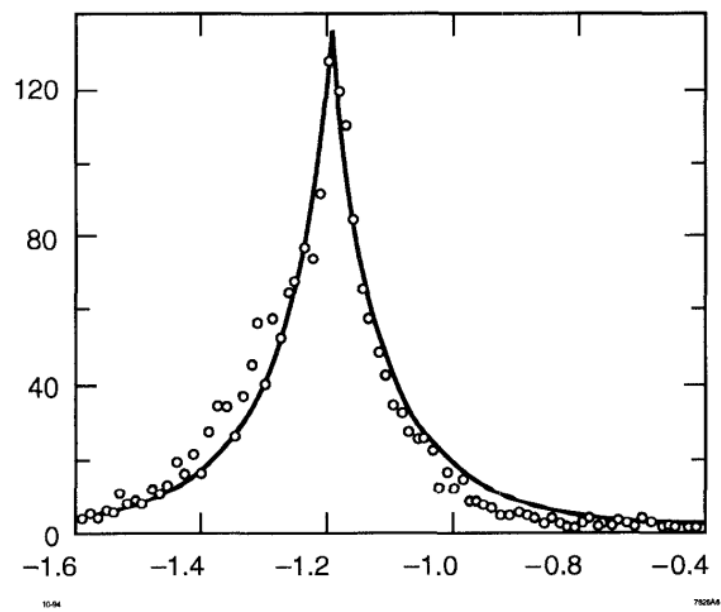


Figure. 2. Strong non-gaussian tails form a 'Christmas tree' like distribution which indicates that there is a large mismatch of the beam.