

加速器束流动力学期刊论文导读 (2021 年 10 月)

受“京师物理”公众号启发，我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊，与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布，在 http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article 可以找到过去的导读文档。限于成员水平，导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流，我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2021 年 10 月) 导读成员¹负责结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]、[6]、[7]、[9]、[10]、[11] [12]、[13]、[14]	jcytsai@hust.edu.cn
宋怡方	[8]	yifangsong@hust.edu.cn

¹宋怡方为电磁所樊宽军教授研究生。

目录

1	一种基于稳态微聚束的紧凑型、高增益辐射源 A Compact High-Power Radiation Source Based on Steady-State Microbunching Mechanism	4
2	准等时性储存环 [NIMA 301] Quasi-isochronous storage ring	8
3	极低纵向发射度电子储存环 [PRAB 24-9] Ultralow longitudinal emittance storage rings	13
4	基于储存环的极短、高亮度电子束脉冲 [NIMA 865] Ultrashort high-brightness pulses from storage rings	15
5	利用强射频聚焦增加对撞亮度 Strong RF focusing for luminosity increase: short bunches at the IP	18
6	高重频种子自由电子激光调制参数分析 [NIMA 1015] Analysis of modulation parameters for high repetition rate seeded FEL	21
7	电子储存环中的束团分布参数计算 [JAP 50] Evaluation of beam distribution parameters in an electron storage ring	26
8	氮化钛光阴极的量子效率、本征发射度和响应时间测量 [PRAB 24-09] Quantum efficiency, intrinsic emittance, and response time measurements of a titanium nitride photocathode	29
9	高增益自由电子激光的高次谐波群聚效应 [NIMA 293] Large harmonic bunching in a high-gain free-electron laser	32
10	自由电子激光动力学与谐波电子群聚的统一理论 [JAP 10] Unified view of free-electron laser dynamics and of higher-harmonics electron bunching	34
11	考虑库伦扩散效应的回声增强谐波产生机制的电子束群聚因子计算 [PRST-AB 16-07] Bunching coefficients in echo-enabled harmonic generation	36
12	自由电子激光动力学、群聚因子演化与相干谐波产生 [JAP 78] Free electron laser dynamics, evolution of the bunching coefficients, and coherent harmonic generation	39

- 13 存在分段波荡器的高增益自由电子激光理论 [JAP 99]
Theory of high gain free-electron lasers operating with segmented undulators 41
- 14 非相对论束团的电阻壁尾场与阻抗理论 [PRST-AB 7-04]
Resistive-wall wake and impedance for nonultrarelativistic beams 44

1 一种基于稳态微聚束的紧凑型、高增益辐射源

A Compact High-Power Radiation Source Based on Steady-State Microbunching Mechanism

1.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：Alex Chao, Xiujie Deng, Wenhui Huang, Tenghui Rui, Chuanxiang Tang, Jorg Feikes, Roman Klein, Ji Li, Markus Ries, Arne Hoebl, Daniel Ratner, Eduardo Granados, Chao Feng, Bocheng Jiang, Xiaofan Wang, Hao-Wen Luo, Po-Hsun Wu (主要机构：清华大学)
- 类型：理论、设计
- 链接：<https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/17000/slac-pub-17241.pdf>

1.2 摘要

这篇论文是为 2018 年在法国 Strasbourg 举办的 High-brightness Sources and Light-driven Interactions Congress 所准备的会议论文。在北京清华大学形成初步的 SSMB (稳态微聚束, steady-state microbunching, SSMB) 合作团队, 目标是设计一个基于 SSMB 机制的紧凑型电子储存环, 目的是产生高功率、连续 (continuous-wave, CW) 模式运行的 13.5nm EUV 光源。具体的应用面向是半导体制程中的极紫外光刻应用。

1.3 贡献或创新点

作为半导体制程中的极紫外光刻应用, 理想的光源需要满足以下几个特性:

- 高平均功率: 每个辐射波荡器输出单元的平均功率 > 1 kW。储存环也许提供多个单元。
- 连续模式运行: 辐射脉冲的时间结构为连续、平稳运行。目的是减小对晶片 (chip) 损坏。
- 窄带: 中心波长 13.5 nm 辐射光谱的频宽要求 $< 1\%$, 与装置中的镜子匹配²。

²离开这个窄带范围, 镜子的反射率下降。

- 良好的准直性：要求准直 $\leq 0.1 \text{ mrad}$ 。产生的辐射约经过 10 面镜子到达晶元 (wafer)。
- 稳定性：辐射光斑打在晶元上应足够稳定，使单位面积光功率差异 $< 1 \%$ 。
- 干净：使光学镜子套件不至于被污染而需频繁更换。
- 低功耗。
- 贡献：
 - 相比于早期 SSMB 概念性的论文 [1, 2]，这篇会议论文给出更明确的束团与束线设计参数与实现 SSMB 的几个可能方案，与对 SSMB 面向的极紫外光刻应用的更明确的目标需求。
 - 目前仍于 R&D 阶段。
 - 光源特性越好 (即，越干净)，则到晶元前需要的镜子越少。每面镜子约导致 30 % 的功率损耗。
 - 针对 EUV，目前基于 SSMB 机制有两类设计方案，分别为“纵向强聚焦”与“可逆”方案。
 - 集体效应分析已按既有理论评估，表一给出的参数是在保守情况下避免可能的集体效应的束团、波荡器与激光参数。还需要进一步分析。
 - 调制器的种子激光要求提供等效的电压 $\sim \text{MV}$ ，稳定性 $\sim 0.1 \text{ fs}$ 。需要增强腔，以达到设计要求，同时提高 duty factor。
 - 感应直线加速器要求重频约 MHz，脉冲电压 10 kV。可能使用固态感应直线加速器。如果无法满足重频要求，则可安装多个感应直线加速器降低对重频的要求。

1.4 SSMB 工作原理简介

基于 SSMB 机制的储存环，其发光的“单元”由一组调制器 (modulator) 与辐射器 (radiator) 组成。其中，调制器由外部激光 (通常为红外激光) 与波荡器组成，区别于辐射器的波荡器。调制器用来控制电子束特性，使其满足当电子束进入辐射器时，能够发出设计预期的波荡器辐射。

在 SSMB 储存环中，逐圈运行的电子形成多束团，承接了传统储存环的高重频优势。SSMB 储存环原则上如果有调制器，则不再需要传统射频 (RF) 腔。考虑到辐射之后的能量损失，可以感应直线加速器取代 RF 腔。在传统储存环中，射频腔的波长决定了纵向相空间的宽；在 SSMB 中，纵向相空间的宽则由外部激光场的波长决定，比射频腔短了约 5 个数量级。基于 SSMB 的发光机制不同于自由电子激光 (free electron laser, FEL)。基

于储存环的 FEL 机制需要辐射阻尼使束团恢复，但是基于 SSMB 的储存环辐射则不用。

下图为一种称为纵向强聚焦方案的 SSMB 储存环。

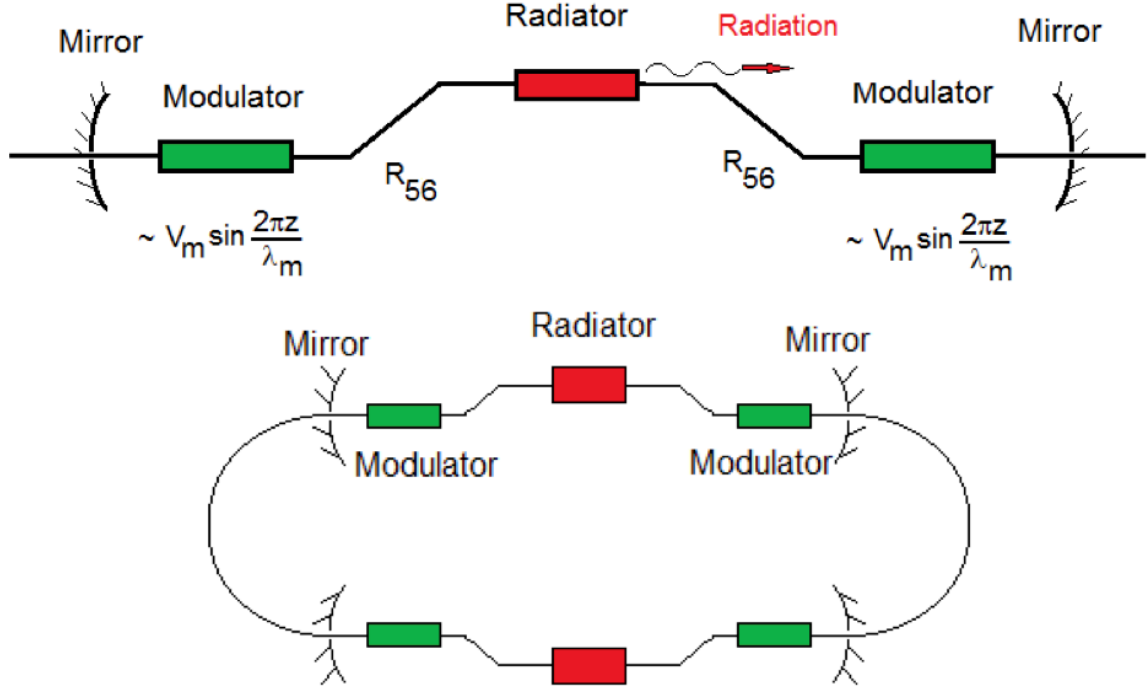


Figure 1: A strong focusing SSMB insertion and a storage ring with two such insertions.

对于面向 EUV 应用的 SSMB 储存环，有两种类型的设计方案：

1. 纵向强聚焦 (longitudinal strong focusing, LSF) 方案 \Rightarrow 要求储存环准等时性 ($\alpha_C \sim 10^{-6}$)，并且局域的动量压缩因子不能太大，以维持微束团串的特性。束团在全环保持微群聚状态。
2. 可逆 (reversible) 方案 \Rightarrow 要求调制器成对，并在逐圈运行下，准确形成与恢复微束团串特性。在调制器外的束团不需要维持微群聚状态。

目前而言，两个方案并行推进中，时机成熟时将择一采用。

参考文献

- [1] D.F. Ratner and A.W. Chao, Steady-State Microbunching in a Storage Ring for Generating Coherent Radiation, Phys. Rev. Lett. 105, 154801 (2010). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.105.154801>

- [2] A. Chao *et al.*, High power radiation source using the steady-state microbunching mechanism, Int. Part. Accel. Conf., Busan, Korea (2016). <https://accelconf.web.cern.ch/ipac2016/papers/tuxb01.pdf>

2 准等时性储存环 [NIMA 301]

Quasi-isochronous storage ring

2.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：Claudio Pellegrini and David Robin (主要机构：UCLA)
- 类型：理论、粒子跟踪模拟
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0168900291907348>

2.2 摘要

这篇是早期讨论准等时性电子储存环的论文之一，分析了单粒子与多粒子集体效应。准等时性电子储存环设计通常应用于产生短束团或高峰值电流束团。这篇论文研究表明，束团长度可以保持在毫米 (millimeter, mm) 量级，同时使纵向亮度提高一个数量级。

2.3 贡献或创新点

在电子储存环中，束团长度由同步辐射效应或集体效应决定³，有

$$\sigma_L = \frac{\alpha R}{\nu_s} \sigma_\delta$$

其中， α 为动量压缩因子 (momentum compaction factor)， ν_s 为纵向振荡频率 (synchrotron tune)。由于 $\nu_s \propto \sqrt{\alpha}$ ，因而有 $\sigma_L \propto \sqrt{\alpha}$ 。一般来说，传统储存环 (非等时性) 的 α 约为 10^{-3} ，而准等时性的 α 约为 $10^{-5 \sim -6}$ 量级。此外，准等时性储存环的纵向振荡频率一般也变得较小⁴。

- 贡献：准等时性储存环与传统储存环动力学的区别主要在于纵向动力学，横向动力学区别不大。此外，横向效应对纵向动力学的影响需要额外分析；纵向对横向的影响一般可忽略⁵。准等时性储存环的纵向动力学分析需要引入 α 的能量依存关系，即 $\alpha = \alpha(\delta)$ ，其中， $\delta = (E - E_s)/E_s$ 。

³意思是，如果集体效应明显，则束团长度由集体效应导致的能散 σ_δ 决定。相较于同步辐射效应，如果集体效应不明显，则束团长度由同步辐射与储存环设计参数决定。

⁴这里不考虑纵向强聚焦的准等时性储存环。

⁵除了发生 synchrotron coupling 情况。

- 创新点：从列写单粒子纵向运动方程开始

$$\begin{cases} \psi' = \alpha(\delta) \delta \\ \delta' = \frac{eV_0}{2\pi E_s} \sin(\psi + \phi_s) - \frac{U_0}{2\pi E_s} (1 + J_\epsilon \delta) + \text{fluctuations} \end{cases}$$

其中

$$J_\epsilon = 2 + \frac{\left\langle \frac{(1-2n)\eta}{\rho^3} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle}$$

为简化分析，上式可以化简为

$$\begin{cases} \psi' = \alpha(\delta) \delta \\ \delta' = -\kappa \psi - \frac{U_0}{2\pi E_s} J_\epsilon \delta + \text{fluctuations} \end{cases}$$

其中，纵向梯度 $\kappa = \frac{eV_0}{2\pi E_s} \cos \phi_s$ 。

忽略横向影响，以上的 α 一般按如下方式展开

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) &\equiv \frac{\Delta\psi/2\pi}{\Delta E/E} \\ &= \frac{1}{L\delta} \oint \left[\sqrt{\left(1 + \frac{x}{\rho_s}\right)^2 + (x')^2 + (z')^2} - 1 \right] ds - \frac{1}{\gamma^2} \\ &\approx \left[\left\langle \frac{\eta}{\rho} \right\rangle - \frac{1}{\gamma^2} \right] + \left[\frac{1}{L} \oint \frac{(\eta')^2}{2} ds \right] \delta + \dots \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 \delta + \dots \end{aligned}$$

这里⁶用到 $\sqrt{\left(1 + \frac{x}{\rho_s}\right)^2 + (x')^2} - 1 \approx \frac{\eta}{\rho_s} \delta + \frac{(\eta')^2}{2} \delta^2 + \dots$ 。

基于以上方程，这篇论文先给出单粒子动力学的物理图像 (Sec. 3)，从忽略同步辐射阻尼效应，再考虑同步辐射阻尼效应。

给定 α_2 ，如何决定 α_1 的最小值？ $\Rightarrow \alpha_1$ 由 α_2 与相空间初始条件及同步辐射阻尼效应决定。参考下图。

这篇论文的第二部分讨论集体效应，特别是纵向微波不稳定性 (microwave instability)。利用既有理论的结果

$$I_{pk} = \frac{2\pi\alpha_1 E_s (\beta\sigma_\delta)^2}{\left| \frac{Z_{\parallel}}{n} \right|} \mathcal{F}$$

⁶利用 $x = \eta\delta, x' = \eta'\delta$ 。这里 z 表横向垂直方向的偏移。

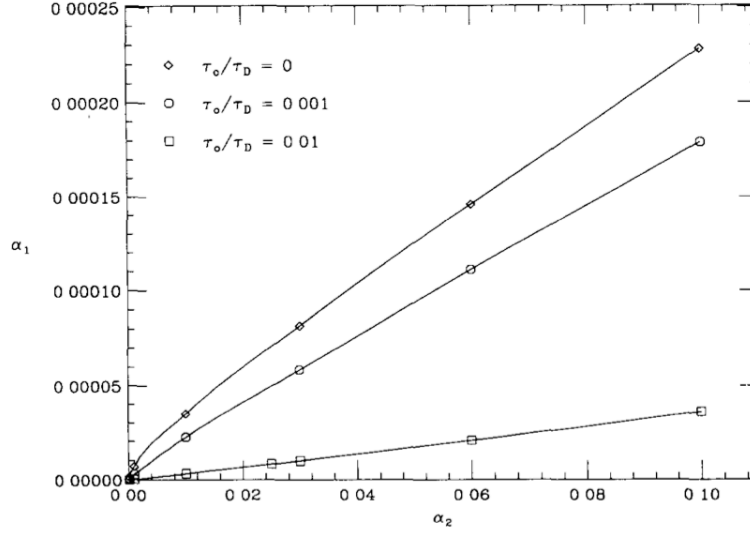


Fig. 5. Three curves which define the stability limits for α_1 shown for three different values of damping with $\delta_0 = 0.001$ and $\psi_0 = 0.0001$.

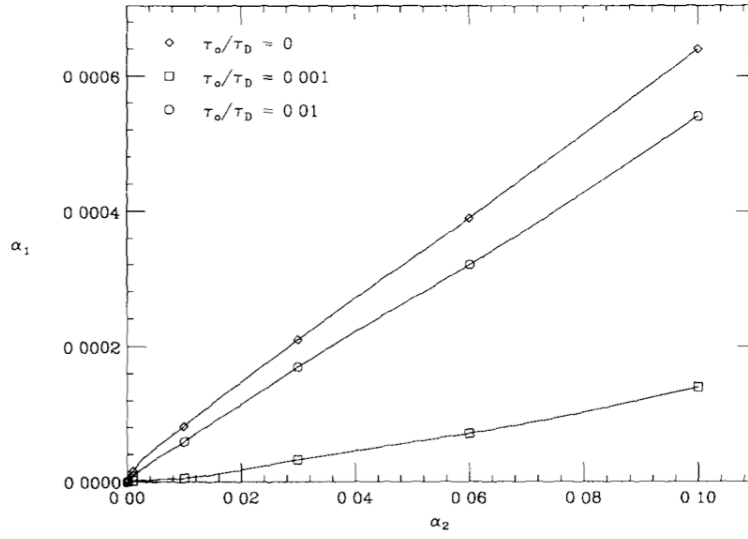


Fig. 6. Three curves which define the stability limits for α_1 shown for three different values of damping with $\delta_0 = 0.003$ and $\psi_0 = 0.0003$.

上式仅对 α_2 成立，即，不考虑准等时性情况。因此，并不是 α_1 越小则电流阈值越低而越不稳定。原因是分母的 $\left| \frac{Z_{\parallel}}{n} \right|$ 与束团长度有关。如今束团长度变短，则对应于阻抗的中心频率较高。换句话说，传统储存环阻抗频谱中出现的峰值现在成为“较低频”成分，贡献较小，因此可能上式预测的电流阈值低于实际阈值。

另外，考虑准等时性储存环的不稳定性阈值时，也许需要把同步辐射阻尼效应列入考虑。当不稳定性增长率小于阻尼率时，其实不存在该不稳定性。换言之，不稳定性电流阈值对应于不稳定性“增长率”等于同步辐射“阻尼率”的时候。

这篇论文利用 Vlasov 分析，得到色散方程，有

$$1 = -\frac{ieI_{pk}}{4\pi\alpha_1 E_s \sigma_\delta^2} \frac{Z_{\parallel}}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{df_0}{d\Delta}}{a + ib + \Delta + d\Delta^2} d\Delta$$

其中, $a = \frac{\nu_{nR}}{\sqrt{2}n\sigma_\delta\omega_0\alpha_1}$, $b = \frac{\nu_{nI}}{\sqrt{2}n\sigma_\delta\omega_0\alpha_1}$, $d = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}\sigma_\delta\alpha_1}$, $\Delta = \frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma_\delta}$ 。待解的量为 $\nu_n = \nu_{nR} + i\nu_{nI} \in \mathbb{C}$ 与 I_{pk} 。

但是, 该方程只有实部与虚部, 即, 这三个量其中一个必须为已知。一般假设 $\nu_{nI} = 0$, 表示 instability onset, 然后求解 I_{pk} 与 ν_{nR} 的关系。下图给出一个基于 BBR (broadband resonator) 阻抗作为例子, 说明准等时性储存环可能给出较高的电流阈值 $I_{pk} \propto 1/\alpha_1$, 与 α_2 关系不大。

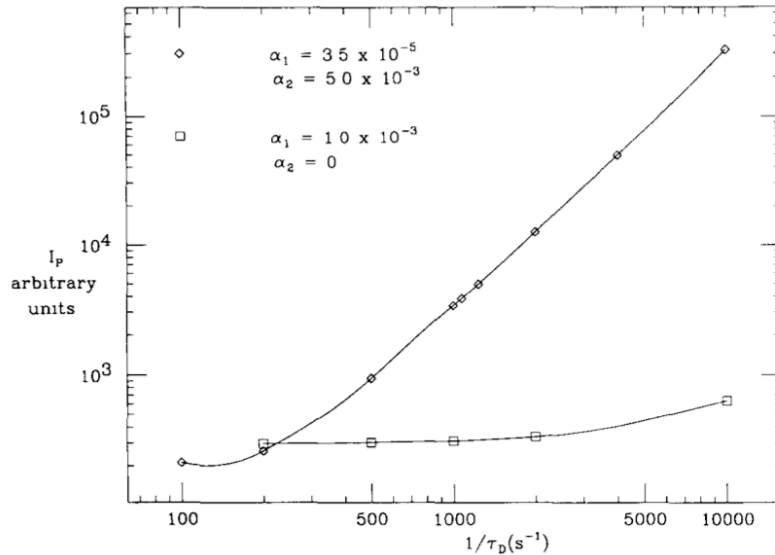


Fig. 7. Microwave instability threshold peak current as a function of inverse damping time. The peak current is in arbitrary units.

除了纵向微波不稳定性外，还分析了头尾不稳定性 (fast head-tail instability)，有 $I_{pk} \propto 1/\sqrt{\alpha_1}$ 。由此来看，似乎准等时性储存环对提高不稳定性阈值是有利的。

2.4 其它

准等时性与等时性有些微区别，操作在 $\alpha = 0$ (所有阶皆为 0) 的情况又称为操作在渡越能量 (transition energy)⁷，而准等时性的要求只需 $\alpha \ll 1$ ，并且高阶项可能不为 0。当最低阶 $\alpha_1 = 0$ 时，束团本质上属于单粒子不稳定，而 $\alpha_1 \ll 1$ 一定程度上提供相空间稳定区间。相空间稳定区间的大小与形状由 α_1, α_2 与 κ 或同步辐射阻尼率决定。

论文中 Eq. (14) 有误，应为

$$\alpha_2 = \frac{1}{L} \oint \left[\frac{(\eta')^2}{2} + \frac{\eta_2}{\rho_s} \right] ds$$

类似式子可以参考 [1] 中的 Eq. (13)。

过去较多研究 $\alpha = 0$ 的动力学考虑质子加速器；这篇论文考虑电子加速器，重要区别在于同步辐射效应。

这篇论文分析纵向微波不稳定性时，使用 Vlasov 分析，但是假设 coasting beam 与 BBR 阻抗模型，未必满足短束团的假设。

参考文献

- [1] David Robin, Etienne Forest, Claudio Pellegrini, and Ali Amiry, Quasi-isochronous storage rings, Phys. Rev. E 48, 2149 (1993). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.48.2149>

⁷或者，到某一阶皆为 0。

3 极低纵向发射度电子储存环 [PRAB 24-9]

Ultralow longitudinal emittance storage rings

3.1 基本信息

- 分类：束流光学设计、单粒子动力学
- 作者：Y. Zhang, X. J. Deng, Z. L. Pan, Z. Z. Li, K. S. Zhou, W. H. Huang, R. K. Li, C. X. Tang, and A. W. Chao (主要机构：清华大学)
- 类型：理论、数值模拟
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.090701>

3.2 摘要

低纵向发射度意味着很小的束团能散与短束长，使产生高功率、相干辐射成为可能。由于辐射的量子激发效应，电子储存环中的平衡纵向发射度由一些“弯转”部件决定，如二极铁、波荡器与激光调制器⁸。通过引入纵向 Twiss 函数与六维相空间的单圈传输映射函数 (6D one-turn map)，这篇论文给出上述三种部件对纵向平衡发射度贡献的分析与最小化纵向发射度的方案。通过整体优化纵向 beta 函数后得到的设计表明，纵向发射度正比于弯转角度的三次方，并且，对于 400 MeV 电子储存环能够达到亚皮米 (picometer, 10^{-12} m) 等级的 (几何、自然) 束团发射度。

3.3 贡献或创新点

- 贡献：

1. 定义纵向 Twiss 函数之后，有

$$m_{55} = \cos \phi + \alpha \sin \phi$$

$$m_{56} = \beta \sin \phi$$

$$m_{65} = -\gamma \sin \phi$$

$$m_{66} = \cos \phi - \alpha \sin \phi$$

⁸包含波荡器与外部激光组成的整体。

对于传统纵向弱聚焦的储存环, ϕ, α 很小, 即 β, γ 沿 s 几乎为定值。此外, 由 Eq. (4b), 纵向 beta 函数可以写成 $\beta = \beta_0 - 2\alpha_0 r_{56} + \gamma_0 r_{56}^2$, 可以看到, 相对于横向动力学的漂移段 L (恒正) 而言, r_{56} (可正可负) 为纵向漂移段长度。

2. Section II 回顾并比较纵向 Twiss 函数理论与熟悉的横向 Twiss 函数。
3. 通过引入“纵向发射度贡献系数” $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$, Section III 分别推导出二极铁、振荡器或摇摆器、激光调制器的纵向发射度贡献系数。得到三个部件对 radiation integral 的增加量 ΔI 为 Eqs. (13, 20, 24)。
4. 该论文第二部分讨论利用已知的三种辐射弯转部件对纵向发射度的影响, 给出能够保持纵向极低发射度电子储存环的初步设计。分别针对纵向漂移段 (即, 传统 DBA、TBA 等)、一般弯转段 (arc) 与极低储存环设计讨论。简化版本的两种设计参数可以参考 Table I (RF) 与 Table II (laser modulator)。
5. 在不考虑激光调制器情况下, 最终设计平衡时的纵向发射度有

$$\epsilon_z = \frac{11}{48\sqrt{21}} \frac{\lambda_e}{32\pi} \gamma_c^2 \beta_c^2 \theta^3$$

其中, λ_e 为电子的康普顿波长, θ 为单次弯转角度。因此, 低纵向发射度设计偏好较短 (因此较多) $\sim \text{mrad}$ 的二极铁与更大的环周长。

• 创新点:

1. 相较于传统电子储存环设计, 或近年提出的衍射极限储存环设计, 设计的心基本聚焦于横向单粒子动力学。极低横向发射度导致辐射横向相干性, 一定程度上说, 想要进一步提升辐射亮度或许应从设计优化纵向单粒子动力学着手。这篇论文的创新点之一即是基于三维 Twiss 分析。这类分析对基于纵向强聚焦原理的一种 SSMB 方案而言是必要的。
2. 通过写出与横向类似, 由于同步辐射效应导致的纵向发射度增长公式 $\epsilon_z = \frac{C_0 \gamma_c^5}{2D_z} I$ [Eq. (8)], 进一步定义了“纵向发射度贡献系数”如下

$$\Delta I = \int_0^L \frac{\beta(\hat{s})}{|\rho(\hat{s})|^3} d\hat{s} = C_\alpha \alpha_0 + C_\beta \beta_0 + C_\gamma \gamma_0$$

如此一来使能在同一个框架下分析不同部件对纵向发射度增长的影响。按此概念, 定义纵向 intrinsic Twiss (IT), 当束团进入部件的纵向 Twiss 函数与 IT 契合时, 能够保证束团的纵向发射度增长最小 (但不为 0)。

3.4 其它

利用纵向 Twiss 或 Courant-Snyder 函数也许可以重新构建传统储存环或直线加速器中有限束长的微束团不稳定性理论。

4 基于储存环的极短、高亮度电子束脉冲 [NIMA 865]

Ultrashort high-brightness pulses from storage rings

4.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：Shaukat Khan (Zentrum für Synchrotronstrahlung DELTA, TU Dortmund University, 德国)
- 类型：概念
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168900216307987?via%3Dihub>

4.2 摘要

基于加速器的短波长辐射，其亮度能够通过“相干性”进一步提高。相干成分的辐射强度与“相干长度”内的电子个数平方成正比，这种情况要求电子束的纵向微群聚，如自由电子激光 (free electron laser, FEL)。电子储存环的辐射亮度过去已经得到稳定进展，但是还能够通过 (纵向)“相干”进一步获得提升。通过连续 (continuous-wave, CW) 激光场对电子束进行能量调制能够在红外光波段达到稳态微聚束 (steady-state microbunching)。对于更短波长，激光场对电子束提供纵向暂时的能量调制，而在下游转换成密度调制。一种特定目标为利用电子束内部纵向切片发光，从而获得极短、高亮度光脉冲。

4.3 贡献或创新点

- 贡献：光子源的亮度由下式衡量

$$B = \frac{\Delta N / \Delta t}{4\pi^2 \sigma_x \sigma_{x'} \sigma_y \sigma_{y'} (d\omega / \omega)}$$

对于波荡器或摇摆器而言，光子在 $(d\omega / \omega)$ 内增加率与波荡器周期成正比。按惯例，一般 $(d\omega / \omega)$ 取 0.1 %。

作为这篇论文的贡献之一，作者试着勾勒一个图景，从不同视角阐明储存环同步辐射光源亮度能够通过纵向微群聚进一步提高。电子储存环中的微束团分两类：

1. 稳态微聚束 (steady-state microbunching in storage rings)

- Low- α mode \Rightarrow 按传统 RF 加速腔储存环模式，束长大约可以减小一个数量级 (10 ps \rightarrow 1 ps)，大致允许产生相干太赫兹同步辐射光源。此时，RF 腔同时扮演两种角色：能量补偿与纵向聚焦。
- 近年来，将能量补偿与纵向聚焦分别以不同部件实现的想法兴起。其中，纵向聚焦的目的可以通过将电子束与外部激光在波荡器中并行传播达到。此时，束团长度由 phase bucket 规范，比起 RF 短了约 5 个数量级，也就能在储存环中储存更多、更短的电子束团 \Rightarrow all-optical storage ring，束长大约可以减小三个数量级 (~ 1 fs)。此时，bunch current 或 beam density 与传统 RF 腔储存环差不多。
- 三种可能实现激光调制器的方式

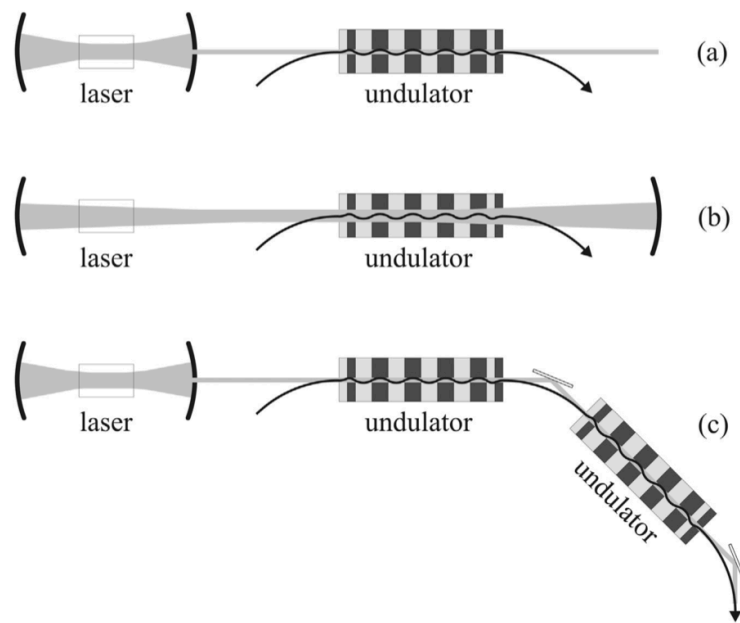


Fig. 2. Three scenarios for a storage ring driven by a continuous-wave laser. (a) The light wave emerging from an optical cavity interacts with the electron beam in an undulator. (b) The undulator is within the optical cavity. (c) The light wave from the cavity is deflected by mirrors and interacts with electrons in more than one undulator.

- 当激光取代 RF 腔时，有效“同步”电子束与 phase space bucket 成为技术挑战。除了调制器的挑战外，还需要电子束逐圈运行时纵向偏移小 \Rightarrow 准等时性储存环 (quasi-isochronous storage ring)。
- 另一种可能：利用 RF 补偿大束团能量损失，利用激光调制大束团形成微束团。

2. 电子脉冲内的微束团 (temporary microbunching in storage rings)

- 相干谐波产生 (coherent harmonic generation, CHG)
- 回声谐波产生 (echo-enabled harmonic generation, EEHG)
- 这些方案局限于调制激光极限：mJ, kHz \Rightarrow 目标：1 MHz

上述两种方案的示意图如下：

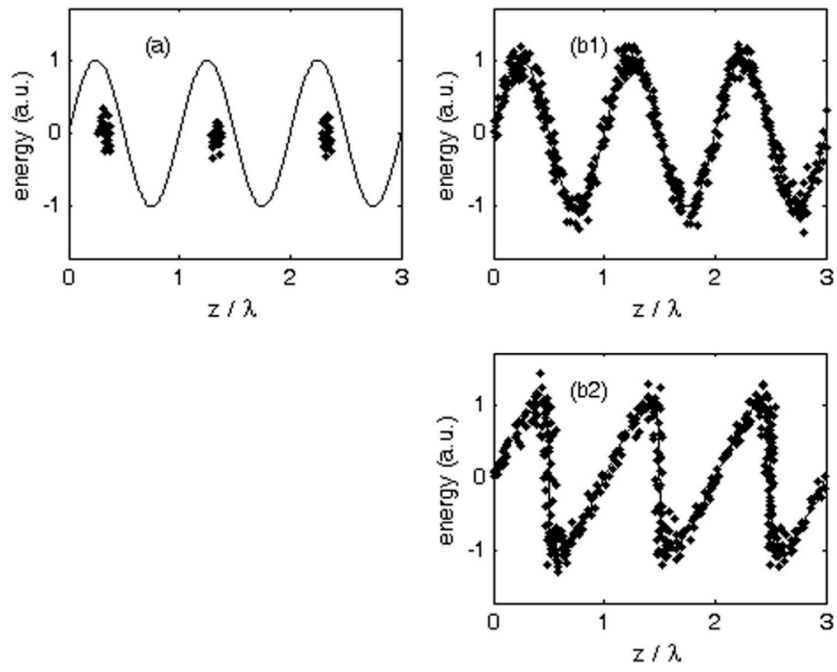


Fig. 3. Electrons in longitudinal phase space (energy deviation versus longitudinal coordinate in units of the wavelength λ) for three cases: (a) phase focusing under the influence of a sinusoidal accelerating voltage and radiation losses, (b1) laser-induced energy modulation, and (b2) microbunching of energy-modulated electrons after a dispersive chicane.

5 利用强射频聚焦增加对撞亮度

Strong RF focusing for luminosity increase: short bunches at the IP

5.1 基本信息

- 分类：单粒子束团动力学
- 作者：A. Gallo, P. Raimondi, M. Zobov (Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Laboratori Nazionali di Frascati)
- 类型：理论、数值计算
- 链接：<https://arxiv.org/abs/physics/0404020>

5.2 摘要

下一代对撞机的关键课题在于通过缩短束团长度而进一步增加对撞亮度 (luminosity)。考虑到沙漏效应 (hourglass effect)，在最佳对撞亮度发生时，横向 beta 函数与纵向束长大约在同一数量级，即 $\beta_{x,y} \sim \sigma_z$ 。由

$$\mathcal{L} \propto \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \propto \frac{1}{\sqrt{\beta_x \beta_y}} \propto \frac{1}{\sigma_z}$$

可看出，缩短束长即减小横向 beta 函数，意味着提高对撞亮度。通过增加射频 (radio-frequency, RF) 腔梯度与动量压缩因子，纵向强聚焦能导致更短的束团长度。可以预见，束团长度在 RF 腔较长，在对撞点附近最短。如果加速器主要的阻抗元件靠近 RF 腔，即束团较长的位置，则能够避免微波不稳定性 (microwave instability) 与纵向势阱畸变 (potential well distortion) 导致的束团拉伸。

5.3 贡献或创新点

- 贡献：
 1. 这篇论文发表于 2003 年意大利举办的正负电子对撞机讨论会 (Workshop on e^+e^- in the 1-2 GeV range)，提到利用纵向强聚焦提升对撞机亮度。该论文给出基于纵向 Courant-Snyder 或 Twiss 函数描述纵向动力学的一些基本介绍。解释了 R_{56} 作为纵向真空漂移段 (非 L) 元件与 RF 腔作为纵向聚焦元件的图像。

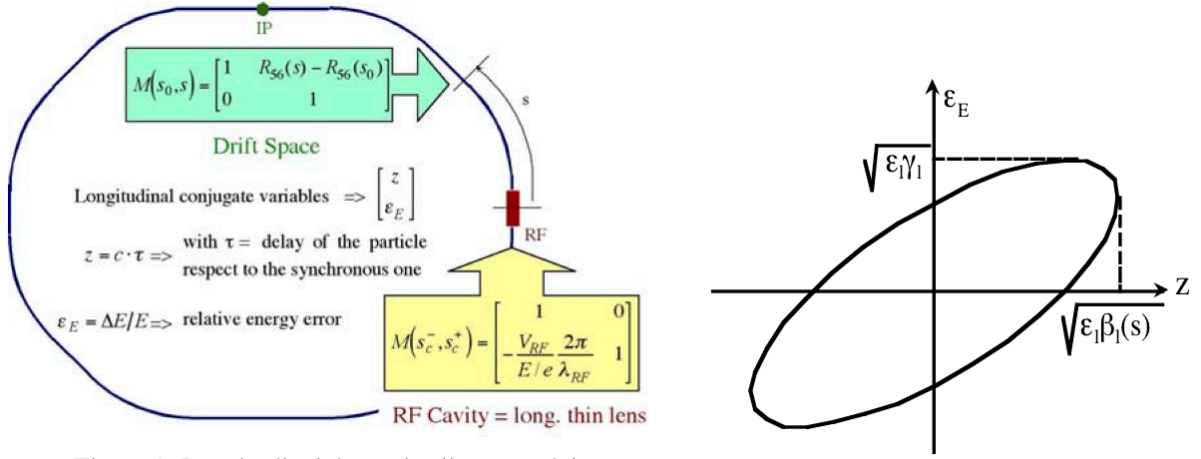


Figure 1: Longitudinal dynamics linear model.

2. 通过构建单圈映射矩阵 (one-turn map), 可以求得对应的纵向 Courant-Snyder 或 Twiss 函数与平衡时在储存环任意位置 s 处的束团参数, 如纵向振荡频率 ν_s 、束长 σ_z 、束团能散 $\sigma_{\Delta E/E}$ 等。注意, 由于 Courant-Snyder γ 函数与 s 无关 (除在 RF 腔中, 但 RF 腔视为零长度元件), 忽略同步辐射效应时, $\sigma_{\Delta E/E}$ 为一常量。由于 Liouville 定理, 纵向发射度 ϵ_L 也是一个常量。平衡时的纵向发射度与能散随纵向相位提前 (phase advance) 的关系可以得到
3. 这篇论文的最后部分讨论了基于纵向强聚焦的接受度 (RF acceptance), 通过数值粒子跟踪模拟演示其在储存环不同位置的相空间与 separatrix 形态。与传统基于纵向弱聚焦的储存环不同, separatrix 形状会随 s 改变。相较之下, 更类似横向相空间 separatrix 形态。

5.4 其它

利用纵向 Courant-Snyder 或 Twiss 函数也许可以重新构建传统储存环或直线加速器中有限束长的微束团不稳定性理论。

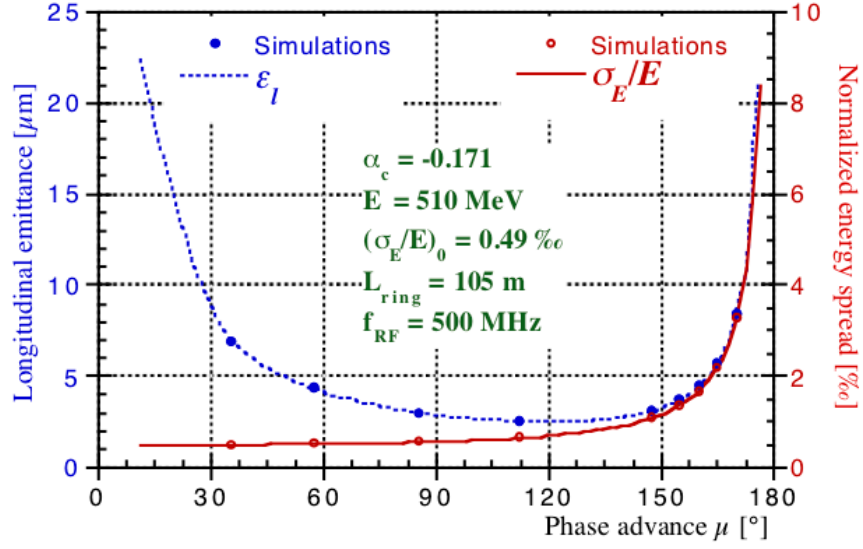


Figure 2: Longitudinal emittance and energy spread vs. phase advance

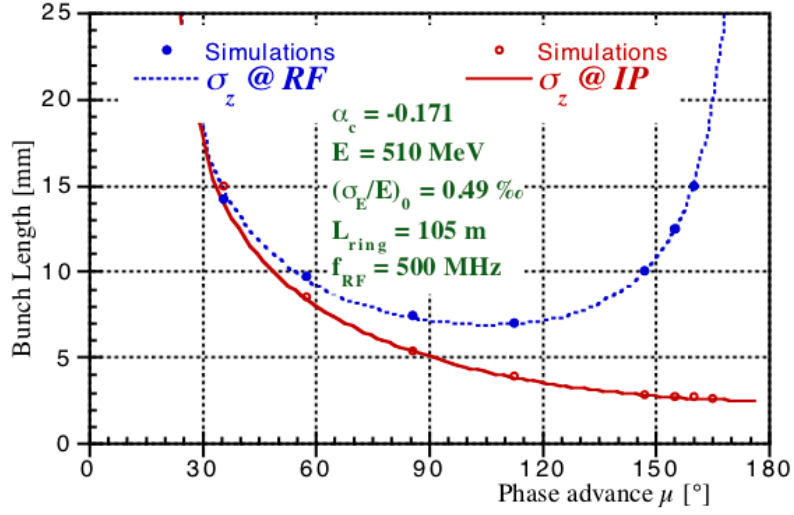


Figure 3: Bunch length @ RF and IP vs. phase advance

6 高重频种子自由电子激光调制参数分析 [NIMA 1015]

Analysis of modulation parameters for high repetition rate seeded FEL

6.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：Qika Jia (主要机构：NSRL)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S016890022100752X?via%3Dihub>

6.2 摘要

对高重频种子自由电子激光 (free electron laser, FEL) 操作模式，对其种子/调制激光脉冲能量与重复频率的要求给出了很大挑战。因此有许多种子自由电子激光的改进模式缓解对调制激光的要求。这篇论文分析以下三种改进模式的调制参数与 FEL 输出特性，对三种模式讨论在考虑光场增益 (optical gain) 效应情况下，不同方案的能量调制效果与调制器长度等。

1. 调制段伸长方案 (modulator lengthening scheme) \Rightarrow 当调制器长度大于三个 FEL 增益长度 (FEL gain length) 时，光场增益效应就应该列入考量。
2. 振荡-方案方案 (oscillator-amplifier scheme) \Rightarrow 存在最优化情况，其谐振腔辐射功率返回比率 $\sim 63\%$ ，并且调制器长度大约为三个 FEL 增益长度。
3. 自调制方案 (self-modulation scheme) \Rightarrow 能量调制振幅与前端密度调制有关，也与调制器本身长度有关。

6.3 贡献或创新点

- 贡献：
 - 高重频⁹自由电子激光的应用前景看好。对于产生高重频电子束团脉冲，一般利用超导加速腔技术。当高重频自由电子激光操作在种子放大器模式时，同

⁹此处指的高重频大约在 MHz 量级。

样高重频的外部调制光场的产生也就形成挑战¹⁰。这篇论文针对上述三种改进模式的调制参数与 FEL 输出特性，讨论在考虑光场增益效应情况下，不同方案的能量调制效果与调制器长度等。

- 对传统高增益谐波产生 (high gain harmonic generation, HGHG) 方案，有以下本身限制条件

$$\begin{cases} nD\left(\frac{\Delta\gamma_m}{\gamma}\right) \approx n + 0.81n^{1/3} \\ nD\left(\frac{\sigma_\gamma}{\gamma}\right) < 1 \\ \left(\frac{\sigma_\gamma}{\gamma}\right) < \frac{1}{n}\left(\frac{\Delta\gamma_m}{\gamma}\right) < \rho_{\text{FEL}} \end{cases}$$

利用调制器的调制激光功率与调制器长度与能量调制振幅的关系，可以得到在 HGHG 模式下，调制激光功率与调制器长度的关系 $\frac{\Delta\gamma_m}{\gamma} = \frac{2L_1}{L_{g1}} \sqrt{\frac{\rho_1 P_L}{3P_e} \frac{\Sigma_e}{\Sigma_L}}$ ，如下图。一般调制器长度取两个增益长度，调制激光功率要求 $P_0 \sim 0.001\rho_{\text{FEL}}P_e$ 。

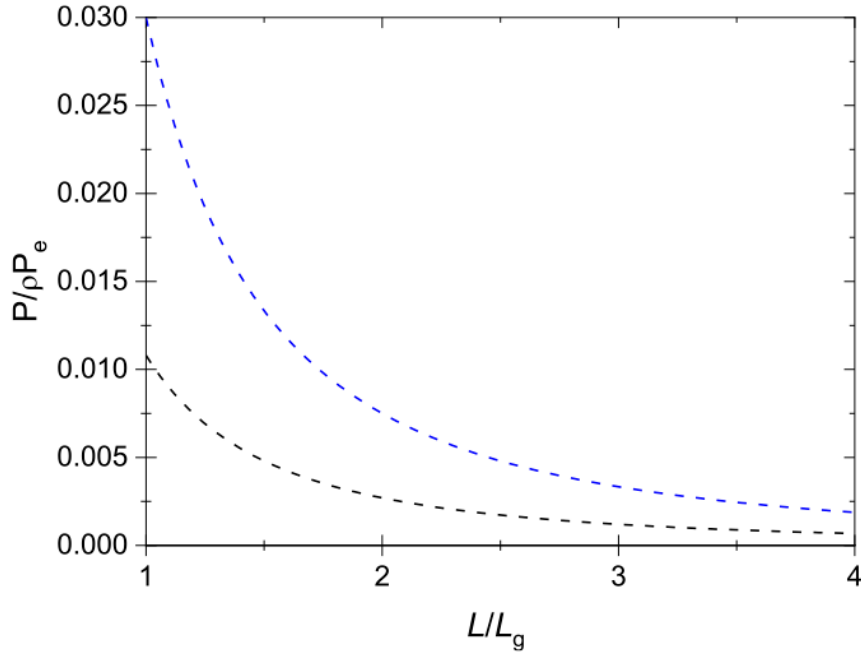


Fig. 1. The relation of the power of the seed laser and the length of the modulation undulator for $\rho_1 = 5 \times 10^{-3}$, $\rho_r = 1 \times 10^{-3}$, $\sigma_\gamma = 1 \times 10^{-4}$, $n = 6$. The values satisfying the requirements of the energy modulation (Eq. (4)) lie between the two dashed lines.

- 对于调制段伸长方案方案，由 $\frac{\Delta\gamma_m}{\gamma} = \frac{2L_1}{L_{g1}} \sqrt{\frac{\rho_1 P_L}{3P_e} \frac{\Sigma_e}{\Sigma_L}}$ 可知，要求一给定能量调制振幅，所需调制激光功率与波荡器长度平方反比。即，波荡器长度加长两倍，则调制激光功率可减小四倍。但是，当波荡器长度变长后，调制激光对电子束的作用不再是单向，即，调制激光与电子束开始交互作用。该论文利用

¹⁰依现有低频种子 FEL 参数按线性比例调整，则要求 MHz 重频与 ~ 100 MW/单发脉冲功率。这些数量级目前激光技术还无法达到。

“迭代、半解析”概念简化分析 (参考该论文附录)。调制激光与电子束的相互作用效应被吸收为“等效”波荡器长度¹¹, 有

$$\frac{\Delta\gamma_m}{\gamma} = \frac{2L_{eq}}{L_{g1}} \sqrt{\frac{\rho_1 P_L \Sigma_e}{3P_e \Sigma_L}}$$

其中, 当波荡器长度短于 5.2 倍 FEL 增益长度时, 有 Eq. (11); 长于 5.2 倍 FEL 增益长度时, 有 Eq. (13)。类似于 HGHG 情况, 能够给出调制激光功率与调制器长度的关系如下图。可以看到当调制器长度大于三个 FEL 增益长度时, 光场增益效应就应该列入考量。

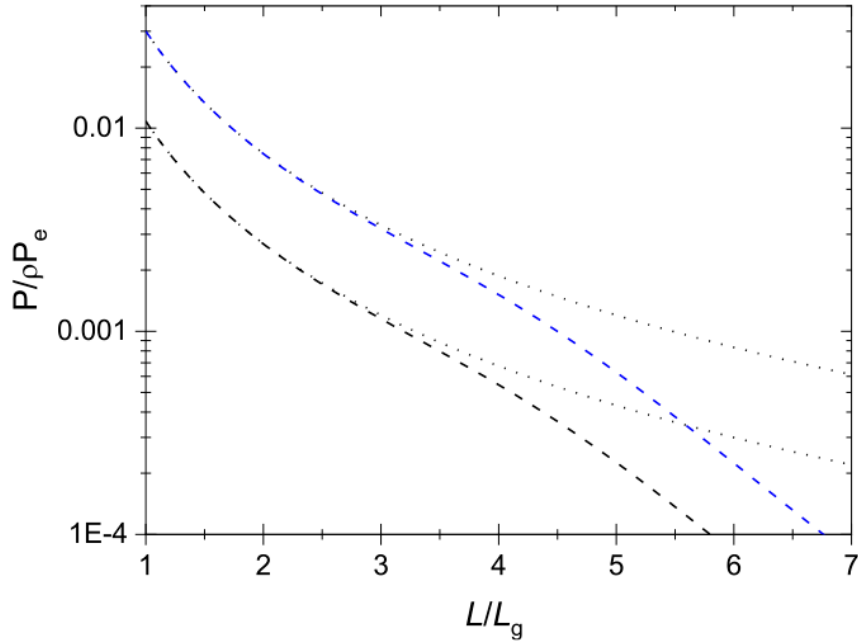


Fig. 3. The relation of the power of the seed laser and the length of the modulation undulator. The values of related parameters are the same as in Fig. 1. The dashed lines: the modulator lengthening scheme; The dotted lines: the lines in Fig. 1. The values satisfying the requirements of the energy modulation lie between the two dashed lines.

- 对于振荡-方案方案, 波荡器两侧安装反射镜, 形成谐振腔。反射镜本身与调制电子过程造成的激光能量损耗效应, 可以通过拉伸波荡器长度弥补。分析发现, 当谐振腔辐射功率返回比率 $R \approx 0.632$, 并且调制器长度大约为三个 FEL 增益长度时, 存在最优化情况。
- 对于自调制方案, 分析发现, 能量调制振幅与前端密度调制有关, 也与调制器本身长度有关。给出自调制效应产生的等效长度与调制器长度的关系如下图。

★ 在这篇论文分析中, 考虑了调制器与电子束交互作用产生对电子束的 (额外)

¹¹也可以将交互作用效应吸收到“等效”调制激光功率。

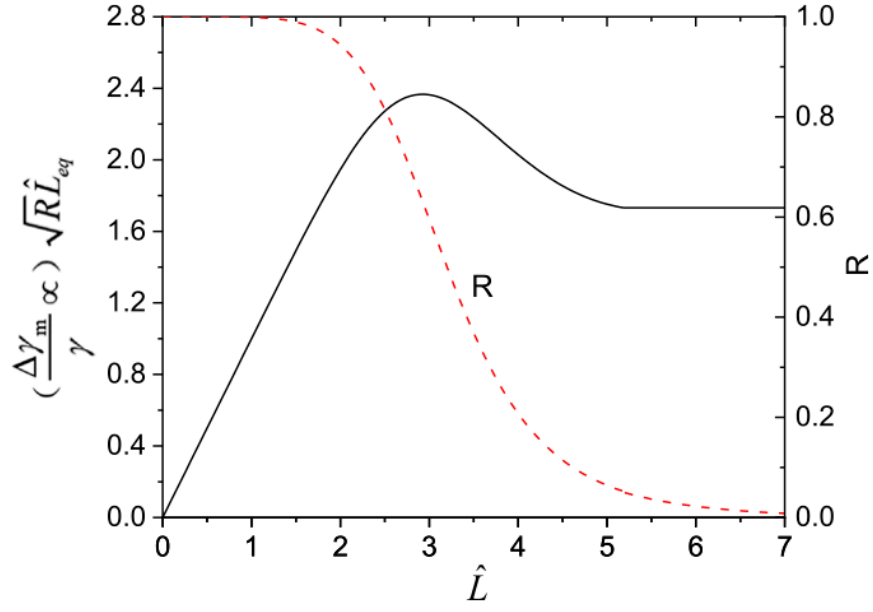


Fig. 4. The total return fraction of the radiation power in the resonator (Eq. (16), the dashed line) and the energy modulation (Eq. (17), the solid line) with the undulator length.

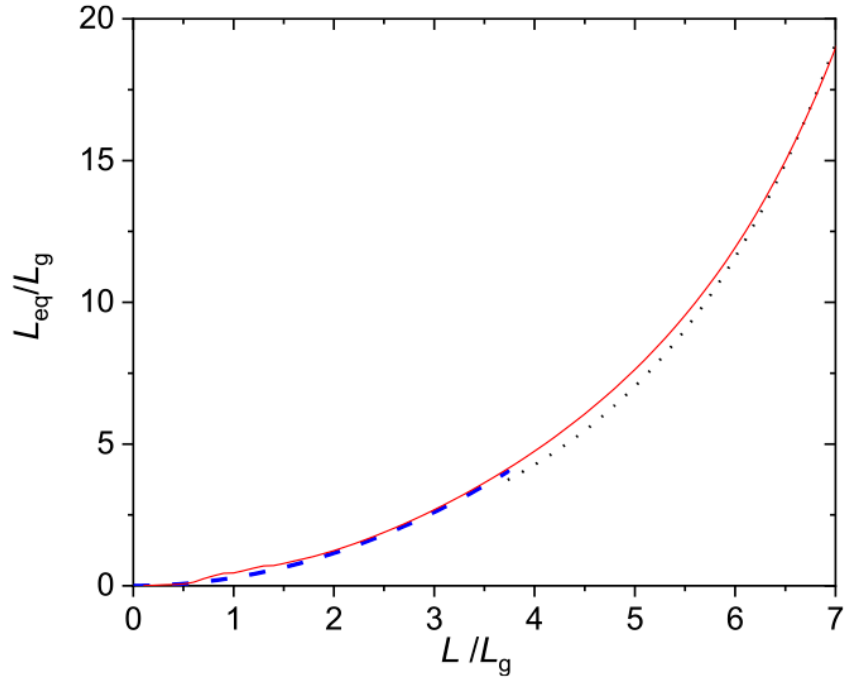


Fig. 5. The equivalent modulator length of the self-modulation scheme, the solid line: numerical calculated by Eqs. (9) and (A.5); the dashed line and dotted line: the result of Eq. (21).

能量调制，即，光场随波荡器轴坐标 z 增长的效应。但是，此处分析尚未考虑波荡器本身 R_{56} 效应。在最后一节总结提及。

6.4 其它

该论文分析类似于 G. Dattoli 风格。

7 电子储存环中的束团分布参数计算 [JAP 50]

Evaluation of beam distribution parameters in an electron storage ring

7.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：A.W. Chao (SLAC/Stanford)
- 类型：理论
- 链接：<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.326070>

7.2 摘要

这篇经典论文考虑在电子储存环中，线性束团运动¹²情况下，作者提出一种计算束团中心坐标 (beam distribution center) 与二阶矩 (beam sizes and shapes) 的一般性方法。这个一般性方法允许不同维度间的耦合，也允许电子储存环操作在纵向强聚焦模式。后来按照这篇论文给出的计算方式被称为 SLIM (Solution by **L**inear **M**atrices)。

7.3 贡献或创新点

- 创新点：相比于传统横向与纵向分开分析的模式，或是考虑横纵向耦合时仅允许特定形式或弱耦合，基于这篇论文的分析对六维相空间或三维实空间之间的耦合除了需满足线性关系外，没有其它限制¹³。
- 贡献：对于电子储存环，辐射阻尼与量子激发效应是最终束团达平衡态的关键效应。
 - 束团内某一粒子运动轨迹可以分解为 $X_0 + X$ ，其中， X_0 为束团中心轨迹， X 为偏离 X_0 的振荡轨迹。注意，一般加速器设计 (理想) 粒子的轨迹为 $X_0 = 0$ 。束团中心轨迹并不总是恰好为设计 (理想) 粒子的轨迹。有别于 (理想) 粒子轨迹，此处称 X_0 为束团闭轨 (closed orbit)。
 - 造成 $X_0 \neq 0$ 的原因可能有：

¹²即，电子感受到的外部电磁部件的电、磁场为线性情况下的动力学。

¹³按实际情况，辐射效应的影响被视为微扰项。

1. quadrupole misalignment
2. additional dipole magnets for correction or injection
3. energy loss compensated by synchrotron radiation

过去分析的方式为考虑个别轨迹畸变效应造成的影响。这篇论文提出的分析方式能够同时考虑这些效应的影响，并且允许不同维度间的耦合。

- 定义 $V(s) = [X_0(s) \ 1]^T$ ，在三个条件下， $V(s)$ 可以通过将逐个元件矩阵 M 依序相乘后的 $W(s)$ 矩阵的特征向量得到，即

$$V_f = MV_i \ \& \ \begin{cases} x_0, x'_0, y_0, y'_0(s + 2\pi R) = x_0, x'_0, y_0, y'_0(s) \\ \delta_0 = 0 \\ \Delta s = 2\pi R \end{cases} \Rightarrow W(s)V(s) = V(s)$$

- 以上 $V(s)$ 为 7×1 向量， M 或 W 为 7×7 矩阵。第七个维度存在目的为非线性元件或是同步辐射效应分析。
- 存在束团中心轨迹 $X_0(s)$ 后，束团内某一粒子运动轨迹随着中心轨迹振荡，以 $W(s)$ 的特征频率沿 $W(s)$ 的特征向量方向振荡。
- 考虑到同步辐射效应， M 矩阵不再严格满足辛条件 (symplecticity)。除长时间尺度动力学外，对于寻找闭轨数值计算应该不是大问题。
- 由于存在可能的耦合效应，求解特征向量或是对角化之后，向量方向的意义变得模糊，不再是 $k = x, y, z$ ，而写成 $k = I, II, III$ 。
- 平衡态的束团中心与二阶矩求解思路如下：先不考虑同步辐射放出光子过程，one-turn map T 有

$$T(s_0)E_k(s_0) = \lambda_k E_k(s_0)$$

现在考虑在 s_0 出发光子，当下对相空间坐标的改变量为

$$\Delta X(s_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{u}{E_0} \end{bmatrix}$$

则，在 $s > s_0$ 之后，这个改变量的演化根据下式得到

$$\Delta X(s) = \sum_{k=\pm I, \pm II, \pm III} A_k E_k(s)$$

关键在 A_k 的计算，由初始条件 $\Delta X(s_0)$ 可以容易得到。注意到，这里的 $E_k(s)$ 按熟悉的 6×6 传输矩阵演化。

– A_k 的解有

$$A_k = \begin{cases} i \frac{u}{E_0} E_{k5}^*(s_0), k = I, II, III \\ -i \frac{u}{E_0} E_{k5}^*(s_0), k = -I, -II, -III \end{cases}$$

– 为得到平衡态的发射度与二阶矩，分析同步辐射的量子激发效应，有

$$\frac{d}{dt} \langle |A_k|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi R} \oint \left\langle \dot{N} \frac{u^2}{E_0^2} \right\rangle |E_{k5}(s)|^2 ds$$

其中， $\left\langle \dot{N} \frac{u^2}{E_0^2} \right\rangle = \frac{2C_L \gamma^5}{|\rho(s)|^3}$ 与 $C_L = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{r_0 \hbar}{m}$ 。考虑辐射阻尼效应，有

$$\frac{d}{dt} \langle |A_k|^2 \rangle = -\frac{2\alpha_k}{T_0} \langle |A_k|^2 \rangle$$

由此，可以得到平衡态的特性发射度

$$\epsilon_k = \langle |A_k|^2 \rangle = \langle |A_{-k}|^2 \rangle = \frac{C_L \gamma^5}{c\alpha_k} \oint \frac{|E_{k5}(s)|^2}{|\rho(s)|^3} ds$$

与六维束团分布的二阶矩

$$\langle X_i X_j \rangle(s) = 2 \sum_{k=I,II,III} \langle |A_k|^2 \rangle \text{Re} [E_{ki}(s) E_{kj}^*(s)]$$

7.4 其它

关于 SLIM 较详细的介绍可以参考 [1] 的 §6.5。

基于 SLIM 描述具有一般性，还可以推广到包含束团自旋极化动力学，参考 [2]。

参考文献

- [1] A.W. Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020)
- [2] A.W. Chao, Evaluation of radiative spin polarization in an electron storage ring, NIMA **29**, 180 (1981). <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0029554X81900069?via%3Dihub>

8 氮化钛光阴极的量子效率、本征发射度和响应时间测量 [PRAB 24-09]

Quantum efficiency, intrinsic emittance, and response time measurements of a titanium nitride photocathode

8.1 基本信息

- 分类: 粒子-束流源
- 作者: Chenjie An, Rui Zhu, Jun Xu, Yaqi Liu, and Dapeng Yu (主要机构: 北京大学)
- 类型: 实验
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.093401>

8.2 摘要

光阴极的光电发射特性影响电子加速器的最终性能和成本。这篇论文研究了紫外波段飞秒激光脉冲辐照氮化钛 (titanium nitride, TiN) 的量子效率和本征发射度, 并间接估算了响应时间。对于高于功函数的光子能量, 量子效率值为 $7 \times 10^{-8} \sim 5 \times 10^{-6}$ 。对于 266 nm (4.66 eV) 的典型波长, 测量的本征发射度为 $0.54 \mu\text{m}/\text{mm}$ 。当光子能量低于功函数时出现了双光子光电发射 (two-photon photoemission), 且本征发射度随激光强度的增大而增长。光子能量从略低于到高于功函数的过程对应的本征发射度范围为 $0.28 \sim 0.60 \mu\text{m}/\text{mm}$, 如果仅考虑单光子光电发射, 本征发射度的最小值趋向 $0.28 \mu\text{m}/\text{mm}$ 。当辐照光子能量高于功函数时, 通过比较电子束在空间电荷力作用下的横向膨胀, 证明了 TiN 光阴极的响应时间接近金的响应时间。通过对 TiN 和金的光电发射进行自相关测量并比较结果, 作者证明了由略低于功函数的光子能量激发 TiN 产生的双光子光电发射是立刻发生的 (prompt)。

8.3 贡献或创新点

- 创新点: 通过简单的直流电子枪配合漂移段实现了 TiN 光阴极本征发射度、量子效率的测量和响应时间的间接估计。其中为了确保本征发射度测量不受空间电荷效应影响, 采用每脉冲小于 1 个电子的模式进行了测量。而在光阴极响应时间的测量中则采用每脉冲高达 10^4 个电子的模式, 通过空间电荷效应间接估算的 TiN

阴极和金阴极的电子束的纵向束长分布，以此估计 TiN 阴极的响应时间与金阴极接近，且在单光子和双光子两种光电发射均为立即发生的 (prompt)。

- 贡献：由实验测量到的 TiN 阴极较为精确的量子效率 (下图 1) 并通过理论模型估计了 TiN 阴极的功函数。

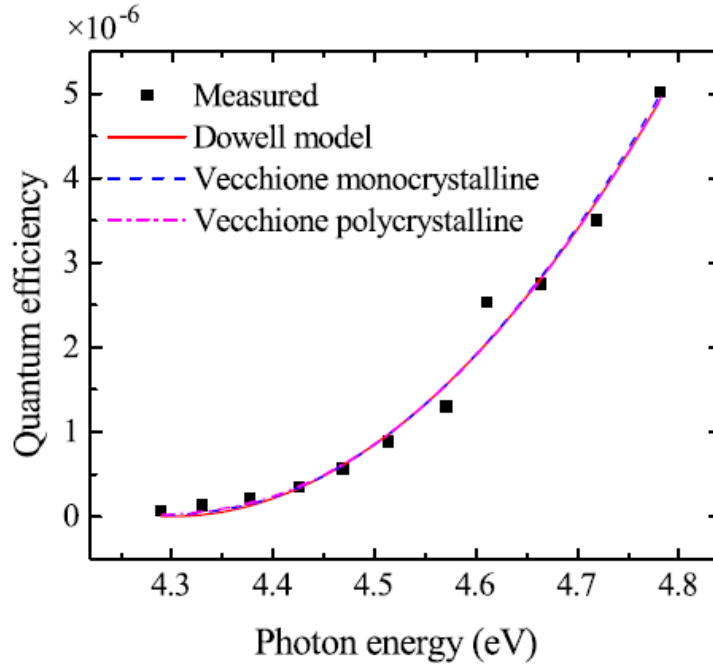


图 1: TiN 阴极的量子效率和光子能量的对应关系。用 Dowell 模型和 Vecchione 单晶模型拟合得到的功函数分别为 4.30 和 4.31 eV。根据 Vecchione 多晶模型，功函数为 4.26-4.36 eV。

测量了单光子发射和双光子发射两种情况下的本征发射度 (下图 2)，同样也使用本征发射度数据估算了 TiN 阴极的功函数，两种方法得到的功函数有差异。最终结论是 TiN 阴极的本征发射度、响应时间与金属接近，量子效率略低。

8.4 其它

关于 Dowell 模型的理论，可以参考 [1]；关于 Vecchione 单晶模型的理论，可以参考 [2]。

参考文献

- [1] D. H. Dowell and J. F. Schmerge, Quantum efficiency and thermal emittance of metal photocathodes, Phys. Rev. ST Accel. Beams 12, 074201 (2009). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.12.074201>

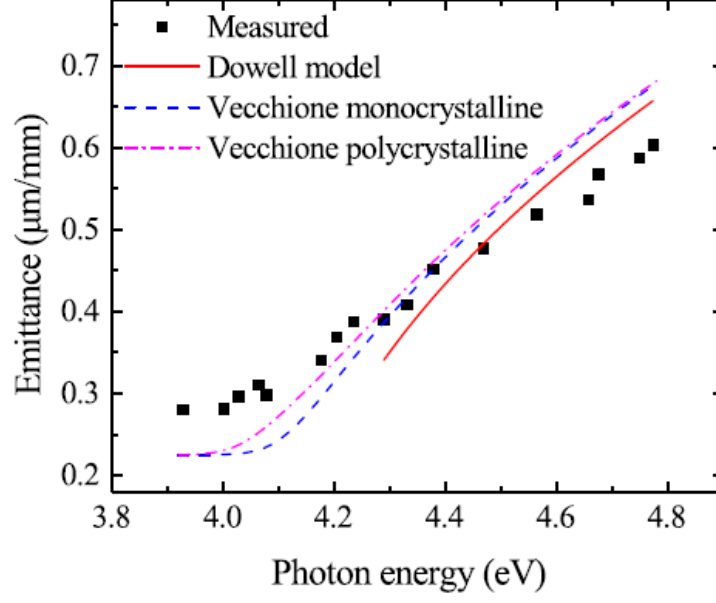


图 2: 测量了 TiN 在不同光子能量下的横向发射度。用 Dowell 模型和 Vecchione 单晶模型拟合得到的功函数分别为 4.11 和 4.08 eV；根据 Vecchione 多晶模型拟合，功函数在 4.00–4.16 eV 范围内。

- [2] T. Vecchione, D. Dowell, W. Wan, J. Feng, and H. A. Padmore, Quantum efficiency and transverse momentum from metals, in Proceedings of FEL2013, New York, NY, 2013 (JACoW, Geneva, Switzerland, 2013), p. 424. <https://accelconf.web.cern.ch/FEL2013/papers/tupso83.pdf>

9 高增益自由电子激光的高次谐波群聚效应 [NIMA 293]

Large harmonic bunching in a high-gain free-electron laser

9.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：R. BonifacioL, De Salvo, and P. Pierini (主要机构：INFN，意大利)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0168900290903343>

9.2 摘要

这篇论文是早期分析高增益自由电子激光谐波产生的经典论文之一。通过恰当地考虑高增益自由电子激光过程谐波场分量之间的耦合，发现基波能够通过电子束来激发高次谐波（特别是三次谐波），并且三次谐波的增长率为基波增长率的三倍。这个结果导致三次谐波对应的电子束群聚因子 (bunching factor) 在饱和时能够达到与基波对应的群聚因子在同一个数量级。这篇论文对后来发展的高增益谐波自由电子激光有深远影响。

9.3 贡献或创新点

- 创新点：为了解释当时高增益自由电子激光实验结果中，关于谐波产生的物理机制，当时其它提出的物理模型的预测还不能很好地与实验结果吻合。特别是，当时其它模型所考虑的谐波场方程彼此之间没有耦合，预测的谐波增长率比实验结果小了些。为了更好地解释实验结果，这篇论文提出谐波场分量之间耦合的必要性。
- 贡献：单粒子与场形成 $2N + 1$ 个运动方程

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_j}{d\bar{z}} &= p_j \\ \frac{dp_j}{d\bar{z}} &= -\sum_h F_h(\xi) (A_h e^{ih\theta_j} + A_h^* e^{-ih\theta_j}) \\ \frac{dA_h}{d\bar{z}} &= F_h(\xi) \langle e^{ih\theta} \rangle\end{aligned}$$

其中， $F_h(x) = (-1)^{\frac{h-1}{2}} \left[J_{\frac{h-1}{2}}(hx) - J_{\frac{h+1}{2}}(hx) \right]$ 。

通过引入“集体变量” $b_h = \langle e^{-ih\theta} \rangle$, $P_h = \langle p e^{-ih\theta} \rangle$ [1], 并假设 $|A_3| \ll |A_1|$, $\langle e^{-ik\theta} \rangle \ll 1$, 对于 $k \geq 3$, $\langle p^2 e^{-ih\theta} \rangle \ll 1$, 可以大大简化此动力学系统, 有

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{d\bar{z}} &= F_1 b_1 \\ \frac{dA_3}{d\bar{z}} &= F_3 b_3 \\ \frac{d^3 b_1}{d\bar{z}^3} &= i F_1^2 b_1 \\ \frac{d^3 b_2}{d\bar{z}^3} &= 2i F_1 A_1 b_1 \\ \frac{d^3 b_3}{d\bar{z}^3} &= 3i F_3^2 b_3 + 3i F_1 \frac{d(A_1 b_2)}{d\bar{z}}\end{aligned}$$

上式最后一个方程体现谐波产生的物理机制。在这篇论文之前的分析仅考虑等式右边第一项的贡献, 但是当 $\bar{z} \gg 1$ 时, 第二项的影响开始显著。

9.4 其它

论文中有关于以上基于集体变量渐进行为的物理解释, 值得琢磨。

参考文献

- [1] R. Bonifacio, C. Pellegrini, and L.M. Narducci, Collective instabilities and high-gain regime in a free electron laser, Optics Communications 50, (1984), 373. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0030401884901056>

10 自由电子激光动力学与谐波电子群聚的统一理论 [JAP 10]

Unified view of free-electron laser dynamics and of higher-harmonics electron bunching

10.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：G. Dattoli, L. Giannessi, and A. Torre (主要机构：Ente per le Nuove Tecnologie, 'Energiae l'Ambient ENEA, 意大利)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.osapublishing.org/josab/fulltext.cfm?uri=josab-10-11-2136&id=6981>

10.2 摘要

这篇论文讨论自由电子激光 (free electron laser, FEL) 动力学，通过求解 Liouville 方程，更多关注电子束群聚现象的物理机制，包含电子束与 FEL 及谐波产生的相互影响。还讨论了关于包含束团能散的理论分析。

10.3 贡献或创新点

- 贡献：这篇论文主要关注电子在相空间分布的演化行为，阐明电子束特性在 FEL 演化、谐波产生与饱和时的相互影响。
- 创新点：不同于多数自由电子激光分析着重于辐射场，这篇论文更多关注在电子动力学及其与谐波产生的相互作用。几个创新点如下：

– 先从单摆方程出发，写出哈密顿量，于是可以列写 Liouville 方程，有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nu \frac{\partial \rho}{\partial \psi} - \Omega_R^2 \sin \psi \frac{\partial \rho}{\partial \nu}$$

其中，定义相空间坐标为 (ν, ψ) 。将相空间分布按沿 ψ 的平面波与沿 ν 的群聚因子展开¹⁴， $\rho = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{in\psi} b_n(\nu, \tau)$ ，方程可以写为以下的微分-差分方程

$$i \frac{\partial b_n}{\partial \tau} = n \nu b_n - \frac{\Omega_R^2}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} (b_{n-1} - b_{n+1})$$

¹⁴注意，这里的群聚因子仍有 ν 依存关系。

- 再将群聚因子以纵向同步运动尺度展开，即 $b_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m b_n^{(m)}$, $\varepsilon = \Omega_R^2$ ，则上面方程可以进一步化简成

$$b_n^{(n)}(\nu, \tau) = \frac{i}{2} e^{-in\nu\tau} \int_0^\tau \left[\frac{\partial b_{n-1}^{(n-1)}(\nu, \tau')}{\partial \nu} \right] e^{in\nu\tau'} d\tau'$$

并有 $b_{-n}^{(n)} = [b_n^{(n)}]^*$ 特性。

- 写成以上类似于递回关系式之后，可以构建对应的矩阵，就能够清楚看出不同谐波分量间的耦合关系。参考论文的 Eq. (29)。
- 这篇论文在 Section 4 还提出另一种求解任意阶谐波群聚因子的方法，利用 Feynman-Dyson 展开，有

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\nu, \tau) |n\rangle$$

则相位变量 ψ 将遵循薛定谔方程，参考 Eq. (34)。利用量子力学里的标准方法可以计算任意阶群聚因子。如，第五阶群聚因子的近似表示可以写为

$$b_5 \approx i \frac{\Omega_R^{10} \tau^5}{5! 2^5} e^{-5i\nu\tau} \frac{\partial^5 f(\nu)}{\partial \nu^5}$$

- 以上分析假设低增益自由电子激光过程，对于高增益，可以修改递回方程如下

$$i \frac{\partial b_n}{\partial \tau} = n\nu b_n - \frac{1}{2} \left(a \frac{\partial}{\partial \nu} b_{n-1} - a^* \frac{\partial}{\partial \nu} b_{n+1} \right)$$

其中，基波场方程有

$$\dot{a} = -ij \int_{-\infty}^{\infty} b_1(\nu, \tau) d\nu$$

当再考虑有限长度脉冲情况时 (或滑移效应的动力学过程)，以上方程可以进一步推广为

$$i \frac{\partial b_n}{\partial \tau} = n\nu b_n - \frac{1}{2} \left(a(z - \Delta\tau; \tau) \frac{\partial}{\partial \nu} b_{n-1}(z, \tau) - a^*(z - \Delta\tau; \tau) \frac{\partial}{\partial \nu} b_{n+1}(z, \tau) \right)$$

其中，辐射场

$$\dot{a}(z - \Delta\tau; \tau) = -ij_z \int_{-\infty}^{\infty} b_1(z, \nu, \tau) d\nu$$

11 考虑库伦扩散效应的回声增强谐波产生机制的电子束群聚因子计算 [PRST-AB 16-07]

Bunching coefficients in echo-enabled harmonic generation

11.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：G. Dattoli and E. Sabia (主要机构：ENEA)
- 类型：理论
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.16.070702>

11.2 摘要

库伦扩散 (Coulombian diffusion) 效应¹⁵决定种子自由电子激光 (seeded free electron laser) 的电子束群聚因子系数。从数学观点看，这个效应可以通过热扩散方程分析，进而合并到 Liouville 方程。如此一来，从 Liouville 方程我们能够研究电子束在相空间的动力学。这篇论文指出，利用推广贝索函数与求解 Liouville 演化方程的技巧，可以提供对回声增强谐波产生 (echo-enabled harmonic generation, EEHG) 的背后机制的进一步理解。

11.3 贡献或创新点

- 创新点：一般在加速器束流动力学的单粒子分析，特别是线性传输情况，利用线性矩阵描述个别粒子相空间状态是普遍常见的。当加上非相干效应时，如库伦扩散，分析就变得复杂。这篇论文保持一贯使用的“运算符”概念¹⁶，将非相干效应加上之后，仍维持“运算符”在之前概念里的精神。
- 贡献：可总结为以下四点
 - 利用 Liouville 方程给出更具一般性的描述 EEHG FEL 过程。假设相空间分布函数为 $f(p, \zeta; s)$ ，有

$$\frac{\partial f}{\partial s} + Bp \frac{\partial f}{\partial \zeta} - AV' \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} - \hat{L}f = 0$$

¹⁵ 又称束内散射 (intrabeam scattering, IBS) 效应。

¹⁶ 这里的运算符即量子力学中的运算符，作用在束团分布上。束团分布相当于量子力学中的状态函数。

这里引入“运算符” \hat{L} 。对应的哈密顿量有 $H = B\frac{p^2}{2} + AV(\zeta)$ 。注意，以下分析假定 A, B 为常数。上式 Liouville 方程的通解可以写成

$$f(p, \zeta; s) = \hat{U}(s)f_0(p, \zeta)$$

其中, $\hat{U}(s) = e^{\hat{L}s}$ 。将算子 $\hat{U}(s)$ 展开, 有

$$e^{\hat{L}s} = e^{-[Bp\frac{\partial}{\partial\zeta} - AV'\frac{\partial}{\partial p}]s} \approx e^{-Bsp\frac{\partial}{\partial\zeta}} e^{AsV'(\zeta)\frac{\partial}{\partial p}} + O\left(\frac{AB}{2}s^2\left[p\frac{\partial}{\partial\zeta}, V'\frac{\partial}{\partial p}\right]\right)$$

再次注意到, 这里的展开形式仅在 A, B 为常数时成立。因此, 相空间分布函数的演化可以写为

$$\begin{aligned} f(p, \zeta; s) &= \hat{U}(s)f_0(p, \zeta) \\ &= e^{-[Bp\frac{\partial}{\partial\zeta} - AV'\frac{\partial}{\partial p}]s} f_0(p, \zeta) \\ &\approx e^{-Bsp\frac{\partial}{\partial\zeta}} e^{AsV'(\zeta)\frac{\partial}{\partial p}} f_0(p, \zeta) \\ &= e^{-Bsp\frac{\partial}{\partial\zeta}} f_0(p + AsV'(\zeta), \zeta) \\ &= f_0(p + AsV'(\zeta), \zeta - Bsp) \\ &= f_0[p - A_1 \sin(\zeta - B_1p), \zeta - B_1p] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[p - A_1 \sin(\zeta - B_1p)]^2} \end{aligned}$$

与既有结果一致。

- 论文第二部分讨论当加入库伦扩散效应时的情况。首先, Liouville 方程修正为

$$\frac{\partial f}{\partial s} - \hat{L}f = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} - \hat{L}f - D\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0$$

其中, D 为扩散系数。相空间随 s 演化的结果可以写为 $f(p, \zeta; s) \approx e^{Ds\frac{\partial^2}{\partial p^2}} e^{\hat{L}s} f_0(p, \zeta)$ 。

- 在论文第一部分介绍既有结果时, 虽能重复既有结果, 但是当时做了一个假设 $A_1 \leq 1$, 调制激光幅度需小于束团本身能散, 即忽略以下 A_1^2 项

$$e^{-\frac{1}{2}[p - A_1 \sin(\zeta - B_1p)]^2} = e^{-\frac{1}{2}[p^2 - 2A_1p \sin(\zeta - B_1p) + A_1^2 \sin^2(\zeta - B_1p)]}$$

这在 EEHG 一般不成立。因此, 模型需要进一步推广。

- 这篇论文后半部分定义一称为广义贝索函数作为接续分析

$$\begin{aligned} e^{ix \sin \theta - y \sin^2 \theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} {}_H J_n(x, y) \\ {}_H J_n(x, y) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^{n+2r}} \frac{H_{n+2r}(x, y)}{r!(n+r)!} \\ H_n(x, y) &= n! \sum_{r=0}^{n/2} \frac{x^{n-2r} y^r}{r!(n-2r)!} \end{aligned}$$

与一个有用的恒等式

$${}_H J_n(x, y) = e^{y\frac{\partial^2}{\partial x^2}} J_n(x)$$

11.4 其它

注意到，这里的分析假设电子经过波荡器时，调制激光振幅为常数的情况，即 A, B 为常数。当波荡器长度较长而发生明显的电子束与光场能量交换时，这里的运算子分析将需要适当推广，如 symmetric split operator technique，可以参考 [1]。

参考文献

- [1] G. Dattoli, L. Giannessi, P. L. Ottaviani, and A. Torre, Split-operator technique and solution of Liouville propagation equations, Phys. Rev. E **51**, 821 (1995). <https://journals.aps.org/pre/pdf/10.1103/PhysRevE.51.821>

12 自由电子激光动力学、群聚因子演化与相干谐波产生 [JAP 78]

Free electron laser dynamics, evolution of the bunching coefficients, and coherent harmonic generation

12.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：G. Dattoli, L. Giannessi, P. L. Ottaviani, and A. Segreto (主要机构：ENEA)
- 类型：理论、模拟
- 链接：<https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.359699>

12.2 摘要

自由电子激光的物理过程涉及电子束团“群聚”(bunching) 与“辐射”(emission) 光场的相互作用，前者由群聚系数量化，表征电子束在相空间基频与高次谐波的占比或分量。这篇论文主要从数值上求解电子相空间分布的 Liouville 方程，获得电子束群聚的演化过程。这篇论文同时讨论谐波产生与演化。

12.3 贡献或创新点

- 创新点：数值上，这篇论文求解 Liouville 方程的方法称为 symmetric split operator technique。此技巧已经成功应用在求解量子力学中的薛定谔方程，后来由这篇论文作者应用到自由电子激光，计算效率高，属于半解析方法。

对于低增益自由电子激光放大器形态，Liouville 方程有如下形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left\{ \nu \frac{\partial}{\partial \zeta} - \Omega_R^2 \sin \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} \right\} \rho = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \left\{ \hat{A} + \hat{B} \right\} \rho = 0$$

其通解可以写成

$$\rho(\nu, \zeta; \tau) = e^{\{\hat{A} + \hat{B}\}\tau} \rho(\nu, \zeta; 0)$$

注意到，“运算符” \hat{A} 与 \hat{B} 不能互换 (commute)，因此通解无法写成封闭形式。

- 贡献：这篇论文利用一个称为 symmetric split operator technique，要求随时间推进的步伐 $\delta\tau$ 足够小，并采如下形式递进 (iterate)

$$\rho(\nu, \zeta; \delta\tau) = e^{\frac{\delta\tau}{2} \hat{A} + \hat{B} + \frac{\delta\tau}{2} \hat{A}} \rho(\nu, \zeta; 0)$$

则，上面的通解仍可得到满意结果。如果演化时间较长，上式未必准确，更准确的表示式可以通过求解微分差分方程 (differential finite difference equations)，可参考该论文 Appendix A。

注意到，这里的分析假设低增益过程。论文的 Section II 考虑低增益放大器形态；Section III 则考虑低增益振荡器形态。

这篇论文 Section IV 将前面低增益理论模型推广到高增益情况，此时 Liouville 方程中的光场同时随 τ 演化，将有以下方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left\{ \nu \frac{\partial}{\partial \zeta} - [ae^{i\zeta} + a^*e^{-i\zeta}] \frac{\partial}{\partial \nu} \right\} \rho = 0 \\ \frac{da}{d\tau} = i2\pi j_1 \int_{-\infty}^{\infty} b_1(\nu, \tau) d\nu \end{cases}$$

进一步关于高增益情况的讨论将不再这篇论文涵盖范围。

13 存在分段波荡器的高增益自由电子激光理论 [JAP 99]

Theory of high gain free-electron lasers operating with segmented undulators

13.1 基本信息

- 分类：自由电子激光
- 作者：G. Dattoli, L. Mezi, P. L. Ottaviani, and S. Pagnutti (主要机构：ENEA)
- 类型：理论
- 链接：<https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.2171810>

13.2 摘要

这篇论文讨论存在分段波荡器¹⁷时的高增益自由电子激光 (free electron laser, FEL) 的自放大自发辐射 (self-amplified spontaneous emission, SASE) 物理过程。这篇论文利用半解析方法，能够重复由分段波荡器组成的系统，其能散增加、群聚因子、辐射场随波荡器演化的经典结果。这个分析技巧能够应用在由平面型 (linear, planar) 或螺旋型 (helical) 波荡器组成的 FEL 部件设计。另外，这篇论文还讨论了“双谐波 (biharmonic)”波荡器组成的可能情况。

13.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文作者 G. Dattoli 一贯的鲜明风格为半解析法分析。论文创新点在于讨论对分析分段波荡器中 FEL 动力学的分析，特别是当第二段波荡器基波共振频率调到二次谐波的情况。
- 贡献：这篇论文先从定性分析高增益 FEL 过程的动力学，包含辐射功率、群聚因子与束团能散沿波荡器演化形态，发现约从距离饱和长度的 20% 开始，辐射功率以指数方式增加。此时，基波群聚因子与辐射场以一样的增长率增加。稍晚些，高次谐波群聚因子也开始指数增加，先是二次、再来三次、四次、五次依次出现，越高次谐波越晚出现，但是增长率越大。束团非相干能散的增长则相对缓慢。如下图。

¹⁷这里分段波荡器的研究不是讨论每段波荡器间安装相位滑移器 (phase shifter) 的过程，而是讨论两段波荡器内的 FEL 动力学如何关联与波荡器分段的影响。

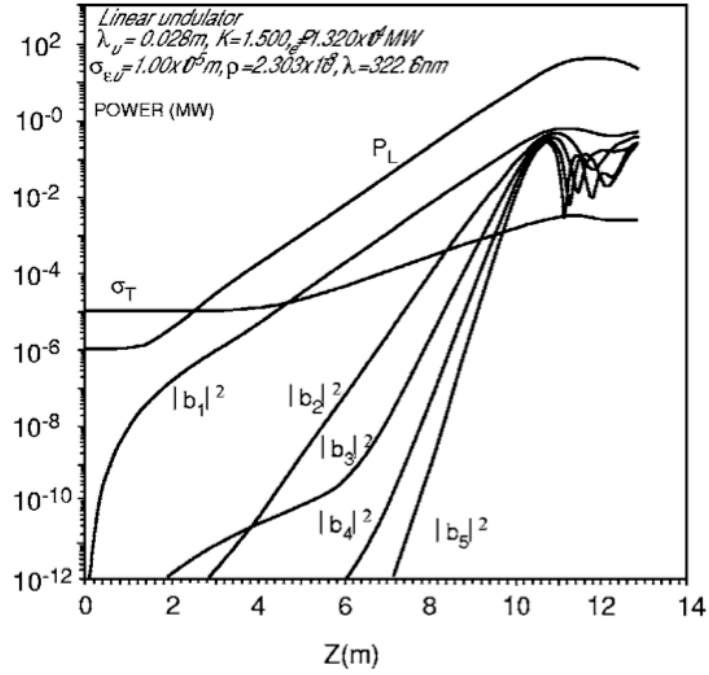


FIG. 1. Power of the fundamental harmonic P_L (units in megawatts) vs z , total relative energy spread σ_T vs z , and square modulus of the first five bunching coefficients $|b_i|^2$ ($i=1, \dots, 5$) vs z . Simulation parameters: $\lambda_u = 2.8$ cm, $K=1.5$, $\sigma_0=10^{-5}$, $\rho \approx 2.303 \times 10^{-3}$, and operating wavelength $\lambda \approx 322.16$ nm.

这篇论文分析分段波荡器中 FEL 动力学的分析，特别是当第二段波荡器基波共振频率调到二次谐波的情况。由于第一段波荡器仅产生奇次谐波辐射场，因此，第二段波荡器仅有已部分调制的电子束团，没有种子激光。在第二段波荡器中，由于束团已经存在微群聚，因此饱和长度将变短。

这篇论文目标为得到：

- 在断点的束团能散 \Rightarrow Eqs. (3,4);
- 在断点的群聚因子 (前五次谐波) \Rightarrow Eq. (7);
- 断点后第二段波荡器内的谐波辐射场增长公式 \Rightarrow Section III。

这篇论文 Section III 重点分析第三个目标。注意到，在第一段波荡器的 n 次谐波将变成第二段波荡器的基波，如果第二段波荡器适当调整满足在 n 次谐波共振。这一节推导得到的结果与数值模拟结果一致，参考下图。

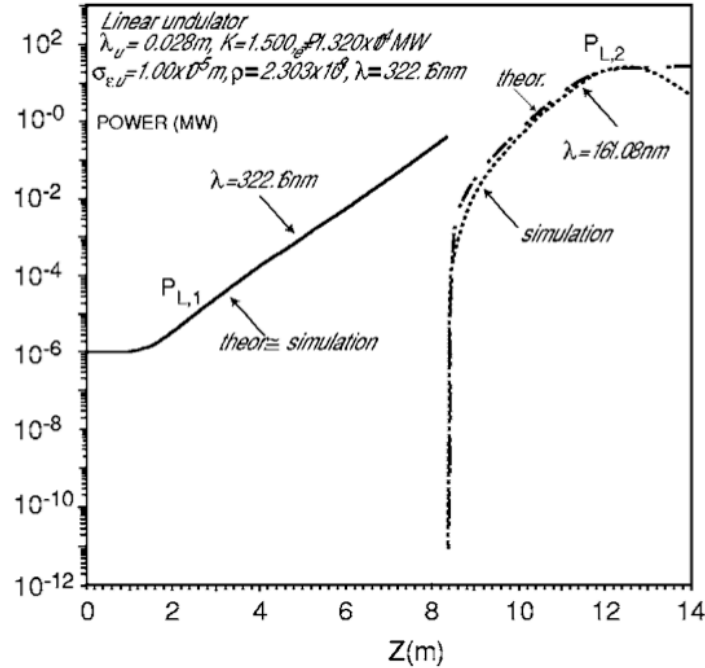


FIG. 3. Comparison between numerical and semianalytical results for the case of Fig. 2(a).

论文最后部分介绍“双谐波 (biharmonic)”波荡器，即一段波荡器内存在横向两个方向、不同周期的周期磁场，又称 biorthogonal undulator。细节参考 Section IV。

13.4 其它

这篇论文并没有给出 Eq. (5) 的推导细节。

14 非相对论束团的电阻壁尾场与阻抗理论 [PRST-AB 7-04]

Resistive-wall wake and impedance for nonultrarelativistic beams

14.1 基本信息

- 分类：尾场、阻抗计算
- 作者：Frank Zimmermann (CERN) and Katsunobu Oide (KEK)
- 类型：理论
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.7.044201>

14.2 摘要

过去关于电阻壁尾场与阻抗的计算基于极端相对论 (ultrarelativistic) 束团，粒子以光速运动。这种假设简化了尾场与阻抗的计算，因为粒子附近产生的电场与磁场能够完美抵消。然而，对小于 10 GeV 的质子束或是重离子束，粒子速度可能远小于光速。这篇论文计算当束团处于非相对论速度时的电阻壁纵向与横向尾场与阻抗，并讨论在何种情况下，这种非相对论效应变得显著。

14.3 贡献或创新点

- 创新点：尽管带电粒子经过电阻壁产生电磁场是电动力学的经典问题，对电阻壁尾场与阻抗的讨论从过去极端相对论框架推广到非相对论情况，这是一步大迈进。因为过去很长一段时间，关于电阻壁尾场与阻抗的计算都是基于极端相对论提出的。

这篇论文先求解阻抗，然后按定义再求解尾场。一个创新点为当求解横向电阻壁阻抗时，先求解纵向 (非最低阶) dipole mode 阻抗，然后利用 Panofsky-Wenzel 定理得到横向 (最低阶) 阻抗。

- 贡献：这篇论文动机源于目前许多质子或重离子加速器操作在 1 GeV 左右能量范围¹⁸，其粒子束不再是极端相对论性的，甚至为非相对论性粒子。这篇论文的贡献大致可以总结如下

¹⁸如：SNS, J-PARC, PS, PS booster of LHC accelerator complex.

1. 给出非相对论情况下电阻壁阻抗的修正的显形式；
2. 给出非相对论情况下电阻壁尾场的格林函数形式；
3. 理论推导从 Maxwell 方程开始，考虑圆截面情况的 beam pipe；
4. 利用一种新方法计算横向电阻壁尾场；
5. 讨论电阻壁尾场、阻抗的适用范围¹⁹。

这篇论文一开始先将传统定义在极端相对论情况下的尾场推广到非相对论情况，有

$$\begin{aligned} W'_0(z, r, \gamma) &\rightarrow W'_0(z) \\ W_{1,\parallel}(z, r, \gamma) &\rightarrow W'_1(z) \\ W_{1,\perp}(z, r, \gamma) &\rightarrow W_1(z) \end{aligned}$$

这篇论文分析采国际单位制 (SI)。在 beam pipe 中心真空中，有 $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1, \sigma = 0$ ；在 beam pipe 电阻壁材料的相对系数 $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1, \sigma < \infty$ 。

求解这个问题的流程为，先分别写出在真空中与电阻壁中的场形式，它们的系数由 Maxwell 方程规范²⁰的边界条件 (wall boundary) 与束团本身的边界条件 (source boundary) 关联。求解过程利用 beam pipe 的几何对称性可以有效化简问题。

在 beam pipe wall 内，势方程的解仅保留贝索函数 K_0 ，不考虑另一个 I_0 解，基于考虑 pipe wall 的厚度 \gg 趋肤深度 (skin depth)。这里，势方程为 0 阶贝索方程 [Eqs. (33,34)]，场方程则为 0 阶与 1 阶贝索方程 [Eqs. (41,42)]。一般情况下的电阻壁阻抗解为

$$Z_{\parallel}(\omega) = i \frac{Z_0 c k_r^2}{2\pi\omega} \left[K_0(k_r r) + I_0(k_r r) \frac{\omega^2 \lambda K_1(bk_r) K_0(b\lambda) + k_r c^2 (\lambda^2 - k^2) K_0(bk_r) K_1(b\lambda)}{\omega^2 \lambda I_1(bk_r) K_0(b\lambda) - k_r c^2 (\lambda^2 - k^2) I_0(bk_r) K_1(b\lambda)} \right]$$

在 $|\lambda b| \gg 1, k_r \delta_{\text{skin}} \ll 1$ 近似下，有

$$Z_{\parallel}(\omega) = i \frac{Z_0 c k_r^2}{2\pi\omega} \left[K_0(k_r r) - I_0(k_r r) \frac{[1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] c^2 K_0(bk_r) + \delta_{\text{skin}} \omega^2 K_1(bk_r)}{[1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] c^2 I_0(bk_r) - \delta_{\text{skin}} \omega^2 I_1(bk_r)} \right]$$

将以上结果泰勒展开，可以得到

$$Z_{\parallel}(\omega) \approx \frac{Z_0}{2\pi c} \left[\frac{[\operatorname{sgn}(\omega) - i] \omega \delta_{\text{skin}}}{2b} \left(1 - \frac{k_r^2 (2b^2 - r^2)}{4} \right) - i \frac{c^2 k_r^2}{\omega} \ln \frac{r}{b} \right] = Z_{\parallel, \text{rw}}(\omega) + Z_{\parallel, \text{sc}}(\omega)$$

¹⁹与欧姆定律适用范围有关。欧姆定律写成 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ，其中， σ 为电导率。

²⁰这篇论文利用洛伦兹规范 (Lorenz condition)。注意，此论文中写成 Lorentz condition 均应为 Lorenz condition，相信为作者无意识笔误。

由此可看出，电阻壁阻抗包含电阻壁贡献与部分空间电荷效应的贡献。

由于此处推导得到的阻抗包含许多极点 (singularity)，因此做逆傅立叶变换求尾场时需留意在 ω 复平面积分路径的选择

$$W'_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\parallel}(\omega) e^{i\omega z/v} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\parallel}(\omega) e^{[i \operatorname{Re} \omega - \operatorname{Im} \omega]z/v} d\omega$$

注意到，在源粒子前方 $z > 0$ 处，对应 ω 上半复平面，以上未作近似的阻抗函数在上半复平面内存在极点，即，在 $z > 0$ 存在尾场。这是符合预期的结果，因为此时的束团并不是极端相对论性的。然而，近似的表示式在 ω 上半复平面没有极点，因此，在 $z > 0$ 没有尾场。

如果考虑 $z < 0$ 情况，则在 ω 复平面实轴上的极点 (如果存在) 可以稍微往下面移动，即 $\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$ ，将使求解尾场时涉及的积分方便操作。这里的 $\epsilon > 0$ 对应到时域有一个指数衰减 $e^{-\epsilon t}$ ，可以赋予可能的物理意义为 Ohmic heating 或 radiation loss。这么做的话，围绕上半平面的围道积分可以包含实轴并且避开可能的极点，则有 $W'_0(z > 0) = 0$ ，从而严格遵守因果律。

这篇论文 Section IV 尝试求解横向阻抗，此时源粒子存在横向非零偏移 (dipole mode)。解势方程时用了化简技巧

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= A_r \pm iA_{\varphi} \\ j_{\pm} &= j_r \pm j_{\varphi} \end{aligned}$$

这里先是求解纵向 dipole mode 的阻抗，然后利用 Panofsky-Wenzel 定理得到横向阻抗，有 Eq. (124)

$$\begin{aligned} Z_{\perp, \text{rw}}(\omega) &= \frac{Z_{\parallel, \text{rw}}^{(1)}(\omega)}{k} \\ &\approx \frac{Z_{\parallel, \text{rw}}^{(1)}(\omega)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + k_r^2}} \\ &\approx \frac{1 - i \operatorname{sgn}(\omega)}{\omega/c} \frac{4 - b^2 k_r^2 + \frac{1}{2} k_r^2 r^2 - \frac{2}{\omega^2} k_r^2 c^2}{4\pi b^3 \delta_{\text{skin}} \sigma} \end{aligned}$$

求解横向尾场可以直接按定义 [Eq. (126)] 做，如 Section III.H 求解纵向尾场。或者，可以先利用时域的 Panofsky-Wenzel 定理²¹，有 Eq. (127)

$$W_{1, \perp}(z, r) = \frac{\partial}{\partial r} \int r W_{1, \parallel}(z, r) dz$$

²¹注意到，这里的 Panofsky-Wenzel 定理是推广后的形式，适用于非极端相对论情况。

利用已经求得的纵向 dipole mode 阻抗 [Eq. (122)], 在纵向先按定义得到纵向 dipole wake [Eq. (129)], 然后利用以上时域 Panofsky-Wenzel 定理得到横向 dipole mode 尾场。

在 Section VI, 这篇论文讨论得到的电阻壁公式的适用范围, 发现当 beam pipe 的导电率 σ 对于外界环境不再能够用一个常纯量 (constant scalar)²²表示时, 如极高频、极低温或强磁场环境, 这里的分析将不再适用。同时, 目前仅假设 $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$ 。另外, 这里假设电阻壁尾场在 beam pipe 中的相速度与粒子束速度一样。

在 beam pipe 材料中, 关联“场”与“源”利用欧姆定律。对于欧姆定律不再适用的情况, 如: 考虑交流导电率 (ac conductivity)、异常驱肤效应 (anomalous skin effect)、磁阻效应 (magnetoresistance effect) 等, 则这里的结果自然不再成立:

- 交流导电率 \Rightarrow 见 Table I, 电导率随频率改变大致有

$$\bar{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma}{1 - i\omega\tau_{\text{rel}}}$$

- 异常驱肤效应 \Rightarrow 见 Table II, 在极低温、极高频情况下, 电子的平均自由路径 (mean free path) 将超过驱肤深度

$$\delta_{\text{skin}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma|\omega|}}$$

当频率高于以下条件时

$$\omega \geq 0.027 \frac{\rho^3}{\mu_0(\rho\ell)^2}$$

异常驱肤效应被考虑。符号参考 Table II。

- 磁阻效应 \Rightarrow 见 Table II, 当外部磁场足够大时, 在 beam pipe 材料内的电子回旋频率将足够高, 从而产生磁阻。通常发生在极低温、强磁场环境。

14.4 其它

这篇论文构建源粒子时, 考虑到在 ω 域, 而不是 k 域, 因为在 beam pipe 中, k 域可能发生离散、不连续阻抗谱。见 Section III.A。这篇论文在结尾处提到, 可能定义广义尾场或阻抗, 将 ω 与 k 作为两个独立变量看待。值得琢磨。

²²对应到 beam pipe 材料为立方对称 (cubic symmetry) 时, 如: Al, Cu, Fe。对于其它金属或是介电材料, 这里的 σ 将不再是常纯量, 可能是变量纯量或是张量 (tensor)。

关于传统基于极端相对论假设的电阻壁尾场与阻抗的讨论,可以参考 [1] 的 Chapter 2。另外,这篇论文里的许多参考文献对于电阻壁尾场与阻抗的计算具有参考价值。

对于 SSMB 电子微束团串,在室温 beam pipe 情况下,涉及的频率 $\frac{3 \times 10^8}{1064 \text{ nm}} \approx 2.8 \times 10^2$ THz。如果 beam pipe 采用 Cu 或 Al,可能导致这里分析结果不再适用(参考此论文 Table I)。原因是,当涉及的尾场频率足够高时,在 beam pipe 金属内的原子、电子间碰撞时间来不及反应(relax)时,将再次受到尾场扰动。这个效应在这篇论文中尚未考虑。

参考文献

- [1] A.W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, 电子版下载 <https://www.slac.stanford.edu/~achao/wileybook.html>