

恒定磁场

蔡承颖¹

华中科技大学电气与电子工程学院



¹jcytsai@hust.edu.cn

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

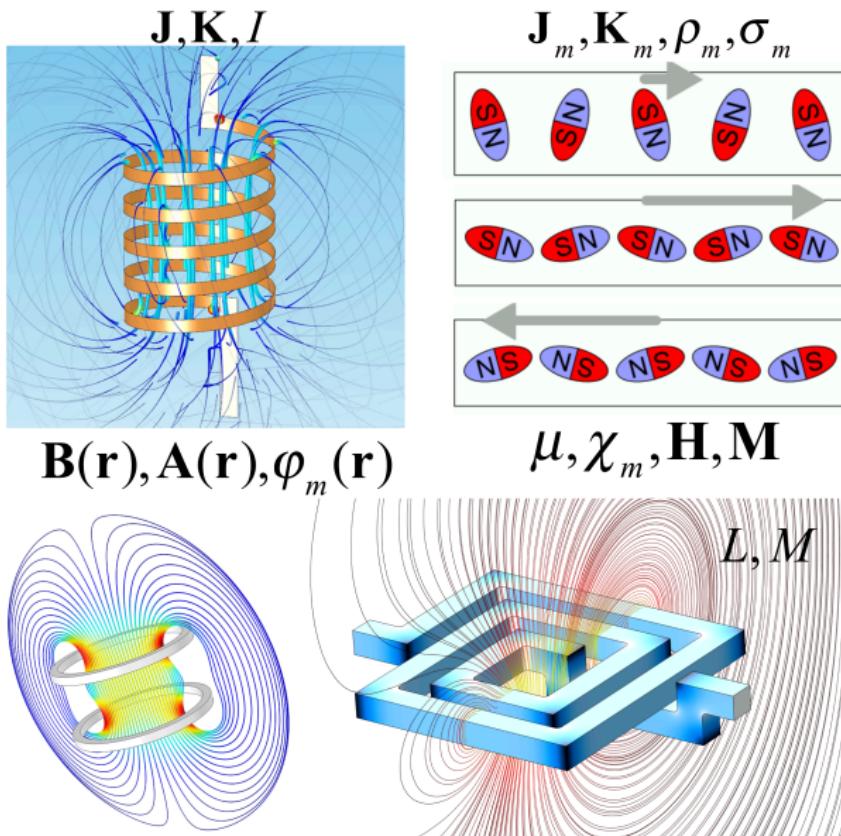
5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

写在开始前...



- 5.0 磁力的本质
- 5.1 恒定磁场基本方程
- 分界面上的边界条件
- 5.2 矢量磁位势
- 5.3 标量磁位势
- 场域的边界条件
- 5.4 静磁场镜像法
- 5.5 电感
- 5.6 磁场能量与力
- 例题 & 练习
- 作业

回顾前两章的理论框架

第三章探讨了静电荷产生的静电场，包含在真空中与在物质(电介质)中。

第四章虽然探讨恒定(稳态)电场，但是场源已经不是静止的电荷，而是恒定电流。虽然恒定电流是由于电荷移动²(电流)形成，但是当电流缓变且时空尺度恰当时，恒定电流分别产生的电场与磁场可以分开讨论。

本章将讨论恒定电流³的磁效应，即恒定磁场。由于静磁场的“源”是电流(不是磁荷)，以下可以看到许多与静电力学范畴内容的对比，也会看到少许与恒定电场的对比。先讨论自由空间(真空)，再讨论物质中的静磁场。

性质

电与磁是对偶的。

²电与磁巨大的差异从这里展现。

³因此，仍有 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

回顾前两章的理论框架

性质：静电场与恒定电流场的比较 $\partial/\partial t = 0$

静电场 (电介质)	恒定电流场 (导电媒质)
$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$
$\mathbf{J} = \mathbf{0}$	$\rho = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$

正式进入本章内容前，同学们先有一个印象，将它放在心底：磁现象可以视为静电场的相对论效应。移动的荷电粒子形成电流，到底该考虑电荷产生的电场，还是电流形成的磁场？在 20 世纪初，这是伤脑筋的问题，一直到狭义相对论提出之后，才获得满意的解决。有些时候如果遇到“令人费解”的情况，其实与（“违反直觉”的）相对论效应有关。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

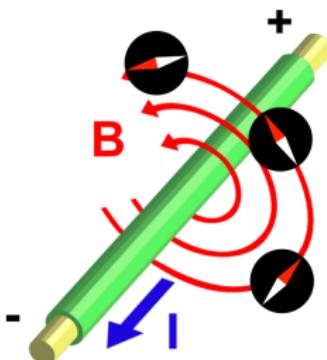
作业

探索磁力的本质，我们从几个实验定律开始

定律：奥斯特定律 (Orsted's law)

1819 年丹麦物理学家奥斯特发现通有电流的导线可使附近小磁针偏转，即周围存在磁场。地位类似库伦定律。SI 单位: Tesla, CGS 单位: Gauss, $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ 。

$$|\mathbf{B}(\mathbf{r})| \propto \frac{I}{r}$$



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

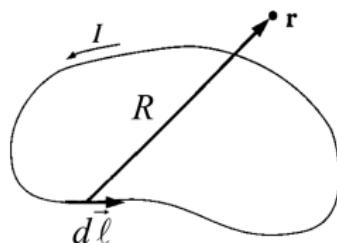
作业

定律：毕奥-沙伐定律 (Biot-Savart law)

1820 年，法国物理学家毕奥与沙伐通过实验建立了磁通密度与电流之间的关系，经法国数学家拉普拉斯提炼定量为 [又称 Biot-Savart-Laplace law]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{Id\ell \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

其中，真空磁导率 (permeability) $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ (或 H/m)。地位类似电场的高斯定律。



注意，以上电流元还可以写为 $\mathbf{J}dV$ 或 $\mathbf{K}dS$ 。 例题 1-1

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

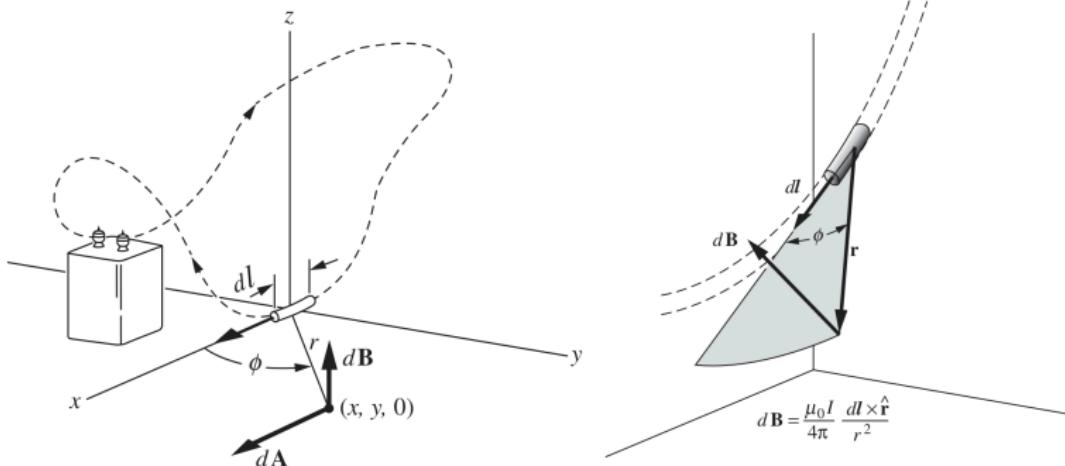
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



毕奥-沙伐定律具有一般性，可以通过取散度得到磁场的高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。对时变电磁场也成立。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_V \frac{\mathbf{J} dV \times \mathbf{e}_R}{R^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{J} dV \times \mathbf{e}_R}{R^2} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \cdot (\underbrace{\nabla \times \mathbf{J}}_0) - \mathbf{J} \cdot \underbrace{\nabla \times \frac{\mathbf{e}_R}{R^2}}_0 \right] dV = 0\end{aligned}$$

注意，积分对源，微分对观察坐标。以上用了矢量恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ 与 $\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} = -\nabla \left(\frac{1}{R} \right)$ 。注意，因为电流密度函数是源坐标函数，故 $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{0}$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

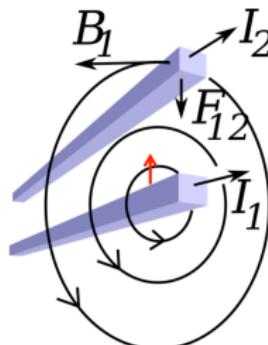
磁场力

以上讨论了“场”。1820 年，法国物理学家安培提出外部磁场对电流会产生“力”，有如下定律

定律：安培力定律 (Ampere's force law)

真空中两条载流导线，电流元 1 对 2 的作用力为

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\ell_2} I_2 d\ell_2 \times \mathbf{B}_1 = \int_{\ell_2} I_2 d\ell_2 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\ell_1} \frac{Id\ell_1 \times \mathbf{e}_{12}}{R^2} \right]$$



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

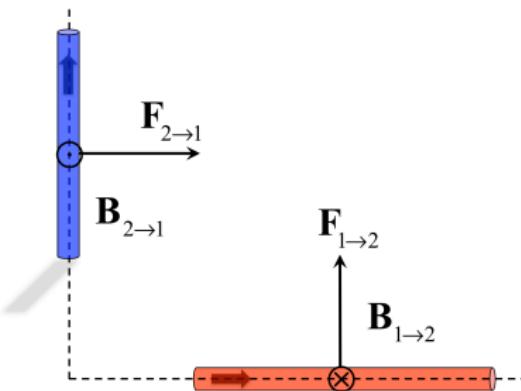
例题 & 练习

作业

磁场力

性质

- 如上页图, 导线 1 产生的磁感应方向与导线 2 所受磁力方向都遵循右手定则
- 此例明显有同向电流相吸、反向电流相斥
- 思考: 检视牛顿第三运动定律是否成立? (参考下图)



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

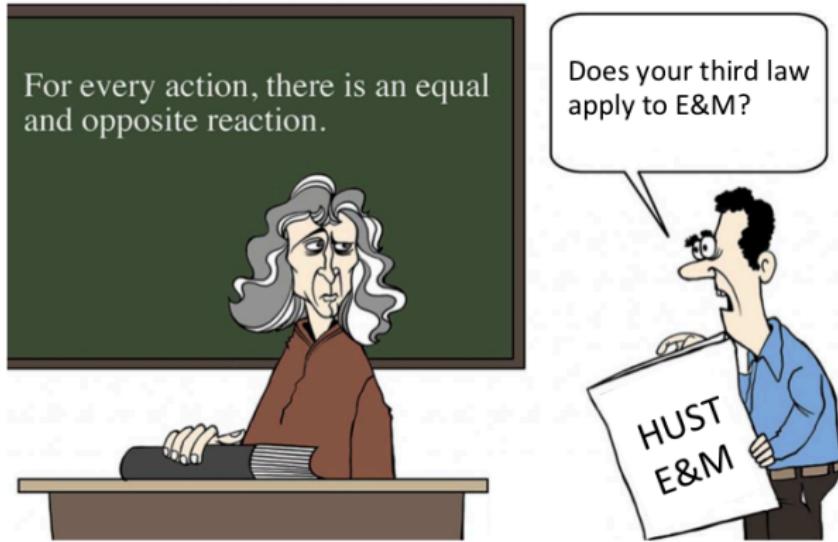
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



完整的力分析涉及引入**电磁动量**, 或麦克斯韦电磁应力张量 (Maxwell stress tensor) $\mathcal{P}_{EM} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

再回到“场”，1820 同年末，安培也建立了封闭回路上磁感应强度 \mathbf{B} 的线积分与通过回路的电流之间的关系，有安培环路定律 (Ampere's circuital law)。先改写毕奥-沙伐定律，有

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}d\mathcal{V} \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[- \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{J}}{R} d\mathcal{V} + \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J}d\mathcal{V}}{R} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J}d\mathcal{V}}{R}\end{aligned}$$

以上推导用了哪些恒等式？

$$\nabla \times (\psi \mathbf{F}) = \nabla \psi \times \mathbf{F} + \psi \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2}, \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{R})$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

接着对 \mathbf{B} 取旋度，有

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J} dV}{R} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \underbrace{\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right)}_{\mathbf{J} \cdot \nabla (1/R)} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dV \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \mathbf{J} \cdot \nabla_V \left(\frac{1}{R} \right) dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} 4\pi \delta(\mathbf{R}) dV \\
 &\stackrel{\text{i.b.p.}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \left(\frac{1}{R} \right) \underbrace{\nabla_V \cdot \mathbf{J}}_0 dV + \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{J}
 \end{aligned}$$

上面推导用到了

$$\begin{aligned}
 \nabla \left(\frac{1}{R} \right) &= -\nabla_V \left(\frac{1}{R} \right) \text{ 与 } \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) = -\nabla_V \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) \\
 \nabla_V \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned}$$

★ 复习时，比较 Ch3，对库仑定律分别求散度与旋度，可以得到电场的高斯定律与静电场环路定理。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

安培环路定理微分形式 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}$ 。积分形式

恒定磁场

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\ell = \mu_0 I = \mu_0 \sum_k I_k$$

与前面讨论的磁场高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ 或其积分形式

$$\iint_A \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathcal{S} = 0$$

两式形成真空中恒定磁场的基本方程。

定义：通量 (flux)

定义矢量场穿过某一截面的通量为 Φ 。考虑磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, 有 [SI 单位: Wb, $1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tm}^2 = \text{Volt}\cdot\text{sec}$, CGS 单位: Maxwell, $1 \text{ Mx} = 10^{-8} \text{ Wb}]$

$$\Phi \equiv \iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathcal{S} \quad [\text{磁通量} \neq \text{磁链}]$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

安培环路定理与积分路径“形状”无关

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

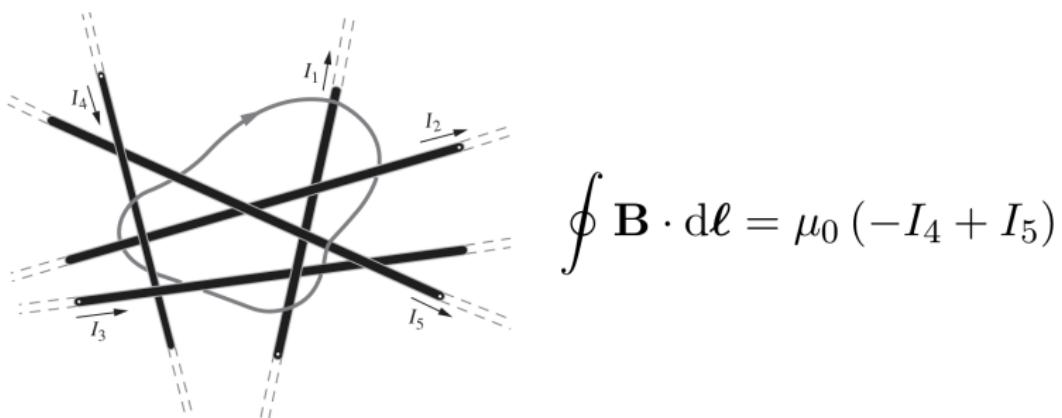
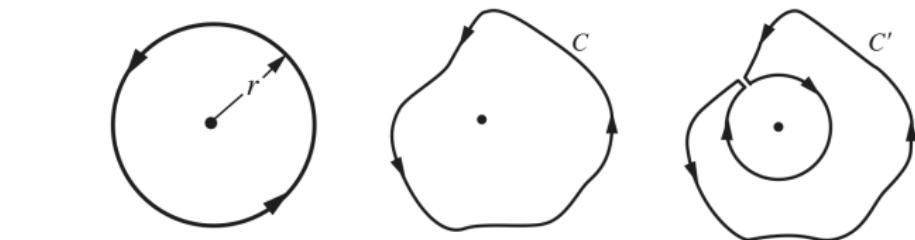
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



基本方程 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ 告诉我们不存在独立的磁荷。

关于静磁场计算，利用安培定律可以得到一些典型几何形态的磁场分布，如 [例题 2](#)、[例题 3](#)、[例题 4](#)、[例题 6](#)。

性质

- 置于 z 轴的恒定电流 I 的无限长直导线，有

$$\mathbf{B}(\rho, \phi, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

- 无限大平行板，其上均匀面电流密度大小相同 (K_s) 方向相反，则 [磁场方向自行判断]

$$B = \text{常数} = \begin{cases} \mu_0 K_s, & \text{平行板内} \\ 0, & \text{平行板外} \end{cases}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

(磁) 媒质的磁化

讨论媒质物质在静磁场时，从微观角度看，媒质中的原子大体上可视为一正电荷静止在中央，外围环绕运动的负电荷。运动负电荷可以视为一个封闭球面环路电流。参考图 5-1-5。

类似于电介质在静电场的极化分析，我们定义磁偶极如下

定义：磁偶极 (magnetic dipole moment)

对在平面上单连封闭曲线 (所围面积 S) 之细导线，流经其上的恒定电流 i_0 形成磁偶极，单位法向方向由右手定则决定，定义磁矩为

$$\mathbf{m} = i_0 \mathcal{S} = i_0 S \hat{\mathbf{n}}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

(磁) 媒质的磁化

类似地，并非任何原/分子在外加磁场下都呈现磁偶极矩。还可以定义四极矩 $Q_{\alpha,\beta}$ (quadrupole moment) 或其它高阶矩，这些形式是依矢量磁位展开而定义的。

定义：磁化矢量 (magnetization vector)

磁媒质中单位体积的磁偶极矩和 [SI 单位制: Amp/m]

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i}{\Delta V}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

(磁) 媒质的磁化 (§5.1.3)

定理：磁化电流

一个具有 \mathbf{M} 的磁媒质，可以用其磁化体电流密度

$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ 与磁化面电流密度 $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ 表征，
其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 方向为自磁媒质指向外。总磁化电流有 $\Rightarrow I_m = \oint_C \mathbf{K}_m \cdot d\ell + \iint_A \mathbf{J}_m \cdot d\mathcal{S}$ 。

▶ 例题 9

证明

利用磁偶极子的矢量磁位 (§5.2 会介绍)，有 ♠

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M} \times \nabla_V \frac{1}{r} dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{1}{r} \nabla_V \times \mathbf{M} - \nabla_V \times \frac{\mathbf{M}}{r} \right] dV\end{aligned}$$

上式第二项再应用 $\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \varphi$ 。 □

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

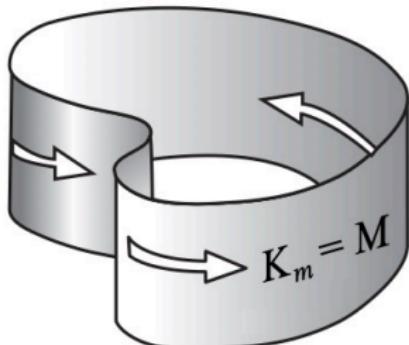
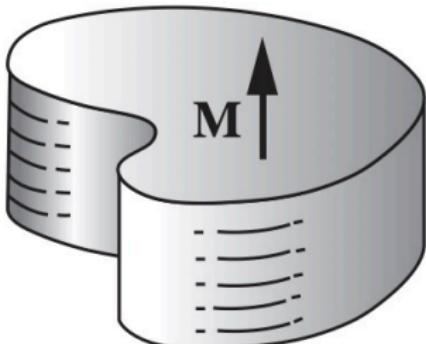
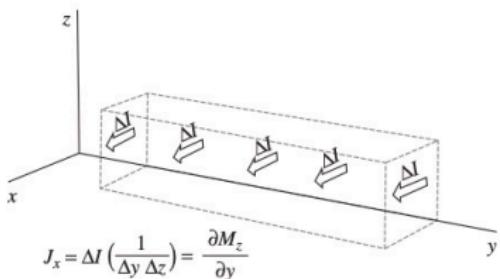
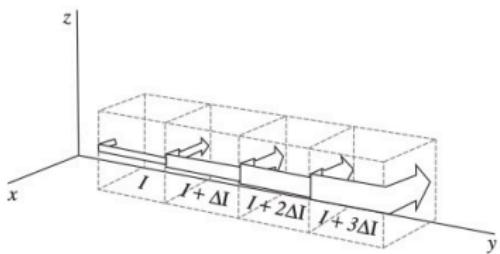
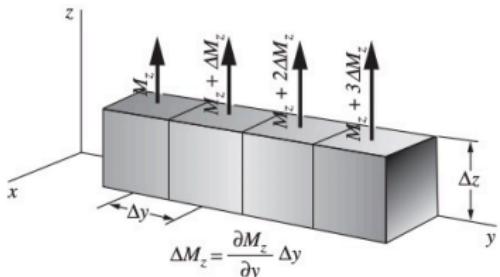
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

(磁) 媒质的磁化

磁化电流也会贡献在媒质中形成磁场，应用安培定律，有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m) = \mu_0 \mathbf{J}_f + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

注意， \mathbf{B} 正式名称为磁感应强度 (magnetic induction)。

定义：磁场强度矢量 (magnetic field)

定义为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad [\text{SI 单位制: A/m}]$$

则有 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$ 。引入 \mathbf{H} 将使得分析磁媒质中的场变得比较方便。为方便分析，也写成 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H}$ ，其中， $\mu = \mu_0\mu_r = \mu_0(1 + \chi_m)$ 。 μ 称磁导率 (permeability)， χ_m 称磁化率 (magnetic susceptibility)。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

磁化媒质存在的场域中，空间中任一点矢量磁位与磁场可以如下方式求得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \oint_S \frac{\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{(\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \oint_S \frac{(\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_m) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \right]$$

比较：电介质存在的场域中，空间中任一点电位与电场可以如下方式求得

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_V \frac{\rho_f + \rho_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \oint_S \frac{\sigma_f + \sigma_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_V \frac{(\rho_f + \rho_P)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \oint_S \frac{(\sigma_f + \sigma_P)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \right]$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

性质：磁化矢量作为磁媒质对外界磁场的响应

磁媒质对外界磁场达平衡时的响应体现在磁化矢量强度上，其一般形式可写为

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \mathbf{B} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \mathbf{H}$$

其中，媒质磁化率 χ_m 为无量纲，一般描述以张量形式 $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_m$ 呈现。

定义：各向同性、线性、均匀磁媒质 \Rightarrow 简单媒质

- 各向同性 (isotropic) $\Rightarrow \mathbf{M}$ 与 \mathbf{H} 方向一致 ($\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$)、 χ_m 为标量
- 线性 (linear) $\Rightarrow \mathbf{M} \propto \mathbf{H}$, 与 \mathbf{H}^2 或高阶场无关
- 均匀 (homogeneous) $\Rightarrow \chi_m$ 不随空间位置改变⁴
- 互易 (reciprocal) $\Rightarrow \chi_{m,ij} = \chi_{m,ji}$

⁴更精确地说，为媒质磁化率或磁导率随空间变化的尺度远小于电磁场的空间变化尺度，即长波极限。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

(磁) 媒质的磁化

磁媒质本构关系 (constitutive relation),

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}.$$

一些常见材料的相对磁导率 μ_r 见表 5-1-2。其中,
 $\mu_{r,\text{铁磁媒质}} \gg \mu_{r,\text{顺/逆磁媒质}} \approx 1^5$ 。

常见材料并不都是线性磁媒质, 如: 铁的 \mathbf{M} 与 \mathbf{H} 就不是线性关系。磁通量倾向于穿过磁导率较大的物质, 类似于电流倾向于穿过电导率较大的物质。

说明

电介质一般减弱外界的 \mathbf{E} 场。按分界面边界条件, 在部分填充电介质的平行板电容器中, 电介质-真空分界面 \mathbf{D}_n 场相同 (假设 $\sigma_f = 0$), \mathbf{E} 场可能不同。

磁媒质一般减弱外界的 \mathbf{H} 场。按分界面边界条件, 在含有气隙的磁路 (magnetic circuit) 中, \mathbf{B}_n 场相同, \mathbf{H} 场可能不同。

⁵有时候假设 $\mu_{r,\text{铁磁媒质}} \rightarrow \infty$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

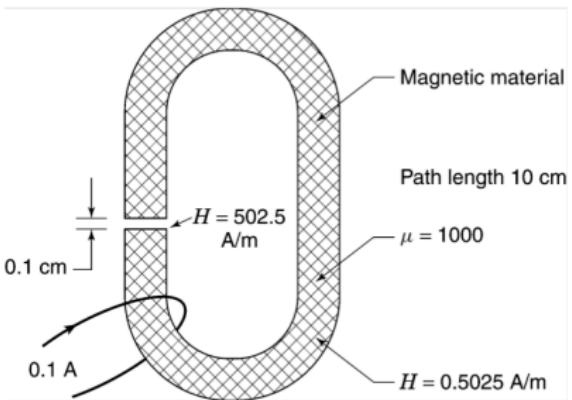
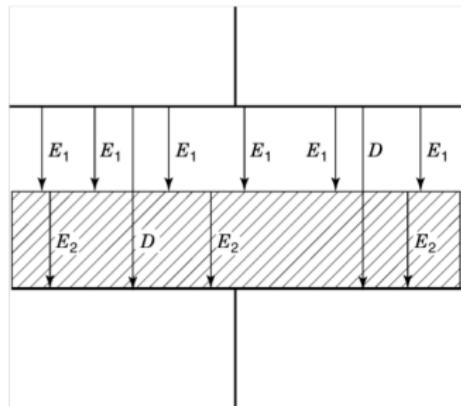
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



图：图例取自 R. Morrison, The fields of electronics, John Wiley & Sons. 检查右图 H 场强是否正确。 $\Rightarrow H_{\text{iron}} \approx 0.091 \text{ A/m}$, $H_{\text{gap}} \approx 90.992 \text{ A/m}$.

▶ 例题 10 ◀ 例题 11 ◀

磁媒质分界面边界条件

矢量磁位边界条件

标量磁位边界条件

类似于静电场问题，边值问题涉及两种情况：

- 磁媒质分界面上的边界条件
- 求解泊松方程或拉普拉斯方程场域的边界条件

定理：磁媒质分界面上“磁”的边界条件

就任何二种磁媒质之分界面（无论铁/顺/逆磁），无论在分界面上是否有自由面电流，恒有

1. $\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f$ [H 的切向连续性]
2. $\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$ [B 的法向连续性]
3. $A_{1t} = A_{2t}$ [矢量磁位的连续性，表征 B 为有限值] (或， $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ ，若采库伦规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)
4. $\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \mathbf{K}_f$ [矢量磁位法向导数的连续性]

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

定理：磁媒质分界面上“磁”的边界条件（续）

5. $\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$ (若 $K_f = 0$), $\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial t} = K_f$ (若 $K_f \neq 0$) [标量磁位的连续性]
6. $\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n}$ [标量磁位法向导数的连续性]

说明

5. 的部分证明见下页

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势
场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

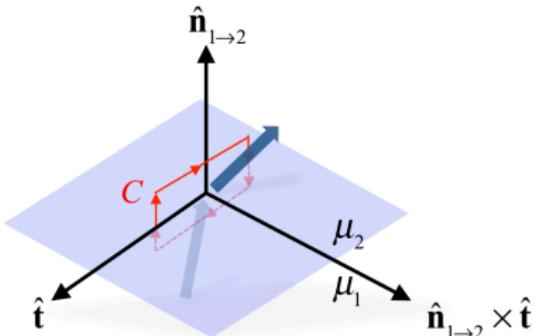
5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

关于标量磁位 φ_m 边界条件推导，可以参考右图



$$\hat{\mathbf{n}}_{1\rightarrow 2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}_{1\rightarrow 2}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}_{1\rightarrow 2}) \cdot \hat{\mathbf{t}}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})} H_{2t} - H_{1t} &= \mathbf{K} \cdot (\hat{\mathbf{n}}_{1\rightarrow 2} \times \hat{\mathbf{t}}) = -K \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial t} \right) - \left(-\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial t} \right) = -K$$

对于平面平行场 $\mathbf{A} = A \mathbf{e}_z$, \mathbf{A} 的边界条件可以简化为

$$A_1 = A_2 \quad \text{与} \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n} = K_f$$

性质：磁媒质折射定律

关于二种磁媒质，磁导率分布为 μ_1, μ_2 ，若磁场在此二种物质分界面之法向夹角为 α_1, α_2 ，当分界面上无自由面电流时，则恒有

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

对于磁媒质 1 为铁磁 ($\mu_1 \rightarrow \infty$)，则有 $\mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{0}$ 且磁媒质 2 的 \mathbf{B}_2 近似垂直于分界面 ($\alpha_2 \rightarrow 0$)。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

导磁媒质（磁铁）分界面特性

媒质 2

媒质 1 $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_r \mu_0, \gamma$ may exist

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{H} \rightarrow 0, \text{ if } \mu \rightarrow \infty (\text{Fe}) \\ \mathbf{H} \ll 1, \text{ if } \mu \gg 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu_r - 1) \mathbf{H}$$

$$\mathbf{K}_m$$

$$\otimes$$

$$\otimes$$



$$\text{if } \mathbf{J} = 0, \begin{cases} \rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \\ \sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

$$\bullet$$

$$A_1 = A_2 (A_1 = A_{2t})$$

$$\text{if } K_f = 0, \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n}$$

$$\text{if } K_f \neq 0, \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n} = K_f$$

$$\partial \phi_1 / \partial n = 0 \text{ if } \mu_1 \rightarrow \infty$$

电场一般“看不到”
导磁媒质的存在

$$\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \begin{cases} 0, \text{ if } \sigma_f = 0 \\ \neq 0, \text{ if } \sigma_f \neq 0 \end{cases}$$

已知表面电荷，可求表面附近的电场
已知分界面电场，可求表面电荷密度

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

已知表面电流，可求表面附近的磁场
已知分界面磁场，可求表面电流密度

$$\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\otimes$$

$$\otimes$$

$$\otimes$$

$$\otimes$$

$$\otimes$$

$$\otimes$$

$$\otimes$$

$$\otimes$$

$$\otimes$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\otimes$$

矢量磁位 \mathbf{A}

以上讨论所涉及的是“场”(\mathbf{B}, \mathbf{H})的概念，有时为了简化分析，会引入“位”函数。本节将介绍矢量磁位 (vector potential) \mathbf{A} ，下节介绍标量磁位 (scalar potential) φ_m 。后面会发现，对于某些特定情况，计算 \mathbf{A} 或 φ_m 比计算 \mathbf{B} 来得容易。

由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，恒有 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，其中 \mathbf{A} 称为磁场的矢量磁位。[Neumann, 1845]

静电场中，给定 \mathbf{E} ，通过 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 可以决定 φ 的形式 (除一待定常数外)。然而，给定 \mathbf{B} ，通过 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 还无法决定 \mathbf{A} 的形式，因为 $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f$ 也满足 $\nabla \times \hat{\mathbf{A}} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

问题：如何使 \mathbf{A} 的形式被唯一确定？根据 Helmholtz 定理 (对 \mathbf{A})，在规定 \mathbf{A} 的散度后， \mathbf{A} 的形式即可唯一确定。此处我们要求⁶ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ [称库仑规范 (Coulomb gauge)]。与电位类似，磁位本身的绝对数值没有意义，因此需要指明零位参考点，一般选择无限远处 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 。

⁶不是唯一选择。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

性质：矢量磁位的显形式

自由空间中存在恒定电流，按恒定磁场基本方程 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 与 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$)，应用 Helmholtz 定理，有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \begin{cases} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \\ \iint_A \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') dS'}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \\ \oint_C \frac{I(\mathbf{r}') d\ell'}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \end{cases}$$

说明

以上假设 $\mathbf{A}(\infty) = \mathbf{0}$ 。另外，以上形式对时变场也成立，但 \mathbf{J} , \mathbf{K} 与 I 需要包含时间 (推迟) 关系。

注意以上积分对电流源操作。 \mathbf{r} 的依存关系在 R 中。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

性质：矢量磁位特性

- $d\mathbf{A}$ 与 $Id\ell'$ 、 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 、 $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$ 同向
- \mathbf{A} 适用于叠加原理
- 磁场 \mathbf{B} 在不封闭曲面 \mathcal{S} 上的磁通量可用 \mathbf{A} 表示，有

$$\Phi = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathcal{S} = \iint_A \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathcal{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell$$

所围区域边缘与电流同向时能化简问题。

- 由 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 与 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

[矢量磁位的泊松方程]

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

▶ 例题 1-1

▶ 例题 1-2

▶ 例题 7: 磁偶极子

▶ 例题 11(续)

▶ 例题 16

根据 \mathbf{A} 的表达式, 对恒定电流而言, 代入 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 得 ♠

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

为库伦规范 (Coulomb gauge)。

对一般形式 (包含恒定电流与时变电磁场), 代入连续关系
 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$, 得 ♠

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

上式称为洛伦兹规范 (Lorenz gauge)。

\mathbf{A} 的分界面边界条件已经总结在前节定理中。▶ A 边界条件

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

Lorentz or Lorenz

值得一提，此处洛伦兹 (Ludvig V. Lorenz, 丹麦物理学家) 非彼处洛伦兹 (Hendrik A. Lorentz, 荷兰物理学家)。关于规范变换的原始论文，是 1867 年由 L.V. Lorenz 发表，题为 *On the identity of the vibrations of light with electrical currents*，内容探讨了推迟势、波方程与上述的洛伦兹规范。

如今许多文献、教科书误写为 Lorentz gauge，部分原因起于一篇探讨 Lorenz 与 Lorentz 文章的错误：J. Van Bladel, *Lorenz or Lorentz*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, 33, 2, April 1991, p.69。

另一个可能的原因或许是，在 1880 年，两位物理学家 Lorenz (1829-1891) 与 Lorentz (1853-1928) 分别在同一期刊、同一时间段发表了类似议题的论文。并且在那之后，Lorentz 持续保持高产的电磁理论的论文发表，如后来人们熟知的 Lorentz force law, Lorentz contraction, Lorentz invariance, Lorentz transformation 等。而 Lorenz 的规范变换则是一直到他死后才被人们意识到其重要性。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

Lorentz or Lorenz

值得一提的是，在 H.A. Lorentz 的一篇早期的探讨材料折射的论文中确实提到了 Lorenz 的工作。但是，随后在 Lorentz 的经典论文⁷及其后来发表的著作 *The Theory of Electrons* 中，便未再提及 L.V. Lorenz 的论文。

从现在角度看，或许 H.A. Lorentz 应该意识到这个问题，但当时并没有。一直到 1963 年，Mogens Pihl 在哥本哈根大学举办的电磁理论与天线的会议 (Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas) 上才正名了这个工作是由 Ludvig V. Lorenz 首次提出。

- 5.0 磁力的本质
- 5.1 恒定磁场基本方程
- 分界面上的边界条件
- 5.2 矢量磁位势
- 5.3 标量磁位势
- 场域的边界条件
- 5.4 静磁场镜像法
- 5.5 电感
- 5.6 磁场能量与力
- 例题 & 练习
- 作业

⁷H. A. Lorentz, *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*, Arch. Neerl. Sci. Exactes Nut., 25, 1892, pp. 363-552 (p. 497)

标量磁位 φ_m (磁标位)

工程实际中，时常遇到的一种情况是在被分析区域有 $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ 。则有 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ 。该情况类似静电场，可引入标量磁位函数 φ_m 以简化分析 ($\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$)，建立标量磁位的拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi_m = 0$ 。▶ 例题 12

注意， φ_m 的 SI 单位：Amp。另外，以上标量拉普拉斯方程形式假设磁媒质为各向同性、线性、均匀。

定义磁场中两点间的标量磁位差为磁压，有

$$U_{m,AB} = \varphi_{mA} - \varphi_{mB} = \int_A^B -d\varphi_m = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\ell$$

φ_m 的分界面边界条件已经总结在前节定理中。▶ φ_m 边界条件

由 φ_m 及其分界面特性可知，对铁磁媒质而言，等标量磁位面即为物质表面，形同静电场中的金属导体面为等电位面。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

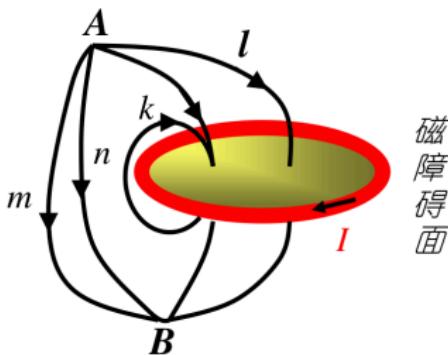
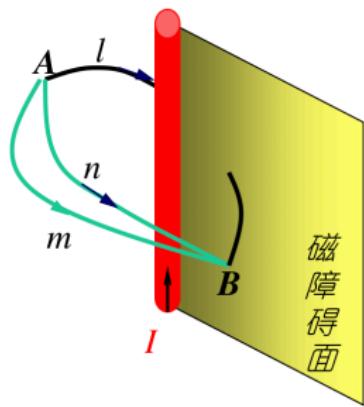
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

标量磁位 φ_m 的多值性

注意到，使用 φ_m 计算磁场时，要确保积分路径不能穿过电流回路所限定的面，即，不能穿过“磁障碍面⁸”。



引入磁障碍面可以消除 φ_m 的多值性，其实正是复变分析里的分支切割 (branch cut) 的概念。

⁸图例取自叶齐政教授上课 ppt。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

场域的边界条件

定义：常用的场域边界条件

- 已知边界 Γ 上各点矢量磁位或标量磁位值，则有

$A(\mathbf{r})|_{\Gamma}$ 或 $\varphi_m(\mathbf{r})|_{\Gamma} = f_1(\Gamma)$ [第一类 (Dirichlet) 边界条件]

- 已知 Γ 上各点矢量磁位或标量磁位法向导数值，则有

$\frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_{\Gamma}$ 或 $\frac{\partial \varphi_m(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = f_2(\Gamma)$ [第二类 (Neumann) 边界条件]

或给定沿相应方向的 B , 利用 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 列写在 Γ 上相应的 $\partial A / \partial n$; 或利用 $\mathbf{B} = -\mu \nabla \varphi_m$ 列写在 Γ 上相应的 $\partial \varphi_m / \partial n$ 。

★ 教科书例 5.3.3。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

镜像法 §5.4

求解静磁场问题可以分为三类：

- 电流分布产生 \Rightarrow 利用安培或毕奥-沙伐定律求解
- 磁媒质分布产生 \Rightarrow 利用泊松方程或拉普拉斯方程、
列写边界条件并求解
- 电流与磁媒质混合分布产生 \Rightarrow 若问题具有对称性⁹，
利用镜像电流法 (method of image currents)

镜像法的理论依据：拉普拉斯方程的解 **唯一性定理**¹⁰。

说明

用虚设的电流分布等效替代磁媒质分界面上复杂感应电流分布，虚设电流的个数、大小与位置使场的解答满足唯一性定理。

⁹碰运气。

¹⁰满足前述的边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程的解是唯一的。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

线电流 & 无限大平面 (同侧场域)

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

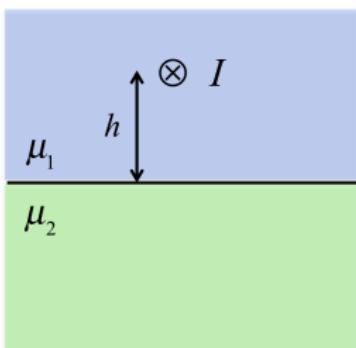
5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

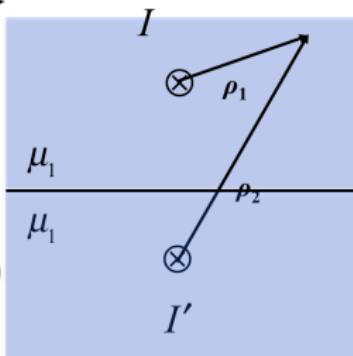
作业

上半平面场域有效



$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_1}{2\pi} \left(\frac{I}{\rho_1} \mathbf{e}_{\phi 1} + \frac{I'}{\rho_2} \mathbf{e}_{\phi 2} \right)$$



线电流 & 无限大平面 (异侧场域)

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

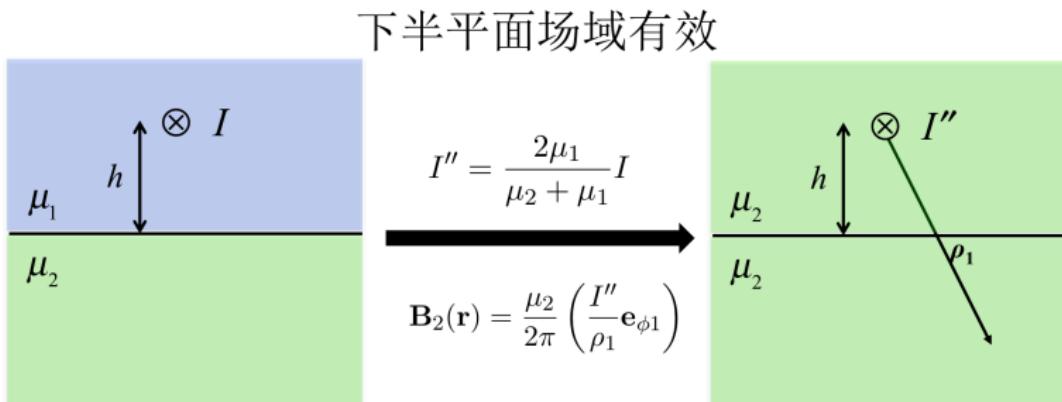
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



请自行验证上式的 I'' 与上页的 I' 能满足分界面边界条件

$$B_{1n} = B_{2n} \text{ 与 } H_{1t} = H_{2t}.$$

线电流 & 无限大平面

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

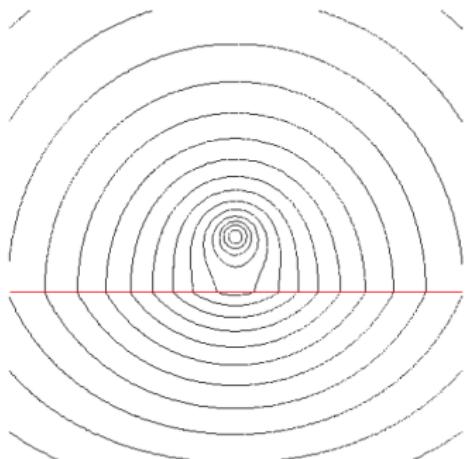
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

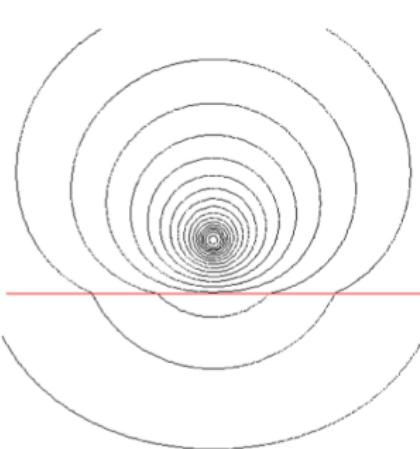
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



(a) $\mu_2 > \mu_1$



(b) $\mu_2 < \mu_1$

图 5-4-2 线电流的磁场分布

考虑三个特殊情况

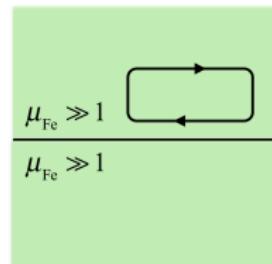
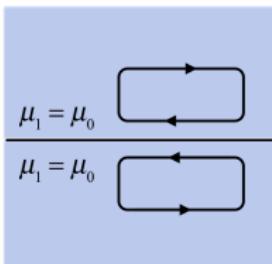
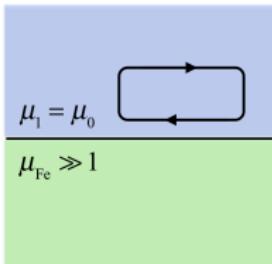
1. 媒质 1 为空气 ($\mu_1 = \mu_0$), 媒质 2 为铁磁媒质 ($\mu_2 \gg 1$), 长直载流导线置于空气中, 则有

$$I' \approx I, \quad I'' \approx \frac{2}{\mu_r} I \approx 0$$

2. 媒质 1 为铁磁媒质 ($\mu_1 \gg 1$), 媒质 2 为空气 ($\mu_2 = \mu_0$), 长直载流导线置于铁磁媒质中, 则有

$$I' \approx -I, \quad I'' \approx 2I$$

3. 考虑媒质 1 为空气 ($\mu_1 = \mu_0$), 媒质 2 为铁磁媒质 ($\mu_2 \gg 1$), 载流回路置于空气中, 其镜像电流形成的回路可以得到



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

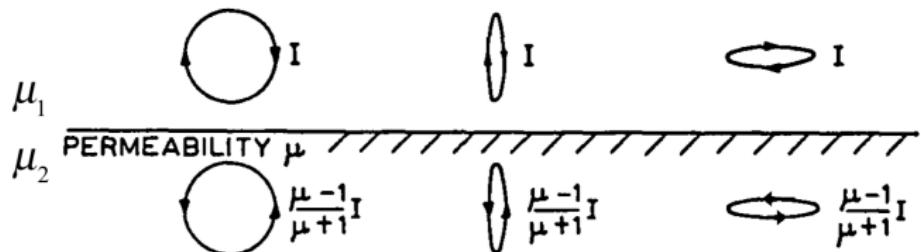
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

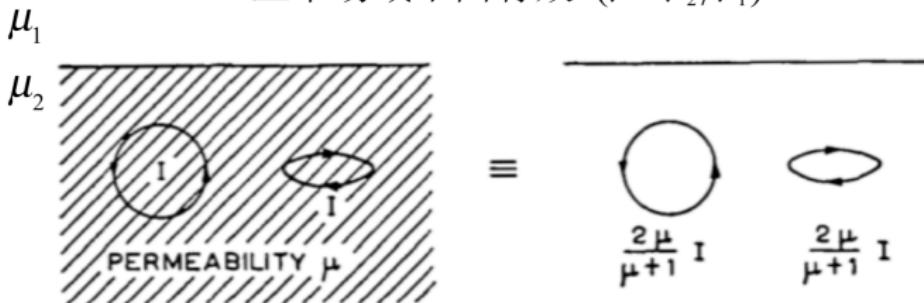
作业

电流回路镜像¹¹

上半场域平面有效 ($\mu = \mu_2 / \mu_1$)



上半场域平面有效 ($\mu = \mu_2 / \mu_1$)



¹²图例修改自 P. Hammond, Electric and magnetic images, IEE 379, 306-313 (1960)

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

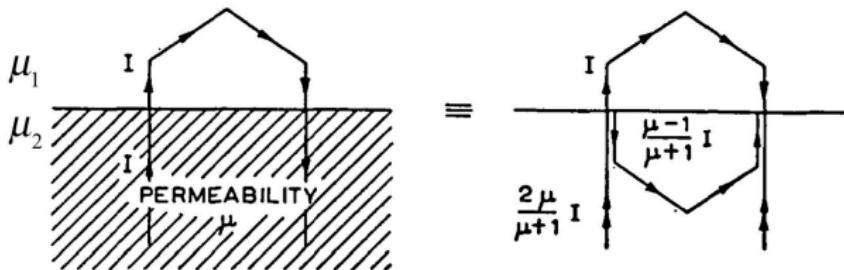
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

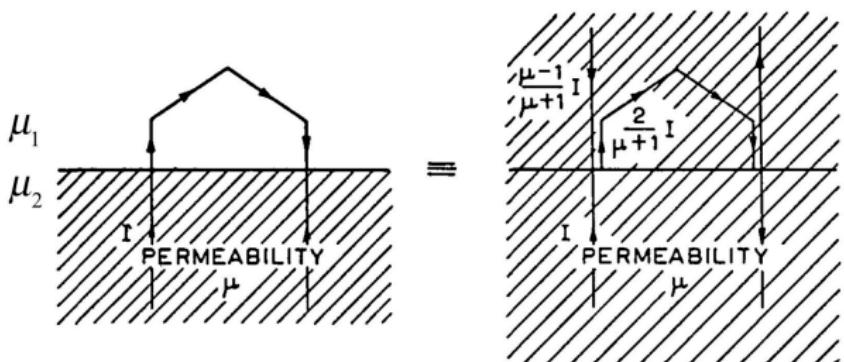
作业

电流回路镜像¹²

上半场域平面有效 ($\mu = \mu_2 / \mu_1$)



下半场域平面有效 ($\mu = \mu_2 / \mu_1$)



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

¹³图例修改自 P. Hammond, Electric and magnetic images, IEE 379, 306-313 (1960)

电感 (inductance)

电感是自感与互感的统称, SI 单位: $H = \text{Wb/Amp}$ 。

定义 : 自感、互感

关联磁通量 (单匝, flux) Φ 或磁链 (N 匝, flux linkage) $\Psi = N\Phi$ 与电流 I 的比例系数称为电感。

线圈的自感 (self inductance) 系数定义为

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad [\text{恒正}]$$

若存在两个线圈 1,2, 分别载有电流 I_1, I_2 , 对于各向同性线性磁媒质, 1 在 2 中产生的磁链称为互感磁通链, 定义互感 (mutual inductance) 系数

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad [\text{可正可负}]$$

明显有 $M_{12} = M_{21}$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

定义：内自感 L_i 、外自感 L_o

对具有有限尺寸的非细载流导线，内自感定义为磁通量仅与部分电流交链对应的电感，外自感定义为磁通量与全部电流交链对应的电感。通常有 $L = L_{in} + L_{out}$ 。

性质

线圈自感取决于形状、大小、材料、周遭磁媒质的 μ ，与载流大小无关。

线圈互感取决于形状、大小、材料、周遭磁媒质的 μ 与线圈间相对位置，与载流大小无关。

由于恒有 $\Psi_{11} \geq \Psi_{12}$ 与 $\Psi_{22} \geq \Psi_{21}$ ，故 $\sqrt{L_{11}L_{22}} \geq M_{12}$ 。定义耦合系数 $k = M_{12}/\sqrt{L_{11}L_{22}}$ ，有 $0 \leq k \leq 1$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

电感的计算

讨论: 以上关于互感的定义其实假设了电流为恒定电流, 或缓变电流。即, 忽略了电流形成磁通量(链)过程的时间延迟。

关于电感计算的一般流程, 有

$$I \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \Phi = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathcal{S} \rightarrow L, M$$

$$I \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \Phi = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell \rightarrow L, M$$

或利用磁场能量求电感, 下一节将介绍。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

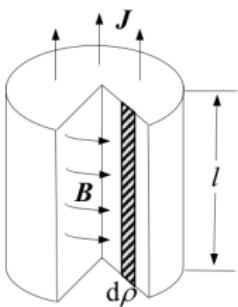
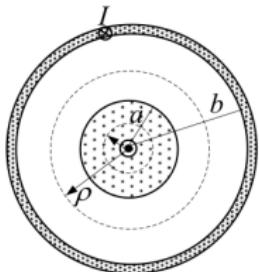
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

电感的计算

如下图, 线性磁化圆柱载流导体 (内部磁化率 μ), 若恒定电流沿轴向均匀分布, 单位长度内自感为 $L_{\text{in}} = \frac{\mu}{8\pi}$, 单位长度外自感为 $L_{\text{out}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$, 与截面半径无关。(数学推导参考 §5.5.3、或例 5.6.1 利用静磁能量)



求平行输电线的电感 ► 例题 13、双平行输电线互感 ► 例题 14。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

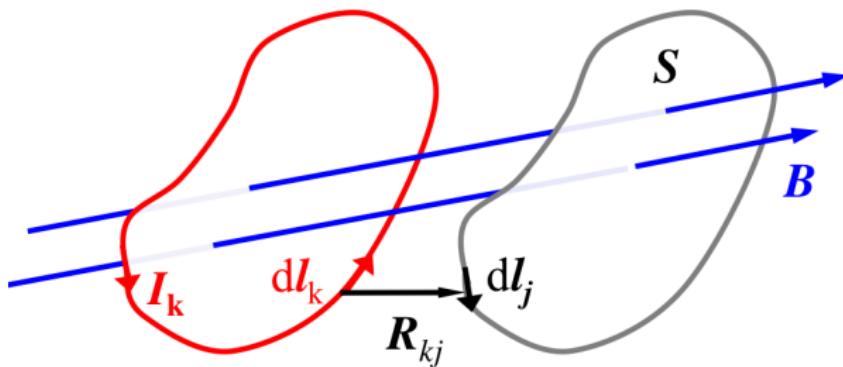
作业

定理：诺埃曼公式 (Neumann formula)

空间中两分离的单连通封闭载流导线 C_k, C_j , 有

$$M = \frac{\mu_0 N_k N_j}{4\pi} \oint_{C_k} \oint_{C_j} \frac{d\ell_k \cdot d\ell_j}{R_{kj}}$$

空间中 N 匝线圈外自感, 有 $L_o = \frac{\mu_0 N^2}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\ell \cdot d\ell}{R}$.



- 5.0 磁力的本质
- 5.1 恒定磁场基本方程
- 分界面上的边界条件
- 5.2 矢量磁位势
- 5.3 标量磁位势
- 场域的边界条件
- 5.4 静磁场镜像法
- 5.5 电感
- 5.6 磁场能量与力
- 例题 & 练习
- 作业

多个电感的组合

集总化符号通常以 ——ⓂⓂⓂⓂ— 表示。

定理：电感串联、并联的等效电感

电感间的互感可以忽略的条件下，有

- 并联 (I 相加、 V 相等) $\Rightarrow L_{\text{tot}}^{-1} = \sum_{k=1}^N L_k^{-1}$
- 串联 (I 相等、 V 相加) $\Rightarrow L_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^N L_k$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

静磁能量

已知在真空中，放置电荷（或建立电场）需要能量。同样地，在真空中要建立恒定电流¹³也需要能量¹⁴。

考虑线圈回路，电流 i 从 0 增加至 I 的缓变过程，假设线圈无变形、移/转动，线圈储存的静磁场能量即电流源建立该磁场时所做的功。分析需要考虑电磁感应效应。

定理：自感与互感电动势

对于空间中具有互感的两个分离单连封闭载流回路 1 与 2，回路 1 上的（缓）时变电流 $i_1(t)$ 造成磁通 $d\psi_{11}$ 与 $d\psi_{21}$ 改变，导致在回路 2 产生感应电动势 e_2 ，有

$$e_1 = -\frac{d\psi_{11}}{dt}$$

$$e_2 = -\frac{d\psi_{21}}{dt}$$

¹³如果不是恒定电流，则能量将与频率有关。

¹⁴此处讨论的能量不生成热、辐射，为保守（可逆）能量。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

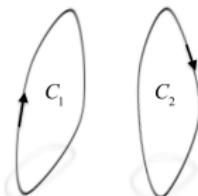
例题 & 练习

作业

性质

考虑两线圈 1 与 2 如下图, 可以证明, i_1, i_2 从 0 增加至 I_1, I_2 , 外加电源需要做功

$$\begin{aligned} W_m &= \underbrace{\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2}_{\text{自有能}} + \underbrace{MI_1I_2}_{\text{互有能}} \\ &= \frac{1}{2}(L_1I_1 + M_{21}I_2)I_1 + \frac{1}{2}(L_2I_2 + M_{12}I_1)I_2 \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \psi_k I_k \quad [\text{推广至 } N \text{ 个线圈}] \end{aligned}$$



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

磁场能量存在于 $\mathbf{B} \neq 0$ 的空间中。因此， W_m 可以与 \mathbf{B} 关联，而有

性质：孤立系统恒定磁场能量

- 若其建立的 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 与 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 已知，则系统恒定磁场能量为（积分遍及场域）

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \iiint_V w_m dV$$

定义：磁场能量密度

定义为 $w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$

比较两种表达式的区别。比较 §3.6.2。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

磁场力

§5.1 曾介绍过安培力定律，此处我们通过磁场能量引入力的概念，在一些问题分析较为方便。▶ 例题 15、▶ 例题 18

定理

若载流导体 $A_1 \sim A_N$ 形成孤立恒定电流（磁场）系统（相互磁通量不变），除导体 A_k 外，其它固定不动， A_k 质心位置 \mathbf{r}_k 可以移动（仅有平移没有旋转），若系统静磁能为 $W_m(\mathbf{r})$ ，则 A_k 所受之力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_k) = -\nabla W_m(\mathbf{r}_k)|_{d\psi=0}$$

若载流导体 $A_1 \sim A_N$ 形成非孤立恒定电流（磁场）系统（相互磁通量可变），但导体各自电流维持不变，其它同上，则 A_k 所受之力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_k) = \nabla W_m(\mathbf{r}_k)|_{dI=0}$$

注意此处的力为广义力，方向需要额外判定。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 1-1: 单载流导线的磁场

如右图, 一长直导线载有电流 I (沿 $+z$ 为正), 求导线外一点 P 的磁感应强度 \mathbf{B} 、矢量磁位 \mathbf{A} 与标量磁位 φ_m 。

[返回 Biot-Savart law](#)

▷ 利用毕奥-沙伐定律, 有

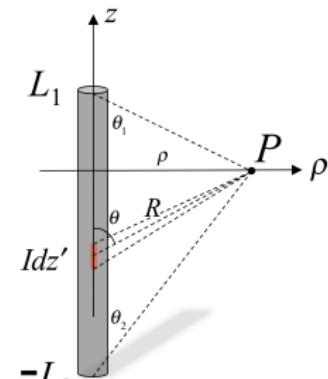
$$\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_2}^{L_1} \frac{\mathbf{e}_z dz' \times \mathbf{e}_R}{R^2}, \text{ 其中}$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$$

$$\mathbf{e}_z dz' \times \mathbf{e}_R = dz' \sin \theta \mathbf{e}_\phi = dz' \frac{\rho}{R} \mathbf{e}_\phi$$

代入积分式, 利用三角代换, 可得

$$\boxed{\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \mathbf{e}_\phi}$$



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 1-1: (续)

■ 本题由于导线为有限长度, 安培定律不适用。若硬要使用, 需要考虑导线两端积累的电荷的效应, 并利用连续方程 $I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathcal{S} = -\frac{dq}{dt}$ 关联 q 与 I 。积累的电荷产生的电场在以 P 点环绕导线形成的圆平面造成的电通量有

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathcal{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho (E_z^{+q} + E_z^{-q}) \rho d\rho d\phi = \dots \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{\cos \theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_2}{2} \right]\end{aligned}$$

其中,

$$E_z^{+q} + E_z^{-q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\frac{L}{2} + z}{\left[\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + \rho^2\right]^{3/2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\left[\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + \rho^2\right]^{3/2}} \right\}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 1-1: (续)

对时间求导, 有

$$\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_E}{\partial q} \frac{dq}{dt} = -\frac{I}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{\cos \theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_2}{2} \right]$$

应用全电流定律 (Ch 7 会介绍), 可以得到上页的结果

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = B_\phi (2\pi\rho) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \mu_0 I \left[\frac{\cos \theta_1}{2} + \frac{\cos \theta_2}{2} \right]$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 1-1: (续)

返回

关于矢量磁位，利用定义

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{L^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{L^2}} - 1}$$

对于有限长度但 $L \gg \rho$ ，利用 $\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ ，有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho}$$

若要避免发散，需要选择一个不在 ∞ 处作为参考零位，假设在距离导线 ρ_0 处，则

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_0}{\rho}}$$

对于无限长导线，试分别从 \mathbf{B} 与 \mathbf{A} 证实 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$ 。对于 \mathbf{A} 与 φ_m ，需要重新定义一个参考零位点以避免发散。[例题 12](#)

★ 重新考虑此问题，但有有限的导线截面半径 a (例 5.2.4)。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 1-2: 双平行载流导线的磁场

[返回](#)

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

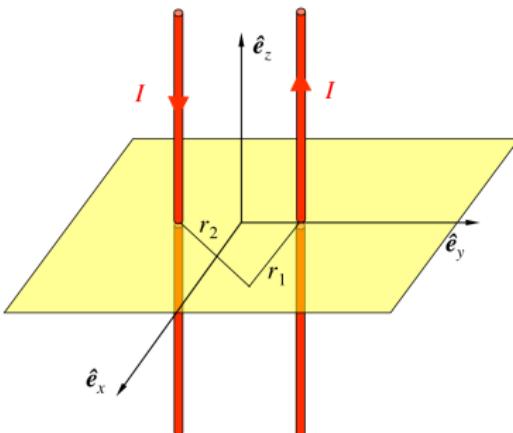
5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

如右图¹⁵, 两根无限长平行长直输电线, 求空间任一点的矢量磁位 \mathbf{A} 。



利用前题结果 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$, 结合叠加原理, 有

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_R = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\ln \frac{\rho_0}{r_2} + \ln \frac{\rho_0}{r_1} \right) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

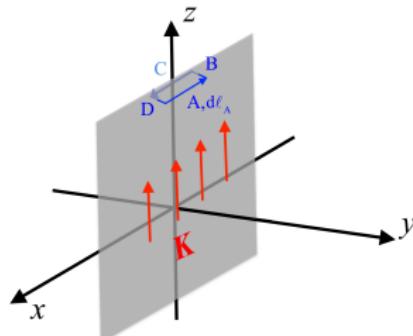
¹⁵ 图例取自叶齐政教授上课 ppt。

例题 2: 无限大薄平板附近的磁场

返回

如右图, 无限大薄平板上有均匀面电流密度 K , 求空间任一点的磁场强度 B 。

▷ 沿图中一封闭曲线对 B 积分, 利用 $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_{\text{enc}}$, 有



$$\begin{aligned} & \int_A \mathbf{B} \cdot d\ell + \int_B \mathbf{B} \cdot d\ell + \int_C^0 \mathbf{B} \cdot d\ell + \int_D \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 K d\ell_A \\ & \Rightarrow \int_A \mathbf{B} \cdot d\ell + \int_C \mathbf{B} \cdot d\ell \stackrel{d\ell_A = d\ell_C}{=} 2B d\ell_A = \mu_0 K d\ell_A \\ & \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 K}{2} \begin{cases} (-\mathbf{e}_x), y > 0 \\ (+\mathbf{e}_x), y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

试比较无限大带电平板附近的电场 (例 3.1.2) 与两平行无限大带电平板与载流平板的相似性。

★ 求空间任一点的矢量磁位 A 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

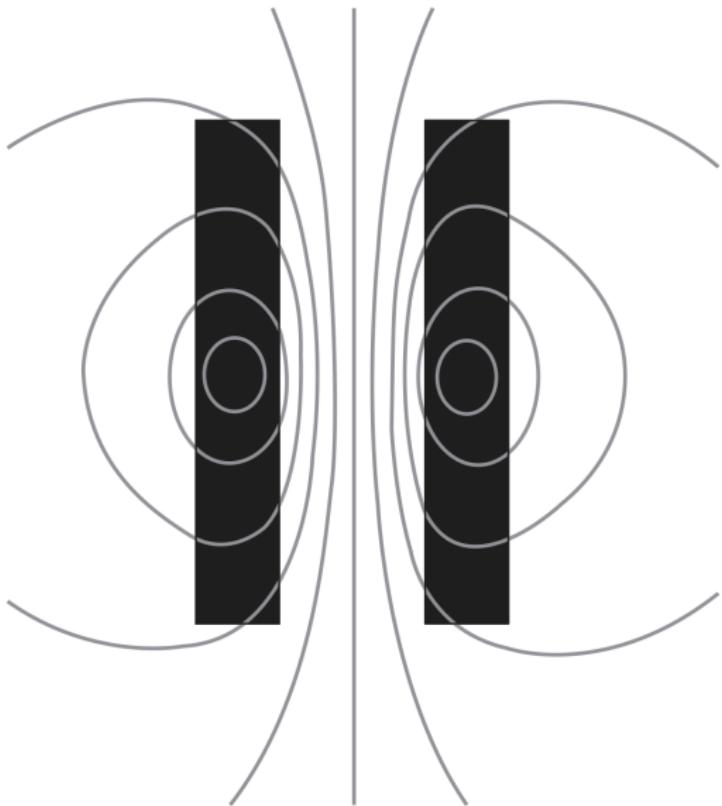
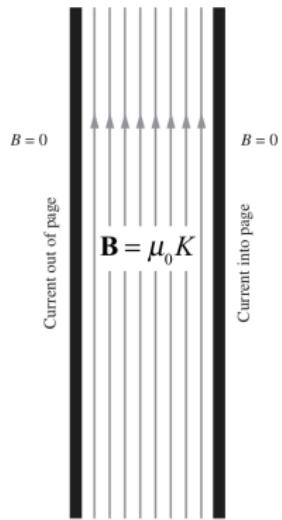
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

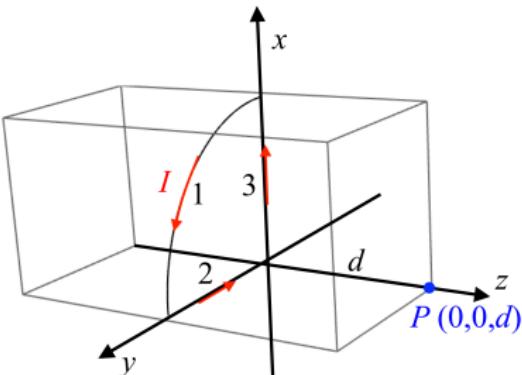
例题 & 练习

作业

例题 3: 载流封闭回路

返回

如右图, 载流导线 I 形成封闭回路, 半径为 a , 计算 P 点磁场。



利用叠加原理, 分别计算三段载流导线对 P 的磁场。

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\ell(\phi) \times \mathbf{e}_R}{a^2 + d^2}$$

其中, $\mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{a^2+d^2}} (-a \cos \phi \mathbf{e}_x - a \sin \phi \mathbf{e}_y + d \mathbf{e}_z)$ 与
 $d\ell(\phi) = ad\phi \mathbf{e}_\phi = (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y) ad\phi$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 3 (续)

积分可以通过三角代换得到，有

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \left[\mathbf{e}_x d \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi + \mathbf{e}_y d \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi + \mathbf{e}_z a \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \left(d\mathbf{e}_x + d\mathbf{e}_y + \frac{\pi a}{2} \mathbf{e}_z \right)}{(a^2 + d^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{d\sqrt{a^2 + d^2}} \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{d\sqrt{a^2 + d^2}} \mathbf{e}_y$$

因此， P 点磁场可以写成 $\mathbf{B}_P = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3$ 。

★ 利用本题的部分结果，计算半径 a 形成的圆形导线在 P 点的磁场，有 $\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程
分界面上 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi$ 条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

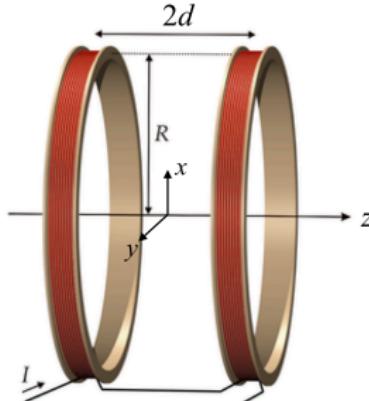
作业

例题 4: 亥姆霍兹线圈 (Helmholtz coil)

◀ 返回

两个半径 R 的圆形线圈，圆心沿着 z 轴，相距 $2d$ ，电流 I 同向，计算沿 z 轴上的磁场，并找出磁场最大的位置。

▷ 利用叠加原理 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_z^L + \mathbf{B}_z^R$ ，按上题结果，左右两线圈对 z 轴上任一点



$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{e}_z \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[(z-d)^2 + R^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[(z+d)^2 + R^2]^{3/2}}, & z \geq d \\ \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[(d-z)^2 + R^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[(z+d)^2 + R^2]^{3/2}}, & 0 \leq z < d \end{cases}$$

可以发现，在 $z=0$ 处，有 $\frac{dB}{dz}|_{z=0} = 0$ 。此外，对于 $d=R/2$ ，有 $\left.\frac{dB}{dz}\right|_{z=0} = \left.\frac{d^2B}{dz^2}\right|_{z=0} = \left.\frac{d^3B}{dz^3}\right|_{z=0} = 0$ ，显示亥姆霍兹线圈能提供在原点 $z=0$ 附近非常均匀的磁场。

▶ 05-Ex-04

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

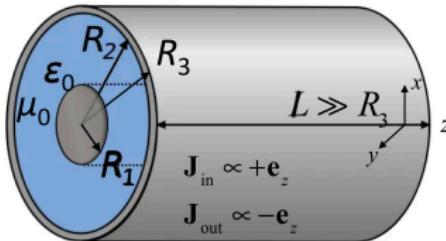
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 5: 长直同轴电缆

长直同轴导线, 如右图, 缆芯磁导率 μ , 介质区域磁导率 μ_0 , 求各区域的磁场及长直同轴电缆的(单位长度)自感。



$$\begin{cases} \mathbf{B}(0 < \rho < R_1) = \frac{\mu I}{2\pi R_1^2} \rho \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{B}(R_1 < \rho < R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{B}(R_2 < \rho < R_3) = \frac{\mu I}{2\pi \rho} \left(1 - \frac{\rho^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{B}(\rho > R_3) = \mathbf{0} \end{cases}$$

单位长度自感有

$$\begin{aligned} L &= L_o + L_{\text{int}}^{\text{in}} + L_{\text{int}}^{\text{out}} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) + \frac{\mu}{8\pi} \left(\frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \end{aligned}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 6: $\cos \theta$ 磁铁 (cosine-theta magnet)

[返回](#)

如右图, 二平行且半径皆为 R 的长圆柱载流导体, 有均匀、反向电流密度 \mathbf{J} , 求重叠区域的磁场。

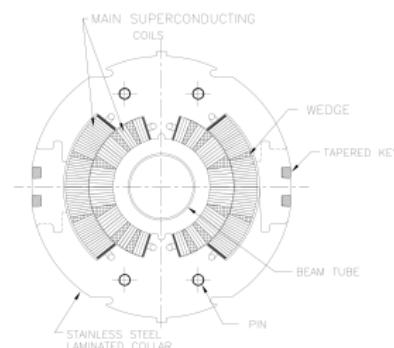
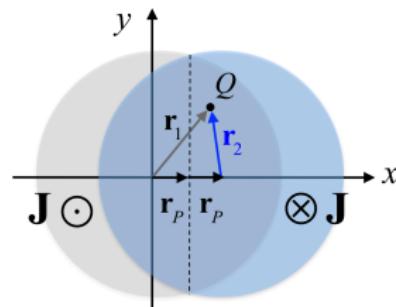
▷ 利用叠加原理, 左侧圆柱在重叠区域内一点 Q 产生的磁场为

$$\mathbf{B}_Q^L = \frac{\mu_0 I_{\text{enc}}}{2\pi r_1} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{r_1} \stackrel{I_{\text{enc}} = \pi r_1^2 J}{=} \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_1$$

类似地, 右侧圆柱产生的磁场

$$\mathbf{B}_Q^R = -\frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_Q &= \mathbf{B}_Q^L + \mathbf{B}_Q^R \\ &= \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{r}_P \end{aligned}$$



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

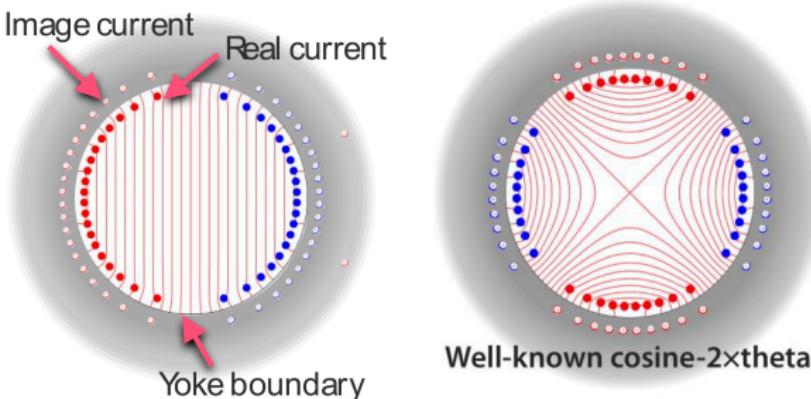
作业

例题 6: (续)

以上可以看到，在重叠区域具有均匀磁场（又称二极场）。基于此种想法而设计的磁铁被称为 $\cos \theta$ 磁铁，被广泛应用在高能粒子加速器中，用来使带电粒子束转弯。

★★ 同样分析 $\cos \theta$ 磁铁，但考虑镜像电流的影响。

★★ 除了 $\cos \theta$ 磁铁外，还有 $\cos 2\theta$ 磁铁，如下图¹⁶，试计算区域内磁场（又称四极场）。



¹⁶ 图例取自 K. Sugita et al., Superconducting Septa and Fast Ramped $\cos\theta$ Magnets.

- 5.0 磁力的本质
- 5.1 恒定磁场基本方程
- 分界面上的边界条件
- 5.2 矢量磁位势
- 5.3 标量磁位势
- 场域的边界条件
- 5.4 静磁场镜像法
- 5.5 电感
- 5.6 磁场能量与力
- 例题 & 练习
- 作业

粒子加速器 \Rightarrow 结合电气、机械、物理与材料专业的跨学科工程



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

粒子加速器应用 ⇒ 面向科学研究与工业应用

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

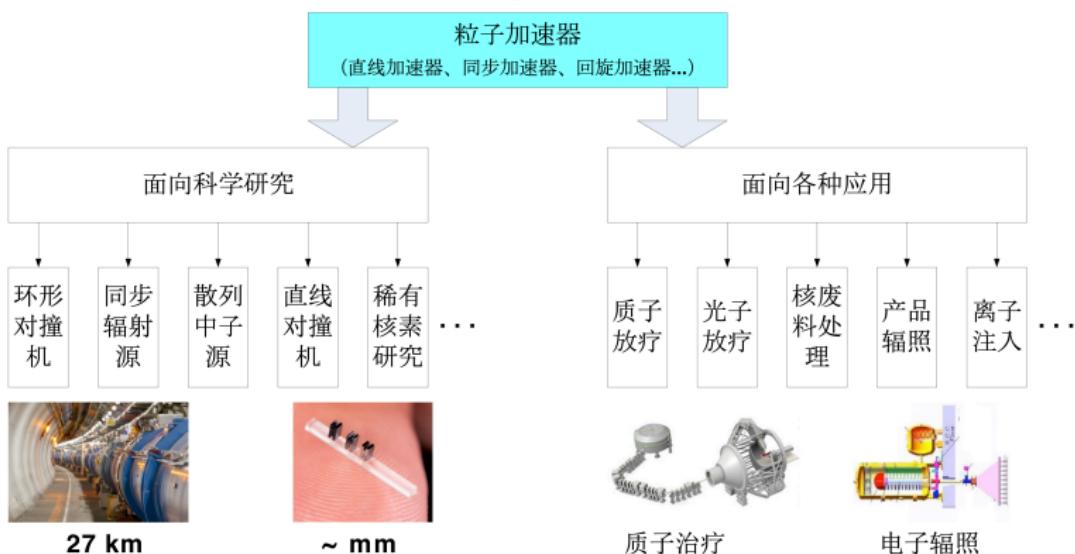
例题 & 练习

作业



粒子加速器

(直线加速器、同步加速器、回旋加速器...)



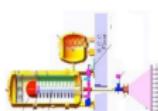
27 km



~ mm



质子治疗



电子辐照

粒子加速器组成部件的原理 \Rightarrow 电磁场理论

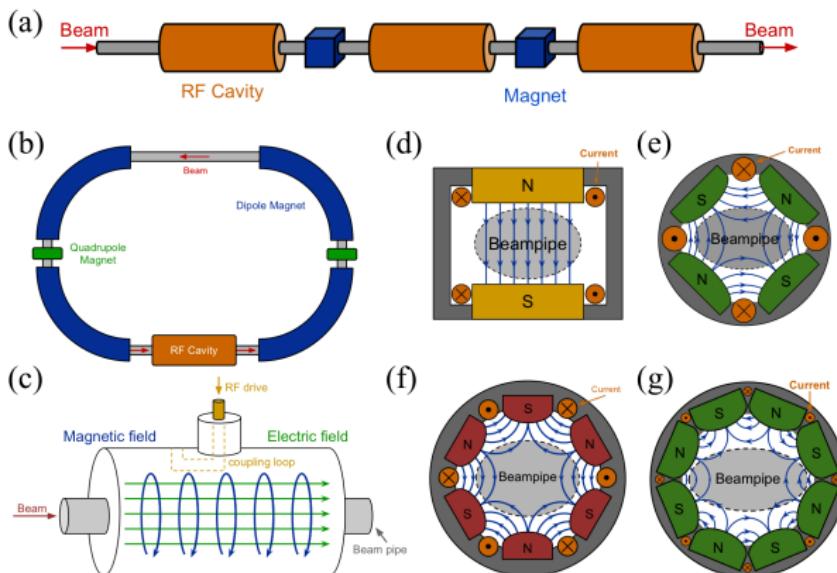


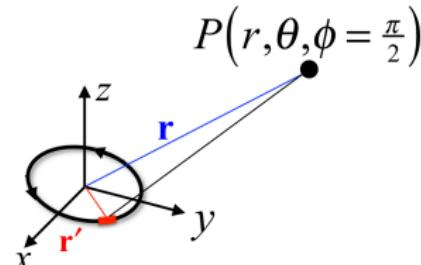
图: (a) 直线加速器 (linac); (b) 环形加速器 (circular accelerator, synchrotron); (c) RF 谐振腔 (cavity/resonator); (d) 二极铁 (dipole); (e) 四极铁 (quadrupole); (f) 六极铁 (sextupole); (g) 八极铁 (octupole)。图例取自 Fermilab Concepts Rookie Book, https://operations.fnal.gov/rookie_books/rbooks.html

- 5.0 磁力的本质
- 5.1 恒定磁场基本方程
- 分界面上的边界条件
- 5.2 矢量磁位势
- 5.3 标量磁位势
- 场域的边界条件
- 5.4 静磁场镜像法
- 5.5 电感
- 5.6 磁场能量与力
- 例题 & 练习
- 作业

例题 7: 磁偶极子 (magnetic dipole, 例 5.2.3)

▶ 返回

右图为磁偶极子模型，假设半径 a , 载流 I , 定义磁偶极子矩 $\mathbf{m} = I\pi a^2$, 求远处的矢量磁位与磁场强度。



以下以带'的量表示源, 不带'的量的表示观察坐标。从图中可知有几何关系 $\cos \psi = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'} = \sin \theta \sin \phi'$ 与

$$d\ell' = -a \sin \phi' d\phi' \mathbf{e}_x + a \cos \phi' d\phi' \mathbf{e}_y$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ra \cos \psi}$$

代入 \mathbf{A} 的积分表示式, 有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\ell'}{R} \approx \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{m} \times \mathbf{r}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

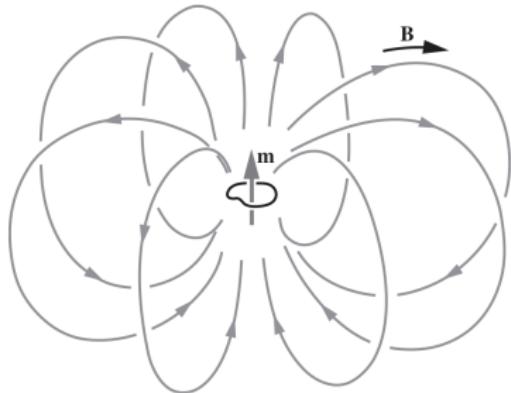
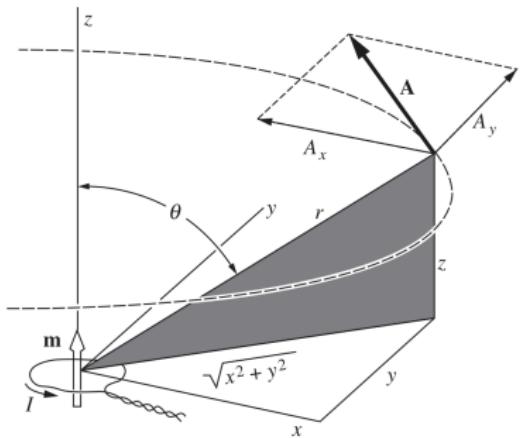
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 7: (续)

根据定义, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} r \mathbf{e}_\theta \right) \frac{\sin \theta}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta \right)\end{aligned}$$

关于 \mathbf{A} 的推导细节, 参考教科书[例 5.2.3](#)。

★★ 尝试不通过近似, 写出磁偶极子远场的精确解。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

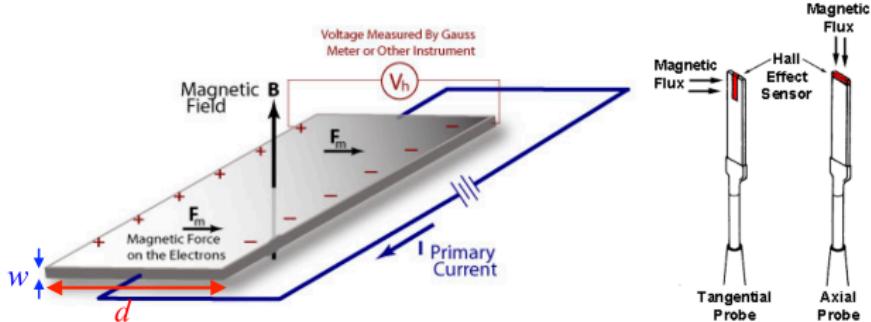
例题 & 练习

作业

恒定磁场

例题 8: 霍尔效应 (Hall effect)

如下图¹⁷, 将载流截面导体置于磁场中, 如果导体中仅有一种荷电粒子, 则导体在垂直于磁场的方向上将会出现电位差。



平衡时，有

$$QE = QvB \Rightarrow Q\frac{V_h}{d} = Q\frac{J}{NQ}B \Rightarrow V_h = \frac{JBd}{NQ} = \frac{IB}{NQw} \equiv \frac{I_h B \mathcal{R}_h}{w}$$

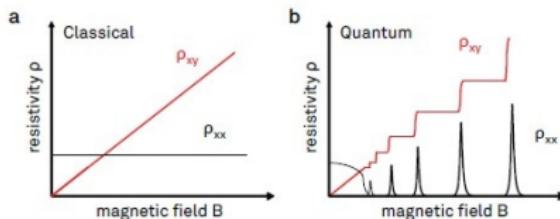
其中，定义霍尔系数为 $R_h = \frac{1}{NQ}$ ，为材料参数，SI 单位： $\Omega\text{m/Tesla}$ 。另外还有霍尔电阻 $R_h \equiv \frac{V_h}{I_h}$ 、霍尔电导 $G_h \equiv \frac{I_h}{V_h}$ 等。

17 图例修改自

<http://www.education-english.com/Education-Resources/Community-Collage/Massachusetts/Physics/Massachusetts.htm>

量子霍尔效应 (Quantum Hall effect) ♠

上图所示为经典霍尔效应，有如下左图 R_h 与 B 的关系¹⁸，其中，导体中的传导电子运动视为三维电子气体。当载流截面厚度非常薄 ($w \approx 10 \sim 100 \text{ nm}$) 以至于电子运动被局限在二维平面上，在极低温环境 ($\approx 1 \text{ K}$) 下，电子运动不受晶格振动影响，并有外加强磁场 ($\approx 20 \text{ T}$) 时，则电子受磁力作圆周运动，形成一封闭路径。电子物质波形成驻波，形成稳定的量子状态，由量子化条件可知，电子在磁场中的能量不再连续。在此特殊的系统参数下， R_h 与 B 不再是完美线性关系，而为阶梯状，有 $\frac{R_h}{B} \propto \frac{h}{e^2} \frac{1}{n}$ (h 为普朗克常数)。若 n 为整数，则称整数量子霍尔效应 (IQHE, 1985, von Klitzing)， n 为分数，称分数量子霍尔效应 (FQHE, 1998, Laughlin, Stormer, Tsui)。



★★ 当处于阶梯平台时，纵向电阻 ρ_{xx} 降为 0，理由为何？(提示：超流体)

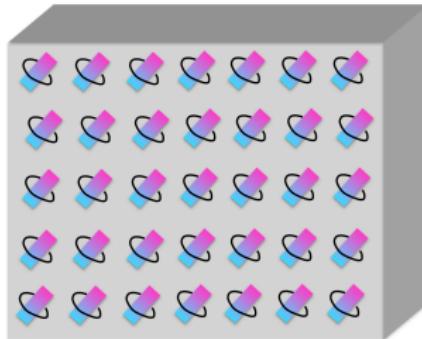
¹⁸ <https://www.azonano.com/article.aspx?ArticleID=5173>

- 5.0 磁力的本质
- 5.1 恒定磁场基本方程
- 分界面上的边界条件
- 5.2 矢量磁位势
- 5.3 标量磁位势
- 场域的边界条件
- 5.4 静磁场镜像法
- 5.5 电感
- 5.6 磁场能量与力
- 例题 & 练习
- 作业

例题 9: 磁性材料的等效模型

◀ 返回

假设一磁性材料内，平均每个原子的磁偶极矩 $\mathbf{m} = 10^{-25} \text{ Am}^2$ ，与材料表面夹角为 45° 。材料内的原子密度为 10^{27} m^{-3} 。求此材料的等效模型。



$$\mathbf{M} = N\mathbf{m} = 10^{27} \times 10^{-25} = 100 \text{ A/m}$$

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$$

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = 100 \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{100}{\sqrt{2}} \text{ A/m}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 10: 磁化圆柱体的磁特性

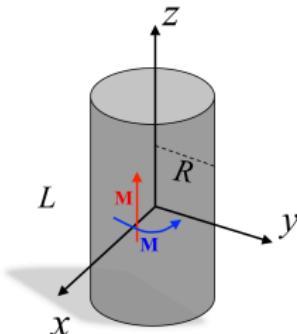
[返回](#)

半径 R , 长度 L 的圆柱磁铁, 取圆柱轴为 z 轴, 中心为原点。讨论其磁特性, 考虑以下三种媒质磁化强度 ($k > 0$ 为常数)

1. $\mathbf{M} = k\mathbf{e}_z$
2. $\mathbf{M} = k\rho\mathbf{e}_\phi$
3. $\mathbf{M} = \frac{k}{\rho}\mathbf{e}_\phi$ (例 5.1.2)

对于1., 有以下结果

$$\begin{cases} \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_m^{\text{top}} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_m^{\text{bottom}} = \mathbf{M} \times (-\mathbf{e}_z) = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_m^{\text{side}} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_\rho = k \mathbf{e}_\phi \end{cases}$$



5.0 磁力的本质
5.1 恒定磁场基本方程
分界面上的边界条件
5.2 矢量磁位势
5.3 标量磁位势
场域的边界条件
5.4 静磁场镜像法
5.5 电感
5.6 磁场能量与力
例题 & 练习
作业

例题 10: (续)

圆柱内部与外部沿 z 轴的磁感应强度可以求得

$$d\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{R^2}{\left[(z - z')^2 + R^2\right]^{3/2}}, \quad dI = K_m dz' = kdz'$$

$$\mathbf{B} = \int_{z'=-L/2}^{z'=+L/2} d\mathbf{B}(z') = \mathbf{e}_z \frac{k\mu_0}{2} \left[\frac{L - 2z}{\sqrt{(L - 2z)^2 + 4R^2}} + \frac{L + 2z}{\sqrt{(L + 2z)^2 + 4R^2}} \right]$$

沿 z 轴的磁场强度则有

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, & \text{圆柱内} \\ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}, & \text{圆柱外} \end{cases}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 10: (续)

圆柱内沿 z 轴 $-L/2 < z < L/2$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z \frac{k}{2} \left[\frac{L - 2z}{\sqrt{(L - 2z)^2 + 4R^2}} + \frac{L + 2z}{\sqrt{(L + 2z)^2 + 4R^2}} - 2 \right] \propto -\mathbf{e}_z$$

但 $\mathbf{B} \propto \mathbf{e}_z$ 。并且, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ ($\chi_m < 0$)。

按类似方式, 对于2. $\mathbf{M} = k\rho \mathbf{e}_\phi$, 有以下结果

$$\mathbf{J}_m = 2k\mathbf{e}_z, \mathbf{K}_m^{\text{top}} = k\rho \mathbf{e}_\rho, \mathbf{K}_m^{\text{bottom}} = -k\rho \mathbf{e}_\rho, \mathbf{K}_m^{\text{outside}} = -kR\mathbf{e}_z$$

对于3. $\mathbf{M} = \frac{k}{\rho} \mathbf{e}_\phi$, 有

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{0}, \mathbf{K}_m^{\text{top}} = \frac{k}{\rho} \mathbf{e}_\rho, \mathbf{K}_m^{\text{bottom}} = -\frac{k}{\rho} \mathbf{e}_\rho, \mathbf{K}_m^{\text{outside}} = -\frac{k}{R} \mathbf{e}_z$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

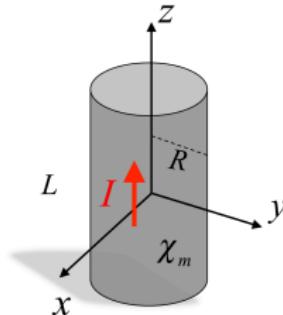
例题 & 练习

作业

例题 11: 无限长载流圆柱体的磁特性

返回

半径 R , 长度 $L \gg R$, 磁化率 χ_m , 载流 I 的圆柱磁铁, 取圆柱轴为 z 轴, 中心为原点。讨论圆柱内外的磁场 \mathbf{B}, \mathbf{H} 、矢量磁位 \mathbf{A} 与等效磁化电流 $\mathbf{J}_m, \mathbf{K}_m$ 。



由安培定律, 有

$$H_\phi 2\pi\rho = \begin{cases} I \frac{\rho^2}{R^2} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{\rho I}{2\pi R^2} \mathbf{e}_\phi, \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}, & \text{圆柱内} \\ I \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, & \text{圆柱外} \end{cases}$$

利用 $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, 分别有圆柱内与侧面

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{\chi_m I}{\pi R^2} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_\rho = -\frac{\chi_m I}{2\pi R} \mathbf{e}_z$$

注意, 总磁化电流 $\Rightarrow I_m = \oint_C \mathbf{K}_m d\ell + \iint_A \mathbf{J}_m \rho d\rho d\phi = 0$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 11: (续, 例 5.2.4)

返回

求矢量磁位, 我们解圆柱坐标下 \mathbf{A} 的泊松方程 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_f$,

其中, $\mathbf{J}_f = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{e}_z = J_z \mathbf{e}_z$.

$$\begin{cases} \nabla^2 A_{z,\text{in}} = -\mu J_z \\ \nabla^2 A_{z,\text{out}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{z,\text{in}} = -\frac{\mu J_z}{4} \rho^2 + C_1 \ln \rho + C_2 \\ A_{z,\text{out}} = C_3 \ln \rho + C_4 \end{cases}$$

边界条件有

$$\begin{cases} A_{z,\text{in}}|_{\rho=a} = A_{z,\text{out}}|_{\rho=a} = 0 \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_{z,\text{in}}}{\partial \rho}|_{\rho=a} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{z,\text{out}}}{\partial \rho}|_{\rho=a} \\ B_\phi(\rho=0) = -\frac{\partial A_{z,\text{in}}}{\partial \rho}|_{\rho=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{\mu}{4} J_z a^2 \\ C_3 = -\frac{\mu_0}{2} J_z a^2 \\ C_4 = \frac{\mu_0}{2} J_z a^2 \ln a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\text{in}} = \frac{\mu I}{4\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{A}_{\text{out}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{\rho} \mathbf{e}_z \end{cases}, \begin{cases} \mathbf{B}_{\text{in}} = \frac{\mu I \rho}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{B}_{\text{out}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi \end{cases}$$

★ 重新分析此题, 但假设载流圆柱为有限长度。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

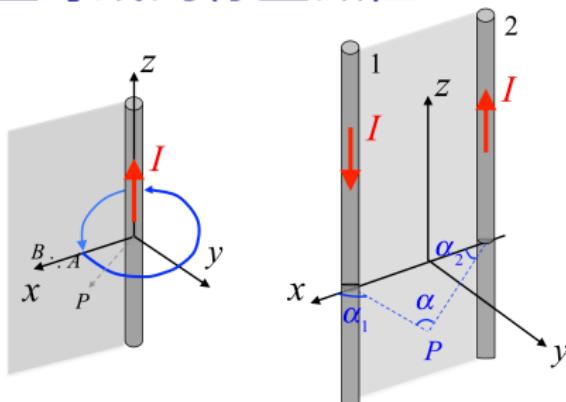
例题 & 练习

作业

例题 12: 无限长直导线的标量磁位

返回

考虑右图载流 I 的无限长直导线, 求解标量磁位。



适当选取磁障碍面, 如图中灰色区域平面。对于单导线, 有

$$\varphi_{mP} = \int_P^A \mathbf{H} \cdot d\ell = \int_{\phi}^0 \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_{\phi} \cdot \rho d\phi \mathbf{e}_{\phi} = -\frac{I}{2\pi} \phi$$

对于平行双导线, 有

$$\varphi_{mP} = \varphi_{m1} + \varphi_{m2} = -\frac{(-I)}{2\pi} \alpha_1 - \frac{(+I)}{2\pi} \alpha_2 = \frac{I}{2\pi} \alpha$$

注意, $\varphi_m(x=0, y=0^+) \neq \varphi_m(x=0, y=0^-)$ 。

利用标量磁位求磁场。▶ 例题 1-1

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

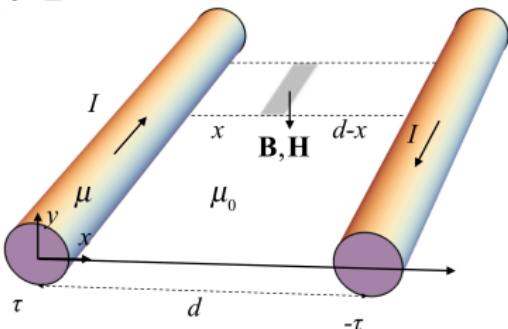
例题 & 练习

作业

例题 13: 平行输电线的自感

返回

考虑右图载流 I 的平行输电线，导线本身磁导率 μ ，半径 a ，导线间距 $d \gg a$ 。求平行输电线的自感、单位长度作用力与单位长度磁能。



导线间灰色区域的磁场强度有

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \mathbf{e}_y$$

通过输电线间区域的 (单位长度) 磁通量为

$$\Phi_o = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathcal{S} = \int_{\perp} \mathbf{B} \cdot d\ell = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx \stackrel{d \gg a}{\approx} \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d}{a}$$

外自感 $L_o = \frac{\Phi_o}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a}$ 。加上内自感 (推导见§5.5.3)，则有 $L = L_o + L_{in} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} + 2 \frac{\mu}{8\pi}$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

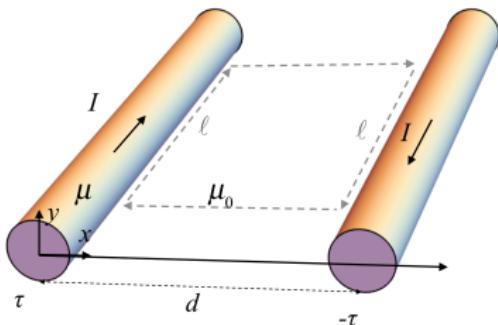
例题 & 练习

作业

例题 13: (续)

本题利用矢量磁位也可以求得 (取如下图之积分路径)

$$\Phi_o = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{d-a}{a} - \ln \frac{a}{d-a} \right) \ell$$



若已知平行输电线的电容，也可以利用 $L_o C = \epsilon_0 \mu$ 求外自感，其中， $C = \pi \epsilon_0 / \ln \frac{d-a}{a}$ (推导见例 3.5.1)。

单位长度磁能为 $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{d}{a} + \frac{\mu_r}{4\pi} \right) I^2$ 。导线间单位长度作用力 $F = |\nabla W_m| = \frac{d W_m}{d d} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

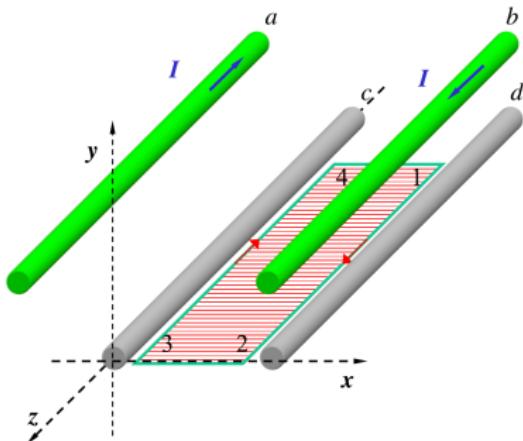
例题 & 练习

作业

例题 14: 双平行输电线的互感

[返回](#)

考虑右图载流 I 的双平行输电线的互感，导线本身磁导率 μ_0 ，半径 a ，导线间距如图所示¹⁹。



仿照上题，可以求得双平行输电线的互感，有

$$M = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{D_{ad} D_{bc}}{D_{bd} D_{ac}}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

¹⁹ 图例取自叶齐政教授上课 ppt。

利用例题 1-1 的结果, 对于长直载流导线, 有

$$\mathbf{A}(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} (I\mathbf{e}_z) \ln \frac{\rho_0}{\rho}$$

上排平行输电线对下排平行输电线间区域的磁通

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\ell = \int_1^2 \mathbf{A}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\ell + \int_3^4 \mathbf{A}_{3 \rightarrow 4} \cdot d\ell$$

其中,

$$\mathbf{A}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0}{2\pi} (-I\mathbf{e}_z) \ln \frac{\rho_0}{D_{ad}} + \frac{\mu_0}{2\pi} (+I\mathbf{e}_z) \ln \frac{\rho_0}{D_{bd}} = \frac{\mu_0}{2\pi} (+I\mathbf{e}_z) \ln \frac{D_{ad}}{D_{bd}}$$

$$\mathbf{A}_{3 \rightarrow 4} = \frac{\mu_0}{2\pi} (-I\mathbf{e}_z) \ln \frac{\rho_0}{D_{ac}} + \frac{\mu_0}{2\pi} (+I\mathbf{e}_z) \ln \frac{\rho_0}{D_{bc}} = \frac{\mu_0}{2\pi} (+I\mathbf{e}_z) \ln \frac{D_{ac}}{D_{bc}}$$

因此,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \left[\ln \frac{D_{ad}}{D_{bd}} - \ln \frac{D_{ac}}{D_{bc}} \right]$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

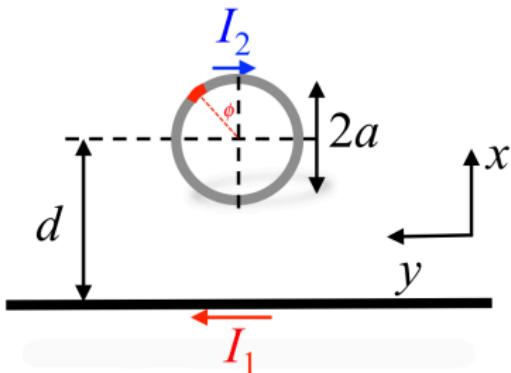
$\frac{D_{ad}}{D_{bd}}$ 磁场能量与力
例题 & 练习

作业

例题 15-1: 长直载流与圆形线圈 (例 5.6.2)

▶ 返回

长直载流导线通有电流 I_1 , 圆形线圈载流 I_2 , 与长直载流导线共面。求互感、磁场能量与两者间受力。



长直载流导线通过圆形区域的磁通有

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho d\rho d\phi}{d + \rho \cos\phi} = \mu_0 I_1 \left(d - \sqrt{d^2 - a^2} \right)$$

互感为 $M = \mu_0 \left(d - \sqrt{d^2 - a^2} \right)$ 。电流回路的磁场储能为 $W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

对 ϕ 积分可通过复变函数积分求得。令 $z = e^{i\phi}$, 则有
 $dz = ie^{i\phi}d\phi = izd\phi$ 或 $d\phi = \frac{dz}{iz}$ 。待求积分可变换如下:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{d + \rho \cos \phi} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{[d + \rho (\frac{z+z^*}{2})] iz} \\ &= \frac{1}{i\rho} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{\rho}{2}z^2 + zd + \frac{\rho}{2}} = \frac{2}{i\rho} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\frac{d}{\rho}z + 1} \end{aligned}$$

对 ϕ 积分转变成在单位圆 $|z| = 1$ 上的积分。上式被积函数分母有两个极点, $z^2 + 2\frac{d}{\rho}z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - \rho^2}}{\rho}$, 其中一个落在单位圆内。利用留数定理, 计算被积函数在单位圆内极点位置的留数, 有

$$\frac{2}{i\rho} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\frac{d}{\rho}z + 1} = \frac{2}{i\rho} 2\pi i \left(\frac{\rho}{2\sqrt{d^2 - \rho^2}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - \rho^2}}$$

再对 ρ 积分, 有

$$\int_0^a \frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - \rho^2}} \rho d\rho = -2\pi \sqrt{d^2 - \rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=a} = 2\pi \left(d - \sqrt{d^2 - a^2} \right)$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 15-1: (续)

作用力可以由磁场能量获得, 有

$$F = |\nabla W_m| = \frac{\partial W_m}{\partial d} = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial d} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} \right)$$

本题还可以由安培力定律分析, 载流导线对线圈的场为

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + a \cos \phi)} \mathbf{e}_z$$

线圈上的微元有 $d\ell = ad\phi (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y)$ 。

★ 利用安培力定律 $\mathbf{F} = I_2 \oint d\ell \times \mathbf{B}$ 也可以求解。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

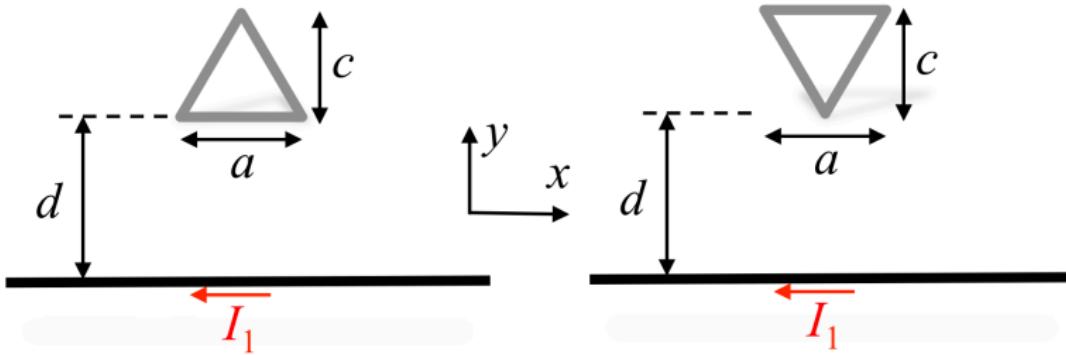
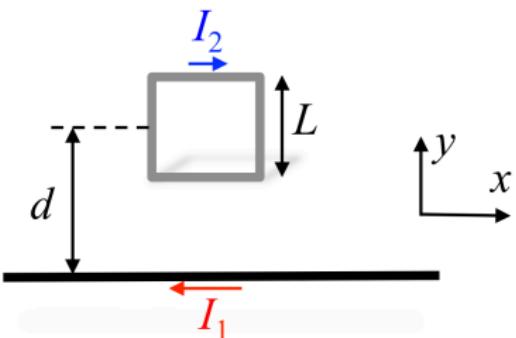
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 15-2: 长直载流与方形线圈、三角形线圈

长直载流导线通有电流 I_1 , 考虑方形线圈载流 I_2 (如右图) 及三角形线圈(如下图), 与长直载流导线共面。求互感、磁场能量与两者间受力。



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

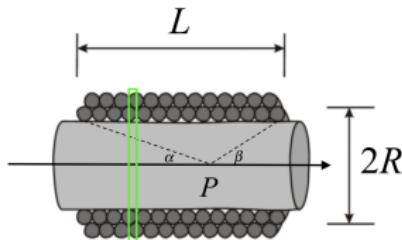
作业

例题 16: 螺线管 (solenoid)

[返回](#)

有限长螺线管, 半径 R (截面积 $A = \pi R^2$), 单位长度圈数密度 $n = N/L$, 载流 I , 内部磁导率 μ , 计算轴上任一点 B, A 。

▷ 利用叠加原理,



$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z) &= \mathbf{e}_z \frac{\mu n I}{2} \left\{ \int_0^z \frac{R^2}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} dz' + \int_z^L \frac{R^2}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} dz' \right\} \\ &= \mathbf{e}_z \frac{\mu n I}{2} [\cos \alpha(z) + \cos \beta(z)] \end{aligned}$$

当 $L \rightarrow \infty$, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \mu n I$, 无限长情况与螺线管截面形状无关。

上式对螺线管轴上内外适用。矢量磁位由对称性知,

$\mathbf{A}(\rho, \phi, z) = A_\phi(\rho) \mathbf{e}_\phi$ 。可以通过以下方式求得

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathcal{S} = \begin{cases} \mu_0 n I \pi \rho^2, & \rho < R \\ \mu_0 n I \pi R^2, & \rho > R \end{cases} \Rightarrow A_\phi(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I \pi \rho}{2}, & \rho < R \\ \frac{\mu_0 n I \pi R^2}{2\rho}, & \rho > R \end{cases}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

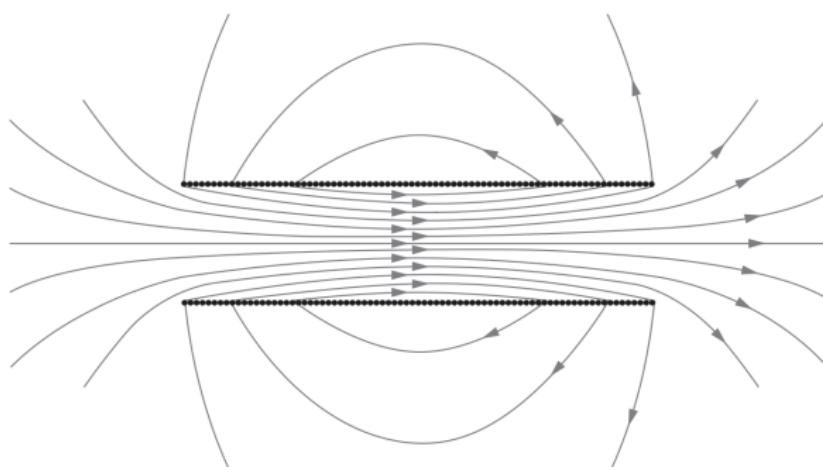
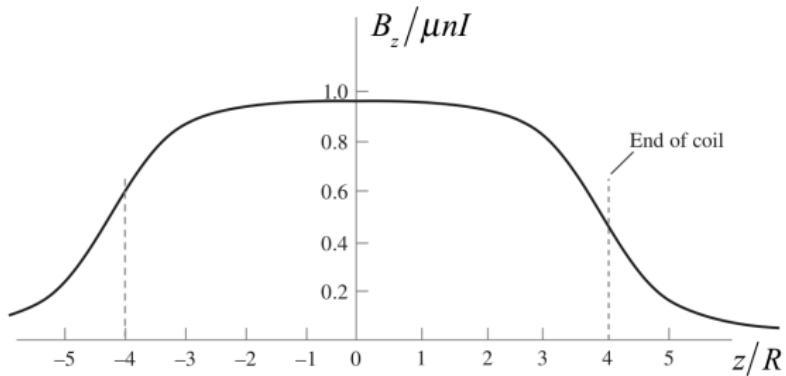
5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

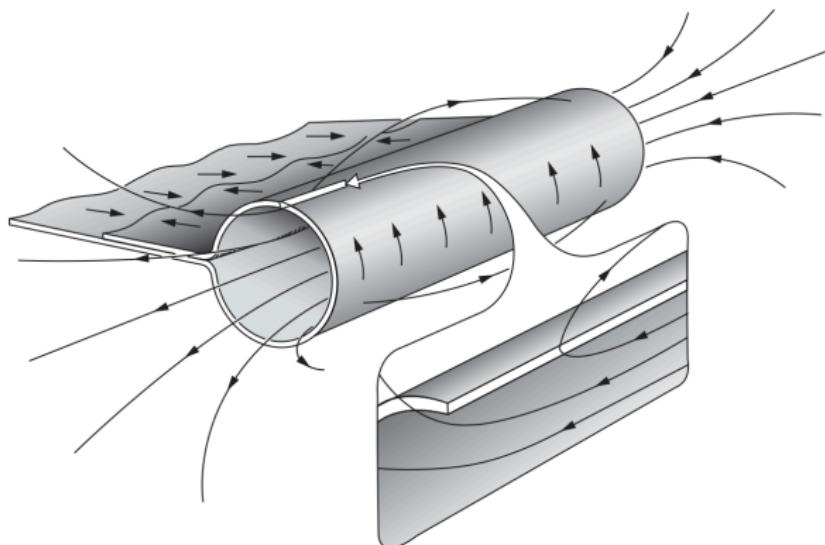
5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

柱状面电流形成的单匝螺线管



$$\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

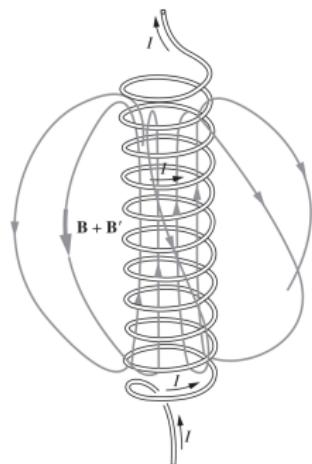
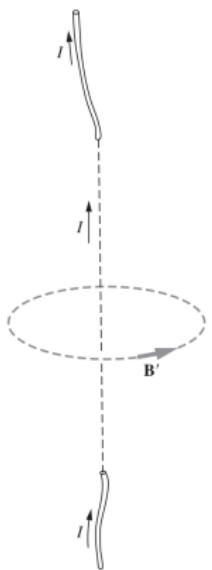
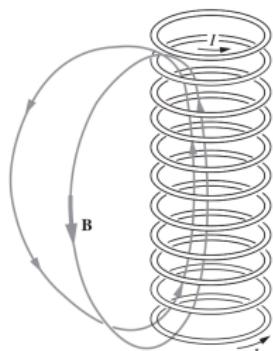
5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

真实螺线管的磁力线



5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

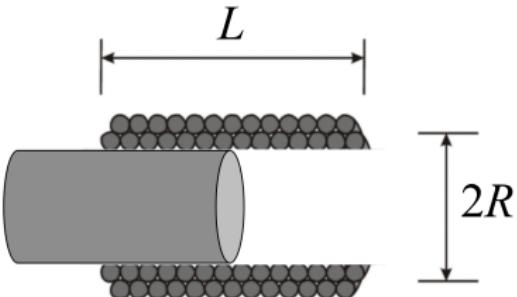
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 16: (续)

若管内铁磁性物质部分拉出,
计算其受力。



当螺线管内部部分为铁磁性物质, 部分真空时, 系统静磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 nI)^2 A(L-z) + \frac{1}{2\mu} (\mu nI)^2 Az$$

受力可按本章介绍的虚功原理求得, 有

$$\mathbf{F} = \nabla W_m = \mathbf{e}_z \frac{\partial W_m}{\partial z} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0}{2} n^2 I^2 A (\mu_r - 1)$$

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

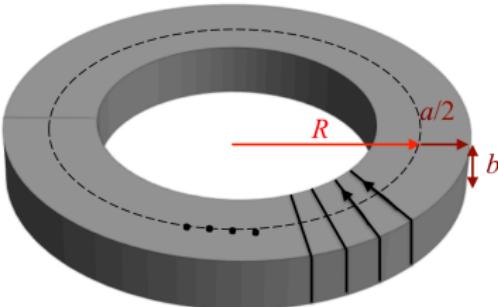
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 17-1: 方截面螺线环 (toroid)

如右图方截面螺线环，共 N 匝，磁导率 μ ，求电感。



取沿虚线半径为 ρ 的封闭路径 C 。由安培定律，有

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu NI \Rightarrow \mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu NI}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

可以求得磁通

$$\Phi = N \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_0^b \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{\mu NI}{2\pi\rho} \rho d\rho dz = \frac{\mu N^2 I}{2\pi} b \ln \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}$$

有电感 $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu N^2}{2\pi} b \ln \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}}$ 。本题还可以接着求解静磁场能量等。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

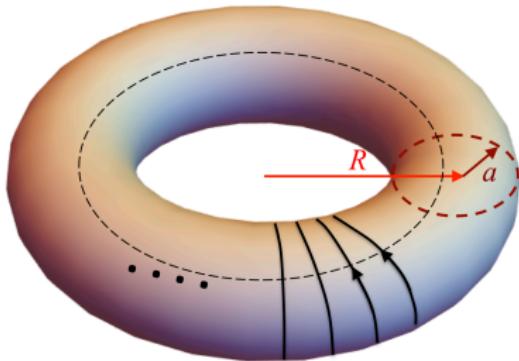
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

★ 例题 17-2: 圆截面螺线环 (torus)

如右图圆截面螺线环, 共 N 匝, 磁导率 μ , 求电感。



$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu NI \Rightarrow \mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu NI}{2\pi(R - \rho \cos \phi)} \mathbf{e}_\phi$$

$$\begin{aligned}\Phi &= N \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathcal{S} = N \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\mu NI}{2\pi(R - \rho \cos \phi)} \rho d\rho d\phi \\ &= \mu NIR \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} \right)\end{aligned}$$

以上形态的螺线环又称罗柯夫斯基线圈 (Rogowski coil), 用于电流测量, 尤其是高频、大电流测量。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

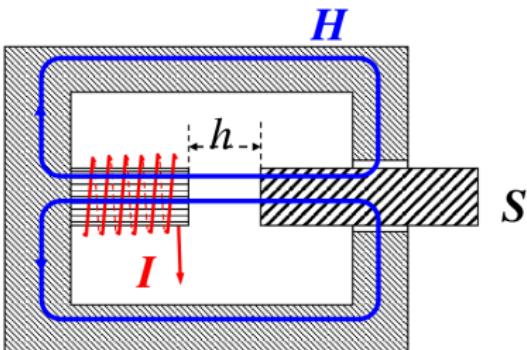
5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

例题 18: 电磁开关

如右图的电磁开关, 考虑衔铁受力。(图 5-6-4) [返回](#)



在电磁铁内, 有 $B_{Fe} = \mu_{Fe}H_{Fe}$ 。由于 $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$, $H_{Fe} \rightarrow 0$ 。分界面 B_n 连续。利用安培定律, 有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\ell \approx NI \Rightarrow H_{air} \approx \frac{NI}{h}$$

气隙间磁场能量

$$W_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} Sh = \frac{\mu_0}{2} H_{air}^2 Sh = \frac{\mu_0 S N^2 I^2}{2h}$$

衔铁受力有 $F = |\nabla W_m| = \left. \frac{\partial W_m}{\partial h} \right|_{I=\text{常量}} = -\frac{\mu_0 S I^2}{2h^2}$ 。

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业

作业

- 5.5(1), 5.9
- 5.12, 5.14
- 5.21, 5.24

5.0 磁力的本质

5.1 恒定磁场基本方程

分界面上的边界条件

5.2 矢量磁位势

5.3 标量磁位势

场域的边界条件

5.4 静磁场镜像法

5.5 电感

5.6 磁场能量与力

例题 & 练习

作业