

恒定电流场

蔡承颖¹

华中科技大学电气与电子工程学院



¹jcytsai@hust.edu.cn

4.1 恒定电流和电
源

4.2 恒定电场基本
方程

分界面上的边界条
件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

写在开始前...

上一章讨论了在真空与物质中的静电场，其中电荷源并无相对运动。本章将讨论电荷移动形成电流时的电场，称恒定电场，又称电流场。1820 年丹麦物理学家 Oersted 的发现：载流导线可以产生磁场。可以预见，当电荷移动时，完整的分析必须同时考虑电场和磁场，又称时变电磁场，其分析相对复杂地多。

逻辑体系上，从静电荷过渡到移动电荷的过程，存在一个实用并能简化的理论体系，即考虑电荷移动形成的电流随时间缓变的情况，此类电流称为恒定电流或稳态电流 (steady current)。在此情况下，产生的电场与磁场可以各自独立研究。本章先考虑电场，磁场效应将在下一章探讨。

4.1 恒定电流和电
源

4.2 恒定电场基本
方程

分界面上的边界条
件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

写在开始前...

4.1 恒定电流和电
源

4.2 恒定电场基本
方程

分界面上的边界条
件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

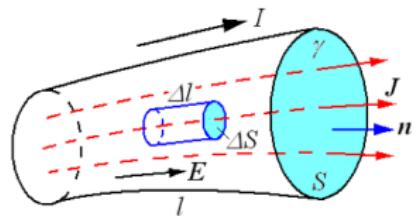
作业

对于常见的导电媒质 (如各种金属、电解液), 应用恒定电流模型获得的结论都成立, 所以讨论恒定电流场具有一定的实用价值。这里讨论恒定电流模型忽略霍尔效应 (Hall effect)。

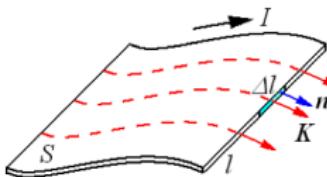
以下我们约定 电介质载电荷, 导电媒质载电流, 且其中一种媒质环境出现时, 暂时不考虑另一种。

电流及电流密度

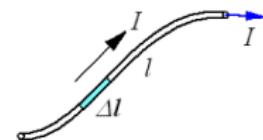
在电路理论中，电荷定向运动形成电流，是一个集总（宏观）的概念。电流密度矢量函数是作为“比较”微观的一种描述运动中电荷的方式。



(a) 体电流



(b) 面电流



(c) 线电流

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

	基本形式	体分布	面分布	线分布
电荷元	dq	ρdV	σdS	$\tau d\ell$
总电荷	q	$q = \iiint_V \rho dV$	$q = \iint_A \sigma dS$	$q = \int_C \tau d\ell$
电流元	$\mathbf{v} dq$	$\mathbf{J} dV$	$\mathbf{K} dS$	$I d\ell$
总电流	I	$I = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathcal{S}$	$I = \int_C \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_n d\ell$	I

电荷守恒定律

一个基本的物理定律。空间中任意孤立区域，电荷的净数量必须为常数。

定律：连续性方程 (continuity equation)

对于空间任意封闭曲面 \mathcal{S} ，电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 与电荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ 满足连续性方程

$$\oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV \text{ 或 } \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

以上结果对时变情况 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 与 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 同样成立。

定理

恒定电流 $\Leftrightarrow \oint_A \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ 或 $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0, \forall \mathbf{r}$

4.1 恒定电流和电
源

4.2 恒定电场基本
方程

分界面上的边界条
件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

电荷守恒定律

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

由上述结论，有电路理论中的重要结果：

定律：基尔霍夫电流定律 (Kirchhoff Current Law)

当闭合曲面缩为电路的一个节点，有 $\sum I = 0$ 。

欧姆定律³

与电介质的极化特性²类似，媒质的导电性能也表现出均匀非均匀、线性非线性、各向同性或异性等。对大多数导电媒质而言，流经内部的 \mathbf{J} 与 \mathbf{E} 能写出以下关系：

定义：欧姆介质

导电媒质若满足欧姆定律 $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ 之关系，该物质称为欧姆介质。其中， γ (或更多时候写做 σ) 称为物质的电导率 (conductivity)，SI 制单位: S/m。有时也用电阻率 $\rho = \gamma^{-1}$ (SI 单位: Ω·m) 表示。欧姆定律的宏观表示式为 $U = RI$ 。电阻计算公式: $R = \frac{U}{I} = \frac{\int_C \mathbf{E} \cdot d\ell}{\iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathcal{S}}$ 。

注意，此处的 \mathbf{J} 为传导电流 (\mathbf{J}_c)，不是自由电荷形成的电流 (\mathbf{J}_f)。书中表 4-1-2 列出几种常见材料的电导率。 \mathbf{J}_c 满足焦耳定律，有焦耳热效应。 \mathbf{J}_f 无焦耳热效应，受电场而加速，电场能量转为粒子动能。

²回忆以前学过的关系式 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ 或 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 。

³德国物理学家 Georg Ohm (1789-1854) 于 1826 年提出。

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

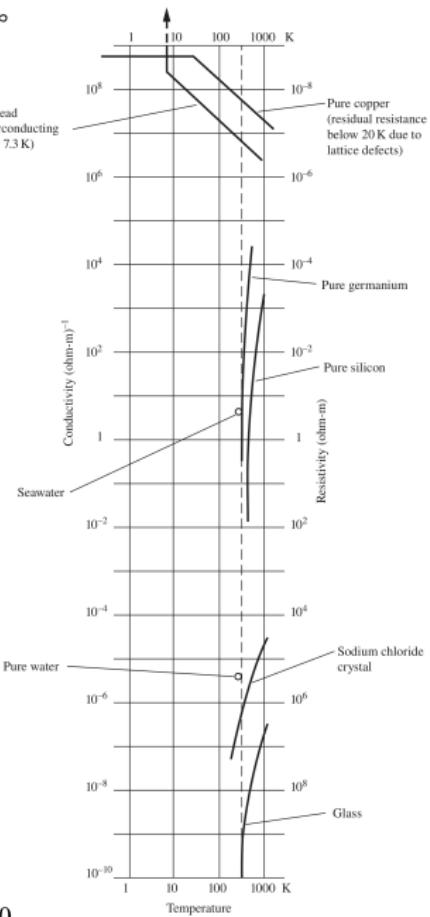
理想导体 $\gamma = \infty$

良导体

不同材料的导电特性相差很大，如金属大都 $\gamma > 10^7 \text{ S/m}$ ，玻璃、橡胶等 $\gamma < 10^{-12} \text{ S/m}$ 。确切数值见教科书表 4-1-2。媒质的电导率与环境温度有直接关系。

绝缘体

理想介质 $\gamma = 0$



恒定电(流)场是保守场

上一章我们知道，静电场是保守场，因为满足 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ 条件限制。存在恒定电流情况下，移动的电荷在空间将产生电场，该电场是否仍满足 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ？

定理

静止电荷与恒定电流产生的电场皆为保守场。

证明

根据安培定律 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ 知，若 \mathbf{J} 不含时，则 \mathbf{B} 不含时。再由法拉第定律知， $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$ ，故恒定电(流)场为保守场。 \square

定律：基尔霍夫电压定律 (Kirchhoff Voltage Law)

任一条恒定电流形成的电流回路，有 $\sum U = 0$ 。

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

焦耳热效应 (Joule⁴effect)

定理：焦耳定律 (Joule's law of heating)

传导电流通过导电媒质将产生热能损耗。热功率密度(单位时间单位体积产生的热能) 可以写为

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma} \text{ (微分形式)}$$

积分形式为熟悉的 $P = \iiint p dV = UI$ 。

证明

传导电流产生的电场使媒质荷电粒子 ($dq = \rho dV$) 运动 ($v = d\ell/dt$),
场做功 $dA = \mathbf{f} \cdot \ell = \mathbf{E} dq \cdot d\ell$

\Rightarrow 荷电粒子与媒质中其它原/分子碰撞。当形成 (宏观) 动态平衡时, 荷电粒子动能全部转为原/分子热振动能 $d\mathcal{E}$

\Rightarrow 热功率密度 $p = \frac{d\mathcal{E}}{dV dt}$ 即为上式。 □

4.1 恒定电流和电
源

4.2 恒定电场基本
方程

分界面上的边界条
件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

⁴英国物理学家, James Prescott Joule, 1818-1889。

电源与电动势

因此，若要维持电流恒定，必须依赖外加电源补偿能量消耗。外加电源形式可以是机械、化学、光、热或者其它形式。这些形式对应的场未必是保守场，为了分析方便，定义电源的电动势为

定义：电动势 (electromotive potential)

局外力 \mathbf{f}_e 驱动局外场 \mathbf{E}_e ，局外场做功形成电动势

$$\varepsilon = \int_b^a \mathbf{E}_e \cdot d\ell$$

此处 \mathbf{E}_e 可以是非保守场。

恒定电流形成的直流 (DC) 回路，总消耗功率有

$$P = \int_{\text{电源内部}} \frac{J^2}{\gamma_i} dV + \int_{\text{导线}} \frac{J^2}{\gamma_1} dV + \int_{\text{负载}} \frac{J^2}{\gamma_2} dV = \varepsilon I + I \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = \varepsilon I.$$

还可以写成 $P = I^2 r + I^2 R$ ，其中 r 与 R 分别为电源内阻与外部电路总电阻。

4.1 恒定电流和电
源

4.2 恒定电场基本
方程

分界面上的边界条
件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

复习：恒定电场基本方程

以上我们已经知道恒定电场如静电场，满足 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ 。

由连续方程式，恒定条件保证 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 。这两个方程形式恒定电场的基本方程。

多数导电媒质满足欧姆定律，即 $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ ，注意其中电流为传导电流而不是运流电流⁵。另外，导电媒质内的电位函数一般不满足常见的拉普拉斯方程形式，仅有在媒质是均匀的时候才满足 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。

回忆：自由空间中的静电场基本方程⁶、电介质中的静电场基本方程⁷

静电场 (自由空间)	静电场 (电介质)	恒定电流场 (导电媒质)
$\mathbf{J} = \mathbf{0}$	$\mathbf{J} = \mathbf{0}$	$\rho = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$	$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$
-	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$

⁵若为运流电流，有 $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ ，涉及 ρ, \mathbf{J} 与移动坐标的概念，此处暂不讨论。

⁶(3-1-20)、(3-1-21)

⁷(3-3-19) 至 (3-3-21)

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

媒质分界面条件

由于在导电媒质内的基本方程与先前稍有不同，以下总结不同媒质，其分界面要满足的分界面条件：

定理：恒定电流经过媒质分界面时的边界条件

由 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 有 $E_{1t} = E_{2t}$ 或 $\varphi_1 = \varphi_2$

由 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 有 $J_{1n} = J_{2n}$ 或 $\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$

如果涉及导电媒质与电介质分界面，分界面上可能积累自由(面)电荷。电场描述应通过 \mathbf{D} , 有 $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$ 或 $\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_f$

性质：媒质分界面电流线折射定律

若导电媒质为各向同性，无论媒质是否为(非)线性或(不)均匀，有 $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ (见图例 4-2-1)

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

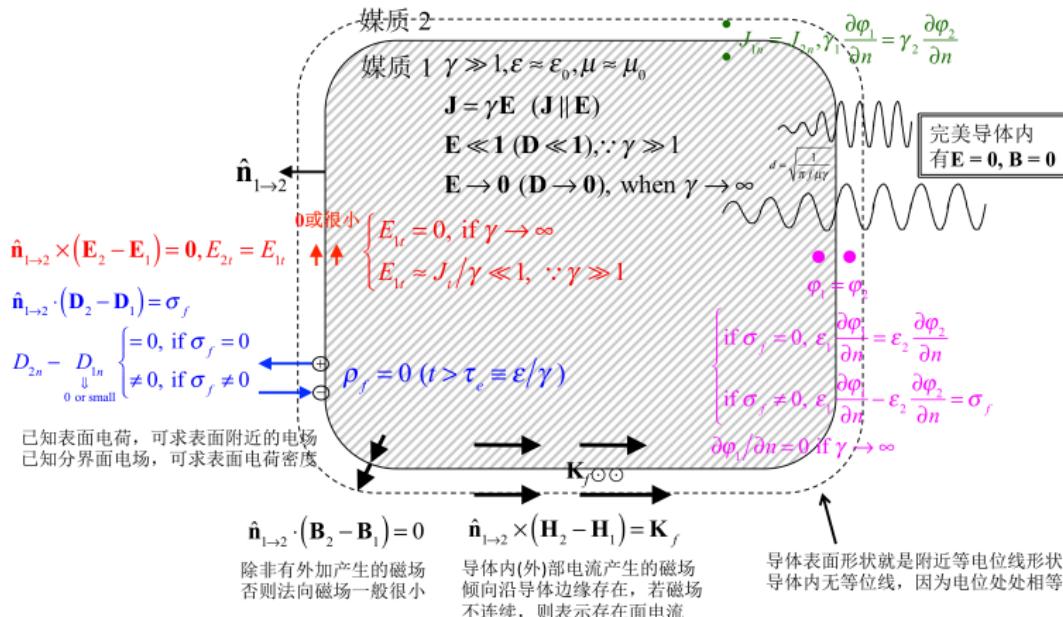
4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

导电媒质（金属导体、电极）分界面特性



4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

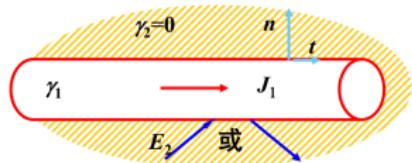
4.4 电导与电阻

例题 & 练习

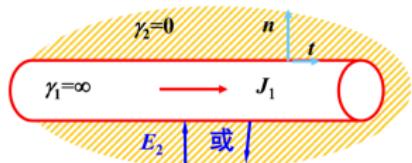
作业

导电媒质与电介质分界面电场比较⁸

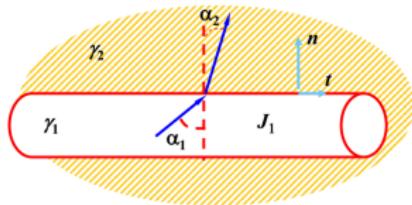
在静电场中，导体表面为等位面。一般情况在恒定电流形成的电场中，导体表面不是等位面，导体内也不是等位体。



$$\mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_2} \hat{\mathbf{n}} + \frac{J_1}{\gamma_1} \hat{\mathbf{t}}$$



$$\mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_2} \hat{\mathbf{n}}$$



$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \text{ with } \alpha_1 \gg \alpha_2$$

⁸图例取自叶齐正上课 ppt。

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

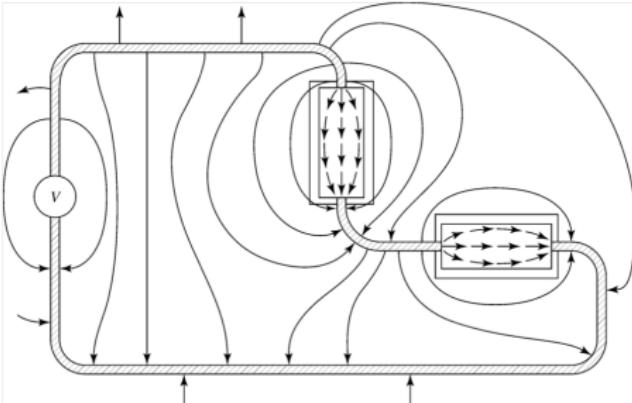
分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业



电路中导线外的电场分布⁹。电阻两端加电压，把带电粒子挤压到电阻另一侧。如果电阻为线性，则电压加倍，电流加倍（欧姆定律）。注意，有些电场跑到电阻元件的外面，为传递能量（在电阻内的就以热形式而消耗）。导线外侧附近的电场几乎垂直导线表面，一点点平行分量用来推动带有一点点电阻的导线内的电子。导线本身电阻大约在 $m\Omega$ 量级。电路接通¹⁰后，电流就开始寻找流动路径¹¹。

⁹ 图例取自 R. Morrison, The fields of electronics, John Wiley & Sons.

¹⁰ 人决定。

¹¹ 自然规律决定。

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

导电媒质的恒定电场 vs. 电介质的静电场

静电比拟: 相同的数学方程形式 \oplus 相同的边界条件形式
 唯一性定理 \Rightarrow 相同形式的对应物理量。

性质

表 4-3-1: 恒定电场与静电场基本方程、分界面条件与对应物理量的比较。

性质

考虑导电媒质与电介质为分片均匀, 且两者边界几何形状相同, 若满足

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

则两种场在分界面处的折射情况完全一致, 且相似关系成立 (图例 4-3-1)。

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

计算导电媒质的电阻/电导基本步骤

定义电导 (conductance, G) 为电阻的倒数。电导的引入是基于静电比拟的结果。计算电阻/电导的基本步骤如下：

1. 给定电流 $I \Rightarrow \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{E} \Rightarrow U \Rightarrow R, G$
2. 给定电压差 $U \Rightarrow \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{J} \Rightarrow I \Rightarrow R, G$

由前面的静电比拟知，电导与电容也具有比拟关系

$$C = Q/U = \iint_A \mathbf{D} \cdot d\mathcal{S} / \int_C \mathbf{E} \cdot d\ell = \iint_A \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathcal{S} / \int_C \mathbf{E} \cdot d\ell$$

$$G = I/U = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathcal{S} / \int_C \mathbf{E} \cdot d\ell = \iint_A \gamma \mathbf{E} \cdot d\mathcal{S} / \int_C \mathbf{E} \cdot d\ell$$

考虑导电媒质与电介质两者结构与边界几何形状相同，有

$$\frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\gamma}$$

常见元件的电阻

以下列出一些常见元件的电阻：

- 平行板 (导体板面积 A , 板间距 d , 两板间填充材料的电导率 γ , 忽略边缘场) $\Rightarrow R = \frac{d}{\gamma A}$
- 同心导体球壳 (内径 a , 外径 b , 球壳间填充材料的电导率 γ) $\Rightarrow R = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$
- 无限长同轴导体圆柱 (内径 a , 外径 b , 圆柱间填充材料的电导率 γ) \Rightarrow 单位长度电阻 $R = \frac{1}{2\pi\gamma} \ln \frac{b}{a}$

定理：电阻串联、并联的等效电阻

- 并联 (I 相加、 V 相等) $\Rightarrow R_{\text{tot}}^{-1} = \sum_{k=1}^N R_k^{-1}$
- 串联 (I 相等、 V 相加) $\Rightarrow R_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^N R_k$

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

多导电媒质系统电导

类似于多导体静电系统引入“部分电容”，多导电媒质恒定电流系统也可以引入“部分电导”。假设媒质空间内，存在多个电极构成的多电极系统，有 $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ 。设任意两电极间电压为 U_{ij} ，则导体带电流量可写成（以 $n = 3$ 为例）

$$I_1 = G_{10} U_{10} + G_{12} U_{12} + G_{13} U_{13}$$

$$I_2 = G_{21} U_{21} + G_{20} U_{20} + G_{23} U_{23}$$

$$I_3 = G_{31} U_{31} + G_{32} U_{32} + G_{30} U_{30}$$

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

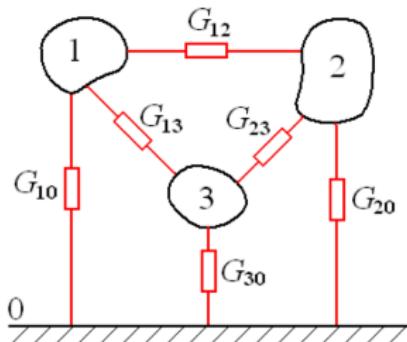
定义：自有部分电导、互有部分电导

- 系数 $G_{i0} \geq 0$ 称自有部分电导 (self conductance)
- 系数 $G_{ij} \equiv q_i / U_{ij} \Big|_{U_{ik}(k \neq j)=0} (j \neq i, j \neq 0)$ 称互有部分电导 (mutual conductance)

多导电媒质系统电导

说明

- 部分电导 G_{ij} 是整个系统共同作用的结果，并不等于某电极 i 与 j 单独存在时的电导。 G_{ij} 与所有电极几何形状、尺寸、相互位置、数量、空间 γ 有关，与各自带电状况、连接方式无关。
- 部分电导 G_{ij} 计算图例见图 4-4-3



- 4.1 恒定电流和电源
 4.2 恒定电场基本方程
 分界面上的边界条件
 4.3 静电比拟
 4.4 电导与电阻
 例题 & 练习
 作业

接地电阻

工程中将电气设备的某部分和大地 (earth) 连接，称为接地¹²(ground)。埋入地中直接与大地接触的金属导体，称为接地体。连接接地体与电气设备称接地线。接地电阻是电流由接地线流入接地体，再流入大地，然后经大地流到其它接地体 (或向远处扩散) 时遭遇的电阻。接地是一种常见的安全措施，符合规定的接地电阻是保证安全的重要条件。

说明

接地电阻的贡献有三：接地线与接地体本身的电阻、接地体与大地的接触电阻 \ll 两两接地体间的土壤电阻。故，计算接地电阻通常为计算接地体间的电阻。有时为了计算方便，假设另一个接地体在无限远处。

一般工程实际中，接地电阻是规定的数值，可以通过设计合适的接地体，或改变/提高土壤的电导率 (一般 $\gamma \approx 10^{-2}$ S/m) 达到规定的目标。

¹² 接地为一概念，未必一定与大地接触，与大地连接又称 earthed。作为接地面或参考面要求：1) 零电位，2) 有足够多的正负电荷自由分布。

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

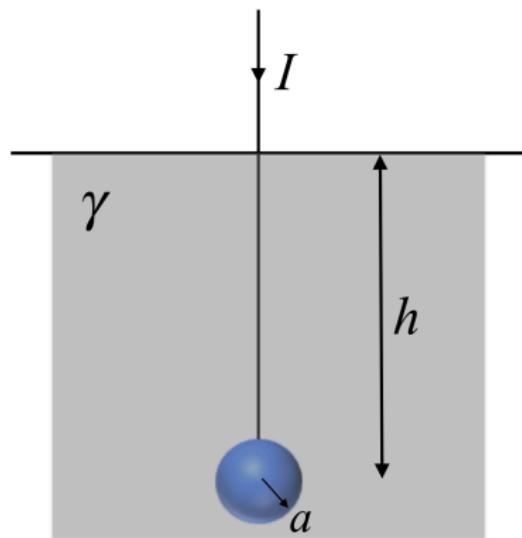
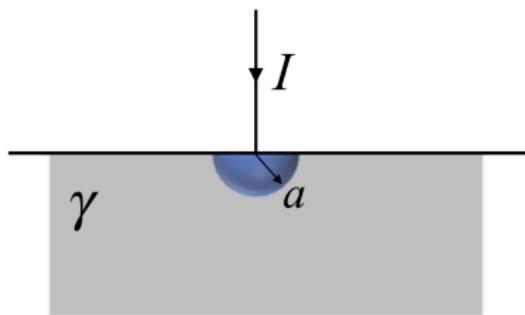
4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

接地电阻: 球状 (§4.4.3)

假设 $U_\infty = 0$, 接地球电位与电阻有 (深埋 $\Rightarrow h \rightarrow \infty$)



$$U = \frac{2I}{4\pi\gamma a}$$

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma a}$$

$$U = \frac{I}{4\pi\gamma a} + \frac{I}{4\pi\gamma 2h}$$

$$R = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2h} \right)$$

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

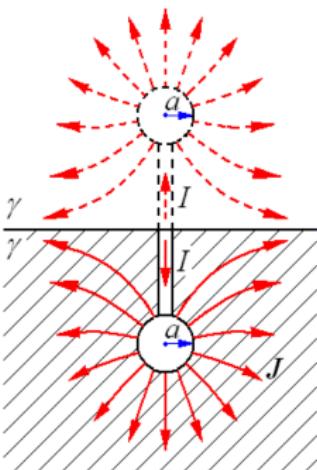
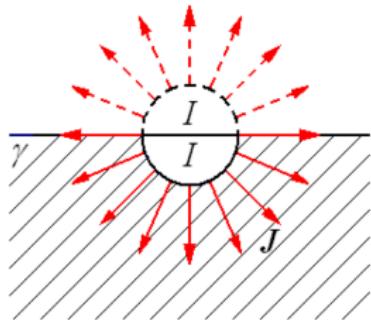
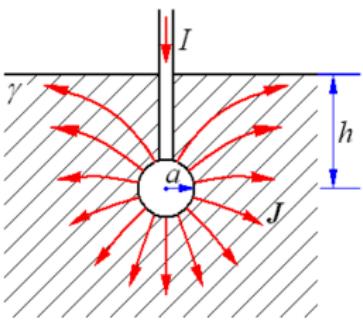
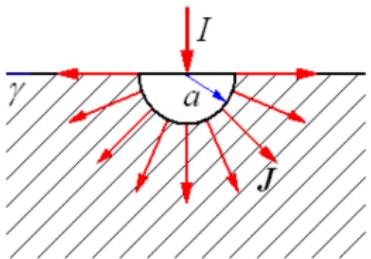
4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

接地电阻: 球状



4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

接地电阻: 各种几何形状的计算公式 ♠

The following formula (source: IEEE Std.142:1991) enable the resistance to ground to be calculated.

	Hemisphere, radius a	$R = \frac{\rho}{2\pi a}$
*	One ground rod, length L, radius a	$R = \frac{\rho}{2\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} - 1 \right)$
**	Two ground rods, s > L, spacing s	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} - 1 \right) + \frac{\rho}{4\pi s} \left(1 - \frac{L^2}{3s^2} + \frac{2L^4}{5s^4} \dots \right)$
***	Two ground rods, S < L, spacing s	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} + \ln \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$
-	Buried horizontal wire, length 2L, depth s/2	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} + \ln \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$
L	Right angle turn of wire, length of arm L, depth s/2	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} - 0.2373 + 0.2146 \frac{s}{L} + 0.1035 \frac{s^2}{L^2} - 0.0424 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
K	Three point star, length of arm K, depth s/2	$R = \frac{\rho}{6\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} + 1.071 - 0.209 \frac{s}{L} + 0.238 \frac{s^2}{L^2} - 0.054 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
L	Four point star, length of arm L, depth s/2	$R = \frac{\rho}{8\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} + 2.912 - 1.071 \frac{s}{L} + 0.645 \frac{s^2}{L^2} - 0.145 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
S	Six point star, length of arm L, depth s/2	$R = \frac{\rho}{12\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} + 6.851 - 3.128 \frac{s}{L} + 1.758 \frac{s^2}{L^2} - 0.490 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
E	Eight point star, length of arm L, depth s/2	$R = \frac{\rho}{16\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} + 10.98 - 5.51 \frac{s}{L} + 3.26 \frac{s^2}{L^2} - 1.17 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
O	Ring of wire, diameter of ring D, diameter of wire d, depth s/2	$R = \frac{\rho}{2\pi^2 D} \left(\ln \frac{8D}{d} + \ln \frac{4D}{s} \right)$
-	Buried horizontal strip, length 2L, section a by b, depth s/2, B < a/8	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} + \frac{a^2 - \pi ab}{2(a+b)^2} + \ln \frac{4L}{s} - 1 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$
	Buried horizontal round plate, radius a, depth s/2	$R = \frac{\rho}{8a} + \frac{\rho}{4\pi s} \left(1 - \frac{7}{12} \frac{a^2}{s^2} + \frac{33}{40} \frac{a^4}{s^4} \dots \right)$
	Buried vertical round plate, radius a, depth s/2	$R = \frac{\rho}{8a} + \frac{\rho}{4\pi s} \left(1 - \frac{7}{24} \frac{a^2}{s^2} + \frac{99}{320} \frac{a^4}{s^4} \dots \right)$

Where:

R - resistance in Ω

ρ - resistivity in $\Omega \cdot \text{cm}$

d - distances - in cm

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

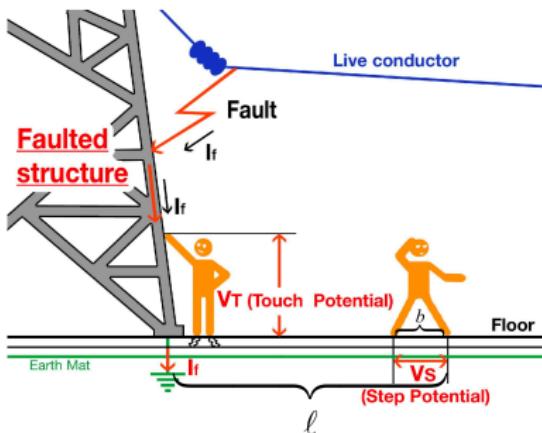
4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

跨步电压 (step potential) V_s

在接地体附近，电压并不是立刻降为 0。沿地面附近扩散的电流形成的地面电场，在行人跨步之间会形成电压，称为跨步电压¹³。一般规定跨步电压的上限，即临界电压，为 50~70 V。跨步电压超过安全值将引起触电危险¹⁴。



$$U = \frac{I_f}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{\ell - b} - \frac{1}{\ell} \right) \approx \frac{I_f b}{2\pi\gamma \ell^2} = V_s \Rightarrow \ell \approx \sqrt{\frac{I_f b}{2\pi\gamma V_s}}$$

¹³<https://www.electrical4u.net/electrical/what-is-step-potential-and-touch-potential-and-calculation/>

¹⁴事实上，危及生命的不是电压，而是电流，~mA 就可能危及生命安全。人体电阻大约在 50 kΩ ~ 100 kΩ 间。

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

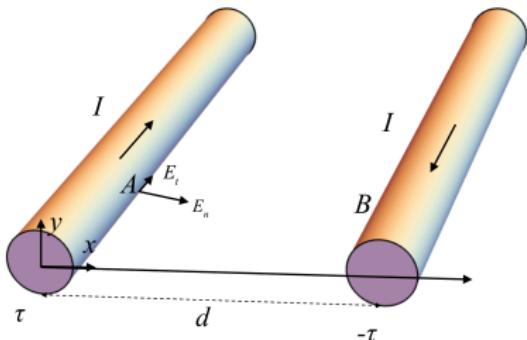
4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

例题 1: 平行输电线间的电特性 (例 4.2.1)

如右图, 截面半径 $a = 7 \text{ mm}$ (截面积 $S = 150 \text{ mm}^2$) 的铜质 ($\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$) 双输电线, 导体间 $U = 100 \text{ V}$, 通过导体的电流 $I = 300 \text{ A}$, 求导体内与表面的电场强度。



▷ 流经导线的电流场平行于线轴, 利用欧姆定律, 导体内与表面切向电场有 $E_t = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S} = 0.035 \text{ V/m}$ 。由于 γ 很大, 除非导线非常长, 否则沿导线的电位差可以忽略不计。欲求导线表面法向电场, 可以按照静电场分析。假设输电线上的线电荷密度 $\pm\tau$, 两平行输电线间的电场有

$$E_n = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} \right)$$

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

例题 1: (续)

题目给定 U , 关联 τ 与 U 可以通过计算平行输电线间的电压得到

$$U = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d-a} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a}$$

因此, 有 $E_n = \frac{U}{2 \ln \frac{d-a}{a}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} \right) = 1700 \text{ V/m}$ 。由此可知,
 $E_n \gg E_t$ 。

◀ 返回

★ 利用 $C/G = \epsilon/\gamma$, 求平行输电线间单位长度的电容与电阻 (假设 $d \gg a$)。

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}$$

$$R = \frac{\epsilon_0}{\gamma C} = \frac{\ln \frac{d}{a}}{\pi\gamma}$$

★ 利用 $LC = \epsilon\mu_0$, 求平行输电线间单位长度的电感 (例 5.5.2)。

4.1 恒定电流和电
源

4.2 恒定电场基本
方程

分界面上的边界条
件

4.3 静电比拟

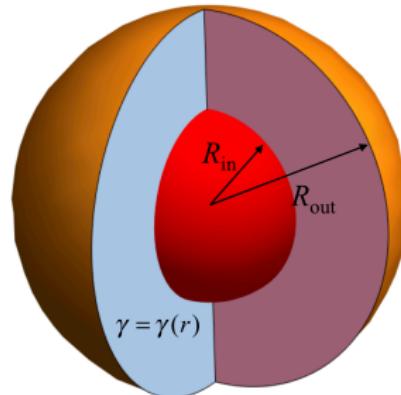
4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

例题 2: 同心薄球壳间的电特性

两同心薄球壳，内外球半径分别为 $R_{\text{in}}, R_{\text{out}}$ ，求其间电阻、 \mathbf{E}, \mathbf{J} 与电阻消耗的功率。
考虑其间充满电导率 γ 的导电媒质有 γ_0 为常数、
 $\gamma = \gamma_0(1 - \frac{k}{r})$ ($k \in \mathbb{R}$ 为常数)
两种情况。



球壳间的电流密度可以写成

$$\mathbf{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r = \gamma(r) \mathbf{E}(r)$$

球壳间的电压则为 (设 U_0 已知)

$$\Delta U = U_0 = \int_{R_{\text{in}}}^{R_{\text{out}}} \mathbf{E}(r) \cdot d\ell = \begin{cases} \frac{I}{4\pi\gamma_0} \left(\frac{1}{R_{\text{in}}} - \frac{1}{R_{\text{out}}} \right), & k = 0 \\ \frac{I}{4\pi\gamma_0 k} \ln \frac{R_{\text{in}} (R_{\text{out}} - k)}{R_{\text{out}} (R_{\text{in}} - k)} & \end{cases}$$

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

例题 2: (续)

对于 γ 为常数的情况, 电流密度与电场可以写成

$$\mathbf{J}(r) = \frac{\gamma U_0}{r^2} \left(\frac{1}{R_{\text{in}}} - \frac{1}{R_{\text{out}}} \right)^{-1} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E}(r) = \frac{U_0}{r^2} \left(\frac{1}{R_{\text{in}}} - \frac{1}{R_{\text{out}}} \right)^{-1} \mathbf{e}_r$$

电流流经电阻消耗的功率有

$$P = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{4\pi\gamma_0 U_0^2}{\left(\frac{1}{R_{\text{in}}} - \frac{1}{R_{\text{out}}} \right)} = \frac{U_0^2}{R}$$

电阻或电导可以通过 $R = \frac{\Delta U}{I}$, $G = \frac{I}{\Delta U}$ 求得。 [◀ 返回](#)

★ 若电导率为 $\gamma = kE$ (k 为常数), 内外球壳电位差为 $\Delta U = \sqrt{\frac{I}{4\pi k}} \ln \frac{R_{\text{out}}}{R_{\text{in}}}$ 。

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

例题 3: 弧形导电片的电特性

如右图, 考虑以下两种连接方式的电特性:

1. A、B 面有外加电压

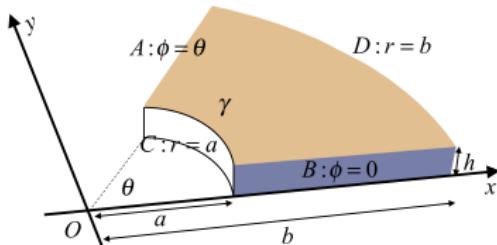
$$\varphi_A = U, \varphi_B = 0 \text{ (例 4.4.2)}$$

2. C、D 面有外加电压

$$\varphi_C = U, \varphi_D = 0$$

在圆柱坐标下列出拉普拉斯方程与对应的边界条件, 有

$$\begin{cases} 1. \nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow \varphi = C_1 \phi + C_2 = \frac{U}{\theta} \phi \\ 2. \nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = 0 \Rightarrow \varphi = C_1 \ln \rho + C_2 = \frac{U}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{\rho}{b} \end{cases}$$



4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

例题 3: (续)

电场强度可以由 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 求得。电流密度则有

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{\gamma U}{\rho\theta} \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\gamma U}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \end{cases} \Rightarrow I = \iint_{\perp} \mathbf{J} \cdot d\mathcal{S} = \begin{cases} \frac{\gamma Uh}{\theta} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{\gamma Uh}{\ln \frac{b}{a}} \int_0^\theta d\phi \end{cases}$$

导电弧片的电导

$$G = \frac{I}{U} = \begin{cases} \frac{\gamma h}{\theta} \ln \frac{b}{a} \\ \frac{\gamma h \theta}{\ln \frac{b}{a}} \end{cases}$$

◀ 返回

★ 考虑如果弧形导电片是由两种导电媒质 γ_1, γ_2 组成，分为沿径向 (r) 与方向角 (ϕ) 组成方式，分析其间的电特性。

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

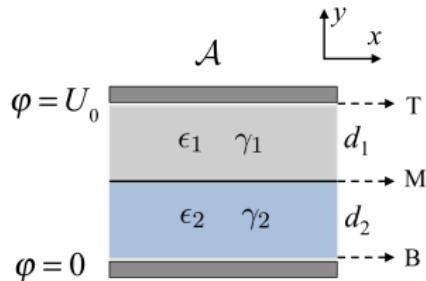
例题 & 练习

作业

例题 4: 填充电介质/导电媒质的平行板电容器

如右图之平板电容器, 试分析:

1. 电极间的电阻 R 、电容 C
2. 两层电介质内的 $\mathbf{E}, \mathbf{J}, \mathbf{D}, \mathbf{P}$
3. 三个界面 (T, M, B) 上的自由面电荷 σ_f 与极化电荷 σ_P



▷ 等效电阻为各层电阻的串联, 有

$$R = R_1 + R_2 = \frac{d_1}{\gamma_1 \mathcal{A}} + \frac{d_2}{\gamma_2 \mathcal{A}}。电容则有$$

$$C = (C_1^{-1} + C_2^{-1})^{-1} = \left(\frac{\epsilon_1 \mathcal{A}}{d_1} + \frac{\epsilon_2 \mathcal{A}}{d_2} \right)^{-1}。$$

流经导电媒质 1,2 的电流相同, 可以写成

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0 \mathcal{A}}{\left(\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} \right)} = J \mathcal{A}, \quad J_1 = J_2 = J, \quad \mathbf{J} = J(-\mathbf{e}_y)$$

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

例题 4: (续)

其它相关物理量可以通过以下关系求得

$$\mathbf{E}_{1,2} = \frac{\mathbf{J}}{\gamma_{1,2}}, \quad \mathbf{D}_{1,2} = \epsilon_{1,2} \mathbf{E}_{1,2}, \quad \mathbf{P}_{1,2} = (\epsilon_{1,2} - \epsilon_0) \mathbf{E}_{1,2}$$

各层间的自由面电荷与极化面电荷有

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{f,T} = \mathbf{D}_1 \cdot (-\mathbf{e}_y) \\ \sigma_{P,T} = \mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1 \\ \sigma_{f,M} = \mathbf{D}_1 \cdot (+\mathbf{e}_y) + \mathbf{D}_2 \cdot (-\mathbf{e}_y) = \left(\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\epsilon_2}{\gamma_2} \right) \mathbf{J} \cdot (+\mathbf{e}_y) \\ \sigma_{P,M} = \mathbf{P}_1 \cdot (-\mathbf{e}_y) + \mathbf{P}_2 \cdot (+\mathbf{e}_y) \\ \sigma_{f,B} = \mathbf{D}_2 \cdot (+\mathbf{e}_y) \\ \sigma_{P,B} = \mathbf{P}_1 \cdot (-\mathbf{e}_y) \end{array} \right.$$

★ 考虑平板电容器极板间的电介质/导电媒质横向填充的情况，求解相关物理量。

4.1 恒定电流和电
源

4.2 恒定电场基本
方程

分界面上的边界条
件

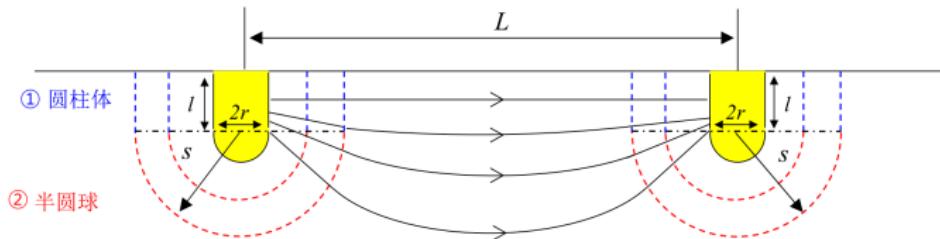
4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

例题 5: 求双导体圆柱电极接地电阻



等位面方程有 $A(s) = 2\pi s\ell + 2\pi s^2$

$$\Delta U = 2 \times I \int_r^{L-r} \frac{ds}{\gamma A(s)} = \frac{I}{\pi \gamma \ell} \left[\ln \left(1 + \frac{\ell}{r} \right) - \ln \left(1 + \frac{\ell}{L-r} \right) \right]$$

注意, 2是由于接地零位面选为大地。故,

$$R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{1}{\pi \gamma \ell} \left[\ln \left(1 + \frac{\ell}{r} \right) - \ln \left(1 + \frac{\ell}{L-r} \right) \right]$$

试求习题 4.7, 为电极仅由两个半球体组成的简化情况。比较以上结果, 考虑 $\lim_{\ell \rightarrow 0} R$ 的极限情况¹⁵。

¹⁵利用微积分学过的结果, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \equiv e_0$

4.1 恒定电流和电源

4.2 恒定电场基本方程

分界面上的边界条件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业

作业

- 4.2, 4.3
- 4.4, 4.5

4.1 恒定电流和电
源

4.2 恒定电场基本
方程

分界面上的边界条
件

4.3 静电比拟

4.4 电导与电阻

例题 & 练习

作业