

静电场

蔡承颖¹

华中科技大学电气与电子工程学院



¹jcytsai@hust.edu.cn

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

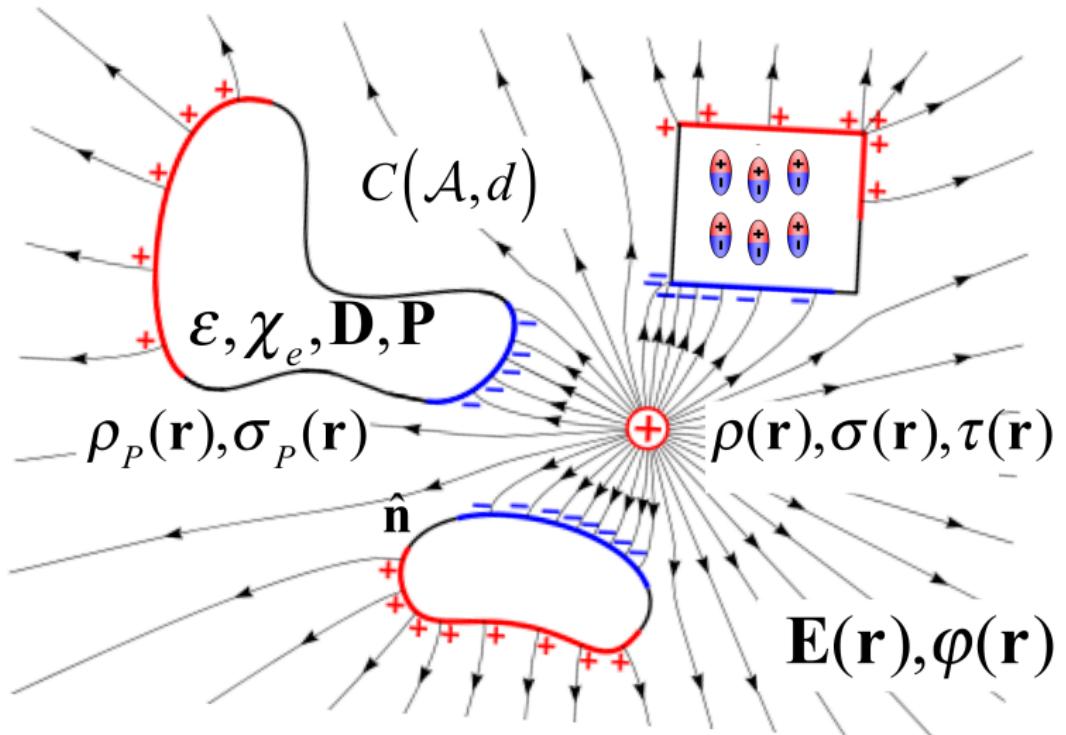
3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

写在开始前...



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

自由空间的静电力

不考虑电介质 (dielectric) 影响。静，表示对造成场的源，不考虑其相对运动。有以下平方反比定律²。

定律：库仑定律 (Coulomb's law)

分别带有 q_1, q_2 且相距 r 的静止点电荷， q_1 对 q_2 所造成的静电力为
(Charles-Augustin de Coulomb, 法国物理学家, 1736-1806)

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{e}_{12}}{r^2}$$

其中， \mathbf{e}_{12} 为自 q_1 至 q_2 的单位矢量。

常数 ϵ_0 为真空电容率或真空介电常数 (permittivity)，在 SI 制³ 为 $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。点电荷 $q_{1,2}$ 取值必须是 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 的整数倍⁴。

²对于平方反比的测量，即 $2 \Rightarrow 2 + \delta$ ，最早由 Cavendish 给出 $\delta < 0.03$ ，随后 Maxwell 给出 $\delta < 10^{-6}$ ，目前最新结果给出 $\delta < 10^{-15}$ 。对于库仑定律的检验，极短距离下，如 $r < 10^{-16} \text{ m}$ ，电磁作用未必主宰/成立。在极远距离下，如星体产生的磁场，目前为止的检验都是严格成立的。目前已知的是，在 $10^{-16} < r < 10^8 \text{ m}$ 的空间尺度内，库仑定律都是成立的。▶ 例题 3

³ $1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ 。

⁴Why? 未经实验证实，但磁单极子理论是一种解释方式。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

自由空间的静电场

往后分析中，更常涉及的是“场”的概念。

定义：电场 (electric field)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q_t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_t}。绝大多数情况下，\mathbf{E}与q_t无关。$$

“场”概念的提升对经典力学有革命性的影响。它是“源”与“力”的媒介 (agent)。

性质：空间中电荷分布形成的静电场

- 点电荷 $q_1 \sim q_N$ 在空间中分别位于 $\mathbf{r}_1 \sim \mathbf{r}_N$ ，在空间某一位置 \mathbf{r} 形成的静电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}$$

- 空间有限区域中，有连续分布的体电荷密度函数 $\rho(\mathbf{r})$ 、面电荷密度 $\sigma(\mathbf{r})$ 、或线电荷密度 $\tau(\mathbf{r})$ ，在空间某一位置 \mathbf{r} 形成的静电场为

3.1 自由空间的静电场

3.2 自由空间的电位势

3.3 物质中的静电场

3.4 静电场边值问题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

自由空间的静电场

性质：空间电荷分布形成的静电场（续）

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2} dV' \\ \iint_A \frac{\sigma(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2} d\mathcal{S}' \text{ (例题 2)} \\ \int_C \frac{\tau(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2} d\ell' \text{ (例题 1)} \end{array} \right.$$

其中， $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。注意区别观察坐标与源坐标 (')。

定理：叠加原理

静电力与电场满足叠加原理， $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \int d\mathbf{F}$ 。

3.1 自由空间的静电场

3.2 自由空间的电位势

3.3 物质中的静电场

3.4 静电场边值问题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

自由空间的静电位

对 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2} dV'$ 求旋度⁵，有 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ⁶。

定理：静态无旋场特性

对于与时间无关的矢量场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ，以下为等价叙述：

1. $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$
2. 存在（标量）电位函数，使得 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$
3. 对任何单连封闭曲线 C ， $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = 0$
4. 以下线积分由端点决定，与路径无关

$$\varphi_P = \varphi_{P_0 \rightarrow P} = \int_{P_0}^P d\varphi = \int_{P_0}^P \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r},$$

其中， P_0 为参考零位点。

5. \mathbf{E} 为保守场。

⁵对观察坐标。证明见 §3.1.4。

⁶对于面、线电荷密度情况与离散电荷分布情况皆可获得相同结果。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

由上讨论知，普通物理学中学到的式子

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{或} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV'$$

是基于“以无穷远处为参考零电位”的假设而得到的。

定律：高斯定律 (Gauss' law)

对 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2} dV'$ 求散度，有高斯定律⁷

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathcal{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

注意散度算子对观察坐标操作⁸。

★ 复习时，比较 Ch5，对 Biot-Savart 定律分别求散度与旋度，可以得到磁场的高斯定律与安培定律。

⁷ Johann Carl Friedrich Gauss, 德国数学家, 1777-1855

⁸ 证明见 §3.1.4。以上结果对于面、线电荷密度情况与离散电荷分布情况皆可获得相同结果。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

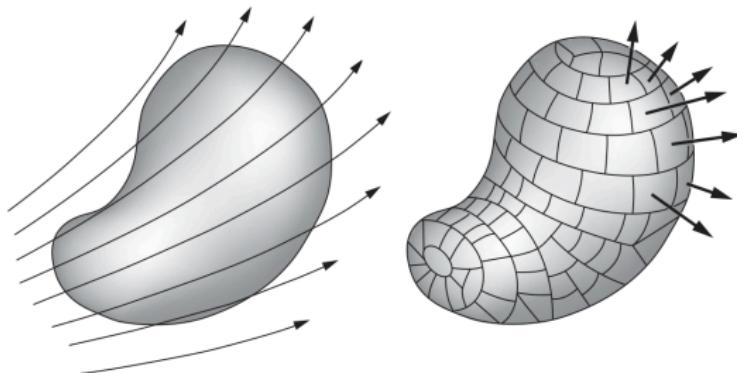
作业

力线、电场线、等位线(面)

定义：通量 (flux)

定义矢量场穿过某截面的通量为 Φ 。对电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

$$\Phi \equiv \iint_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathcal{S} \quad [\text{SI 单位: Volt-m}]$$



除了辅助理解，往后几章可以慢慢体会到，“场”的概念还能引导我们模型化、统一理解看似截然不同的物理现象。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

力线、电场线、等位线(面)

电磁场分析中常常需要形象化地描绘其空间分布。

定义：场线与等位线/面 (equipotential line/surface)

电场线又称 E 线或电力线，定义为空间的有向曲线，线上任一点的切线方向及大小与该点电场方向及强度一致。 E 线方程: $\mathbf{E} \times d\ell = \mathbf{0}$ 。

等位线/面是由等值的 φ 在空间组成。等位线/面方程: $\varphi = C$ 。

图例见教科书图 3-1-5 与 3-2-6。

性质：电场(力)线性质

- 电场线起于正电荷，终于负电荷，在无电荷处不起不止。[高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$]
- 电位沿电场线不断降低。[$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$]

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

往往在分析电磁场行为时，无法马上给出精确解。此时，掌握一些理想化的模型能给我们初步/粗略的物理图像。

定理：无限大平板、薄球壳、无限长直线（圆柱）

假设电荷分布皆均匀：

- 对于无限大平板有面电荷密度 σ ，距平面高度 z 处有均匀 $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$ 。见例 3.1.2。
- 带总电量 Q 半径 R 的薄球壳，距球心外 r ($r > R$) 处有 $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$ ，与球壳面上电荷集中于球心造成的场相同。球壳内静电场为 0，静电位为常数。
- 无限长直线线电荷密度 τ ，距此直线 r 处有 $\mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}$ 。对无限长圆柱柱面外结果相同。圆柱面内静电场为 0，静电位为常数。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

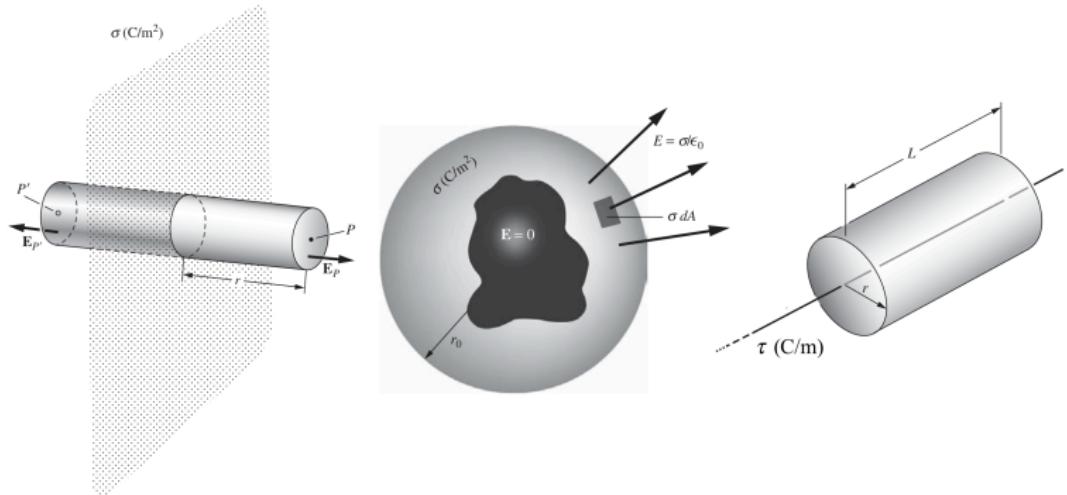
3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

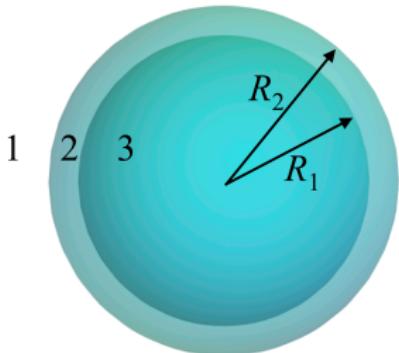
3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

均匀带电有限厚度球壳

利用高斯定律，选用球坐标分析，对于均匀带电 ρ_e 的有限厚度球壳体，有电场与电位



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = \frac{\rho_e(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{E}_2 = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \mathbf{e}_r \\ \mathbf{E}_3 = \mathbf{0} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = - \int_{\infty}^r \mathbf{E}_1 \cdot d\ell = \frac{\rho_e(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r} \\ \varphi_2 = \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} \left(3R_2^2 - \frac{2R_1^3}{r} - r^2 \right) \\ \varphi_3 = \frac{\rho_e(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0} \end{array} \right.$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 简法

3.5 容

3.6 例题 & 练习

作业

支配电位 φ 的微分方程

一般分析静电力学⁹问题时，先计算空间中电位分布（标量），然后通过 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 得到电场，比直接计算利用 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ 求电场（矢量）可能较为简单。

定理

空间中自由电荷体密度 $\rho(\mathbf{r})$ 与形成的电位 φ 之间，由泊松方程（Poisson equation）支配。[法国科学家 Simeon Denis Poisson (1781—1840)]

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}}^2\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

在没有自由电荷分布的区域，称拉普拉斯方程。

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = 0$$

其中， ∇^2 作用在观察坐标。

▶ 例题 8

⁹回头复习时，想想时变电磁场的对应为何？

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

支配电位 φ 的微分方程

明显地，泊松方程与拉普拉斯方程的解都满足叠加原理。本课程或许接触更多的是拉普拉斯方程，以下列出其解的几个重要性质。

性质：拉普拉斯方程解的一些特性 ♠

在真空中无源区域边界面 S 与包围的 \mathcal{V} ，满足拉普拉斯方程解 φ 有

1. φ 在 \mathcal{V} 区域极大或极小值必皆发生在边界 S 上
2. 若 φ 在 S 上的值皆为一定值 φ_0 ，则在 \mathcal{V} 中
$$\varphi = \varphi_0$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

似一维场源(线)	二维场源(平面)	三维场源(球)
1) 无限长细线电荷 ¹⁰ $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho}$ $\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$	1) 圆线:(轴上) $E = \frac{\tau}{2\epsilon_0} \frac{Rz}{(\sqrt{R^2+z^2})^3}$ $\varphi = \frac{\tau}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$	1) 球面: $r < R \Rightarrow E = 0$ $r > R \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{r}$ $r < R \Rightarrow \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{R}$ $r > R \Rightarrow \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{r}$
2) 无限长圆柱体电荷 ¹¹ $\begin{cases} \rho < R \Rightarrow E = \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \rho \\ \rho > R \Rightarrow E = \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{\rho} \end{cases}$ $\begin{cases} \rho < R \Rightarrow \varphi = -\frac{\rho_e}{4\epsilon_0} \rho^2 \\ \rho > R \Rightarrow \varphi = \frac{\rho_e R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{\rho} - \frac{\rho_e R^2}{4\epsilon_0} \end{cases}$	2) 圆环:(轴上) 内径 R_1 , 外径 R_2 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2+z^2}} \right)$ $\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2+z^2} - \sqrt{R_1^2+z^2} \right)$	2) 球体: $r < R \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{r}{r}$ $r > R \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $r < R \Rightarrow \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right)$ $r > R \Rightarrow \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{r}$
3) 无限长圆柱面电荷 ¹² $\begin{cases} \rho < R \Rightarrow E = 0 \\ \rho > R \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{\rho} \end{cases}$ $\begin{cases} \rho < R \Rightarrow \varphi = 0 \\ \rho > R \Rightarrow \varphi = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{R}{\rho} \end{cases}$	3) 圆盘:(轴上) $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ $\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2+z^2} - z \right)$	3) 球壳: 内径 R_1 , 外径 R_2 $0 < r < R_1 \Rightarrow E = 0$ $R_1 < r < R_2 \Rightarrow E = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right)$ $r > R_2 \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_e (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$ $0 < r < R_1 \Rightarrow \varphi = \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$ $R_1 < r < R_2 \Rightarrow \varphi = \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} \left(3R_2^2 - \frac{2R_1^3}{r} - r^2 \right)$ $r > R_2 \Rightarrow \varphi = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_2^3}{r} - \frac{R_1^3}{r} \right)$

10 线外一点距线 ρ_0 为参考电位

11 轴线为参考电位

12 面为参考电位, 其它情况以无限远为参考电位

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

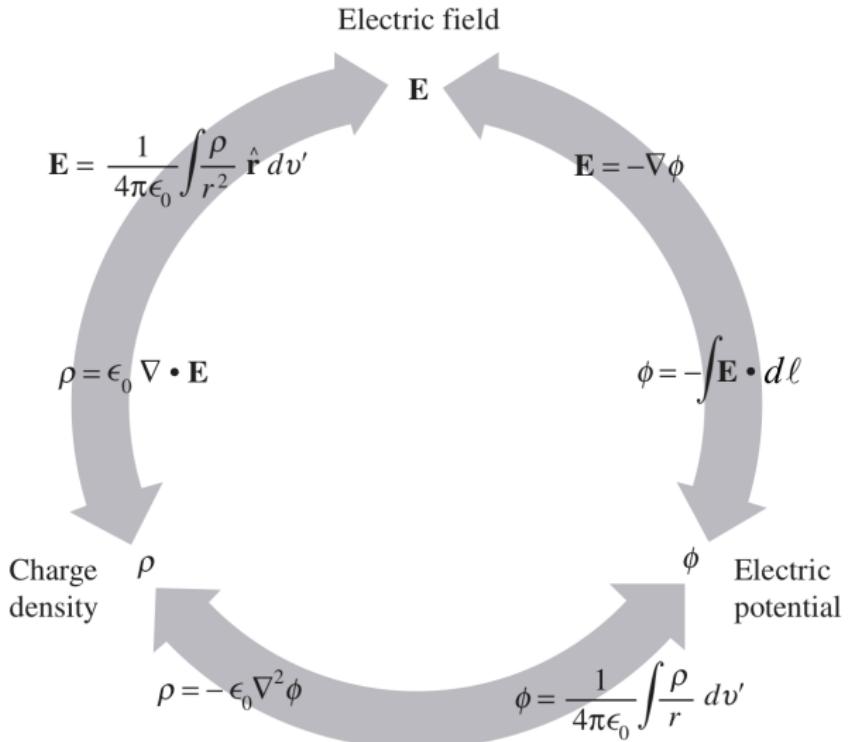
场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力
例题 & 练习

作业

3.1 自由空间的静
电场3.2 自由空间的电
位势3.3 物质中的静电
场3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

导体在静电场中的行为

性质：所有导体在静电场中达平衡时

无论实心或空心或空穴内有另一带电（内）导体，对（外）导体而言

- （内、外）导体中电场为 **0**，
- 无内导体的空穴内电场为 **0**。
- 如果导体不是电中性，电荷必分布于表面。
- 整个导体为等位体，导体表面为等位面。
- 导体外表面附近的电场仅沿法线方向。
- 外导体内侧带有与内导体外侧相同但异号的感应电荷量，外导体外侧则带有相同且同号的感应电荷量。若外导体接地，则外导体内侧感应电荷量不变，但外导体外侧剩余电荷量需要求解获得。
- 外导体外侧表面电荷分布与外导体表面曲率有关，与内导体位置无关。

导体对静电场具屏蔽能力 例题 5。但对时变电磁场不具屏蔽能力。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

电介质在静电场中的行为

电介质 (dielectric) 通常指绝缘体，带有束缚电荷，但没有自由电荷或少到可以忽略的物质。存在外加电场情况下，电介质会有极化现象¹³。仅用点电荷模型不足以定量描述该现象，因此我们定义

定义：电偶极矩 (electric dipole moment)

分别带有 $+q$ 与 $-q$ 且相距 ℓ 组成电偶极，其电偶极矩定义为 $\mathbf{p} = q\ell$ ，其中 ℓ 为自 $-q$ 指向 $+q$ 的位移矢量。对于连续分布体电荷，电偶极矩矢量的一般定义为 $\mathbf{p} = \iiint \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})dV$ 。

▶ 例题 6

并非任何原/分子在外加电场下都仅呈现电偶极矩。还可以定义四极矩 (quadrupole moment) 或其它高阶矩，这些形式是依电位势以球谐形式展开而定义的。此分析方式在探讨由于局部电荷分布在空间产生电位势时具有一般性。

¹³ 图例见 §3.3.3。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

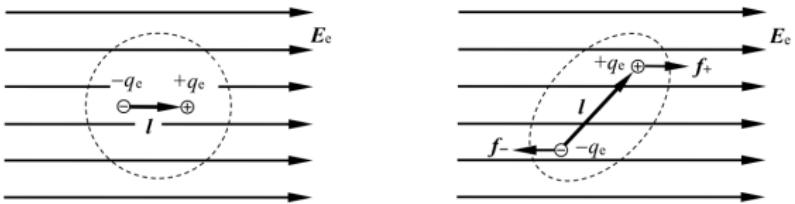
3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业



(a) 非极性分子产生极性

(b) 极性分子发生偏转

图 3-3-1 电介质分子在外电场中的极化

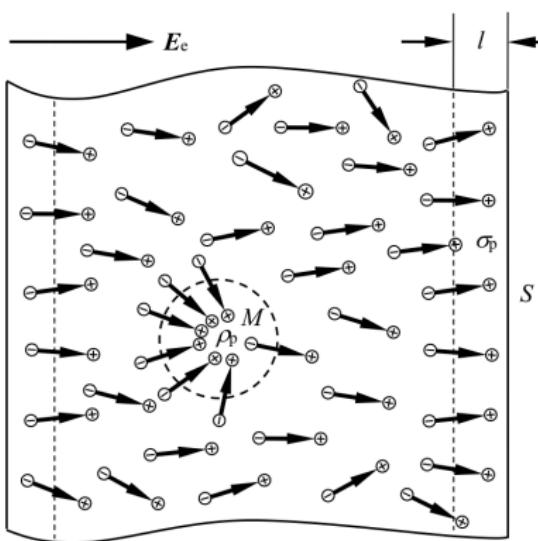


图 3-3-2 极化电荷

3.1 自由空间的静
电场3.2 自由空间的电
位势3.3 物质中的静电
场3.4 静电场边值问
题分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

极性分子与非极性分子

定义：极化强度、极化矢量 (polarization vector)

单位体积内的总电偶极矩 $\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V}$, 其中 \mathbf{p}_i 是分子的电偶极矩。在 SI 制，单位为 C/m^2 。

性质：极化强度作为分子对外界电场的响应

分子内束缚电荷的运动对外界电场的一般响应体现在极化强度上，其一般形式可写为

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left(\chi_e^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi_e^{(2)} : \mathbf{E} \mathbf{E} + \chi_e^{(3)} : \mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E} + \dots \right) = \epsilon_0 \hat{\chi}_e(\mathbf{E}) \mathbf{E}$$

其中， $\chi_e^{(1)}$ 为主要影响因子，体现在物质折射率与衰减因子。 $\chi_e^{(2,3,\dots)}$ 为非线性效应。 χ_e 称极化率 (susceptibility)。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

极性分子与非极性分子

一般情况下， $\chi_e = \chi_e(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \omega, T)$ 。可以想象，时变场与非时变场在不同温度下，其分子极性可能显著不同。以下考虑简单介质 (simple medium) 的电磁响应：

定义：各向同性、线性、均匀 \Rightarrow 简介质

- 各向同性 (isotropic) $\Rightarrow \mathbf{P}$ 与 \mathbf{E} 方向一致 ($\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$)、 χ_e 为标量
- 线性 (linear) $\Rightarrow \mathbf{P} \propto \mathbf{E}$, 与 \mathbf{E}^2 或高阶场无关
- 均匀 (homogeneous) $\Rightarrow \chi_e$ 不随空间位置改变¹⁴
- 互易 (reciprocal) $\Rightarrow \chi_{e,ij} = \chi_{e,ji}$
- 色散 (dispersive) $\Rightarrow \chi_e$ 随电场振荡频率而变

当外界电磁场强度足够大时，物质的电磁响应不再是简单的线性关系，研究非线性响应与物质特性的学科称为非线性光学 (nonlinear optics)。注意，此时叠加原理未必适用。

¹⁴更精确地说，为介电系数或电极化率随空间变化的尺度远小于电磁场的空间变化尺度，即长波极限。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

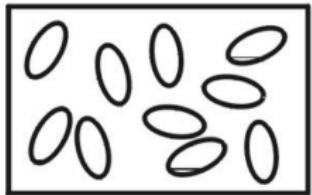
3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

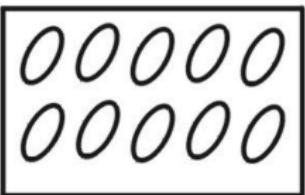
作业

极性分子又分各向同性、各向异性

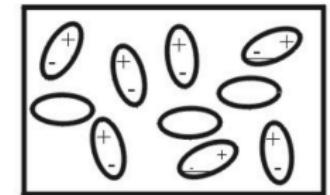


各向同性

$E=0$

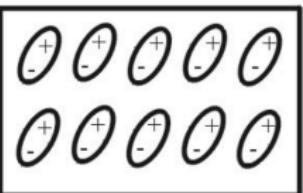


各向异性



$\uparrow P$

$\uparrow E_v$



P_v
 P_h

$\uparrow P$

$$\vec{P}_v = \chi_{vv} \vec{E}_v$$

$$\vec{P}_h = \chi_{hv} \vec{E}_v$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

定理：极化电荷

一个具有极化矢量 \mathbf{P} 的电介质，可以用其极化体电荷密度

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

与极化面电荷密度

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

表征，其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 方向指向外。

由上可知，具有均匀极化矢量的电介质内， $\rho_P = 0$ 。如果存在 ρ_P ，则 ρ_P 出现在电介质内部 \mathbf{P} 不均匀处。更多讨论参考教科书例 3.3.1。

此外，可以证明， $\sum Q_P = \iiint_V \rho_P dV + \iint_A \sigma_P dS = 0$ ，无论电介质是否为电中性。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

电介质存在的场域中，空间中任一点电位与电场可以如下方式求得

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_V \frac{(\rho_f + \rho_P)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \iint_S \frac{(\sigma_f + \sigma_P)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_V \frac{(\rho_f + \rho_P)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \iint_S \frac{(\sigma_f + \sigma_P)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \right]$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

前面讨论真空中静电场的依据是电场 \mathbf{E} , 在物质中, 为了避免极化电荷造成分析困难, 我们定义电位移矢量 (electric displacement) 或电通密度 (electric flux density) 以简化分析, 又称 \mathbf{D} 场。

定义 : 电位移矢量、电通密度

电位移矢量 (或称电通密度) 定义为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad [\text{SI 单位: } \text{C/m}^2]$$

其中, \mathbf{E} 与 \mathbf{P} 分别为物质内部的电场与极化矢量。

说明

也写成 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$, 其中 $\epsilon_r \geq 1$ 称相对介电常数 (dielectric constant)。

若 ϵ 已知, 则有 $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$ 。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

广义高斯定律

由以上定义，可以得到推广的高斯定律。

定义：广义高斯定律 (generalized Gauss' law)

对任何电介质（包含真空），有

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \Leftrightarrow \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathcal{S} = \iiint_V \rho_f dV$$

其中， ρ_f 为物质内自由体电荷密度。

说明

一般情况下， \mathbf{D} 未必是保守场。当电介质为简单介质时， \mathbf{D} 为保守场。

当电荷在电介质中移动时，由于 ρ_P 与 ρ_f 都会产生静电场，因此电荷感受到的场是 \mathbf{E} ，计算电位差时应对 \mathbf{E} 积分。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

若电介质存在自由电荷体密度 ρ_f , 其将形成电场 (E) \Rightarrow 造成电介质极化 (P) \Rightarrow 产生极化体电荷 (ρ_P), 有以下关系

定理

对于简单介质 (ϵ 已知), 若物质内存在自由电荷体密度 ρ_f , 则极化体电荷密度为 $\rho_P = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1\right) \rho_f$, 且总体电荷密度可写作 $\rho = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \rho_f$ 。电介质效应必定为“抑制”(消弱、抵消) 外在电场。

极化面电荷密度视物质表面结构而定。

定理

在电介质中的拉普拉斯方程形式不变, 而泊松方程为

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla \varphi) = \rho_f \xrightarrow{\text{简单介质}} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

二维拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 的一般解形式

在二维 (x, y) 直角坐标系中, φ 有以下形式通解

$$\varphi(x, y) = X(x) Y(y) = (A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x) (C \cos \beta y + D \sin \beta y)$$

其中, $\alpha^2 + \beta^2 = 0, \alpha\beta \neq 0$, 通常 α, β 由于边界条件限制需要满足离散条件。

在二维与 z 无关的柱坐标系中, φ 有以下形式通解

$$\varphi(\rho, \phi) = \alpha_0 + \beta_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi) \rho^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) \rho^{-n}$$

♠ 对于球坐标, 如果待解的量与 ϕ 无关, 则拉普拉斯方程在与 ϕ 无关的球坐标系中, φ 有以下形式通解

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n r^n + \beta_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta)$$

其中, 径向解为两个线性无关 (独立) 解 r^n 与 $r^{-(n+1)}$ 。θ 方向的解为勒让德多项式 (Legendre polynomial) P_n , $\theta \in [0, \pi]$ 。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

媒质分界面上的边界条件

边值问题涉及两种情况：

- 媒质分界面上的边界条件 (或称分界面条件¹⁵)
- 求解泊松方程或拉普拉斯方程场域的边界条件

定理：媒质分界面上“电”的边界条件

就任何二种媒质之分界面 (无论电介质或导体), 无论在分界面上是否有自由电荷, 恒有 [1&3,2&4 等价]

1. $\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$ [\mathbf{E} 的切向连续性]
2. $\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$ (非 ρ_f) [\mathbf{D} 的法向连续性]
3. $\varphi_1 = \varphi_2$ [电位函数的连续性, 表征电场为有限值]
4. $\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_f$ [电位函数法向导数的连续性]

其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 为该点法线方向。

▶ 例题 9-平板、▶ 例题 10-球、▶ 例题 11-球、▶ 例题 12-圆柱

¹⁵以上定理证明, 见教科书 §3.3.5。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

介质-导体分界面的边界条件

▶ 例题 13-球

由以上定理可以证明 E_1, E_2, \hat{n} 在同一平面上¹⁶。若为简单介质，则还有 D_1, D_2, \hat{n} 共面。

性质

若一边为导体（该侧 $E_1 = D_1 = 0, \varphi_1 = \varphi_0$ ），则

1. $E_{2t} = 0, D_{2t} = 0$
2. $D_{2n} = \sigma_f$ (非 ρ_f)
3. $\varphi_2 = \varphi_0$ (常数)
4. $-\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \epsilon_2 E_{2n} = \sigma_f$

说明

恒定场情况下，金属导体的 $\epsilon \approx \epsilon_0$ 。由上4.知， $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ 的电介质使介质内部 $E_2 \rightarrow 0$ ，有时可用来等效（本身不带电荷的）孤立导体。见图例 3-3-7。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

¹⁶ 即证 $E_1 \cdot (E_2 \times \hat{n}) = 0$ 。

电介质（绝缘体）分界面特性

媒质 2

媒质 1 $\gamma = 0, \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \mu = \mu_0$

$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \mathbf{0}, \rho_f$ can exist

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$$



$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, E_{2t} = E_{1t}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$$

$$D_{2n} - D_{1n} \begin{cases} = 0, & \text{if } \sigma_f = 0 \\ \neq 0, & \text{if } \sigma_f \neq 0 \\ \text{or small} \end{cases}$$

已知表面电荷，可求表面附近的电场
已知分界面电场，可求表面电荷密度

$$\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mathbf{0}$$

磁场一般“看不到”
电介质的存在

电流无法在绝缘体传递
因为电荷无法自由移动

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

场域的边界条件

以下讨论假定电介质为简单介质 (标量 ϵ 已知)。求解电磁场问题，除了利用泊松方程或拉普拉斯方程外，还需指明在求解场域边界上 (记为 Γ) 的电位值。

定义：常用的场域边界条件

- 已知 Γ 上各点电位值，则有

$$\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma} = f_1(\Gamma) \quad [\text{第一类 (Dirichlet) 边界条件}]$$

- 已知 Γ 上各点电位法向导数值，则有

$$\left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f_2(\Gamma) \quad [\text{第二类 (Neumann) 边界条件}]$$

或给定 $\sigma|_{\Gamma}$ (或 $\tau|_{\Gamma}$)，则 $\left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{\Gamma} = -\frac{\sigma|_{\Gamma}}{\epsilon}$ (或 $-\frac{\tau|_{\Gamma}}{\epsilon}$)。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

定义：常用的场域边界条件（续）

3. 对导体而言，选择表面 Γ_c 作为场域边界， $\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_c} = U_{\Gamma_c}$ 。如果能够知道 U_{Γ_c} 的具体数值，则为第一类边界条件。若虽知为等位，而电位的具体数值未知，但表面电荷量 q 已知，则再加一个条件

$$-\oint_{\Gamma_c} \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma = q$$

其中， U_{Γ_c} 为待定常数， ϵ 为导体外介电系数。

4. 通常在圆柱或环形区域，有 [周期边界条件]

$$\varphi(\rho, \phi + 2\pi, z) = \varphi(\rho, \phi, z), \partial_\phi \varphi(\rho, \phi + 2\pi, z) = \partial_\phi \varphi(\rho, \phi, z)$$

5. 适用于无界场域，有 [自然边界条件]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi(\mathbf{r}) < \infty, \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 E(\mathbf{r}) < \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} E(r, \phi, z) < \infty, \lim_{r \rightarrow 0} E(r, \theta, \phi) < \infty$$

例：见教科书例 3.4.1 与例 3.4.2(要求正确列写边界条件)。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

唯一性定理

对于边界值求解来说，还需要“解的唯一性”定理。

定理：唯一性定理

满足前述的边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程的解是唯一的。对 Neumann 边界条件，解 φ 还有一个未定常数，但电场 E 则是唯一确定的。

证明

见 §3.4.2。 □

唯一性定理本身的证明可以略过，其更大的影响在于为以下几个求解静电场问题方法提供理论基础。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

镜像法 §3.4.3

求解静电场问题可以分为三类：

- 电荷分布产生 \Rightarrow 利用库仑或高斯定律求解
- 导体或电介质分布产生 \Rightarrow 利用泊松方程或拉普拉斯方程、列写边界条件并求解
- 电荷与导体 (或电介质) 混合分布产生 \Rightarrow 若问题具有对称性¹⁷, 利用镜像法 (method of image charges)

镜像法的理论依据：拉普拉斯方程的解唯一性定理。

说明

用虚设的电荷分布等效替代媒质分界面上复杂电荷分布，虚设电荷的个数、大小与位置使场的解答满足唯一性定理。

¹⁷碰运气。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

镜像法

镜像法问题类型可以分为四类：

1. 点电荷 & 无限大平面 (点电荷同侧场域)
2. 点电荷 & 无限大平面 (点电荷异侧场域)
3. 无限长平行带电导体圆柱
4. 点电荷 & 导体球：导体球接地/不接地、点电荷在球体外/内 ♠

说明

镜像法得到电位函数后，时常伴随求解导体表面感应电荷密度，为 $\sigma = -\epsilon \nabla \varphi|_{\text{表面}}$ 。作为检验，表面电荷总量有 $Q = \iint_{\text{表面}} \sigma dS$ 。

镜像法最早由开尔文爵士 (Lord Kelvin, 1824-1907) 提出，随后麦克斯韦将其推广至球形几何结构。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

Case 1. 点电荷 & 无限大平面 (点电荷同侧场域)¹⁸

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

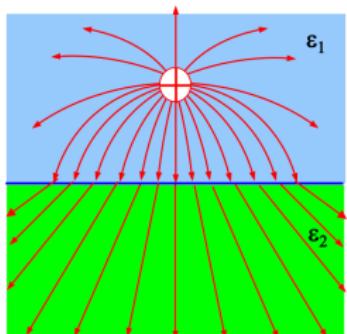
3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

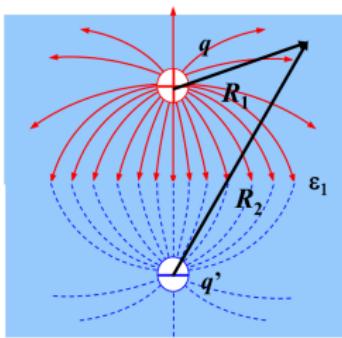
作业

上半平面场域有效



$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right)$$



接地无限大平面电场线

▶ 03-case1

¹⁸图例取自叶齐政上课 ppt。

Case 2. 点电荷 & 无限大平面 (点电荷异侧场域)¹⁹

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

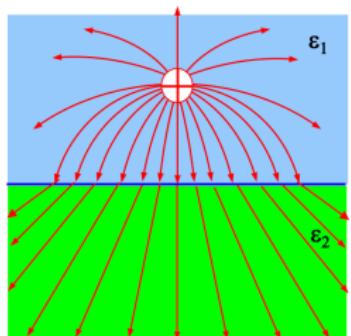
3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

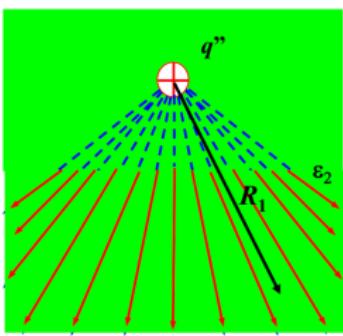
作业

下半平面场域有效



$$q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{R_1}$$



请自行验证上式的 q'' 与上页的 q' 能满足分界面边界条件
 $E_{1t} = E_{2t}$ 与 $D_{1n} = D_{2n}$ 。

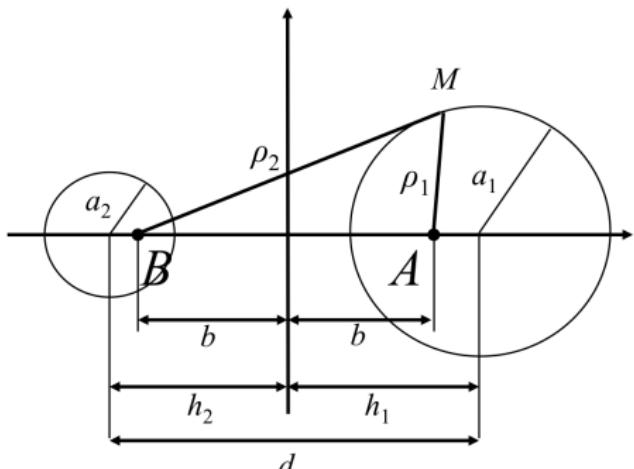
¹⁹图例取自叶齐政上课 ppt。

几何关系

定理：几何关系 (圆)

平面上给定两点 A, B , 距离比 ρ_2/ρ_1 为常数的点 (M) 形成圆曲线族 (比值 < 1 对应的圆在左半侧, > 1 在右半侧), 且有

$$b^2 = h_{1,2}^2 - a_{1,2}^2$$



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

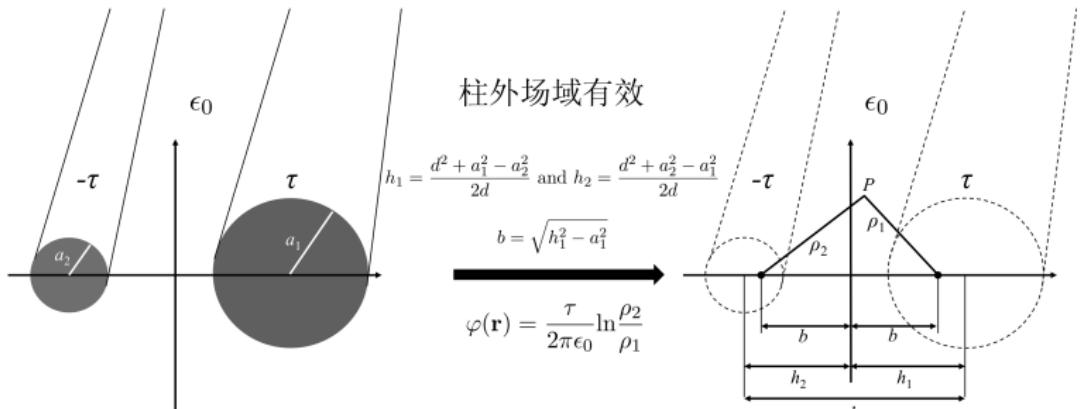
3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

Case 3. 无限长平行带电导体圆柱 (电轴法)



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

Case 3. 无限长平行带电导体圆柱 (电轴法)

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

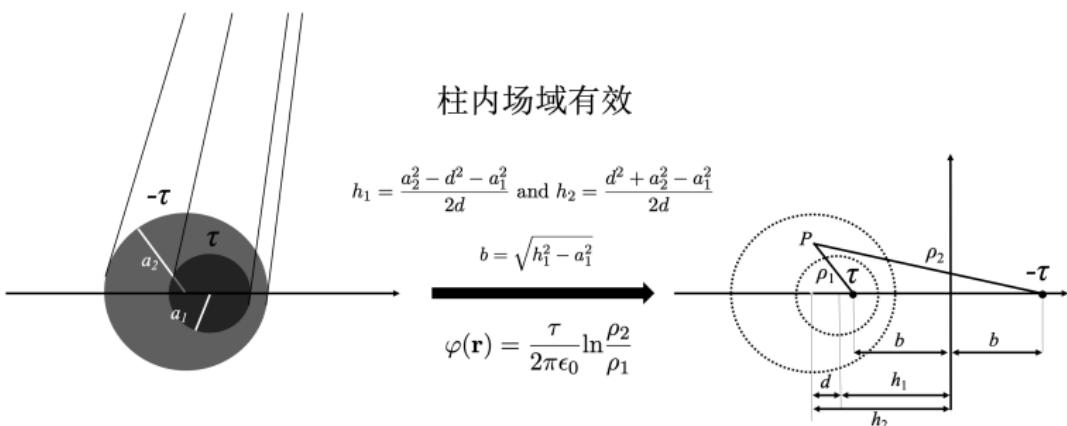
3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业



给定外导体电位 U_c , 则有 $U_c = \varphi(a_2)$ 。当外导体接地, 则柱内电场分布不变, 电位差一常数, 即 $\varphi(\mathbf{r}) \rightarrow \varphi(\mathbf{r}) - U_c$ 。

电容 (capacitance)

在电路理论中，讨论电阻、电容、电感等物件是集总化 (lumped) 的，通常以符号   表示电阻，以  表示电容，以   表示电感。一般以参数 R, C, L 分别量化。

在电路理论中，以上数值一般是给定的，获取这些元件的数值一般通过场的分析或实验手段。以下我们将探讨如何利用电磁场分析获得系统的电容。

以下将分别考虑单、双、多导体情况。

性质

导体电容仅为形状与尺寸的函数，无论单一孤立导体或多导体组成的系统。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

与电容计算相关的定理

说明

- 给定 $q(\mathbf{r}) \Rightarrow$ 解 \mathbf{E} (高斯定律) 或解边值问题 φ (拉普拉斯方程) 得导体间的电位差 $\Delta U = \varphi_A - \varphi_B \Rightarrow C = q/\Delta U$

定理：电容串联、并联的等效电容

- 串联 ($|Q|$ 相等、 U 相加) $\Rightarrow C_{\text{tot}}^{-1} = \sum_{k=1}^N C_k^{-1}$
- 并联 ($|Q|$ 相加、 U 相等) $\Rightarrow C_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^N C_k$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

单一导体电容

定义：单一导体电容

对真空中无外部电场的带电孤立导体，此导体电位 U 与带电荷量 Q 通常成正比，定义此导体的电容 $C = \frac{Q}{U}$ 。注意此处 U 以无穷远处为参考零电位。SI 单位: F(法拉) = C/V, 一般常见以 μF (10^{-6} F)、 nF (10^{-9} F) 或 pF (10^{-12} F) 等表示。

性质：几个单一导体的电容

- 半径 R 导体球 $\Rightarrow C = 4\pi\epsilon R$
- 半径 R 导体圆盘 $\Rightarrow C = 8\epsilon R$
- 长度 L 截面半径 R 实心导体棒
 $\Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln L/R} (L \gg R)$

1 法拉的电容是非常大的电容量。将地球视为完美球体，半径 6,400 km，电容约 (仅) 为 7×10^{-4} F。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

两导体电容

一般工程实际较常遇到的是两导体或多导体形成的电容。该情况下，电容定义中的 U 变成 ΔU ，计算电位差也就不一定需要以无穷远处为参考零电位。一般以符号 $\vdash \dashv$ 表示。假设两导体构成一静电独立系统，空间中电容率 ϵ 给定，则

定理

- 同心导体球壳 (半径 R_1, R_2) $\Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon}{(R_1^{-1} - R_2^{-1})^{-1}}$
- 平行导体板 (板面积 A , 板间距 d) $\Rightarrow C = \epsilon \frac{A}{d}$
- 平行无限长实心导体圆柱 (各自截面半径 R , 轴心相距 d) $\Rightarrow C = \frac{\pi\epsilon}{\ln d/R}$ (单位长度)²⁰
- 无限长直同轴电缆 (内径 a , 外径 b) $\Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln b/a}$ (单位长度)²¹

²⁰例 3.5.1

²¹例 3.5.2

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

多导体系统电容

静电场

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

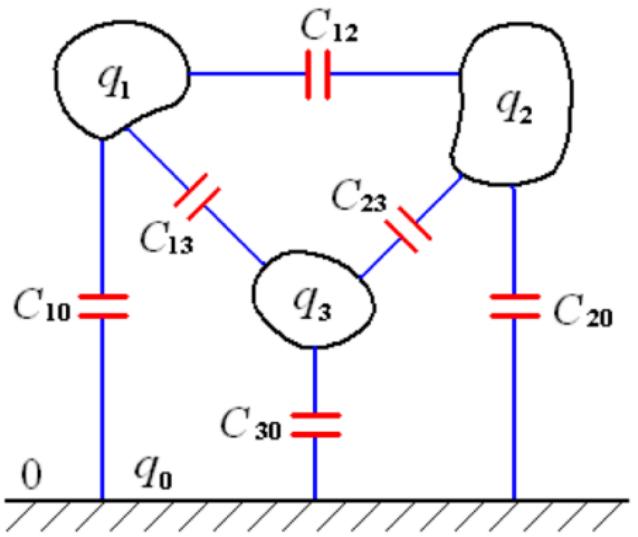
3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业



多导体系统电容

空间存在多个导体构成的静电孤立系统，有 $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ ，一般假设 0 号导体（如大地）为零电位参考点。设任意两导体间电压为 U_{ij} ，则导体带电荷量可写成（以 $n = 3$ 为例）

$$q_1 = C_{10} U_{10} + C_{12} U_{12} + C_{13} U_{13}$$

$$q_2 = C_{21} U_{21} + C_{20} U_{20} + C_{23} U_{23}$$

$$q_3 = C_{31} U_{31} + C_{32} U_{32} + C_{30} U_{30}$$

定义：部分电容、工作电容

- 系数 $C_{i0} \geq 0$ 称自有部分电容 (self capacitance)
- 系数 $C_{ij} \equiv q_i / U_{ij}|_{U_{ik(k \neq j)}=0}$ ($j \neq i, j \neq 0$) 称互有部分电容 (mutual capacitance), $C_{ij} \geq 0, C_{ij} = C_{ji}$
- 视某两导体为端口，定义
 $C_p \equiv q / U_{ij}|_{q_k(k \neq i, k \neq j)=0}$ 为工作电容

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

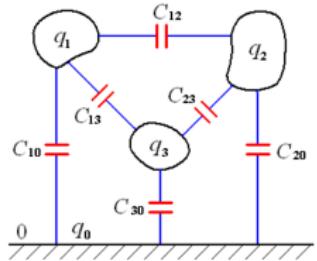
3.6 电场能量与力

例题 & 练习

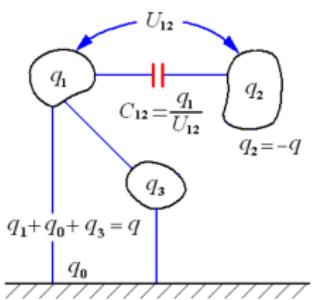
作业

多导体系统电容

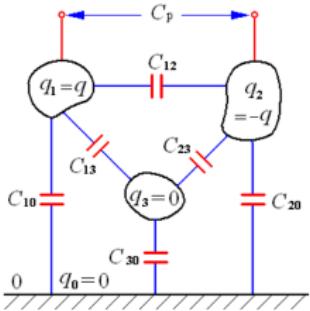
例题 17



(a) 部分电容构成的网络



(b) 部分电容 C_{12} 的计算



(c) 工作电容 C_p 的计算

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

测“工作电容 (等效电容)”，算“部分电容”

多导体系统电容

说明

- 部分电容 C_{ij} 是整个系统共同作用的结果，并不等于导体 i 与 j 单独存在时的电容。 C_{ij} 与所有导体几何形状、尺寸、相互位置、数量、空间 ϵ 有关，与各自带电状况、连接方式无关。
- 部分电容 C_{ij} 计算图例见图 3-5-3(b)，部分电容的数值大小分别反映了两个导体之间电联系的强弱。
- 工作电容可以理解为周遭存在其它导体时，两个电极表现出的电容值，并不等于仅有端口导体 i 与 j 单独存在时的电容。
- 工作电容 C_{ij} 计算图例见图 3-5-3(c)

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

静电能量

作为静电场的分析工具，前面花了大量篇幅介绍电场与电位。要深入掌握静电场的特性或行为，从能量观点切入分析也是必要的²²。电场基本特征是对电荷有作用力，电荷在电场力下移动，电场力做功，表明电场具有能量。此处讨论不包含辐射 (radiation) 效应，故为静电能量。

定义：静电能 (electrostatic energy)

考虑一个孤立静电系统，电场能量来源于建立电场过程中外界所提供的能量。换句话说，若维系此系统的原因消失，系统中的电荷皆自由运动至零电位，所释放的能量称为静电 (位) 能。

考虑双自由电荷系统过程，放置第一个电荷 q_1 于 \mathbf{r}_1 处不需要做功。接下来将电荷 q_2 自无穷远处移到 \mathbf{r}_2 处，需要对 q_2 作功 $W_e = q_2\varphi_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$ 其中， $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ 。

²²特别是在时变电磁场。

3.1 自由空间的静电场

3.2 自由空间的电位势

3.3 物质中的静电场

3.4 静电场边值问题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

静电能量密度

换一个方式，先移动 q_2 再移动 q_1 ，需要作一样多的功，有 $W_e = q_1\varphi_1 = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}$ ，其中， $r_{21} = r_{12}$ 。以上可以写成 $W_e = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)$ 。三个自由电荷组成的系统有 $W_e = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right) = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)$ 。一般情况下，有 $W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varphi_k q_k$ 。

以上是针对离散的自由电荷的结果²³。若电荷分布限制在局部区域，如导体表面，设想系统为 N 个导体组成，导体表面 A_k ，带有电荷 Q_k 及电位 φ_k ，设无限远处为参考零电位，则系统静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_{\sum A_k} \sigma_k \varphi_k dS = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varphi_k \iint_{A_k} \sigma_k dS = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k \varphi_k$$

²³ 此处的能量为互能。点电荷的自有能（将许多微元电荷 dq 压紧构成 q 所需做的功）为无限大。教科书中讨论了自有能与互有能的区别，见 §3.6.1。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

静电能量密度

目前为止的分析都是假定已知电位与电荷分布，计算静电能。系统静电能也可以通过电场获得，总结如下

性质：孤立系统静电能

- 空间中 N 个离散分布的自由电荷，若 φ_k 表示 q_k 以外的电荷对 q_k 形成的电位，则此系统的静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varphi_k q_k$$

- 若在空间有连续自由体电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ （或面电荷 σ , 线电荷 τ ），形成 $\varphi(\mathbf{r})$ ，则系统静电能为（积分遍及带电体）

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \iint_A \sigma \varphi dS = \frac{1}{2} \int_C \tau \varphi d\ell$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静
电场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

静电能量密度

性质：孤立系统静电能（续）

- 若其建立的 $E(r)$ 与 $D(r)$ 已知，要求电介质为无损耗，则系统静电能为（积分遍及场域）

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \iiint_V w_e dV$$

定义：电场能量密度

定义为 $w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$

两种计算方式的区别在于，含有电荷的表示式局限于某空间区域，电场则是无形的空间函数。凡是静电场不为零的空间都储存着静电能量。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

静电作用力

计算静电力一般采取两种方法：

- 确定电荷分布 (ρ 或 σ 或 τ)，在局部电荷 ($d\rho$ 或 $d\sigma$ 或 $d\tau$) 处求其余电荷作用在该处产生的电场 \Rightarrow 带电体受到的总静电作用力²⁴为 $\mathbf{F} = \int \mathbf{E} dq \Rightarrow$ 通常不实用，特别对于一般物质内部 \mathbf{E} 不好求
- 利用能量法，求出场能，则力与能量的梯度有关 \Rightarrow 虚位移法 (principle of virtual displacement)

事实上，在电磁场中处理“力”的问题比起“能量”是较为棘手的，理由是因为电磁场除了携带能量，还具有动量。课程后面讨论恒定磁场、时变电磁场时还会陆续接触，会发现电磁场除了携带能量、动量外，还具有力矩、压力、张力、角动量等概念，行为就像“质点粒子”一样。

3.1 自由空间的静电场

3.2 自由空间的电位势

3.3 物质中的静电场

3.4 静电场边值问题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

²⁴ 此处为互场，不包含内场产生的力。只要带电体维持一整体，则内力互相抵消。

静电作用力

定理：虚位移法求电场力 (§3.6.4)

若导体 $A_1 \sim A_N$ 形成孤立静电系统 (电荷量不变), 除导体 A_k 外, 其它固定不动, A_k 质心位置 \mathbf{r}_k 可以移动 (仅有平移没有旋转), 若系统静电能为 $W_e(\mathbf{r})$, 则 A_k 所受之力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_k) = -\nabla W_e(\mathbf{r}_k)|_{dq=0}$$

若导体 $A_1 \sim A_N$ 形成非孤立静电系统 (电荷量可变), 但导体各自电位维持不变, 其它同上, 则 A_k 所受之力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_k) = \nabla W_e(\mathbf{r}_k)|_{d\varphi=0}$$

注意此处的力为广义力, 方向需要额外判定。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静
电场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

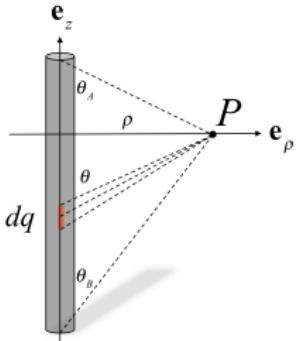
例题 & 练习

作业

例题 1: 细直带电导体附近的电场

如图, 假设长度 L , 忽略导线截面, 线电荷密度 τ 均匀分布, 求其外一点 P (距离导线 ρ) 的电场。

[◀ 返回 §3.1](#)



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\rho} [(\cos\theta_A + \cos\theta_B)\mathbf{e}_\rho + (\sin\theta_A - \sin\theta_B)\mathbf{e}_z]$$

说明

取 $L \rightarrow \infty$, 有书中**例 3.1.1**的结果。

★★ 若带电导体为有限截面 (半径 R)、有限长度 L , 说明面电荷密度接近均匀分布, 并求圆柱外一点 P 的电场。

3.1 自由空间的静电场

3.2 自由空间的电位势

3.3 物质中的静电场

3.4 静电场边值问题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 1: 细直带电导体附近的电场

◀ 返回 §3.1

由库仑定律与叠加原理, 有 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} d\ell'$, 其中,
 $\tau(\mathbf{r}') = \tau = \text{常数}$, $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$,
 $d\ell' = dz'$ 。

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \sin \theta \mathbf{e}_\rho + \cos \theta \mathbf{e}_z, \begin{cases} \cos \theta = \frac{-z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \Rightarrow -\sin \theta d\theta = \frac{-\rho^2}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} dz \\ \sin \theta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{cases}$$

注意, θ 由 $+\hat{z}$ 量起。积分部分 (朝 $+\hat{z}$) 化简如下

$$\begin{aligned} & \int \frac{\tau(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} d\ell' \\ &= \mathbf{e}_\rho \int \frac{\tau \sin \theta}{\rho^2 + z^2} \frac{\sin \theta}{\rho^2} \left(\sqrt{\rho^2 + z^2} \right)^3 d\theta + \mathbf{e}_z \int \frac{\tau \cos \theta}{\rho^2 + z^2} \frac{\sin \theta}{\rho^2} \left(\sqrt{\rho^2 + z^2} \right)^3 d\theta \\ &= \mathbf{e}_\rho \frac{\tau}{\rho} \int_{\theta_B}^{\pi - \theta_A} \sin \theta d\theta + \mathbf{e}_z \frac{\tau}{\rho} \int_{\theta_B}^{\pi - \theta_A} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 2 练习

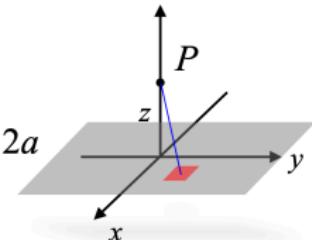
作业

例题 2: 一个方向无限延伸的带电平板

如图, 假设: 1) 宽度 $2a$, 长度无限延伸带电平板与 2) 半径 a 的圆板, 面电荷密度皆为 σ 均匀分布, 求其中心板外一点 P 距离平面 $z = 2a$ 的电场。

[返回 §3.1](#)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \frac{a}{z} \mathbf{e}_z$$



说明

当 P 非常靠近平板时, 有书中**例 3.1.2**的结果。当 $a \rightarrow \infty$ 时, 可以用镜像法求解 (§3.4.3)。

★ 平板改为正方形, 长宽皆为 $2a$, 求中央正上方 z 一点 P 的电场与电位。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \begin{cases} \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} 2\sqrt{6} \right), & \text{正方形板} \\ \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right), & \text{圆板} \end{cases}$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静
电场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 2: 一个方向无限延伸的带电平板

◀ 返回 §3.1

由库仑定律与叠加原理, 有 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} d\mathcal{S}'$, 其中, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。 $\mathbf{e}_R \rightarrow \mathbf{e}_z \cos \theta$, 其中 $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{R}$ ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 由于对称性, 抵消)

$$\begin{aligned} \iint \frac{\sigma(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} d\mathcal{S}' &= \mathbf{e}_z \sigma \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-a}^a \frac{z}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} dx \\ &= \mathbf{e}_z \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2za}{(y^2 + z^2) \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} dy \\ &= \mathbf{e}_z 4\sigma \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \mathbf{e}_z 4\sigma \tan^{-1} \frac{a}{z} \end{aligned}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 + A}\right)^3} = \frac{b}{A\sqrt{A + b^2}} - \frac{a}{A\sqrt{A + a^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + B)\sqrt{x^2 + C}} = \frac{2\cos^{-1}\sqrt{\frac{C}{B}}}{\sqrt{BC - C^2}}$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

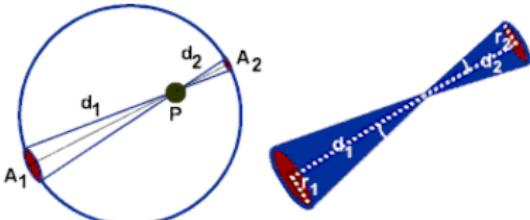
作业

例题 3: 库仑平方反比定律

▶ §3.1 库仑定律

对球壳上均匀分布的电荷 σ ,
内部无静电场 $\Leftrightarrow n = 2$, 其
中 n 为库仑定律中的

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^n}.$$



任意选取球内任一点 P 延伸至球壳的 $d\Omega$ 立体角, 有

$$d\Omega = \frac{(dA_1)}{d_1^2} = \frac{(dA_2)}{d_2^2}$$

要求 P 点电场为 0, 有

$$E_P = 0 \Rightarrow E_P^{A_1} = E_P^{A_2} \Rightarrow \frac{\sigma(dA_1)}{4\pi\epsilon_0 d_1^n} = \frac{\sigma(dA_2)}{4\pi\epsilon_0 d_2^n} \Rightarrow \frac{d_1^2}{d_1^n} = \frac{d_2^2}{d_2^n} \Rightarrow n = 2$$

3.1 自由空间的静
电场3.2 自由空间的电
位势3.3 物质中的静电
场3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

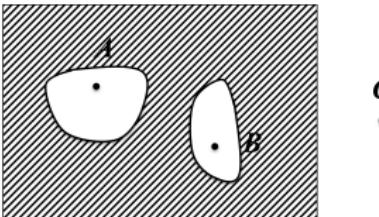
例题 & 练习

作业

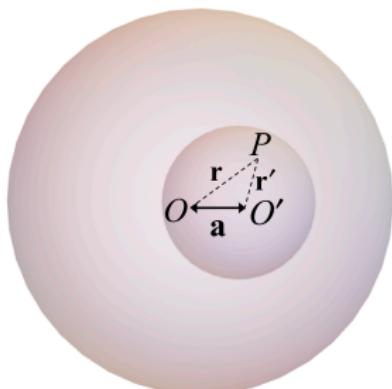
例题 5: 空腔带电体

如右图, 导体内有两空洞, 电荷置于 A, B, C 处, 定性分析其受静电力的情况。

◀ §3.3 静电屏蔽



如右图, 均匀带电(大)球有体电荷密度 ρ_e 与一空腔。球心至空腔中心距离 a , 求空腔内电场。



利用叠加原理, 本题可等效视为 $+\rho_e$ 的大球与 $-\rho_e$ 的小球, 分别对 P 有 $\mathbf{E}_O(P) = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$ 与 $\mathbf{E}_{O'}(P) = -\frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \mathbf{r}'$ 。空腔内某一点合成总电场为 $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_O + \mathbf{E}_{O'} = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$ 。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

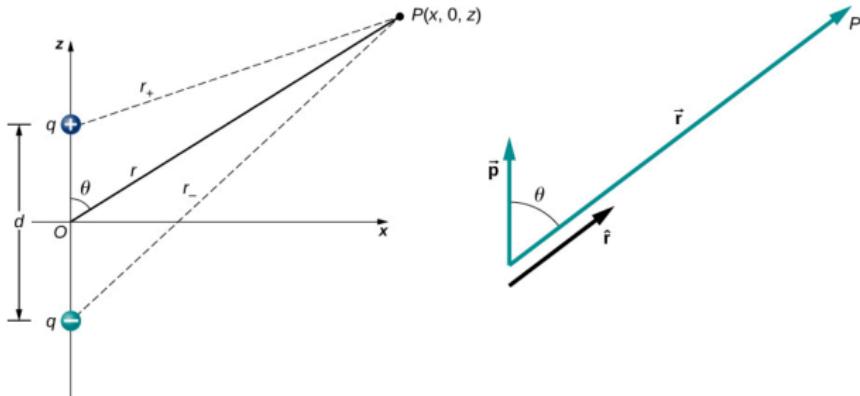
例题 & 练习

作业

例题 6: 电偶极子 (electric dipole), 客体与模型

如下图²⁵, 假设两电荷 $\pm q$ 相距 d , 定义电偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, 分析远处 $r \gg d$ 的电位与电场。

◀ §3.3 电偶极子



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$

电偶极子的电场线如下页图所示。

²⁵<https://openpress.usask.ca/physics155/chapter/3-3-calculations-of-electric-potential/>

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

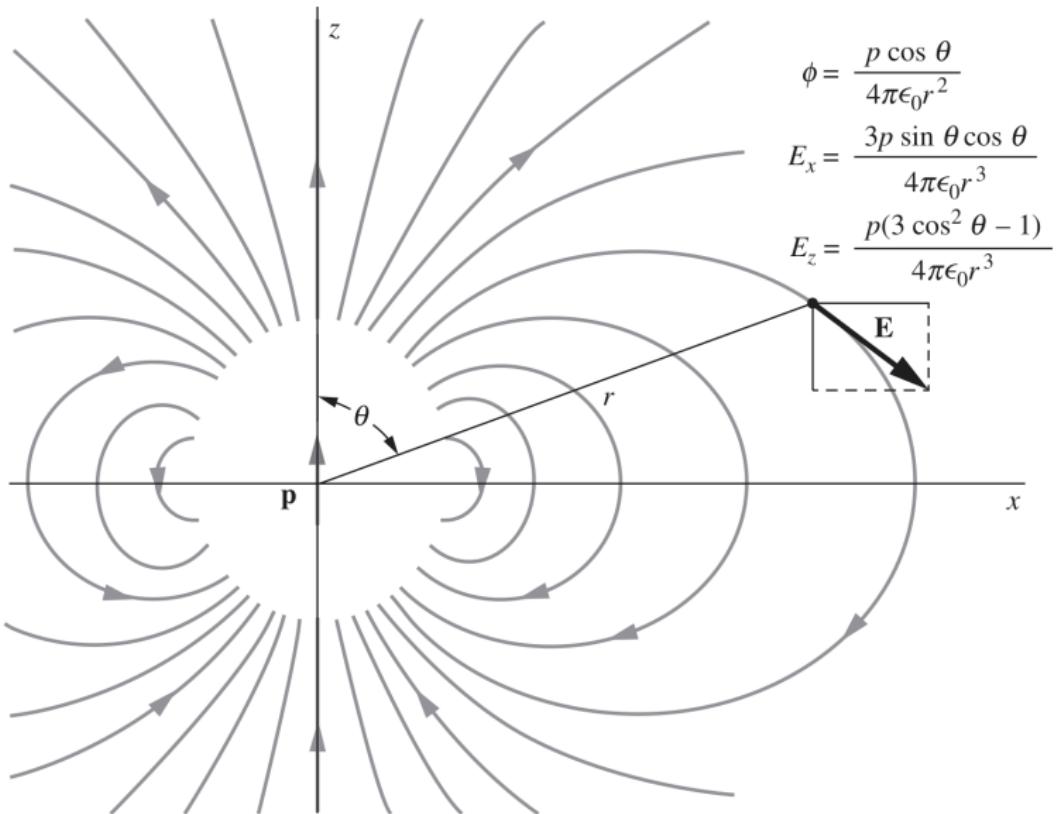
场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r$ 与 C
例题 & 练习

作业

3.1 自由空间的静
电场3.2 自由空间的电
位势3.3 物质中的静电
场3.4 静电场边值问
题分界面上的边界条
件

场域的边界条件

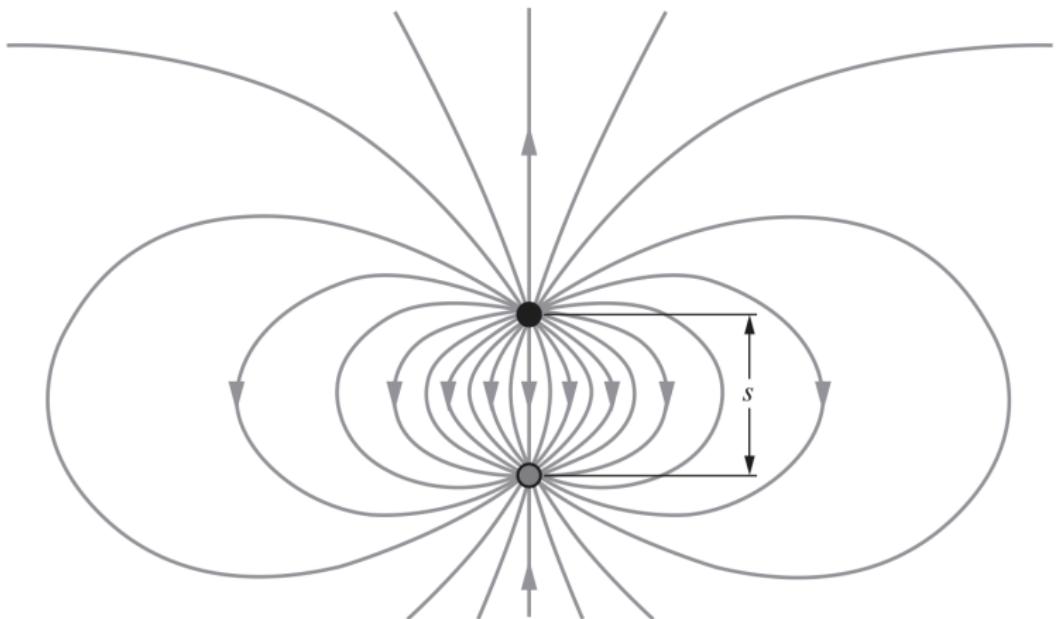
3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 8-1 (例 3.2.3)

◀ §3.2 Laplace 方程

参考教科书图 3-2-7(或见下页), 夹角为 α 的两无限大平板的电压分别为 0 与 U_0 , 求解夹板内外的电位与电场。

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow \varphi = C_1 \phi + C_2 = \begin{cases} \frac{U_0}{\alpha} \phi, & 0 < \phi < \alpha \\ \frac{U_0}{2\pi - \alpha} (2\pi - \phi), & \alpha < \phi < 2\pi \end{cases}$$

电场有

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right) = -\frac{U_0}{\rho \alpha} \mathbf{e}_\phi$$

在两导体板上的面电荷有

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\epsilon_0 U_0}{\rho \alpha} \times \begin{cases} +1, & \phi = \alpha \\ -1, & \phi = 0 \end{cases} \propto \rho^{-1}$$

★ 利用复变函数的保角变换求解此题。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

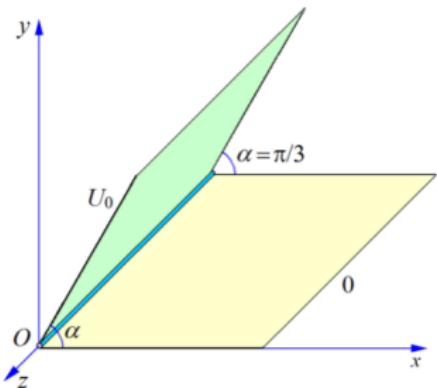
3.5 电容

3.6 电场能量与力

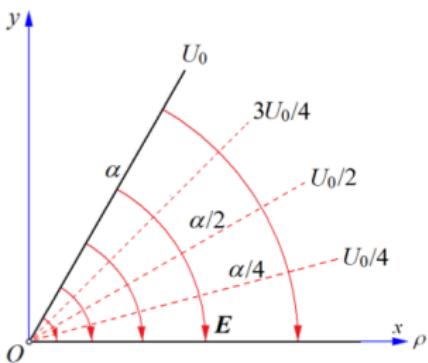
例题 & 练习

作业

例题 8-1 (续)



(a) 成夹角的两个平面导体



(b) 等位面与电场线

3.1 自由空间的静
电场3.2 自由空间的电
位势3.3 物质中的静电
场3.4 静电场边值问
题分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

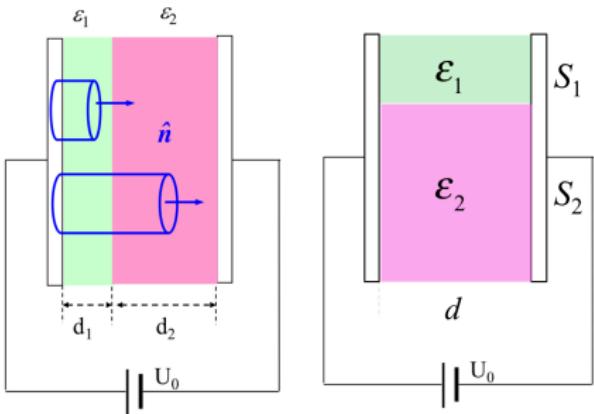
例题 & 练习

作业

例题 9 (例 3.3.2)

◀ 返回

参考如下左图, 介质分界面没有自由电荷, 忽略边缘效应, 求电容器中各区域的电场 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 、极板面电荷密度与等效电容。



$$\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ \Delta U_1 + \Delta U_2 = U_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \\ E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{\epsilon_2 U_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \\ E_2 = \frac{\epsilon_1 U_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \end{cases}$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习
作业

利用 $\sigma = -\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\epsilon \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \varphi = \epsilon E_\Omega = D_\Omega$ 可以求极板面电荷
密度, 有

例题 9 (例 3.3.2)

◀ 返回

$$\begin{cases} \sigma_1 = D_1 = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_1 \frac{\epsilon_2 U_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \\ \sigma_2 = D_2 = \epsilon_2 E_2 = \epsilon_2 \frac{\epsilon_1 U_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \end{cases}$$

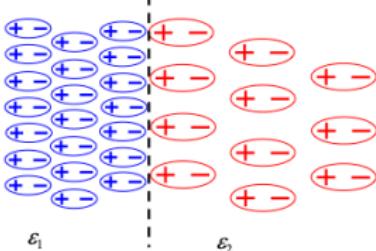
不难看出, $\sigma_1 = \sigma_2$ (大小)。

由电容的定义, $C = \frac{q}{\Delta U}$, 可知等效电容为串联关系

$$C_{\text{tot}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_1}}$$

由 $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2}$ 知,

$$\begin{aligned} \sigma_P &= P_{1n} - P_{2n} \\ &= (\epsilon_1 - \epsilon_0)E_1 - (\epsilon_2 - \epsilon_0)E_2 \\ &= \epsilon_0(E_2 - E_1) \end{aligned}$$



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 9 (例 3.3.2) 返回

对于另一种介质分界面安排，忽略边缘效应，求电容器中各区域的电场 D 与 E 、极板面电荷密度与等效电容。
在极板面上有以下关系

$$\begin{cases} D_1 = \epsilon_1 E_1 = \sigma_1 \\ D_2 = \epsilon_2 E_2 = \sigma_2 \end{cases}, \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = q$$

在电介质间有 $E_1 = E_2$ (注意没有脚码 t)。等效电容则为并联关系。

对于简单介质，媒质分界面上 $\sigma_P = 0$ 。

★ 重新考虑此题，但充电情况不是极板连接电池，而是 $\pm Q$ 。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

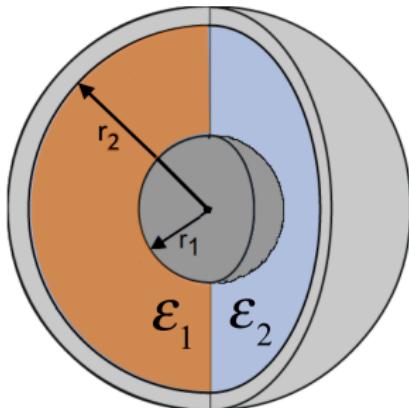
作业

例题 10: 球壳间填充电介质-类型 1

[返回](#)

如右图, 两球壳间填充电介质 (ϵ_1 与 ϵ_2 各半), 求解各区域的电位与电场 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 及等效电容。充电情况假设
有:

1. 内导体 U_0 , 外导体接地
2. 内导体 $+Q$, 外导体 $-Q$



对1., 利用拉普拉斯方程解 φ 。

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \dots = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{C_1}{r} + C_2, \text{ 利用边界条件} \\ \varphi(r_1) = U_0, \varphi(r_2) = 0, \text{ 有 } \varphi = U_0 \frac{r_1}{r_2 - r_1} \left(\frac{r_2}{r} - 1 \right).$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{U_0}{r^2} \mathbf{e}_r \Rightarrow \mathbf{D}_{1,2}(\mathbf{r}) = \epsilon_{1,2} \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

$$\text{总电荷 } Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathcal{S} = 2\pi r_1^2 [D_1(r_1) + D_2(r_1)] = \\ 2\pi \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} U_0 (\epsilon_1 + \epsilon_2), \text{ 故等效电容为 } C = 2\pi \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 10: 球壳间填充电介质-类型 1

[返回](#)

对2., 利用高斯定律解 \mathbf{D} 。假设在 $\epsilon_{1,2}$ 区域有电荷 $Q_{1,2}$, 有 $Q = Q_1 + Q_2$ 。

$$Q_{1,2} = \oint\!\oint \mathbf{D}_{1,2} \cdot d\mathcal{S}_{1,2} = 2\pi r^2 D_{1,2}(r) \Rightarrow E_{1,2}(r) = \frac{D_{1,2}(r)}{\epsilon_{1,2}}.$$

$$\Delta U = \int_{r_1}^{r_2} E_{1,2}(r) dr = \frac{Q_{1,2}}{2\pi\epsilon_{1,2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow \begin{cases} D_{1,2}(r) = \frac{Q}{2\pi r^2} \frac{\epsilon_{1,2}}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \\ E_1(r) = E_2(r) = \frac{Q}{2\pi r^2} \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \end{cases}$$

等效电容为 $C = \frac{Q}{\Delta U} = 2\pi \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$, 与1.相同, 符合“电容仅与几何形状有关”的预期。

思考: 比较两种分析方法。例题 9 中的分析方法属于本题的第二种, 利用本题的第一种方法分析例题 9。注意, 应使用广义拉普拉斯方程 $\nabla \cdot (-\epsilon \nabla \varphi) = 0$ 。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

重解例题 9 左图, 由广义拉普拉斯方程, 有

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla \varphi) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(-\epsilon \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{A}{\epsilon} x + B$$

利用边界条件求待定系数 A, B

$$\begin{cases} \varphi(x=0) = U_0 \Rightarrow B = U_0 \\ \varphi(x=d_1+d_2) = 0 \Rightarrow \frac{A}{\epsilon_1} d_1 + \frac{A}{\epsilon_2} d_2 + B = 0 \Rightarrow A = -\frac{U_0}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} \end{cases}$$

故

$$\varphi(x) = U_0 - \frac{U_0}{\epsilon \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)} x$$

有

$$E_1 = -\nabla \varphi = \frac{U_0}{\epsilon_1 \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)} = \frac{U_0}{d_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} d_2} = \frac{\epsilon_2 U_0}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \left(= \frac{D_1}{\epsilon_1} \right)$$

E_2 以此类推。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

► 能不能不用广义拉普拉斯方程解? 可以, 那么就是每个电介质独立分析。值得注意, 媒质分界面上的边界条件要完整写出来, 用以求得待定系数。

$$\nabla^2 \varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = Ax + B \\ \varphi_2 = C(x - d_1) + D \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x=0) = U_0 \\ \varphi_1(x=d_1) = \varphi_2(x=d_1) \\ \epsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dx} \Big|_{x=d_1} = \epsilon_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \Big|_{x=d_1} \\ \varphi_2(x=d_1 + d_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{U_0}{d_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} d_2} \\ B = U_0 \\ C = -\frac{U_0}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 + d_2} \\ D = \frac{U_0}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 + d_2} d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = U_0 \left(1 - \frac{x}{d_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} d_2}\right) \\ \varphi_2 = -\frac{U_0}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 + d_2} (x - d_1 - d_2) \end{cases}$$

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

3.4.3 镜像法
3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

因此, 有

$$E_1 = -\nabla \varphi = \frac{U_0}{d_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} d_2}$$

E_2 以此类推。

例题 11: 球壳间填充电介质-类型 2

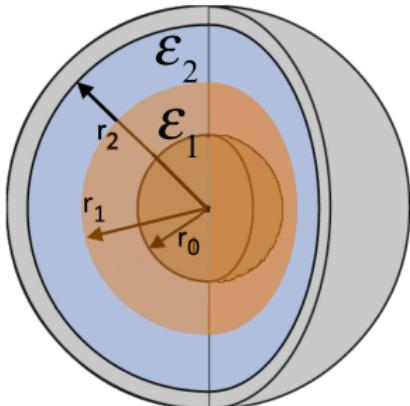
[返回](#)

如右图, 两球壳间填充电介质 (内 ϵ_1 与外 ϵ_2), 求解各区域的电位与电场 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 及等效电容。充电情况假设
有:

1. 内导体 U_0 , 外导体接地
2. 内导体 $+Q$, 外导体 $-Q$

球壳形成的等效电容为

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{4\pi\epsilon_1\epsilon_2 abc}{\epsilon_1 R_0(R_2 - R_1) + \epsilon_2 R_2(R_1 - R_0)}$$



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

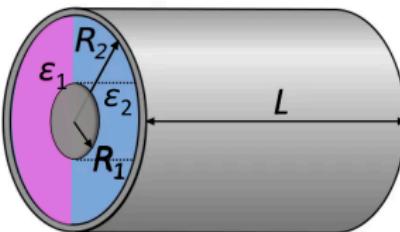
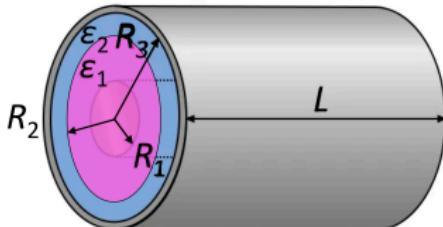
作业

★ 例题 12: 单芯同轴电缆填充电介质

[返回](#)

考虑如右图两种情况, 同心圆柱间填充电介质 (ϵ_1 与 ϵ_2), 求解各区域的电位与电场 D 与 E 及等效电容。充电情况假设有:

1. 内导体 U_0 , 外导体接地
(右上图情况见例 3.3.3)
2. 内导体 $+Q$, 外导体 $-Q$



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

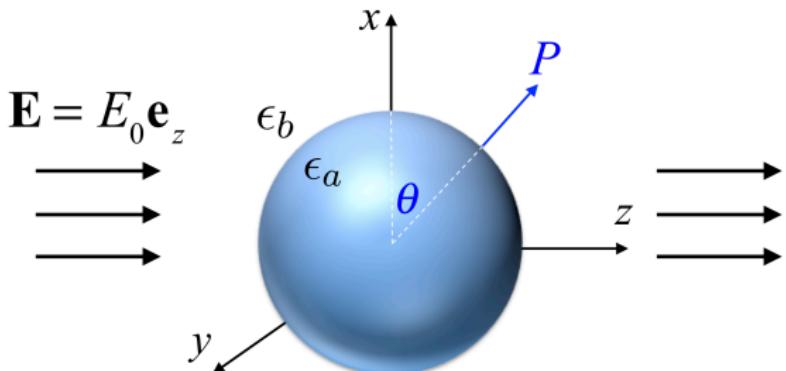
3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 13: 电介质球与金属球在外加均匀电场 ♠

此处先理解物理图像, 详细分析见 Ch 6。 [▶ 03-Ex-13](#)、[◀ 返回](#)



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

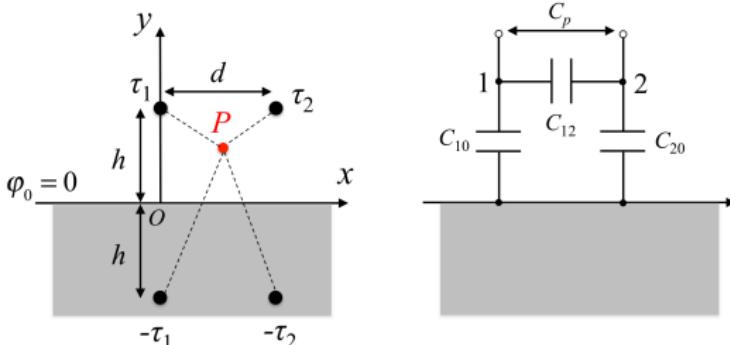
例题 & 练习

作业

例题 17: (例 3.5.3)

• §3.5 电容

考虑地面影响,
求部分电容与工
作电容 C_p , 假设
 $h = 10 \text{ m}$,
 $a = 0.01 \text{ m}$,
 $d = 2 \text{ m}$ 。



P 点电位可以近似为 $\varphi_P = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_4}{\rho_3}$ 。各导体
电位则有

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{10} = \varphi_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{a} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{d} \\ U_{20} = \varphi_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{d} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{a} \\ U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2hd}{a\sqrt{d^2 + 4h^2}} \end{array} \right.$$

3.1 自由空间的静
电场3.2 自由空间的电
位势3.3 物质中的静电
场3.4 静电场边值问
题分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 17 (续)

◀ §3.5 电容

电压、电容可与传输线线电荷密度关联

$$\begin{cases} \tau_1 = C_{10} U_{10} + C_{12} U_{12} \\ \tau_2 = C_{21} U_{21} + C_{20} U_{20} \end{cases}$$

欲解部分电容，需要给定任意两组 $\tau_{1,2}$ ，简单选择 $(\tau_1, \tau_2) = (2\pi\epsilon_0, 0), (0, 2\pi\epsilon_0)$ ，则有

$$\begin{cases} C_{10} = C_{20} = 5.6145 \text{ pF/m} \\ C_{12} = C_{21} = 2.4476 \text{ pF/m} \end{cases}$$

工作电容为

$$C_p = \frac{\tau}{U_{12}} = C_{12} + \frac{C_{10} C_{20}}{C_{10} + C_{20}} = 5.2549 \text{ pF/m}$$

接近忽略地面影响的估计值 $C = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} = 5.2499 \text{ pF/m}$ 。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 25 (例 3.6.4)

◀ 静电力

如右图²⁶, 求 ϵ_2 电介质的受力。

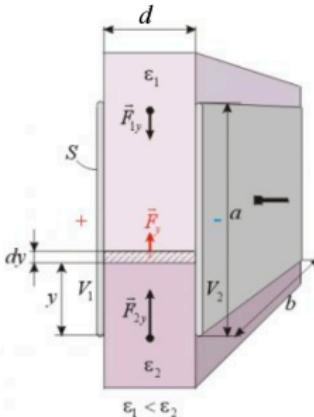
▷ 考虑电容器极板内的静电场能, 有

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}\epsilon_1 E^2 V_1 + \frac{1}{2}\epsilon_2 E^2 V_2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{U^2}{d^2} [\epsilon_1(a-y)bd + \epsilon_2 ybd] \end{aligned}$$

外加电压不变, 有

$$f = \left. \frac{\partial W_e}{\partial y} \right|_{d\varphi=0} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) b U^2}{2d}$$

试分析电介质间受力。



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静
电场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

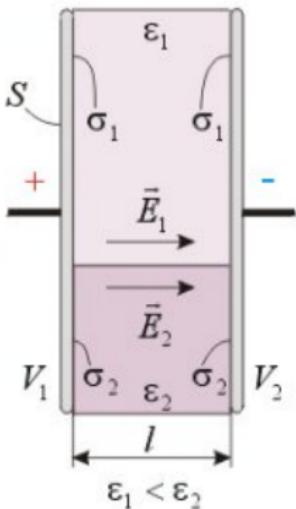
3.5 电容

3.6 电场能量与力

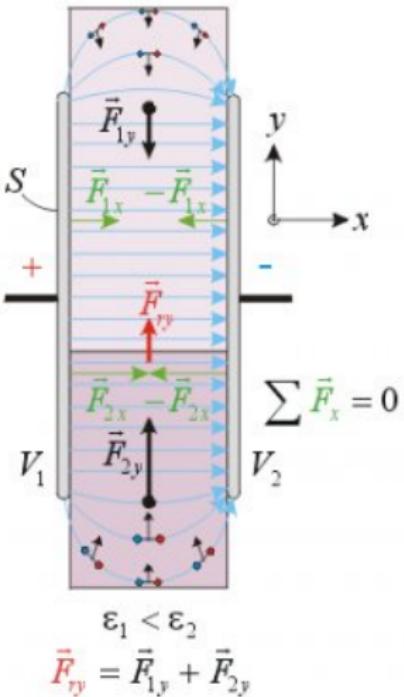
例题 & 练习

作业

²⁶ 图例取自 <http://energythic.com/view.php?node=209>



a)



b)

3.1 自由空间的静
电场3.2 自由空间的电
位势3.3 物质中的静电
场3.4 静电场边值问
题分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

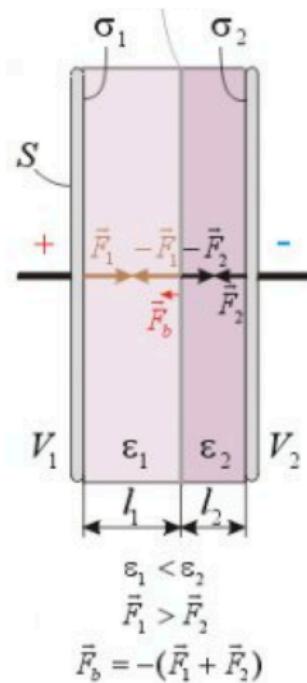
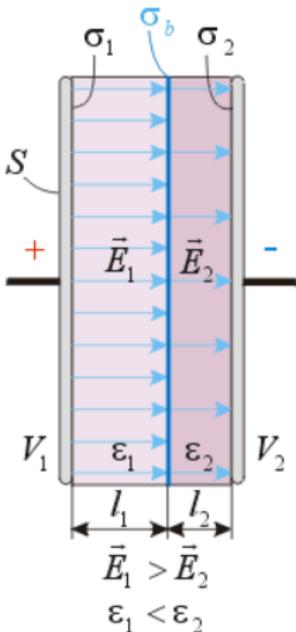
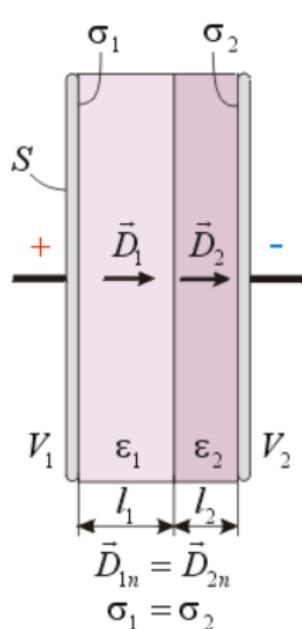
3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 26: ◀ 静电力

类似例题 25, 但考虑电介质安排如下, 证明电介质间受力有 $F_b = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) U^2 S}{2(\epsilon_2 \ell_1 + \epsilon_1 \ell_2)^2}$ 。



3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 27: ◀ 静电力

求半径 R 的带电 q 电介质 (ϵ) 球表面压强。

$$W_e = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{q}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon R} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon R}$$

$$f = -\left. \frac{\partial W_e}{\partial V} \right|_{dq=0} = -\frac{\partial W_e}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial V} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon R^4}$$

$f > 0$, 表示有使球体膨胀的趋势。注意量纲, 这里的 f 为压强。

3.1 自由空间的静
电场

3.2 自由空间的电
位势

3.3 物质中的静电
场

3.4 静电场边值问
题

分界面上的边界条
件

场域的边界条件

3.4.3 镜像法

3.5 电容

3.6 电场能量与力

例题 & 练习

作业

作业

- 3.1, 3.2
3.1 自由空间的静
电场
 - 3.4, 3.5
3.2 自由空间的电
位势
 - 3.3, 3.14, 3.19
3.3 物质中的静电
场
 - 3.12, 3.17, 3.22
3.4 静电场边值问
题
 - 3.26, 3.27, 3.32
分界面上的边界条
件
- 场域的边界条件
- 3.4.3 镜像法
- 3.5 电容
- 3.6 电场能量与力
- 例题 & 练习
- 作业