

# 加速器束流动力学期刊论文导读 (2022 年 3 月)

受“京师物理”公众号启发，我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊，与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布，在 [http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh\\_CN/article/2191806/content/1551.htm#article](http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article) 可以找到过去的导读文档。限于成员水平，导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流，我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2022 年 3 月) 导读成员<sup>1</sup>负责结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]	jcytsai@hust.edu.cn
秦伟伦	[??]	qinweilun1991@gmail.com
宋怡方	[??]	yifangsong@hust.edu.cn

---

<sup>1</sup>宋怡方为电磁所樊宽军教授研究生。

## 目录

1	因果律与色散关系 [AJP 87]	
	Causality and dispersion relations	3
2	Kramers-Kronig、伯德图与零点的意义 [AJP 79]	
	Kramers-Kronig, Bode, and the meaning of zero	6
3	电子储存环里的电流是经典的吗? [NIMA 455]	
	Are the stored currents in an electron storage ring classical or non-classical	8
4	色散关系简介 [AJP 32]	
	An Introduction to Dispersion Relations	10
5	二维相干同步辐射模型 [PRAB 16-01]	
	Two dimensional model for coherent synchrotron radiation	12

# 1 因果律与色散关系 [AJP 87]

## Causality and dispersion relations

### 1.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：Tejas Dethe, Harmeet Gill, Dylan Green, Andrew Greensweight, Luis Gutierrez, Muyuan He, Toshiki Tajima, and Kevin Yang (UCI)
- 类型：理论
- 链接：<https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.5092679>

### 1.2 摘要

对日常生活经验或是许多实验上的观察似乎告诉我们在物理系统的许多分支中都存在因果律 (causality)。数学上，因果律反映在系统响应函数 (response function) 的解析性 (analyticity)。这个响应函数把系统的色散 (dispersion) 与消散 (dissipation) 关联起来。消散还与涨落 (fluctuation) 有关。

### 1.3 贡献或创新点

- 贡献：作为复习，这篇论文先从三个定理开始。首先，科西定理，对于函数  $\alpha(z)$  沿着单连通简单封闭曲线，有

$$\oint_C \alpha(z) = 0$$

根据科西积分公式，函数  $\alpha(z)$  可以按以下方式等价地写出

$$\alpha(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\alpha(z)}{z - a} dz$$

最后是留数定理，

$$\oint_C \alpha(z) dz = 2\pi i \sum_{n=0}^N \text{Residue} [\alpha(z_n)]$$

为了介绍符合因果关系的物理系统必须满足的条件，这篇论文先定义系统的响应函数  $\alpha$  如下

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t - t') E(t') dt'$$

其中，外加场  $E(t)$  在  $t' < 0$  时没有信号，即，因果律。根据这个要求，因果律可以与  $\alpha(z)$  (在傅立叶空间  $\alpha(\omega)$ ) 在  $\omega$  复平面的解析性关联。这个关联是充要的，即

因果律  $\leftrightarrow$  解析性

进一步，这篇论文给出 Kramers-Kronig (K-K) 关系式，又称 dispersion-dissipation 关系，有

$$\begin{aligned}\alpha_r(\omega) &= \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_i(v)}{v - \omega} dv \\ \alpha_i(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_r(v)}{v - \omega} dv\end{aligned}$$

介绍完基本背景知识后，这篇论文针对物理学几个分支领域，分别举出与因果律相关的例子。在电磁学中，考虑电介质在外加时变电磁场情况下，介电系数  $\epsilon(\omega)$  随频率的关系。从物质分子的原子模型，给出以下单个电子的谐振子运动方程：

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} + m_e \gamma \frac{dx}{dt} + m_e \omega_0^2 x = q E_0 \cos(\omega t)$$

适当地将单个分子原子的情况推广到电介质物质中，可以将电偶极矩  $p(t) = qx(t)$  推广到极化强度  $\vec{P}(t)$ ，经过与外加电场关联  $\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_e E(t)$ ，有

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

注意到，论文里用的是 CGS 单位，这里改成了 MKS/SI 单位。另外，论文里的介电系数为相对介电系数  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ 。

作为对 K-K 关系的检验，可以将上式指定为  $\alpha$ ，即  $\alpha = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ ，代入 K-K 关系。同时，可以独立地将上式分别取实部与虚部。容易发现，K-K 关系式成立。

作为响应函数  $\alpha$  的实部与虚部，在电磁场对应的物理图像为折射率与吸收系数，即色散-消散关系，有

$$\begin{aligned}\text{折射率 } n(\omega) &= \sqrt{\text{Re}[\epsilon(\omega)]} \\ \text{吸收系数 } \alpha(\omega) &= 2 \left( \frac{\omega}{c} \right) \sqrt{\text{Im}[\epsilon(\omega)]}\end{aligned}$$

这篇论文的 Section III.D 另外讨论在光学中的因果律与色散关系，考虑了石英玻璃的情况，另外附上实验量测结果与 Drude 模型结果的对比。

## 1.4 其它

这篇论文其实是从一门本科生进阶的数学物理课程中的期末分组报告衍生的产物。课堂上，T. Tajima 教授先介绍一个具有普适性的课题—因果律与色散关系—然后，通过课堂学生分组对物理学中几个不同的子领域内关于这个课题的进一步探索，最终有效地形成这篇论文的雏形。

这篇论文的 Eqs. (11,12) 中，等式右边  $\alpha(v), \alpha(\omega)$  应为  $h(v), h(\omega)$ 。

## 2 Kramers-Kronig、伯德图与零点的意义 [AJP 79]

### Kramers-Kronig, Bode, and the meaning of zero

#### 2.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：John Bechhoefer (Simon Fraser University)
- 类型：理论
- 链接：<https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.3614039>

#### 2.2 摘要

因果律的核心由 Kramers-Kronig (K-K) 关系描述，其关联响应函数的实部与虚部。1937 年，伯德 (Bode) 得到了一个类似的关系，关联响应增益的振幅与相位的关系。值得注意的是，K-K 关系式是等式，而 Bode 关系则是不等式 (如：可能量测到额外的相位偏移)。这篇论文解释这个差别的理由，其原因可以追溯为由于系统本身或量测仪器信息传递的延迟<sup>2</sup>。

#### 2.3 贡献或创新点

- 贡献：一般而言，K-K 关系常见于物理学相关文献，而 Bode 关系则多见于工程相关文献。这篇论文作者在简单总结 K-K 关系，对于一线性系统

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') u(t') dt'$$

与对应的傅立叶变换

$$G(\omega) \equiv G'(\omega) + iG''(\omega) = \int_0^{\infty} G(t)e^{i\omega t} dt$$

K-K 关系为  $G(\omega)$  的实部与虚部建立联系

$$G'(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' G''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$G''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{G'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

<sup>2</sup>直观地想，在时间上的延迟即在复频谱上产生一个相位项。这个相位项  $e^{i\omega\tau}$  在  $\omega$  复平面上为在  $|\omega| \rightarrow \infty$  的一个极点。

从 Bode 增益-相位分析开始，先考虑没有时间延迟的情况，然后利用 K-K 关系，得到

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dM}{d\nu} f(\nu) d\nu$$

$$f(\nu) \equiv \frac{2}{\pi^2} \ln \coth \frac{|\nu|}{2}$$

一般来说，对于  $G(\omega) \sim \omega^{-n}$  的响应函数，上式可以化简，有

$$\frac{dM}{d\nu} = \frac{d \ln |G|}{d \ln \omega'} = -n$$

$$\varphi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \frac{d \ln |G(\omega)|}{d \ln \omega} = \frac{\pi}{2} n(\omega)$$

其中， $n = 1$  对应 low-pass filter， $n = 2$  对应 harmonic oscillator。

接着再讨论存在时间延迟情况，在时域上的时间延迟对应频域上引入额外相位，即  $y(t) = u(t - \tau) \Rightarrow y(\omega) = e^{i\omega\tau} u(\omega)$ 。得到结论是：Bode 分析对应到物理系统的最小化相位偏移。其它可能导致相位延迟的机制可以利用 all-pass function 模拟。论文后半部列举机械系统、光学系统与反馈控制作为例子。

### 3 电子储存环里的电流是经典的吗？[NIMA 455]

#### Are the stored currents in an electron storage ring classical or non-classical

#### 3.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：Tsuneaki Miyahara, Yasuhiro Takayama (Tokyo Metropolitan University)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900200007324?via%3Dihub>

#### 3.2 摘要

这篇论文以电子储存环为例，以电子的纵向 synchrotron 振荡与横向 betatron 振荡的振幅估算量子图景的零点振荡 (zero-point vibration)。发现在 X 射线自由电子激光中，零点振荡的幅值并不是小到可以忽略。因此，在对几个 Å 量级的辐射场相干性进行评估时，需要考虑电子束团内不同电子间由于量子效应不再准确的位置导致的影响。

#### 3.3 贡献或创新点

- 贡献：电子的同步辐射理论分两种，一种是基于经典电动力学 (Schwinger)，另一种是基于量子力学 (Sokolov)。两者分析方式不同，却给出从许多观点来看一致的结论。在经典图像中，电子被视为是一个点电荷，在量子力学中，电子被描述为一波函数，演化按薛定谔方程，在能量的某个本征态。同步辐射的过程则视为电子在两个不同的本征态间放出的能量。以上图像假设单个电子。

对自由电子激光而言，电子产生辐射的过程包含干涉 (相干) 效应，特别是 X 射线自由电子激光。这篇论文尝试在多电子情况下，利用量子力学讨论经典力学范畴与非经典力学范畴的适用条件。

这篇论文先抛出以下问题：束团内的不同电子之间是否存在时变涨落 (*time-dependent fluctuation*)？经典力学与量子力学自然给出不一样的回答。



这篇论文 Section 2 先从最简单的情况进行分析：假设电子束团是由每个电子波函数形成的波包 (wave packet)，分析电子束团在自由空间 (忽略外部横向、纵向的聚集、散焦) 传播时，波包随的生命时间。对于束长约  $L$ ，能量  $\gamma$ ，估算的生命时间有

$$t \approx \frac{L^2 \gamma^3}{2\pi c \lambda_c}$$

其中， $\lambda_c = 2.43 \times 10^{-12}$  m 为电子的 Compton 波长。

对 2.5 GeV 电子而言，如果束团长度  $0.1 \mu\text{m}$ ，则  $t \approx 255$  ms；若束团长度为  $1 \text{ \AA}$ ，则有  $t \approx 255$  ns。当加速器传输段包含横向、纵向的聚集、散焦元件时，以上估算不够准确，需要更细致分析。

Section 3 将电子存在聚集环境时，视电子为外部势场下为一个波包函数形成简谐振子。考虑简谐振子可能形成的相干态，分析得到纵向零点振荡振幅约为<sup>3</sup>

$$\langle z^2 \rangle = \frac{\lambda_c c}{4\pi f \gamma^3}$$

对于 2.5 GeV，纵向 synchrotron 振荡约  $f \approx 10$  kHz 的情况，有  $\langle z^2 \rangle^{1/2} = 2.2$ 。因此，在短于此波长的 X 射线自由电子激光输出辐射评估需要留意量子涨落的影响。

电子束团的横向 betatron 振荡也有对应的量子涨落，估算得到

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\lambda_c c}{4\pi f_B \gamma}$$

对于 2.5 GeV，横向 betatron 振荡约  $f_B \approx 100$  MHz 的情况，有  $\langle x^2 \rangle^{1/2} = 108$ 。当横向束团尺寸与此数值差不多时，需要考虑量子涨落效应。

将量子涨落导致的纵向尺寸不确定性幅值与 RF 电压关联，有

$$\langle z^2 \rangle^{1/2} \propto f^{-1/2} \propto V_{\text{RF}}^{-1/4}$$

可以看到，增加  $V_{\text{RF}}$  效果不大。相对来说，增加电子能量  $\gamma$  则将有效地多。

### 3.4 其它

按量子力学，能够产生 squeezed state，也属于相干态，能够降低不确定性幅值。其经典力学图像的对比为束团压缩器。

<sup>3</sup>论文中以  $x$  表示，容易与横向尺寸  $x$  混淆，此处改写成  $z$ 。

## 4 色散关系简介 [AJP 32]

### An Introduction to Dispersion Relations

#### 4.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：C. H. Holbrow and W. C. Davidon (Haverford College)
- 类型：理论
- 链接：<https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1969855>

#### 4.2 摘要

这篇论文讨论因果律 (causality)、线性 (linearity)、时间对称 (time symmetry)、么正性 (unitarity)、斜对称 (crossing symmetry) 与色散关系的关联。以三种基础电路为例，说明从电路实验上量测到的不同频率的损耗功率  $P(\omega)$ ，应用色散关系，可以得到电路的阻抗频谱  $Z(\omega)$ 。还举了 pion 对质子的散射过程研究。

#### 4.3 贡献或创新点

- 贡献：这篇论文详细解释了几个与色散关系的概念，包含
  - 因果律  $\Rightarrow$  “果 (output)”必须发生在“因 (input)”之前。这里的因果律不是只“有因才有果、有果必有因”的关联，而是只时间上的先后次序。对于振荡器，没有 input，但是允许存在 output。
  - 线性  $\Rightarrow$  核函数或系统响应函数不随 input 的振幅而变，有

$$O(t) = \int_{-\infty}^t dt' K(t, t') I(t')$$

- 时间对称  $\Rightarrow$  没有明显的 (独立) 时间关系，即，仅考虑 input 与 output 之间时间差为时间变量，有

$$O(t) = \int_{-\infty}^t dt' K(t - t') I(t')$$

注意到，这篇论文讨论不涉及额外的相位延迟，即，仅考虑最小相位响应情况。

– 么正性  $\Rightarrow$  能量守恒

此外，以三种基础 RC、RL、LC 电路为例，说明如何由因果律、色散关系等得到电路理论中许多熟知的结果。作为色散关系的一个实际应用，从电路实验上量测到的不同频率的损耗功率  $P(\omega)$ ，可以得到电路的阻抗频谱  $Z(\omega)$ 。另外，还举了 pion 对质子的散射过程研究。

#### 4.4 其它

这篇论文非常详细解释了因果律、线性、时间对称、么正性、斜对称与色散关系的关联，特别是以工程实际 RC、RL、LC 电路为例，对初阶学生更具启发性。

几个论文中可能方程式编号的错误：

- p. 764, 右侧第 16 行, Eq. (1) 应为 Eq. (2)
- p. 764, 右侧第 22 行, delta function input 也许写为 delta function response 更好
- p. 765, 右侧第 12 行, Eq. (3) 应为 Eq. (5)
- p. 766, 左侧倒数第 2 行, Eq. (7) 应为 Eq. (9)
- p. 767, 左侧第 17 行, Eq. (10) 应为 Eq. (12)
- p. 767, 右侧第 9 行, Eq. (10) 应为 Eq. (15)
- p. 768, 左侧第 15 行, Eqs. (6), (12), and (15) 应为 Eqs. (8), (13), and (15)

## 5 二维相干同步辐射模型 [PRAB 16-01]

### Two dimensional model for coherent synchrotron radiation

#### 5.1 基本信息

- 分类：尾场、阻抗
- 作者：Chengkun Huang, Thomas J. T. Kwan, and Bruce E. Carlsten (主要机构：Los Alamos National Laboratory)
- 类型：理论、数值计算
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.16.010701>

#### 5.2 摘要

理解束团压缩器中的相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 效应需要一个能够考虑实际束团形状与参数的准确模型。这篇论文推广了既有的一维 CSR 模型，基于 Lienard-Wiechert 公式开展了长束团的二维 CSR 数值模型。这个数值模型包含 CSR 场在弯转平面 ( $x-z$ ) 的分布，结果对任意相对论能量的束团成立。此外，这个二维模型移除了一维模型中空间电荷场的奇点。除了基于自由电子激光 (free electron laser, FEL) 相关的数值参数，二维数值计算结果与一维 CSR 解析结果一致外，对于低能量、横向尺寸较大的束团、暂态场情况下，这里发展的数值模型也能够给出更准确的结果。

#### 5.3 贡献或创新点

- 贡献：目前既有的二维 (或三维) 全数值、自洽的 CSR 理论有
  - R. Li [1]: 基于 Frenet-Serret 坐标系下的哈密顿理论
  - G. Bassi 等 [2]: 平均场 & particle-mesh 法、retarded Green function
  - D. R. Gillingham 等 [3]: 平均场 & particle-mesh 法、paraxial approximation
  - A. Novokhatski [4]: 平均场 & particle-mesh 法、implicit FDTD

目前既有的一维模型主要有两种定义 CSR 场的方式：一种为仅考虑 Lienard-Wiechert 场的第二项 (辐射项、加速项)；

$$\vec{E} = \frac{e(\hat{\beta} - \vec{\beta}')}{\gamma^2 \rho^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}')^3} + \frac{en \times [(\hat{n} - \vec{\beta}') \times \vec{\beta}']}{c\rho (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}')^3}$$

其中， $\rho$  为源至观察坐标的距离。另一种为总 Lienard-Wiechert 场扣去第一项 (库伦项、速度项) 中含有奇点的部分，又称重整化 (renormalization)。

这篇论文分析的几何安排如下图所示：

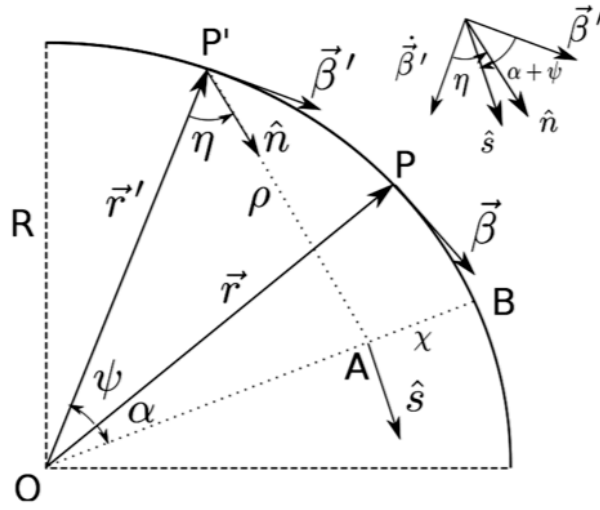


FIG. 1. Diagram of the 2D CSR model.  $P$  is the particle's current position on the circular trajectory at time  $t$ ,  $P'$  is its position at the retarded time  $t'$  where the fields at the observation point  $A$  is originated from.  $\psi$  is the angular separation between  $P$  and  $P'$ . The coordinate of  $A$  is denoted by its angular separation from  $P$  and its radial distance from the trajectory, i.e.,  $A(\alpha, \chi)$ .  $\eta$  is the angle formed between  $\overline{P'A}$  and  $\overline{P'O}$ . The positive direction of the angles are also shown.  $\hat{n}$  and  $\hat{s}$  are unit vectors pointing from  $P'$  to  $A$  and perpendicular to  $\overline{OA}$ , respectively.

这篇论文 Section III 先讨论推迟角度  $\psi$  与  $\alpha, \chi$  关系的分析。它们的关系涉及求解超越方程，因此，如果要写出解析解，其中参数需要近似处理。

Section IV 给出在轴上的 CSR 场有既有一维模型的结果 (如下左图)，二维 CSR 场则有类似三叶草形的结构 (如下右图)。注意，论文中称此为 single particle wakefield，即 wake function。

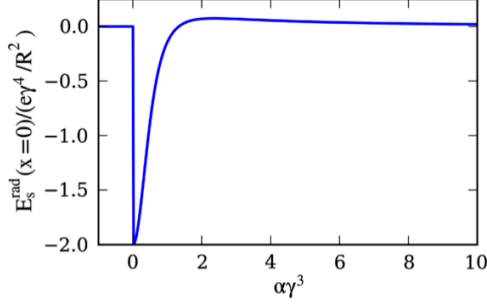


FIG. 6. On-axis radiation wakefield  $E_s^{\text{rad}}(x=0)$  for a single particle.

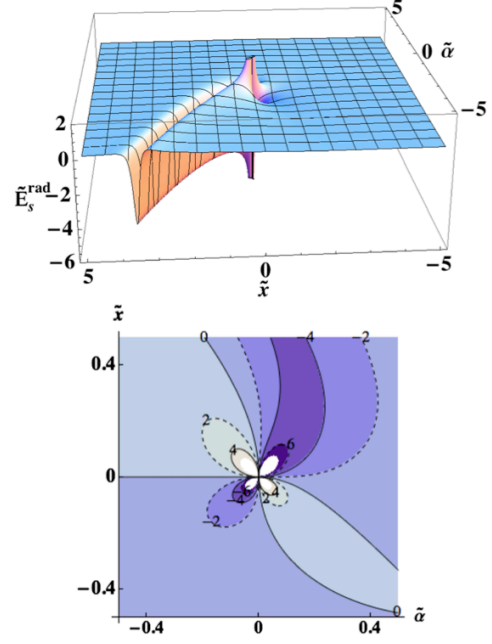


FIG. 7. Top: The longitudinal radiation wakefield  $\tilde{E}_s^{\text{rad}}(\tilde{\alpha}, \tilde{x}) = E_s^{\text{rad}}/(e\gamma^4/R^2)$  of a single particle with  $\gamma = 100$ . This figure is rotated for better visualization of the features in the wakefield. Bottom: The contour plot showing the cloverleaf pattern in the central part of  $\tilde{E}_s^{\text{rad}}(\tilde{\alpha}, \tilde{x})$ .

尾场函数  $E_s^{\text{vel 或 rad}}$  与尾场  $\mathcal{E}_s^{\text{vel 或 rad}}$  的关系为

$$\mathcal{E}_s^i(\xi, x) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_s^i(\xi - \xi', x - x') \rho(\xi', x') d\xi' dx'$$

接着，Section V 给出包含横向坐标依存关系的纵向尾场，如下图。对于高能情况（下排），尾场改变仅发生在纵向  $\xi/\sigma_s$ ，与 1-D CSR 结果一致；对于低能情况（上排），左右图的显著区别表征空间电荷效应的影响。

这篇论文还考虑了暂态 CSR 场，细节参考 Section V.B。二维暂态 CSR 场与一维情况存在根本不同。

此外，在 Section V.C 讨论了基于 particle-mesh 的数值模拟与基于二维 CSR 模型中可能碰到的坐标系差异问题：前者在直角坐标系下计算，后者在 Frenet-Serret 坐标系。两种坐标系可能导致计算束团电荷（电流）密度的差异，从而导致 CSR 场偏差。关于坐标变换的更一般分析可以参考 [2]。在当弯转角度越大时，这个差异将越明显。

#### 5.4 其它

这篇论文开头 Section II 仔细讨论了对“纵向”场的定义，在弯转轨道情况，“横向”与“纵向”方向的定义存在模糊（或近似）空间。此外，还讨论了叠加原理（superposition）

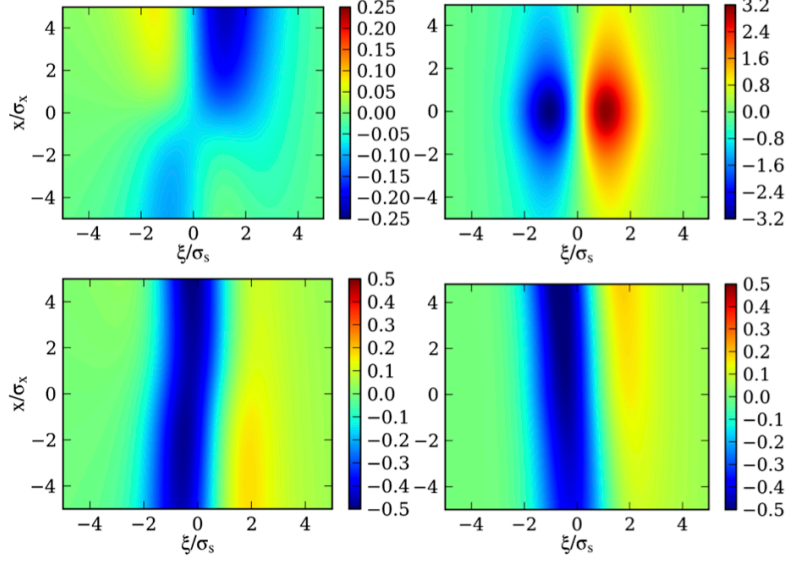


FIG. 9. Top row: The longitudinal radiation field  $\mathcal{E}_s^{\text{rad}}$  (left) and the total longitudinal field  $\mathcal{E}_s$  (right) for a 2D Gaussian beam of  $\sigma_x = \sigma_s = 200 \mu\text{m}$ ,  $\gamma = 10$ , beam charge  $Q = 1 \text{ nC}$  and  $R = 100 \text{ cm}$ . Bottom row:  $\mathcal{E}_s^{\text{rad}}$  (left) and the total longitudinal field  $\mathcal{E}_s$  (right) for the same parameters except for  $\gamma = 100$ . All fields are in units of MV/m.

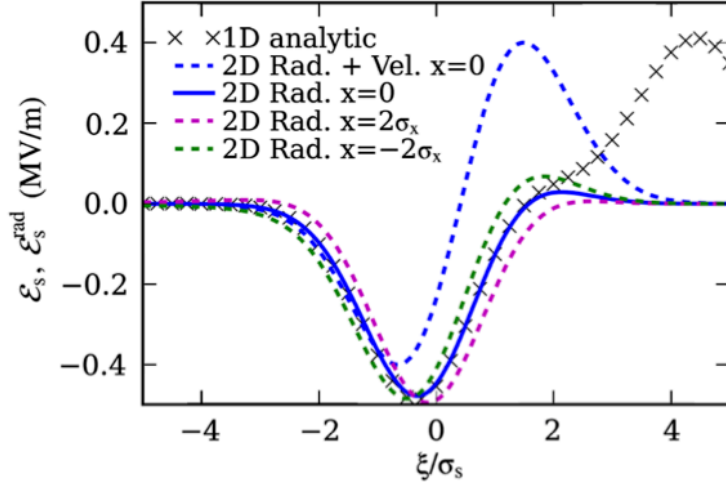


FIG. 12. Comparison of the transient longitudinal CSR field  $\mathcal{E}_s$  (blue dashed curve) and  $\mathcal{E}_s^{\text{rad}}$  (blue solid curve) with the 1D analytic result from Eq. (88) of Ref. [6] for the same beam parameters in Fig. 11. The 1D result applies to ultrarelativistic beams. The off-axis field at  $x = \pm 2\sigma_x$  shows the transverse variation of  $\mathcal{E}_s^{\text{rad}}$  in 2D.

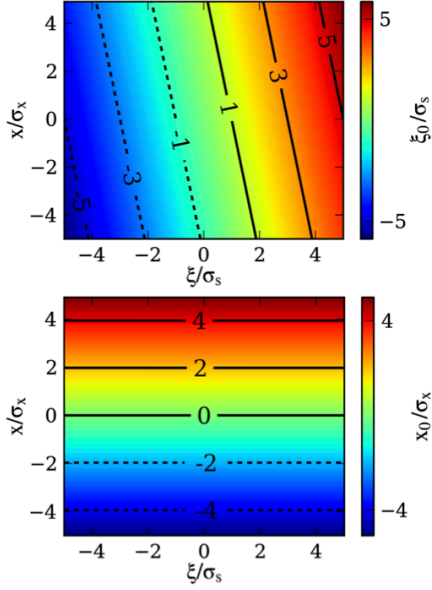


FIG. 14.  $(\xi, x) \rightarrow (\xi_0, x_0)$  transform for the parameters in Fig. 9, i.e.,  $\sigma_x = \sigma_s = 200 \mu\text{m}$ ,  $\gamma = 100$ , and  $R = 100 \text{ cm}$ , when the beam has rotated  $\theta = 10^\circ \approx 0.175 \text{ rad}$ . The major effect of the transform is seen in the plot of  $\xi_0(\xi, x)$  where  $\xi_0$  has a  $x$ -dependent shift to  $\xi$ .

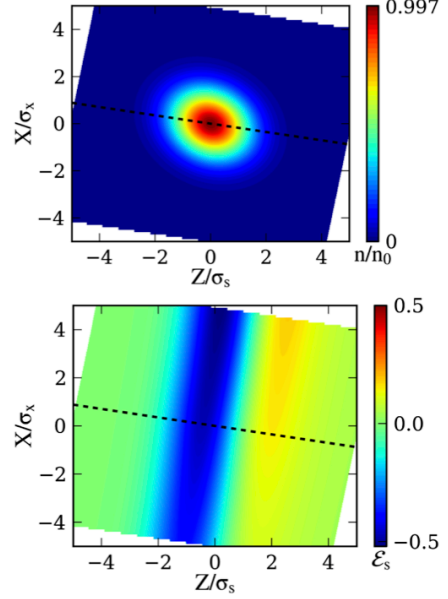


FIG. 15. The beam density  $n/n_0$  and the total longitudinal CSR field (in MV/m) in the Cartesian coordinates for a bending angle of  $\theta = 0.175 \text{ rad}$  and the same parameters in Fig. 14.  $n_0$  is the peak beam density before it enters the magnetic field region.

适用范围与求解尾场时使用卷积 (convolution) 的关联。

这篇论文使用 CGS 单位制。

这篇论文中的 Lorentz gauge 应为 Lorenz gauge。此外，论文中 Eqs. (24,25) 积分函数中的分子少了  $\partial$ ，应为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s(\xi, x) &= - \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\phi - \beta A_s)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi - \xi', x - x'} \times \rho(\xi', x') d\xi' dx' \\ &= - \iint_{-\infty}^{+\infty} (\phi - \beta A_s) \bigg|_{\xi - \xi', x - x'} \times \frac{\partial \rho(\xi', x')}{\partial \xi'} d\xi' dx' \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] Rui Li, Curvature-induced bunch self-interaction for an energy-chirped bunch in magnetic bends, Phys. Rev. ST Accel. Beams 11, 024401 (2008). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.11.024401>
- [2] Gabriele Bassi, James A. Ellison, Klaus Heinemann, and Robert Warnock, Microbunching instability in a chicane: Two-dimensional mean field treatment, Phys.



- Rev. ST Accel. Beams 12, 080704 (2009). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.12.080704>
- [3] D. R. Gillingham and T. M. Antonsen, Jr., Calculation of coherent synchrotron radiation in toroidal waveguides by paraxial wave equation, Phys. Rev. ST Accel. Beams 10, 054402 (2007). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.10.054402>
- [4] A. Novokhatski, Field dynamics of coherent synchrotron radiation using a direct numerical solution of Maxwell's equations, Phys. Rev. ST Accel. Beams 14, 060707 (2011). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.14.060707>