

# 电磁辐射与加速器束流动力学导论

Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,  
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

## 特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

## 第二章 电磁辐射的基础理论

### 内容提要

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> 推迟关系                 | <input type="checkbox"/> Jefimenko 公式、Heaviside-Feynman 公式 |
| <input type="checkbox"/> Lienard-Wiechert 势、场 |  |

上一章介绍了时变电磁场的一般特性，这一章将从时变电磁场过渡到电磁辐射。这一章将说明，自由的带电粒子要产生电磁辐射，必须经历加速过程。粒子加速使场线扭曲，从而产生辐射。这一章的目标先介绍时变电磁场的推迟关系，通过定性论证，给出一组重要公式，称 Lienard-Wiechert 势与 Lienard-Wiechert 场。然后针对自由运动的带电粒子产生电磁辐射的机制，给出定性讨论。

大二电磁学课堂学过，一段导线中的振荡电荷形成的电偶极子或一封闭导线交变电流形成的磁偶极子也能辐射。当时介绍的电偶极子或磁偶极子，其移动的电子或电流并不完全自由。此讲义考虑的电磁辐射指的是由“自由”的带电粒子产生的电磁辐射。这里的“自由”粒子指的是已经自原子分子中游离了的粒子，概念相对于受物质中原子分子“束缚”的带电粒子。

但是，尽管这里所谓的“自由”的带电粒子是已经游离了的粒子，但并不意味着“无拘无束”地在空间中运动。在粒子加速器中，这些带电粒子其实被局限在一设计好的电磁场环境中，受电场影响而加速或减速，受磁场影响而转弯。在外部电磁场中，尽管受洛伦兹力，仍视为“自由”粒子。

“自由” $\neq$ “无拘无束”。

### 2.0 问答预览

#### 1. 推迟条件是什么？

⇒ 推迟条件是描述电磁信号传播的数学表达式，它体现了电磁信号传播需要有限时间，不可能瞬间完成，即信号源和观察者之间存在时间差。这保证了因果律，即事件的发生因果顺序不会颠倒。

#### 2. 什么是局域因果律？它与有限速率因果律有什么区别？

⇒ 局域因果律是指信息不能瞬间传递，只能以有限速度传播。有限速率因果律是推迟条件的一种表述，它保证了事件的发生顺序不会颠倒。

#### 3. Lienard-Wiechert 公式描述了什么？它如何体现相对论多普勒效应？

⇒ Lienard-Wiechert 公式描述了运动过程的电荷产生的电磁场，它包含了电荷的运动速度和加速度信息。相对论多普勒效应体现在 Lienard-Wiechert 公式中的  $(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$  项，表示电荷运动方向与观察者方向之间的夹角对电磁场的影响。

4. 为什么粒子匀速运动时不产生辐射? 如何理解电场线扭曲与辐射的关系?

⇒ 粒子匀速运动时, 其周围电场线会收缩, 但不会发生扭曲, 因此不会产生电磁辐射。

电场线扭曲是电磁辐射产生的必要条件, 它代表电磁能量的传播特性产生变化。

5. 坡印廷向量代表什么物理意义? 它与辐射功率有什么关系?

⇒ 坡印廷向量代表电磁能量的流动方向和大小, 即能流密度, 其方向表示电磁能量流动的方向, 其大小表示单位时间内通过单位面积的能量。辐射功率是坡印廷向量对面积的内积(点乘)积分。

6. Jemenko 公式与 Heaviside-Feynman 公式分别描述了什么? 它们与 Lienard-Wiechert 公式有什么联系?

⇒ Jemenko 公式和 Heaviside-Feynman 公式都是描述电磁场随时间变化的公式, 它们与 Lienard-Wiechert 公式的关系在于都考虑了推迟效应, 但 Jemenko 公式适用于任意电荷分布, 而 Heaviside-Feynman 公式与 Lienard-Wiechert 公式则适用于单粒子情况。

7. 天然辐射和人工辐射分别包含哪些来源?

⇒ 天然辐射来自宇宙射线、地表放射性元素衰变、水中和食物中的天然放射性同位素等。人工辐射来自医疗检查和治疗、核能利用、工业射线设备等。

8. 辐射剂量单位是什么? 生活中常见的辐射剂量水平有哪些?

⇒ 辐射剂量单位是 Sv (西弗), 它表示单位质量的物质吸收的辐射能量。生活中常见的辐射剂量水平包括天然背景辐射、医疗检查、乘坐飞机等。

9. 辐射对人体健康的影响与哪些因素有关?

⇒ 辐射对人体健康的影响与辐射剂量、辐射种类、暴露时间等因素有关。

## 2.1 推迟条件

由 Maxwell 方程组得到的波方程

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

其中，光速  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} < \infty$  表示电磁信号的产生与观察这两个事件不可能同时、瞬间完成。因此，我们有必要区分“在何时、何地 观察到电磁场”以及“在何时、何地 产生电磁场”。这两组时空物理量由推迟条件 (retardation condition) 联系。如图 2.1，以下我们约定，观察时刻为  $t$ ，位置为  $P$ ，产生电磁场的 (推迟) 时刻为  $t'$ ，或写为  $t_{\text{ret}}$ ，位置为  $P'$ ，两者相对位置为  $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_P - \mathbf{R}(t')$ 。

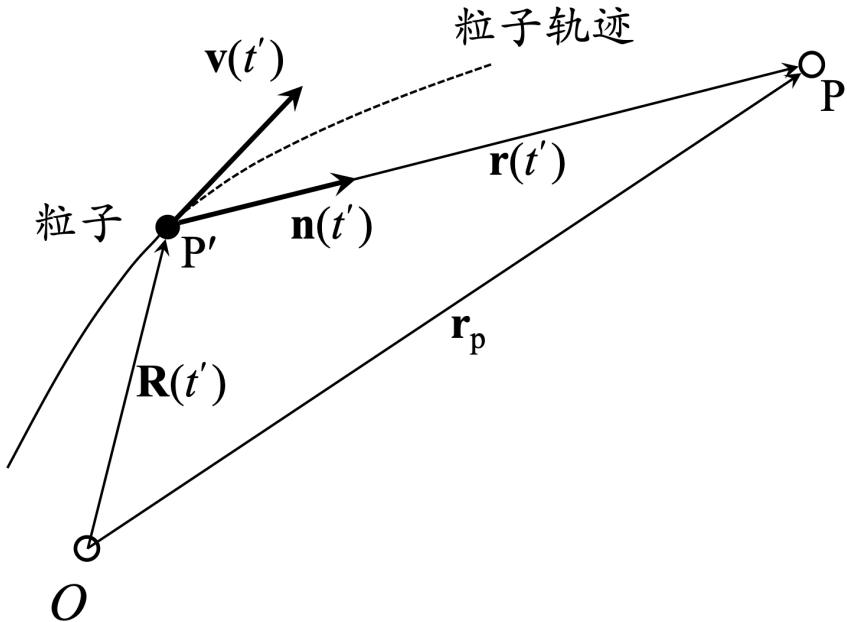


图 2.1：源坐标与观察坐标。

于是，推迟条件可以写成

$$t = t' + \frac{r(t')}{c} \quad \text{或} \quad t = t_{\text{ret}} + \frac{r(t_{\text{ret}})}{c}$$

物理图像为：电磁信号在时刻  $t'$  产生，在以光速  $c$  经历传输一段距离  $r(t')$  之后，观察者在时刻  $t$  接收到该信号。

### 定义 2.1. 推迟条件 (retardation condition)

令现在时刻为  $t$ 、位置为  $\mathbf{r}_P(t)$ ；过去时刻写作  $t_{\text{ret}}$ 、位置为  $\mathbf{R}(t_{\text{ret}})$ ，则符合推迟条件的解为满足以下定义式的解

$$c(t - t_{\text{ret}}) = |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t_{\text{ret}})| \quad (2.2)$$

**注** 推迟条件，即电磁信号源到观察位置的传输速率  $v \leq c \neq \infty$  的事实，也被视为一种满足物理实际的“因果律”(causality) 的数学表述，又称有限速率因果律 (finite-speed causality) 或相对论因果律 (relativistic causality) 或爱因斯坦因果律 (Einstein causality)。

**注** 这与另一个较为直观的因果律 — 称局域因果律 (local causality) — 表述不太一样，直观因果律为信号探测器在信号产生前不可能采集到信号，数学上写为  $f(t < 0) = 0$ ，将在 §11.5.1 介绍。 □

由此推迟条件，一般已知的是粒子的历史运动轨迹  $\mathbf{R}(t_{\text{ret}})$ ，其中， $0 \leq t_{\text{ret}} \leq t$ 。希望求解的是过去的什么时刻产生的信号在此刻收到，即  $t = t(t_{\text{ret}})$ 。此式为隐函数关系，有时不容易求解。除了以上瞬时时刻的推迟关系式，很多时候，我们还需要知道或更感兴趣的是源粒子在过去一段很短的时间间隔  $dt'$  内移动时，相对于此刻 (固定不动的) 观察位置的时间间隔  $dt$  的推迟关系。对以上推迟条件等式两边微分，有

### 定理 2.1. 微分形式的推迟条件

由推迟条件与图 2.1 的几何关系，有

$$dt = \left(1 + \frac{1}{c} \frac{dr}{dt'}\right) dt' = (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) dt' \quad (2.3)$$

其中， $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ 。又称时间挤压效应 (time-squeezing effect)。由图 2.1，此式表示，在源点发出接连两个光子的时间历程  $dt'$  与在观察位置接收接连两个光子的时间历程  $dt$  不同，比例为  $(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ 。对低速粒子而言， $\beta \ll 1$ ， $dt \approx dt'$ 。

**证明** 注意，这里是  $(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$  而不是  $(1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ 。因为  $\mathbf{r}_P$  为常向量，有  $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_P - \mathbf{R}$ 。

此外， $\boldsymbol{\beta}$  的定义与  $\mathbf{R}(t')$  有关，不是  $\mathbf{r}(t')$ ，即

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt'} &= \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} = -\frac{d\mathbf{R}(t')}{dt'} = -\mathbf{v}(t') = -c\boldsymbol{\beta}(t') \\ \frac{dr}{dt'} &\neq \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \right| \\ &= \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt'} = -c\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \end{aligned}$$

**注**  $dt'$  与  $dt$  都是实验室坐标量。这是 Doppler 效应，不是 Lorentz 坐标变换。 □

**练习 2.1** 分析电磁辐射常碰到一个情况，即当电子发出电磁辐射时，主要的贡献差不多是冲着观察者方向前进的方向。假设相对论电子发出辐射场时的瞬时速度  $\boldsymbol{\beta}(t')$  与电子相对观察者  $\mathbf{n}$  夹一小角度  $\theta$ ，试推导微分形式推迟条件的近似形式。 ■

解

$$\begin{aligned}
 \frac{dt}{dt'} &= 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - \beta \cos \theta \\
 &\approx 1 - \beta \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \\
 &= 1 - \beta + \beta \frac{\theta^2}{2} \\
 &\approx \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2\gamma^2} (1 + \gamma^2 \theta^2)
 \end{aligned}$$

■



**笔记** 当  $\theta \sim \gamma^{-1}$  时，有  $2\gamma^2(dt')^{-1} \approx 2(dt)^{-1}$ 。利用相对论 Doppler 效应，当  $dt'$  很小时， $(dt)^{-1}$  很大，意味着电磁信号频率很高，或者光子能量高，又称 up conversion  $\Rightarrow$  用相对廉价的电子换昂贵的光子。

## 2.2 Lienard-Wiechert 场

在第一章介绍过，在自由空间中，对有源时变电磁场，位函数的解能够容易包含推迟效应。即考虑推迟情况下的电磁场问题，位函数可写成

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(r', t')}{r(r', t')} d^3 r' \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(r', t')}{r(r', t')} d^3 r' \quad (2.5)$$

其中， $t' = t_{\text{ret}} = t - \frac{r(t')}{c}$ 。注意到，积分的最终结果为观察位置的时空坐标，积分过程涉及的则是电荷源与电流源分布函数的(稍早时刻)时空坐标。

准确计算运动中的电荷源与电流源产生的位函数不容易。不介绍推导细节，这里仅给出移动中的电荷/电流源贡献位函数的物理图像。先考虑静止的电荷源  $q$ ，在空间中一(同样静止的)观察点  $P$ —可视为探测器的位置—在时刻  $t$  的位函数可写成

$$\varphi(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.6)$$

不妨想像在观察位置  $P$  的探测器无时无刻不在工作；探测器从四面八方不断接收以  $P$  为球心， $r(t')$  为半径的薄球壳内的电子为辐射源，自  $t'$  时刻产生的电磁信号，在  $t = t' + \frac{r(t')}{c}$  时刻抵达  $P$ 。任何在  $t'$  时刻时、在  $r(t')$  薄球壳内的带电粒子产生的电磁场在  $t$  时刻都能被接收到。早于  $t'$  时刻或晚于  $t'$  时刻才落在  $r(t')$  薄球壳内的带电粒子，其产生的信号都无法被在观察位置  $P$  的探测器在  $t$  时刻接收到(但或许可以在其它时刻接收到)。在观察位置  $P$  的探测器在  $t$  时刻接收到的电磁信号就好像是从远处形成的薄球壳，这个薄球壳会以  $P$  为球心内缩，内缩的速度为光速  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ，所有恰好被此以速度  $c$  内缩的薄球壳扫到的电磁信号都会在  $t$  时刻在  $P$  位置体现。

由此图像在脑海里后，现在考虑稍微复杂些的情况：当此电荷源  $q$  不再静止，而是运动中的电荷。可以想像，如果此电荷  $q$  在  $t'$  时刻恰好往球心  $P$  方向前进的话，则其落在探测器薄球壳的时长比较长(比起电荷  $q$  静止时)，届时在  $P$  位置、 $t$  时刻贡献的位函数就相对较大。如果此电荷源恰好往球心  $P$  方向沿线的反向远离，则其落在探测器薄球壳的时长自然相对较短(比起电荷  $q$  静止时)，届时在  $P$  位置、 $t$  时刻贡献的位函数就较小。以上描述的正是相对论多普勒效应，可以想像，将存在  $(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$  因子在位函数的表示式中。当电荷  $q$  奔着向  $P$  前进时， $\boldsymbol{\beta} \parallel \mathbf{n}$ ，有  $1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - \beta$ ，位函数变大；当电荷  $q$  沿着  $P$  的反平行方向远离时， $\boldsymbol{\beta} \parallel (-\mathbf{n})$ ，有  $1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 + \beta$ ，位函数变小；对任意夹角，有  $1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}$ 。

由上论证， $(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$  因子在位函数表示式的分母是不令人意外的。当源为单一粒子时，上式可化简写为如下 Lienard-Wiechert 公式。略去 Lienard-Wiechert 公式的细节证明，这里仅给出结果。

**定理 2.2. Lienard-Wiechert 位、Lienard-Wiechert 势**

单一带电粒子  $q$  在自由空间中运动，当运动轨迹  $\mathbf{R}(t)$  给定，则在空间中任一位置  $P$  (记作  $\mathbf{r}_P$ )、任一时刻  $t$  的电场与磁场由该粒子在过去时间  $t'$  (或写成  $t_{\text{ret}}$ ) 产生的电场与磁场贡献。推迟条件要求  $c(t - t') = r(t') = |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t')|$ ，位函数由下式给出

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right\}_{\text{ret}} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \left\{ \frac{\boldsymbol{\beta}}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right\}_{\text{ret}} \quad (2.8)$$

其中，“ret”表示括号内所描述的是在  $t'$  推迟时刻的物理量， $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t_{\text{ret}})$  是  $\mathbf{r}(t_{\text{ret}}) = \mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t_{\text{ret}})$  的单位向量。上式  $\frac{\mu_0 c}{4\pi}$  有时又写做  $\frac{Z_0}{4\pi}$ ，其中， $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \approx 377 \Omega$ 。

**证明** 严格的证明从推迟条件开始，可参考 Stupakov & Penn 一书的 Chapter 15。

**注** 对电子而言， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。 □

**定理 2.3. Lienard-Wiechert 场**

单一带电粒子  $q$  在自由空间中运动，当运动轨迹  $\mathbf{R}(t)$  给定，则在空间中任一位置  $P$  (记作  $\mathbf{r}_P$ )、任一时刻  $t$  的电场与磁场由该粒子在过去时间  $t'$  (或写成  $t_{\text{ret}}$ ) 产生的电场与磁场贡献。推迟条件要求  $c(t - t') = r(t') = |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t')|$ ，场函数由下式给出。利用

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.10)$$

其中，微分运算操作在观察位置的时空坐标。有以下结果

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{cr(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{[\mathbf{n}_{\text{ret}} \times \mathbf{E}(t)]}{c} \quad (2.12)$$

其中， $\dot{\boldsymbol{\beta}} = d\boldsymbol{\beta}/dt$ ，“ret”表示括号内所描述的是在  $t'$  推迟时刻的物理量， $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t_{\text{ret}})$  是  $\mathbf{r}(t_{\text{ret}}) = \mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t_{\text{ret}})$  的单位向量， $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ret}} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt_{\text{ret}}}$ 。

**证明** 可参考 §2.2.2 或 Stupakov & Penn 一书的 Chapter 15 或 A. Hofmann §2.2-§2.5。

**注** 上式  $\mathbf{E}(t)$  等号右边第一项称速度场或库仑场或近场 (near field)，第二项称加速场或远场 (far field) 或辐射场。

**注** 对电子而言， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。 □

**练习 2.2 试推导 Lienard-Wiechert 场的时域表示式。**

**解** 推导可以在假设 Lienard-Wiechert 位函数已知的前提下开始，逐步推导得到 Lienard-Wiechert 场。有些读者对没有自己经历从头一步步推导得到的结果觉得不满意，那么也可以试着从 Maxwell 方程组开始，先得到 Lienard-Wiechert 位函数，再到 Lienard-Wiechert 场函数。 ■



**笔记** Maxwell 电磁理论在 1873 年大致趋于完整。25 年后，Lienard-Wiechert 公式大约在 1898 年给出。随后，G.A. Schott 系统分析了同步辐射特性<sup>1</sup>。一直到 20 世纪中，同步辐射首次在 1947 年美国通用电气公司 (General Electric) 同步加速器发现。

### 定义 2.2. 坡印廷向量 (Poynting vector): 单位面积单位时间电磁能量

电磁辐射的单位面积单位时间能量，又称能流密度 (energy flow density) 或功率密度 (power density)，可以用坡印廷向量  $\mathbf{S}$  表示，有

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2.13)$$

对辐射源，常用单位立体角的辐射功率描述，可写成

$$\frac{dP_p}{d\Omega} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} r^2 \quad (2.14)$$

其中， $\mathbf{n}, r$  分别为源至观察者的单位方向向量与距离， $\Omega$  为立体角 (留意，不要与电阻或阻抗单位混淆)。

**注** 准确地说，这里定义的量  $dP_p/d\Omega$  为“观察者”的辐射功率角分布，即远处一位置相对于源在方向角  $\Omega \rightarrow \Omega + d\Omega$  范围内接收到的辐射功率  $dP_p$ ，与“源”发出的辐射功率角分布  $dP/d\Omega$  未必总是一致。当“源”与“观察者”没有相对运动时，两者  $dP/d\Omega = dP_p/d\Omega$  相等；当“源”与“观察者”存在相对运动时，如：一般假设观察者不动，源移动，则  $dP/d\Omega \neq dP_p/d\Omega$ 。

“源”发出的辐射功率角分布可写成

$$\frac{dP}{d\Omega} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} R^2 \frac{dt}{dt'} = \frac{dP_p}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} \quad (2.15)$$

更多讨论可参考 §3.2。□

### 性质 2.1. Lienard-Wiechert 场特性

由坡印廷向量的定义，有

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathbf{E} \times [\mathbf{n}_{\text{ret}} \times \mathbf{E}]] \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} [E^2 \mathbf{n}_{\text{ret}} - (\mathbf{n}_{\text{ret}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}] \end{aligned} \quad (2.16)$$

可以看到，

- $S \propto E^2$
- $S_{\text{近场}} \propto r^{-4}$ 、 $S_{\text{远场}} \propto r^{-2}$ 、 $S_{\text{混合项}} \propto r^{-3}$
- 只有远场能流能够传播到远处  $r \gg 1$ ，其它都衰减为 0
- 仅有远场分量不能满足麦克斯韦方程组
- 对辐射场分量，有  $\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{n}_{\text{ret}} = 0$ 、 $\mathbf{S} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \mathbf{n}_{\text{ret}}$

<sup>1</sup>G.A. Schott, Electromagnetic Radiation and the Mechanical Reactions Arising from It, Cambridge University Press, (1912).

**性质 2.2. 坡印廷向量与辐射功率的关系**

坡印廷向量与“源”的辐射功率有如下关系

$$P = \iint \mathbf{S} \cdot d\mathcal{S} = \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathcal{S} = \frac{1}{\mu_0} \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{S} \quad (2.17)$$

### 2.2.1 粒子匀速运动产生的场 $\dot{\beta} = 0$ 、 $\mathbf{E}(t) \parallel \mathbf{r}_b$

先给出结论：

粒子匀速运动不辐射，场线不扭曲，产生的场非辐射场。

从物理图像理解，电子不加速  $\Rightarrow$  电场线不扭曲  $\Rightarrow$  在自由空间中没有净电磁辐射。  
参考图 2.2。

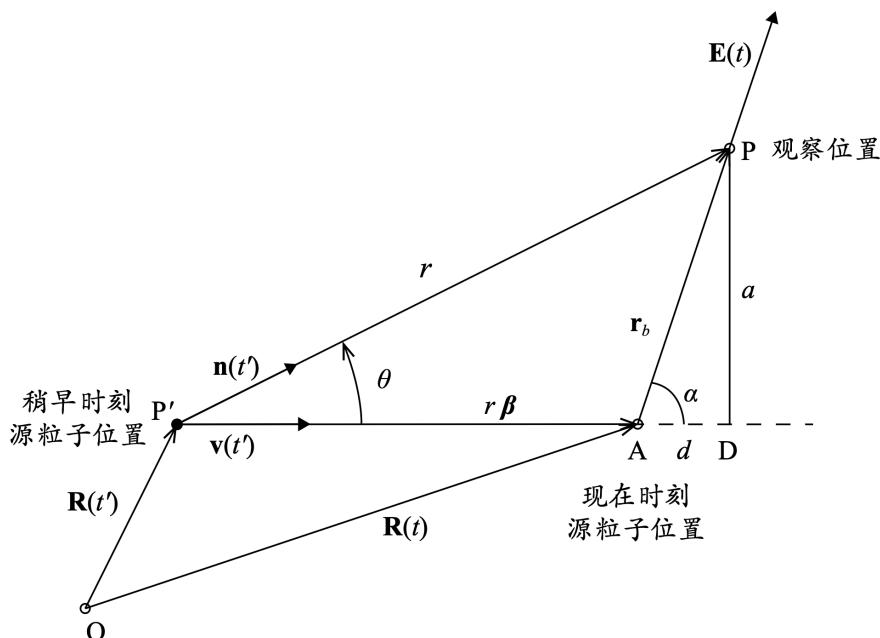


图 2.2：粒子匀速运动。

现在， $\dot{\beta} = 0$ ，从 Lienard-Wiechert 场看，在  $t$  时刻、 $P$  位置有

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{r(1-\beta^2)(\mathbf{n}-\beta)}{r^3(1-\mathbf{n}\cdot\beta)^3} \right\}_{\text{ret}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{\mathbf{r}_b}{\{r^3(1-\mathbf{n}\cdot\beta)_{\text{ret}}^3\}} \quad (2.18)$$

其中， $r(\mathbf{n}-\beta) = \mathbf{r}_b$ 。

在圆柱坐标系下，电场、磁场可以写成<sup>2</sup>

$$\mathbf{E}(z, t) = [E_\rho, E_\phi, E_z] = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{[a, 0, z - \beta ct]}{(a^2 + \gamma^2(z - \beta ct)^2)^{3/2}} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B}(z, t) = [B_\rho, B_\phi, B_z] = \frac{q\beta\gamma}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{[0, a, 0]}{(a^2 + \gamma^2(z - \beta ct)^2)^{3/2}} \quad (2.20)$$

<sup>2</sup>对细节感兴趣的读者，可尝试推导此结果。或参考 A. Hofmann 一书的 §2.6.1。

能流密度与能量密度分别有

$$\mathbf{S}(z, t) = [S_\rho, S_\phi, S_z] = \frac{q^2 \beta c \gamma^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{[-a(z - \beta ct), 0, a^2]}{(a^2 + \gamma^2(z - \beta ct)^2)^3} \quad (2.21)$$

$$w_{\text{EM}}(z, t) = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{q^2 \gamma^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{a^2(1 + \beta^2) + (z - \beta ct)^2}{(a^2 + \gamma^2(z - \beta ct)^2)^3} \quad (2.22)$$

可以检验，两者满足坡印廷定理

$$\frac{\partial w_{\text{EM}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (2.23)$$

表征粒子匀速运动产生的场不造成辐射损失。

再来，看不同能量的粒子匀速运动时产生的电场分量，如图 2.3 与 2.4 所示。粒子能量越高，其库仑场越收敛而向中心平面汇聚，就像松饼 (pancake) 一样。留意，尽管场线往中心平面汇聚，但不扭曲，因此不是辐射场，不造成辐射损失。

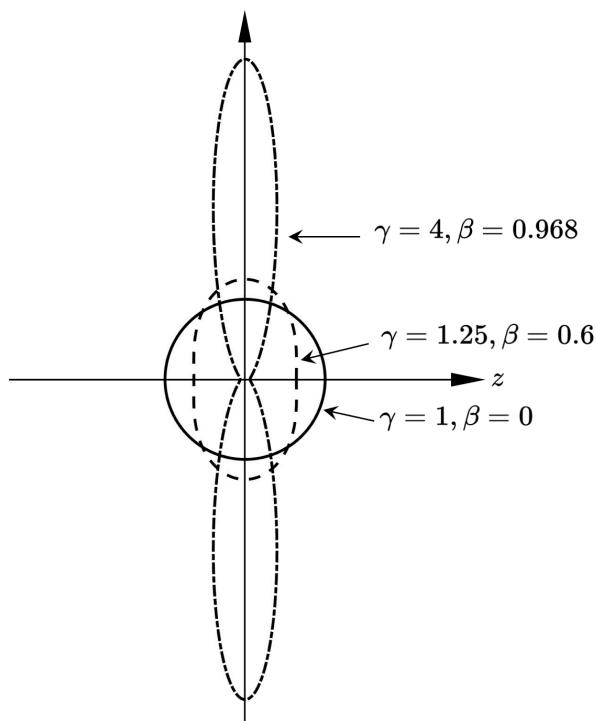


图 2.3: 不同能量的粒子匀速运动。图例画出归一化电场强度  $E/E_C$  对不同粒子能量的样貌，其中， $E_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_b^2}$ 。

**练习 2.3** 试利用 MATLAB 重复图 2.3 结果。 ■

**解** 不失一般性，令  $t = 0$ ，则电场、磁场可写成

$$\mathbf{E}(z, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{[\sin \alpha, 0, \cos \alpha]}{r_b^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}(z, 0) = \frac{q\beta}{4\pi\epsilon_0 c \gamma^2} \frac{[0, \sin \alpha, 0]}{r_b^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}$$

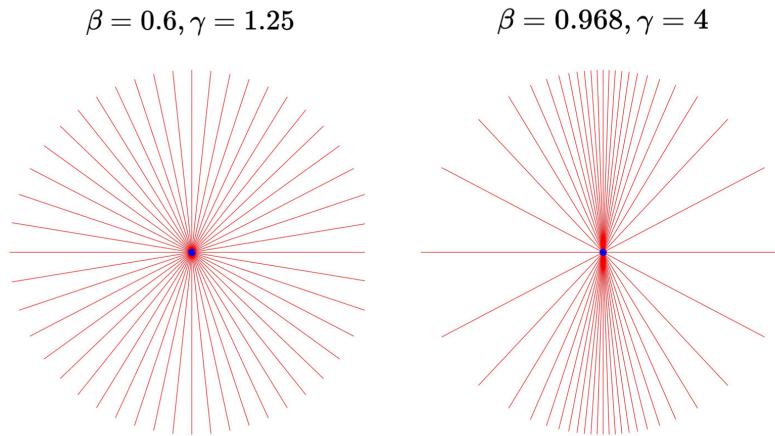


图 2.4: 不同能量的粒子匀速运动时产生的电场线。

场大小可写成

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2r_b^2} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} = \frac{E_C}{\gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}$$

$$B = \frac{q\beta}{4\pi\epsilon_0 c \gamma^2 r_b^2} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} = \frac{E_C \beta}{c \gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}$$

其中,  $E_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_b^2}$ 。 ■



**笔记** 这里介绍的库仑场有时又称空间电荷场, 更细致的讨论将在第 11 章介绍。此外, 这里的场与波导或谐振腔 TM 模式的场形类似 (因恒有  $B_z = 0$ ), 因此在分析带电粒子经过波导或谐振腔产生的尾场时, 时常以 TM 模的基底展开。当  $\gamma \rightarrow \infty$  时,  $E_z \rightarrow 0$ , 仅剩横向  $E_\rho, B_\phi$ , 类似于 §1.9 介绍的均匀平面电磁波的切片或 TEM 波切片。

✍ **练习 2.4** 试验证上面计算的电场满足高斯定律  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ 。 ■

仍考虑粒子沿直线运动, 但如果不是匀速, 而是在某一时刻存在  $\dot{\beta} \neq 0$  时, 情况会怎么样? 这里仅定性描述, 将在下一章定量分析。这里先从物理图像理解, 参考图 2.5。

粒子加速  $\Rightarrow$  电场线扭曲  $\Rightarrow$  产生电磁辐射]。

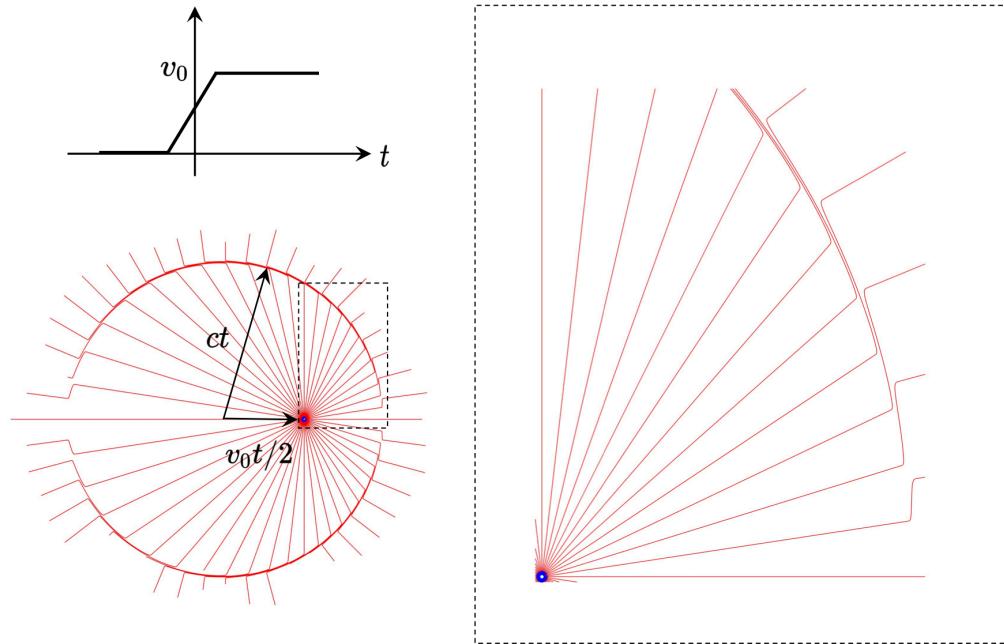


**笔记** 完整的 Lienard-Wiechert 场满足高斯定律。高斯定律对静场与时变场都是严格成立的  $\Rightarrow$  丢不开、甩不掉、挥之不去的电场线。



**笔记** 对电场线扭曲的视觉图像感兴趣的读者, 可参考:

- R.Y. Tsien, Pictures of Dynamic Electric Fields, AJP **40**, 46 (1972). <https://aapt.org/ajp/article/40/1/46/12473>



**图 2.5:** 粒子直线加速产生辐射的物理图像：电场线扭曲。左上图为粒子速度改变情况，左下图为电场线在空间的分布。右图为电场线的局部放大图。

[tation.org/doi/10.1119/1.1986445](https://doi.org/10.1119/1.1986445)

- H.C. Ohanian, Electromagnetic radiation fields: A simple approach via field lines, AJP **48**, 170 (1980). <https://doi.org/10.1119/1.12177>

## 2.2.2 推导：Lienard-Wiechert 场

作为补充，我们在这一小节推导 Lienard-Wiechert 场。

在开始前，先整理下面将用到的几个结果。首先，有推迟条件  $c(t - t_{\text{ret}}) = |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t_{\text{ret}})|$ ，及其微分关系  $dt = (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})dt'$ ，与

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt'} &= \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} = -\frac{d\mathbf{R}(t')}{dt'} = -\mathbf{v}(t') = -c\boldsymbol{\beta}(t') \\ \frac{dr}{dt'} &= -cn \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \neq \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \right|\end{aligned}\tag{2.24}$$

已知 Lienard-Wiechert 位函数有

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right\}_{\text{ret}}\tag{2.25}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 cq}{4\pi} \left\{ \frac{\boldsymbol{\beta}}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right\}_{\text{ret}}\tag{2.26}$$

其中，“ret”表示括号内所描述的是在  $t'$  推迟时刻的物理量， $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t_{\text{ret}})$  是  $\mathbf{r}(t_{\text{ret}}) = \mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t_{\text{ret}})$  的单位向量。

对应的 Lienard-Wiechert 场将由以下关系推导得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}\quad (2.27)$$

其中,  $\nabla$  与  $\partial/\partial t$  对观察位置的时空坐标操作。需要计算三项:  $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ 、 $\nabla\varphi$ 、 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。

先考虑  $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ , 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{dt'}{dt} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t'} = \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t'} \\ &= \frac{\mu_0 cq}{4\pi} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \left[ \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \frac{\partial(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})}{\partial t'} \right]_{\text{ret}}\end{aligned}\quad (2.28)$$

其中, 括弧内的最后一项

$$\frac{\partial}{\partial t'}(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \frac{dr}{dt'} - \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = -c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) + c\beta^2 - \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \quad (2.29)$$

其中, 用到了上面的  $\frac{dr}{dt'}$  与  $\frac{d\mathbf{r}}{dt'}$ 。因此, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\mu_0 cq}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} + \frac{c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - c\beta^2 + (\mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \boldsymbol{\beta} \right) \right\}_{\text{ret}} \\ &= \frac{\mu_0 cq}{4\pi} \left\{ \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2) c\boldsymbol{\beta}}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta}}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}}\end{aligned}\quad (2.30)$$

再来, 考虑  $\nabla\varphi$ , 有

$$\nabla\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right)_{\text{ret}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\nabla(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right)_{\text{ret}} \quad (2.31)$$

其中, 此梯度项  $\nabla(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})$  化简需要费些功夫。思考一下这一项对应的物理图像: 在一个固定时刻  $t$ , 在观察位置  $\mathbf{r}_p$  附近的一小范围  $\Delta\mathbf{r}_p$  内, 评估  $(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})$  如何在要求一固定时刻  $t$  的前提下, 在其它物理量相应改变时导致  $(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})$  的改变量, 即  $\Delta(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})$ 。根据改变量与梯度的定义知,  $\Delta(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \nabla(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \Delta\mathbf{r}_p$ , 其中, 我们希望先找到  $\Delta(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})$ 。将此项展开, 有

$$\Delta(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \Delta r - (\Delta\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{r} \cdot \Delta\boldsymbol{\beta}) \quad (2.32)$$

在此, 先思考一下,  $\Delta r$  项 — 或更准确地说,  $\Delta\mathbf{r}$  项 — 表征的物理图像, 参考图 2.6。图中  $\Delta\mathbf{r}$  由两个因素贡献:

1. 观察位置改变: 在一固定时刻  $t$ , 在观察位置  $\mathbf{r}_p$  附近的一小范围 — 比如: 图中的 A 点与 B 点 — 的差异导致。观察位置改变带来的贡献写成  $\Delta\mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}_p$ 。
2. 电荷位置改变: 在一固定时刻  $t$ , 同时刻抵达 A 点与 B 点的电磁波意味着它们出发的时刻不同, 即  $\mathbf{A}'$  与  $\mathbf{B}'$  的位置、时刻是不一样的。运动源电荷带来的位置改变写成  $\Delta\mathbf{r}_2 = (\partial\mathbf{r}/\partial t') \Delta t'$ 。

利用  $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t'} = -c\boldsymbol{\beta}(t')$ , 有

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_2 = \Delta\mathbf{r}_p - c\boldsymbol{\beta}\Delta t' \\ \Delta r &= \mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{r}_p - c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\Delta t'\end{aligned}\quad (2.33)$$

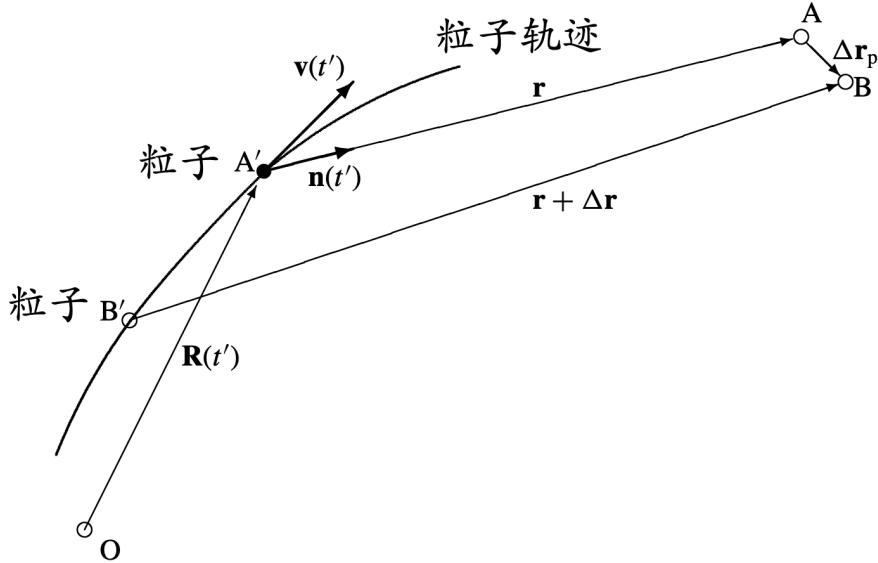


图 2.6: 涉及  $\Delta\mathbf{r}$  项推导的几何示意图。图中的  $A', B'$  为同一粒子在不同时刻的位置。

留意，这里与前面结果  $\frac{dr}{dt'} = -c\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(t')$  不一样，因为前面假设观察位置不动，但现在则允许改变  $\Delta\mathbf{r}_p$ 。同理，因为要求在一固定时刻  $t$  的观察位置  $A, B$  点接受到辐射场，则在发出电磁波的  $A'$  与  $B'$  的时间差  $\Delta t'$  可以与  $\Delta r$  关联，有

$$\Delta r = -c\Delta t' = \mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{r}_p - c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\Delta t' \quad (2.34)$$

根据  $\Delta t' = \nabla t' \cdot \Delta\mathbf{r}_p$ ，于是，有

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{n}}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \quad (2.35)$$

将以上结果代回  $\Delta(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \Delta r - (\Delta\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{r} \cdot \Delta\boldsymbol{\beta})$ ，现在有

$$\begin{aligned} \Delta(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) &= -c\Delta t' - (\Delta\mathbf{r}_p \cdot \boldsymbol{\beta}) + c\beta^2\Delta t' - (\mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\Delta t' \\ &= \left( -\boldsymbol{\beta} + \frac{(1 - \beta^2)}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}\mathbf{n} + (\mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n} \right) \Delta\mathbf{r}_p \end{aligned} \quad (2.36)$$

因此，有

$$\nabla(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \left\{ \frac{\left( c(1 - \beta^2) + r(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right) \mathbf{n} - c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right\}_{\text{ret}} \quad (2.37)$$

于是，得到  $\nabla\varphi$  项

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{1}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right)_{\text{ret}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\nabla(r - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right)_{\text{ret}} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(1 - \beta^2)\mathbf{n} - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n}}{cr(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right)_{\text{ret}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

由此，先得到了 Lienard-Wiechert 场的电场分量

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cr(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{cr(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

其中，用到了向量恒等式  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ 。

前面计算了  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 、 $\nabla \varphi$  项，要得到 Lienard-Wiechert 场的磁场分量还需要计算  $\nabla \times \mathbf{A}$  项。利用向量恒等式  $\nabla \times (u\mathbf{A}) = (\nabla u) \times \mathbf{C} + u(\nabla \times \mathbf{C})$  展开，有

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \left( \frac{\nabla \times \beta}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)} - \frac{\nabla(r - \mathbf{r} \cdot \beta) \times \beta}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^2} \right)_{\text{ret}} \quad (2.40)$$

其中，先从化简括弧中的第一项开始，由  $\Delta\beta = \dot{\beta}\Delta t'$ ，有

$$\nabla \times \beta = [\nabla \times (\Delta t' \dot{\beta})] = \Delta t' (\nabla \times \dot{\beta}) + \nabla t' \times \dot{\beta} = -\frac{\mathbf{n} \times \dot{\beta}}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)} \quad (2.41)$$

$\nabla(r - \mathbf{r} \cdot \beta)$  在前面 Eq. (2.37) 已经给出。于是，Lienard-Wiechert 场的磁场分量有

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 c q}{4\pi} \left\{ \frac{(c(1 - \beta^2) + r(\mathbf{n} \cdot \dot{\beta}))[\mathbf{n} \times \beta]}{cr^2(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^3} + \frac{[\mathbf{n} \times \dot{\beta}]}{cr(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^2} \right\}_{\text{ret}} \\ &\quad - \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)[\mathbf{n} \times \beta]}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^3} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\beta})[\mathbf{n} \times \beta] + (1 - \mathbf{n} \cdot \beta)[\mathbf{n} \times \dot{\beta}]}{cr(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^3} \right\}_{\text{ret}} \\ &= \frac{\mathbf{n}_{\text{ret}} \times \mathbf{E}}{c} \end{aligned} \quad (2.42)$$

## 2.3 Jefimenko 公式与 Heaviside-Feynman 公式

回顾前面的讨论，考虑推迟情况下的电磁场问题，利用位函数

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(t')}{r(r', t')} dx' dy' dz' \quad (2.43)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(t')}{r(r', t')} dx' dy' dz' \quad (2.44)$$

可以得到以单粒子运动物理量表示的 Lienard-Wiechert 势与场。除了 Lienard-Wiechert 形式外，还有另一个形式，称 Jefimenko 形式。Jefimenko 公式以粒子束团的电荷密度  $\rho(\mathbf{r}', t_r)$  与电流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)$  分布函数表示，考虑推迟关系，有

### 定理 2.4. Jefimenko 公式

利用推迟位函数  $\varphi(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  与  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \\ &\iiint \left[ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}', t_r) + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t_r)}{\partial t} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\partial t} \right] d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r) + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\partial t} \right] d\mathbf{r}' \quad (2.46)$$

其中， $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ ,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  为电子电荷密度， $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  为对应电荷运动的电流密度<sup>a</sup>。当电荷静止时， $\partial/\partial t = 0$ ，上式退化为库仑定律与 Biot-Savart 定律。

**证明** 参考 D.J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 3rd ed., Pearson (2007) 一书的 §10.2.2。

**注** 有时候 Jefimenko 公式中的  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  公式又称推广的库仑定律与  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  称推广的 Biot-Savart 定律。

<sup>a</sup>此电流又称运流电流。 □

### 练习 2.5 试推导 Jefimenko 公式。 ■

另一个也是推广形式，将 Jefimenko 公式中的电荷密度与电流密度分布函数考虑为单粒子情况，则有如下的 Heaviside-Feynman 公式。

### 定理 2.5. Heaviside-Feynman 公式

考虑电荷密度与电流密度分布函数考虑为单粒子情况， $\rho(\mathbf{r}', t_r) = q\delta[\mathbf{r}' -$

$\mathbf{r}(t_r)], \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r) = q\mathbf{v}(t_r)\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t_r)]$ , 则有

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} \right] \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{e}_{r'} \times \frac{\mathbf{E}}{c}\end{aligned}\quad (2.47)$$

其中,  $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ 。当电荷静止时, 上式退化为库仑定律。

**证明** 参考 John David Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd ed., John Wiley & Sons (1998) 一书的 §6.5。 □

✍ **练习 2.6** 试推导 Heaviside-Feynman 公式。 ■

## 2.4 浅谈：生活中的电磁辐射

虽然此讲义以下篇幅将讨论粒子加速器产生的电磁辐射，这里稍稍跑题，简短介绍生活中可能遭遇到的电磁辐射。首先，将电磁辐射分两种：天然形成的辐射、人为方式形成的人工辐射。生活中遇到的电磁辐射有时又称“放射”，虽然在后面我们几乎不采用“放射”一词。

### 2.4.1 天然辐射

天然形成的辐射包含来自外太空的高能粒子，又称宇宙射线 (cosmic ray)，穿过大气层到达地球表面。一般来说，在海拔较高的地方，这类辐射较多，强度也较大。除了来自外太空，地表土壤和岩石中可能含有天然放射性元素，如：铀 (uranium, U)、钍 (thorium, Th) 和镭 (radium, Ra)。这些元素通过“衰变”而放出辐射。比如，镭-226 衰变产生氡气 (radon, Rn)，从土壤和建筑材料中释放出来，容易附着在空气中的悬浮颗粒，积聚在室内空气中。这些放射性的、寿命较短的氡气被人体吸入体内，沉积在气管或支气管等肺部组织内，氡气衰变时会放出  $\alpha$  粒子，对局部组织或细胞产生辐射照射。如果长期工作或生活在氡浓度较高的环境中，受到的辐射剂量较大，最终有可能导致肺癌的发生。

天然辐射除了来自外太空或地表，日常生活中接触到的水和食物中也普遍存在微量的天然放射性同位素，如：钾-40、碳-14 等。这些源于天然本底辐射，是我们日常摄入的一部分。平时喝的自来水或矿泉水中天然放射性核素浓度虽有差异，但总体含量较低，食品中镭-226 等放射性核素含量也属微量，一般不会对人体健康和日常生活造成影响。

### 2.4.2 人工辐射

顾名思义，人工辐射源自人为方式形成的辐射，再分医疗辐射、核能和工业辐射。日常生活中，医疗检查和治疗是最常见的人工辐射暴露来源。常见的有：在医院拍 X 光片、电脑断层扫描 (computerized tomography, CT) 等影像学检查，以及使用放射性同位素的核医学检查等。虽然会带来一定的辐射剂量，但利大于弊，其所提供的重要诊断信息对疾病诊治意义重大。除了医疗辐射，核电厂、工业射线设备和放射性同位素在工业中的应用也会产生辐射。涉及工业应用的辐射源，比如：无损检测  $\gamma$  射线设备，工作人员可能受人工辐射影响。有些读者可能会有疑问：一些家用电器是否也产生辐射？如：微波炉、电视、手机等设备。确实这些设备会产生电磁辐射，但是这些设备发出的辐射通常属于非电离辐射 (nonionizing radiation)，在正常使用前提下，其电磁能量不足以使人体内的原子或分子发生电离作用。

### 2.4.3 生活中电磁辐射的量化与对人体的影响

#### 定义 2.3. 辐射剂量单位：Sv

符号：Sv (sievert)，称希沃特、西弗，简称希。是一个由于人类健康安全防护上的需要而确定的具有专门名称的 SI 国际单位制导出单位，为受辐射等效生物当量的单位。得名于瑞典生物物理学家、辐射防护专家 Rolf Maximilian Sievert。

定义用来表示辐射对人体影响的程度

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ J/kg} \quad (2.48)$$

有

$$1 \text{ Sv} = 1000 \text{ mSv} = 1000000 \mu\text{Sv} = 10000 \text{ erg/g} = 100 \text{ rem} \quad (2.49)$$

**注** 更多细节可参考 Wikipedia <https://en.wikipedia.org/wiki/Sievert>。 □

如果按照国际放射防护委员会 (International Commission on Radiological Protection, ICRP)<sup>3</sup> 的标准，来自非背景辐射的电离辐射，一般人为造成的辐射年剂量规定为一年不超过 1 毫西弗 (1 mSv/yr)，换算就是每小时 0.1 微西弗 (0.1 μSv/h)。一般加速器实验室工作人员会佩戴剂量计 (dosimeter)。更细致的评估还与人体不同部位相关。

- 放射性职业工作者一年累积全身受职业照射的上限是 20 mSv/a (/a 表示每年)。
- 值得注意如果超过 20 微西弗，就是紧急状况。
- 如果人体瞬间接受辐射量超过 250 毫西弗，身体就会造成不可见的伤害。
- 超过 2 西弗则有致死的可能。
- 超过 6 西弗而未经适当医疗，死亡率为百分之百。

常见辐射剂量水平：

- 天然背景辐射 ⇒ 每年约 2-3 mSv。不同地区年剂量范围大约在 1-10 mSv。
- 胸部 X 光 ⇒ 一次约 0.1 mSv (单次检查)。
- 牙科口内 X 光照相 ⇒ 约 1-8 μSv (单次)；全景约 4-30 μSv (单次)。
- 全身 CT 扫描 ⇒ 一次约 10 mSv (单次检查)。如果仅部分部位，则剂量稍低。
- 乘坐飞机 ⇒ 跨大西洋航班约 0.05 mSv (单次旅行)。
- 职业照射 ⇒ 20-50 mSv (年剂量限值)。
- 核事故现场 ⇒ 切尔诺贝利 (Chernobyl) 中心区域，如：控制室，约  $5 \times 10^6 \mu\text{Sv/sec}$ 。

辐射对人体影响的几个关键因素：

- 辐射剂量 ⇒ 剂量越高，影响越大。
- 辐射种类 ⇒ 不同种类辐射，比如： $\alpha, \beta, \gamma$  射线，对人体的作用不同。 $\alpha$  射线为氦原子核， $\beta$  射线为高速电子或正电子， $\gamma$  射线为高能量的电磁辐射 (光子)。

<sup>3</sup>ICRP 为从辐射专家的角度研究核辐射对人体的伤害以及提出忠告和相关预防措施的非盈利国际学术组织。目前世界上许多国家依据 ICRP 的建议制定与核辐射有关的法令法规，可参考<https://www.icrp.org>。

- 暴露时间  $\Rightarrow$  暴露时间越长，累积剂量越高，影响越显著。

低剂量长期暴露，如：背景辐射，通常无明显健康影响。高剂量暴露，如：核事故现场、频繁高剂量检查，则可能增加罹患癌症等健康风险。

## ❀ 第二章 补充习题 ❀

1. 如何消除测量仪受各种外部电磁干扰的影响<sup>4</sup>? 考虑如下几种情况:

- a) 低频电场
- b) 高频电场
- c) 低频磁场
- d) 高频磁场

**解**

- a) 用良导体壳或金属网将仪器罩上。由于低频电场趋肤深度约为 1 cm 左右，所以导体壳应略厚一些。
- b) 可用两层不同介质组成的球壳将测量仪器罩上，要求内层介质的介电系数大于外层介质的介电系数。这样一来，电磁波在二层介质的界面上发生全反射，使高频电场穿透深度很小。
- c) 用铁磁性材料罩上。所用材料的厚度视磁场强弱而定，磁场越强，所需材料越厚。
- d) 用铁磁性材料将仪器罩上。如果条件允许，用超导体壳罩上更好。

---

<sup>4</sup>此题参考自物理学大题典 2 – 电磁学与电动力学。

# 第三章 电磁辐射的定量理论：功率、能量、谱

## 内容提要

- Lienard-Wiechert 场时域、频域表示       横向加速、纵向加速
- 辐射功率、辐射能量、谱、角分布       电子加速器的几种电磁辐射机制

第二章讨论了推迟关系，推导了 Lienard-Wiechert 场的一般表示。利用得到的结果讨论了一个简化情况：粒子直线匀速运动产生的场为非辐射场。这一章讨论当粒子经历加速过程时，将产生辐射场，并给出几个量化辐射场的物理量，包含功率分布、能量分布、谱分布、角分布等特性。最后，定性介绍电子加速器的几种电磁辐射机制，包括契伦科夫辐射、渡越辐射和 Smith-Purcell 辐射。这一章介绍的内容可视为后面第4章、第5章的预备知识。

## 3.0 问答预览

### 1. 什么是电磁辐射？

⇒ 带电粒子在经历加速（切线或法线）运动时发出的电磁辐射场，以光速传播。

### 2. 什么是 Lienard-Wiechert 公式？

⇒ 描述加速运动的带电粒子产生电磁场的一种物理公式。

### 3. 如何区别电磁场的近场和远场？

⇒ 近场能量不向外传播，而远场能量可以传播到远处。

### 4. 辐射功率、辐射能量、谱、角分布分别代表什么物理意义？

⇒ 辐射功率是单位时间内辐射的能量，辐射能量是总辐射的电磁能量，电磁频谱描述辐射在不同频率上的场或能量占比分布，辐射角分布则是描述辐射在空间方向的分布。

### 5. 什么是横向加速和纵向加速？

⇒ 横向加速是粒子运动方向改变，纵向加速是粒子运动速度改变。

### 6. 什么是契伦科夫辐射？

⇒ 当带电粒子在周遭介质环境中，当粒子运动速度超过电磁辐射运动速度时，产生的一种特殊的电磁辐射。

### 7. 什么是渡越辐射？

⇒ 当带电粒子穿过不同介质的分界面时产生的一种电磁辐射。

### 8. 什么是 Smith-Purcell 辐射？

⇒ 当带电粒子掠过周期结构（光栅）时产生的一种电磁辐射。

### 9. 什么是同步辐射和波荡器辐射？

⇒ 它们是两种重要的电磁辐射机制，将在后续章节中详细介绍。

### 10. 这一章将提到的辐射机制有哪些实际应用？

⇒ 契伦科夫辐射可以用来探测高能粒子, 渡越辐射可以用来诊断粒子束, Smith-Purcell 辐射可以用来产生毫米波、太赫兹或可见光辐射。

这一章讨论的空间坐标变量如图 3.1 所示。

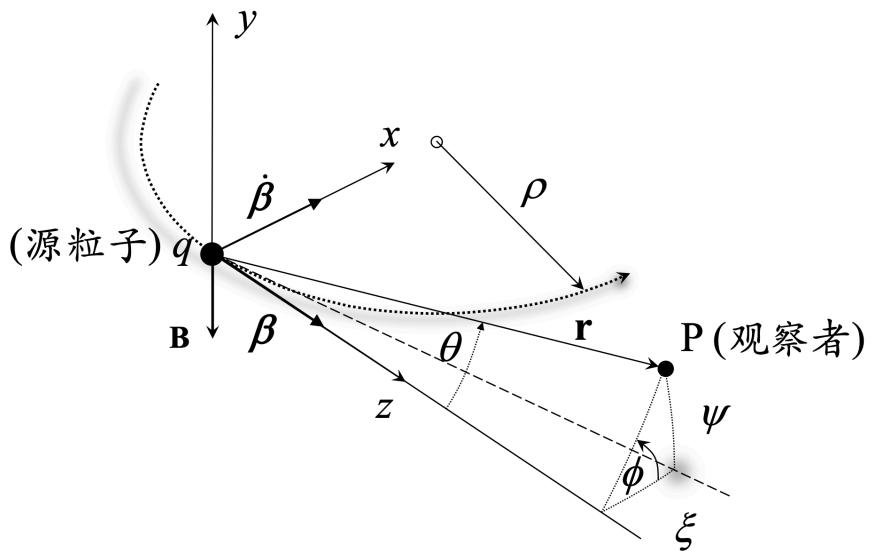


图 3.1:  $\psi = \theta \sin \phi$ ,  $\xi = \theta \cos \phi$ ,  $d\Omega = \sin \theta d\phi d\theta \approx \theta d\phi d\theta = d\xi d\psi$ 。描述辐射场的两种方式:  $\theta, \phi$  与  $\psi, \xi$ 。

## 3.1 Lienard-Wiechert 场的频域表示

### 3.1.1 关于 Lienard-Wiechert 场的几点讨论

Lienard-Wiechert 场的显形式包含近场 (near field) 与远场 (far field)，其中， $S_{\text{近场}} \propto r^{-4}$ 、 $S_{\text{远场}} \propto r^{-2}$ 。对辐射功率  $P = \iint \mathbf{S} \cdot d\mathcal{S}$ ，已知近场  $P_{\text{近场}} \propto r^{-2}$ ，在远处不传播能量；远场  $P_{\text{远场}}$  与  $r$  无关，仅远场能传播能量。但是，在远处计算能流时，能不能省略近场仅考虑远场呢？简短的回答是，多数情况可以，但有时候不行  $\Rightarrow$  要小心。

一般而言，我们关心的电磁辐射场特性有：

- 功率 (即，对横向截面积分的能流)  $P$ 、能量  $U$
- 角分布 (angular distribution)  $dP/d\Omega$
- 频率分布 (frequency distribution, spectrum)  $dP/d\omega$
- 极化分布 (polarization distribution)  $P_\sigma, P_\pi$
- 光量子分布 (number of photons per ...)  $\frac{dn}{dE_\gamma/E_\gamma} = \frac{dn}{d\omega/\omega}, \frac{dn}{d\Omega dE_\gamma/E_\gamma}$

求以上物理量之前，可先利用 Lienard-Wiechert 场求得电场  $\mathbf{E}(t)$  或  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ 。然后，找到以上复合物理量与电场  $\mathbf{E}(t)$  或  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  的关系。最后，将得到的电场代入计算。

**注** 除了功率计算，其它分布的计算仅考虑远场是可以的。另外， $dP/d\omega$  又称“功率谱” (power spectrum)。既然功率为单位时间内的辐射场能量，经过对时间的傅里叶变换，“功率谱”的概念是否合理？ $\Rightarrow$  合理，关键在于这里的“单位时间”与涉及傅里叶变换的“时间”不是用一个时间。

对于电子同步加速器或储存环，功率以“圈”为单位时间，此时间间隔为固定值；“谱”则是对电子发出同步辐射过程的时间依存关系做傅里叶变换。



**笔记** 比起时域物理量，以上关心的复合物理量好像更多都在频域与角分布。为什么（现阶段）不关心时域脉冲长度？其实时域的部分信息已经隐含在频谱分布里了，但还不完全，如果探测器还有频宽/滤波效应，那么应该先将探测器视为窗函数 (window function)，在频域将辐射频谱与窗函数相乘之后再作逆傅里叶变换，才能得到在观察位置的时域脉冲分布。因为这里我们暂时不考虑探测器，因此着重在频域分析。

### 3.1.2 相对论粒子加速运动产生的场的一般结果

这里引用第2章得到的 Lienard-Wiechert 场的结果。

### 定理 3.1. Lienard-Wiechert 场的时域表示

单一带电粒子  $q$  在自由空间中运动，当运动轨迹  $\mathbf{R}(t)$  给定，则在空间中任一位置  $P$  (记作  $\mathbf{r}_P$ )、任一时刻  $t$  的电场与磁场由该粒子在过去时间  $t'$  (或写成  $t_{\text{ret}}$ ) 产生的电场与磁场贡献。推迟条件要求  $c(t - t') = r(t') = |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t')|$ ，场函数由下式给出。利用

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.2)$$

其中，微分运算操作在观察位置的时空坐标。有以下结果

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{r^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{cr(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{[\mathbf{n}_{\text{ret}} \times \mathbf{E}(t)]}{c} \quad (3.4)$$

其中， $\dot{\boldsymbol{\beta}} = d\boldsymbol{\beta}/dt$ ，“ret”表示括号内所描述的是在  $t'$  推迟时刻的物理量， $\mathbf{n}$  是  $\mathbf{r}(t_{\text{ret}}) = \mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t_{\text{ret}})$  的单位向量， $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ret}} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt_{\text{ret}}}$ 。

**证明** 参考 §2.2.2 或 A. Hofmann 一书的 §2.2-§2.5。

**注** 上式  $\mathbf{E}(t)$  等号右边第一项称速度场或库仑场或近场 (near field)，第二项称加速场或远场或辐射场。 □

忽略 Lienard-Wiechert 场的速度项，仅考虑辐射项，有

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}}, \quad \mathbf{B}(t) = \frac{1}{c} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(t)] \quad (3.5)$$

为探讨电磁辐射场的频率特性，需要将含时的 Lienard-Wiechert 场进行傅里叶变换 (Fourier transform)。

定义如下的傅里叶变换<sup>1</sup>

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{i\omega t} dt \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.6)$$

根据定义的傅里叶变换，有

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right) e^{i\omega(t' + \frac{r(t')}{c})} dt' \quad (3.7)$$

现在要进一步化简积分项。利用部分积分 (integration by parts) 公式

$$\int \frac{dU}{dt'} V dt' = UV - \int U \frac{dV}{dt'} dt' \quad (3.8)$$

<sup>1</sup>注意，不同教科书或参考书的定义不尽相同，有的采用  $(1, \frac{1}{2\pi})$  惯例，有的则是  $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$  惯例。此外，有的指数项采用  $e^{-i\omega t} e^{+i\omega t}$ ，有的则为  $e^{+i\omega t} e^{-i\omega t}$ 。这些区别除了体现在 (顺向) 傅里叶变换的微分操作，也体现在逆傅里叶变换时，基于因果律考虑时围道积分的选择。这里的定义依循加速器社群常用惯例。

Lienard-Wiechert 场的频域表示可以进一步按如下方式化简

$$\begin{aligned} U &= \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}, & \frac{dU}{dt'} &= \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \\ V &= e^{i\omega(t' + r(t')/c)}, & \frac{dV}{dt'} &= i\omega(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})e^{i\omega(t' + r(t')/c)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

于是有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 cr} \\ &\times \left( \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} e^{i\omega(t' + r(t')/c)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]] e^{i\omega(t' + r(t')/c)} dt' \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中，积分后第一项略去，假设  $t' = \pm\infty$  时的场对观察者没有影响。

### 定理 3.2. Lienard-Wiechert 场在频域的简化公式

根据定义的傅里叶变换，有

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = -\frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 cr} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]] e^{i\omega\left(t' + \frac{r(t')}{c}\right)} dt' \quad (3.11)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\omega) = \frac{1}{c} [\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}(\omega)] \quad (3.12)$$

其中，假设

- $t' = \pm\infty$  时的场对观察者没有影响，不违背  $|\omega_0 t'| \ll 1$ 。
- $\gamma \gg 1$ ；仅考虑在  $\sim 1/\gamma$  内的辐射场的贡献，忽略了库仑场（速度场）。
- 上式括弧中的  $r, \mathbf{n}$  在对时间  $t'$  积分过程中不变（或缓变）；对长波荡器情况，近处观察可能不准确。

**注** 留意，这里的频域简化公式里没有加速度  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  项。但并不意味着这个定理适用于粒子匀速运动情况。

**注** 这里推导得到的 Lienard-Wiechert 场的频域表示式并不完全等价于 Lienard-Wiechert 场的时域表示式，而是在傅里叶变换过程多做了上述假设。换一种说法，采用简化了的频域表示式通常更容易计算加速粒子的辐射场。

**注** 对电子，有  $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$  C。

**注** 有些教科书给出的式子中，如 Jackson Eq. (14.67)，指数部分为  $i\omega\left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')}{c}\right)$ 。Jackson 一书的  $\mathbf{r}$  为参考原点指向源粒子，不是源粒子与测试粒子（观察位置）向量。对应到此讲义， $\mathbf{r}_{\text{Jackson}}(t') = \mathbf{R}_{\text{此讲义}}(t')$ 。按此讲义符号（图 2.1），有  $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_P - \mathbf{R}$ 。由于  $\mathbf{r}_P$  为常数向量，略去后，指数部分有

$$\begin{aligned} i\omega\left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{\text{Jackson}}(t')}{c}\right) &= i\omega\left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_{\text{此讲义}}(t')}{c}\right) \\ &= i\omega\left(t' + \frac{r(t')}{c} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_P}{c}\right) \rightarrow i\omega\left(t' + \frac{r(t')}{c}\right) \end{aligned}$$

**练习 3.1** 试由 Lienard-Wiechert 场的时域表示推导 Lienard-Wiechert 场的频域简化公式。■

**注** 这里给出的 Lienard-Wiechert 场的频域表示式为简化后的结果，与时域的 Lienard-Wiechert 场并不等价。因此，可以预期，将此简化后的频域表示式做逆傅里叶变换无法还原先前介绍的 Lienard-Wiechert 场的时域表示式。



**笔记** 回忆一下，上面的分析是从第2章介绍的时域表示式开始，经过傅里叶变换，得到 Lienard-Wiechert 场的频域简化公式。当时 Lienard-Wiechert 场的时域表示式则是从给出的 Lienard-Wiechert 势，经过场与位函数的关系  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  得到。在第2章我们没有细讲——只是大致说明——怎么得到 Lienard-Wiechert 势。

有些教科书采用“另一种”讨论 Lienard-Wiechert 场的时域表示式。先从频域 Helmholtz 方程形式的位方程开始，得到位函数的格林函数解，包含提前解 (advanced solution) 与推迟解 (retarded solution)。舍弃不符合因果律的提前解，留下推迟解，写出完整的 Lienard-Wiechert 场的频域表示式。再根据逆傅里叶变换，在频率复平面依循满足物理因果律的围道积分，求出时域 Lienard-Wiechert 场的表示式。此法的一个特点是，在做逆傅里叶变换时出现的许多  $\delta$  函数即对应四维 Minkowski 空间的事件，根据这些  $\delta$  函数而化简的时空积分就好像“选择器”，筛选了四维时空众多电磁辐射场量中，只有那些满足推迟条件的电磁场才“存活”下来。此外，因为分析中考虑的是电荷密度分布  $\rho(\mathbf{r}', t')$  与电流密度分布  $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$ ，作为副产品，这个思路在中途即给出上一章最后介绍的 Jefimenko 公式。尽管分析时的时域、频域次序不同，但结果一致，殊途同归。对此处理方式感兴趣的读者，可参考 C. Brau 一书的 §10.1。

这一节给出了 Lienard-Wiechert 场的时域与频域表示式。将预先给定的粒子运动轨迹<sup>2</sup>的表示式代入 Lienard-Wiechert 场的时域或频域公式，则可以求得粒子的辐射场。在给出辐射功率、辐射能量、角分布等复合物理量的定义之后，以下将在此基础上讨论两种情况：横向/向心加速与纵向直线加速。同步辐射与波荡器辐射将分别在第4章与第5章讨论。

---

<sup>2</sup> 即，假设  $\mathbf{r}(t), \beta(t)$  已知。敏锐的读者可能正思考这句描述的合理性。在实际情况，如果只分析辐射场特性，不管电子束团，那么默认指定的粒子运动轨迹为电子不辐射时的“纯光学”轨迹即可，且看 Lienard-Wiechert 场的第二项即可，因为第一项尽管非零，但不辐射。如果分析的是辐射场对电子束的影响，那么就不能忽略“从直线至弯转”的过程与“从弯转至直线”的过程，因为这时候电子稍早时刻产生的辐射场对后来时刻的电子束还可能有影响。更多讨论可参考第 15 章。

## 3.2 辐射功率、辐射能量、角分布

至此为止，已经得到 Lienard-Wiechert 场的时域、频域公式。一旦给定粒子运动轨迹，则可计算其辐射电磁场。通过加速粒子产生电磁辐射，这些辐射场最终将提供下游实验站用户使用。从实际情况看 — 如：从观察者或实验站用户观点 — 更关心的是产生的电磁波表征的辐射功率、辐射能量、角分布等。如果涵盖全部立体角，那么一个运动电荷所辐射出的能量必须与观察者接收到的能量相同，根据基本的能量守恒原理。然而，粒子所辐射的功率，即单位时间内的能量，在任何特定时刻瞬间与观察者接收到的功率则可能不同。由于不同的时间尺度  $dt'$  和  $dt$ ，电荷在时间间隔  $dt'$  内辐射的能量可能在观察者位置的较短时间间隔  $dt$  内被接收到。因此，有必要区分粒子发射的功率  $P(t')$  和观察者接收到的功率  $P_p(t)$ 。后者接收到的电磁信号通常具有短而强的脉冲和长时间间隔的间歇性结构。显然，平均发射功率和平均接收功率是相同的。

根据上述的几个量化辐射场的物理量，包含功率分布、能量分布、谱、角分布等，以下尝试构建其与电场函数  $\mathbf{E}(t)$  或  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  的关系。在此之前，需要知道一个关联时域与频域电磁信号的重要定理。

### 定理 3.3. Parseval 定理

按傅里叶变换定义，有以下定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.13)$$

其中， $f$  与  $\tilde{f}$  互为傅里叶变换。

**注** Parseval 定理表明信号能量在时域和频域相等。

**注** 如果采用  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$  惯例，则为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.14)$$

注意，以下将粒子产生的辐射功率写做  $P$ ，将观察者接收到的辐射功率写做  $P_p$ 。对粒子产生辐射的时间间隔  $dt'$  与观察者接收辐射的时间间隔  $dt$ ，根据推迟条件，有

$$dt = (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) dt' \quad (3.15)$$

其中， $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ 。

### 定理 3.4. 辐射功率、辐射能量、角分布

以下  $r(t') = |\mathbf{r}|$  为源至观察者的距离。则以下复合物理量可用时域或频域的辐射电场或磁场表示，有

- 辐射功率角分布

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{d^2U}{d\Omega dt'} = \frac{d^2U}{d\Omega dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{r^2|\mathbf{E}(t)|^2}{\mu_0 c} (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \neq \frac{dP_p}{d\Omega} \quad (3.16)$$

$$= \frac{r^2 c^2 |\mathbf{B}(t)|^2}{\mu_0 c} (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \quad (3.17)$$

其中,  $\mu_0 c = Z_0 \approx 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$ 。

- 辐射能量角分布

$$\frac{dU}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\Omega} dt' = \frac{r^2}{\mu_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}(t')|^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) dt' \quad (3.18)$$

$$= r^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \quad (3.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_p}{d\Omega} dt = \frac{r^2}{\mu_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}(t)|^2 dt = \frac{c^2 r^2}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt |\mathbf{B}(t)|^2 \quad (3.20)$$

$$= \frac{r^2}{\mu_0 c} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2 d\omega = \frac{2r^2}{\mu_0 c} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.21)$$

其中, 最后一行最后一个等号采用正频率惯例, 利用了辐射场频谱的奇偶性。

- 辐射能量 (已知  $S_r = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$ )

$$U = \int \frac{dU}{d\Omega} d\Omega = \frac{r^2}{\mu_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E^2(t) \sin \theta d\theta \quad (3.22)$$

以上立体角  $\Omega$  的定义参考图 3.2。 □

### 定义 3.1. 立体角 (solid angle) $d\Omega$

参考图 3.2, 立体角的定义有

$$d\Omega \equiv \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{A}}{r^2} \Rightarrow \Delta\Omega = \frac{\Delta A_1}{r_1^2} = \frac{\Delta A_2 \cos \theta}{r_2^2} \quad (3.23)$$

对于以球坐标圆心的立体角, 有  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ 。 □

电磁辐射场的坡印廷向量与在观察者位置接收到的功率角分布有以下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathbf{E} \times [\mathbf{n}_{\text{ret}} \times \mathbf{E}]] \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} [E^2 \mathbf{n}_{\text{ret}} - (\mathbf{n}_{\text{ret}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}] \\ &= \frac{E^2}{\mu_0 c} \mathbf{n}_{\text{ret}} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d^2U}{d\Omega dt} \mathbf{n}_{\text{ret}} = \frac{1}{r^2} \frac{dP_p}{d\Omega} \mathbf{n}_{\text{ret}} \end{aligned} \quad (3.24)$$



**笔记** 注意到, 对辐射场而言, 恒有  $\mathbf{n}_{\text{ret}} \cdot \mathbf{E} = 0$ 。此外, 这里的时间是观察者的时间  $\Delta t$ 。功率计算应区别观察者接收到的功率  $P_p$ 、电子实际辐射功率  $P$  与辐射时间  $\Delta t'$ 。

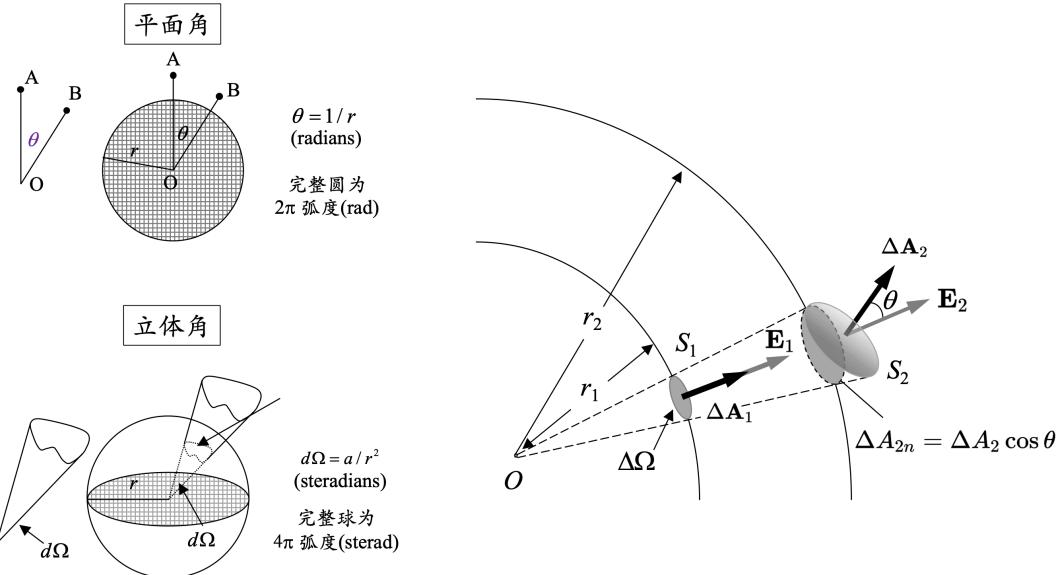


图 3.2: (上) 平面坐标系的极角 (polar angle)  $\theta$ , 又称顶角 (zenith angle); (下) 球坐标的立体角 (solid angle)  $d\Omega$ 。

### 性质 3.1. 坡印廷向量与辐射功率的关系

坡印廷向量  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  的量纲为: 单位时间、单位面积的能量; SI 单位为:  $\text{J/sec/m}^2 = \text{Watt/m}^2$ 。坡印廷向量  $\mathbf{S}$  与辐射功率有如下关系

$$P = \iint \mathbf{S} \cdot d\mathcal{S} = \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathcal{S} = \frac{1}{\mu_0} \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{S} \quad (3.25)$$

留意, 坡印廷向量  $\mathbf{S}$  与面积  $\mathcal{S}$  不是同一个符号。

坡印廷向量  $\mathbf{S}$  与辐射能量有如下关系

$$U = \int P dt = \int \left( \iint \mathbf{S} \cdot d\mathcal{S} \right) dt \quad (3.26)$$

后面会发现, 除了以上辐射功率角分布、能量角分布外, 更实用的可能是同时包含频谱与角分布信息的“双谱 (double spectrum)”分布<sup>3</sup>。

### 定理 3.5. 辐射双谱分布

辐射能量频谱角分布 (angular spectral energy distribution)

$$\frac{d^2 U}{d\Omega d\omega} = \frac{2r^2 |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2}{2\pi\mu_0 c} = \frac{c^2 r^2}{\pi Z_0} |\tilde{\mathbf{B}}(\omega)|^2 \quad (3.27)$$

其中, 分子的 2 表示仅取傅里叶变换电场的正频率部分, 利用了  $\tilde{\mathbf{E}}(-\omega) = \tilde{\mathbf{E}}^*(\omega)$  与  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(-\omega) = |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2$  特性。由于分子的 2 的惯例, 后面我们对辐射双谱积分时, 积分范围为  $(0, \infty)$ , 而不是  $(-\infty, \infty)$ 。

<sup>3</sup>“角分布”有时又称“角谱”。

辐射功率频谱角分布 (angular spectral power distribution)

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{d\Omega d\omega} &= \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{d^2U}{d\Omega d\omega} = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{2r^2}{2\pi\mu_0 c} |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2 \\ &= \frac{\beta^* c}{N_u \lambda_u} \frac{d^2U}{d\Omega d\omega} = \frac{\Omega_u}{2\pi} \frac{2r^2}{2\pi\mu_0 c N_u} |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2\end{aligned}\quad (3.28)$$

其中，第一行针对同步辐射，第二行针对波荡器辐射。 $\omega_0 = \beta c / \rho$  为电子绕行圆周运动的角频率， $\rho$  为圆周运动的曲率半径。 $\beta^* = \bar{v}_z / c$  为电子经过波荡器的纵向(周期平均)归一化速率， $\Omega_u = 2\pi\beta^*c/\lambda_u$  为电子经过波荡器(单个周期)的角频率， $\lambda_u$  为波荡器周期长度， $N_u$  为波荡器周期数。

**注** 初次接触的读者如果觉得陌生，无需担心，我们将分别在第4章与第5章详细介绍。

### 性质 3.2. 同步辐射功率与能量的关系

有

$$P_s = \frac{\omega_0}{2\pi} U_s = \frac{\beta c}{2\pi\rho} U_s \quad (3.29)$$

其中，下标  $s$  表示同步辐射 (synchrotron radiation)， $P_s$  为单个电子绕行一周的同步辐射平均功率， $U_s$  为单个电子绕行一周的同步辐射能量。□

### 性质 3.3. 波荡器辐射功率与能量的关系

有

$$P_u = \frac{\beta^* c}{L_u} U_u = \frac{\beta^* c}{N_u \lambda_u} U_u = \frac{\Omega_u}{2\pi N_u} U_u \quad (3.30)$$

其中，下标  $u$  表示波荡器辐射 (undulator radiation)， $L_u = N_u \lambda_u$ ， $P_u$  为单个电子单次经历  $N_u$  周期波荡器的辐射平均功率， $U_u$  为单个电子单次经历  $N_u$  周期波荡器的辐射能量。 $\Omega_u$  为电子经过波荡器(单个周期)的角频率。因此，上式最后一个等号分母还有一个  $N_u$  用以表征电子经历  $N_u$  周期波荡器的总时间。□

在观察者位置的探测器对辐射场的影响可视为辐射场经过一带通滤波器。作为参考，此处先给出带通滤波器的特性，更多讨论可参考第 10 章。

### 性质 3.4. 带通滤波器

如果现在有一电场时域信号  $E(t)$ ，其对应的傅里叶变换  $\tilde{E}(\omega)$  为电场的频谱，则带通滤波器 (bandpass filter) 的作用在数学上可视为

$$\text{带通滤波器} \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{d\omega}$$

其中， $\mathcal{F}$  称为谱通量 (spectral fluence)。

**定义 3.2. 谱通量 (spectral fluence)  $\mathcal{F}$**

定义为

$$\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) dt = \epsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = \frac{\epsilon_0 c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.31)$$

量纲为“能量/面积”，SI/MKS 单位为 J/m<sup>2</sup>。

**注** 带通滤波器 (bandpass filter) 对辐射脉冲的效应可以等效视为辐射场的纵向自相关函数 (autocorrelation function)。更多讨论可参考第 10 章。

**注** 常见的几个物理量“功率 (power)、强度 (intensity)、通量 (fluence)”的实用单位：

$$\text{峰值功率 (peak power)} [\text{W}] = \frac{\text{脉冲能量 (pulse energy)} [\text{J}]}{\text{脉冲持续时间 (pulse time)} [\text{s}]}$$

$$\text{峰值强度 (peak intensity)} = \frac{\text{峰值功率 (peak power)} [\text{W}]}{\text{束截面积 (beam area)} [\text{cm}^2]}$$

$$\text{通量 (fluence)} = \frac{\text{脉冲能量 (pulse energy)} [\text{J}]}{\text{束截面积 (beam area)} [\text{cm}^2]}$$

这一节给出了辐射功率、辐射能量、角分布与辐射双谱等复合物理量。求以上复合物理量的两标准步骤：

1. 先利用 Lienard-Wiechert 场求得电场  $\mathbf{E}(t)$  或  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ ；
2. 然后，将得到的电场代入计算。

以下将在此基础上讨论两种情况：横向/向心加速与纵向直线加速。然后，介绍电子加速器的几种电磁辐射机制。此讲义重点介绍的同步辐射与波荡器辐射将分别在第4章与第5章更详细讨论。

### 3.3 横向、纵向加速

#### 3.3.1 横向加速

此即同步辐射 (synchrotron radiation)。参考图 3.1，假设外部磁场  $\mathbf{B}$ ，对粒子经历横向向心加速，在直角坐标系，当粒子经过图 3.1 中的坐标原点时，有

$$\frac{1}{\rho} = \frac{qB}{m_e c \beta \gamma}, \quad \boldsymbol{\beta} = \beta[0, 0, 1], \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\beta^2 c}{\rho}[1, 0, 0] \quad (3.32)$$

代入时域 Lienard-Wiechert 场第二项 (如上讨论，仅考虑辐射场)，在球坐标系，有

$$\mathbf{E}_{[\theta, \phi, r]} = -\frac{q\beta^2}{4\pi\epsilon_0 r \rho} \frac{[(\cos\theta - \beta)\cos\phi, -\sin\phi(1 - \beta\cos\theta), 0]}{(1 - \beta\cos\theta)^3} \quad (3.33)$$

此式为观察者在位置  $[\theta, \phi, r]$  处，在满足推迟关系的稍后时刻看到的电场分布<sup>4</sup>。

由上定理，可得“源”的辐射功率角分布，有

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP_T}{d\Omega} = \frac{3P_{T0}}{8\pi\gamma^4} \frac{(1 - \beta\cos\theta)^2 - (1 - \beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1 - \beta\cos\theta)^5} \quad (3.34)$$

其中， $P_{T0} = \frac{2q^2\dot{\beta}^2\gamma^4}{12\pi\epsilon_0 c} = \frac{2r_e m_e c^2 \dot{\beta}^2 \gamma^4}{3c} = \frac{2r_e c m_e c^2 \beta^4 \gamma^4}{3\rho^2} = \frac{2r_e \dot{\mathbf{p}}_T^2 \gamma^2}{3m_e c}$ ， $\dot{\mathbf{p}}_T = m_e c \dot{\boldsymbol{\beta}} \gamma$ ，下标 T 表示横向/向心加速。这里引入一个方便的符号，称经典电子半径 (classical radius of electron)，有  $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.818 \times 10^{-15}$  m。

图 3.3 给出粒子在不同速率时，经历横向向心加速的辐射功率在水平面 ( $xz$ ) 与垂直面 ( $yz$ ) 上的分布。

图 3.4 给出辐射功率空间分布分别在粒子静止坐标 ( $K'$ ) 或粒子处于低速情况，与实验室坐标 ( $K$ ) 或粒子处于相对论速度情况的样貌。

**练习 3.2** 根据以上讨论与图 3.3，利用相对论多普勒效应，验证  $\theta_0 \approx \frac{1}{\gamma}$ 。在  $\theta \leq \theta_0$  内，辐射功率占比？ ■

**解**

$$\frac{1}{P_{T0}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta \frac{dP_T}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{9}{16}\beta \right) \quad (3.35)$$

<sup>4</sup>上一章开篇提到，在描述相对论粒子产生的电磁辐射时，应明确“在何时、何地观察到电磁场”与“在何时、何地产生电磁场”。这里没有特别指明观察者在什么位置、什么时刻看到这个量，是因为这里讨论的情况设定为粒子只在经过图 3.1 的原点一瞬间产生场，其它情况暂时不考虑，只分析这个当下、这一次辐射的场的空间分布特性。这里有两点默契：

- “空间分布”指的是在全空间范围内，辐射电场的  $[\theta, \phi, r]$  分布。这么看的话，什么是观察者所在位置？观察者位置在这里假设可以弹性移动，就是全空间中任何一个  $[\theta, \phi, r]$  坐标都可以当做是观察者所在位置。实际情况观察位置可能只在  $[\theta, \phi, r]$  的一个很小范围内或一个明确坐标点  $[\theta, \phi, r]$  而已。
- 此式  $\mathbf{E}_{[\theta, \phi, r]}$  是不是已经完全考虑了推迟关系？没有完全考虑。什么意思呢？虽然说这个式子  $\mathbf{E}_{[\theta, \phi, r]}$  是从 Lienard-Wiechert 来的，是考虑了推迟关系没错。但是，对于观察者，因为这里假设可以弹性移动；对太远的观察者，如果电子发出的辐射场还来不及赶上，那观察者自然看不到电场。但是，这个情况在上面  $\mathbf{E}_{[\theta, \phi, r]}$  公式中没有体现，比如，只是把分母的  $r$  给一个更大的值，这么做只是体现较远的观察者感受到的电场较小，但是没有说“什么时刻”感受到电场。所以说，“没有完全考虑”是这个意思。如果要把观察者的推迟关系也考虑进来，那么就默认观察位置在一个很小范围内或一个明确坐标点，此时可在  $\mathbf{E}_{[\theta, \phi, r]}$  后面加一 Delta 函数限制。

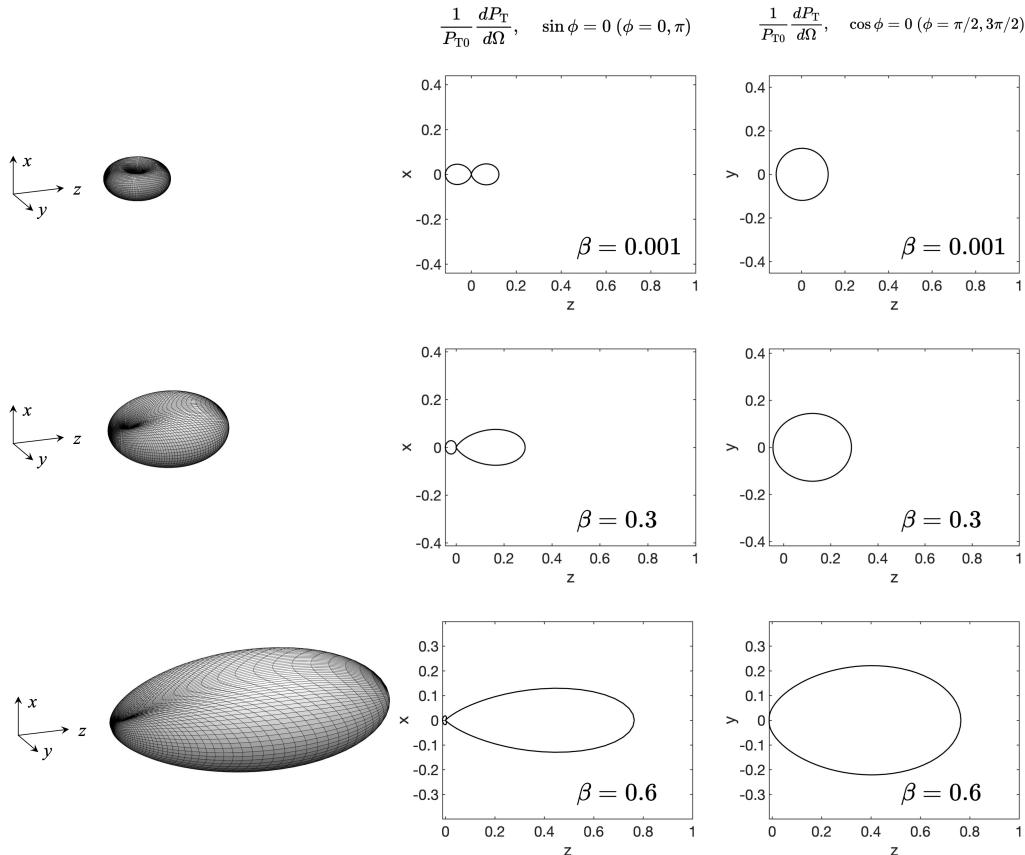


图 3.3: 粒子经历横向加速的辐射功率空间分布, 其中,  $\theta_0 \approx \frac{1}{\gamma}$ 。

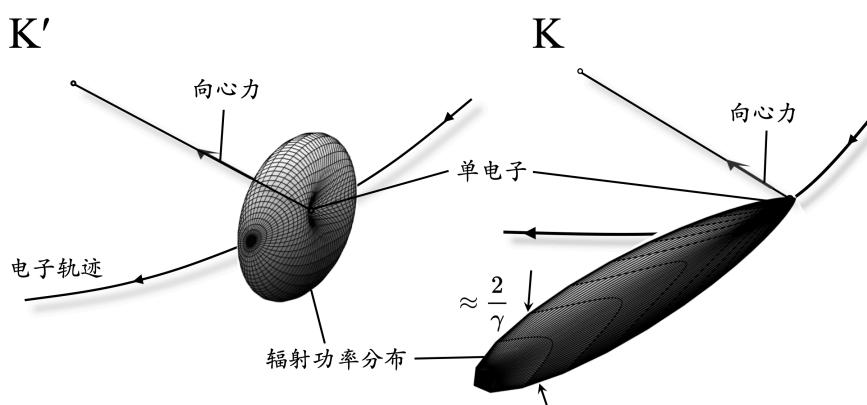


图 3.4: 粒子经历横向加速时的辐射功率空间分布: (左) 在粒子静止坐标 ( $K'$ ) 或粒子处于低速情况; (右) 实验室坐标 ( $K$ ) 或粒子处于相对论速度情况。

■

对极端相对论情况  $\beta \approx 1, \gamma \gg 1$  情况，式 (3.34) 可以进一步化简，有

$$\frac{dP_T}{d\Omega} = P_{T0} \frac{3\gamma^2}{\pi} \frac{1 - 2\gamma^2\theta^2 \cos(2\phi) + \gamma^4\theta^4}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5} \quad (3.36)$$

其功率分布函数如图 3.5 给出，功率角分布的角方差有

$$\langle \theta^2 \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \sin \theta d\theta \theta^2 \frac{dP}{d\Omega} \approx \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \theta d\theta \theta^2 \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^2} \quad (3.37)$$

有时候用户更关心的是横向  $\xi, \psi$  两方向的极化功率，参考图 3.1， $(\theta, \phi)$ 、 $(\xi, \psi)$  两者有

$$\begin{aligned} \psi &= \theta \sin \phi, \quad \xi = \theta \cos \phi \\ d\Omega &= \sin \theta d\phi d\theta \approx \theta d\phi d\theta = d\xi d\psi \end{aligned} \quad (3.38)$$

估算这两个方向的功率角方差，有

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{3}{8\gamma^2}, \quad \langle \psi^2 \rangle = \frac{5}{8\gamma^2} \quad (3.39)$$

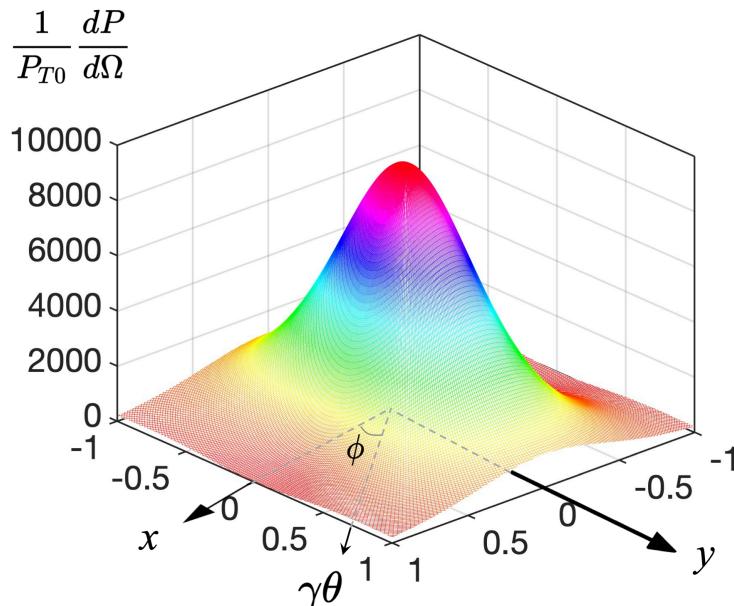


图 3.5：粒子经历横向加速的辐射功率角分布：极端相对论情况。

✍ 练习 3.3 用 MATLAB 画出不同粒子能量的辐射功率角分布，与讲义结果比较。 ■

✍ 练习 3.4 试推导功率角分布的角方差与  $\xi, \psi$  两个方向的功率角方差。 ■

✍ 练习 3.5 以完整的 Lienard-Wiechert 场，用坡印廷定理检验，证明加速过程产生辐射场。 ■



**笔记** 上面出现的经典电子半径  $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.818 \times 10^{-15}$  m 在往后计算中一般仅视为一个方便的参数，不需要纠结其物理意义。在经典力学图像中，电子可视为一个没有尺寸的质点，但是这会出现自有能发散的问题。一种关于电子的经典力学图像将其视为一半径为  $r_e$  的硬球，表面分布了电荷量为  $q = -e = 1.6 \times 10^{-19}$  C 的面电荷，电子质量  $m_e$  则由其静电场能量（的一半）提供。

### 3.3.2 偶极辐射

看到图 3.3 最上排  $\beta \ll 1$  的辐射功率分布的样貌时，有些读者应该能回忆起以前电磁学课堂学过的“偶极子模型”或“偶极辐射”(dipole radiation)。描述偶极辐射可以通过电或磁模型：“电”偶极子辐射为一电荷在空间局域做简谐振荡产生的辐射，“磁”偶极子辐射为一封闭载流小线圈在空间局域产生的辐射。从远处观察位置看，电偶极辐射与磁偶极辐射两者没有太大区别。

回忆一下以前课堂上怎么学偶极辐射？由于当时没有介绍 Lienard-Wiechert 场，因此，在介绍了包含推迟关系的位函数表示式 (§1.4) 之后，将电荷振荡以等效电流密度表示

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}[q_0 e^{-i\omega t}] \Rightarrow \tilde{q} = q_0 \\ i(t) &= \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin \omega t = I_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow \tilde{I} &= I_0 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\omega \tilde{q} \quad \text{或} \quad \tilde{\mathbf{J}} = -i\omega \mathbf{r} \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (3.40)$$

代入位函数表示式

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{i\beta R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} d\mathcal{V}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\tilde{I}(\mathbf{r}') e^{i\beta R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} d\ell' \quad (3.41)$$

其中， $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 。接着，偶极辐射场可写成

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\nabla \times \tilde{\mathbf{A}}}{\mu_0} \quad \text{与} \quad \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}}{i\omega \epsilon_0} = \frac{iZ_0}{\beta} \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \quad (3.42)$$

其中， $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ 。于是有如图 3.6 的辐射场样貌。与图 3.3 最上排  $v/c \ll 1$  的辐射功率分布的样貌比较，可以看到一致性，且这里给出细部场线分布。

在没有介绍 Lienard-Wiechert 场的前提下，上面介绍的电磁辐射只能限于粒子随时间平均的运动相对于实验室坐标为静止的情况。当粒子相对于实验室坐标有相对运动时，就需要 Lienard-Wiechert 场。考虑粒子低速至静止的渐进情况，通过 Lienard-Wiechert 场给出瞬时电场、坡印廷向量、辐射功率角分布有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})}{cr} \right]_{\text{ret}} \propto \frac{\omega^2}{r} \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c} |E|^2 \mathbf{n} \propto \frac{\omega^4}{r^2} \\ \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{\mu_0 c} |E|^2 r^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^2} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})|^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \theta \approx \frac{dP_p}{d\Omega} \end{aligned} \quad (3.43)$$

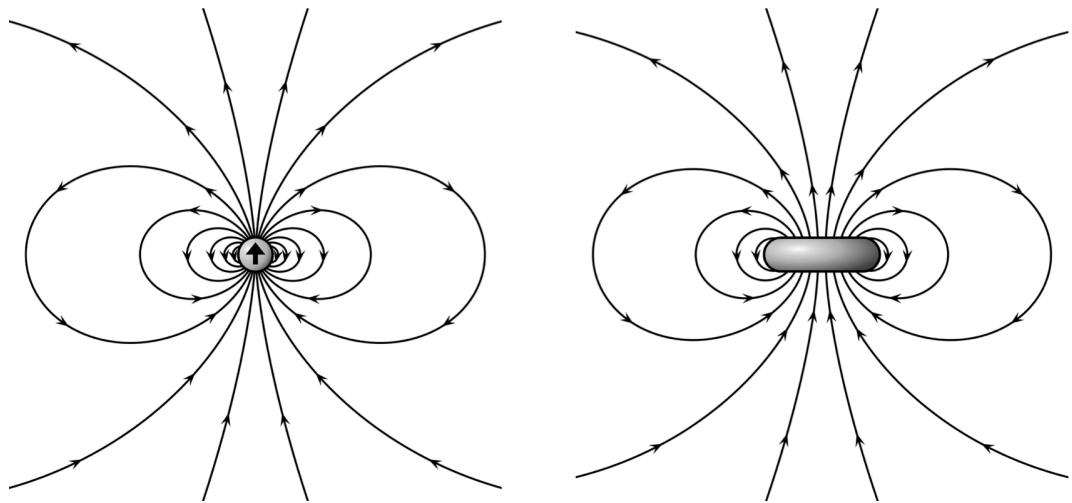


图 3.6: 静止坐标的偶极辐射样貌, 左图为电偶极子辐射, 右图为磁偶极子辐射。

其中,  $\theta$  为球坐标的极角 (polar angle), 即电荷振荡的方向。进一步分析场的各个分量后, 将发现利用 Lienard-Wiechert 场能给出与基于偶极子模型一致的辐射功率空间分布样貌。略过细节推导, 以下整理偶极辐射的一些特性:

#### 性质 3.5. 偶极辐射的一些特性

不失一般性, 假设源的尺寸与振荡振幅  $d$  远小于观察位置与源的相对距离  $r$ , 也远小于辐射波长  $\lambda = 2\pi/k$ , 即  $d \ll r, d \ll \lambda$ 。偶极辐射特性分三个区域:

- 近场 (near field):  $d \ll r \ll \lambda$  或  $kr \ll 1$ , 场线发自正电荷, 终于负电荷, 场线像准静态场。
- 介于期间:  $d \ll r \sim \lambda$  或  $kr \sim 1$ , 称感应场。
- 远场 (far field):  $d \ll \lambda \ll r$  或  $kr \gg 1$ , 又为辐射场,  $(E_\theta, H_\phi) \propto \frac{1}{kr}$ , 场线为闭合, 电场与磁场交互变换 (regenerative)。

**证明** 参考一般电磁学教科书。 □

学过电磁学的读者应该知道, 偶极子为电荷最简单的振荡模式, 又称偶极模式 (dipole mode)。电荷振荡模式除了偶极之外, 还有四极模式或其它高阶模式。它们对应的辐射则称偶极辐射、四极辐射 (quadrupole radiation) 或其它高阶辐射 (multipole radiation)。以单粒子任意给定的运动轨迹作为已知条件, 前面介绍的 Lienard-Wiechert 场给出辐射场的一般表示式。读者或许会好奇, 有没有以分极模式的形式写出的电磁场公式? 有。以下简短介绍思路, 略去推导细节, 仅总结结果。

回顾位函数表示式, 化简的关键在于分母的  $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  与分子的  $e^{i\beta R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}}$  项。为了尽量“干净”地把每个振荡模式 (“极”) 分开来, 这里需要把  $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  用一组适当的基底

函数拆解，一般选球谐贝塞尔函数  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell, m} \frac{4\pi}{2\ell + 1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \quad (3.44)$$

然后，保留低阶主导项。于是， $\frac{1}{R}$  可写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{d^3}{r^3}\right) \right] \quad (3.45) \\ &= \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}) - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} (1 - 3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'})^2) + \mathcal{O}\left(\frac{d^3}{r^3}\right) \right] \end{aligned}$$

此外，指数部分  $R$  可写成

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \\ &= r \sqrt{1 - \frac{2r'}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'} + \frac{r'^2}{r^2}} \\ &= r \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{2r'}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'} + \frac{r'^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2!} \frac{1}{4} \left( -\frac{2r'}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{d^3}{r^3}\right) \right] \quad (3.46) \\ &= r \left[ 1 - \frac{r'}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}) + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} (1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}))^2 + \mathcal{O}\left(\frac{d^3}{r^3}\right) \right] \end{aligned}$$

分子部分有

$$\begin{aligned} e^{i\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= e^{i\beta r - i\beta r \frac{r'}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}) + \frac{1}{2} i\beta r \frac{r'^2}{r^2} (1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}))^2 + \mathcal{O}\left(\frac{d^3}{r^3}\right)} \\ &= e^{i\beta r} e^{-i\beta r' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'})} e^{\frac{1}{2} i\beta r \frac{r'^2}{r^2} (1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}))^2} \\ &= e^{i\beta r} \left( 1 - i\beta r' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}) - \frac{1}{2} \beta^2 r'^2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'})^2 + \dots \right) \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{1}{2} i (\beta r') \left( \frac{r'}{r} \right) (1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}))^2 + \dots \right) \\ &\approx e^{i\beta r} \left[ 1 - i\beta r' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}) - \frac{1}{2} \beta^2 r'^2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'})^2 + \frac{1}{2} i\beta r' \left( \frac{r'}{r} \right) (1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'}))^2 + \dots \right] \quad (3.47) \end{aligned}$$

代回位函数表示式  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ ，有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{i\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathcal{V}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\beta r}}{r} \iiint \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\beta r}}{r} \left( \frac{1}{r} - i\beta \right) \iiint \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathcal{V}' \\ &\quad - \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{e^{i\beta r}}{r} \iiint \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') r'^2 \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{i\beta}{r} + \left( \beta^2 + \frac{3i\beta}{r} - \frac{3}{r^2} \right) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}'})^2 \right] d\mathcal{V}' + \mathcal{O}\left(\frac{d^3}{r^3}\right) \quad (3.48) \end{aligned}$$

好，现在一项一项分出来了。等式右边第一项  $\iiint \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') d\mathcal{V}'$  积分为电偶极辐射，第二项  $\iiint \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') d\mathcal{V}'$  积分包含电四极辐射与磁偶极辐射，第三项则包含更高阶辐射贡献。

### 定理 3.6. 偶极辐射公式

分电偶极与磁偶极。对电偶极辐射,  $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') = -i\omega \mathbf{r}' \tilde{\rho}(\mathbf{r}')$ , 令电偶极矩  $\mathbf{p} = \iiint \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'$ , 有

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\beta r}}{r} \mathbf{p} \quad (3.49)$$

对应的瞬时电磁场有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\beta^2 c}{4\pi} \left( 1 - \frac{1}{i\beta r} \right) \frac{e^{i\beta r - i\omega t}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} \right] \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i\beta r - i\omega t}}{r} \left[ \frac{1}{r^2} (\beta^2 r^2 + i\beta r - 1) \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{r}}) - \frac{2}{r^2} (i\beta r - 1)(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

在近场区  $kr \ll 1$ ,  $|H| \ll |E|$ , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{i\beta c}{4\pi} \frac{1}{r^2} e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} \right] \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} e^{-i\omega t} (3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}) \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

在远场区  $kr \gg 1$ ,  $|H| \sim |E|$ , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\beta^2 c}{4\pi} \frac{e^{i\beta r - i\omega t}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} \right] \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\beta^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i\beta r - i\omega t}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{r}}) \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

对磁偶极辐射, 令磁偶极矩

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (3.53)$$

则有

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\beta e^{i\beta r}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{m} \quad (3.54)$$

对应的瞬时电磁场有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\beta r - i\omega t}}{r} \left[ \beta^2 \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}) + \frac{i\beta}{r} \left( 1 - \frac{1}{i\beta r} \right) (\mathbf{m} - 3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}) \right] \right\} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\operatorname{Re} \left[ \frac{Z_0}{4\pi} \beta^2 \left( 1 - \frac{1}{i\beta r} \right) \frac{e^{i\beta r - i\omega t}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{m} \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

在近场区  $kr \ll 1$ ,  $|E| \ll |H|$ , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi r^3} (3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}) \right] \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\operatorname{Re} \left[ \frac{iZ_0 \beta r}{4\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{r^3} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{m} \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

在远场区  $kr \gg 1$ ,  $|E| \sim |H|$ , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4\pi} \beta^2 \frac{e^{i\beta r - i\omega t}}{r} [\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}})] \right\} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\operatorname{Re} \left[ \frac{Z_0}{4\pi} \beta^2 \frac{e^{i\beta r - i\omega t}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{m} \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

**证明** 参考电动力学教科书。

**练习 3.6** 根据上面定理给出的电场、磁场，推导电偶极辐射与磁偶极辐射的功率角分布。 ■

**解** 电偶极辐射功率角分布有

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} \beta^4 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta$$

磁偶极辐射功率角分布有

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0}{32\pi^2} \beta^4 |\mathbf{m}|^2 \sin^2 \theta$$



**笔记** 对四极辐射公式感兴趣的读者，可以试着推导电四极辐射与磁四极辐射公式。定义四极矩为

$$Q_{ik} = \iiint (3r'_i r'_k - \delta_{ik} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dV'$$

对更高阶矩辐射可以按类似方式计算得到。更多讨论可参考[https://en.wikipedia.org/wiki/Multipole\\_radiation](https://en.wikipedia.org/wiki/Multipole_radiation)。

有些教科书从其它视角给出关于偶极辐射的讨论，比如，将偶极辐射视为从 LC 振荡电路演变而来。寻此思路继续往下讨论即天线 (antenna) 研究。天线辐射的产生原理为一段金属导线中的交变电流向空间发射交替变化的感应电场和感应磁场，即无线电信号的发射。或者，空间中交变的电磁场在遇到金属导线时也可以感应出交变的电流，这对应了无线电信号的接收。对用于发射和接收的导线有获取最佳转换效率的要求，满足这样要求的用于发射和接收无线电波信号的导线称为天线。天线是一种导波与自由空间波之间的转换器件，介于电路与空间的界面器件。这一小节我们对在静止坐标下偶极辐射的讨论在此打住，不继续往此方向延伸讨论。

### 3.3.3 纵向加速

又称直线加速。考虑沿  $z$  方向加速，在直角坐标系，有<sup>5</sup>

$$\boldsymbol{\beta} = \beta[0, 0, 1], \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}[0, 0, 1] \quad (3.58)$$

代入时域 Lienard-Wiechert 场第二项 (如上讨论，仅考虑辐射场)，在球坐标系，有

$$\mathbf{E}_{[\theta, \phi, r]} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}} = \frac{q\dot{\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr} \frac{[\sin \theta, 0, 0]}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \quad (3.59)$$

此式为观察者在位置  $[\theta, \phi, r]$  处，在满足推迟关系的稍后时刻看到的电场分布。

<sup>5</sup>这里的  $\beta = v/c$  是归一化速率，为相对论洛伦兹因子。上一小节的  $\beta$  则是相位常数，有时写成  $k$ ，留意别搞混。

由上定理，可得“源”的辐射功率角分布，有

$$\frac{dP_L}{d\Omega} = \frac{3P_{L0}}{8\pi\gamma^6} \frac{\sin^2\theta}{(1 - \beta \cos\theta)^5} \quad (3.60)$$

其中， $P_{L0} = \frac{q^2\dot{\beta}^2\gamma^6}{6\pi\epsilon_0 c} = \frac{2r_e m_e c^2 \dot{\beta}^2 \gamma^6}{3c} = \frac{2cr_e \dot{\mathbf{p}}_L^2}{3m_e c^2}$ ， $\dot{\mathbf{p}}_L = \frac{d}{dt}(m_e c \boldsymbol{\beta} \gamma) = m_e c (\dot{\boldsymbol{\beta}} \gamma + \boldsymbol{\beta} \dot{\gamma}) = m_e c \dot{\boldsymbol{\beta}} \gamma^3$ 。

由上式可看到，辐射功率与  $\phi$  无关，仅与  $\theta$  有关。意思是，相比于横向加速情况，纵向加速导致的辐射功率沿  $z$  轴较为“对称”。因此，图 3.7 只画沿着  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  距离的辐射功率分布，给出粒子在不同速率时，经历纵向直线加速的辐射功率分布样貌。

**注** 比较横纵向辐射功率，知  $P_{T0} = \gamma^2 P_{L0}$ 。一般通过横向加速电子以获得同步辐射光。由于纵向加速产生的辐射功率比横向小了  $\gamma^2$  倍，在高能直线加速器中，虽然粒子也经历加速过程，但其辐射功率很小，一般忽略不计。

**练习 3.7** 图 3.7 中的  $\theta_m$  为单位立体角中辐射功率最大的角度，有  $\theta_m \approx \frac{1}{2\gamma}$ 。感兴趣的读者可以试着证明  $\theta_m$  的准确表示式有  $\cos\theta_m = \frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}$ 。 ■

**练习 3.8** 以完整的 Lienard-Wiechert 场，用坡印廷定理检验，证明加速过程产生辐射场。 ■

下图 3.8 整理粒子经历横向加速与纵向加速时的功率角分布。

结束此小节前，有些读者可能被辐射功率符号的多种含义搞得有些昏头转向，这里整理一下目前用来描述辐射功率的几个符号：

- $P \Rightarrow$  辐射功率，单位时间发出的辐射能量，视为“源”的量  $P = dU/dt'$
- $P_p \Rightarrow$  接收到的辐射功率，视为“观察者”的量  $P_p = dU/dt$
- $\frac{dP}{d\Omega} \Rightarrow$  “源”辐射功率角分布
- $\frac{dP}{d\omega} \Rightarrow$  “源”辐射功率频谱
- $\frac{dP_p}{d\Omega} \Rightarrow$  “观察者”辐射功率角分布
- $P_s \Rightarrow$  同步辐射功率
- $P_u \Rightarrow$  波荡器辐射功率
- $P_T \Rightarrow$  横向或向心加速产生的辐射功率，视为“源”的量
- $P_L \Rightarrow$  纵向或切线加速产生的辐射功率，视为“源”的量
- $P_\sigma \Rightarrow$  辐射场中，沿着横向水平极化分量的辐射功率，视为“源”的量
- $P_\pi \Rightarrow$  辐射场中，沿着横向垂直极化分量的辐射功率，视为“源”的量

**笔记** 此讲义以  $P$  表示辐射功率，以  $U$  表示辐射能量。不同教科书或不同文献可能采用

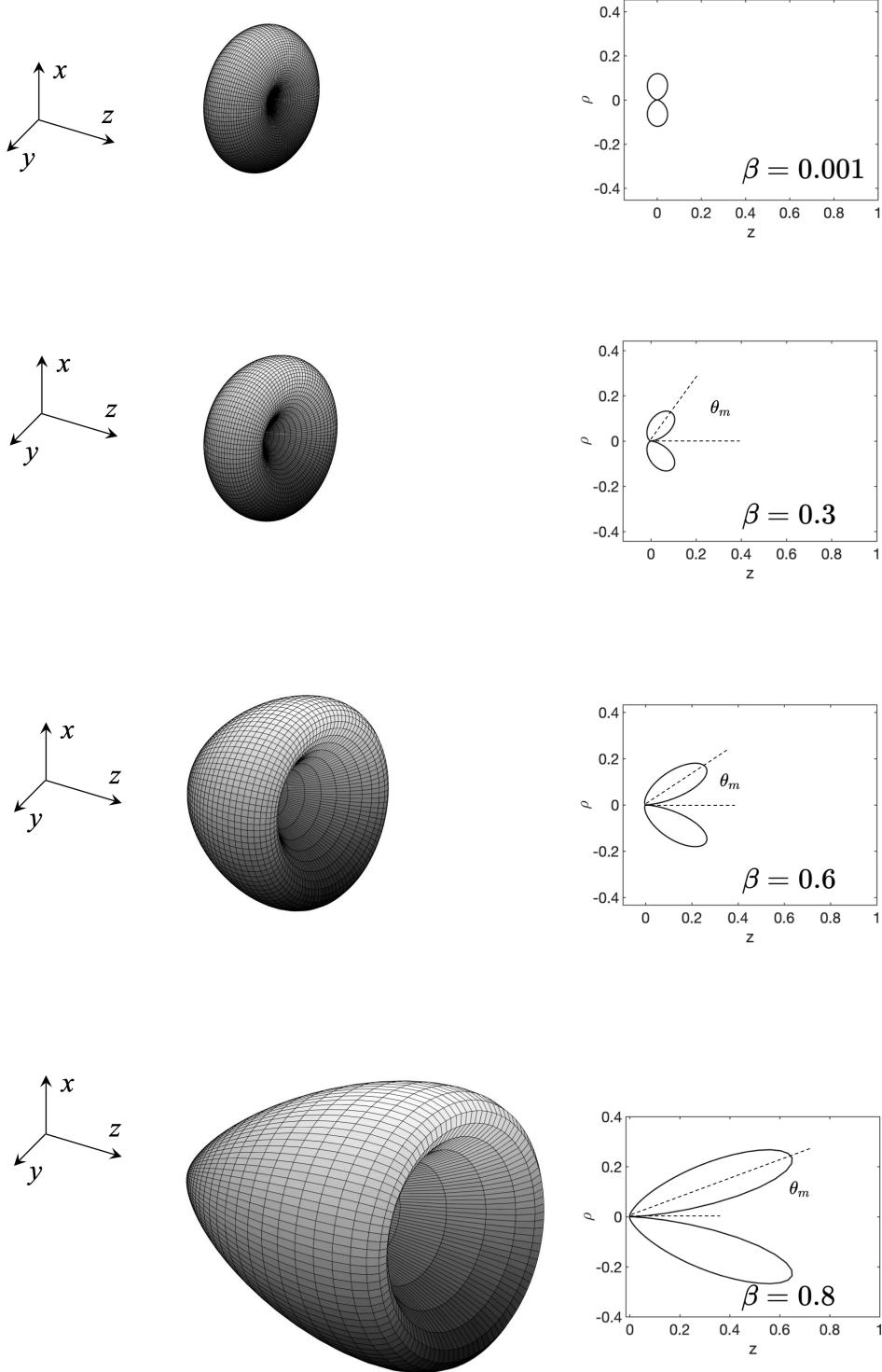


图 3.7: 粒子经历纵向直线加速的辐射功率分布, 其中,  $\theta_m \approx \frac{1}{2\gamma}^\circ$

在电子静止坐标  
或电子低速运动  
时的辐射场

实验室坐标  
的辐射场

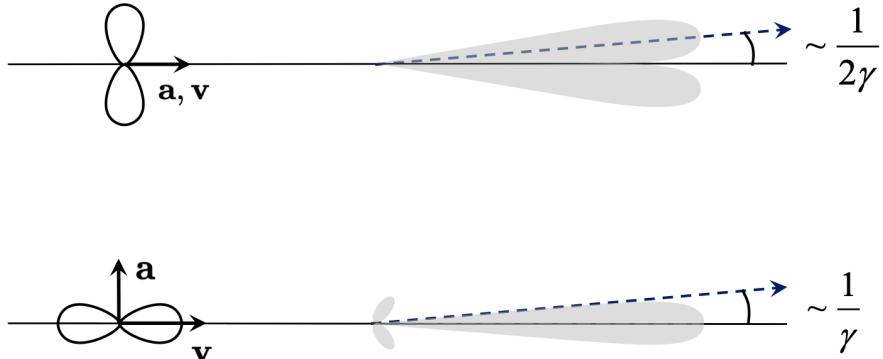


图 3.8: 粒子经历纵向加速(上)与横向(下)加速时的功率角分布。左侧图可视为在电子静止坐标或是低速运动情况，右侧图为实验室坐标或高速运动情况。

不同符号，比如：Jackson、Chao 等书以  $W$  表示辐射能量，以  $I(\omega)$  表示能量频谱。

### 3.3.4 浅谈：波瓣、定向性、天线增益

接触过天线理论的读者对上一小节出现的一些辐射功率空间分布图或许感到熟悉，对这一小节的标题也就不陌生。后面第 4 章、第 5 章将发现，我们在分析同步辐射或波荡器辐射特性的时候，使用的语言与天线理论不太一样，尽管它们的辐射图像很类似。不同社群发展过程使用不同的语言，似乎也不足为奇。也许可以部分归因于粒子加速器的自由电子辐射一般为相对论运动的偶极辐射。天线辐射一般不涉及源的相对论运动，但是源电荷振荡形式则不限于偶极辐射，允许多极辐射。这里简短介绍一下标题中几个词的定义，对理解辐射场的空间分布或许有些帮助。

天线产生的辐射场的一般样貌示意图可参考图 3.9，波瓣包含主瓣、旁瓣、后瓣等。

#### 定义 3.3. 定向性 (directivity) $\mathcal{D}$

一般以球坐标系描述，一般来说，定向性为极角  $\theta$  与方向角  $\phi$  的函数，定义为

$$\mathcal{D}(\theta, \phi) \equiv \frac{P(\theta, \phi)}{P_{\text{ave}}} = \frac{P(\theta, \phi)}{P_{\text{tot}}/(4\pi)} \quad (3.61)$$

其中，总辐射功率

$$P_{\text{tot}} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.62)$$

如果没有指明方向，则定向性可以量化为  $\mathcal{D}$  的最大值

$$\mathcal{D} = \max \left( \frac{P(\theta, \phi)}{P_{\text{tot}}/(4\pi)} \right) = \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{ave}}} \quad (3.63)$$

当  $\mathcal{D} = 1$  或 0 dB 时，表示辐射为各向同性 (isotropic)，为理想辐射源，一般不存

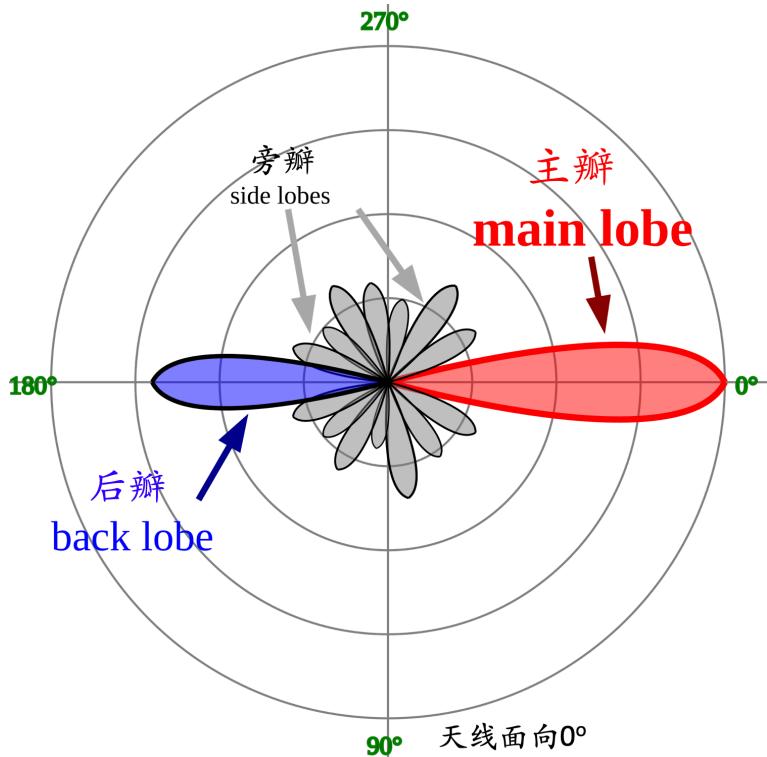


图 3.9: 天线辐射功率空间分布，能量集中在主瓣。图例修改自 wikipedia。

在；当  $\mathcal{D} \gg 1$  时，表示辐射集中聚集在一些特定方向，称定向天线。

**注** 定向性为无量纲量，一般以分贝 (decibel) 表示， $\mathcal{D}$  (dB) =  $10 \log_{10} \mathcal{D}$ 。

**注** 对天线阵列 (antenna array)，定向性的定义可能需要适当推广，此处不论。□

#### 定义 3.4. 天线增益 $\mathcal{G}$ 、辐射效率 $\eta$

定义天线增益 (antenna gain) 为

$$\mathcal{G}(\theta, \phi) = \eta(\omega)\mathcal{D}(\theta, \phi) \quad (3.64)$$

其中， $\eta \leq 1$  为辐射效率 (radiation efficiency)，为产生的辐射功率  $P_{\text{rad}}$  与提供天线输入功率  $P_{\text{in}}$  的比值

$$\eta \equiv \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{in}}} = \frac{P_{\text{in}} - P_{\text{loss}}}{P_{\text{in}}} = 1 - \frac{P_{\text{loss}}}{P_{\text{in}}} \quad (3.65)$$

**注** 由于  $P_{\text{loss}}$  可能是频率的函数，因此， $\eta, \mathcal{G}$  一般为频率的函数。□

## 3.4 电子加速器的几种电磁辐射机制：定性介绍

这一节简短介绍电子加速器的几种电磁辐射机制。前面介绍的横向/向心加速产生的辐射其实就是同步辐射。关于同步辐射与波荡器、扭摆器辐射，将在接下来第4章与第5章详细介绍，此节不论。

自由电子产生电磁辐射的三类机制：

- 电子加速。可再细分两种：
  - 电子运动方向改变，如：同步辐射 (synchrotron radiation)、波荡器辐射 (undulator radiation)、扭摆器辐射 (wiggler radiation)。
  - 电子运动速度改变，如：轫致辐射 (bremsstrahlung radiation，又称刹车辐射)<sup>6</sup>。
- 极化辐射。伴随电子的库仑场将临近的介质极化后而产生的辐射，如：契伦科夫辐射 (Cherenkov radiation)、渡越辐射 (transition radiation，又称渡越辐射)、Smith-Purcell 辐射。
- 衍射辐射，电子经过的环境存在分界面差异而产生的辐射，如：Smith-Purcell 辐射。

### 3.4.1 契伦科夫辐射 (Cherenkov radiation)

#### 定义 3.5. 契伦科夫辐射或 Vavilov-Cherenkov 辐射

由 P. Cherenkov 与 S. Vavilov 在 1934 年提出<sup>a</sup>。当电荷运动、周围存在介质时，电荷附近存在库仑场。当运动电荷的速度超过在 (存在库仑场的) 介质中的光速时，将发出一种以短波长为主的电磁辐射，称契伦科夫辐射。

**注** 在介质中，光速  $v \leq c$ 。因此，电子的速度可能超过介质中的光速。更准确地说，这里介质中的光速指的是介质中光的相速。

<sup>a</sup>P. Cherenkov 从实验上与 I. Tamm、I. Frank 从理论上成功地解释了契伦科夫辐射的成因，共同获得 1958 年诺贝尔物理学奖。

参考图 3.10，忽略推导细节，契伦科夫辐射功率频谱角分布可写成

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2 q^2}{4\pi^2 c} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) 2\pi \delta \left( \omega \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \right) \quad (3.66)$$

其中， $\theta$  为观察位置与粒子前进方向的夹角。如果仅看在自由空间中的前行粒子，暂且忽略周围介质，由于  $v < c$ ， $\delta$  函数恒为零，因其宗量  $v \cos \theta / c < 1 \neq 0$ 。此结果如预期，因为在自由空间中，等速运动的粒子不辐射。但是，如果周围存在介质，则  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  应改写为  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$ ，或  $c \rightarrow c/n$ ，其中， $n$  为介质折射率。于是， $\delta$  函数的宗量就可能为零，将产生契伦科夫辐射。

#### 练习 3.9 试推导契伦科夫辐射场与对应的功率频谱角分布。

<sup>6</sup>轫致辐射的一种特殊形式展现：beam-beam collision。

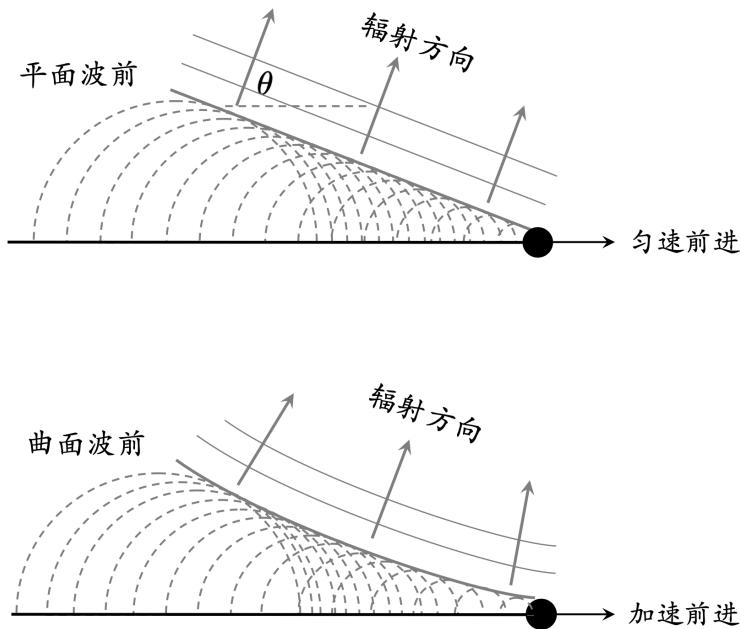


图 3.10: 匀速前进与加速前进时的契伦科夫辐射示意图。图例修改自 Y. Hu et al., Sci. Rep. 7, 8695 (2017). <https://www.nature.com/articles/s41598-017-08705-4>。

**解** 提示：Frank-Tamm 公式。感兴趣的读者，可参考 A. Zangwill 一书的 §23.7。 ■

### 性质 3.6. 契伦科夫辐射的一些特性

- 契伦科夫辐射频谱为连续谱。
- 契伦科夫辐射张角  $\theta$  与粒子速度的关系如下：

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \quad (3.67)$$

其中， $n(\omega)$  为介质折射率， $\beta = v/c$  为洛伦兹相对论因子。

- 由上可知，要求  $\beta \geq \frac{1}{n(\omega)}$ ，才可能发生契伦科夫辐射。
- 由于  $\beta \leq 1$ ，只有当  $n(\omega) > 1$  时，才可能发生契伦科夫辐射。因此，发生契伦科夫辐射最高频率止于 X 射线<sup>a</sup>。

<sup>a</sup>自然界大部分介质对电磁波的折射率一般  $\geq 1$ 。但对于 X 射线或更短波长，其折射率  $\leq 1$ 。参考 §1.11。 □

契伦科夫辐射并非运动电子本身发出辐射，而是介质中的极化电荷振荡发出的。在粒子物理学中，契伦科夫辐射是一非常重要的研究手段。例如，Belle 实验的契伦科夫计数器，契伦科夫辐射荧光成像，以及研究中微子振荡 (neutrino oscillation) 的超级神冈探测器 (Super-Kamiokande)，都是当前典型的实际应用。从宇宙空间中进入地球大气层的某些高能粒子，运动速度接近光速，可以发出契伦科夫辐射。针对契伦科夫辐射原理设计的契伦科夫探测器可以检测契伦科夫辐射的强度和方位，从而探测出高能粒子。目前在中微子研究相关的实验中，都有广泛的利用。

### 3.4.2 渡越辐射 (transition radiation)

#### 定义 3.6. 渡越辐射

由 V.L. Ginzburg<sup>a</sup>与 I.M. Frank 在 1946 年提出。是电子穿过周围不均匀的介质分界面时发出的电磁辐射。这个不均匀分界面指的是材料不均匀 (介电系数不同)。粒子在不同介质中激发的电磁场不同，它必须在穿越分界面边界时“抖掉”这个差别，于是产生渡越辐射。

**注** 不同于契伦科夫辐射。契伦科夫辐射是电子穿过周围的均匀介质时，速度大于电磁波在该介质中相速度所发出的电磁辐射。

<sup>a</sup>V.L. Ginzburg 与 A. Abrikosov、A. Leggett 因超导 (superconductors)、超流 (superfluids) 理论获得 2003 年诺贝尔物理学奖。

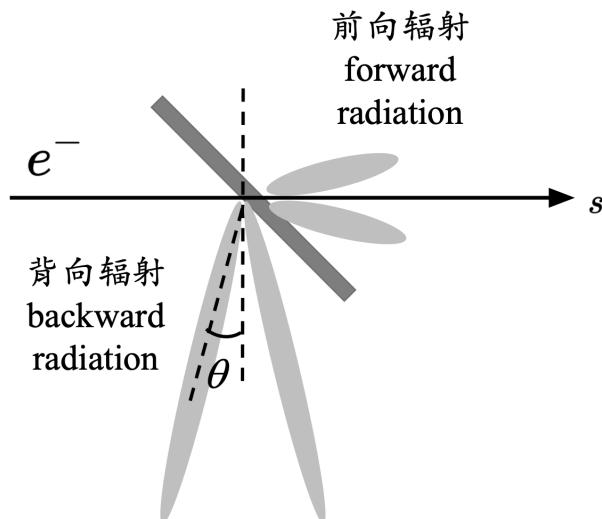


图 3.11: 渡越辐射示意图。此为平面图，实际三维空间中的渡越辐射场沿  $s$  轴呈旋转对称。

如图 3.11 所示为渡越辐射的前向辐射场 (forward radiation) 与背向辐射场 (backward radiation)。渡越辐射的 forward radiation 是一种粒子经历纵向减速的结果；backward radiation 则是为了满足边界条件产生的。

此处不详细讨论渡越辐射的辐射频谱计算细节，仅给出大致思路。首先，可将相对论点电子产生的库仑场做傅里叶变换，展开为不同频率叠加的均匀平面电磁波。接着，基于 Weizsäcker-Williams 近似，计算其等效的电磁能量  $U$ 。从空间、时域坐标系转换到波数、频域坐标系，有  $U(\mathbf{r}, t) \rightarrow U(\mathbf{k}, \omega)$ 。利用球坐标，将波数向量 (波矢)  $d\mathbf{k}$  写成

$$d^3\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega \quad (3.68)$$

其中， $d\Omega$  为立体角。由此可推知背向辐射能量频谱角分布  $\frac{d^2U}{d\Omega d\omega}$ ，有

$$\frac{d^2U}{d\omega d\Omega} = \frac{\gamma^4 q^2}{4\pi^3 \epsilon_0 c} \frac{\theta^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \quad (3.69)$$

式中呈现一个有趣的结果：辐射能量频谱角分布与频率无关。由此，当对整个频谱积分

后，能量趋近于无穷大而发散。留意，这不是物理上结果，而是在点电荷模型下的极点导致。

练习 3.10 对渡越辐射强度角分布感兴趣的读者，可试着推导以上结果。 ■

解 可参考 Jackson 一书的 §13.7 或 C.A. Brau 一书的 §10.2.2。 ■

练习 3.11 渡越辐射主要的信号为背向辐射。利用所学的镜像电荷法，定性解释渡越辐射。 ■

解 当实体电荷自左往右行进时，镜像电荷自上往下移动。两者在金属箔板接触点“重合”，湮灭后产生往下传递辐射场。随后，实体电荷继续往右前进。 ■

**注** 以上利用镜像电荷解释的图像也可以换成用辐射场在金属箔板面“反射”解释。这两种解释都假设金属箔板可近似为理想导体，因此仅适用于中低频情况。

### 3.4.3 Smith-Purcell 辐射

#### 定义 3.7. Smith-Purcell 辐射

由 S. Smith 与 E.M. Purcell<sup>a</sup> 在 1953 年提出。当一电子束掠过光栅（规整的金属结构）时，扭曲的库仑场为了满足分界面边界条件，将产生电磁辐射，称 Smith-Purcell 辐射。

<sup>a</sup>E.M. Purcell 由于核磁共振工作，在 1952 年获得诺贝尔物理学奖。 □

**笔记** 如果光栅不是金属结构，而是介质结构，且介质折射率满足 Cherenkov 辐射条件，则可能在介质光栅的真空侧产生 Smith-Purcell 辐射，在结构侧产生 Cherenkov 辐射。

#### 性质 3.7. Smith-Purcell 辐射的一些特性

- 有色散关系如下

$$\lambda = \frac{d}{n} \left( \frac{1}{\beta} - \cos \theta \right) \quad (3.70)$$

其中， $\lambda$  为在  $\theta$  角观察到的第  $n$  阶光栅反射模（或第  $n$  次谐波）辐射波长， $d$  为光栅周期， $\beta = v/c$  为洛伦兹相对论因子。

- 纵向单位长度的强度角分布有

$$\frac{d^2 I_{SP}}{dz d\Omega} = \frac{4q^2}{\pi d^2} \sin^2 \theta \exp \left[ -\frac{4\pi h/d}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \right] \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \quad (3.71)$$

- 常见的 Smith-Purcell 辐射波长范围为毫米波至可见光波段，电子能量从 0.02 MeV 至 855 MeV。在粒子束诊断得到应用。 □

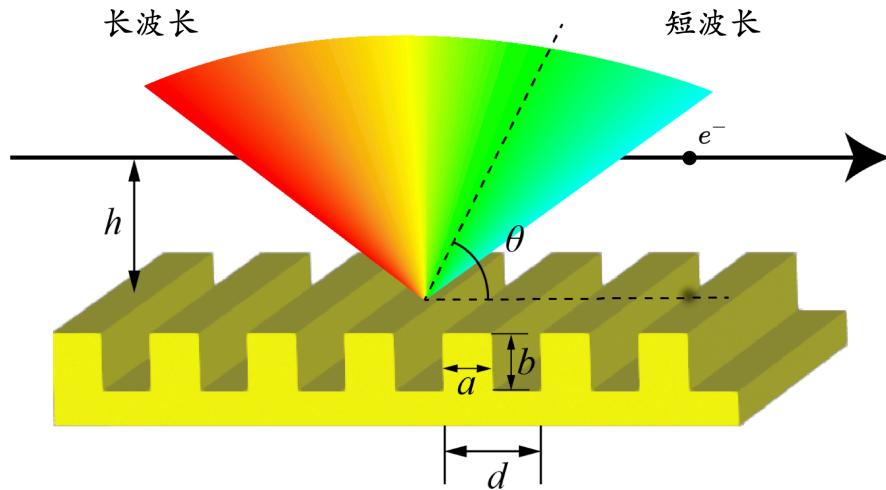


图 3.12: Smith-Purcell 辐射示意图。

一般认为 Smith-Purcell 辐射是当电子束掠过理想金属光栅表面时产生的电磁辐射。距离半个世纪前提出的 Smith-Purcell 辐射，人们现在对电子束或激光束掠过周期结构表面时，其产生电磁辐射的理解已经丰富许多：结构材料不再限于金属，可以是有限电导率的导体、电介质、超材料等，空间周期性也不再限于一个方向。与此相关的一个重要机制称表面等离极化激元 (surface plasmon polariton, SPP)，总结如下：

#### 定义 3.8. 表面等离极化激元 (surface plasmon polariton, SPP)

为一种状态 (state)，是金属表面的一种由自由电子和光子相互作用形成的混合激发态。在这种相互作用中，自由电子与其共振频率相同的光波照射下发生集体振荡。SPP 包含了两种运动：

- 金属表面的电荷运动，称 surface plasmon
- 金属另一侧 — 空气或电介质侧 — 电磁波，称 polaritons

二者共同作用，构成 SPP。

一般来说，SPP 的波长比激发它的入射光的波长短。SPP 的能量则沿着垂直于界面方向指数衰减，又称调落波 (evanescent wave)。换句话说，这种波的能量被局限在界面附近。

**注** SPP 只能是 TM 波。



**笔记** SPP 的波长比激发它的入射光的波长短是一种“好”的特性；很多时候，短波长的电磁波比长波长电磁波更难得。如何有效提取这种沿着垂直于界面方向指数衰减的调落波成为一个有趣的问题。有些读者或许好奇，如果没有提取，那这里的调落波最终有没有造成能量损失？

上面提到的一个专有名词：等离激元 (plasmon)。这个词与等离子体 (plasma) 字面上

看起来很像。等离激元是一种波的振荡状态，用量子力学或凝聚态物理的语言，称准粒子 (quasi-particle)。等离激元还可细分“体”等离激元、“(表)面”等离激元。等离子体则是由正离子、中性粒子、游离的电子等不同粒子所组成的总体看起来为电中性的状态或物质。留意，表面等离极化激元  $\neq$  等离激元  $\neq$  等离子体。

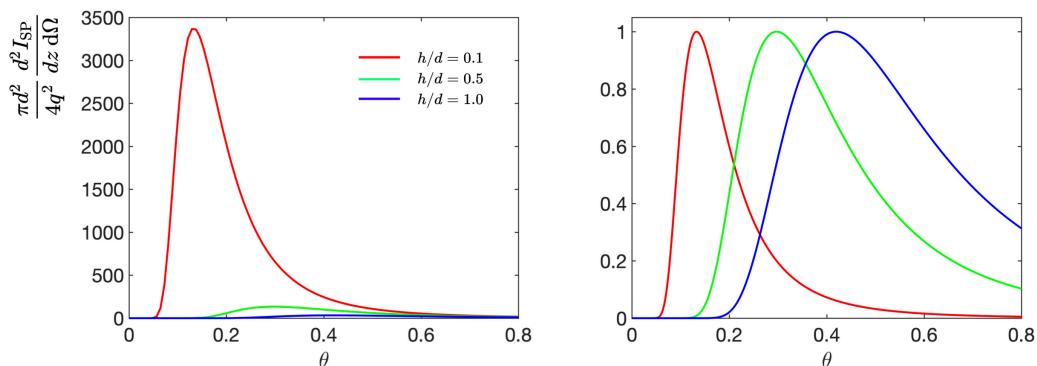
对细节感兴趣的读者，建议自行查找相关文献或参考书，此处不多做介绍。

 **练习 3.12** 推导 Smith-Purcell 辐射的色散关系。又称共振条件，可以通过惠更斯原理得到，建设性干涉结果。

$$\left(\frac{d}{\beta c}\right) \cdot c - d \cos \theta = n \lambda_r \Rightarrow \lambda_r = \frac{d}{n} \left(\frac{1}{\beta} - \cos \theta\right)$$

■

 **练习 3.13** 对 Smith-Purcell 辐射强度角分布感兴趣的读者，可试着推导以上结果。 ■



**图 3.13:** 单位长度 Smith-Purcell 辐射强度角分布。不同曲线表示不同  $\frac{h}{d}$  比值。可以看到，随着  $h/d$  增加，辐射强度随呈指数衰减，并且最大峰值强度的观察角度  $\theta$  增加。这里假设电子能量为 36 MeV。

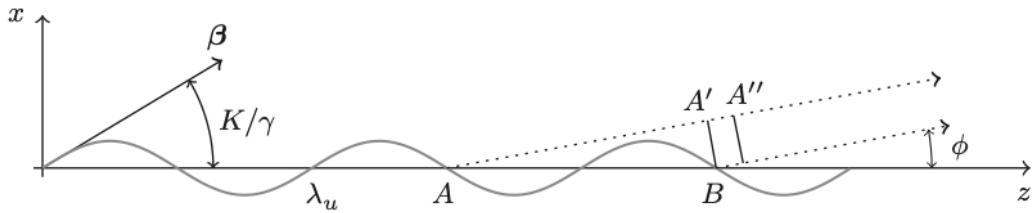
**注** 以上介绍的几种辐射机制，有时候在加速器领域被用来作为束测工具。细节此处不论。



**笔记** 由前面讨论知道，Lienard-Wiechert 场的第二项辐射场为时变场。上面讨论了几种不同辐射机制，结合后面 §10.2 的讨论，将发现，从能量转移这层意义上说，一种辐射机制同时意味着一种粒子的加速机制。例如，有 Smith-Purcell 辐射，那存在一种基于 Smith-Purcell 辐射的粒子加速机制，称逆 Smith-Purcell 辐射 (inverse Smith-Purcell radiation)。类似地，也就有逆渡越辐射 (inverse transition radiation)、逆契伦科夫辐射 (inverse Cherenkov radiation) 等粒子加速机制。感兴趣的读者可根据关键词，自行参考相关文献。

### 第三章 补充习题

1. 这一章没有介绍，但将在第5章重点讨论的波荡器辐射，参考下图。推导电子在波荡器中经历一个周期  $\lambda_u$  后走了多少路径长，即  $\widetilde{AB}$ 。在此基础上推导自由电子激光(FEL)共振条件关系。



**解** 假设观察位置在远处，与  $z$  夹  $\phi$  角。电子经过 A 处时产生一辐射场，走到 B 时，再产生另一辐射场，两辐射场以虚线表示。共振关系即当两辐射场存在建设性干涉情况，有

$$\frac{\lambda_1(\phi)}{c} = \frac{\widetilde{AB}}{v} - \frac{\overline{AA'}}{c}$$

其中，

$$\begin{aligned}\widetilde{AB} &= \int_0^{\lambda_u} dz \sqrt{1 + (x')^2} \approx \int_0^{\lambda_u} dz \left(1 + \frac{1}{2} x'^2\right) = \lambda_u \left(1 + \frac{K^2}{4\gamma^2}\right) \\ \overline{AA'} &= \lambda_u \cos \phi \approx \lambda_u \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)\end{aligned}$$

于是，有

$$\frac{\lambda_1(\phi)}{c} = \frac{\lambda_u}{c} \left[ \frac{1 + \frac{K^2}{4\gamma^2}}{\beta} - \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \right] \approx \frac{\lambda_u}{c} \frac{1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \phi^2}{2\gamma^2}$$

2. 当一电子掠过周期光栅(规整的金属结构)时，将产生电磁辐射，称 Smith-Purcell 辐射。推导 Smith-Purcell 辐射的一阶共振条件

$$\lambda = d \left( \frac{1}{\beta} - \cos \theta \right)$$

其中， $\lambda$  为在  $\theta$  角观察到的一阶光栅反射模辐射波长， $d$  为光栅周期， $\beta = v/c$  为洛伦兹相对论因子。

3. 已知相对论电子产生同步辐射具有张角  $\theta_0 \approx 1/\gamma$ ，估算在此立体角范围内，辐射功率占比大概多少？
4. 以振幅  $P_0$ 、频率  $\omega$  振荡的电偶极矩，置于理想导电平面上方  $a/2$  处，且与该平面平行，求辐射电磁场坡印廷向量  $\mathbf{S}$ 。
5. 以振幅  $P_0$ 、频率  $\omega$  振荡的电偶极矩，置于理想导电平面上方  $a/2$  处，且与该平面垂直，求辐射电磁场坡印廷向量  $\mathbf{S}$ 。

