

电磁辐射与加速器束流动力学导论

Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第五部分

附录

附录 A 杨振宁先生对加速器领域的看法

这篇短文发表在 2019 年 *Reviews of Accelerator Science and Technology* (RAST) 年刊。该刊主题为“加速器的未来”(The Future of Accelerators)，综述并展望了未来各种加速器的可能发展。作为该刊的第一篇，杨振宁先生以一篇短文给出对粒子加速器领域的看法。作为分享，以下我按原文大致翻译内容，不是逐字翻译，但希望不会偏离本意太远。原文可以参考 [1]。

加速器与我

1952 至 1953 年间，Courant, Livingston, Snyder 与 Blewett 等人发表了关于强聚焦原理的(现在看来为经典)著名论文 [2-5]。我当时为他们提出的方案着迷并尝试进入这个研究领域。很快地，我的注意力集中在 KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 理论，一个关于研究哈密顿动力学系统的理论。这是一个艰深、有趣但困难的题目。当时我的努力没有得到什么成果，因此我曾认为这只是我一时兴起的事，但也令我对粒子加速器的设计产生了毕生的敬意。当然，也让我建议后来找我指导的研究生加入这个研究领域。他们其中几个听从我的建议，做出了很好的工作，也成为许多国际加速器设计社群的重要成员。现在看来，因为给了他们这些具有洞见的建议而邀功应该不为过。

粒子加速器因为 1930 年代早期，罗伦斯 (Ernest Orlando Lawrence) 发明回旋加速器 (cyclotron) 而开始变得重要起来。一开始只是为了核物理研究，后来各种绝妙的加速器设计开始发展起来，不仅用到了各个科研领域，也在医学、军事、工业领域得到应用。显然，在未来几年，加速器的重要性与应用性只会增加。

与此同时，加速器的研究仍然保持具有智力上启发性与不断成果产出的研究领域。最终而言，从四种基本的相互作用来看，电磁作用 (electromagnetism) 是目前为止人类理解的最透彻的一个；人们已经能够利用对它的理解而大大地改善生活。我个人相信，如果没有超越，那么寻找对既有的电磁作用机制的更多有效、正面的应用将在这个世纪持续推进。

参考文献

- [1] Chen Ning Yang, Accelerators and I, Reviews of Accelerator Science and Technology vol. 10, 1 (2019). <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S1793626819300019>
- [2] Ernest D. Courant, M. Stanley Livingston, and Hartland S. Snyder, The Strong-Focusing Synchrotron—A New High Energy Accelerator, Phys. Rev. **88**, 1190 (1952). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.88.1190>
- [3] J.P. Blewett, Radial Focusing in the Linear Accelerator, Phys. Rev. **88**, 1197 (1952). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.88.1197>
- [4] E.D. Courant and H.S. Snyder, Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron, Annals of Physics **281**, 360408 (2000). <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0003491658900125>. 这是作者们在 1953 年论文的基础上修改、完善后，当时为实验室内部报告，后来在 2000 年由 Annals of Physics 重印发表。
- [5] E.D. Courant, M.S. Livingston, H.S. Snyder, and J.P. Blewett, Origin of the “Strong-Focusing” Principle, Phys. Rev. **91**, 202 (1953). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.91.202.2>. 四位作者在这篇简短声明指出，在更早之前，强聚焦原理的想法已经由 Nicholas Christofilos 点出。

附录 B 数学基础

内容提要

- 三种正交坐标系的向量微积分与坐标变换
- 常用向量恒等式、微分运算、相关定理等
- 偏微分、全微分、对流导数
- δ 函数、留数定理、常用积分公式、三角函数恒等式、双曲函数恒等式
- 其它恒等式、特殊函数、近似展开公式、级数求和公式
- 几种常见分布函数的定义
- 矩阵特征分解的实用特性
- 归一化完备基底函数展开特性
- 一元代数方程的一般解公式:二次、三次、四次
- 时间平均定理
- 矩阵指数
- 二阶偏微分方程的分类

作为附录的一章，这里总结此讲义中可能用到的高等数学基础，包含正交坐标系、向量微积分、一些定理结果与常用公式等。

B.1 三种正交坐标系的向量微积分与坐标变换

性质 B.1. 直角坐标位置与微分元

如下图 B.1。在直角坐标系中，任意从原点出发的向量 \mathbf{A} (或 \vec{A} 或 \vec{A}) 与其长度 A 可以写成

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \\ A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\end{aligned}$$

此外，在直角坐标系中描述微小长度、面积与体积的表示式为

$$\text{长度微分元 } d\ell = (dx) \mathbf{e}_x + (dy) \mathbf{e}_y + (dz) \mathbf{e}_z$$

$$\text{面积微分元 } d\mathbf{S} = (dydz) \mathbf{e}_x + (dxdz) \mathbf{e}_y + (dxdy) \mathbf{e}_z$$

$$\text{体积微分元 } dV = dx dy dz$$

注 有时 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 也写成 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 。

性质 B.2. 圆柱坐标位置与微分元

如下图 B.2。在圆柱坐标系中，任意从原点出发的向量 \mathbf{A} (或 \vec{A} 或 \vec{A}) 与其长度 A 可以写成

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z \\ A &= \sqrt{A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2}\end{aligned}$$

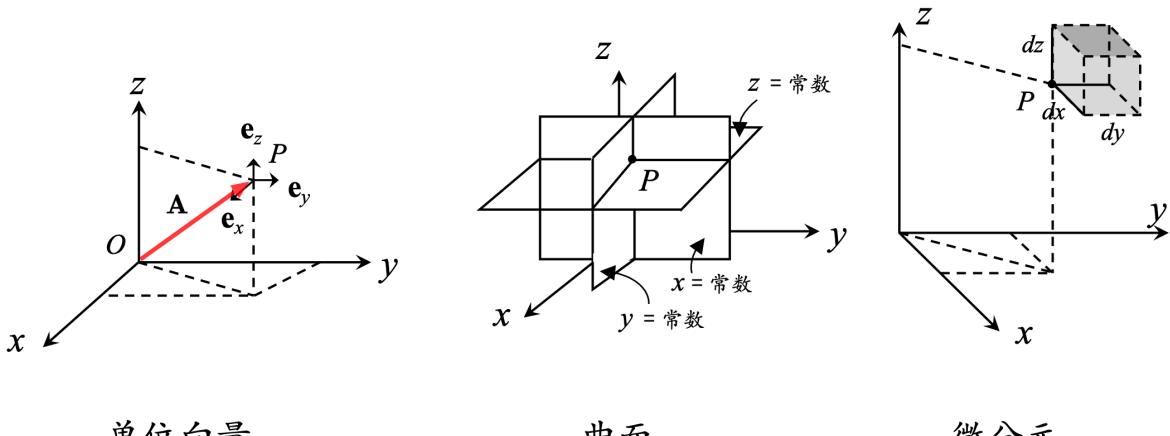


图 B.1: 直角坐标系。

此外，在圆柱坐标系中描述微小长度、面积与体积的表示式为

$$\text{长度微分元 } d\ell = (d\rho) \mathbf{e}_\rho + (\rho d\phi) \mathbf{e}_\phi + (dz) \mathbf{e}_z$$

$$\text{面积微分元 } d\mathbf{S} = (\rho d\phi dz) \mathbf{e}_\rho + (d\rho dz) \mathbf{e}_\phi + (\rho d\rho d\phi) \mathbf{e}_z$$

$$\text{体积微分元 } dV = \rho d\rho d\phi dz$$

注 有时 $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ 也写成 $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$ 。

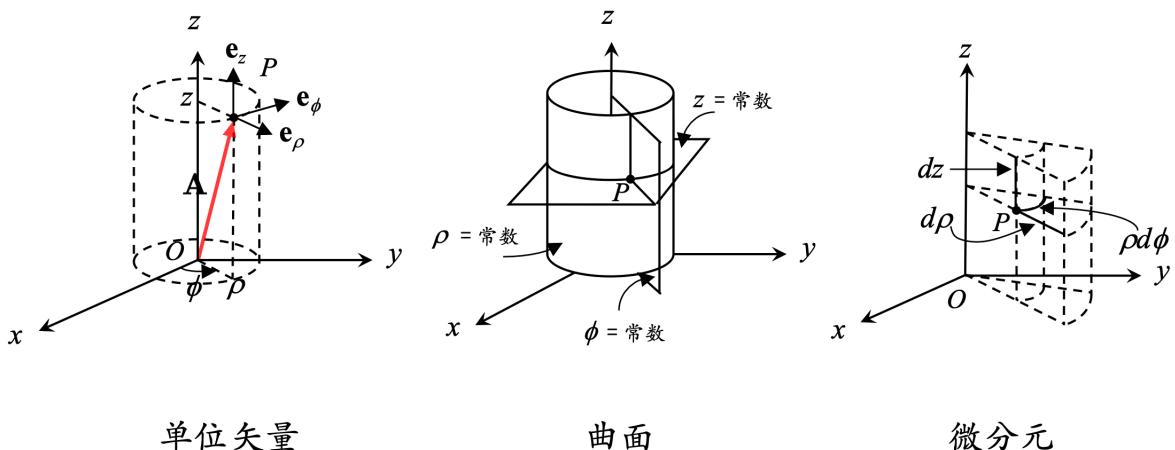


图 B.2: 圆柱坐标系。

性质 B.3. 球坐标位置与微分元

如下图 B.3。在球坐标系中，任意从原点出发的向量 \mathbf{A} (或 \vec{A} 或 \vec{A}) 与其长度 A 可以写成

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\phi \mathbf{e}_\phi$$

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2}$$

此外，在球坐标系中描述微小长度、面积与体积的表示式为

$$\text{长度微分元 } d\ell = (dr) \mathbf{e}_r + (rd\theta) \mathbf{e}_\theta + (r \sin \theta d\phi) \mathbf{e}_\phi$$

$$\text{面积微分元 } d\mathbf{S} = (r^2 \sin \theta d\theta d\phi) \mathbf{e}_r + (r \sin \theta dr d\phi) \mathbf{e}_\theta + (r dr d\theta) \mathbf{e}_\phi$$

$$\text{体积微分元 } dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \text{ 立体角 } d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi.$$

注 有时 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ 也写成 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ 。

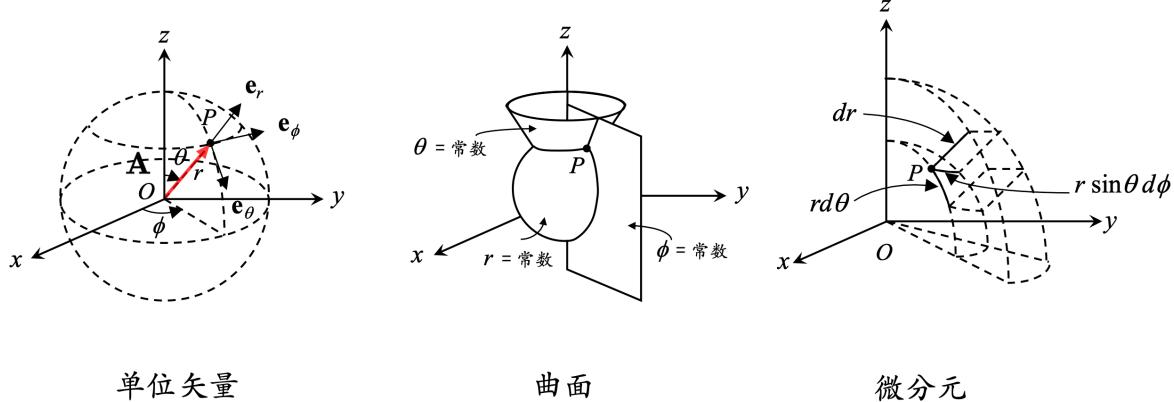


图 B.3: 球坐标系。

	直角坐标系	圆柱坐标系	球坐标系
直角坐标系	$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
圆柱坐标系	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi \\ \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = r \sin \theta \\ \phi = \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
球坐标系	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_z \cos \theta \\ \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \phi + \mathbf{e}_y \cos \theta \sin \phi - \mathbf{e}_z \sin \theta \\ \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\rho}{z} \\ \phi = \phi \end{cases}$

关于不同坐标间微分量的变换，有

$$\begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\phi \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ r \sin\theta d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

方向向量的微分关系，有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_\phi \\ 0 & -\mathbf{e}_\rho \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_\theta & \sin\theta \mathbf{e}_\phi \\ 0 & -\mathbf{e}_r & \cos\theta \mathbf{e}_\phi \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix}$$



笔记 在加速器理论中，对粒子动力学问题分析，一般在直角坐标系、圆柱坐标系，还有第6章介绍的Frenet-Serret坐标系中进行。对电磁辐射问题分析，则在圆柱坐标与球坐标的混合坐标系中进行。

B.2 常用向量恒等式、微分运算

假设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 为三维向量 (vector), u, v 为标量 (scalar), 以下总结常用向量恒等式:

1. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
2. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
3. $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
4. $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$
5. $\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = (\nabla u) \cdot \mathbf{A} + u(\nabla \cdot \mathbf{A})$
6. $\nabla \times (u\mathbf{A}) = (\nabla u) \times \mathbf{A} + u(\nabla \times \mathbf{A})$
7. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
8. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$
9. $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$
10. $\nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$
11. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
12. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

定理 B.1. 高斯散度定理 (Gauss divergence theorem)

对向量函数或向量场 \mathbf{A} , 穿过封闭曲面的通量, 等于向量场 \mathbf{A} 的散度在曲面围起来的体积上的积分。数学上写成

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

换句话说, 所有源点的和减去所有汇点的和, 就是流出这区域的净流量。

证明 参考高等数学教科书。

笔记 高斯散度定理可推广到任意维数。在一维, 它等价于分部积分法 (integration by parts)。

定理 B.2. 斯托克斯旋度定理 (Stokes curl theorem)

对向量函数或向量场 \mathbf{A} 的旋度的曲面积分, 即向量场在曲面边界上的封闭线积分。

数学上写成

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell$$

其中, 封闭曲线 C 绕行方向与平面区域 D 的方向按右手定则。

证明 参考高等数学教科书。

定理 B.3. 格林定理 (Green's theorem)

给出沿封闭曲线 C 的线积分与以 C 为边界的平面区域 D 上的双重积分的联系。数学上写成

$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (A dx + B dy)$$

其中，封闭曲线 C 绕行方向与平面区域 D 的方向按右手定则。

证明 参考高等数学教科书。 □

定理 B.4. Helmholtz 定理 (Helmholtz theorem)

又称 Helmholtz 分解。若一个向量场 \mathbf{F} 的散度和旋度仅在有限区域内不为零^a，则该向量场 \mathbf{F} 可由其散度和旋度 唯一 确定，且该向量场可写做

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r}) + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

其中，第一项 $-\nabla_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r})$ 称为 longitudinal or irrotational field，第二项 $\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ 称为 transverse or solenoidal field。

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

注意，上式中 $\nabla_{\mathbf{r}'}$ 通过适当调整，可以移到积分外。

注 Helmholtz 定理的重要应用：静电场 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 及 φ 的积分表示式，与磁场 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 及 \mathbf{A} 的积分表示式。

证明 参考高等数学教科书。

^a要求 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 与 $\nabla \times \mathbf{F}$ 衰减比 $1/r^2$ 快，或有 $1/r^{\lambda+2}$ ($\lambda > 0$) 的衰减。 □

- 直角坐标系 (x, y, z) 梯度、散度、旋度、和 Laplace 算子的展开式：

$$\begin{aligned}\nabla u &= \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

注 按加速器分析的坐标系惯例，此处的 z 应为纵向全域、路径坐标 s 。

- 柱面坐标系 (ρ, ϕ, z) 梯度、散度、旋度和 Laplace 算子的展开式：

$$\begin{aligned}\nabla u &= \mathbf{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \\ \nabla^2 u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{aligned}$$

注 按加速器分析的坐标系惯例，此处的 z 应为纵向全域、路径坐标 s 。

- 球坐标系 (r, θ, ϕ) 梯度、散度、旋度、和 Laplace 算子的展开式：

$$\begin{aligned}\nabla u &= \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \\ \nabla^2 u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

- Frenet-Serret 坐标系 (x, y, s) 梯度、散度、旋度、和 Laplace 算子的展开式：参考

§6.4.1

$$\begin{aligned}
d\ell^2 &= dx^2 + dy^2 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 ds^2 \\
\nabla\varphi &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{s}} \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}} \frac{\partial\varphi}{\partial s} \\
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}} \frac{\partial[(1 + \frac{x}{\rho}) A_x]}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}} \frac{\partial A_s}{\partial s} \\
(\nabla \times \mathbf{A})_x &= -\frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}} \frac{\partial A_y}{\partial s} + \frac{\partial A_s}{\partial y} \\
(\nabla \times \mathbf{A})_y &= -\frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}} \frac{\partial[(1 + \frac{x}{\rho}) A_s]}{\partial x} + \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}} \frac{\partial A_x}{\partial s} \\
(\nabla \times \mathbf{A})_s &= -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \\
\nabla^2\varphi &= \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}} \frac{\partial \left[\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right]}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}
\end{aligned}$$

- 上面给出最常见的向量运算，包含直角坐标、圆柱坐标、球坐标的 ∇u 、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 、 $\nabla \times \mathbf{A}$ 、 $\nabla^2 u$ 。向量与算符 ∇ 的其它运算还有以下几个在实际应用时可能遇到的情况，其基本形式有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \xi_3 \mathbf{e}_3$$

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} = \eta_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{e}_3$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \zeta_1 \mathbf{e}_1 + \zeta_2 \mathbf{e}_2 + \zeta_3 \mathbf{e}_3$$

以下分别给出在直角坐标、圆柱坐标与球坐标下的各个系数明显表示式。

在直角坐标系, $(1, 2, 3) \leftrightarrow (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z), (A_x, A_y, A_z)$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \\ \xi_2 &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \\ \xi_3 &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \\ \eta_1 &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \\ \eta_2 &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \\ \eta_3 &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \\ \zeta_1 &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \\ \zeta_2 &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \\ \zeta_3 &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z}\end{aligned}$$

在圆柱坐标系, $(1, 2, 3) \leftrightarrow (\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z), (A_\rho, A_\phi, A_z)$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \xi_2 &= \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \\ \xi_3 &= \nabla^2 A_z \\ \eta_1 &= \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \\ \eta_2 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi \partial z} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \\ \eta_3 &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi \partial z} + \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \\ \zeta_1 &= -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \zeta_2 &= -\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi \partial z} - \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} + \frac{A_\phi}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \phi \partial \rho} \\ \zeta_3 &= -\frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\end{aligned}$$

在球坐标系, $(1, 2, 3) \leftrightarrow (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi), (A_r, A_\theta, A_\phi)$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2\cot\theta}{r^2} A_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\ \xi_2 &= \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\ \xi_3 &= \nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin\theta} + \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi} \\ \eta_1 &= \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{A_\theta}{r^2 \tan\theta} + \frac{1}{r \tan\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi\partial r} - \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\ \eta_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{1}{r^2 \tan\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\ \eta_3 &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r\partial\phi} + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi\partial\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi^2} \\ \zeta_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r \tan\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \tan\theta} \frac{A_\theta}{r} - \frac{1}{r^2 \tan\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r\partial\phi} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\ \zeta_2 &= \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} \\ \zeta_3 &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2 \tan\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\theta} + \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta\partial\phi} \\ &\quad - \frac{\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\end{aligned}$$

- 位置向量 \mathbf{r} (或称距离向量) 是一个特殊向量, 在不同坐标系下可写成

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ &= \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z \\ &= r\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

以下总结几个常见的位置向量 \mathbf{r} 的微分运算:

$$\nabla r^n = nr^{n-1} \mathbf{e}_r$$

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r, \quad \nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{e}_R$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\nabla' R = -\mathbf{e}_R, \quad \text{其中, } R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$$\nabla' \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R$$

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{df}{dr} \mathbf{e}_r$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0}$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}, \quad \text{其中, } \mathbf{a} \text{为常向量}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = 4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \nabla \times \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} = \mathbf{0}$$

B.3 偏微分、全微分、对流导数、莱布尼兹法则、费曼积分技巧

在一空间中固定观察位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 考察一物理量 f 随时间演化或改变, 即 $\partial f / \partial t$, 其中, f 为一标量函数。当 $\partial f / \partial t = 0$ 时, f 随时间没有净改变, 称稳态。

当观察者沿着一预先给定的轨迹 $\mathbf{r}(t)$ 考察物理量 f 随时间演化或改变, 即 df/dt , 与 $\partial f / \partial t$ 有关, 可写成

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) f\end{aligned}$$

其中, df/dt 称对流导数 (convective derivative)。留意以上偏微分与全微分的区别。

当物理量为向量函数 \mathbf{g} 时, 对流导数与偏微分的关系有

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{g}$$

有时候一个被积分函数对一变量积分后, 再对另一变量微分。只有在被积分函数足够好 (well-behaved) 情况下, 两者可以调换次序。与之相关的还有一个定理, 称莱布尼兹法则。

定理 B.5. 莱布尼兹法则 (Leibniz Rule)

对标量函数, 有

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} b(x, t) dx = b(x_2, t) \frac{dx_2}{dt} - b(x_1, t) \frac{dx_1}{dt} + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial b}{\partial t} dx$$

对向量函数, 有

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S(t)} \left[\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S}$$

□

费曼积分技巧 在计算某些积分时, 可应用莱布尼兹法则: 考虑标量函数情况, 等式左边项的微分在积分外, 等式右边第三项的微分在积分内。当等式右边前两项可以求得或略去的情况下, 就能关联交换积分、微分顺序, 从而化简想计算的积分。对略去情况, 有

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} b(x, t) dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial b}{\partial t} dx$$

然后, 对此积分进行化简, 通常需要用到部分积分 (integration by parts, IBP) 定理, 就能“解”出 $I'(a)$, 接着再真的做一次积分, 得 $I(a)$ 。此思路又称费曼积分技巧 (Feynman's integration trick)¹。

¹在费曼教授的 *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* 一书中, 有一篇题为“不一样的工具箱”(A Different Box of Tools), 其中他提到拥有一个在许多微积分教科书中没有介绍的计算积分的技巧, 即是此法。根据费曼, 此法源于他看的一本 MIT 教授 Woods 所著的高等微积分。对此书感兴趣的读者, 可参考 Frederick S. Woods, *Advanced Calculus*。

一个经典的例子为 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 。作为积分公式，此结果也整理在后面积分中。针对此积分，第一步做法为定义一个类似的积分如下

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

所求为 $I(a = 0)$ 情况。利用莱布尼兹法则，将 $I(a)$ 对 a 微分一次后，通过两次 IBP，“解”得

$$\begin{aligned} I'(a) &= -1 + a \int_0^\infty \cos x e^{-ax} dx \\ &= -1 + a^2 \int_0^\infty \sin x e^{-ax} dx \\ &= -1 - a^2 I'(a) \\ \Rightarrow I'(a) &= -\frac{1}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

接着再真的做一次积分，得 $I(a)$ ，有

$$I(a) = \int^a \frac{da}{a^2 + 1} = -\tan^{-1} a + I_0$$

其中，当 $a \rightarrow +\infty$ 时，

$$I(a \rightarrow +\infty) = 0 = -\tan^{-1}(+\infty) + I_0 = -\frac{\pi}{2} + I_0$$

于是，积分常数 $I_0 = \pi/2$ 。所求积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = -\tan^{-1}(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

练习 B.1 试着用以前高等数学学过的复变函数积分，计算此积分。 ■

练习 B.2 试着用通过拉普拉斯变换计算此积分。 ■

练习 B.3 利用费曼积分技巧，计算如下积分

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

解 构造一个类似的积分如下

$$I(t) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{1 + (x/t)^2} dx$$

其中，最终希望求解的情况为 $I(t \rightarrow \infty)$ 。 ■

笔记 关于费曼积分技巧的更多讨论，可参考<https://zackyzz.github.io/feynman.html>。

笔记 在计算多重积分时，有时交换积分次序如果能简化积分，那么不妨试着这么做。我们虽不(能)像数学家那样追求极致严谨而要求给出积分收敛的证明，但可以在交换积分次序得到积分结果后，通过其它方式验证一下(如通过数值积分计算出一个近似结果)，确保结果不出太大问题。

B.4 δ 函数、留数定理、常用积分公式、三角函数恒等式、双曲函数恒等式

B.4.1 δ 函数

- 单位冲击函数 (unit impulse function) 为一广义函数，又称 δ 函数或 Dirac δ 函数²，定义为

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

- 为偶函数，几种常见的极限定义形式有

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2 + t^2)} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}} e^{-t^2/4\varepsilon} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta t^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nt}{\pi t}$$

$$\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left[\frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2 + t^2)} \right] = \dots$$

- δ 函数合成性质、导数

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|dg/dx|}, \quad \delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|} \quad (a \neq 0)$$

$$\delta(x) = -x\delta'(x)$$

²一个与 Dirac δ 函数很类似的、可视为离散的 Dirac δ 函数，称 Kronecker delta 函数，定义为

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{当 } m = n \\ 0 & \text{当 } m \neq n \end{cases}$$

- δ 函数一些相关积分

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx &= f(x_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\delta(x-b)dx &= \delta(a-b) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dt &= 2\pi\delta(\omega), \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz}dz = 2\pi\delta(k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}d\omega &= 2\pi\delta(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz}dk = 2\pi\delta(z) \\ \int_0^{\infty} e^{i\omega t}dt &= \frac{i}{\omega} + \pi\delta(\omega) \quad [\text{Im } \omega > 0] \\ \int_{-\infty}^0 e^{i\omega t}dt &= -\frac{i}{\omega} + \pi\delta(\omega) \quad [\text{Im } \omega < 0] \\ \int_0^{\infty} e^{-ikz}dz &= -\frac{i}{k} + \pi\delta(k) \quad [\text{Im } k < 0] \\ \int_{-\infty}^0 e^{-ikz}dz &= \frac{i}{k} + \pi\delta(k) \quad [\text{Im } k > 0] \\ \int_{-\infty}^{\infty} ke^{ikz}dk &= -i2\pi\delta'(z) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{k}dk &= \begin{cases} -2\pi i & (z < 0 \text{ 或要求上半平面内不能有极点}) \\ 2\pi i & (z > 0 \text{ 或要求下半平面内不能有极点}) \end{cases} \end{aligned}$$

注 对积分函数内，分母包含其它 k 形式的积分，可参考 §11.3.1。

- δ 函数的一些积分展开式

$$\begin{aligned} \delta(s-vt) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks-i\omega t}dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks-i\omega t} \frac{d\omega}{v}, \quad \text{其中, } \omega = kv \\ \delta\left(\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-(t-t')\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c-(t-t')]} \\ \int_0^{\infty} d\omega e^{i\omega[\tau(\zeta,\phi)-\tau(\zeta',\phi)]} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega[\tau(\zeta,\phi)-\tau(\zeta',\phi)]} \\ &= \pi\delta[\tau(\zeta,\phi)-\tau(\zeta',\phi)] \\ &= \frac{\pi\delta(\zeta-\zeta')}{|\dot{\tau}(\zeta,\phi)|}, \quad \text{其中, } \dot{\tau} = d\tau/d\zeta \end{aligned}$$

以贝塞尔函数展开，可写成

$$\delta(\rho-\rho') = \rho \int_0^{\infty} \mathcal{J}_n(k\rho) \mathcal{J}_n(k\rho') k dk, \quad \delta(k-k') = k \int_0^{\infty} \mathcal{J}_n(k\rho) \mathcal{J}_n(k'\rho) \rho d\rho$$

其中， \mathcal{J}_n 为第一类 n 阶贝塞尔函数。

- δ 函数的求和公式 — Poisson 求和公式 (Poisson sum formula)

定理 B.6. Poisson 求和公式 (Poisson sum formula)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx} = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi p), \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - m)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\Omega)T_0 k} = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \Omega - \frac{2\pi}{T_0} p\right)$$

证明 利用傅里叶变换定义。 □

- e^{ikz} 在有限区间内积分不再是 δ 函数，而与 sinc 函数相关

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k-k_0)z} dz = \frac{L}{2\pi} \frac{\sin[(k-k_0)\frac{L}{2}]}{(k-k_0)\frac{L}{2}} = \frac{L}{2\pi} \text{sinc}(x)$$

其中， $\pi x = (k - k_0)\frac{L}{2}$ 。归一化函数 sinc(x) 如图 B.4。

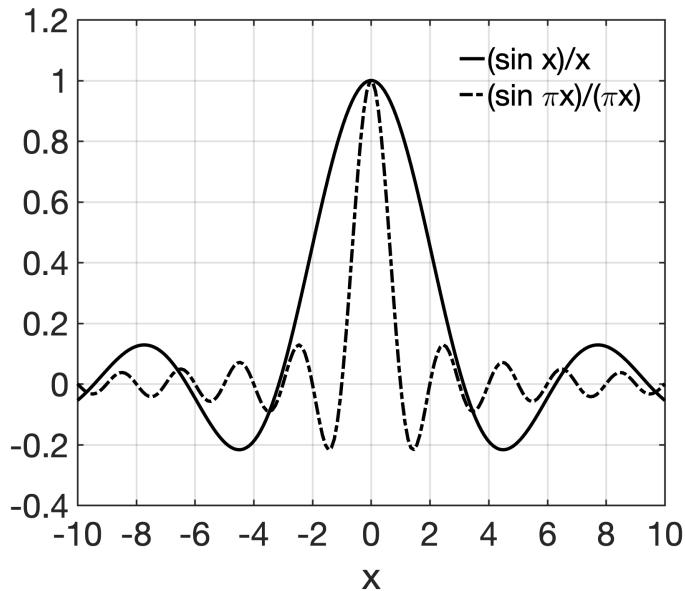


图 B.4: sinc(x) 函数。实线为未归一化 sinc(x) 函数，虚线称归一化 sinc(x) 函数。未归一化 sinc(x) 函数(实线)的根发生在 $k\pi, k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ ，归一化 sinc(x) 函数(虚线)的根发生在 $k, k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 。

一些 sinc(x) 函数特性总结如下：

性质 B.4. sinc(x) 函数特性

由于 sinc(x) 函数常用于时域、频域信号变换，且 $\omega = 2\pi f$ ，与归一化因子 π 有关，以下假设归一化 sinc(x) 函数，有

- 其一次微分有

$$\frac{d}{dx} \text{sinc}(x) = \text{sinc}' = \frac{\cos(x) - \text{sinc}(x)}{x}$$

- 其不定积分有

$$\int \text{sinc } x dx = \text{Si}(x) + C$$

其中， $\text{Si}(x)$ 称 sine integral。(定义见后)

- 其根发生在 $k\pi, k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 。

- 其傅里叶变换为矩形函数 (rectangular function)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) e^{-i2\pi f t} dt = \text{rect}(f)$$

其中，矩形函数定义为

$$\text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) = \Pi\left(\frac{t}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \text{if } |t| > \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{if } |t| = \frac{a}{2} \\ 1, & \text{if } |t| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

其中，一个特例有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx = \text{rect}(0) = 1$$

- 归一化 $\text{sinc}(x)$ 函数的逆傅里叶变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \cdot e^{-i2\pi f t} dt = a \frac{\sin(\pi a f)}{\pi a f} = a \text{sinc}(a f)$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \text{sinc}(\omega/2)$$

- 其无穷级数和展开有

$$\text{sinc } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

- 其无穷级数展开有

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}$$

- 对未归一化 sinc 函数，以下近似在计算波荡器辐射频谱角分布时可能用到

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \approx e^{-x^2/3}$$

□

B.4.2 留数定理

这一小节介绍几个重要结果，有留数定理、柯西积分公式、黎曼积分、柯西主值积分与 Sokhotski-Plemelj 定理。

- 留数定理 (residue theorem)

定理 B.7. 留数定理

又称柯西留数定理。对复平面 $z \in \mathbb{C}$ 上的函数 $f(z) \in \mathbb{C}$, 在单连通封闭曲线 C 边界上解析, 在曲线 C 内部除离散的极点 z_j 外也解析, 则有

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res} f(z_j)$$

其中, $\text{Res} f(z)$ 称函数 f 在 z 的留数。

注 逆时针绕行为“正”惯例。

笔记 善用 Mathematica 的 `Residue[f, {z, z0}]` 指令, 能给出函数 f 在 $z = z_0$ 的留数。 □

定理 B.8. 极点与留数

若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点 (pole), 则 $f(z)$ 在 z_0 的留数记为 $\text{Res} f(z)$, 有

$$\text{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$
□

- 柯西积分公式 (Cauchy's integral formula)

定理 B.9. 柯西积分公式

假设 $f(z) \in \mathbb{C}$ 在 $z \in \mathbb{C}$ 复平面上解析 (analytic), 即函数 $f(z)$ 在单连通封闭曲线 C 边界上与内部解析, 则有如下结果:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 0 & \text{如果围道不包含 } z = z_0 \\ 2\pi i f(z_0) & \text{如果围道包含 } z_0 \end{cases}$$

其中, 围道绕行方向以逆时钟方向为正向。

以上公式还可写成

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

其中, n 为正整数, $f^{(n)}$ 表函数 $f(z)$ 的 n 次微分。

笔记 柯西积分公式应用在处理复变函数积分存在极点时, 极点在围道内, 或者极点在轴上时。 □

按以上定理结果, 如 $x = 0$ 为函数 $f(x)/x$ 的极点, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \pi i f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = \pm i\pi$$

对 \sin 情况，因为当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin x/x = 1$ ，此时 $x = 0$ 不是极点。对 \cos 情况，按正向逆时钟绕行惯例，取正号；按负向顺时钟绕行惯例，取负号。

留意，如果取柯西主值 (Cauchy principal value)，则有

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi, \quad \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

这里的柯西主值所定义的积分与大一微积分学过的黎曼积分，两者取极限的方式不一样，定义如下：

定义 B.1. 黎曼积分、柯西主值积分

黎曼积分定义为

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{b+\varepsilon_2}^c f(x) dx$$

其中， $b \in [a, c]$ 。留意，这里的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为独立的两个量。

柯西主值积分定义为

$$\text{P.V.} \int_a^c f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx + \int_{b+\varepsilon}^c f(x) dx \right]$$

其中， $b \in [a, c]$ 。留意，这里 b 点左右两侧的 ε 为同一个量。

注 比起黎曼积分，柯西主值积分的定义稍微放宽，仍保有被积分函数曲线下面积的几何意义。

在求解色散方程时，常利用如下 Sokhotski-Plemelj 定理求解复变函数积分。

定理 B.10. Sokhotski-Plemelj 定理

假设 $f(z)$ 在复平面 $z = x + iy$ 为解析函数，有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b dx \frac{f(x)}{x \mp i\epsilon} = \text{P.V.} \int_a^b dx \frac{f(x)}{x} \pm \pi i f(0)$$

其中， $a < 0 < b$ ，P.V. 为柯西主值积分。有时候也写成如下简化形式

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \mp i\epsilon} = \text{P.V.} \left(\frac{1}{x} \right) \pm i\pi \delta(x)$$

证明

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon} dx &= \mp i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{x^2}{x^2 + \epsilon^2} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \mp i\pi f(0) + \text{P.V.} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \end{aligned}$$

练习 B.4 利用 Sokhotski-Plemelj 定理，验证如下积分

$$\int_0^\infty dx \frac{xe^{-x}}{x - \zeta} = 1 - \zeta e^{-\zeta} [\text{Ei}(\zeta) - i\pi]$$

■

B.4.3 一些与三角函数相关的特殊积分

可能常见如下形式一些与三角函数相关的积分：

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = \int_0^\infty dx \frac{\sin 2x}{x} = \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{4\pi} d\Omega \sin^2 \theta = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{8\pi}{3}$$

当积分上下限为 $\pm\infty$ 时，应视为特殊积分：

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{4}, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{2\pi}{3}$$

当积分上下限不再是 $\pm\infty$ 时，此系列积分与 sine 积分 (sine integral)、cosine 积分 (cosine integral) 等特殊函数有关。连同指数积分，定义如下：

定义 B.2. sine 积分、cosine 积分、指数积分

sine 积分定义为

$$\text{Si}(x) \equiv \int_0^x \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$$

cosine 积分定义为

$$\text{Ci}(x) \equiv \int_\infty^x \frac{\cos \theta}{\theta} d\theta = - \int_x^\infty \frac{\cos \theta}{\theta} d\theta$$

指数积分 (exponential integral) 定义为

$$E_1(x) \equiv \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

有些教科书定义为

$$\text{Ei}(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = - \int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

其中， $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} E_1(-x \pm i\delta) = -\text{Ei}(x) \mp i\pi$ 。函数样貌参图 B.5。

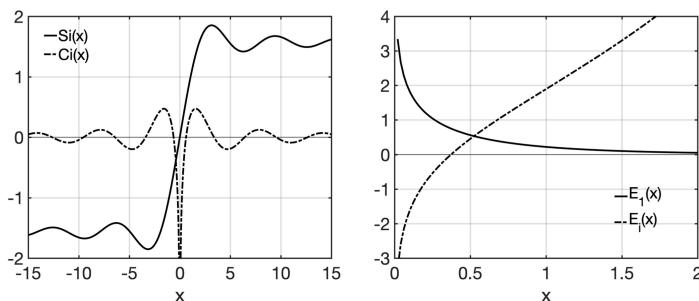


图 B.5: sine 积分、cosine 积分、指数积分。

定义 B.3. Fresnel 积分 $C(x), S(x)$

定义为

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \\ S(x) &= \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \end{aligned}$$

或等价写成

$$C(x) + iS(x) \equiv \int_0^x e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt$$

又称 Cornu spiral 或 Euler spiral 或 clothoid(回旋曲线)。函数样貌参考图 B.6。

注 有的参考文献将 Fresnel 积分定义为

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$$

与此处定义稍有不同，宜留意。 □

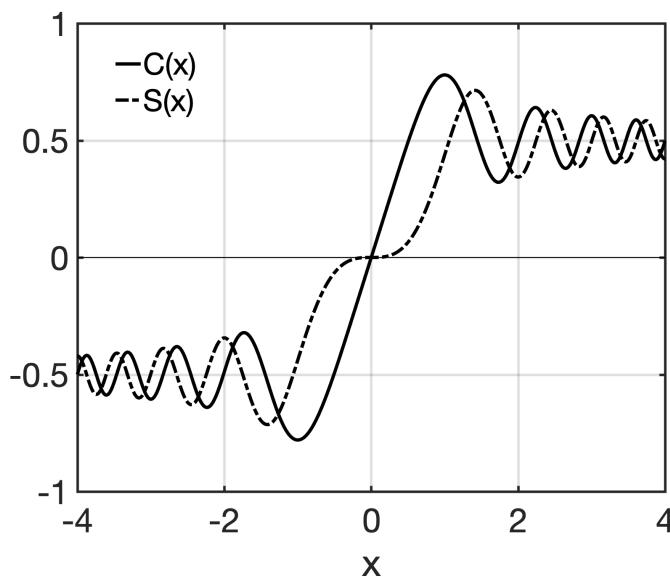


图 B.6: Fresnel 积分。

B.4.4 一些常用积分公式³

- 有理分式形式

$$\int \frac{1}{a + b \cos cx} dx = -\frac{2}{c\sqrt{-a^2 + b^2}} \tan^{-1} \left(\frac{a - b}{\sqrt{-a^2 + b^2}} \tan \frac{cx}{2} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{发散}$$

³与贝塞尔函数有关的积分参考 §B.5。

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{发散}$$

$$\int \frac{xdx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = 0$$

- 与指数函数相关

$$\int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-t^2/4} dt = \sqrt{2} \Gamma \left(\frac{3}{4} \right), \quad \text{其中, } \Gamma \text{为伽玛函数}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{i(\pi/4)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} e^{-b^2/4a} \quad \operatorname{Re} a \leq 0 \text{ 但 } a \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a(x_1-x)^2} e^{b(x_2-x)^2} dx = \sqrt{\frac{-\pi}{a+b}} \exp \left\{ \frac{ab}{a+b} (x_1 - x_2)^2 \right\} \quad \operatorname{Re}(a+b) \leq 0 \text{ 但 } a+b \neq 0$$

$$\int_0^T \exp \left\{ \frac{ia}{T-\tau} + \frac{ib}{\tau} \right\} \frac{d\tau}{\sqrt{(T-\tau)\tau^3}} = \sqrt{\frac{i\pi}{bT}} \exp \left\{ \frac{i}{T} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \right\}, \quad a, b > 0$$

$$\int_0^T \exp \left\{ \frac{ia}{T-\tau} + \frac{ib}{\tau} \right\} \frac{d\tau}{[\sqrt{(T-\tau)\tau}]^3} = \sqrt{\frac{i\pi}{T^3}} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \exp \left\{ \frac{i}{T} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \right\}, \quad a, b > 0$$

$$\int_{-L_1}^{L_2} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{a}L_1) + \operatorname{erf}(\sqrt{a}L_2)}{2}$$

其中, $\operatorname{erf}(z)$ 为误差函数 (error function, erf)。

- 与误差函数相关的特殊函数的定义一并总结如下:

定义 B.4. 误差函数

参考图 B.7, 误差函数 (error function, erf) 定义为

$$\text{erf}(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

又称高斯误差函数 (Gauss error function)。此外, 还有互补误差函数 (complementary error function, erfc)

$$\text{erfc}(z) \equiv 1 - \text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt$$

与虚误差函数 (imaginary error function, erfi)^a

$$\text{erfi}(z) \equiv -i \text{erf}(iz) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt$$

与複互补誤差函数 (complex complementary error function)

$$w(z) \equiv e^{-z^2} \text{erfc}(-iz)$$

又称 Faddeeva 函数。

^a留意, 虚误差函数不是逆误差函数 (inverse error function)。 □

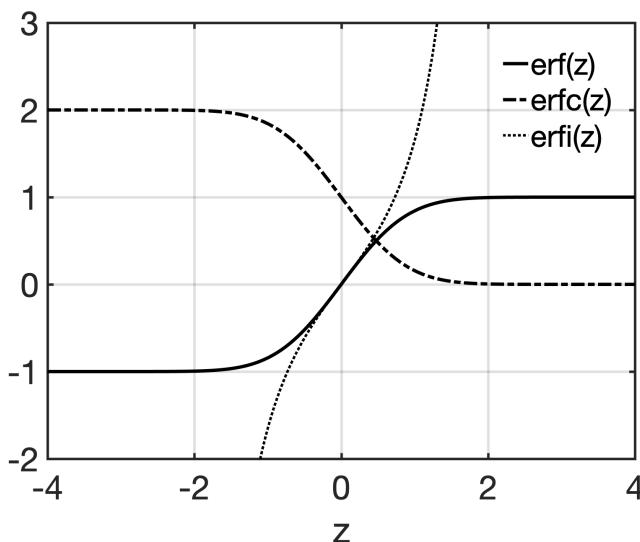


图 B.7: 误差函数。

- 单侧高斯函数的傅里叶正弦变换与 Dawson 函数有关, 定义如下:

定义 B.5. Dawson 函数

Dawson 函数定义为 (参考图 B.8)

$$\begin{aligned} D_+(x) &= e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t^2/4} \sin(xt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \operatorname{erfi}(x) \\ &= -\frac{i\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \operatorname{erf}(ix) \\ D_-(x) &= e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \operatorname{erf}(x) \end{aligned}$$

推广到 $z = x + iy$ 复平面有

$$F(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z^2} \operatorname{erfi}(z) = \frac{i\sqrt{\pi}}{2} [e^{-z^2} - w(z)]$$

其中, $w(z)$ 称 Faddeeva 函数。 D_\pm 可以写成

$$\begin{aligned} D_+(x) &= F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Im}[w(x)] \\ D_-(x) &= iF(-ix) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} [e^{x^2} - w(-ix)] \end{aligned}$$

注 $D_+(0) = 0, D_+(+\infty) = 0, D_+(-\infty) = 0$

□

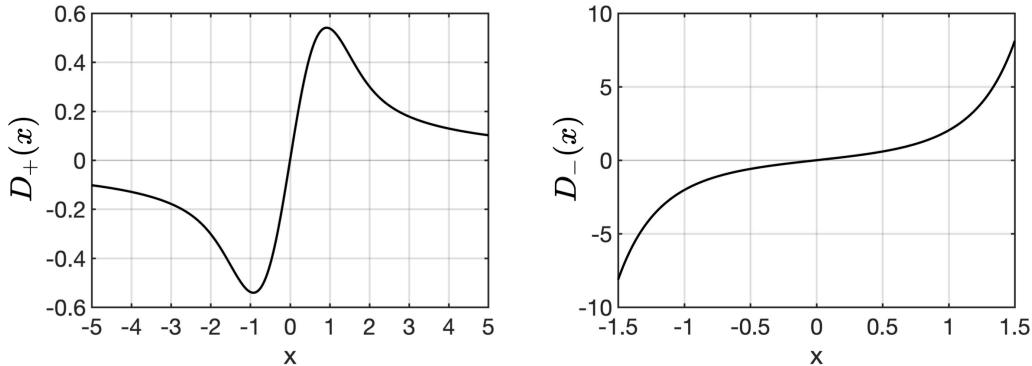


图 B.8: Dawson 函数。

- 与指数函数相关的积分公式还有

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{2} R^2} d\xi$$

$$\frac{1}{R^{3/2}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\xi} e^{-\frac{\xi}{4} R^2} d\xi$$

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2} - ixt} dx \quad \text{或} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2 - ibx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$\int_{-L_1}^{L_2} e^{-ax^2 - ibx} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{ib + 2aL_2}{2\sqrt{a}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{ib - 2aL_1}{2\sqrt{a}} \right) \right]$$

$$\int_0^\infty te^{-\frac{t^2}{2}-i\Omega t}dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{pe^{-\frac{p^2}{2}}}{p+\Omega}dp$$

$$\int_{-\infty}^\infty dx e^{-ik_x x - x^2/w_0^2} = \sqrt{\pi} w_0 e^{-k_x^2 w_0^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^m} x^k dx = \frac{1}{m} \lambda^{-(k+1)/m} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) \quad \text{for } k > -1, \quad \lambda > 0, \quad m > 0$$

$$\int_0^\infty x^a e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2b^{(1+a)/2}} \Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikz} [i \operatorname{sgn}(k) - 1] |k|^{1/2} dk &= \frac{1 - \operatorname{sgn}(z)}{2\sqrt{2\pi}|z|^{3/2}} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikz} [i \operatorname{sgn}(k) + 1] |k|^{3/2} dk &= -\frac{3[1 - \operatorname{sgn}(z)]}{4\sqrt{2\pi}|z|^{5/2}} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty dx \sqrt{x} e^{\pm ix\xi \pm \epsilon x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(\mp \epsilon \mp i\xi)^{3/2}}$$

$$\int_0^\infty dx \sqrt{x} e^{ix\xi - \epsilon x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(\epsilon - i\xi)^{3/2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n^3} = 2.404$$

- 包含三角函数或指数函数的一些积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + a^2 \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\int_{4\pi} \sin^2 \theta d\Omega = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{8\pi}{3}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{q \sin x} \sin(2x) dx = \frac{2}{q^2} [(q-1)e^q + 1]$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi e^{p \cos x} \sin(p \sin x) \sin(ax) dx \\ \int_0^\pi e^{p \cos x} \cos(p \sin x) \cos(ax) dx \end{aligned} \right\} = \frac{\pi p^a}{2a!}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ikx} dk$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx \frac{\sin^2 x}{x^2} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} dt \frac{\sin t}{t} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{\sin t}{t} - \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^\infty dt \frac{\sin t}{t} \\ &= 1 - \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi^4} - \dots = 0.9028 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^\infty dz' \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+(z'-z)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z'-z)^2}} = i\pi \mathcal{H}_0^{(1)}(k\rho)$$

其中， $\mathcal{H}_n^{(1)}(z) \equiv \mathcal{J}_n(z) + i\mathcal{Y}_n(z)$ 称一阶汉克尔函数 (Hankel function)。

B.4.5 三角函数、双曲函数恒等式

- 三角函数恒等式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha$$

$$\cos^2 \alpha \sin \alpha = \frac{1}{4} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 3\alpha$$

$$\cos \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

$$\frac{b^2 - r^2}{b^2 + r^2 - 2br \cos \chi} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n \cos n\chi$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \cos(x + my) = \frac{\cos[x + (n-1)y/2] \sin(ny/2)}{\sin(y/2)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} \sin(x + my) &= \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(x + my - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\cos[x + (n-1)y/2 - \pi/2] \sin(ny/2)}{\sin(y/2)} = \frac{\sin[x + (n-1)y/2] \sin(ny/2)}{\sin(y/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} \cos(m\mu) &= \sum_{m=1}^{n-1} \cos[\mu + (m-1)\mu] = \sum_{m=0}^{n-2} \cos(\mu + m\mu) \\ &= \frac{\cos[\mu + (n-2)\mu/2] \sin[(n-1)\mu/2]}{\sin(\mu/2)} = \frac{\cos(n\mu/2) \sin[(n-1)\mu/2]}{\sin(\mu/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} \sin(m\mu) &= \sum_{m=1}^{n-1} \sin[\mu + (m-1)\mu] = \sum_{m=0}^{n-2} \sin(\mu + m\mu) \\ &= \frac{\sin(n\mu/2) \sin[(n-1)\mu/2]}{\sin(\mu/2)} \end{aligned}$$

- 双曲函数恒等式与三角函数恒等式类似，兹举几例

$$\sinh x = -i \sin(ix), \quad \cosh x = \cos(ix), \quad \tanh x = -i \tan(ix)$$

$$\operatorname{csch} x = i \csc(ix), \quad \operatorname{sech} x = \sec(ix), \quad \operatorname{coth} x = i \cot(ix)$$

$$\sinh^{-1} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cosh^{-1} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\tanh^{-1} t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \int \frac{dx}{1-x^2}$$

注 更多双曲函数恒等式此处不论，请查阅其它参考素材，如：https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions。

B.5 其它恒等式、特殊函数、近似展开公式、级数求和公式

- 实用代数关系式

假设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \sqrt{a+ib} &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ \operatorname{Im} \sqrt{a+ib} &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\end{aligned}$$

或写成

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \right)$$

其中, $z = a + ib$ 。



笔记 此公式在计算阻抗导致的频移与不稳定性增长率时经常用到。

$$\pm w + \sqrt{1+w^2} = e^{\pm \sinh^{-1} w}, \quad \ln \left(w + \sqrt{1+w^2} \right) = \sinh^{-1} w$$

- 贝塞尔 (Bessel) 函数: 第一类、第二类及其修正形式

第一类、第二类贝塞尔函数及其修正形式的贝塞尔函数参考图 B.9, 其中, $\mathcal{J}_n = 0$ 的第 k 个根可以通过 Mathematica 指令 `BesselJZero[n,k]` 得到。此外, 第一类、第二类修正形式的贝塞尔函数与第一类贝塞尔函数的有如下关系:

$$\mathcal{Y}_n = \frac{\mathcal{J}_n(x) \cos n\pi - \mathcal{J}_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

$$\mathcal{I}_n(x) = i^{-n} \mathcal{J}_n(ix)$$

$$\mathcal{K}_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [\mathcal{J}_n(ix) + i \mathcal{N}_n(ix)]$$

$$\mathcal{K}_{1/3}(x) = \sqrt{3} \int_0^\infty \cos \left[\frac{3}{2}x \left(\tau + \frac{1}{3}\tau^3 \right) \right] d\tau = \sqrt{3} \int_0^\infty \exp \left[i \frac{3}{2}x \left(\tau + \frac{1}{3}\tau^3 \right) \right] d\tau$$

$$\mathcal{K}_{2/3}(x) = \sqrt{3} \int_0^\infty \tau \sin \left[\frac{3}{2}x \left(\tau + \frac{1}{3}\tau^3 \right) \right] d\tau = \sqrt{3} \int_0^\infty x \exp \left[i \frac{3}{2}x \left(\tau + \frac{1}{3}\tau^3 \right) \right] d\tau$$



笔记 以上 $\mathcal{K}_{1/3}, \mathcal{K}_{2/3}$ 常在计算同步辐射特性用到, 参考图 B.10。

- Jacobi-Anger 恒等式

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \mathcal{J}_n(z) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \mathcal{J}_n(z) \cos(n\theta) = \mathcal{J}_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \mathcal{J}_n(z) \cos(n\theta)$$

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(z) e^{in\theta}$$

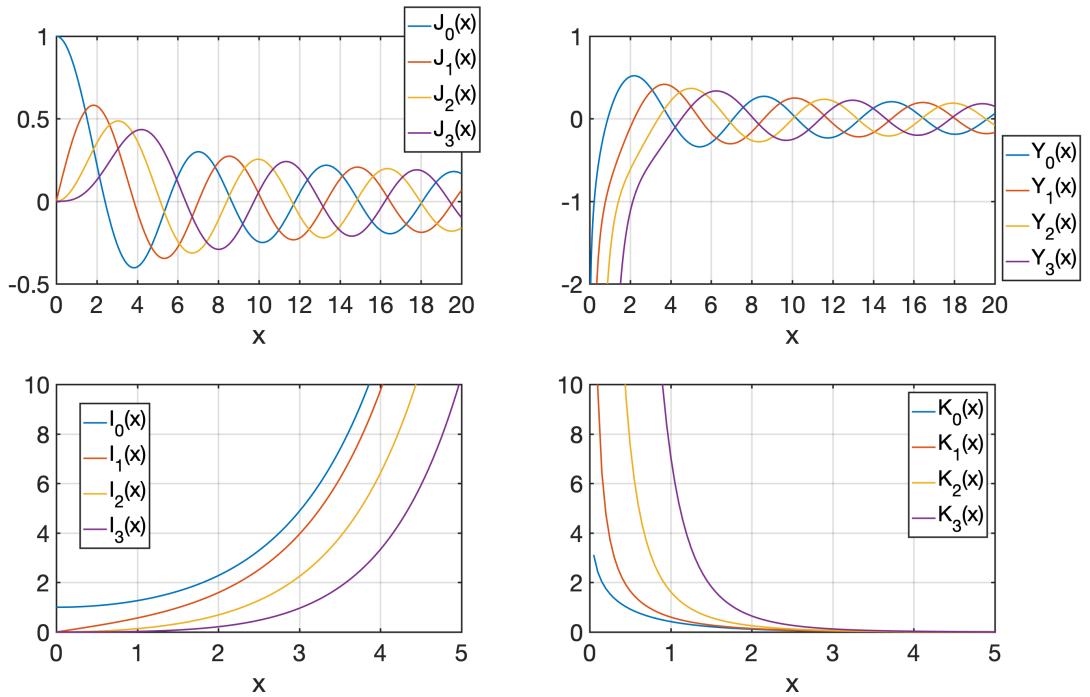


图 B.9: 第一类 \mathcal{J}_ν 与第二类 \mathcal{Y}_ν 及其对应修正形式的贝塞尔函数 $\mathcal{I}_\nu, \mathcal{K}_\nu$ ，其中，第二类贝塞尔函数 \mathcal{Y}_ν 有时又写做 \mathcal{N}_ν 。注意，当 $z \rightarrow 0$ 时， $\mathcal{J}_0 \rightarrow 1, \mathcal{J}_{\nu>0} \rightarrow 0, \mathcal{I}_0 \rightarrow 1, \mathcal{I}_{\nu>0} \rightarrow 0, \mathcal{Y}_0 \rightarrow -\infty, \mathcal{Y}_{\nu>0}$ 为不定形， $\mathcal{K}_0 \rightarrow +\infty, \mathcal{K}_{\nu>0}$ 为不定形。大致而言， $\mathcal{J}_{\nu=0}(z)$ 像振幅衰减的余弦函数； $\mathcal{J}_{\nu \neq 0}(z)$ 则像振幅衰减的正弦函数。当 ν 不是整数时，曲线的样貌大致是临近整数曲线的连续过渡。

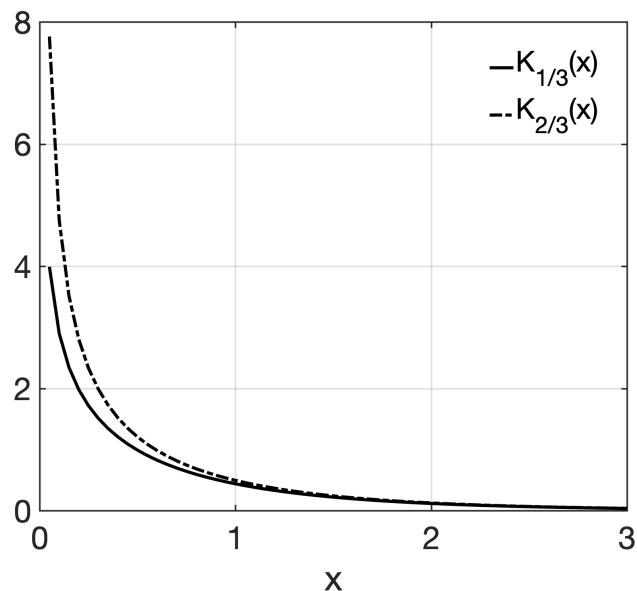


图 B.10: 常在计算同步辐射特性用到的 $\mathcal{K}_{1/3}(x)$ 与 $\mathcal{K}_{2/3}(x)$ 。

$$\begin{aligned}\cos(z \cos \theta) &= \mathcal{J}_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathcal{J}_{2n}(z) \cos(2n\theta) \\ \sin(z \cos \theta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{J}_{2n+1}(z) \cos[(2n+1)\theta] \\ \cos(z \sin \theta) &= \mathcal{J}_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}_{2n}(z) \cos(2n\theta) \\ \sin(z \sin \theta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_{2n+1}(z) \sin[(2n+1)\theta]\end{aligned}$$

其中， $\mathcal{J}_n(z)$ 为第一类 n 阶贝塞尔函数，有 $\mathcal{J}_{-n}(z) = (-1)^n \mathcal{J}_n(z)$ 。

 **笔记** 以上常在计算激光调制电子束或利用作用量-角度正则变换分析相空间特性时用到。

$$\begin{aligned}\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(y\sqrt{\beta^2 + \pi^2 p^2})}{\sqrt{\beta^2 + \pi^2 p^2}} \cos(\pi p z) &= \begin{cases} \mathcal{J}_0(\beta\sqrt{y^2 - z^2}) & 0 \leq z < y < 1 \\ 0 & 0 < y < z \leq 1 \end{cases} \\ e^{\frac{1}{2}z(t+\frac{1}{t})} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \mathcal{I}_n(z) \\ e^{z \cos \theta} &= \mathcal{I}_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n(z) \cos(n\theta) \\ e^{z \sin \theta} &= \mathcal{I}_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathcal{I}_{2n}(z) \cos(2n\theta) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{I}_{2n+1} \sin[(2n+1)\theta]\end{aligned}$$

其中， $\mathcal{I}_n(z)$ 为第一类 n 阶修正贝塞尔函数。

- 贝塞尔函数的导数与递归关系

$$\frac{2\alpha}{x} \mathcal{Z}_\alpha(x) = \mathcal{Z}_{\alpha-1}(x) + \mathcal{Z}_{\alpha+1}(x)$$

其中， \mathcal{Z} 可以是 \mathcal{J}, \mathcal{Y} 。

$$2 \frac{d\mathcal{Z}_\alpha(x)}{dx} = \mathcal{Z}_{\alpha-1}(x) - \mathcal{Z}_{\alpha+1}(x)$$

其中，常用关系式有 $\mathcal{J}'_0 = -\mathcal{J}_1$ 。

- 一些贝塞尔函数相关的特性、求和、积分等

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\ell\phi - ix \cos \phi} &= i^{-\ell} \mathcal{J}_\ell(x), \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i\ell\phi} e^{ix \cos \phi} = i^\ell \mathcal{J}_\ell(x) \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi e^{-i\ell\phi + ix \cos \phi} &= -i^\ell \frac{\ell}{x} \mathcal{J}_\ell(x)\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_\ell(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi \cos(x \sin \phi - \ell \phi)$$

$$\mathcal{J}_\ell(-x) = (-1)^\ell \mathcal{J}_\ell(x) = \mathcal{J}_{-\ell}(x)$$

$$\mathcal{J}'_\ell(x) = \frac{1}{2} [\mathcal{J}_{\ell-1}(x) - \mathcal{J}_{\ell+1}(x)]$$

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\ell^2(x) = 1$$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(\ell x) = \frac{x}{2(1-x)}$$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{J}_{2\ell}(2\ell x) = \frac{x^2}{2(1-x^2)}$$

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_q(x) \mathcal{J}_{n-q}(y) = \mathcal{J}_n(x+y)$$

$$\int_0^\infty k \frac{\mathcal{J}_0(kP)}{k^2 + \lambda^2} dk = \mathcal{K}_0(\lambda P), \quad \text{其中, } \mathcal{K}_0 \text{为第二类零阶修正贝塞尔函数。}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = 2\mathcal{K}_0(\omega), \quad \text{其中, } \mathcal{K}_0 \text{为第二类零阶修正贝塞尔函数。}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t} t dt}{(\tau^2 + t^2)^{3/2}} = i2\omega \mathcal{K}_0(\omega\tau), \quad \text{其中, } \mathcal{K}_0 \text{为第二类零阶修正贝塞尔函数。}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t} dt}{(\tau^2 + t^2)^{3/2}} = 2\frac{\omega}{\tau} \mathcal{K}_1(\omega\tau), \quad \text{其中, } \mathcal{K}_1 \text{为第二类一阶修正贝塞尔函数。}$$

$$\int_0^1 x \mathcal{J}_0^2(bx) dx = \frac{1}{2} [\mathcal{J}_0^2(b) + \mathcal{J}_1^2(b)], \quad \text{其中, } \mathcal{J}_{0,1} \text{为第一类零阶、一阶贝塞尔函数。}$$

$$\int_0^a \mathcal{J}_0(kr) r dr = \frac{a}{k} \mathcal{J}_1(ka)$$

$$\int_0^1 x \mathcal{J}_1^2(bx) dx = \frac{1}{2} \left[\mathcal{J}_0^2(b) + \mathcal{J}_1^2(b) - \frac{2}{b} \mathcal{J}_0(b) \mathcal{J}_1(b) \right]$$

$$\int \mathcal{J}_1^2(ax) x dx = \frac{x^2}{2} [\mathcal{J}_1^2(ax) - \mathcal{J}_0(ax) \mathcal{J}_2(ax)]$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \int_0^\infty dk \mathcal{J}_0(k\rho) e^{-k|z|}$$

$$\frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \int_0^\infty kdk \mathcal{J}_0(k\rho) e^{-kz}, \quad z > 0$$

$$\int_0^R \mathcal{J}_0(\beta\gamma) \left(1 - \frac{\gamma^2}{R^2}\right)^p \gamma d\gamma = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{R^{p-1} \beta^{p+1}} \mathcal{J}_{p+1}(\beta R)$$

$$\int_0^R \mathcal{J}_1(\beta\gamma) \left(1 - \frac{\gamma^2}{R^2}\right)^p \gamma^2 d\gamma = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{R^{p-2} \beta^{p+1}} \mathcal{J}_{p+2}(\beta R)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \mathcal{J}_{\nu+2\ell}(x) \mathcal{J}_{\nu+2\ell}(x) &= \frac{\delta_{\ell\ell'}}{2(\nu+2\ell)}, \quad \nu > 0 \\ \int_0^\infty x dx \mathcal{J}_\ell(kx) \mathcal{J}_\ell(k'x) &= \frac{1}{k} \delta(k - k') \\ \int_{-\infty}^\infty dx e^{iyx} \mathcal{J}_\ell(x) &= \frac{2i^\ell}{\sqrt{1-y^2}} \cos(\ell \cos^{-1} y) H(1-|y|) \end{aligned}$$

其中, H 为 Heaviside step function, 又称单位阶跃函数或单位跃迁函数 (unit step function), 定义为

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} dx \mathcal{J}_\mu(x) \mathcal{J}_\nu(x) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma[\frac{1}{2}(\mu+\nu+1-\alpha)]}{2^\alpha \Gamma[\frac{1}{2}(-\mu+\nu+1+\alpha)] \Gamma[\frac{1}{2}(\mu+\nu+1+\alpha)] \Gamma[\frac{1}{2}(\mu-\nu+1+\alpha)]}$$

其中, $\mu + \nu + 1 > \alpha > 0$ 。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-a\omega^2+i\omega y} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} &= \frac{\pi \sqrt{|y|}}{\sqrt{8a}} [\mathcal{I}_{-1/4}(b) \pm i\mathcal{I}_{1/4}(b)] e^{-b} \\ \int_0^\infty e^{-a\omega^2+i\omega y} \sqrt{\omega} d\omega &= \frac{\pi y \sqrt{|y|}}{4a \sqrt{8a}} \{ \mathcal{I}_{-3/4}(b) - \mathcal{I}_{1/4}(b) \pm i [\mathcal{I}_{-1/4}(b) - \mathcal{I}_{3/4}(b)] \} e^{-b} \end{aligned}$$

其中, $b = y^2/8a$ 。

$$\int_{-\infty}^\infty \left[\mathcal{I}_{-3/4} \left(\frac{u^2}{4} \right) - \mathcal{I}_{1/4} \left(\frac{u^2}{4} \right) \right] e^{-\frac{3u^2}{4}} |u|^{3/2} du = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \mathcal{I}_\nu(bx) x^\nu dx = \frac{(2b)^\nu \Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi} (a^2 - b^2)^{\nu+1/2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \mathcal{I}_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{2a(2b)^\nu \Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi} (a^2 - b^2)^{\nu+3/2}}$$

- Heaviside step function 的一些特性

$$H(x) = \frac{x + |x|}{2x}$$

Heaviside step function 的连续函数近似表示式可写成

$$H(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh kx = \frac{1}{1 + e^{-2kx}}$$

其中， k 越大越接近理想的步阶函数。

Heaviside step function 与符号函数 (sign function) 的关系可写成

$$H(x) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sgn}(x)]$$

与 Dirac delta 函数的关系为导数，可写成

$$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$$

与斜坡函数 (ramp function)⁴ 的关系为一次积分，可写成

$$\int_{-\infty}^x H(\xi) d\xi = xH(x) = \max\{0, x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Heaviside 函数 $H(x)$ 与斜坡函数样貌大致如图 B.11 给出。

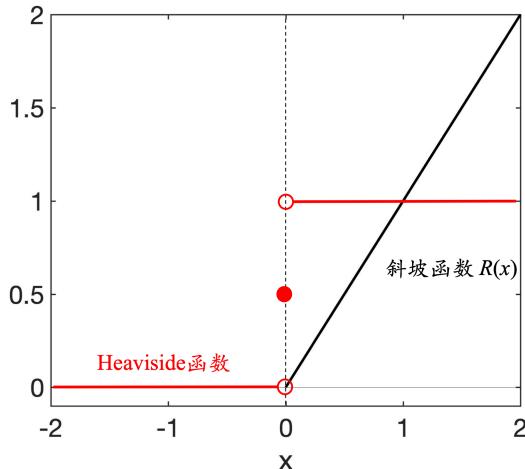


图 B.11: Heaviside 函数 $H(x)$ 与斜坡函数。

⁴ 斜坡函数的几个等价写法，有

$$R(x) = \max(x, 0) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \frac{x + |x|}{2} = xH(x) = \int_{-\infty}^x H(\xi) d\xi = H(x) * H(x)$$

其中， $*$ 为卷积。

- Γ 函数常用特性

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \text{ 其中, } \operatorname{Re} x > 0$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.626, \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \approx 1.354$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)} = x^a$$

Γ 函数样貌大致如图 B.12 给出。

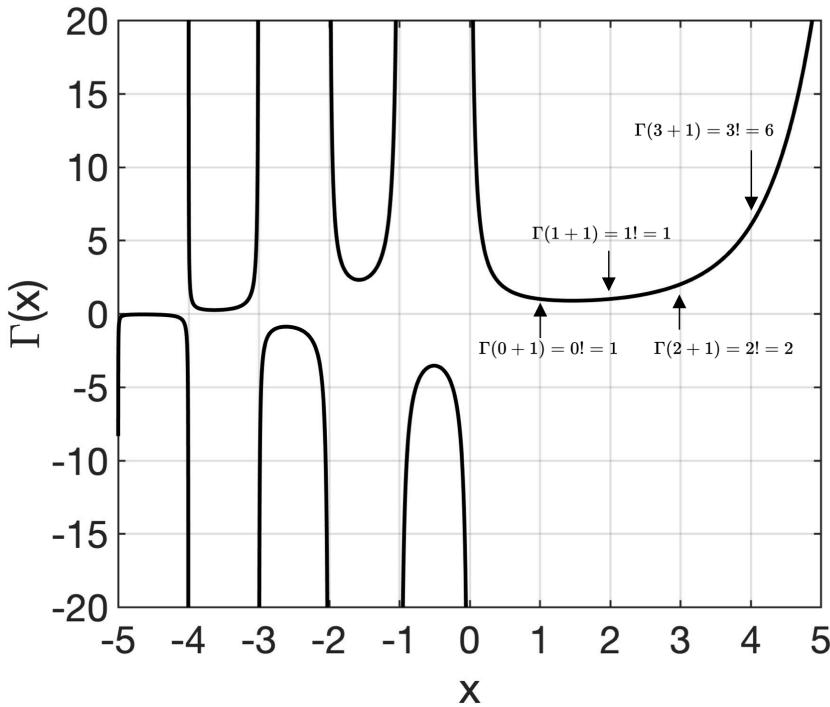


图 B.12: Γ 函数。

- 艾里 (Airy) 函数

定义为

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} + xu\right) du$$

$$\text{Ai}'(x) = \frac{d\text{Ai}(x)}{dx} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u \sin\left(\frac{u^3}{3} + xu\right) du$$

为 Airy 方程⁵的解

$$\text{Ai}''(x) - x \text{Ai}(x) = 0$$

与第二类修正贝塞尔函数的关系有

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{3}} \mathcal{K}_{1/3}\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right), \quad \text{Ai}'(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{x}{\sqrt{3}} \mathcal{K}_{2/3}\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right)$$

⁵有时又称 Stokes 方程, 形式为 $y''(x) - xy = 0$ 。

当 $x \ll 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\text{Ai}(x) &= \text{Ai}(0) \left(1 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \right) + \text{Ai}'(0) \left(x + \frac{2}{4!}x^4 + \dots \right) \\ \text{Ai}'(x) &= \text{Ai}(0) \left(\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1 \cdot 4}{5!}x^5 + \dots \right) + \text{Ai}'(0) \left(1 + \frac{2}{3!}x^3 + \dots \right) \\ \int_0^x \text{Ai}(x) dx &= \text{Ai}(0) \left(x + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \right) + \text{Ai}'(0) \left(\frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{5!}x^5 + \dots \right)\end{aligned}$$

当 $x \gg 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\text{Ai}(x) &= \frac{e^{-z}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \left(1 - \frac{5}{72z} + \frac{385}{2 \cdot 72^2 z^2} \dots \right) \\ \text{Ai}'(x) &= -\frac{x^{1/4}e^{-z}}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{7}{72z} - \frac{455}{2 \cdot 72^2 z^2} \dots \right) \\ \int_x^\infty \text{Ai}(x') dx' &= \frac{e^{-z}}{2\sqrt{\pi}x^{3/4}} \left(1 - \frac{41}{72z} + \frac{9241}{2 \cdot 72^2 z^2} \dots \right)\end{aligned}$$

其中, $z = \frac{2}{3}x^{3/2} \gg 1$ 。

除了 $\text{Ai}(x)$, Airy 方程 $y''(x) - xy = 0$ 的另一个线性独立解为 $\text{Bi}(x)$ — 这里不细究, 可暂时视为一个数学符号。Airy 函数 $\text{Ai}(x), \text{Bi}(x)$ 样貌大致如图 B.13 给出。

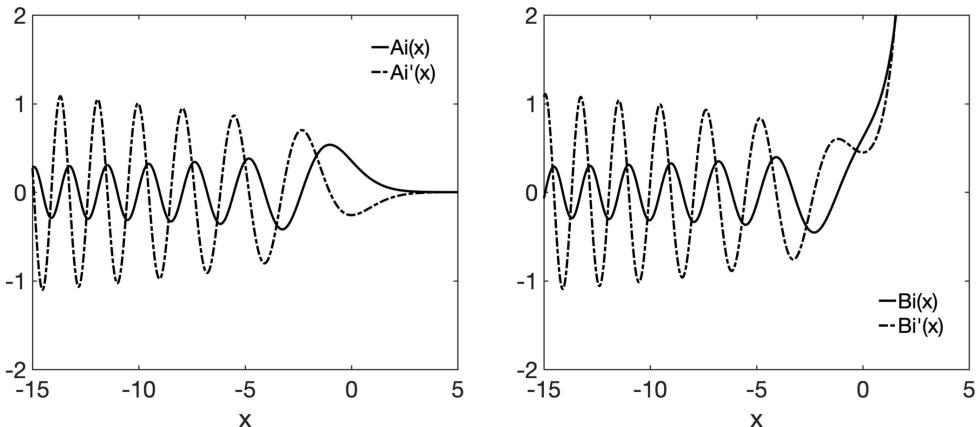


图 B.13: Airy 函数。



笔记 与 Airy 函数及其积分相关的讨论, 可参考 A. Hofmann 一书的 Appendix A。此函数常见于同步辐射理论。

- 超几何函数 (hypergeometric function)

是一类特殊函数, 通常用符号 ${}_pF_q$ 表示, 其中, p, q 为非负整数。超几何函数可视为许多微分方程的解的一般表示式。或者, 换句话说, 许多微分方程的解可视为超

几何函数的特例。考虑常见的 ${}_2F_1$, 其定义为

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; x) &= 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

其中, 前下标 2 可以视为展开项中, 分子的参数个数; 后下标 1 则可以视为展开项中, 分母的参数个数。由于级数解 (method of series) 为求解微分方程的一种具一般性的方法, 因此, 可以预期, 超几何函数可视为许多微分方程的解的一般表示式。对一般形式的二阶微分方程

$$y'' + P(z)y' + Q(z)y = 0$$

如有三个奇点 (singularity) 在 $z = \xi, \eta, \zeta$, 则系数函数总是可以写成如下形式

$$P = \frac{\text{polynomial}}{(z - \xi)(z - \eta)(z - \zeta)}, \quad Q = \frac{\text{polynomial}}{(z - \xi)^2(z - \eta)^2(z - \zeta)^2}$$

数学上可以证明, 能够将奇点 $z = \xi, \eta, \zeta$ 转换到 $\omega = 0, 1, \infty$, 由此将以上一般形式的二阶微分方程的解以超几何函数 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 表示。

- 合流超几何函数 (confluent hypergeometric function)

又称 Kummer 函数, 是上述超几何函数的“亲戚”, 通常用符号 ${}_1F_1(a; c; z)$ 表示, 定义可视为上面 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 的退化形式。 ${}_1F_1(a; c; z)$ 可与许多物理/工程上常见的函数相互关联, 比如 (但不限于):

指数函数 $e^z = {}_1F_1(a; a; z)$

第一类贝塞尔函数 $J_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^n e^{iz} {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}; 2n + 1; -2iz\right)$

误差函数 $\text{erf}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right)$

此外, 合流超几何函数有以下变换关系

$${}_1F_1(a; c; z) = e^z {}_1F_1(c - a; c; -z)$$

与如下渐进形式, 当 $|z| \gg 1$ 时, 有

$${}_1F_1(a; c; z) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c} & \operatorname{Re} z > 0 \\ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} & \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

- 椭圆积分 (elliptic integrals)

可视为一种特殊函数。在描述粒子振动, 比如, 在相空间中的大振幅同步振荡时, 一般以椭圆积分方式呈现。椭圆积分分三类, 定义如下:

定义 B.6. 椭圆积分 $F(\phi, k), E(\phi, k), \Pi(n; \phi, k)$

分三类, 定义如下

● 第一类椭圆积分 \Rightarrow 细分两种: 完整的、不完整的第一类椭圆积分。不

完整第一类椭圆积分 (incomplete elliptic integral of the first kind) $F(\phi, k)$,

$$F(\phi, k) = F(\phi|k^2) = F(\sin \phi; k) \equiv \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

或以 $t = \sin \theta, x = \sin \phi$ 代换, 写成勒让德形式

$$F(x; k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

其中, $0 \leq k = \sin \alpha \leq 1$ 是椭圆的偏心率 (eccentricity), 又称 elliptic modulus。当 $\phi = \pi/2$ 时, 有完整第一类椭圆积分 (complete elliptic integral of the first kind) $K(k)$,

$$\begin{aligned} K(k) \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \end{aligned}$$



笔记 一个实用的近似展开式:

$$\begin{aligned} K(k) &\approx \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \frac{k^2}{1-k^2} - \frac{\pi}{16} \frac{k^4}{1-k^2} \\ &\approx \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \end{aligned}$$

完整第一类椭圆积分的样貌参考图 B.14。

- 第二类椭圆积分 \Rightarrow 细分两种: 完整的、不完整的第二类椭圆积分。不完整第二类椭圆积分 (incomplete elliptic integral of the second kind) $E(\phi, k)$,

$$E(\phi, k) = E(\phi|k^2) = E(\sin \phi; k) \equiv \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

或以 $t = \sin \theta, x = \sin \phi$ 代换, 写成勒让德形式

$$E(x; k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

其中, $0 \leq k = \sin \alpha \leq 1$ 是椭圆的偏心率 (eccentricity), 又称 elliptic modulus。当 $\phi = \pi/2$ 时, 有完整第二类椭圆积分 (complete elliptic integral of the second kind) $E(k)$,

$$E(k) \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$



笔记 一个实用的近似展开式:

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right]$$

完整第二类椭圆积分的样貌参考图 B.15。

- 第三类椭圆积分 \Rightarrow 细分两种: 完整的、不完整的第三类椭圆积分。不完

整第三类椭圆积分 (incomplete elliptic integral of the third kind) $\Pi(n; \phi, k)$,

$$\begin{aligned}\Pi(n; \phi, k) &= \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^x \frac{dx}{(1 + nx^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}\end{aligned}$$

其中, $0 \leq k = \sin \alpha \leq 1$ 是椭圆的偏心率 (eccentricity), 又称 elliptic modulus, n 为一参量。当 $\phi = \pi/2$ 时, 有完整第三类椭圆积分 (complete elliptic integral of the third kind) $\Pi(n; k)$,

$$\Pi(n; k) \equiv \Pi\left(n; \frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

完整第三类椭圆积分的样貌参考图 B.16。

注 这里所采用的符号惯例与 Mathews & Walker 一致。使用 Mathematica 或 MATLAB 时应留意, 如 `EllipticK[m]` 或 `[K,E] = ellipke(M)` 定义的宗量 m 与此处的 k 稍有区别, 为 $m = k^2$, 即

$$\begin{aligned}K(m) = K(k^2) &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - mt^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}\end{aligned}$$

□

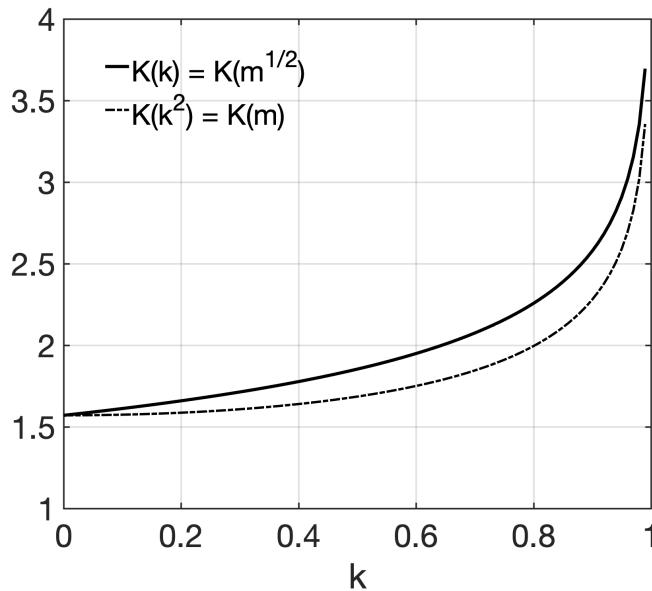


图 B.14: 完整第一类椭圆积分 $K(k)$ 。

- 椭圆函数 (elliptic functions)

与上述椭圆积分呈反函数 (inverse function) 关系。椭圆函数分为三类: Jacobi elliptic functions (雅可比椭圆函数)、Weierstrass elliptic functions、Jacobi elliptic theta functions。此处仅介绍最常见的雅可比椭圆函数。

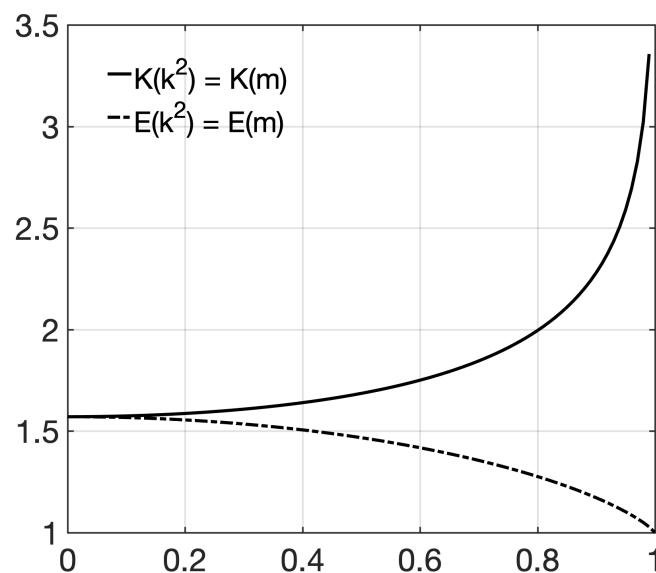


图 B.15: 完整第二类椭圆积分 $E(k)$ 。

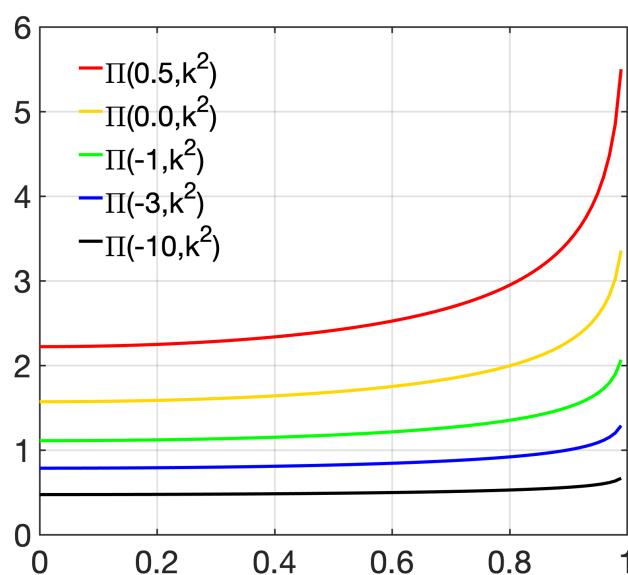


图 B.16: 完整第三类椭圆积分 $\Pi(n; k)$ 。

定义 B.7. 椭圆函数 sn, cn, dn

又称雅可比椭圆函数 (Jacobi elliptic functions)。对上述不完整第一类椭圆积分

$$u = F(x; k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

或

$$u = F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

其反函数定义成雅可比椭圆正弦函数 (sn, sinus amplitudinis)，符号上写成

$$x = \text{sn}(F)$$

或

$$\text{sn}(u, k) = \sin \phi$$

此外，再定义雅可比椭圆余弦函数 (cn, cosinus amplitudinis)、雅可比椭圆正切函数 (dn, delta amplitudinis)，分别为

$$\text{cn}(F) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\text{sn}^2(F)}$$

$$\text{dn}(F) = \sqrt{1-k^2 x^2} = \sqrt{1-k^2 \text{sn}^2(F)}$$

其中， $0 \leq k = \sin \alpha \leq 1$ 是椭圆的偏心率。

注 当 $k = 1$ 时，有时仅写出一个宗量，即 $\text{sn}(u, 1) = \text{sn}(u)$ ，cn, dn 类似。

注 椭圆函数的倒数以 ns, nc, nd 符号表示，有

$$\text{ns}(u) = \frac{1}{\text{sn}(u)}, \quad \text{nc}(u) = \frac{1}{\text{cn}(u)}, \quad \text{nd}(u) = \frac{1}{\text{dn}(u)}$$

□

雅可比椭圆函数 sn, cn, dn 的大致样貌如图 B.17 给出，有

性质 B.5. 雅可比椭圆函数 sn, cn, dn 的几个特性

- $\text{sn}(u, k)$ 为双周期函数 (doubly periodic function)，即

$$\text{sn } x = \text{sn}(x + 4K), \quad \text{sn } x = \text{sn}(2K - x)$$

其中， $K = K(k)$ 为完整第一类椭圆积分。

- 几个特殊取值：

函数	$k = 0$	$k = 1$
$\text{sn}(u, k)$	$\sin u$	$\tanh u$
$\text{cn}(u, k)$	$\cos u$	$\operatorname{sech} u$
$\text{dn}(u, k)$	1	$\operatorname{sech} u$

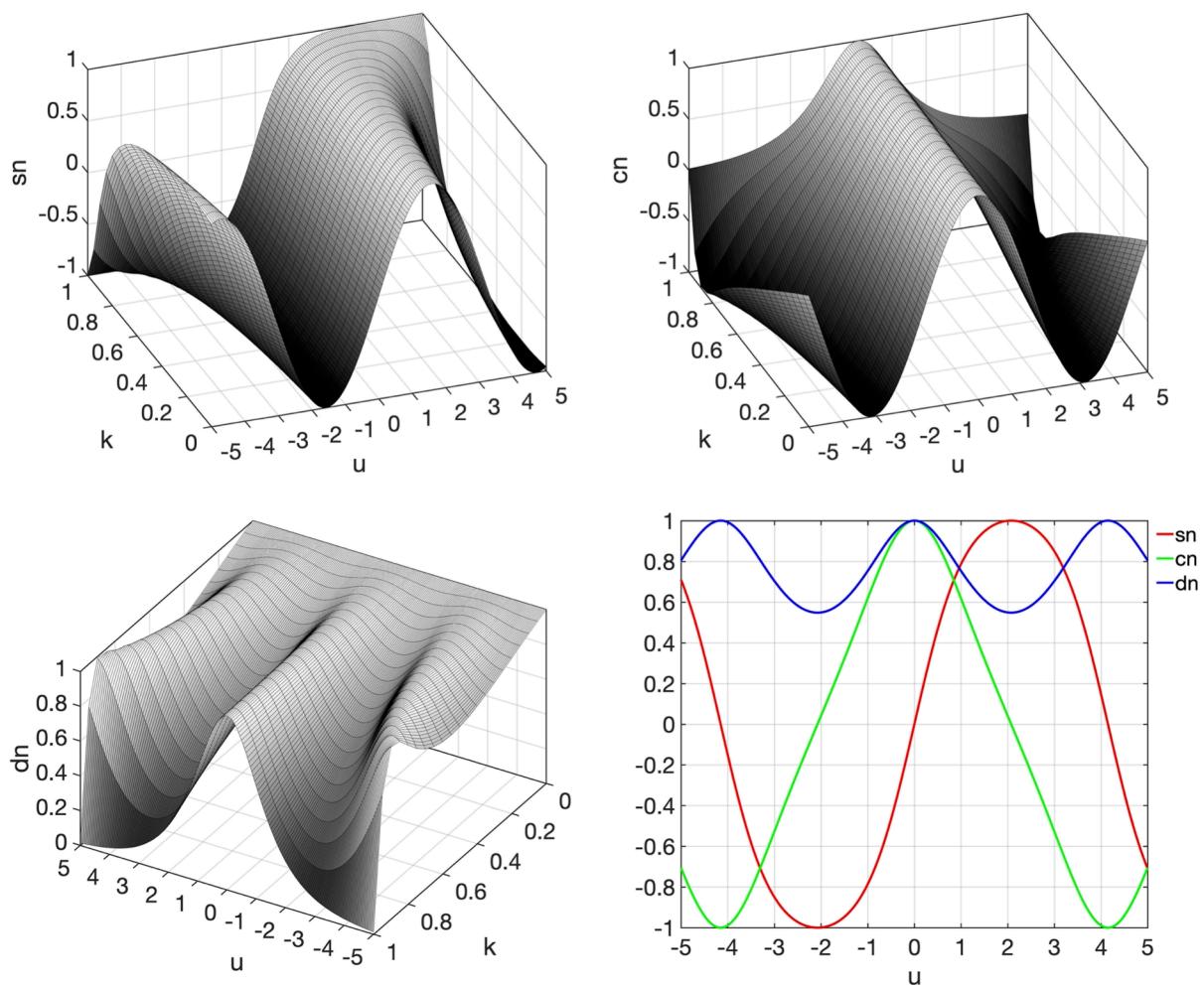


图 B.17: 雅可比椭圆函数, 右下图为 $m = k^2 = 0.7$ 时的取值。

此外，还有

$$\operatorname{sn}(K(k), k) = \operatorname{sn}(K(k)) = 1$$

$$\operatorname{cn}(K(k), k) = \operatorname{cn}(K(k)) = 0$$

$$\operatorname{dn}(K(k), k) = \operatorname{dn}(K(k)) = \sqrt{1 - k^2}$$

● 微分关系：

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$$

$$\frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$$

$$\frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$$

● 恒等式：

$$\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1$$

● 以三角函数展开，有

$$\operatorname{sn}(u, m) = \frac{2\pi}{kK(m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1 - q^{2n+1}} \sin((2n+1)v)$$

$$\operatorname{cn}(u, m) = \frac{2\pi}{kK(m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1 + q^{2n+1}} \cos((2n+1)v)$$

$$\operatorname{dn}(u, m) = \frac{\pi}{2K(m)} + \frac{2\pi}{K(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos(2nv)$$

其中， $m = k^2$, $v = \frac{\pi u}{2K(m)}$, q 称为 nome, 定义为

$$q = e^{-\pi \frac{K'(m)}{K(m)}} = e^{i\pi\tau}, \quad \operatorname{Im}(\tau) > 0$$

成立条件： $q e^{2|\operatorname{Im}(v)|} < 1$ 。

□

● 常用近似展开公式

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x - x_0)^N$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

成立范围： $x \in (-1, 1)$ 。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(nx) \quad [\text{Kapteyn series}]$$

有限项求和公式有

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

成立范围: $x \in (-1, 1)$ 。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

成立范围: $x \in \mathbb{R}$ 。以上为在 $x = 0$ 附近展开, 如果在 $x = x_0$ 附近展开, 则有

$$e^x = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = e^{x_0} \left[1 + (x-x_0) + \frac{1}{2!} (x-x_0)^2 + \dots \right]$$

成立范围: $x \in \mathbb{R}$ 。

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$$

成立范围: $x \in \mathbb{R}$ 。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \stackrel{\text{or}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

成立范围: $x \in \mathbb{R}$ 。

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

成立范围: $x \in \mathbb{R}$ 。

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

成立范围: $x^2 < \pi^2/4$ 。

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \stackrel{\text{or}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

成立范围: $x \in [-1, 1]$ 。

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

成立范围: $x \in \mathbb{R}$ 。

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

成立范围: $x \in \mathbb{R}$ 。

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$$

成立范围: $x^2 < \pi^2/4$ 。

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n} \quad \text{or} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

成立范围: $x \in (-1, 1]$ 。

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) &= x - \frac{x^3}{3 \times 1!} + \frac{x^5}{5 \times 2!} - \frac{x^7}{7 \times 3!} + \dots \end{aligned}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \frac{63}{256}x^5 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

- 善用 Mathematica 的 `Series[f, {x, x0, n}]` 指令, 其中, `f` 为未近似、完整表示式。

- Pade 近似: 一种具工程应用潜力的近似方法。泰勒级数一般在某一阶必须截断, 并且在收敛范围外, 展开的多项函数不再准确, 甚至发散。Pade 近似 (Pade approximant) 为有理多项式近似法。Pade 近似往往比上面截断的泰勒级数准确, 而且当泰勒级数不收敛时, Pade 近似也许仍可行, 有称 Pade 近似为最优 (best) 近似方法。以下简单介绍。

定义 B.8. Pade 近似

为一种有理多项式近似法。给定正整数 m 和 n , 函数 $f(x)$ 的 $[m, n]$ 阶 Pade 近似定义为

$$\begin{aligned} f(x) \approx R(x) = [m/n]_{f(x)} &\equiv \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{1 + \sum_{k=1}^n b_k x^k} \\ &= \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n} \end{aligned}$$

且有

$$f(0) = R(0)$$

$$f'(0) = R'(0)$$

$$f''(0) = R''(0)$$

⋮

$$f^{(m+n)}(0) = R^{(m+n)}(0)$$

可以证明, 对于给定的 $f(x)$, 其 $[m/n]$ 阶 Pade 近似是唯一的。 □

试举一例, 对指数函数 e^x , $[5/5]$ 阶的 Pade 近似展开有

$$e^x \approx [5/5]_{e^x} \equiv \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{72} + \frac{x^4}{1008} + \frac{x^5}{30240}}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{72} + \frac{x^4}{1008} - \frac{x^5}{30240}}$$

其系数可通过与 (至少) m 阶泰勒展开系数比较得到或直接利用 Mathematica 或 MATLAB 得到。利用 Mathematica, 指令为 `PadeApproximant[Exp[x], x, 0, 5, 5]`。利用 MATLAB, 指令为 `pade(exp(x), x, 0, 'Order', [5 5])`。

将以上近似函数画出后, 会发现此 $[5/5]$ 阶的 Pade 近似与 10 阶泰勒级数展开结果非常接近。事实上, $[m/n]$ 阶 Pade 近似几乎接近于 $(m + n)$ 阶泰勒级数展开的结果。

- 鞍点近似法 (saddle-point method) 或最速下降法 (method of steepest descent)

定理 B.11. 鞍点近似法、最速下降法

电磁场分析中, 有时可能遇到如下形式积分:

$$I(\lambda) = \int_C dz f(z) e^{\lambda g(z)}$$

其中, 当被积分函数 $f(z) e^{\lambda g(z)}$ 在积分路径端点贡献可以忽略时, 且实参量 $\lambda \gg 1$ 时, 以上积分可近似写成

$$I(\lambda) \approx e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |g''(z_0)|}} e^{\lambda g(z_0)}$$

其中, z_0 为函数 $g(z)$ 的“鞍点”, 因此, 满足 $g'(z_0) = 0$ 。利用鞍点近似法可以给出积分的渐进表示式。 □

- 特殊函数的渐进表示式

- 对 Γ 伽玛函数, 定义为

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dy y^{x-1} e^{-y}, \quad \operatorname{Re} x > 0$$

对正整数 $x = n$, 有

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

其中, ! 为阶乘函数。

定义 B.9. 阶乘函数 $n!$ 、双阶乘函数 $n!!$

阶乘函数 (factorial function) 定义为

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= n \times (n-1)! \end{aligned}$$

双阶乘函数 (double factorial function) 定义为

$$n!! = n(n-2)(n-4) \cdots \begin{cases} 5 \cdot 3 \cdot 1 & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ 6 \cdot 4 \cdot 2 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

注 $(n!)! \neq n!!$, 宜留意。 □

接续伽玛函数的讨论。当 $x \gg 1$ 时, 有

$$\Gamma(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{x-1/2} e^{-x}$$

或当 $x = n \in \mathbb{N}$, $n \gg 1$ 时, 即 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

其中, $e \approx 2.71828$ 为指数或自然对数的底数。或等价写成

$$\ln n! \sim n \ln n - n$$

- 对第一类贝塞尔函数 $J_\alpha(z)$, 当 z 很小时, 即 $0 < z \ll \sqrt{\alpha+1}$,

$$J_\alpha(z) \sim \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha, & \alpha \geq 0 \\ \frac{(-1)^\alpha}{(-\alpha)!} \left(\frac{2}{z}\right)^\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$$

当 z 很大时, 即 $z \gg |\alpha^2 - \frac{1}{4}|$,

$$J_\alpha(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left[z - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]$$

对整数 $m \gg 1$, 有⁶

$$J'_{2m}(2m) \sim \frac{3^{1/6}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) m^{-2/3}$$

对 $m = 1$, 误差在 15% 内。

⁶参考 J. Schwinger 一书 §40.1。

- 对第二类贝塞尔函数 $\mathcal{Y}_\alpha(z)$ 或 $\mathcal{N}_\alpha(z)$, 当 z 很小时, 有

$$\mathcal{Y}_\alpha(z) \sim \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha)\left(\frac{2}{z}\right)^\alpha & (\alpha > 0) \\ \frac{2}{\pi}\ln z & (\alpha = 0) \end{cases}$$

当 z 很大时, 有

$$\mathcal{Y}_\alpha(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left[z - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]$$

- 对第一类修正贝塞尔函数 $\mathcal{I}_\alpha(z)$

$$\mathcal{I}_\alpha(z) \sim \begin{cases} \text{类似如上的 } \mathcal{J}_\alpha(z) \text{ 漐进式,} & \text{if } z \ll 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, & \text{if } z \gg 1 \end{cases}$$

- 对第二类修正贝塞尔函数 $\mathcal{K}_\alpha(z)$

$$\mathcal{K}_\alpha(z) \sim \begin{cases} 2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)z^{-\alpha}, & \text{if } z \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}, & \text{if } z \gg 1 \end{cases}$$

- 一些级数求和公式

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2} &= \frac{\sqrt[4]{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\ \sum_{n=1}^N e^{i\phi} &= e^{i(1/2)(N+1)\phi} \frac{\sin \frac{1}{2}N\phi}{\sin \frac{1}{2}\phi} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} &\approx 1.202 \approx \zeta(3), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} = -\frac{3}{4}\zeta(3) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} &= \frac{\pi^4}{90} = \zeta(4), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4} = -\frac{7\pi^4}{720} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} &\approx 1.037 = \zeta(5), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^5} = -\frac{15}{16}\zeta(5) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} &= \frac{\pi^6}{945} = \zeta(6), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^6} = -\frac{31\pi^6}{30240} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^n z^k &= \frac{z^m - z^{n+1}}{1-z} \\
\sum_{k=0}^n z^k &= \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \\
\sum_{k=1}^n z^k &= \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} - 1 = \frac{z - z^{n+1}}{1-z} \\
\sum_{k=1}^n kz^k &= z \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \\
\sum_{k=1}^n k^2 z^k &= z \frac{1 + z - (n+1)^2 z^n + (2n^2 + 2n - 1) z^{n+1} - n^2 z^{n+2}}{(1-z)^3} \\
\sum_{k=1}^n k^m z^k &= \left(z \frac{d}{dz} \right)^m \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} &= e^z \\
\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{z^k}{k!} &= ze^z \quad \text{比较: 泊松分布平均} \\
\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{z^k}{k!} &= (z + z^2) e^z \quad \text{比较: 泊松分布二阶矩} \\
\sum_{k=0}^{\infty} k^3 \frac{z^k}{k!} &= (z + 3z^2 + z^3) e^z \\
\sum_{k=0}^{\infty} k^4 \frac{z^k}{k!} &= (z + 7z^2 + 6z^3 + z^4) e^z \\
\sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{z^k}{k!} &= z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} k^{n-1} \frac{z^k}{k!} = e^z T_n(z)
\end{aligned}$$

其中, $T_n(z)$ 称 Touchard 多项式。

以上给出了一些常用的向量恒等式、微分运算、积分公式、三角函数恒等式、近似展开公式。除了善用符号运算程序 Mathematica 外, 还可以参考:

1. M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of mathematical functions. <http://jonsso.n.eu/resources/hmf/>
2. I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products. <https://www.mathtable.com/gr/>

B.6 几种常见分布函数的定义

在粒子加速器中，许多粒子形成束团 (beam 或 bunch)，束团可能具有不同分布形态，借用统计学术语，可以不同分布函数表征。以下给出几种常见一维分布函数的定义⁷，以 ω 表示变量， ω_x 为函数分布的中心， $\Delta\omega$ 为特征宽度：

- Dirac delta 函数分布 (δ -function distribution)

$$\rho(\omega) = \delta(\omega - \omega_x)$$

- 三角形分布 (triangular distribution)

$$\rho(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta\omega} \left(1 - \frac{\omega}{\Delta\omega}\right) & |\omega| < \Delta\omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 水袋分布 (water-bag distribution)

$$\rho(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{(\Delta\omega)^2 - \omega^2}}{(\Delta\omega)^2}$$

- 洛伦兹分布 (Lorentz distribution)

$$\rho(\omega) = \frac{\Delta\omega}{\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_x)^2 + \Delta\omega^2}$$

- 矩形函数分布 (rectangular distribution)

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2\Delta\omega} H(1 - |v|), \quad v = \frac{\omega_x - \omega}{\Delta\omega}$$

- 抛物线分布 (parabolic distribution)

$$\rho(\omega) = \frac{3}{4\Delta\omega} (1 - v^2) H(1 - |v|), \quad v = \frac{\omega_x - \omega}{\Delta\omega}$$

- 椭型分布 (elliptical distribution)

$$\rho(\omega) = \frac{2}{\pi\Delta\omega} H(1 - |v|) \sqrt{1 - v^2}, \quad v = \frac{\omega_x - \omega}{\Delta\omega}$$

- 三椭型分布 (tri-elliptical distribution)

$$\rho(\omega) = \frac{8}{3\pi\Delta\omega} (1 - v^2)^{3/2} H(1 - |v|), \quad v = \frac{\omega_x - \omega}{\Delta\omega}$$

- 双洛伦兹分布 (bi-Lorentz distribution)

$$\rho(\omega) = \frac{2}{\pi\Delta\omega (v^2 + 1)^2}, \quad v = \frac{\omega_x - \omega}{\Delta\omega}$$

- 高斯分布 (Gaussian distribution) 或正态分布 (normal distribution)

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} e^{-\frac{v^2}{2}}, \quad v = \frac{\omega_x - \omega}{\Delta\omega}$$

以上这些函数的表示式满足归一化条件，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) d\omega = 1$$

不同的分布函数，其本身的特征宽度 $\Delta\omega$ 不同。公平的比较不同分布函数的宽度一

⁷取自 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993)。

般通过“半高半宽”(half width half maximum, HWHM) $\Delta\omega_{1/2}$, 定义如下:

$$\Delta\omega_{1/2} = \Delta\omega \times \begin{cases} 1, & \text{Lorentz,} \\ 1, & \text{rectangular,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707, & \text{parabolic,} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866, & \text{elliptical,} \\ \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 0.644, & \text{bi-Lorentzian,} \\ \sqrt{2 \ln 2} \approx 1.177, & \text{Gaussian.} \end{cases}$$

 **练习 B.5** 用 MATLAB 画出以上分布函数，并验证不同分布的宽度与归一化条件。 ■

B.7 矩阵的一些实用特性

这一节不打算细究线性代数内容，而只给出几个基本定义与常用的结果。对一般方阵 \mathbf{A} ，有如下常见操作：

矩阵	元素	举例
\mathbf{A}	A_{ij}	$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$
转置矩阵 \mathbf{A}^T	$(\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 2 \end{pmatrix}$
共轭矩阵 \mathbf{A}^*	$(\mathbf{A}^*)_{ij} = A_{ij}^*$	$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$
厄米共轭矩阵 $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^T)^*$	$(\mathbf{A}^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$	$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$
逆矩阵 \mathbf{A}^{-1}	$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{\text{cofactor of } A_{ji}}{\det \mathbf{A}}$	$\begin{pmatrix} 2 & -i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}$

根据以上列举的几个特性，给出满足一些特性的矩阵 \mathbf{A} 的定义如下：

定义 B.10. 方阵 \mathbf{A} 的几种定义

有

- \mathbf{A} is real (实矩阵) $\Leftrightarrow \mathbf{A}^* = \mathbf{A}$
- symmetric (对称矩阵) $\Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
- antisymmetric (反对称矩阵) $\Leftrightarrow \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$
- Hermitian (厄米矩阵) $\Leftrightarrow \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$
- orthogonal (正交矩阵) $\Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$
- unitary (酉矩阵、么正矩阵) $\Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\dagger$
- diagonal (对角矩阵) $\Leftrightarrow A_{ij} = 0, \forall i \neq j$
- idempotent (幂等矩阵) $\Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$

□

涉及多个矩阵相乘后的合成矩阵的逆、转置、迹 (trace) 与行列式值等，整理为如下特性：

性质 B.6. 合成矩阵的一些特性

有

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

$$\text{Trace}(\mathbf{AB}) = \text{Trace}(\mathbf{BA})$$

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}) = \det(\mathbf{BA})$$

□

B.7.1 矩阵相关性

一般用“秩”(rank)来量化一线性系统或对应矩阵的相关性，有时又称简并性。定义如下：

定义 B.11. 矩阵 \mathbf{A} 的秩、满秩、欠秩

一矩阵 \mathbf{A} 的列秩 (column rank) 定义为列向量^a生成的最大线性无关组的直列向量个数。一矩阵 \mathbf{A} 的行秩 (raw rank) 则定义为其行向量生成的线性无关的横行向量个数。

定理 B.12. 列秩 = 行秩

矩阵的列秩和行秩总是相等，简称为矩阵 \mathbf{A} 的秩 (rank)，写为 $\text{rank}(\mathbf{A})$ 或 $r(\mathbf{A}), \text{rk}(\mathbf{A})$ 。

证明 此定理为线性代数基本定理的重要组成部分，对证明细节感兴趣的读者，应参考线性代数教科书。

□

对一 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} ，当 $\text{rank}(\mathbf{A}) = \min(m, n)$ 时，称满秩 (full rank)；当 $\text{rank}(\mathbf{A}) < \min(m, n)$ 时，称欠秩 (rank deficient)。

^a留意，这里的“列”指的是直列 (column)，“行”指的则是横行 (row)。

性质 B.7. 秩的一些特性

对一 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} ，有

- $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$
- 当 \mathbf{A} 满秩且 $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ ，称满射 (surjective, onto)；当 \mathbf{A} 满秩且 $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ ，称单射 (injective, one-to-one)
- 零矩阵 (即矩阵中的每个元素皆为 0) 的秩为 0
- 对 $m = n$ 情况，即方阵 \mathbf{A} ，则“ \mathbf{A} 为满秩” \Leftrightarrow “ \mathbf{A} 为可逆”
- 如果 \mathbf{B} 为任意 $n \times k$ 矩阵，则有

$$\text{rank}(\mathbf{AB}) \leq \min(\text{rank } \mathbf{A}, \text{rank } \mathbf{B})$$

- 对同样维度的 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{B} ，有

$$\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B})$$

即一个秩为 k 的矩阵可表示成 k 个秩为 1 的矩阵相加，但不能更少了

- 西尔维斯特不等式 (Sylvester's inequality): 对 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 与 $n \times k$ 矩阵 \mathbf{B} ，有

$$\text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}) - n \leq \text{rank}(\mathbf{AB})$$

- 对实矩阵 \mathbf{A} ，有

$$\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{AA}^T) = \text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}^T)$$

- 对复矩阵 \mathbf{A} ，有

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}^*) = \text{rank}(\mathbf{A}^T) = \text{rank}(\mathbf{A}^\dagger) = \text{rank}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{AA}^\dagger)$$

证明 参考线性代数教科书。 □

B.7.2 矩阵特征分解

以下总结几个关于矩阵特征分解的实用特性：

定理 B.13. 一些方阵特征值、特征向量、特征分解的结果

对一般方阵 \mathbf{M} ，无论是否有重根，有以下定理：

- 所有 N_λ 个特征值的积即为 \mathbf{M} 的行列式值，可写成

$$\det(\mathbf{M}) = \prod_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i^{n_i}$$

其中， n_i 为代数重数 (algebraic multiplicity)。

- 所有 N_λ 个特征值的和即为 \mathbf{M} 的迹 (trace)，可写成

$$\text{trace}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{N_\lambda} n_i \lambda_i$$

- 如果 \mathbf{M} 为可逆矩阵^a，则 \mathbf{M}^{-1} 的特征值为 λ_i^{-1} 。 \mathbf{M}^{-1} 的特征向量与 \mathbf{M} 一样。
- 对解析或全纯 (holomorphic) 矩阵函数，如果写为 $f(\mathbf{M})$ ，则此矩阵函数的特征值为 $f(\lambda_i)$ 。
- 如果 \mathbf{M} 为厄米矩阵 (Hermitian)，或称自伴随 (self-adjoint) 矩阵^b，则 \mathbf{M} 的特征值全为实数，且其特征向量正交 (orthogonal)。
- 对方阵 \mathbf{M} ，特征值为 λ_i ，特征向量为 \mathbf{v}_i 的 特征方程 可写成

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

其 $c\mathbf{v}, c \neq 0$ 、 $e^{i\theta}\mathbf{v}, \theta \in \mathbb{R}$ 也仍是特征向量。

- 承上，非平凡解 $\mathbf{v} \neq 0$ 的充要条件有

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

有时又称色散方程 (dispersion equation) 或久期方程 (secular equation)。

- 如果一个特征值对应多个特征向量，则称简并 (degenerate)。简并情况下，该特征值的多个特征向量的线性组合仍是特征值的特征向量。
- 若 \mathbf{M} 能按基底矩阵 (或基底函数) 特征展开，则要求 \mathbf{M} 有“特征维度”个线性、独立的特征向量作为基底函数。
- \mathbf{M} 能特征展开并不表示 \mathbf{M} 可逆。 \mathbf{M} 可逆也并不表示 \mathbf{M} 能特征展开。

证明 参考一般线性代数教科书。

^a—矩阵可逆，若且唯若其特征值皆不为零。

^b即定义为满足 $\mathbf{M} = \mathbf{M}^H$ 的矩阵，其中， H 表示共轭转置算子。

□

矩阵应用在动态系统稳定性研究有时涉及 Cayley-Hamilton 定理，是一个数学结果，同时在物理学中有着重要的应用，特别是在线性动力学系统，此定理提供了一个矩阵与其特征多项式之间的关系。总结如下：

定理 B.14. Cayley-Hamilton 定理

对于任意 $n \times n$ 矩阵 \mathbf{A} ，及其对应的特征值 λ_i 。此定理表明矩阵 \mathbf{A} 满足其自身的特征值多项式方程。即，如果

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

是 \mathbf{A} 的特征值 λ_i 满足的特征多项式，其中， \mathbb{I} 是单位矩阵，则将 \mathbf{A} 代入 $p(\mathbf{A})$ 将得到零矩阵，其中， $p(\mathbf{A})$ 有

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbb{I} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

即

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

证明 参考一般线性代数教科书。

□

性质 B.8. 2×2 方阵的 Cayley-Hamilton 定理

对一般 2×2 方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

有特征值多项式 $p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$ 。根据 Cayley-Hamilton 定理，有

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - (a+d)\mathbf{A} + (ad-bc)\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 - (a+d)\mathbf{A} + (ad-bc)\mathbb{I} \\
 &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} + (ad-bc)\mathbb{I} \\
 &= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} + (ad-bc)\mathbb{I} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

此定理一般的典型的应用包含：

- 特征值-特征向量关系 \Rightarrow Cayley-Hamilton 定理与矩阵的特征值-特征向量性质密切相关。在物理学中，特征值和特征向量通常代表系统中的重要物理量。
- 动力学系统和线性变换 \Rightarrow 矩阵常用来描述线性物理系统随时间演变。Cayley-Hamilton 定理揭示了这些线性变换的行为。
- 量子力学 \Rightarrow 线性算符经常用矩阵表示，此定理发挥基础重要的作用。Cayley-Hamilton 定理可用于理解这些算符与其特征方程之间的关系，揭示潜在的量子动力学 (quantum dynamics)。
- 控制理论 \Rightarrow 在控制理论中，此定理与线性系统矩阵、稳定性相关。了解这些矩阵的特征值和特征向量对于稳定性分析和控制设计至关重要。

B.7.3 高维矩阵的基本介绍

首先，向量可以视为“一维”矩阵，比如：

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_i)$$

平时熟悉的矩阵为“二维”呈现，也可根据上式写成

$$\begin{pmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$$

对更高维度，可写成

维度	名称	表达形式
0	标量	1
1	向量	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$
2	矩阵	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
3	三维张量	$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \right]$
4	四维张量	...

“高维”矩阵有时又称张量 (tensor)。这里介绍常见的 Hadamard 积、直积、直和定义。此处略去高维矩阵的其它操作，更多讨论应参考相关教科书。

定义 B.12. Hadamard 积 (Hadamard product) \odot

对向量来说，除了点乘与叉乘外，有时候 Hadamard 积也有实用性，定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \odot \mathbf{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_i) \odot (y_1, y_2, \dots, y_i) \\ &= (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_iy_i)\end{aligned}$$

□

定义 B.13. Kronecker 积 (Kronecker product)、直积 (direct product) \otimes

对 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 与 $p \times q$ 矩阵 \mathbf{B} ，定义 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的 Kronecker 积或直积为

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

或写成

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{pmatrix}$$

为 $mp \times nq$ 矩阵。

□

以 2×2 矩阵为例，有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} & 2 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \\ 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} & 4 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 \times 0 & 1 \times 5 & 2 \times 0 & 2 \times 5 \\ 1 \times 6 & 1 \times 7 & 2 \times 6 & 2 \times 7 \\ \hline 3 \times 0 & 3 \times 5 & 4 \times 0 & 4 \times 5 \\ 3 \times 6 & 3 \times 7 & 4 \times 6 & 4 \times 7 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ \hline 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{array} \right) \end{aligned}$$

定义 B.14. 直和 (direct sum) \oplus

对 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 与 $p \times q$ 矩阵 \mathbf{B} ，定义 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的直和为

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O}_{m \times q} \\ \mathbf{O}_{p \times n} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

为 $(m + p) \times (n + q)$ 矩阵。

□

以下以 $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ 与 $\mathbf{B}_{3 \times 2}$ 为例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

则 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的直和有

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{3 \times 2} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

此外，一个大矩阵有些时候可以拆解成分块矩阵 (block matrix) 操作，将便于一些分

析。比如，对 5×5 的矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} ，写成

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

则其乘积可以分块矩阵描述，有

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注 对以上情况，使用分块矩阵的成立前提是： \mathbf{A} 矩阵分块的列 (column) 数与 \mathbf{B} 矩阵分块的行 (row) 数相等。如果 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 矩阵不是这么分块的话，那么上式不成立。由此推论，使用分块矩阵的结果将不适用于 \mathbf{BA} 。

性质 B.9. 直和运算的一些特性

在矩阵尺寸满足相应条件时，直和运算有如下特性：

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$$

$$(c\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (c\mathbf{B}) = c(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger \otimes \mathbf{B}^\dagger$$

$$f(\mathbb{I} \otimes \mathbf{A}) = \mathbb{I} \otimes f(\mathbf{A})$$

$$f(\mathbf{A} \otimes \mathbb{I}) = f(\mathbf{A}) \otimes \mathbb{I}$$

$$\text{Trace}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{Trace } \mathbf{A} \cdot \text{Trace } \mathbf{B}$$

$$e^{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \otimes e^{\mathbf{B}}$$

B.8 归一化完备基底函数展开特性

如果一函数 f 可以按归一化完备基底函数 f_i 展开, 写成

$$f(x) = \sum_i a_i f_i(x)$$

则其展开系数 a_i 按如下方式给出

$$a_i = \langle f(x) | f_i \rangle = \int_L dx \rho(x) f^*(x) f_i(x) = \sum_j a_j \delta_{ij}$$

根据不同问题、所选的不同基底函数, 积分范围 L 与权重函数 $\rho(x)$ 将不太一样。

以下给出几个典型的展开函数, 如:

- 三角/指数函数: $e^{imx}, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle e^{imx} | e^{inx} \rangle = \delta_{mn}$$

或写成

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)] dx = \pi \delta_{mn}, \quad m, n \geq 1 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)] dx = \pi \delta_{mn}, \quad m, n \geq 1 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)] dx = 0 \end{aligned}$$

- 贝塞尔 (Bessel) 函数: 当遇到在圆柱坐标下的微分方程求解或类似如下形式的方程求解时

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - n^2) f(x) = 0, \quad x \geq 0$$

符号解一般写成贝塞尔函数 $f(x) = A\mathcal{J}_n(x) + B\mathcal{Y}_n(x)$, 其中, \mathcal{J}_n 为第一类贝塞尔函数, $\mathcal{Y}_n(x) \equiv \frac{\mathcal{J}_n(x) \cos n\pi - \mathcal{J}_{-n}(x)}{\sin n\pi}$ 为第二类贝塞尔函数。 \mathcal{J}_n 满足如下正交关系

$$\langle \mathcal{J}_n | \mathcal{J}_m \rangle = \int_0^1 dx x \mathcal{J}_n(x) \mathcal{J}_m(x) = \delta_{nm}$$

且有 $\mathcal{J}_n(x) = (-1)^n \mathcal{J}_{-n}(x)$ 。正交关系还有

$$\int_0^R d\rho \rho \mathcal{J}_m \left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{R} \right) \mathcal{J}_m \left(\alpha_{mp} \frac{\rho}{R} \right) = \delta_{np} \frac{R^2}{2} \mathcal{J}_{m+1}^2(\alpha_{mn})$$

完备关系有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{R^2} \frac{\mathcal{J}_m \left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{R} \right) \mathcal{J}_m \left(\alpha_{mn} \frac{\rho'}{R} \right)}{\mathcal{J}_{m+1}^2(\alpha_{mn})} = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho'), \quad 0 \leq \rho, \rho' < R$$

或当 $R \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\int_0^{\infty} dk k \mathcal{J}_n(k\rho) \mathcal{J}_n(k\rho') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho'), \quad \rho, \rho' > 0$$

- 勒让德 (Legendre) 函数: 一般出现在球坐标下的微分方程求解

$$(1 - x^2) f''(x) - 2x f'(x) + n(n+1) f(x) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

符号解一般写成勒让德函数 $f(x) = AP_n(x)$, P_n 满足如下正交关系

$$\langle P_n | P_m \rangle = \int_{-1}^1 dx P_n(x) P_m(x) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

完备关系有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(x) P_n(x') = \delta(x - x')$$

几个低阶勒让德函数有

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

且有 $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$ 。

勒让德函数样貌大致如图 B.18 给出。

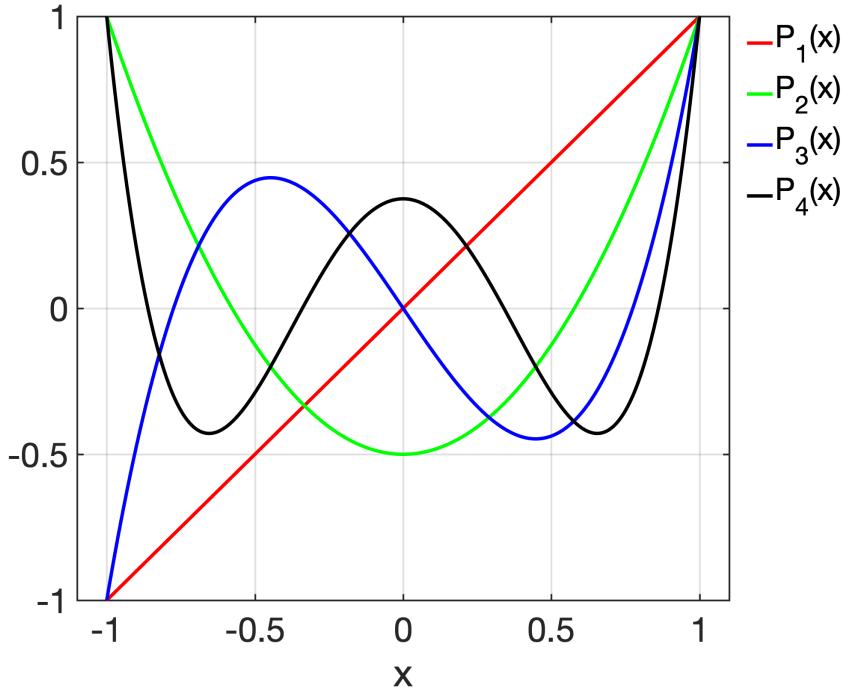


图 B.18: 勒让德函数。

- 埃尔米特 (Hermite) 多项式: 在与谐振子相关的微分方程求解时

$$f''(x) - 2xf'(x) + 2nf(x) = 0$$

符号解一般写成埃尔米特多项式, $f(x) = AH_n(x)$, 其中, 埃尔米特多项式定义为

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

其满足如下正交关系

$$\langle H_n | H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \delta_{nm} 2^n \pi^{1/2} n!$$

前几项埃尔米特多项式有

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

以上定义的埃尔米特多项式一般为物理学用的埃尔米特多项式 (physicist's Hermite polynomial)。在一些其它文献中, 特别是概率论, 埃尔米特多项式的定义不太一样⁸, 宜留意。

埃尔米特多项式样貌大致如图 B.19 给出。

关于以上讨论的更多细节, 可参考 Jon Mathews and R.L. Walker, Mathematical Methods of Physics, Addison-Wesley (1970) 或 George B. Arfken, Hans J. Weber, and Frank E. Harris, Mathematical Methods for Physicists, 7th ed., Elsevier (2013)。

⁸概率论的教科书一般定义为

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

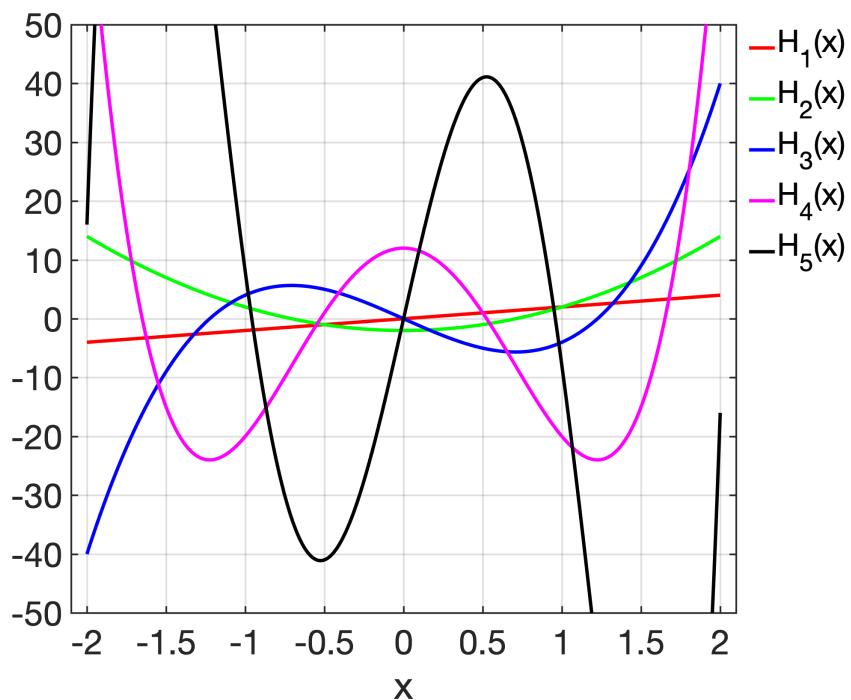


图 B.19: 埃尔米特多项式。

B.9 一元代数方程的一般解公式

- 一元二次 (quadratic) 代数方程

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

其解有

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 一元三次 (cubic) 代数方程: 又称 Cardano 公式 (Cardano formula)

定理 B.15. Cardano 公式

对一元三次代数方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, 其解可写成

$$\begin{aligned} x_1 &= S + T - \frac{b}{3a} \\ x_2 &= -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T) \\ x_3 &= -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} S &= \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}} \\ Q &= \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3} \end{aligned}$$

□

- 一元四次 (quartic) 代数方程: 又称 Ferrari 公式 (Ferrari formula) 或 Ferrari 方法 (Ferrari method)

定理 B.16. Ferrari 公式

对一元四次代数方程 $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, 其四个根 $x_{1,2,3,4}$ 可写成

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{b}{4} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}} \\ x_{3,4} &= -\frac{b}{4} + S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}} \end{aligned}$$

其中,

$$p = \frac{8c - 3b^2}{8}, \quad q = \frac{b^3 - 4bc + 8d}{8}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)}, \quad Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}$$

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12e$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27d^2 - 72ce$$

注 这里的 c 不是光速, e 不是指数底数。

□

B.10 时间平均定理

计算两个时变、向量函数的乘积的时间平均时，有以下结果：

定理 B.17. 时间平均定理

对时变、向量函数 $A(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ 与 $B(\mathbf{r}, t) = b(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ ，对时间平均取值，有

$$\langle \operatorname{Re}[A(\mathbf{r}, t)] \operatorname{Re}[B(\mathbf{r}, t)] \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \operatorname{Re}[A(\mathbf{r}, t)] \operatorname{Re}[B(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[a(\mathbf{r})b^*(\mathbf{r})]$$

或写成

$$\langle \operatorname{Re}[A] \operatorname{Re}[B] \rangle = \frac{1}{4} [ab^* + a^*b] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[ab^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[a^*b]$$

证明 将 A, B 的实部写成 $\operatorname{Re}[A] = \frac{1}{2}(A + A^*)$ 、 $\operatorname{Re}[B] = \frac{1}{2}(B + B^*)$ ，其乘积的时间平均

$$\langle \operatorname{Re}[A] \operatorname{Re}[B] \rangle = \frac{1}{4T} \int_0^T dt \{ abe^{-2i\omega t} + a^*b^*e^{2i\omega t} + ab^* + ba^* \}$$

其中，积分内的第一与第二项对时间积分后为零。 □

B.11 矩阵指数

矩阵指数 (matrix exponential) 是一种解决线性一阶常微分方程组的有用工具。此概念从一元一阶常微分方程衍生而来

$$\frac{dx}{ds} = x' = ax \Rightarrow x(s) = e^{as}C = e^{as}x(s=0)$$

其中， c 为待定常数，由初始条件决定，即 $x(s=0)$ 。

对 n 个一阶线性常微分方程组，方程组可写成

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{X}' = \mathbf{AX}$$

其解的符号形式可写成

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{As}}\mathbf{C}$$

其中， $e^{\mathbf{As}}$ 为 $n \times n$ 矩阵， \mathbf{C} 为 $n \times 1$ 待定常数向量，由初始条件决定，即 $\mathbf{X}(s=0)$ 。留意，这里的解不写成 $\mathbf{X} = \mathbf{Ce}^{\mathbf{As}}$ 。

受泰勒展开式的启发，这里的指数矩阵符号 $e^{\mathbf{As}}$ 可按如下方式“定义”：

定义 B.15. 指数矩阵 $e^{\mathbf{As}}$

对任意 $n \times n$ 矩阵 \mathbf{A} ，有

$$e^{\mathbf{As}} = \mathbb{I} + \mathbf{As} + \mathbf{A}^2 \frac{s^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^k \frac{s^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{s^k}{k!}$$

注 这是指数矩阵的一个“定义”，不是“定理”。这个定义告诉我们如何操作指数矩阵运算。

练习 B.6 利用以上定义，计算矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 对应的指数矩阵 $e^{\mathbf{As}}$

解

$$e^{\mathbf{As}} = \dots = \begin{pmatrix} 1 + 2s + 2^2 \frac{s^2}{2!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 3s + 3^2 \frac{s^2}{2!} + \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2s} & 0 \\ 0 & e^{3s} \end{pmatrix}$$

定理 B.18. 线性一阶齐次微分方程组的通解

对线性一阶齐次微分方程组

$$\mathbf{X}' = \frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{AX}$$

其通解可以证明有

$$\mathbf{X}(s) = e^{\mathbf{As}}\mathbf{C}$$

其中， \mathbf{C} 为 $n \times 1$ 常数向量，由初始条件决定。

证明

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{X}}{ds} &= \frac{d}{ds} e^{\mathbf{A}s} \cdot \mathbf{C} = \frac{d}{ds} \left(\mathbb{I} + \mathbf{A}s + \mathbf{A}^2 \frac{s^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^k \frac{s^k}{k!} + \cdots \right) \cdot \mathbf{C} \\ &= \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 s + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^3 s^2 + \cdots \right) \cdot \mathbf{C} \\ &= \mathbf{A} \left(\mathbb{I} + \mathbf{A}s + \mathbf{A}^2 \frac{s^2}{2!} + \cdots \right) \cdot \mathbf{C} \\ &= \mathbf{A} e^{\mathbf{A}s} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{X}\end{aligned}$$

□

定理 B.19. 线性一阶非齐次微分方程组的通解

对线性一阶非齐次微分方程组

$$\mathbf{X}' = \frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}(s)$$

其通解可以证明有

$$\mathbf{X}(s) = e^{\mathbf{A}s} \mathbf{C} + e^{\mathbf{A}s} \int_{s_0}^s e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{F}(\tau) d\tau$$

其中， $e^{-\mathbf{A}s} = (e^{\mathbf{A}s})^{-1}$ ， \mathbf{C} 为 $n \times 1$ 常数向量，由初始条件决定。

证明 参考高等数学教科书。



笔记 对单个线性一阶常微分方程 $x' = ax + f(s)$ 情况，通解有

$$x(s) = ce^{as} + e^{as} \int_{s_0}^s e^{-a\tau} f(\tau) d\tau$$

□

定理 B.20. 指数矩阵 $e^{\mathbf{A}s}$ 的拉普拉斯变换

将变换的坐标对应写为 $s \rightarrow \zeta$ ，则指数矩阵 $e^{\mathbf{A}s}$ 的拉普拉斯变换有

$$\mathcal{L}[e^{\mathbf{A}s}] = (\zeta \mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

其中， $\mathbb{I} = \mathbf{X}(0)$ 为单位矩阵。

证明 参考高等数学教科书。

□

B.12 二阶偏微分方程的分类与解法

在许多讲究量化的学科中，特别是物理或工程等应用学科，常用二阶偏微分方程来描述系统随时间或空间演化。一般来说， n 元二阶偏微分方程可写成如下一般形式

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

其中， $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为待解的函数， n 为方程式的维数， f 为源项或驱动项。系数 a_{ij}, b_i, c 或 f 可以是常数，也可以是函数。

数学上可将众多二阶偏微分方程分类。尽管分类方式不是唯一的，可根据“线性、非线性”、“齐次、非齐次”、“常系数、变系数”等。总结如下：

定义 B.16. 二阶偏微分方程的分类：齐次、非齐次

当 $f = 0$ 时，称齐次 (homogeneous) 微分方程。当 $f \neq 0$ 时，称非齐次 (inhomogeneous) 微分方程。 □

定义 B.17. 二阶偏微分方程的分类：线性、非线性

当方程中所有出现 u 的地方只有 u^1 ，称线性微分方程。当方程中出现 u 的地方高于 u^1 ，则称非线性微分方程。 □

定义 B.18. 二阶偏微分方程的分类：常系数、变系数

系数 a_{ij} 与 b_i 与 c, f 皆为与 x_i 无关的常数，称方程为常系数微分方程。系数 a_{ij} 与 b_i 与 c, f 之一与 x_i 有关，则称方程为变系数微分方程。 □

举几个例子，以下为线性、变系数、齐次微分方程

$$\sin x \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

以下为非线性、常系数、非齐次微分方程

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y^2 = 2$$

除了以上几种“直观”的分类外，这里给出一种根据解的方法与解特性的分类。就是说，根据以下分类，可以有目标地针对该类微分方程，利用专属的求解方法，或是能在一般框架下讨论其解的特性。

定义 B.19. 二阶偏微分方程的分类：椭圆、抛物、双曲

定义 a_{ij} 形成系数矩阵，有 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ ，方程的分类根据 \mathbf{A} 的特征值决定：

- \mathbf{A} 的特征值全为正数或全为负数，称偏微分方程为椭圆 (elliptical) 偏微分方

程，比如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z, t)$$

静场泊松或拉普拉斯方程为一例。

- A 的特征值部分为正数、部分为负数，但皆不为零，称偏微分方程为双曲 (hyperbolic) 偏微分方程，比如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z, t), \quad a > 0$$

电磁波方程为一例。

- A 的特征值有一为零，称偏微分方程为抛物 (parabolic) 偏微分方程，比如

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z, t), \quad a > 0$$

传导方程为一例。 □

由微分方程描述的问题要成为定解问题，除了方程本身之外，还需要边界条件，或称定解条件。如果方程式随时间演化，有初始条件 (initial condition)；如果随空间演化，则有边界条件 (boundary condition)。标准形式的定解条件可总结如下：

定义 B.20. 定解条件分类

定解条件分初始条件与边界条件，按如下分类：

- 初始条件：

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

或

$$\left. \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y, z)$$

- 边界条件：将边界写为 ∂D

- 第一类 (Dirichlet) 边界条件指明边界上待解函数值

$$u|_{\partial D} = g(x, y, z, t)$$

- 第二类 (Neumann) 边界条件指明边界上待解函数的法向导数值

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = f(x, y, z, t)$$

- 第三类 (Robin) 边界条件，又称混合边界条件

$$\left. \left(k \frac{\partial u}{\partial n} + h u \right) \right|_{\partial D} = \omega(x, y, z, t)$$

从数学看，如果列写的初始与边界条件满足以上标准形式，则方程的解为唯一。

从物理看，微分方程描述的是在系统“内部”，所关心的物理量如何随时间空间演化，将受到初始状态和边界状态影响。

注 如果边界条件足够远而影响不到系统内部所关心的区域，或者分析的场域范围

很大，则可不考虑边界。此时可近似仅考虑初始条件的影响即可，称初始值问题 (initial value problem, IVP)。

注 如果分析着重系统处于稳定状态，即 $\partial/\partial t \rightarrow 0$ ，则此时系统不再明显受时间的影响，此时可近似仅考虑边界条件，称边界值问题 (boundary value problem, BVP)。□

此讲义不打算巨细靡遗地介绍各种解法，此处仅总结几种典型的求解偏微分方程的解法：

- 分离变量法 (method of separate variables) ⇒ 通过对坐标变量分离，将偏微分方程转为常微分方程，使求解变简单。此法对一些标准问题较为实用，适用于不同的方程类型 (双曲、椭圆、抛物)，适用于不同的坐标系 (直角坐标、圆柱坐标、球坐标)，适用于不同维数的方程。缺点：要求边界场域为有界、齐次场域。
- 积分变换法 (integral transform) ⇒ 通过一种积分形式的运算，将待解的函数先变成一种“变换函数”。比如，将待解的 $u(x)$ 先变成 $U(s)$ ，可写成 $U(s) = \int_a^b K(s, x)u(x)dx$ ，其中， $K(s, x)$ 称为核函数 (kernel function)。不同的积分变换将给出不同形式的核函数。积分变换再分四种：傅里叶变换 (Fourier transform)、拉普拉斯变换 (Laplace transform)、梅林变换 (Mellin transform)⁹、汉克尔变换 (Hankel transform)¹⁰。积分变换法可视为将偏微分方程中被变换的变量化为代数方程，简化求解微分方程。此法适用于齐次、非齐次方程，适用于齐次、非齐次边界条件，适合无界场域或半无界场域，适用于不同的方程类型 (双曲、椭圆、抛物)。缺点：需知道使用何种变换，不太适用于对封闭场域。困难：逆变换不好求，一些特殊情况或许可以通过查表完成。
- 格林函数法 (Green function method) ⇒ 基于前面介绍的格林定理。适用于非齐次、具有激励源的方程求解。将待解方程先化简为点源 (或线源、面源)，求解对应的格林函数 (Green function)，再利用叠加原理，将原型微分方程的待解函数以格林函数的积分写出。此法适用于有边界与无边界场域，适用于不同的方程类型 (双曲、椭圆、抛物)，适用于静态或时变情况。缺点：此法对非线性、非齐次问题不好或甚至不可能处理。

⁹此讲义不打算介绍细节，梅林变换定义如下：

$$\begin{aligned} U(s) &= \int_0^\infty x^{s-1} u(x) dx \\ u(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} U(s) ds \end{aligned}$$

¹⁰此讲义不打算介绍细节， μ 阶汉克尔变换定义如下：

$$\begin{aligned} U_\nu(k) &= \int_0^\infty u(x) J_\nu(kx) x dx \\ f(x) &= \int_0^\infty U_\nu(k) J_\nu(kx) k dk \end{aligned}$$

感兴趣的读者，应自行查找高等数学教科书。

附录 C 目前正在设计、建设或运行的电子加速器参数

C.1 直线加速器¹

在电子同步加速器或储存环中，束团的自然(几何)发射度 $\epsilon_{x0} \propto \gamma^2$ ，随能量呈平方正比。在直线加速器中，束团的自然(几何)发射度则按 $\epsilon_{x0} \propto 1/\gamma$ ，随能量呈反比。因此，比起储存环，直线加速器能够产生发射度更低的电子束。由于光阴极电子枪的发展，现在能够产生单束团高电荷(nC)和归一化发射度在 $1 \mu\text{m}$ 量级的电子束团。常温注入器可以在 kHz 频率下运行，占空比(duty factor)为几个%。进一步提高重复频率或实现连续运行则需要使用超导光阴极电子枪注入器。

基于电子直线加速器产生超短 VUV 或 X 射线脉冲的需求日益增加，是这几年热门课题之一。对直线加速器来说，要产生超短辐射脉冲的前提为先产生高能、超短电子束。目前来说，利用直线加速器 off-crest 加速后的电子束，会在能量和纵向坐标之间产生关联，即啁啾(chirp)。再通过 §8.1 介绍的磁压缩器(chicane)，经过压缩，束团长度可以减小到 100 fs 以下(约 $30 \mu\text{m}$)。由于发射度、束团长度和能散不像在储存环中受到同步辐射效应影响而存在平衡值，基于直线加速器的电子束完全由电子枪与加速过程决定。此外，直线加速器为单次经过，电子从出生到终点所经历的时间长度约几 μs ，对长程集体不稳定性相对较不敏感。

表 C.1: 电子直线加速器。目前多用来驱动自由电子激光。标注 [a] 表示在直线加速器末尾经历束团压缩后的取值；[b] 表示切片值；[c] 表示在磁压缩器(chicane)出口取值。

	SLC	LCLS	LCLS-II	Europ, XFEL	ILC	SACLA
commissioned in	1987	2009	2022	2017	design	2011
type, normal (nc) / superconducting (sc)	nc	nc	sc	sc	sc	nc
Energy (GeV)	53	2.5 – 17	4	8 – 17.5	2×125	8.5
Gradient (MV/m)	18.5	18.5	16	23.6	31.5	36
f_{RF} (GHz)	2.856	2.856	1.300	1.300	1.300	5.712
#/linac	240	80	300 (SSA)	25	218	66
peak power (MW)	65	65	0.0038	10	10	50
pulse length (μs)	3.5	3.5		1380	727	2.5
RF flat top (μs)	0.35			650	1650	2.0
RF pulse rep.rate (Hz)	120	120	CW	10	5	60
bunches/second	120	120	10^6	27000	6560	60
bunch charge (pC)	6400	20 – 180	100	20 – 1000	3200	150 – 200
ϵ_{nx} (mm – mrad)	45	0.6	0.45	0.1 – 1.0		$0.7^{[b]}$
ϵ_{ny} (mm – mrad)	5	0.4	0.45	0.1 – 1.0		$0.7^{[b]}$
$\sigma_z(\mu\text{m})^{[a]}$	60 ^[c]	5	15	typ. 30		3
$\sigma_\delta(10^{-3})^{[a]}$	1.0	< 1	< 1 ($0.2^{[b]}$)	< 1		0.1

¹此节表格取自 G.A. Loew and H. Weise, Linear Accelerators for Electrons, 为 Handbook 一书的 §1.6.12。

C.2 常温、光阴极、射频电子枪的典型参数²

表 C.2: 常温、光阴极、射频电子枪的典型参数。

Parameter	Low Duty Cycle	High Duty Cycle
RF duty cycle	up to $\sim 10^{-2}$	up to 1
RF frequency [Hz]	$\sim (1 \text{ to } 12) \times 10^9$	$\sim (1 \text{ to } 7) \times 10^8$
RF cavity structure	multi-cell	single or multi-cell
RF source type	klystron	tetrodes, solid state
Average RF power [kW]	$\sim \text{a few}$	up to ~ 100
Cavity wall power density [W/cm ²]	$<\sim 30$	$<\sim 30$
Peak cathode field E_z [MV/m]	$\sim 60 - 140$	$\sim 20 - 35$
Cathode E_z at emission [MV/m]	$\sim 40 - 80$	$\sim 20 - 35$
Operational pressure [Pa]	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^{-9} \text{ to } 10^{-8}$
Beam repetition rate [Hz]	up to $\sim 10^3$	up to several 10^8
Beam energy [eV]	many 10^6	$\sim (0.5 \text{ to } 1.5) \times 10^6$
Charge per bunch [pC]	$\sim 0.1 \text{ to } 10^3$	$\sim 0.1 \text{ to } 10^3$
$\epsilon_{nx,ny}$ [m] (from low to high charge)	$\sim 10^{-7} \text{ to } 10^{-6}$	$\sim 10^{-7} \text{ to } 10^{-6}$
Laser pulse rms transverse size [mm]	$\sim 0.05 - 1$	$\sim 0.05 - 1$
Laser pulse rms length [ps]	few	several tens

²此节表格取自 F. Sannibale, Normal conducting rf photo gun, 为 Handbook 一书的 §7.1.15。

C.3 自由电子激光³

对单次经过、高增益自由电子激光器 (free-electron laser, FEL)，束团内连续分布的电子束团发生微群聚，形成一系列“微束团”，形成间隔一个共振辐射波长的切片。第 4 章介绍过，非相干同步辐射的强度与束团内电子数成正比，而相干辐射场的强度则与束团内电子数的平方成正比。基于直线加速器的自由电子激光器将超过同步辐射源的峰值亮度约 9 至 10 个数量级，超过同步辐射平均亮度约 4 个数量级，参考 §10.2。基于电子直线加速器产生超短 VUV 或 X 射线脉冲的需求日益增加，是这几年热门课题之一。由于电子直线加速器能够产生高能、高品质的超短电子束 (< 100 fs)，短波长自由电子激光器特别适合提供飞秒量级的脉冲持续时间，且产生的辐射场具有很好的横向相干性。

表 C.3: 长波长自由电子激光。

Location (Name)	Accelerator	E-beam energy (MeV)	FEL wavelength (μm)	Status
USA (JLab IR)	SRF ERL	80 – 150	10 – 0.7	Retired
Netherlands (FELIX)	NC linac	15 – 45	150 – 3	Operation
Russia (NovoFEL)	NC ERL	5 – 20	200 – 5	Operation
Germany (FELBE)	SRF linac	15 – 35	300 – 4	Operation
USA (DukeFEL)	Storage ring	240 – 1100	1 – 0.19	Operation

表 C.4: 短波长自由电子激光。

Location (Name)	Accelerator	E-beam energy (GeV)	FEL wavelength (nm)	Status
Germany (FLASH & II)	SRF L-band	1.2	40 – 4	Operation
Germany (Eu-XFEL)	SRF L-band	17.5	5 – 0.05	Operation
USA (LCLS)	NC S-band	15	5 – 0.05	Operation
USA (LCLS-II & HE)	SRF L-band	4(8)	5 – 0.25(5 – 0.05)	Construction
Japan (SACLA)	NC C-band	8	5 – 0.05	Operation
Italy (FERMI)	NC S-band	1.5	20 – 4	Operation
Korea (PAL-XFEL)	NC S-band	10	5 – 0.05	Operation
Switzerland (SwissFEL)	NC C-band	5.8	5 – 0.1	Operation
China (SXFEL)	NC C-band	1.5	10 – 2	Operation
China (SHINE)	SRF L-band	8	5 – 0.05	Construction

³此节表格取自 Z. Huang and P. Schmuser, Free-Electron Laser, 为 Handbook 一书的 §3.1.10。

C.4 同步辐射储存环⁴

基于电子同步加速器或储存环的同步辐射光源可大致分四代，如第 8 章 §8.10 介绍。除了第一代之外，以下给出第二代、第三代（又分低能、中能、高能区）与近年认定的第四代同步辐射储存环光源的一些指标参数。每一代的效能提高主要来自水平束发射度的降低，其按定标定律 $\epsilon_x \propto \gamma^2 \theta_c^3$ 缩放（参考 §8.9），其中， $\gamma = E/m_e c^2$ 是电子能量， θ_c 是磁聚焦结构单元节的弯转角度。如果也把储存环插件磁铁元件的贡献也考虑进来，那么发射度取决于所采用的磁格结构和插件磁铁的辐射。无论如何，这个定标定律表明要进一步降低同步辐射加速器的束团发射度的话，要保持适度（不过高）的电子能量，同时减小 θ_c ，即增加总弯转磁铁的数量，让每块弯转磁铁的弯转角度降低。同步辐射光源通常设计为一系列消色散段，每段包含二至三个弯转磁铁，通过增加消色散段来增加弯转磁铁的数量是趋势。较低的发射度意味着更大的储存环周长，原则上也能为更多光束线（beamline）服务。

储存环周长太大或是电子能量太高，对同步辐射储存环的好处有限。根据 §9.3 介绍，“超出”辐射场的衍射极限后，即对波长为 λ 的辐射， $\epsilon_{\text{电子束}} \leq \lambda/4\pi$ 后，进一步降低电子束发射度不会带来辐射输出特性的显著改善。假设周长为 2 km，则横向水平发射度大概能控制在 10^{-10} m 量级，对 $\lambda \geq 0.1$ nm 的辐射，其衍射极限表明电子束发射度的目标可以设定在约 10^{-11} rad m（横向 y 方向）即足够。除了降低发射度，提高储存环同步辐射输出亮度的另一种方法是提高束团电流。典型的同步辐射光源通常在几百 mA 下运行。通过利用横纵向反馈系统控制束团稳定性，再提高一点电流强度或许可行的。辐射亮度还取决于产生辐射的装置。对于扭摆器，辐射亮度与周期数成正比；对于相干性较好的波荡器，辐射亮度在某些频率或波长与周期数平方成正比。

此外，储存环还有一种操作模式，称储存环自由电子激光器（storage-ring FEL, SRFEL），其中，电子束与波荡器辐射的作用不再只是如第 5 章介绍的单向的，而是如第 10 章介绍的，形成受激辐射的电子-辐射场交互作用。目前 SRFEL 为“振荡器”模式，其中，光学腔中的辐射场伴随着电子束团与场的反复相互作用而建立起来。目前建造的几个 SRFEL 主要在红外光、可见光和紫外光波段运行。SRFEL 模式的缺点是 FEL 交互作用过程使电子束能散增加，从而降低 FEL 增益，使受激辐射的相干辐射过程停止。一般来说，在经过几个同步辐射阻尼时间后，电子束能散降低到一定程度后，SRFEL 机制重新启动。

降低发射度和提高束团电流意味着 Touschek 寿命减短，如果要保持恒定束流，此时需要更频繁的注入（§8.6.5）。现在许多电子同步辐射储存环采用一种称“恒流注入”（top-up injection）模式——结合离轴注入模式，如今已经成为一种范式，旨在保持储存环束流的电流基本恒定，以最大程度地维持稳定的同步辐射输出效能。

⁴此节表格取自 Z. Zhao, Synchrotron Radiation Facility, 为 Handbook 一书的 §1.6.22。

基于同步辐射储存环产生超短 VUV 或 X 射线脉冲的需求日益增加，是这几年热门课题之一。目前来说，产生短于 100 fs 的可见激光脉冲长度的技术相对成熟，但是对电子同步辐射储存环来说还有难度。由于同步辐射阻尼与量子激发效应，电子储存环平衡时的束团长度大约在 10 ps 量级(约 1 mm)。从 §8.4 讨论知， $\sigma_z \propto \sqrt{\alpha_c}$ ，因此，降低动量紧缩因子可减小束团长度。但是，更短的束长意味着单束团峰值电流提高，可能出现微波不稳定性，大致服从 Chao-Gareyte 定标定律(§13.8.2)。目前较少电子储存环能在 1 ps 束长下运行，如 BESSY-II。另一种方式为通过飞秒激光脉冲对储存环中的电子束进行能量调制，受到能量调制后的电子束经过弯转磁铁，由于色散，电子束内受到调制的切片产生额外的横向位移。再让此电子束经过下游一波荡器，用来产生 100 fs 辐射脉冲，以此产生超短辐射脉冲，称“飞秒切片”(femtoslicing) 技术。限制是利用这种方式产生的光子数较低，且受激光系统 kHz 重复频率的限制。除了以上两种方式，目前似乎没有其它基于同步辐射储存环的技术能产生 100 fs 量级的辐射脉冲。

表 C.5: 二代同步辐射光源。标注 * 为已退役。

Name	Energy (GeV)	Circumference (m)	Geom. Emittance (nm-rad)	Current (mA)	Location	Operation time/Status
SRS*	2.0	96	110	250	Daresbury	1980
NSLS*	2.8/0.8	170/51	120/160	300/1000	Upton, NY	1982
(x-ray/VUV)						
PF	2.5	187	36	450	Tsukuba	1982
BESSY*	0.8	62.4	150	600	Berlin	1982
UV-SOR*	0.75	53.2	27	350	Okazaki	1983
UV-SOR III	0.75	53.2	17.5	300	Okazaki	2012
Aladdin*	0.8	90	41	280	Stoughton	1985
Super-ACO*	0.8	72	37	500	Orsay	1987
HLS*	0.8	66.13	160	250	Hefei	1991
HLS-II	0.8	66.13	38	300	Hefei	2015
CAMD	1.3	55.2	150	250	Baton Rouge, LA	1992
Siberia-2	2.5	124.13	76	300	Moscow	1996
LNL S	1.37	93.2	70	250	Campinas	1997
SPS	1.2	81.3	41	150	Khorat	2003

表 C.6: 三代同步辐射光源 - 低能区。标注 * 为已退役。

Name	Energy (GeV)	Circumference (m)	Geom. Emittance (nm-rad)	Current (mA)	Straight sections	Location	Operation time>Status
ALS	1.9	196.8	2.1	400	12 × 6.7 m	Berkeley	1993
Elettra	2.0/2.4	259	7	300	12 × 6.1 m	Trieste	1994
TLS	1.	120	22	360	6 × 6 m	Hsinchu	1994
PLS	2.0	280.6	12.1	200	12 × 6.8 m	Pohang	1994
MAX-II*	1.5	90	8.8	280	10 × 3.1 m	Lund	1996
BESSY-II	1.7	240	6.1	200	8 × 5.7 m	Berlin	1999
New SUBARU	1.5	118.7	38	500	4 × 2.6 m	Hyogo	2000
SAGA-LS	1.4	75.6	7.5	300	2 × 14 m		
Aichi SR	1.2	72	53	300	8 × 2.93 m	Saga	2005
SOLAIRE	1.5	96	6.0	500	4 × 5.4 m	Aichi	2013
MAX-IV/1.5	1.5	96	6.0	500	12 × 3.5 m	Krakow	2017
				500	12 × 3.5 m	Lund	2019

表 C.7: 三代同步辐射光源 – 中能区。

Name	Energy (GeV)	Circumference (m)	Geom. Emit. (nm-rad)	Current (mA)	Straight sections	Location	Operation time/Status
SLS	2.4 – 2.7	288	5	400	3 × 11.7 m 3 × 7 m 6 × 4 m	Villigen	2011
ANKA	2.5	110.4	50	200	4 × 5.6 m 4 × 2.2 m	Karlstuhle	2002
CLS	2.9	170.88	18.1	500	12 × 5.2 m 2 × 7.6 m	Saskatoon	2003
SPEAR3	3.0	234	12	500	4 × 4.8 m 12 × 3.1 m 4 × 12 m	Stanford	2003
SOLEIL	2.75	354.1	3.74	500	12 × 7 m 8 × 3.8 m	Paris	2007
Diamond	3.0	561.6	2.7	300	6 × 8 m 18 × 5 m	Oxford	2007
ASP	3.0	216	7 – 16	200	14 × 5.4 m	Clayton	2007
INDUS-II	2.5	172.5	58	300	8 × 4.5 m	Indore	2008
SSRF	3.5	432	3.9	300	4 × 12 m 16 × 6.5 m 4 × 8 m	Shanghai	2009
ALBA	3.0	268.8	4.5	400	12 × 4.2 m 8 × 2.6 m	Barcelona	2011
PLS-II	3.0	281.82	5.9	400	10 × 6.86 m 11 × 3.1 m	Pohang	2012
NSLS-II	3.0	791.96	0.9 (DW)	400	15 × 9.3 m 15 × 6.6 m	NY	2015
TPS	3.0	518.4	1.6	400	6 × 11.7 m 18 × 7 m	Hsinchu	2016
SESAME	2.5	133.12	26	400	8 × 4.44 m 8 × 2.38 m	Allan	2017
SLiT-J	3.0	353	0.92	500	16 × 5.44 m 16 × 1.84 m	Sendai	Construction
SPS-II	3.0	321.3	0.960	300	14 × 5.35 m	Khorat	Approved

表 C.8: 三代同步辐射光源 – 高能区。

Name	Energy (GeV)	Circumference (m)	Geom. Emit. (nm-rad)	Current (mA)	Straight sections	Location	Operation time/Status
ESRF	6.0	844.4	4	200	32 × 6.3 m	Grenoble	1994
APS	7.0	1104	3	100	40 × 5.8 m	Argonne	1996
SPring-8	8.0	1436	2.8	100	44 × 6.6 m 4 × 30 m	Hyogo	1997
PETRA-III	6.0	2304	1.0 (DW)	100	1 × 20 m 8 × 5 m	Hamburg	2010

表 C.9: 四代同步辐射光源。标注 * 为已开始或完成技术设计报告。

Name	Energy (GeV)	Circumference (m)	Geom. Emit. (pm-rad)	Current (mA)	Straight sections	Location	Operation time/Status
MAX-IV	3.0	528	330	500	20 × 4.73 m	Lund	2017
ESRF-EBS	6.0	844.4	133	200	40 × 1.3 m	Grenoble	2020
Sirius	3.0	518.4	250	350	10 × 7.0 m	Campinas	2020
APS-U	6.0	1104	42	200	40 × 5.8 m	Argonne	Construction
ALS-U	2.0	196.5	108	500	12 × 6.7 m	Berkeley	Construction
HEPS	6.0	1360	34	200	48 × 6.0 m	Beijing	Construction
SKIF	3.0	476.14	75	400	16 × 6.0 m	Novosibirsk	Construction
Elettra 2.0	2.0	259	250	400	12 × 6.1 m	Trieste	Approved
SLS 2.0	2.7	288	158	400	3 × 10.0 m	Villigen	Approved
MSRF	4.0	798.8	58	400	3 × 5.7 m	Ochang	Approved
HALF*	2.2	480	85	400	28 × 6.5 m	Hefei	Approved
SOLEIL-U*	2.75	353.9	84.4	500	20 × 5.5 m	Paris	Tech. design
Diamond-II*	3.5	560.57	160	300	20 × 2.2 m	8 × 4.15 m	Tech. design
PETRA-IV*	6.0	2304	43/20 (DW)	100	44 × 5.3 m	8 × 2.73 m	Oxford
SPRING 8-II*	6.0	1435.5	111/50 (DW)	200	44 × 4.7 m	6 × 7.54 m	Tech. design
					4 × 30 m	24 × 2.92 m	Hamburg
						44 × 5.3 m	Hyogo
						4 × 30 m	Tech. design

C.5 能量循环/回收直线加速器⁵

一般来说，直线加速器的单束团电荷量在 pC 至 nC 量级，重复频率约 kHz (室温)，平均电流将在 μA 量级。对能量回收直线加速器，能够实现与直线加速器同样量级的单束团电荷量，且在几百 mA 连续波 (continuous-wave, CW) 模式运行，其中，最高束团重复频率即射频腔频率，与储存环一样。但不同于储存环，能量回收直线加速器属于单次经过加速器，意味着速调管要向束流提供约 GW 量级的功率。一个缓解速调管负担的方法即在电子束完成其任务后，设法回收束流能量。在能量回收直线加速器中，束团在产生辐射场后将再次回到经过适当调整相位为减速相位后的加速腔，将其能量返回给腔中的射频场。一来缓解速调管负担，同时降低在束流垃圾桶的辐射危害。

	E [MeV]	I_{ave} [mA]	Q_b [pC]	ϵ_x^N [μm]	Rep. rate [MHz]	Duty [%]
Chalk River	25	30	10	50	3000	0.1
Bates-MIT	400	10	3.5	10	2856	1
HEPL	48	0.6	50	10	11.8	pulsed
CEBAF-FET	45	0.3	0.2	5	1497	100
JLab IR Demo	20 – 50	5	60	10	75	100
CEBAF-ER	1050	0.09	0.2	1	500	100
JAERI	17	40	500	30	80	pulsed
BINP	22	30	2000	30	22.5	100
JLab IR Upgrade	165	9	135	10	75	100
ALICE	27.5	8.125	100	1.2	81.25	0.1
JLab UV Demo	135	2.5	60	5	37.5	100

⁵此节表格取自 S.A. Bogacz, D.R. Douglas, G.A. Krafft, Recirculated Energy Recovery Linacs, 为 Handbook 一书的 §4.4.1。

C.6 对撞机⁶

早期的粒子物理实验主要为固定靶 (fixed target) 模式，即将带电粒子加速到一定能量后，轰击原子靶，然后对轰击产物进行统计分析。随着粒子物理实验的进展，粒子物理理论得到蓬勃发展，一些能量更高的次粒子被预言。为了产生这些能量更高的次粒子或更基本的粒子，需要建设更高能量的实验设备。固定靶模式会将大多数的束团能量浪费在轰击产物的动能上，于是，粒子物理学家想出一种能够大大节约能量、更有效撞击目标粒子的方法，就是加速两束运动方向相反的粒子，精准地操控两束粒子束的空间位置与时刻，使在极小的区域内对撞。由此可使粒子的动能被最有效利用，此种模式称对撞模式 (colliding beam)⁷。

对两种模式，我们关心的是质心能量 (center-of-mass energy)。对固定靶模式，质心能量为

$$E_{\text{cm}} \approx \sqrt{2m_0c^2}\sqrt{E}$$

其中， m_0 为靶的静止质量， m_0c^2 为靶的静止能量， E 为被加速粒子的总能量。

对对撞模式，质心能量为

$$E_{\text{cm}} = 2\sqrt{E_1 E_2}$$

其中， $E_{1,2}$ 分别为两对向对撞粒子的总能量。当两束粒子能量一样时， $E_1 = E_2 = E$ ，有 $E_{\text{cm}} = 2E$ 。由此可见，对撞模式的有效质心能量比固定靶模式高。



笔记 质心能量独立于观察坐标。有时候， E_{cm} 写成 \sqrt{s} 。

衡量对撞机的对撞亮度除了用名义上的对撞亮度 (nominal luminosity) 外，通常还涉及一个物理效应，称沙漏效应 (hourglass effect)，总结如下：

定义 C.1. 沙漏效应

在对撞模式实验中发生的一种现象，意指两粒子束团对撞时，相互作用区域 (interaction region, IR) 严格来说不是一个“点”——尽管很多时候我们习惯称对撞点 (interaction point, IP) ——而是一段有限距离的空间。束团在理想设计时考虑的情况为对撞在一点，其位置具有最小的 betatron 函数，写成 β^* ，但使劲将束团横向压缩到非常小的 β^* 时，比如 $\beta^* \sim 1 \text{ cm}$ ，此时在对撞点附近很短的距离内，betatron 函数的变化将非常剧烈，也就伴随剧烈变化的束团横向尺寸，从而对撞亮度将跟着改变 (减小)。此种效应在当纵向束团长度较长时或 β^* 极小时特别明显。

⁶此节表格取自 W. Chou, Collider, 为 Handbook 一书的 §1.6.3。

⁷两对撞束团中的极少部分粒子 (10 万分之一或更少) 真的撞上了，绝大多数粒子都没撞上。但是，绝大多数粒子都受束-束电磁作用 (beam-beam interaction) 影响。

表 C.10: 正负电子对撞机。其中, 标注 [a] 表示单环 (single ring, SR)、双环 (double ring, DR)、直线对撞机 (linear collider, LC); [b] 表示最高记录; [c] 表示 Princeton-Stanford Colliding Beam Experiment; [d] 表示当时在 Orsay 运行时的结果; [e] 表示探测器不含螺线管的情况; [f] 表示设计指标。注意, CBX 与 VEP-I 为 $e^- e^-$ 对撞机。

Location	Name (type ^[a])	Beam Energy ^[b] (GeV)	Luminosity ^[b] ($\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$)	Operation Period
Stanford/SLAC, USA	CBX ^[c] ($e^- e^-$ DR)	0.5	2×10^{28}	1963 – 1968
	SPEAR (SR)	4	1.2×10^{31}	1972 – 1988
	PEP (SR)	15	6×10^{31}	1980 – 1990
	SLC (LC)	49	2.5×10^{30}	1989 – 1998
Frascati, Italy	PEP-II (DR)	9 (e^-) 3.1 (e^+)	1.2×10^{34}	1998 – 2008
	AdA (SR)	0.25	5×10^{25} ^[d]	1961-1964
	ADONE (SR)	1.5	6×10^{29}	1969 – 1993
	DAΦNE (SR)	0.51	2.4×10^{32} 4.5×10^{32} ^[e]	1999-present
BINP, Russia	VEP-1 ($e^- e^-$ DR)	0.16	5×10^{27}	1964 – 1968
	VEPP-2 (SR)	0.67	4×10^{28}	1966 – 1970
	VEPP-2M (SR)	0.7	5×10^{30} (@511)	1974 – 2000
	VEPP-3 (SR)	1.55	2×10^{27}	1974 – 1975
	VEPP-4M (SR)	6	2×10^{31}	1984-present
	VEPP-2000(SR)	1	5×10^{31}	2010-present
Cambridge, USA	CEA Bypass (SR)	3	8×10^{27}	1971 – 1973
Orsay, France	ACO(SR)	0.54	1×10^{29}	1965 – 1975
	DCI(SR)	1.8	1.7×10^{30}	1977 – 1985
DESY, Germany	DORIS (SR)	5.6	3.3×10^{31}	1973 – 1993
	PETRA (SR)	23.4	2.4×10^{31} (@17.5)	1978 – 1986
CERN, Europe	LEP (SR)	104.5	1×10^{32}	1989 – 2000
Comell, USA	CESR (SR)	5.5	1.3×10^{33}	1979 – 2008
KEK, Japan	TRISTAN (SR)	32	4.1×10^{31}	1986 – 1995
	KEKB (DR)	8 (e^-) 3.5 (e^+)	2.1×10^{34}	1998 – 2010
	SuperKEKB (DR)	7 (e^-) 4 (e^+)	8×10^{35} ^[f]	2016-present
IHEP, China	BEPC (SR)	2.4	1×10^{31} (@1.84)	1988 – 2004
	BEPC II (DR)	2.47	1×10^{33} (@1.89)	2009-present

定理 C.1. 沙漏因子 H

对横向圆束团，有

$$H(r) \equiv \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_{\text{nominal}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\zeta^2}}{1 + \left(\frac{\zeta}{r}\right)^2} d\zeta = \sqrt{\pi} r e^{r^2} \operatorname{erf}(r) < 1$$

其中， $r = \beta^*/\sigma_z$ 。 $R(r)$ 样貌如图 C.1 给出，可以看到，当 β^* 越小，表示在对撞点附近的横向束团尺寸变化越剧烈，沙漏效应导致的亮度衰减越明显；当 σ_z 越小，则对撞发生在更短距离内，实际对撞亮度更接近名义上的对撞亮度。□

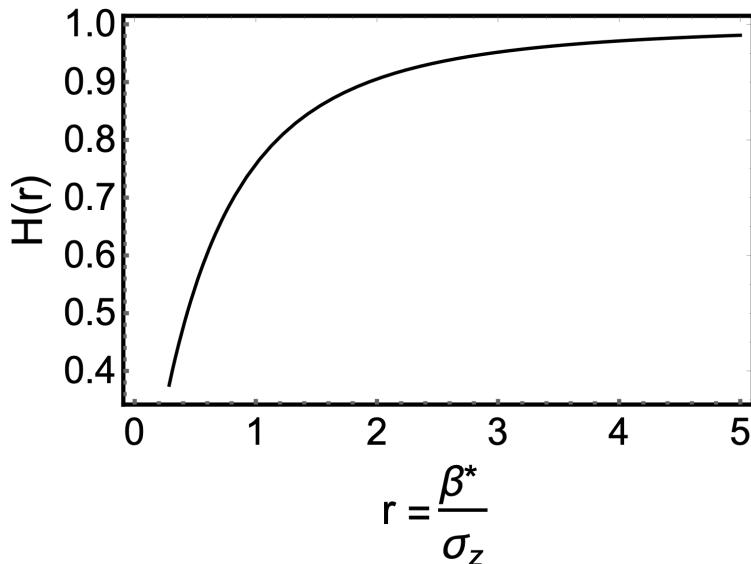
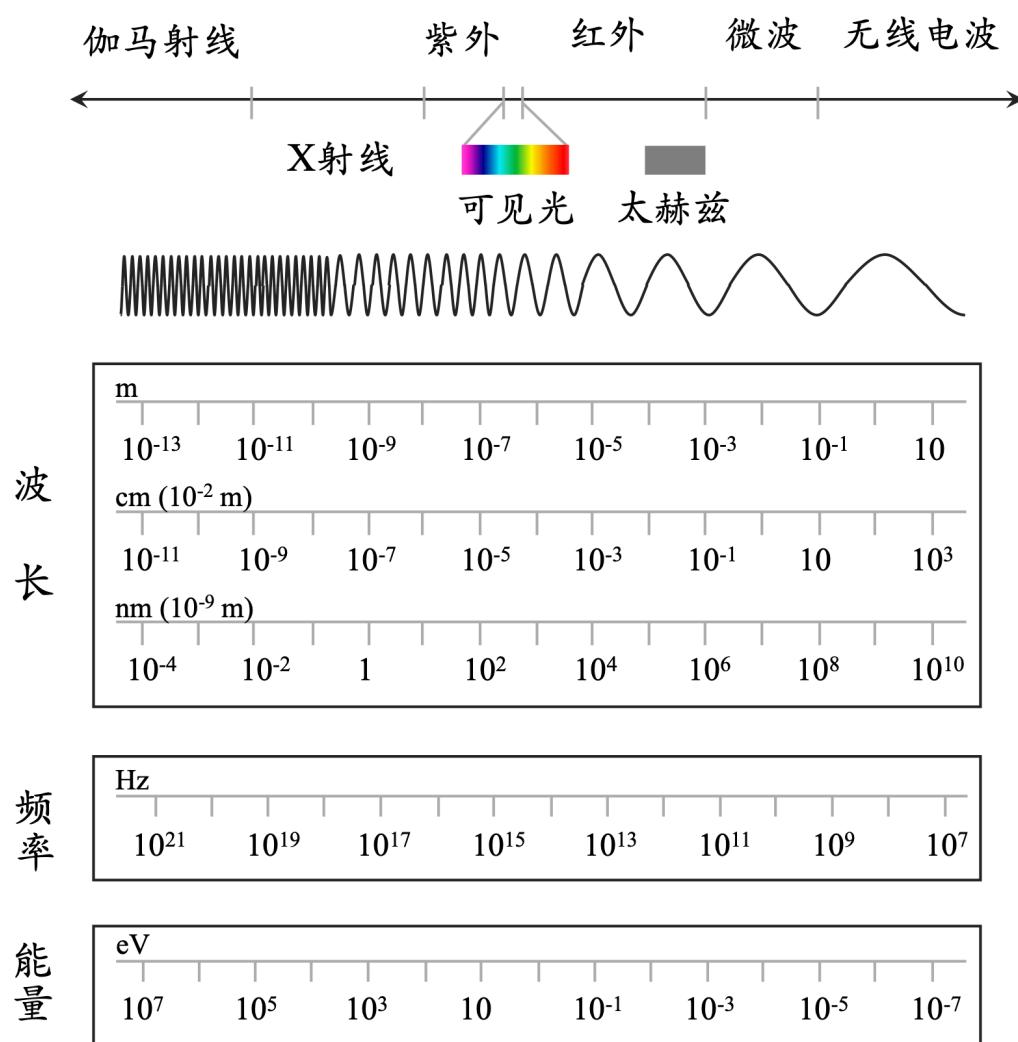


图 C.1：对撞亮度由于沙漏效应导致的亮度衰减因子。

类似于辐射光源分“代”(generation)，近年来，加速器对撞机社群也拟将对撞机分“代”。

1. **第一代**：单环。主要追求质心能量，通过增加电流强度与低 β 插入节 (low- β insertion) 提高对撞亮度。对撞位置的 $\beta^* \sim 10 \text{ cm}$ 。此代对撞机设计没有明显的色品矫正。
2. **第二代**：双环、多束团对撞。追求对撞亮度。交叉角 (又称 Piwinski 角) 相对较小。对撞位置的 $\beta^* \sim 1 \text{ cm}$ 。此代对撞机设计已开展局部色品矫正。
3. **第三代**：双环、多束团对撞。追求更高的对撞亮度。交叉角 (又称 Piwinski 角) 相对较大，采用 crab waist (CW) 对撞机制，在其它参数不变情况下，对撞亮度可增加一至两个数量级。对撞位置的 $\beta^* \sim 1 \text{ mm}$ 。此代对撞机设计追求全面优化。

附录 D 电磁频谱



附录 E Livingston 图

由于加速粒子的新技术不断突破、发展，加速器粒子能量随时间提升可通过所谓的“Livingston 图”体现。该图以美国加速器学家 M.S. Livingston 的名字命名，他首次使用这种方法来展示粒子加速器发展历程。对对撞机而言，新粒子的产生和相互作用的重要参数是质心能量 (center-of-mass energy)。质心能量除了依赖于束团能量外，还取决于靶粒子的静止质量能量。下图为对撞机的等效束团能量，其中，质心能量是相等能量对撞束团的两倍。可以看到，过去半个世纪间，加速器能量提升大致按照此预测趋势。

定律 E.1. Livingston 定律

按 Livingston 图 E.1，美国加速器学家 Livingston 预测，自 1930 年起，每六年粒子加速器所能达到的等效能量将增加十倍。经过半个世纪，这个“天花板”预测至今似乎还算准确。

注 参考 M. Stanley Livingston and J.P. Blewett, Particle Accelerators, McGraw-Hill Book (1962)。

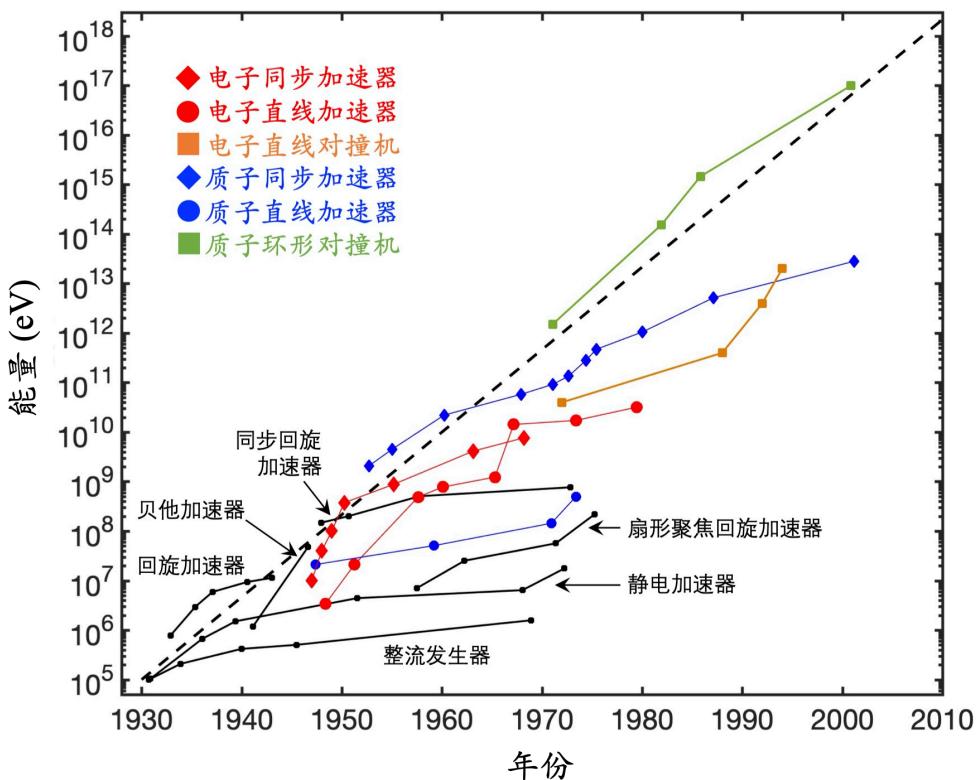


图 E.1: Livingston 图。图中右上角部分数据画出的是等效束团能量，因此有些数据点比熟知的能量高。电子同步加速器能量上限大约在 10 GeV，受同步辐射效应所限。

附录 F 粒子加速器对人类社会在方方面面的应用

此讲义主要介绍粒子加速器—特别是电子加速器—的束动力学与产生电磁辐射的原理，较少谈及应用。尽管不是此讲义的重点，此附录简要介绍粒子加速器对人类社会在方方面面的应用。

粒子加速器对人类社会的影响、贡献体现在诸多方面，包含支撑基础与应用研究、能源与环境、健康与医学、工业应用、材料表征等。以下内容从<http://www.accelerators-for-society.org>总结得到。对其中某些应用感兴趣的读者，可自行查找相关文献。

• 基础与应用科学的研究

- 高能物理、核物理 ⇒ 粒子物理学借助加速器研究亚原子结构，验证标准模型 (Standard Model)¹。更高性能的对撞机驱使加速器技术发展，挑战加速器物理学家不断突破技术极限。大型强子对撞机发现希格斯玻色子 (Higgs boson)，解锁部分科学谜团，更多未解的问题(如暗物质、暗能量等)仍推动加速器发展。加速器的应用不仅限于高能物理，还在核物理领域展现广泛影响。有些高能强子加速器致力于揭示原子核内基本粒子相互作用，以期增加对宇宙早期演化的了解。
- 材料科学 ⇒ 通过高亮度的光子、中子、和离子束，可实现强大的衍射 (diffraction) 和光谱 (spectroscopy) 技术，深入研究材料内部结构，助力凝聚态物理、材料科学、生物研究、药物开发、环境处理、排放控制、医疗和工业材料、高温超导、气候变化以及替代能源研究等领域。同步辐射、中子散射、离子轰击等技术不仅用于材料鉴定，还帮助选择适合高辐射环境的建造材料。粒子加速器设施如同步辐射源、自由电子激光、散裂中子源 (spallation neutron source) 等在世界范围内推动材料科学的前沿研究。
- 凝聚态物理 ⇒ 凝聚态物理研究物质的多种形态，从普通固液体到更奇特的超导体和玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensate)。结晶学或晶体学 (cystallography) 为研究固体材料排列的关键工具，利用粒子加速器产生的 X 射线或中子进行观察。这些技术在光伏、氢燃料和超导体等领域的研究中发挥重要作用。
- 生物和化学 ⇒ 在生物研究中，同步辐射光源产生的 X 射线被用于揭示蛋白质结构和大脑功能。
- 药物开发 ⇒ 粒子加速器的 X 射线晶体学技术在药物开发方面也取得了显著的成功，比如最近在 SLAC 开展的恶性黑色素瘤 (malignant melanoma) 治疗。

¹标准模型为粒子物理中的主要理论框架，描述宇宙中的基本粒子和力 (交互作用)。此模型包括夸克 (quark) 和轻子 (lepton)，为构成物质的基本组成部分，以及光子和 W、Z 玻色子等传递力的粒子。受电磁力、弱力和强力支配，该模型成功解释了目前已知的大多数的粒子相互作用。但是，此模型未涵盖重力。标准模型的预测已通过诸多实验证实，最近一次为 2012 年希格斯玻色子的发现。

• 能源与环境

- 清洁烟气 (flue gas) ⇒ 如小型电子加速器用于净化热电厂排放和水处理。
- 石油和天然气勘探 ⇒ 如中子测井技术及研究沥青质 (asphaltenes) 形成帮助提高勘探效率。
- 原油开采、处理 ⇒ 比如在 Rutherford Appleton Laboratory 的 ISIS 中子源的应用，提高了二氧化碳处理技术和榨油效率。
- 生物燃料 (bio-fuel) 预处理 ⇒ 电子束预处理技术用于生物柴油生产，提高了燃料效率。
- 加速器驱动系统 (Accelerator Driven Systems, ADS) ⇒ 主要涉及加速器驱动的亚临界反应堆 (Accelerator-Driven Subcritical Reactor)。通过加速器驱动的质子撞击亚临界核反应堆内的散裂靶，产生中子来维持核裂变过程。ADS 的亚临界燃料组件使系统更安全，但在反应堆停止后冷却失效的情况下，仍存在相同的安全风险。采用 ADS 系统可允许使用中子能量范围较广的裂变材料，例如含有次级锕系核素的废弃燃料，还可有效利用钍 (Thorium) 燃料，减少次级锕系核素废物的产生。

• 健康与医学

- 放射治疗 ⇒ 加速器治疗属于放射治疗的范畴。目前约有 50% 的癌症患者会接受放射治疗，通常与化疗或手术等其他治疗同时进行。最常见的放射治疗方式是体外放射治疗，即通过粒子加速器向体内发射束线。
 - X 射线治疗：为放疗的主要方式，通过高能 X 射线照射癌症肿瘤，破坏癌细胞 DNA，但可能损伤周围健康组织。现代治疗技术致力于提高肿瘤辐射剂量，同时减少对健康细胞的影响，以降低副作用风险。
 - 电子束治疗：正在开发的使用粒子加速器的新放疗技术，如质子疗法，显示出明显的减少副作用的迹象，因为健康组织中的辐射剂量减少了，对于某些类型的癌症，治愈癌症的可能性增加。这种技术使用与产生 X 射线相同类型的加速器，但电子直接射入肿瘤，适用于治疗靠近皮肤表面的肿瘤，因为电子在与体内原子相互作用时会很快失去能量。电子束治疗对体内健康组织的伤害要小得多，因为电子束不会穿过身体的所有部位。
 - 质子、中子、离子束治疗：合称强子 (hadron) 治疗，在治疗中使用的粒子束类型上有所不同。剂量沉积及其生物后果取决于粒子类型及其能量。由于粒子穿透和沉积能量的方式不同，不同的疗法用于治疗体内不同位置的不同形式的癌症。高能中子的剂量沉积与 X 射线非常相似。治疗上的区别在于中子具有更强的生物效应 (按沉积剂量杀死细胞)。对于数量有限的癌症和身体的某些部位为一优势。
- 图 F.1 给出不同种类与不同能量的粒子束穿透人体内部能力的关系。当带电粒子束在人体/物体中行进时，在即将停止前将大部分能量释放出来的现象称布拉格峰 (Bragg peak)，对应的曲线称布拉格曲线 (Bragg curve)。对光子束来说，剂量曲线则不像布拉格峰的样貌。

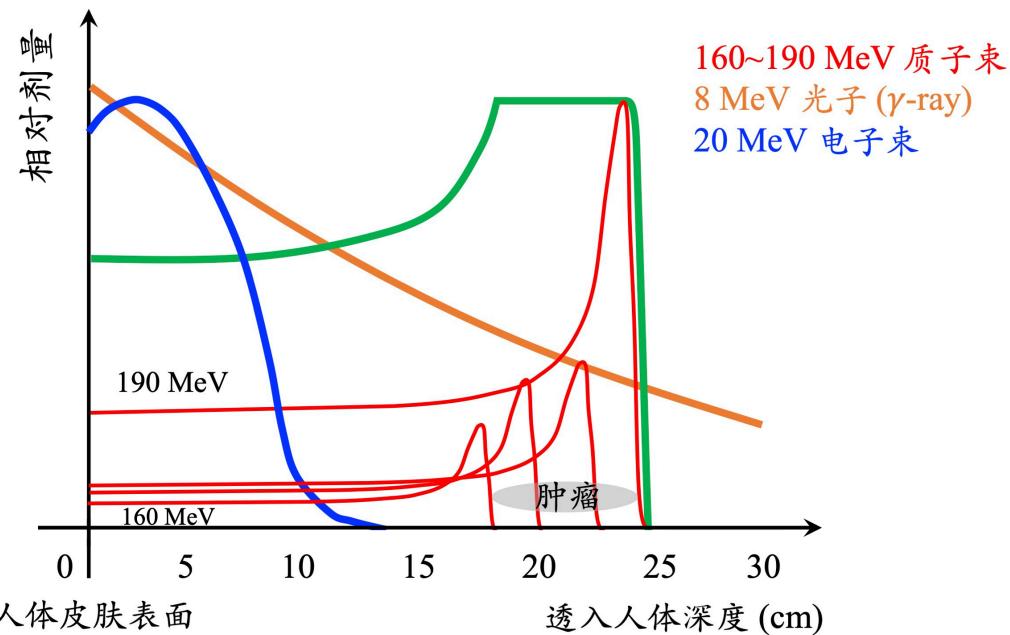


图 F.1: 不同种类与不同能量的粒子与其穿透人体内部能力之间的关系：20 MeV 的电子、8 MeV 的 γ 光子和 190 MeV 质子情况下，吸收剂量的深度分布。电子和光子主要影响组织的表层，而质子释放大部分能量到一个精确深度，该深度随着粒子能量的变化而变化。绿色线为一例子：当患者在治疗肿瘤(厚度为 6 cm，位于深度 18 至 24 cm 之间)时，使用不同能量的质子束辐射所接收的剂量分布。剂量集中在病变区域，对周围组织的损伤能有限度控制。

定义 F.1. 布拉格峰 (Bragg peak)

当一带电粒子在物体中前进时，会在其行进的方向上对物体内的原子产生电离 (ionization) 现象，在其减速直至停止前，将一定剂量的能量释放到该物体中。由于电离作用的截面积随减速过程增加，能量释放的尖峰会发生在该粒子即将停止之前。

注 对不同粒子束，其布拉格曲线可通过数值模拟或实验量测得到。感兴趣的读者可以查找如何通过理论/解析方法得到布拉格曲线。提示：可查找关键词 Bethe formula 或 Bethe-Bloch formula。 □



笔记 由于质子束的此种特性，1946 年，Robert Wilson 首次推荐将质子束应用于癌症治疗²。在医学上，此种大部分能量在人体组织中集中释放的现象，被发展成质子刀而充分应用到对癌症的放射性治疗。只要以三度空间瞄准所要治疗的肿瘤，并以准备好的质子束将能量集中释放在特定肿瘤位置，便可以精准地破坏肿瘤细胞，而不伤害到周围正常的组织细胞。

- 医学成像 ⇒ 为一极其重要的医学领域分支，在诊断和研究中都有应用。大多数人都会在身体的某个部位拍摄图像进行诊断，比如拍摄牙齿的 X 射线图像，

²Robert R. Wilson, Radiological Use of Fast Protons, Radiology. 47 (5): 487-491 (1946). <https://pubs.rsna.org/doi/10.1148/47.5.487>.

或是进行全身磁共振成像扫描。加速器对新成像技术发展的直接作用 — 作为射线摄影的 X 射线源 — 和间接作用 — 在核磁共振成像背后的物理原理发展 — 都扮演重要角色。几种常见的医学成像有：

- 正电子发射断层扫描 (Positron Emission Tomography, PET)
- 质子计算机断层扫描 (Proton Computerized Tomography, CT)
- 磁共振成像 (Magnetic Resonance Imaging , MRI)
- 生产医用材料 ⇒ 粒子加速器已成为生产工业定制材料的重要工具，医疗行业也不例外。事实上，假体植入物、人工心脏瓣膜或水凝胶等特殊材料通常都是利用加速器生产的。
- **工业应用**：在过去 60 年中，为工业应用建造了超过 24000 台粒子加速器。这些加速器每年用于生产或制备价值超过 5000 亿美元 (3.2 万亿人民币) 的产品，各种形式的加速器被广泛用于生产或制备各种不同的产品。
 - 半导体电子器件：粒子加速器用于半导体器件生产，提高半导体质量和降低成本。
 - 表面硬化 (surface hardening)：离子注入技术和电子束焊接用于硬化表面，制造坚固的材料。
 - 材料加工：包括电子束焊接、电子束加工和电子束热处理，广泛应用于材料处理。
 - 聚合物交联 (cross-linking polymers)：电子束用于聚合物交联，如制造收缩包装和复合材料。优势是交联过程不需要化学催化剂，因此相对“干净”、“环保”。
 - 处理废物和医疗材料：小型粒子加速器用于生产医疗器械，进行消毒，同时处理废物。
 - 食品保存：电子束在食品处理中发挥作用，防止细菌和昆虫滋生，保持食品新鲜。

附录 G 符号表

以下总结这份讲义采用的符号列表。

符号	意义
A	质量数
$\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}$	电磁场的向量位函数 (时域、频域)
$\text{Ai}(x)$	艾里函数
a	FEL 归一化复包络场、归一化强激光幅值 $a = q \mathbf{A} /m_e c$
a_u	波荡器参数 $a_u = K_u/\sqrt{2}$
α_c	动量紧缩因子
α_f	精细结构常数
α_x, α_y	Courant-Snyder 参量
$\alpha_h, \alpha_v, \alpha_\epsilon$	同步辐射阻尼率
B	磁场函数、磁感应强度函数
$\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}$	磁场函数、磁感应强度函数 (时域、频域)
\mathcal{B}	辐射束亮度、电子束亮度
B_{mag}	Courant-Snyder 失配参数
$\text{Bi}(x)$	艾里函数
$b(k)$	群聚因子
b_n	n 次谐波群聚因子
β	洛伦兹因子 $\beta = v/c$ 、谐振腔耦合因数 $\beta = Q_0/Q_e$
$\beta_x, \beta_y, \beta_z$	Courant-Snyder 参量
C	压缩因子 $C = \sigma_{zi}/\sigma_{zf}$
C_0	储存环周长
C_q	同步辐射常数 $C_q \approx 3.832 \times 10^{-13} \text{ m}$
C_γ	同步辐射常数 $C_\gamma \approx 8.846 \times 10^{-5} \text{ m/GeV}^3$
$\text{Ci}(x)$	cosine 积分
c	真空光速 $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
cn	椭圆函数
\mathcal{C}	自相关函数、互相关函数
$\mathcal{C}(x)$	Fresnel 积分、Cornu spiral 积分
D	色散函数
D'	色散函数一阶导数
$D(\xi)$	Touschek 函数
D_\pm	Dawson 函数
d	粒子-粒子间碰撞冲击参数
dn	椭圆函数
$\mathbf{D}, \tilde{\mathbf{D}}$	电场函数、电位移向量函数 (时域、频域)
\mathcal{D}	同步辐射相关量 $\mathcal{D} = \mathcal{I}_4/\mathcal{I}_2$
δ	能量偏差因子 $\delta = \Delta E/E_0$ 、Dirac delta 函数
$\delta(\omega)$	趋肤深度

符号	意义
E	电场函数
$E(k), E(\phi, k)$	不完整第二类椭圆积分
$E_1(x), \text{Ei}(x)$	指数积分
E	不完整第二类椭圆积分
$\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}$	电场函数(时域、频域)
\mathcal{E}	(归一化)电场函数
$E_\gamma, E_{\gamma c}$	光子能量、临界能量
$\text{erf}, \text{erfc}, \text{erfi}$	误差函数、互补误差函数、虚误差函数
e	电子电荷(不带号) $q = -e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、指数底数 $e \approx 2.71828$
$\mathbf{e}_{x,y,z,\rho,\phi,\theta,r}$	正交坐标系单位向量
ϵ_0	真空介电系数 $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ Farad/m}$
ϵ, ϵ_N	几何发射度、归一化发射度 $\epsilon_N = \beta\gamma\epsilon$
$\epsilon_{x,y}$	电子束发射度
$\epsilon_{x\gamma,y\gamma}$	光子束发射度
$F, F(\phi, k)$	洛伦兹力、不完整第一类椭圆积分
\mathbf{F}	洛伦兹力
\mathcal{F}	谱通量
${}_pF_q$	超几何函数
$f(\mathbf{X})$	相空间分布函数 $f = f_0 + f_1$
G	增益函数, 对 FEL, $G \equiv -\Delta u/u$, 对 MBI, $G(s) \equiv b(k(s); s)/b(k(0); 0) $
G	四极铁梯度 $G = \partial B_y / \partial x$
$g(x)$	低增益 FEL 归一化增益函数
γ	洛伦兹因子
$\gamma_{x,y}$	Courant-Snyder 参量 $\gamma_{x,y} = \frac{1+\alpha_{x,y}^2}{\beta_{x,y}}$
γ_t	穿越能量 $\gamma_t = 1/\sqrt{\alpha_c}$
Γ	束团六维相空间体积
$\Gamma(\omega)$	复传播常数 $\Gamma(\omega) = -ik(\omega) = \alpha(\omega) - i\beta(\omega)$
$\Gamma(z)$	Gamma 函数
$\Gamma(a, z)$	不完全 Gamma 函数
Γ_{12}	互相干函数
$H(x)$	Heaviside 步阶函数
H_n	埃米多项式
$H(q, p)$	哈密顿量
$\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{H}}$	磁场函数(时域、频域)
\mathcal{H}	curly-H 不变量
h	谐波数 $h = \omega_{\text{RF}}/\omega_0$ 、普朗克常数 $h \approx 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
h	能量啁啾 $h = \partial\delta/\partial z = \langle z\delta \rangle / \langle zz \rangle$
\hbar	归一化普朗克常数 $\hbar = h/2\pi$
η, η'	色散函数、色散函数一阶导数
η	滑相因子 $\eta = \alpha_c - 1/\gamma^2$
η_j	归一化能量偏差变量(FEL) $\eta_j = \delta_j/\rho$

符号	意义
I_b, \tilde{I}	电流 (时域、频域)
I_A	Alfven 电流 $I_A \approx 17045$ A
I_{th}	阈值电流
$\mathcal{I}_{1,2,3,4,5,6}$	同步辐射积分
\mathcal{J}_ν	第一类修正贝塞尔函数
i	虚数单元 $i = \sqrt{-1}$
\mathbb{I}	单位矩阵
ι	tune 的小数部分, 即 $\nu = k + \iota, k \in \mathbb{N}$
$\mathcal{J}_{x,y,\epsilon}$	阻尼配分数
\mathcal{J}_ν	第一类贝塞尔函数
$J, \mathbf{J}, \tilde{\mathbf{J}}$	作用量、体电流密度
j	虚数单元 $j = -i$
$j_{m,n}$	第一类第 m 阶贝塞尔函数的第 n 个根, 即 $\mathcal{J}_m(j_{m,n}) = 0$
$j'_{m,n}$	第一类第 m 阶贝塞尔函数一阶导数函数的第 n 个根, 即 $\mathcal{J}'_m(j'_{m,n}) = 0$
$[\mathbf{JJ}]$	$[\mathbf{JJ}] = \mathcal{J}_0\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right) - \mathcal{J}_1\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right)$
K	(绝对) 温度单位
\mathcal{K}_ν	第二类修正贝塞尔函数
K_u	波荡器参数
K, K'	静止/移动坐标系
K	面电流密度
K_c	截止波数
K_1	四极铁强度 $K_1 = q cG/E$
K_2	六极铁强度 $K_2 = q cS/E$
$K(k)$	完整第一类椭圆积分
$\mathcal{K}_{\text{SC}}, \mathbb{K}_{\text{SC}}$	空间电荷导流系数
k	波数 $k = 2\pi/\lambda$
k_B	玻尔兹曼常数 $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
κ	发射度耦合因子
$L(q, \dot{q})$	拉格朗日量
L_G	增益长度 (FEL)
ℓ_{coh}	相干长度
ℓ_f, ℓ_\perp	纵向、横向形成长度
λ	辐射波长
λ_D	德拜长度
λ_ℓ, λ_r	共振波长
λ_u	波荡器周期长度
$\lambda, \tilde{\lambda}$	电荷线密度分布函数 (时域、频域)
Λ	谢明修正因子 $L_G = L_{G0}(1 + \Lambda)$
\mathbf{M}	传输矩阵、集体交互作用矩阵
M_{ij}	传输矩阵元素
m	求和指标, 如绕行圈数、模式指标等
m_0, m_e	粒子静止质量、电子静止能量

符号	意义
\mathbb{N}	正整数集合
N_b, N_e	束团数、粒子数
N_{ph}	光子数
NA	数值孔径 $\text{NA} = \sin \theta_{\max}$
n	求和指标, 如绕行圈数、模式指标等
\dot{n}_s	光子通量(单位时间光子数)
n_0	等离子体线密度或体密度
$n(\omega)$	折射率
\mathbf{n}	单位向量
ν	光子频率
$\nu_{x,y,s}$	横向 betatron tune 或纵向 synchrotron tune
\mathcal{N}_ν	第二类贝塞尔函数
Ω	电阻单位、立体角 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$
Ω_s	同步振荡波数(FEL) $\Omega_s = k_s$
$\Delta\Omega$	集体效应复频移
P	功率
P_{beam}	电子束功率 $P_{\text{beam}} = I_b E / e $
P_L	激光功率
P_{sat}	饱和功率
P_ℓ	勒让德函数
P_x, P_y	机械动量分量 $P_x = p_x/p_0, P_y = p_y/p_0$
P.V.	柯西主值
p, \mathbf{p}	机械动量 $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$
$p(k)$	能量调制函数, 有时也写成 $P = \langle \eta_j e^{-i\theta_j} \rangle$
π	正则动量 $\pi = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$
ϕ_s	同步粒子相位
φ	标量位函数、角度
$\psi_{x,y}$	相位超前
Φ_w	功函数
$\Pi(n; \phi, k)$	不完整第三类椭圆积分
q	广义位置坐标、电荷单元(带号), 对电子, 有 $q = -e$
$q(z)$	复光束参量 $q(z) = z - iz_R$
Q, Q_β, Q_s	tune(欧式惯例) $Q_\beta = \nu_\beta, Q_s = \nu_s$
Q_0, Q_e, Q_L	固有、外部、有载谐振腔品质因数
\mathbb{Q}	有理数集合
r, \mathbf{r}	源至观察者位置向量 $r = \mathbf{r} , \mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{R}$
\mathbf{R}	传输矩阵, 有时写成 \mathbf{M}
R_{ij}	传输矩阵元素, 有时写成 M_{ij}
R	储存环平均半径 $R = C_0 / 2\pi$
$R(z)$	辐射场波前曲率半径
RRR	残余电阻比
R_S	分路阻抗
ρ	电荷体密度、弯转半径
ρ	Pierce 参数、FEL 参数
ρ	空间电荷效应层流(laminar)参数
r_0, r_e	经典粒子半径、经典电子半径

符号	意义
s	Frenet-Serret 坐标系纵向位置坐标
sn	椭圆函数
S	六极铁梯度 $S = \partial^2 B_y / \partial x^2$
$\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}}$	坡印廷向量 (时域、频域) $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, $\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*$
\mathbf{S}	辛矩阵
\mathcal{S}	面积
$\mathcal{S}(x)$	Fresnel 积分、Cornu spiral 积分
$\text{Si}(x)$	sine 积分
$\sigma, \sigma_0, \sigma(\omega)$	面电荷密度、电导率 (DC、AC)
Σ	束矩阵 $\Sigma = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^T \rangle$
Σ_{ij}	束矩阵元素
$\sigma_{x,y}$	束团相空间横向尺寸
$\sigma_{x',y'}$	束团相空间横向角散
$\sigma_{z,t}$	束团相空间纵向尺寸
$\sigma_{\delta,E}$	束团能散 $\sigma_\delta = \sigma_E/E$
T	绝对温度 (单位为 K)
$T_{x,y,z}$	x, y, z 三个方向的绝对温度
T_0, T_{rev}	周期、绕行周期
t	时间坐标
t', t_{ret}	推迟时间坐标 $t_{\text{ret}} = t - r(t_{\text{ret}})/c$
τ	增长时间、阻尼时间
τ^{-1}	增长率、阻尼率
$\tau^{(q)}$	量子寿命时间
θ	有质动力相位 (FEL) $\theta = (k + k_u)z - \omega t + \phi$
u	电场包络函数 (FEL)
U	能量
Υ	头尾不稳定性归一化强度因子
μ_0, μ	磁导率、耦合束团振荡模式指标
V	电压
v, \mathbf{v}	速率、速度
v_g, v_p	群速、相速
v_F	费米速率
\mathcal{V}	体积
V_{\perp}, V_{\parallel}	横向、纵向尾场势
W_{\perp}, W_{\parallel}	尾场函数
w_{\perp}, w_{\parallel}	单位长度尾场函数
$\mathcal{W}_{\perp}, \mathcal{W}_{\parallel}$	尾场
w_0	激光束腰尺寸
W	电磁辐射能量
w_{EM}	电磁能量体密度
ω_{RF}	RF 角频率
ω_0	绕行角频率
ω_{β}	横向 betatron 振荡角频率
ω_s	纵向振荡角频率

符号	意义
x	横向水平位置变量
\mathbf{x}	位置向量, 有时写成 \mathbf{r}
x'	横向水平角散
ξ	色品函数 $\xi \equiv \Delta\nu/\delta$
\mathbf{X}	相空间坐标
y	横向垂直位置变量
y'	横向垂直角散
\mathcal{Y}_ν	第二类贝塞尔函数
z, \hat{z}	纵向位置变量
$\zeta(\omega)$	表面阻抗, 有 $\tilde{\mathbf{E}}_t = \zeta(\omega)\tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{n}$
Z_\perp, Z_\parallel	阻抗函数
$\mathcal{Z}_\perp, \mathcal{Z}_\parallel$	包含束团分布的阻抗函数
\mathbb{Z}	整数集合
Z	原子量
Z_0	真空阻抗 $Z_0 \approx 120\pi \approx 377 \Omega$
z_R	瑞利长度 $Z_R = k_L w_0^2 / 2$
∇	梯度微分算子
$\nabla \cdot$	散度微分算子
$\nabla \times$	旋度微分算子
∇^2	拉普拉斯微分算子
$\nabla_{\mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}$	相空间位置坐标微分算子
$\nabla_{\mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$	相空间动量坐标微分算子

附录 H 部分教科书使用惯例比较

此附录总结并比较部分教科书使用的符号与一些物理量的惯例。部分说明如下：

- 傅里叶变换：顺向变换，此讲义

$$f(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k, \omega) e^{ikz - i\omega t}$$

记成 $ikz - i\omega t$ 。逆向变换则有 $-ikz + i\omega t$ 。一并写成

$$\pm ikz \mp i\omega t$$

- 色品参量 ξ ：此讲义采用美式惯例，有

$$\xi \equiv \frac{\Delta\nu}{\delta}$$

暂且称为绝对 (absolute) 惯例。欧式惯例有

$$\xi \equiv \frac{\Delta\nu/\nu_0}{\delta}$$

称分数 (fractional) 惯例。

- 由于电子带负电荷，下表列出在不同教科书中，当描述电子时，电荷的取值是否包含符号或排除符号。如包含符号，则电荷 < 0 ；如排除符号，则电荷 > 0 。

	i, j	傅里叶变换	Frenet-Serret	$z, s, t, \text{头}, \text{尾}$	发散度(取值)	$\text{Im } Z > 0$ 容性	色品 ξ	q, e (对电子)	滑相因子 η
此讲义	i	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \pm ikz \mp i\omega t \end{pmatrix}$	右手 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	$z = s - ct$ head $z > 0, t < 0$ local z	不含 π	$\text{Im } Z > 0$ 容性	absolute	$q < 0, e > 0$	$\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$
Supakow & Penn	i	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \pm ikz \mp i\omega t \end{pmatrix}$	右手 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	$s = ct - z$ head $s < 0, t > 0$ local s	N.A.	$\text{Im } Z > 0$ 容性	absolute	$q < 0, e > 0$	N.A.
A. Wolski	i	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \pm ikz \mp i\omega t \end{pmatrix}$	右手 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	$z = s - ct$ head $s > 0, t < 0$ local z	似未明确规定	$\text{Im } Z > 0$ 容性	absolute	$q < 0$	$\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$
Conte & MacKay	i	似不一致 该书 §9.1	右手 $A_s = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	$z = s - ct$ head $z > 0, t < 0$ local z	不含 π	N.A.	fractional	$q < 0$	$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c$ 该书 §7.1
H. Wiedemann	i	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \mp ikz \pm i\omega t \end{pmatrix}$ 该书 §A.1.10	右手 $A_{c,z} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ $A_z = A_{c,z} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)$	$s = ct - z$ head $s < 0, t > 0$ local s	N.A.	$\text{Im } Z > 0$ 容性 强调频率定标	absolute	$q < 0, e < 0$	$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c$ 该书 §8.4
M. Sands	i	系数未定义 该书 §3.5	右手 $A_z = A_{c,z} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)$	$s = ct - z$ head $s > 0, t > 0$ local s	无。写成 a^2 a 称 invariant amplitude	N.A.	fractional	$q < 0, e < 0$	N.A.
A.W. Chao (1993)	i	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \pm ikz \mp i\omega t \end{pmatrix}$ 该书 §3.5	右手 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	$z = s - ct$ head $z > 0, t < 0$ local z	未明确规定	$\text{Im } Z > 0$ 容性	absolute	$q < 0, e < 0$	$\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$
A.W. Chao (2020)	i	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \mp ikz \mp i\omega t \end{pmatrix}$ 该书 §1.3.2	右手 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	$z = s - ct$ head $z > 0, t < 0$ local z	不含 π 该书 p.99	$\text{Im } Z > 0$ 容性	absolute	$q < 0, e < 0$	$\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$
K.-Y. Ng	i	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \mp ikz \pm i\omega t \end{pmatrix}$ 该书 §1.3.2	右手 $A_s = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	$s = ct - z$ head $s > 0, t < 0$ local s	含 π 参考该书 p.188 与 Eq.(6.108)	$\text{Im } Z < 0$ 容性 该书 p.185	absolute	$q < 0, e < 0$	$\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$
Edwards & Syphers	i	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \pm ikz \mp i\omega t \end{pmatrix}$	右手 $A_s = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	head $s > 0, t < 0$ local s	参考该书 p.186-致 该书 p.188 与 Eq.(6.108)	$\text{Im } Z > 0$ 容性 该书 p.184	absolute C fractional ξ	$q < 0, e > 0$	$\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$
S.Y. Lee	$j = -i$	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \mp jkz \pm j\omega t \end{pmatrix}$	左手 (x, s, z) $A_s = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	head $t < 0$ local t	不含 π	$\text{Im } Z > 0$ 容性 采用 $j = -i$	absolute	$q < 0, e > 0$	该书 §4.1
K. Wille	i	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi} \\ \pm ikz \pm i\omega t \end{pmatrix}$ 该书 §5.1	左手 (x, s, z) $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	head $t < 0$ local t	不含 π 该书 Fig. 5.15	$\text{Im } Z > 0$ 容性 该书 Fig. 9.4	absolute	$e > 0$	$\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$
Bryant & Johnsen	$j = -i$	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \mp jkz \pm j\omega t \end{pmatrix}$	左手 (x, s, z) $A_s = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$	head $t < 0$ local t	含 π 该书 Fig. 9.4	$\text{Im } Z > 0$ $\propto \omega$ 感性 采用 $j = -i$ §9.4.2	absolute	$e < 0$	$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c$ 该书 §4.2.4
S. Di Mitri	i	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \pm ikz \mp i\omega t \end{pmatrix}$	右手 $A_{s,c} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ $A_z = A_{s,c} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)$	$z = ct - s$ head $z > 0, t > 0$ local z	不含 π 该书 p.21 (§3.2.1)	$\text{Im } Z > 0$ $\propto \omega$ 感性 采用 $j = -i$ §3.2	absolute	$q < 0$	$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c$ 该书 §3.2
Zotter & Khefets	$j = -i$	$\begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2\pi} \\ \mp jkz \pm j\omega t \end{pmatrix}$	左手 该书 Fig. 10.1	$s = ct - z$ head $s < 0, t > 0$ local s	N.A.	$\text{Im } Z > 0$ $\propto \omega$ 容性 采用 $j = -i$ §3.3	absolute	$q < 0, e < 0$	N.A.
A. Hofmann	i	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \mp ikz \pm i\omega t \end{pmatrix}$ 该书 §2.8.1	左手	N.A.	不含 π	N.A.	absolute	$e < 0$	N.A.
J.D. Jackson	i	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \pm ikz \pm i\omega t \end{pmatrix}$	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	absolute	$q < 0, e < 0$	N.A.

附录 I CERN 加速器学校课程大纲

目前来说，在全球范围内，有系统、定期举办、且涵盖加速器物理基础的加速器学校 (accelerator school) 不多，其中以美国粒子加速器学校 (U.S. Particle Accelerator School, USPAS) 与欧洲核子研究中心加速器学校 (CERN Accelerator School, CAS) 为两大支柱。USPAS 每年举办两次，分别在 1 月与 7 月，基础课为期两周，进阶课为一周，课程内容涵盖多样，内容包含理论、模拟与实验。CERN CAS 课程分一般课 (general) 与专业课 (specialized)，一般课偏理论，再细分入门 (introductory) 与进阶 (advanced)。最近几年入门课每年开两次，进阶课每年二至三次，每门课为期一至两周。

作为参考，此附录给出 2016 年 CERN CAS 针对一般课列举的课程大纲与内容¹。对于此讲义没有包含的知识点，将以 ♠ 注记。

入门课：

1. MATHEMATICS FOR ACCELERATORS

1.1 Vectors and matrices

- Vectors
- Matrix formalism
- Scalar and vector products
- Eigenvectors and eigenvalues

1.2 Calculus

- Integrals in 1D
- Surface and volume integrals
- Gauss and Stoke theorems
- Differential equations

1.3 Harmonic oscillator

- Equation of motion
- Matrix formalism
- Solution and stability

2. INTRODUCTION TO ACCELERATORS

Objective: A brief overview of different types of accelerators and the transport of particles.

Includes a short history of accelerators.

2.1 Types of accelerators and transport (very brief)

- Beam lines

¹感兴趣的读者，可参考<https://cas.web.cern.ch/sites/default/files/CASSyllabus.pdf>。

-
- Linear accelerators

- Circular accelerators

2.2 A few basic conventions

- Variables

- Basic parameters

- Units

2.3 Some basics

- Curved reference trajectory

- Magnetic rigidity

- Types of magnets: bending and quadrupole magnets

- Leptons versus Hadrons

- Basics of colliders (Luminosity, energy, ..)

3. ELECTRO-MAGNETIC THEORY

Objective: A short review of classical electrodynamics, derivations only where essential.
Should be done considering the lectures on “Particle Motion in EM fields” and “Relativity and Kinematics of Particle Beams”.

3.1 EM fields

3.2 Units

3.3 Maxwell's equations

- Gauss, Ampere, Faraday: leading to Maxwell's equations
- Integral and differential forms
- Electro-magnetic potentials
- Boundary conditions: conductor, media with $\epsilon_r, \mu_r \neq 1$
- Multipole fields in 2D
- Lorentz force

3.4 EM waves

- Wave guides and cavities
- EM-waves, solution and modes, (TE, TM, TEM)
- Propagation of waves, Poynting vector and energy
- Skin-depth and losses, cut-off frequency
- Group and phase velocity

4. PARTICLE MOTION IN EM FIELDS

Objective: Arrive at a description of particle motion in electromagnetic fields. Given that simulation and tracking codes play the central role in accelerator design and operation, the concepts should be formulated as an approach based on s-maps. Should allow the

extension to non-linear maps in advanced courses. This approach allowing exact tracking, easy analysis and a map-based perturbation theory puts it above any other methods and should be introduced here as a concept. The physics for any type of magnets is contained in a map representing the element. For linear elements it can be done the classical way, a la K. Brown “Single Element Optics” in Handbook of accelerator Physics. For any (linear and non-linear elements) introduce a general view how they are obtained, glimpse at the concepts, but details left to advanced course. The maps for common machine elements should be given as input for the following lectures of the course.

4.1 Map approach to particle motion - general concept

- Variables for beam dynamics
- Map definition and conventions
- Maps for circular machines
- Linear maps
- Non-linear maps ♠

4.2 Linear maps - matrix formulation 2D and 3D

- Reference system
- Maps for linear elements from basic equation of motion
- Matrix description of thick linear elements, including skewed magnets
- Thin lens approximation
- Matrix description in 3D

4.3 Non-linear maps ♠

- General approach to compute linear and non-linear maps for machine elements
Hamiltonian description of EM-fields, sketch of principle
- Outlook to advanced school, reference to “Non-linear Dynamics” this school

4.4 Examples: main types of magnets

- Drift space
- Bending magnets
- Quadrupoles
- Sextupoles
- Solenoids

5. RELATIVITY AND KINEMATICS OF PARTICLE BEAMS

Objective: Introduce special relativity, main emphasis on applications in beam dynamics. Provide the mathematical tools. A general concept into systems of particles and description of the properties of the system. Should provide the framework for consistent use in following lectures (mainly to avoid duplicated and/or inconsistent definitions and conventions).

5.1 Special Relativity

- Principles
- Inertial and non-inertial systems
- Lorentz transformation
- Time dilation and Lorentz contraction
- Four-vectors and applications in accelerators
- Fields of moving charges
- Maxwell's equation in invariant form (2D)

5.2 Systems of particles

- Phase space versus trace space and configuration space, degrees of freedom
- Invariants
- Liouville theorem
- Emittance, as valid for any accelerator, including sources
- Vlasov and Boltzmann♦ equations

6. LINEAR ACCELERATORS

Objective: Overview of the basic principles of Linear Accelerators and the required components and structures. An introduction to the beam dynamics should cover the main aspects.

6.1 Acceleration principles

- EM forces
- Accelerating structures
- RF frequencies

6.2 Beam dynamics

- Bunched and unbunched beams
- Beam dynamics in linear structures
- Phase stability and acceptance
- Equations of motion
- Relativistic effects

7. TRANSVERSE LINEAR BEAM DYNAMICS FOR SYNCHROTRONS AND BEAM LINES, ALL IN 2D

Objective: Starting from the linear transfer maps (i.e. matrices) describe the first-order dynamics in beam lines and synchrotrons. Define as a sequence of linear machine components and derive the basic quantities, global quantities (e.g. tune, chromaticity) and local (Twiss parameters, dispersion). Assume no coupling between the planes, but treat

the problem in 2D.

7.1 Linear motion in one pass (linear) structures

- Choice of independent variable, limitations of applicability
- Transformation of coordinates in two dimensional phase space
- Optical parameters (2D)

7.2 Linear motion in multi pass (circular) structures

- Weak and strong focusing, FODO cells
- One-turn matrix
- Closed orbit, reference orbit, physical meaning
- Beam stability condition
- Optical parameters (2D), tune optical functions, etc.
- Action-Angle variables (to keep it simple: can be done in 1D)
- Periodic focusing systems, Floquet theorem and Hill's equation
- Linear Courant-Snyder invariants
- Beam dynamics with acceleration

7.3 Dynamics with off momentum particles

- Dispersion in rings
- Momentum compaction
- Transition energy
- Chromaticity: origin, advantages and disadvantages (correction later)

8. CYCLOTRONS AND FFAG ♠

Objective: Basic concepts of cyclotrons and beam dynamics. The subclasses of different types should be covered. Motivation (recent interest, e.g. medical applications, fission, ADS, ...) in FFAG, combination of cyclotron and synchrotron advantages. Basic principles.

8.1 Types of cyclotrons

- Cyclotrons
- Synchro-Cyclotrons
- Isochronous cyclotrons

8.2 Beam dynamics

- Injection and extraction
- Accelerating structures

8.3 FFAG

- FFAG (principle, scaling and non-scaling types)
- Injection and extraction
- Accelerating structures

-
- Superconducting magnets

9. LONGITUDINAL BEAM DYNAMICS IN CIRCULAR ACCELERATORS

Objective: Together with lecture on “RF Systems” introduce the acceleration principles, strong emphasis on beam dynamics and required structures.

9.1 Acceleration principles

- Electrostatic and time varying fields
- Phase stability and energy gain
- Transit time factor

9.2 Accelerating structures

- Basic overview
- Reference to later lectures on RF systems

9.3 Synchrotron oscillations

- Equation of motion
- Stationary and accelerating buckets, fixed points and separatrix
- Matching of buckets

10. RF SYSTEMS

- Waves in wave guides and modes in cavities
- Types of cavities
- Structures for relativistic beams
- Structures for non-relativistic beams ♠
- Stand wave and traveling wave structures
- Higher Order Modes
- Shunt impedance, transit time factor, quality factor, filling time
- Power and coupling to cavities

11. APPLICATIONS OF ACCELERATORS

Objective: Overview of the world wide applications of Accelerators, some emphasis on applications outside research institutions.

- Synchrotron light
- Industrial applications
- Medical applications
- Spallation sources
- Accelerator Driven Systems
- Particle physics

12. LINEAR IMPERFECTIONS

12.1 Field errors

- Dipole and quadrupole errors
- How to correct it, means and procedure

12.2 Alignment errors

- Feed down
- Dipole and quadrupole errors
- How to correct it, means and procedure

12.3 Coupling of horizontal and vertical planes

- Origin
- How to correct it, means and procedure

13. BEAM INSTRUMENTATION AND DIAGNOSTICS

Objective: Twofold: introduce instruments and signal processing. Limitations, advantages and disadvantages of different instruments. Use of the instruments to measure beam parameters, preparation and processing of the data. Presentation for further use.

13.1 Instruments and measurement

- Overview of available devices
- Working principles
- Data acquisition and limitations
- Special challenges for high intensity and high brightness beams

13.2 Diagnostics and beam parameters

Main Objective: procedures and analysis of beam parameters.

- Intensity
- Orbit
- Tune
- Chromaticity
- Beam size
- Optical parameters

14. ELECTRON BEAM DYNAMICS - SYNCHROTRONS AND LIGHT SOURCES

Objective: For the whole theme: properties of synchrotron radiation and impact (negative and positive effects, applications). Principles of synchrotron radiation, main parameter, e.g. spectra. If time permits, incoherent and coherent radiation. Beam dynamics with radiation together with principles and properties of light sources.

14.1 Synchrotron radiation

- Fields of moving and accelerated particles
- Classical versus quantum radiation
- Power and typical frequency
- Energy loss

14.2 Beam dynamics with synchrotron radiation

- Radiation Damping, linear versus circular machines
- Damping times and damping partition numbers
- Emittance, equilibrium and growth
- Radiation integrals

14.3 Light sources

- Types of light sources
- Principles
- Manipulation, insertions for synchrotron light sources
- FELs (possibly a separate lecture)

15. NON-LINEAR BEAM DYNAMICS ♠

Objective: Mostly phenomenology and qualitative. Quantitative treatment and details in Advanced Level Schools Outlook to lectures at the “Advanced Level Course”.

15.1 Sources of non-linearities

- Introduce key concepts with practical examples rather than abstract definitions
- Chromaticity correction with sextupoles
- Multipole expansion of magnetic fields
- Other sources of non-linear effects, beam-beam, space charge

15.2 Phenomenology

- Representation of non-linear effects
- Tune shift
- Resonances
- Amplitude detuning, decoherence
- Structure of phase space, islands etc.
- Applications (extraction etc.)

15.3 Outlook: tools and techniques

- Representation of non-linear elements
- Analysis techniques

16. COLLECTIVE AND MULTI PARTICLE EFFECTS

Objective: Introduction to multi particle effects and interaction with the environment,

concepts of impedance and wake fields. Should give a general overview over different types of collective effects. Mostly phenomenology, details in Advanced Level School, should follow after non-linear dynamics lectures.

16.1 Direct Space Charge and Image charges

- Origin
- Cover both linear and circular machines

16.2 Impedance and wake fields (details should go to Advanced Level School)

- Definition and properties
- Complex impedance
- Broad Band and Resistive Wall Impedances
- Narrow Band Impedance and resonators
- Longitudinal and transverse Impedance, Panowski-Wenzel Theorem
- Time and Frequency Domain
- Effect on beams, complex tune shift, heating
- Impedance measurements (bench and beam)
- Calculation of Impedances

16.3 Beam instabilities (details should go to Advanced Level School, mostly qualitative treatment)

- Bunched and unbunched beams
- Origin of instabilities
- Simplified Models
- Instabilities in linacs
- Single and multi particle instabilities
- Longitudinal and Transverse instabilities
- Cures

16.4 Other collective effects - with reference to Advanced Course, where possible

- Touschek Effect
- Intra Beam Scattering
- Electron Cloud and Ion trapping
- Beam-beam♣ effects and space charge

17. LUMINOSITY AND COLLIDERS

Objective: Motivation to use colliding beams, very short introduction. Definition of luminosity. Discussion of various effects with impact on the luminosity and collider performance. Discussion of various methods to measure luminosity, for different types of machines and particle types.

-
- 17.1 General Concept, an introduction to colliders is assumed
 - Concept of Cross Section
 - Definition of Luminosity
 - Derivation for simplest (round beams) and general (flat beams) cases
 - 17.2 Additional features ♠
 - Luminosity with crossing angle
 - Luminosity with transverse offset
 - Crab crossing schemes
 - Hourglass effect
 - Time evolution of luminosity
 - 17.3 Luminosity measurements ♠
 - From known cross sections: leptons
 - From known cross sections: hadrons
 - Luminosity from beam parameters
 - Van der Meer scans

18. INJECTION, EXTRACTION, BEAM TRANSFER, SECONDARY BEAMS AND TARGETS ♠

Objective: Beam dynamics of injection and extraction processes. Should include techniques for low loss procedures, different requirements for extraction (e.g. short pulses, high intensity etc.). Consequences for the design. Short discussion of secondary beams and target requirements, including very high energy/intensity beams (e.g. spallation sources).

- 18.1 Beam dynamics
 - Principles, devices, charge exchange, painting schemes
 - Resonant extraction
 - Applications (extraction etc.)
 - Optical matching and filamentation
- 18.2 Technology, kickers, etc.
- 18.3 Types of secondary beams
 - Generation of secondary beams and challenges
 - Required targets and target properties

19. ADDITIONAL LECTURES ♠

Objective: To touch upon vital auxiliary equipment, summary lectures outside the scope of the different themes of the school.

19.1 Vacuum

19.2 Particle Sources

- Electron sources
- Proton sources
- Ion sources
- Anti-particle sources (anti-proton, positron)
- Beam formation

19.3 Radiation and machine protection

19.4 Power Converters

19.5 Warm and cold Magnets

- Pole shapes, geometries
- Coil, Yoke and Pole shape design
- Effect of (fast and slowly) varying magnetic fields

19.6 Concluding Lecture, putting it all together (?)

- Overview lectures, new issues as compared to introductory course
- Rationale to arrive at a conceptual design (a la general Tutorial)

19.7 Laser applications

19.8 Advanced acceleration concepts

- Plasma wake acceleration
- Inverse FEL and Cherenkov accelerators
- Dielectric laser-driven accelerators

进阶课:

1. RECAP LECTURES

Objective: These background lectures should recapitulate the lectures on the main themes of the Introductory Course and serve as basics for the lectures at the Advanced Course.

1.1 Machine types

- Linear accelerators
- Circular accelerator

1.2 Transverse Dynamics

Should cover the introductory lectures on: Transverse Linear beam Optics, Linear Imperfections and Phenomenology of Non-linear effects.

- Linear Optics, including chromaticity
- Linear Imperfections, including Coupling ♠
- Basic phenomenology of non-linear dynamics ♠

1.3 Longitudinal Dynamics

Should cover the introductory lectures on: Longitudinal Beam Dynamics in Linear

and Circular Accelerators, RF Systems.

- Acceleration methods and structures, Cavity basics, transit time factor
- Phase stability
- Linac versus circular accelerator
- Transition, synchrotron oscillations
- Equations of motion, buckets
- Phase stability

2. INTRODUCTION TO COURSES

2.1 RF Measurements ♠

2.2 Beam Measurements

2.2.1 Introduction to Beam Instrumentation

2.2.2 Introduction to Beam Diagnostics

2.3 Optics design

2.3.1 Lattice cells

- FODO cells
- Separated and combined function FD cells
- Basic parameters, tune, optical parameters, chromaticity
- Choice of lattice parameters
- Linear imperfections
- Other cells, reason and basics

2.3.2 Insertions ♠

- Dispersion Suppressors
- Low- β insertions
- Matching optical functions

3. MATHEMATICS FOR ACCELERATORS

3.1 Recap: Basics

- Vectors and Matrices
- Scalar and vector products
- Eigenvectors and Eigenvalues

3.2 Recap: Calculus

- Surface and volume integrals
- Gauss' and Stoke's theorems
- Differential equations

3.3 New: (may be needed (useful) in "Landau Damping, Collective Effects")

- Calculus of Variations (very basic, concept)
- Complex numbers

-
- Fourier and Laplace Transformations
 - Complex analysis
4. NON-LINEAR DYNAMICS (rings, but all concepts applicable to single pass machines)
- Objective: Introduce contemporary methods and tools for the analysis of non-linear effects. Demonstrate first the concepts in the linear cases and extend to nonlinear dynamics. Key elements are: symplecticity, maps and matrices, analysis of maps, normal forms. It includes the use of Lie algebraic methods and Truncated Power Series Algebra. The latter with a hands-on simulation program.
- 4.1 Methods and tools
- Conceptual and formal tools for beam dynamics, maps, normal forms and analysis
 - Demonstrate the concepts in the linear cases
 - Maps and matrices, analysis of maps, normal forms
 - Symplecticity
 - Action-angle variables (as a general concept)
 - Generalization: extend linear → non-linear dynamics ♠
 - Higher order maps, Taylor maps, thin lenses ♠
 - Numerical integrators, Symplectic integrators ♠
 - Basics of Hamiltonian treatment, Poisson brackets
 - Lie operators and Lie Transformations ♠
 - Non-linear normal forms ♠
 - Truncated Power Series Algebra (TPSA), simple examples and usage, demonstration with small program ♠
- 4.2 Phenomenology, applications and examples
- Non-linear imperfections ♠
 - Phase space and canonical variables, Poincare section and invariants, effect of imperfections
 - Dynamic Aperture, definition and evaluation
 - Non-linear generalized Courant-Snyder invariants ♠
 - Normal form analysis of non-linear effects (sextupoles, octupoles, beam-beam) ♠
 - Canonical Perturbation Theory ♠
 - Non-linear detuning, application (example e.g. octupole, NF) ♠
 - Islands and island width , away and near resonance ♠
 - Chaotic motion and diffusion, Lyapunov exponent, Chirikov criterion ♠
 - Tools (e.g. FMA, tracking)

5. INSTABILITIES AND COLLECTIVE EFFECTS

5.1 Impedance and space charge

- Direct and image space charge
- Envelope equation, KV distribution
- Recapitulation of impedances, wake fields, cavities
- Coherent and incoherent frequency shifts
- Neutralization♦

5.2 Beam instabilities

- Origin of instabilities
- Bunched and unbunched beams, coupled bunch instabilities
- Simplified Models
- Single and multi particle instabilities
- Longitudinal and Transverse instabilities
- Microwave instability
- Robinson instability and Negative Mass instability
- Sacherer's integral equation
- Longitudinal and transverse Head-Tail instability and beam break up
- Transverse Mode Coupling Instability
- Bunch lengthening
- Cures

5.3 Other collective effects

- Intra Beam Scattering
- Electron Cloud and Ion trapping

5.4 Instabilities in LINACS

- Fields of moving charges
- Wake potentials, off-centered beams and transitions
- Effect of wake fields, transverse and longitudinal
- BNS damping

5.5 Beam-beam effects♦

- Beam-beam forces (2D)
- Head-on and long range beam-beam interactions
- Tune shift and amplitude detuning, footprints
- Beam-beam limit (lepton machines mainly)
- Coherent Beam-beam effects
- Beam-beam compensation

5.6 Landau Damping♦

- Principles
- Landau Damping in Plasmas
- Landau Damping in particle beam

-
- Dispersion integrals
 - Response to excitation and Beam transfer Functions
 - Stability diagrams
 - Applications in accelerators, use and control of stability diagrams

5.7 Particle colliders ♠

- Basics
- Linear colliders
- Circular colliders

6. LOW EMITTANCE MACHINES AND LIGHT SOURCES

6.1 Types of light sources

- Storage Rings
- FEL

6.2 Low emittance machines and optics

- Basics
- Lattices, minimum emittance, achromats
- Matching optical functions

6.3 Insertions and insertion devices (synchrotron light)

- Wigglers
- Gradient Wigglers ♠
- Asymmetric Wigglers ♠
- Undulators
- Permanent and superconducting magnets

7. ADDITIONAL LECTURES ♠

7.1 Polarization

- Spin dynamics, Thomas-BMT
- Types of polarization production of polarized beams
- Electrons, Sokolo-Ternov Effect
- Protons and Ions
- Maintaining polarization in an accelerator chain

7.2 Timing and Synchronization

- Types of accelerators requiring accurate timing and synchronization
- Requirements, noise and jitter
- Reference signals
- Measurement techniques
- RF and optical synchronization schemes

7.3 Energy recovery Linacs

-
- Principles of ERL
 - Beam dynamics of ERL
 - Cavities

7.4 High Brightness Beam Diagnostics

- Emittance definition
- Types of emittance measurement
- Effect of space charge and space charge dominated beams

7.5 Beam cooling

- Principles: overview and applications
- Stochastic cooling
- Electron cooling
- Ionization cooling

7.6 Feedback systems

- Purpose and principles
- Feedforward versus feedback
- Implementation and signal processing

7.7 Advanced Acceleration Concepts

- Plasma wake acceleration
- Inverse FEL and Inverse Cherenkov accelerators
- Grating accelerators
- Dielectric Laser Accelerator

附录 J 加速器学家小传

此附录按笔者喜好，选择性地收集、不按顺序、不求完整、重新组织翻译了几位加速器领域物理学家小传，与读者分享。以下小传约有半数取材自 A. Sessler and E. Wilson, *Engines of Discovery, revised and expanded edition, World Scientific (2014)* 一书，不再另外标注。源自其它素材的介绍以附注标注。

J.1 Helmut Wiedemann — 温文儒雅、受崇敬的加速器专家

Helmut Wiedemann 是斯坦福大学 (Stanford University) 的荣誉教授，加速器物理领域的杰出人物。他于 1971 年从德国汉堡大学 (University of Hamburg) 获得博士学位后，加入德国电子同步辐射实验室 (Deutsches Elektronen-Synchrotron, DESY)，于 1975 年成为斯坦福直线加速器中心 (SLAC) 18 GeV PEP 储存环的助理主任。1980 年，他成为斯坦福大学应用物理系教授。Wiedemann 的研究兴趣涵盖理论和实验加速器物理，包括粒子源、直线加速器、储存环和同步辐射源。他的显著贡献之一是开发具有短脉冲持续时间的高亮度光源。他还是一本备受推崇的教科书的作者 — *Particle Accelerator Physics* — 该书全面介绍了高能粒子加速和束流动力学。

美国阿贡国家实验室 (Argonne National Laboratory, ANL) 的 Michael Borland 回顾了 Wiedemann 在加速器物理领域的重要影响。Borland 感到很幸运成为 Wiedemann 的学生，回忆了在 Wiedemann 的指导下，他从研究固体物理转向参与 SLAC 的加速器物理项目的过程。Borland 强调了 Wiedemann 提供给学生的宝贵实践经验，使他们能够参与到 SLC 等前沿项目的调试中。Borland 认为 Wiedemann 为学生提供了在当时罕见的机会，让他们实际掌控先进机器。

作为 SLAC 同事，Herman Winick 详述了 Wiedemann 来到 SLAC 的经过可以追溯到欧美加速器实验室之间的人员交流。在当时 Gustav-Adolf Voss 规定 (“Lex Voss”) 下，Wiedemann 签署了一份协议，如果他在美国逗留后没有返回 DESY 工作数年，他将需要支付 DESY 提供支持的费用。然而，由于 Wiedemann 对 SLAC 对撞机项目巨大贡献，当时 SLAC 主任 Burton Richter 安排支付了这笔费用，使 Wiedemann 能够留下并继续其具有深远影响力的工作。这一历史背景突显了 Wiedemann 推动加速器物理发展的奉献精神，以及他在塑造该领域发展轨迹中的关键作用。

20 世纪 80 年代初，National Synchrotron Radiation Research Center (NSRRC) 便邀请 Wiedemann 为 NSRRC 工作人员授课，为加速器项目的启动提供支持。1983 年至 1993 年，Wiedemann 在 Taiwan Light Source (TLS) 磁聚焦结构设计方面给予 NSRRC 年轻科学家信心，鼓励独立思考。在 TLS 建设期间，他与 NSRRC 员工并肩工作，共同解决问题。2009

年至 2012 年，Wiedemann 成为 NSRRC 的杰出访问学者，协助员工推进加速器物理和工程，为当时的 Taiwan Photon Source (TPS) 建设项目提供建议。1983 年至 2020 年— 超过三十年的日子，Wiedemann 为 NSRRC 做出巨大贡献¹。

以上部分内容取自<https://www.slac.stanford.edu/history/helmutPage1.shtml>。
¹。

¹[https://www.slac.stanford.edu/history/NSRRC-tribute-to-Helmut_2020\(v2\).pdf](https://www.slac.stanford.edu/history/NSRRC-tribute-to-Helmut_2020(v2).pdf)

J.2 Shyh-Yuan Lee — 加速器人才树木园

1972 年在纽约州立石溪大学 (Stony Brook University, New York) 获得理论核物理博士学位。1978 年回到石溪大学成为教职员之前，他曾在布鲁克海文国家实验室 (Brookhaven National Laboratory) 的科学团队任职，与 Ernest Courant 等国际加速器物理学界的领导合作，共同发展了先进的加速器概念。

1990 年，美国印第安纳大学 (Indiana University Bloomington) 邀请李世元教授，以协助建立世界领先的加速器物理学学位课程，这一目标他成功实现。他被吸引的原因之一是培养下一代加速器专家的机会。在 IUB，他参与了 Indiana University Cyclotron Facility (IUCF) 装置的加速器物理研究，一个应用电子冷却 (electron cooling) 技术的同步辐射储存环，为质子和轻离子束提供了前所未有的能量精度。

李世元教授为加速器物理学教育做出了重要贡献，出版了两本在加速器领域广泛使用的教科书：加速器物理 (*Accelerator Physics*, 4th Edition)、同步加速器中的自旋动力学与蛇 (*Spin Dynamics and Snakes in Synchrotrons*)。此外，近年还出版了关于声学基础的教科书 (*Fundamental Physics of Sound*)。李世元教授在美国粒子加速器学校 (USPAS) 中发挥领导作用，担任校长并推进 IU-USPAS 硕士学位课程。在 IUB 的 28 年里，李世元指导了 35 名成功的博士生，为下一代加速器物理学家培养做出了约 20 % 的贡献。他的学生涉足世界各地领先的加速器设施的前沿研究，包括解决 Los Alamos 中子科学中心质子储存环的不稳定性问题和亚洲新同步辐射器的设计。

李世元教授的研究和教育贡献得到了多个奖项的认可，他的退休标志着他卓越职业生涯的结束，但他充满能量、热情和深刻洞察力的个人特质将在他的退休生活中继续发挥作用。

以上部分内容取自 Lauren Robel、Steve Vigdor 编辑的 *A thank you to our writers, Indiana University Bloomington (2018)*。此子标题借鉴自 Ya. Derbenev (JLab) 在 2010 年举办的束流物理研讨会 (beam physics symposium) 时使用的“arboretum”一词。树木园一词同时有“十年树木，百年树人”之意。

J.3 Klaus Halbach — 世界级加速器磁铁专家

Klaus Halbach 是德国人，在瑞士的 University of Basel 完成博士学位，1957 年到美国斯坦福大学与核磁共振先驱 Felix Bloch²共事。1960 年加入旧金山的劳伦斯伯克利国家实验室 (Berkeley Lab) 等离子体组，随后参与建设同步加速器 Omnitron 项目，尽管后来 Omnitron 没有建成。

Halbach 最为人熟知的工作是他在粒子加速器的磁铁设计。Halbach 与同在实验室的工程师 Ron Holsinger 开发了一个有名的磁场计算程序 POISSON，至今仍得到普遍使用³。此外，作为周期性永磁结构“插入件”(insertion device) 的设计，他是世界上最早、最重要的设计者之一，为当时实验室的先进(同步辐射)光源项目 (advanced light source, ALS) 与后来世界上的其它三代同步辐射光源装置、自由电子激光装置等发展敞开大门。

不同于电磁铁，Halbach 的永磁铁 – 一种钢的合成体 – 既不需要电力驱动，也不需要占空间的载流线圈。因此，在电子储存环中，这些磁铁可以设计得很紧凑。

Halbach 作为加速器设计与磁铁系统的专家，担任世界上许多加速器项目的顾问，包含伯克利实验室的 ALS、阿贡实验室的先进光子源 (Advanced Photon Source, APS) 与 SLAC 的同步辐射加速器 (Stanford Synchrotron Radiation Laboratory, SSRL)。退休前，Halbach 任职于伯克利国家实验室的工程部门。自从 Halbach 在 1991 年退休之后，仍然积极地在参与磁铁设计与培养、训练学生。1995 年举办的以 Halbach 为名的研讨会，吸引了全世界 100 多名专家参会。他的贡献涉及多个不同项目/领域，包含应用于产生放射性同位素的小型回旋加速器、应用于机电电池的磁铁与低摩擦磁轴承、应用于未来火星登陆任务的核磁共振谱仪的迷你型永磁铁。

Halbach 于 2000 年过世。伯克利国家实验室的 ALS 树立了一个给对仪器设计与建设有杰出表现的每年奖项，称 Klaus Halbach 奖。

²Felix Bloch 因为开展核磁共振准确量测的新方法，1952 年与 E.M. Purcell 共享诺贝尔物理学奖。

³https://laacg.lanl.gov/laacg/services/download_sf.phtml

J.4 Rodolfo Bonifacio — 经典与量子自由电子激光先驱

出生于意大利西西里岛 (Sicily)，后搬到米兰，在那里他于 1964 年获得物理学博士学位。他开始研究的时候，正值量子和非线性光学迅速发展的时期，激光首次产生相干光。他与 Tito Arecchi 合作的其中一篇论文导出了描述电磁脉冲与双能级原子集合 (collection of two-level atoms) 自治相互作用的非线性方程，即 Maxwell-Bloch 方程 (或更准确地说，是 Arecchi-Bonifacio 方程⁴) 时，他们引入了电磁脉冲的缓变包络近似 (slowly varying envelope approximation, SVEA)，并展示了双曲正切脉冲解。这项研究在 20 世纪 60 年代末期 Bonifacio 在哈佛大学访问时进行，那时他受到了 Roy Glauber 的邀请，随后在 20 世纪 70 年代回到米兰。

1970 年，Bonifacio 与 Paolo Schwendimann 和 Fritz Haake 合作开展了集体自发辐射 (cooperative spontaneous emission) 的经典和量子理论，创造了超荧光 (superfluorescence) 这个专有名词，用以指双能级原子集合在激发态下，原子偶极子趋于零的条件下发射的辐射。后来，与 Luigi Lugiato 一起，他给出了振荡超荧光的理论描述。他的预测在实验中得到了良好的验证。在 20 世纪 70 年代中期，与 Luigi Lugiato 继续合作，Bonifacio 提出了光学双稳定性 (optical bistability) 的平均场理论，该理论被学术界普遍采纳，并描述了透射光和光子统计的量子特性。他们还在一个环形腔中制定了光学双稳定性的精确理论，这使得可以预测光学自脉动 (optical selfpulsing) 现象，后来在实验中观察到。

20 世纪 70 年代末，Bonifacio 将注意力转向了一种新的相干辐射源，即自由电子激光 (free-electron laser, FEL)。FEL 为与波荡器磁场相互作用的相对论电子束自身作为辐射源，而不涉及原子或分子内部束缚态的“传统”激光介质。1982 年，他与合作者 Federico Casagrande 和 Giulio Casati 给出了描述 FEL 的一个模型，并表明当波荡器磁场的振幅或电子束团密度超过一临界值时，系统会发生强耦合混沌运动的类一阶相变 (first-order-like transition)，从而产生强烈的协同辐射。20 世纪 80 年代和 90 年代，他进一步研究了 FEL，描述了许多现象，包括自放大自发辐射 (self amplified spontaneous emission, SASE) 的时空特性，即 FEL 从噪声开始时发射的辐射。这是 SLAC 的第一台 X 射线 FEL 在 2009 年首次运行的操作模式。

自 20 世纪 90 年代中期，Bonifacio 在传统的“原子”和自由电子激光的经验基础上，借用了两个领域的概念，研究了原子气体中的光-物质相互作用。当时，关于冷却和捕获原子气体的实验进展迅速，但对气体的极低温度如何影响其与光的相互作用几乎没有人考虑。1994 年，Bonifacio 开展了“集体原子反冲激光” (collective atomic recoil laser, CARL)

⁴ 英国斯特拉斯克莱德大学 (University of Strathclyde) 加速器物理学家 Brian McNeil 提议，目前普遍援引的 Maxwell-Bloch 方程源于 S.L. McCall and E.L. Hahn, Self-Induced Transparency by Pulsed Coherent Light, Phys. Rev. Lett. **18**, 908-911 (1967) 的一篇关于光学上电磁诱导透明 (self-induced transparency) 论文，但其等价的、甚至更完整的方程在更早之前已经给出，可参考 F.T. Arecchi and R. Bonifacio, Theory of optical maser amplifiers, IEEE J. Quantum Electron. **1**, 169-178 (1965). <https://doi.org/10.1109/JQE.1965.1072212>，基于此，McNeil 认为或许 Maxwell-Bloch (MB) 方程应称为 Arecchi-Bonifacio (AB) 方程。

的发展—这是在冷原子气体中进行光放大的理论，依赖于原子内部束缚态和原子质心运动，以产生原子的集体聚束，随后产生入射泵浦场的相干散射。CARL 后来在涉及冷却和热原子气体的实验中被观察到，也在玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein Condensate, BEC) 中被观察到，这被称为“超辐射瑞利散射”(superradiant Rayleigh scattering, SRyS) 过程。涉及超冷玻色-爱因斯坦凝聚的 SRyS 实验激励了 CARL 模型的扩展，包括对由于光子散射引起的原子反冲的量子描述。这进而促使 Bonifacio 在 21 世纪初重新审视高增益 FEL 理论，并研究了高增益量子自由电子激光 (quantum FEL, QFEL) 的可能性，其中，集体聚束不稳定性离散电子-光动量交换的离散性质非常重要。基于 Giuliano Preparata 在 20 世纪 80 年代末的突破性工作，Bonifacio 推动了 QFEL 模型的发展，作为一种紧凑的相干 γ 射线辐射源的潜在基础，并积极参与了该工作直至去世。

为了表彰他的重要成果和科学成就，Bonifacio 于 1987 年获得了富兰克林研究所 (Franklin Institute) 颁发的迈克尔逊奖，以表彰他在光学双稳定性研究方面的工作，1994 年获得了量子光学和量子电子学学会颁发的爱因斯坦奖，以表彰他在 FEL 领域的开创性工作。他以无比的热情和能量进行研究，使与他一同工作的人终身难忘。

以上部分内容摘自 <https://www.sif.it/riviste/sif/sag/ricordo/bonifacio>。

J.5 Kaoru Yokoya — 直线加速的成功道路

横谷薰教授，1970 年获得东京大学理学学士学位，1972 年获得理学硕士学位，1986 年获得博士学位，全部学历均来自东京大学 (University of Tokyo)。横谷博士早年的职业生涯充满了波折。他曾梦想成为天文学家，但受制于当时的观念，认为天文学仅仅是应用物理，不值得一个渴望解决基础问题的人投身。大学毕业后，他的粒子理论兴趣被现实击败：“我找不到工作”，他感叹道。因此，他于 1978 年加入高能加速器研究机构 (High Energy Accelerator Research Organization, KEK)，投身正负电子对撞机项目 TRISTAN 的设计工作，研究粒子加速器的物理而非粒子本身，专注于束流不稳定性、束流极化以及电子储存环设计等问题，撰写了有关储存环中极化电子束动力学的博士论文。从那时起，他一直以束流动力学在直线加速器中和对撞点的物理为主要研究方向。这项工作以及对电子和正电子相撞束流相互作用的研究使他于 1990 年获得了日本物理学领域最负盛名的奖项之一——Nishina 奖 (仁科記念賞, Nishina Memorial Prize)。

横谷博士以理论物理学家的身份在日本粒子物理学界发挥关键作用，被同事形容为“100% 科学家”。他以数学严谨和对难题的深刻洞察力而闻名，成功解决了与粒子轨迹弯曲和由辐射引起能量损失相关的问题，成为物理学中最热门项目之。

横谷博士还为建模对撞机动力学编写了大量关键计算机代码。这些程序的名称，如 SODOM、ABEL 和 CAIN，透露出他严肃而带有黑色幽默的个性。他的科学研究难度与其严谨和简练的风格相结合，对同事们构成了不断的挑战。“他说话时，我会仔细听，”一位美国合作者说，“因为如果他能用三个词说清楚一件事，他绝不会用四个。”

与 JLC 项目上的大多数实验同行不同，横谷博士对硬件并不感兴趣，但这是理论家的典型特征。尽管曾一度参与日本“B 工厂”的建设，但当设计确定后，他选择离开。“人们在讨论磁铁的尺寸达到毫米级的精度等事情，”他笑着说：“这不吸引我，超出了我的能力范围！”

以上部分内容取自 A. Regalado, A Straight Line to Success, Science 266, 5188 (1994). <https://www.science.org/doi/10.1126/science.266.5188.1180> 与美国物理学会 Robert R. Wilson Prize 网页 <https://www.aps.org/programs/honors/prizes/wilson.cfm>。

在 2021 年举办的国际粒子加速器会议 (IPAC21) 上，作为特邀演讲，横谷薰教授分享了他认为加速器理论中五个最漂亮的公式。它们分别是：

1. Courant-Snyder 参量：Hill 方程的一种解的形式 ⇒ 原始论文可参考 E.D Courant and H.S Snyder, Theory of the alternating-gradient synchrotron, Annals of Physics 3, 1-48 (1958). [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(58\)90012-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(58)90012-5) 或讲义 §7.2、§7.3。
2. Panofsky-Wenzel 定理：此定理基于刚性束团与冲量近似的结果，也是尾场函数等概

念的基础 ⇒ 原始论文可参考 W.K.H. Panofsky and W.A. Wenzel, Some Considerations Concerning the Transverse Deflection of Charged Particles in RadioFrequency Fields, Rev. Sci. Instrum. **27**, 967 (1956). <https://doi.org/10.1063/1.1715427>。可参考讲义 §11.6.3。

3. Keil-Schnell 条件：基于 coasting beam 近似，判断纵向稳定的简洁公式，将朗道阻尼效应引进加速器理论的早期经典工作 ⇒ 原始论文可参考 E. Keil and W. Schnell, Concerning longitudinal stability in the ISR, CERN-ISR-TH-RF-69-48 ; ISR-TH-RF-69-48 (1969). <https://cds.cern.ch/record/1229157/files/ISR-69-48.pdf>。后来推广为适用于 bunched beam 的 Keil-Schnell-Boussard 条件。可参考讲义 §13.5.2。
4. Derbenev-Kondratenko 公式：考虑同步辐射效应时，在电子储存环达平衡时的电子自旋极化公式。D-K 公式是少数出了名地晦涩难懂，特别是充满神秘色彩的 \mathbf{n} ⇒ 原始论文可参考 Ya. S. Derbenev and A.M. Kondratenko, Polarization kinetics of particles in storage rings, Journal of Experimental and Theoretical Physics (JETP) **37**, 968 (1973). http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_037_06_0968.pdf。
5. BCI/TBCI 框架：严格上说，这不是“公式”，而是计算加速器结构中带电粒子激发的电磁场的一种数值计算框架 ⇒ 原始论文可参考 T. Weiland, On the computation of electromagnetic fields excited by relativistic bunches of charged particles in accelerating structures, CERN-ISR-TH-80-07 ; ISR-TH-80-07 (1980). <https://cds.cern.ch/record/122751/files/198006235.pdf>。这是将 PIC (Particle In Cell) 演算法引入加速器领域的早期工作之一，目前普遍使用的众多数值模拟程序深受此工作影响。

J.6 Kwang-Je Kim — 细推物理须行乐，何用浮名绊此生

中文名金光齐，出生于韩国，于 1966 年从首尔大学 (Seoul University) 获得物理学学士学位。之后，他前往美国，在 1970 年从马里兰大学获得基本粒子物理学博士学位。他的职业生涯一直在美国。尽管他曾考虑成为一名艺术家，但由于他的高中老师不介意金频繁指出错误，因此给了这位年轻人在物理学方面的信心，使他最终投身于物理学。在 SLAC 和其它地方担任高能粒子物理学家数年后，他于 1978 年加入劳伦斯伯克利国家实验室 (Lawrence Berkeley National Laboratory, LBL)，成为一名加速器物理学家。他一直留在 LBL 直到 1998 年，最终成为束流物理中心 (Center for Beam Physics) 副主任。1998 年，他加入阿贡国家实验室 (Argonne National Laboratory, ANL)，担任加速器系统部门的副主任，并在芝加哥大学 (University of Chicago) 兼职担任教授。在 ANL，他创建了阿贡加速器研究所 (Argonne Accelerator Institute)。目前，他作为 ANL 杰出研究员致力于束流动力学研究，并兼任韩国浦项科技大学 (Pohang University of Science and Technology, POSTECH) 的客座教授。

金教授显然在管理方面具有才华，此外，他还在许多非常重要的研究领域做出了贡献。他在 LBL 的首个任务是为 Bevatron 设计一个共振引出 (resonance extraction) 系统。经过一周的夜班和对设备的调试，系统表现出色。很快，他涉足了同步辐射领域，并且这一主题贯穿了他整个职业生涯。他发现当时束流亮度的估算方式不够精确，因此提出用电场的双线性 (bilinear) 表达式解释作为相空间密度的方式，从而能够以逻辑自洽的方式描述同步辐射亮度此一概念。他还发明了一个“交叉”波荡器，通过串接两个平面波荡器并相互垂直放置，用于产生任意可调偏振的波荡器辐射。

金教授是最早研究自由电子激光理论中自放大自发辐射 (self-amplified spontaneous emission, SASE) 的人之一，并且还开展了射频 RF 光阴极中电子束动力学的开创性分析。金的其它工作包括发明用于产生飞秒 X 射线的 90° 汤姆孙散射、重新审视电子运动方程、通过 Moniz 和 Sharp 的简单重新表述量子分析、对离子冷却 (ionization cooling)、微束不稳定性 (microbunching instability) 和类似于费曼规则微扰解的贡献、Smith-Purcell 自由电子激光理论、关于发射度交换的方案、X 射线自由电子激光振荡器 (x-ray FEL) 的概念等。

他还涉及教学工作，在加州大学伯克利分校、芝加哥大学以及美国粒子加速器学校授课。他是一位热衷的慢跑者。近年来，他通过定期与妻子打乒乓球来进行剧烈的锻炼，因为她比他更擅长。他和妻子喜欢音乐会和歌剧，他则是阅读广泛—主要是历史方面的—包括韩文、英文、日文、中文和德文。

J.7 John Madey — 第一位实现自由电子激光器的科学家

出生于美国，于 1964 年从加州理工学院获得物理学学士学位时，他的导师是 Alvin Tollestrup。然后，他于 1965 年在先驱激光物理学家 Amnon Yariv 的指导下，在加州理工学院获得电气工程硕士学位，随后前往斯坦福大学。在那里，他在 Bill Fairbank 的指导下进行博士研究，为 Fairbank 的正电子自由落体实验开发了一个强大的热正电子源。

在大学期间，Madey 在同步辐射实验室参与了高能物理实验设备以及同步辐射装置的工作。他在布鲁克海文国家实验室 (Brookhaven National Laboratory, BNL) 度过暑假，对 AGS 进行了调试。1971 年，他加入了斯坦福的 W.W. Hansen 实验室，在此期间，他发明并带领团队建造了世界上第一台自由电子激光器 (free electron laser, FEL)⁵。他曾表示，发明 FEL 的灵感在于他在布鲁克海文实习期间与 John Blewett、Ken Green 和 Renate Chasman 的一次谈话，他们在谈论使电子产生相干辐射的可能性，正如目前在教科书里介绍的那样。1986 年，他被提升为斯坦福大学电气工程系的研究教授。

1989 年，他转到杜克大学 (Duke University)，领导并成功开展基于储存环的自由电子激光器。1998 年，他成为夏威夷大学 (University of Hawaii) 的物理学教授，将 FEL 技术应用于遥感 (remote sensing)。Madey 精通加速器物理学，并且他曾经发表过一篇特别雄辩的、为加速器物理学辩护的文章，部分截取如下：

加速器 (和 FEL) 物理学并不是仅致力于建造规模越来越大和更昂贵的设施的学科，而是一般学术事业中固有的一部分，致力于理解电动力学的最基本原理和现象。但由于我们往往被同行视为设计者和使其研究所需设施越来越复杂的推动者，我担心我们可能更多地被同行视为工程师和技术人员而不是科学家。因此，似乎我们需要不时地、有礼貌地提醒我们的同行，虽然我们愿意与他们合作开发他们研究所需的设施，但我们也都有自己同样基础的科学和学术愿望。

⁵这里的“发明”在多数 — 但或许不是所有 — 文献这么写。约在 1979 年的十年之前，K.W. Robinson 已经给出了关于电子扭摆运动产生自由电子激光的可行性分析。遗憾的是，Robinson 本人在当时并没有及时发表他的结果。这是后人在 Robinson 过世之后整理其文献才意外发现的。

J.8 Claudio Pellegrini — 高增益自由电子激光不稳定性

出生于意大利罗马 (Rome)，于 1958 年获得学士学位，随后于 1965 年在罗马大学 (University of Rome) 获得博士学位。1958 年至 1978 年期间在弗拉斯卡蒂国家实验室 (Frascati National Laboratory) 工作，然后在布鲁克海文国家实验室 (Brookhaven National Laboratory, BNL) 的国家同步光源 (National Synchrotron Light Source, NSLS) 工作。1978 年至 1989 年，他担任了加速器物理中心的副主席和联合主任。1989 年，他成为加州大学洛杉矶分校 (University of California, Los Angeles, UCLA) 的物理学教授。

Pellegrini 是一位理论物理学家，像大多数加速器理论学家一样，他对构建这样的机器所需的技术非常熟悉。他的研究集中在两个领域。第一个领域是粒子束的集体效应。第二个领域是粒子束与电磁辐射和等离子体的相互作用。他以在弗拉斯卡蒂时与 M. Sands 和 B. Touschek 分别合作发现的一种不稳定性而闻名，此不稳定性为鼎鼎大名的头尾不稳定性 (head-tail instability)。他不仅能够解释这一现象，还为其提出了解决方案。但也许他最为人知的是在粒子与电磁束相互作用的第二个领域，特别是他首次发现并深入分析的，即不稳定性、集体效应和自组织 (self-organization) 现象，称自由电子激光不稳定性 (FEL instability)。Pellegrini 一直走在这个方向的前沿，自从搬到 UCLA 后，他还参与等离子体激波加速器 (plasma beat-wave accelerator) 和逆自由电子激光 (inverse free-electron laser, IFEL) 的实验。

自由电子激光的物理过程包括电子束与电磁场在波荡器中相互作用。自 1984 年后，他一直对 FEL 的高增益、自放大自发辐射 (self amplified spontaneous emission, SASE) 工作模式很感兴趣。在 1992 年首次提出，在 SLAC 的直线加速器使用 SASE FEL 机制产生 1 \AA X 射线的高功率、亚皮秒激光脉冲。此一提议形成了现在的直线加速器相干光源 (Linac Coherent Light Source, LCLS) 项目，一个 1.5 \AA 的 SASE FEL。

J.9 Albert Josef Hofmann — 同步辐射理论大师

在瑞士联邦理工学院 (Eidgenössische Technische Hochschule, ETH) 毕业后，他前往英国剑桥电子加速器 (Cambridge Electron Accelerator, CEA) 工作一段时间，在那里他致力于将环形同步加速器改为正负电子对撞机装置，并进行粒子物理实验。CEA 于 1973 年关闭，他随后移至 CERN 担任高级物理学家。在那里，他解决了交叉存储环 (Intersecting Storage Ring, ISR) 的加速器物理问题，这是当时一个重要的强子对撞机，然后参与了大型电子正电子对撞机 (Large Electron Positron, LEP) 的设计。1983 年，他接受了在斯坦福直线加速器中心 (SLAC) 和斯坦福同步辐射实验室 (SSRL) 的联合职位。在那里，他主要致力于斯坦福直线对撞机 (Stanford Linear Collider, SLC) 的建设以及与同步辐射产生相关的加速器问题。1987 年，他回到 CERN，负责 LEP 的投入运行。在 LEP 完成后，他一直致力于研究该机器的加速器物理问题，直到 1998 年退休。之后，他在 SSRL、SLAC B 介子工厂 (PEP-II)、巴西光源 (Laboratorio Nacional de Luz Sincrotron, LNLS) 以及在美国加州 Lyncean Technologies 短期工作。

他给人以礼貌、温和的印象，很难被挑衅引入有争议的讨论。如果他想提出相反的观点，通常会以有趣的轶事或一位杰出物理学家的生活和工作引语隐藏起来，通常是 Pauli 或 Einstein。由于与世界各地的联系以及通过帮助其它实验室设计和改进加速器积累的丰富经验，他经常被邀请在他的专业领域进行讲座。在学校和研讨会上，他对这个最数学化技术中较为棘手的问题的深思熟虑的解释总是受到观众中初学者和专业人士的赞赏。

J.10 John Paul Blewett — 几乎为首位见证同步辐射的人之一

出生于加拿大多伦多 (Toronto)，在多伦多大学获得了本科和硕士物理学学位，随后在 1936 年从普林斯顿大学 (Princeton University) 获得了物理学博士学位。在获得博士学位后，他在剑桥的 Cavendish Laboratory 度过了一年，师从 Ernest Rutherford 和 Mark Oliphant，从事关于 α 粒子的能量范围关系等项目。1937 年到 1946 年，Blewett 在美国纽约的通用电气公司 (General Electric Company, GE) 研究实验室工作。在此期间，Blewett 阅读了两位俄罗斯理论物理学家⁶的一篇论文，在论文中，他们指出在环形电子感应加速器 (betatron) 中循环的高能电子束会通过辐射失去一些能量。Blewett 得出结论，这种辐射确实会很显著，并且会使高能机器的建造变得困难。他预测辐射将导致 GE 公司的电子感应加速器 (100 MeV) 中轨道内缩，并计划在该机器上进行实验。目前来说，同步辐射首次被观测到的记录被认为在 1947 年通用电气公司的 70 MeV 同步加速器发现，名称虽带有历史因素⁷，但不仅限于在同步加速器中发出的辐射。

1945 年访问加州大学伯克利分校 (University of California, Berkeley) 的辐射实验室时，Blewett 了解到 E. McMillan 对同步加速器的想法。Blewett 和同事决定建造他们希望成为第一台运行的同步加速器。到 1947 年，Blewett 错过了新的 GE 电子同步加速器首次观察到的同步辐射的肉眼观察。那时他已经离开 GE，和他的妻子 Hildred Blewett 一起，她也是一位加速器物理学家，加入了新成立的布鲁克海文国家实验室 (Brookhaven National Laboratory, BNL)。

在经历背景检查的六个月后，他们获得了加入 BNL 工作的必要许可。在那里，他们的第一个任务是参与新粒子加速器 Cosmotron 的建造，该加速器将通过一次性的能量升级将加速粒子的能量扩展到 3 GeV。Blewett 负责磁体和射频加速系统的设计和建造。1952 年，Cosmotron 作为世界上第一台 GeV 量级的环形加速器投入运营。当 Courant、Livingston 和 Snyder 发明横向强聚焦时，Blewett 立即意识到这个概念在线性加速器中也可以有很大的优势。特别是，用四极磁铁替代直线加速器中的栅格是一项巨大的改进。1952 年，当欧洲高能物理实验室 (CERN) 将成立并盖新的加速器时，来自多个欧洲国家的物理学家团队访问了 BNL，他们了解到了横向强聚焦的新理念。这个团队邀请 Blewett 夫妇加入他们，协助新实验室的工作。他们去了挪威的卑尔根 (Bergen, Norway)，为在日内瓦新址建造的 CERN 质子同步加速器 (Proton Synchrotron, PS) 的设计做出了贡献。

1954 年初，他搬回 BNL，那时交替梯度同步加速器 (Alternating Gradient Synchrotron, AGS) 已获得批准建造。格林 (George Kenneth Green) 负责，Blewett 是他的副手。1960 年，

⁶应为 D. Ivanenko and I. Pomeranchuk, On the Maximal Energy Attainable in a Betatron, Phys. Rev. **65**, 343 (1944). <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.65.343>。

⁷关于同步辐射早期历史进展，可参考 John P. Blewett, Synchrotron Radiation — Early History, J. Synch. Rad. **5**, 135 (1998). <https://doi.org/10.1107/S0909049597043306> 或 Giorgio Margaritondo, The evolution of a dedicated synchrotron light source, Physics Today **61**, 37-43 (2008). <https://doi.org/10.1063/1.2930734>。

实现了一个 33 GeV 的质子束, Blewett 很快就投身于与 Luke Yuan(袁家骝)一起研究质子同步加速器达到 1000 GeV 的可能性。1962 年, Blewett 与麻省理工学院 (MIT) 的 M.S. Livingston 一起出版了 *Particle Accelerators* 一书, 总结了当时该领域的发展, 成为多年来的标准教材。1970 年, 他创办并成为同名杂志“*Particle Accelerators*”的第一任编辑。此期刊现已停刊, 但该期刊的许多论文仍具有借鉴意义。1978 年之后, 在他“退休”期间, 他重新关注起早期的兴趣: 同步辐射。他参与了提议在 BNL 建造国家同步光源的计划。他还是 NSRRC 的顾问。

Blewett 是一个享受美食的生活家, 喜欢精致的餐厅, 也喜欢户外活动, 比如帆船和园艺。

J.11 Alexander Wu Chao — 加速器百科全书

1970 年从国立清华大学获得物理学士学位，一年服役后，他前往纽约石溪大学 (Stony Brook University) 进行研究生学习。在杨振宁先生指导下，于 1974 年获得博士学位。随后，他研究了加速器理论，成为斯坦福大学直线加速器中心 (SLAC) 的博士后，至今仍致力于加速器理论的研究。

1984 年，加入了当时最令人兴奋的加速器项目 — 超导超级对撞机 (Superconducting Super Collider, SSC)，加入了德州的 SSC 实验室，担任其加速器物理部门主任，直到 1993 年 SSC 项目最终被政府关停。在 SSC 项目关停后，1993 年回到 SLAC。赵午教授是参与 SSC 项目时间最长的记录保持者，共投入了九年时间，并认为在那些年里学到了很多。

他于 1993 年成为 SLAC 的教授，由于 SSC 的经历，拒绝了升迁的行政阶梯，也不再参与任何有严格截止期限的大型加速器项目。他将时间与心力花在加速器物理和加速器社群服务上。众所周知，他在加速器物理领域的专长/贡献是全面的，包括带电粒子束的集体不稳定性理论、粒子加速器中的非线性动力学、自旋动力学、激光-粒子相互作用以及自由电子激光理论。他还将在作为加速器项目顾问和期刊编辑工作上，发起并指导了亚洲许多国家的一系列加速器学校。无论在国内还是国外，他都非常投入于教学。

赵午教授在 1993 年编写、出版了 *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators* 一书，至今为“圣经”级别的教科书，已深刻影响了两代人。1999 年，与 Maury Tigner 一起编辑 *Handbook of Accelerator Physics and Engineering* 一书，成为世界上所有加速器从业人员书架上必备的工具书。自 2008 年以来，与 Weiren Chou 一起，他担任了共十期的 *Reviews of Accelerator Science and Technology* 年度综述期刊的编辑。此外，2020 年与 2022 年先后出版了 *Lectures on Accelerator Physics* 与 *Special Topics in Accelerator Physics* 两本教科书。

J.12 Kenneth Robinson — 谦逊孤独，卓越天才

出生在美国圣地亚哥，在加州理工学院完成了大学本科和硕士学业，随后在普林斯顿大学 (Princeton University) 攻读博士学位，于 1955 年获得学位，研究方向是高能物理实验。从 1948 年到 1952 年，他曾是 RCA (Radio Corporation of America) 实验室的研究工程师，研究闪烁计数器、晶体管和彩色电视。

1955 年，他或许是第一个被 M.S. Livingston 招募到当时正在英国建设的剑桥电子加速器 (Cambridge Electron Accelerator, CEA) 的人之一。Robinson 一直留在 CEA 直到 1974 年该实验室关闭。然后，他退休搬回圣地亚哥，并中断了与许多物理学同行和朋友的联系。他在几年后因心脏病发作在公寓里去世。在 CEA，Robinson 研究了电子在谐振腔中，通过外部射频场保持在储存环中时受到辐射的影响。他首次提出了被称为“(同步) 辐射阻尼”(radiation damping) 为主题的全面分析，并提出了至今仍被称为 Robinson 求和规则 (Robinson sum rule) 的定理。他独立发明了自由电子激光，尽管他的此一发现没有发表。与 Gustav-Adolf Voss 一起，他发明了用于将束团聚焦到非常小的横截面尺寸的“低 β ”(low β) 概念，这是今天所有对撞机仍然使用的基本技术。

此处节录一段 Voss 对 Robinson 的评语⁸: *Ken Robinson was the legendary genius, who developed most of the theory of electron synchrotrons and storage rings single handedly and in whose unpublished papers, found after his death, the basics of the free electron laser had already been developed, 10 years ahead of time.*

Robinson 是一个低调而谦逊的人。他是一位狂热的游泳者，同时也是一位经常散步的人。他非常沉默，不容易交友，从未结过婚。然而，他的物理学思想是创新的、准确的，并且深受同行的尊重。他是一个“孤独者”(loner) 和一个“天才”(genius)。尽管很少开口说话，但当他说话时，那是美妙的；清晰、逻辑、简洁、精确，并且总是正确的。Voss 讲述了一个揭示这一点的故事：在 CEA 的设计和建设过程中，主管 Livingston 每周都有工作组会议。在其中的一次会议上，提出了一个新的想法，人们认为这将对同步辐射器的设计有很大的改进。Livingston 立即接受了这个想法。在会议上，他开始设计磁铁，许多其他人也纷纷提出进一步的建议，经过一番头脑风暴，每个人都感到非常高兴和自豪。突然间，Livingston 的眼睛落在了 Robinson 身上，他意识到 Robinson 在这场讨论中没有发表意见。Livingston 说：“Ken，你一言未发。你对这个想法有什么看法？”Robinson 回答：“嗯，这行不通。”

所有人似乎都感到震惊和失望。没有人敢开口说话。最终，主管 Livingston 问：“Ken，为什么行不通？”经过片刻的安静思考，Robinson 给出了一个精确的一句回答，导致主管

⁸Gustav-Adolf Voss, A Personal Perspective of High Energy Accelerators, Proceedings of the 1995 Particle Accelerator Conference (FPD01). <https://accelconf.web.cern.ch/p95/ARTICLES/FPD/FPD01.PDF>

和工作人员需要几分钟来理解，但后来很清楚他是正确的。Livingston 说：“Ken，你一直坐在这里。为什么一句话都没说？”Robinson 回答：“你刚才没问我。”

J.13 Yaroslav Derbenev — 西伯利亚蛇

生于俄国，并在莫斯科国立大学 (Moscow State University) 接受教育，于 1963 年获得硕士学位，然后于 1968 年从新西伯利亚 (Novosibirsk) 核物理研究所 (Institute of Nuclear Physics) 获得候选人学位，并于 1978 年获得该机构的博士学位。在获得博士学位前，他已在该研究所工作，并在那里从初级科学家晋升为首席科学家。

1985 年至 1986 年期间，他担任亚美尼亚埃里温 (Yerevan, Armenia) 的原子能委员会首席科学家。之后，回到新西伯利亚，加入 Institute of Complete Electric Drive，1986 年至 1990 年担任加速器物理和激光技术首席科学家。然后，移民到美国，1990 年到 2001 年在密西根大学 (University of Michigan) 担任物理学兼职教授。2001 年，他加入了杰斐逊实验室 (Jefferson Laboratory)，并一直在那里工作至今。

Derbenev 在加速器物理的几乎所有方面都做出了重要贡献，他以深刻而重要的计算以及富有想像力的新思想和发明而闻名，包括使用“西伯利亚蛇”(Siberian snakes) 进行自旋极化控制⁹、电子冷却 (electron cooling) 和电离冷却 (ionization cooling)、磁化束 (magnetized beam)、圆-扁平束的变换 (round-to-flat beam transformations)、自由电子激光、以及电子-离子对撞机 (electron-ion colliders) 等。

Derbenev 的同事认为他非常善良且有礼貌，那些与他密切合作的人补充说，他有一种幽默感，会让人惊讶，与他的安静方式形成鲜明对比。他有一个家庭，包括一个已经成年的儿子和女儿。尽管 Derbenev 几乎一直喜欢专注于工作，但有时他会与妻子一起进行海上旅行 — 据说妻子要求他保证不携带技术书籍作为度假阅读材料。Derbenev 不仅对加速器理论感兴趣，也一直对基本物理的统一理论感兴趣。

⁹此为加速器物理专有名词，由 E.D. Courant 首次引入，源于粒子自旋在加速器磁铁元件中旋转方向的轨迹看起来像移动的蛇而给出的形象化的描述。可参考 E.D. Courant and L.G. Ratner, Accelerators, Colliders, and Snakes, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **53**, 1-37 (2003). <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.53.041002.110450>。

J.14 Ernest Orlando Lawrence — 回旋加速器的发明者

出生于美国南达科塔州 (South Dakota)，在州立大学完成本科学业，然后前往明尼苏达大学 (University of Minnesota)，在 W.F.G. Swann 指导下攻读硕士学位。随后，他跟随 Swann 先后进入芝加哥大学和耶鲁大学，在耶鲁大学获得博士学位。1928 年，他到伯克利，并在那里度过了余生。劳伦斯几乎完全投身于在回旋加速器 (cyclotron)，发明后建立一个由具有不同能力和兴趣，由科学家组成的实验室。他构建了一个团队来追求目标导向的科学，这也许是最重要的贡献。实验室是一个紧密联系的小组，成员们对他都非常忠诚。他是一位伟大的乐观主义者，通常他的团队能够将他的梦想变为现实。

在早期，他就是将回旋加速器应用于医学目的的倡导者，甚至用他与 Sloan 开发的新型 1 MeV 的 X 射线管挽救了他母亲的生命。从 1940 年起，主要致力于国防问题，特别是核武器的发展。他在开发广岛原子弹中使用的分离铀方面起到了重要作用，他是美国唯一一位向时任国务卿提出请愿的科学家，请求仅对日本进行原子弹威力演示，而不实际投放。另一方面，他是 Edward Teller 寻求氢弹的坚定支持者，主张在 Livermore 海军航空站的材料测试加速器 (Materials Testing Accelerator) 使用的地点启动第二个武器实验室，该实验室最终被命名为劳伦斯利弗莫尔国家实验室 (Lawrence Livermore National Laboratory, LLNL)。他在发展冷战时期核武器的军械中发挥了非常重要的作用，但在他晚年成为裁军的倡导者。这最后的活动严重影响了他的健康，并可能导致了他的早逝。

J.15 Ernest David Courant — 虎父无犬子、横向强聚焦发明者

出生于德国哥廷根 (Gottingen)，是数学家 Richard Courant¹⁰的儿子，纽约大学库朗特学院 (Courant Institute) 的名誉赞助人。Ernest Courant 在物理学领域有着卓越的职业生涯。于 1940 年在斯沃思莫尔学院 (Swarthmore College) 获得学士学位，然后于 1943 年在罗切斯特大学 (University of Rochester) 获得博士学位。1943 年至 1946 年，他在加拿大国家研究委员会的蒙特利尔分部工作，负责设计美国之外第一座核反应堆。随后，他在 1946 年至 1948 年间在康奈尔大学 (Cornell University) 在 Hans Bethe 的指导下工作，之后进入布鲁克海文国家实验室 (Brookhaven National Laboratory, BNL)，一直任职到 1990 年退休。他在纽约州立大学石溪分校担任物理学教授的时间是从 1967 年到 1985 年。

尽管 Ernest Courant 以其在横向强聚焦技术的发明而闻名，但他在加速器物理学的许多其他方面也有贡献，例如他在自旋极化粒子方面的工作。他在发展加速器科学或更准确地说是在加速器、储存环和同步辐射设施中粒子束行为方面发挥了巨大作用。他的复杂方法，将理论物理学的力量应用于最初看似是硬件问题的领域，一直是所有人的启发。毫不夸张地说，他被认为是加速器科学发展的领军人物。

¹⁰Richard Courant 是一位德国数学家，在数学领域取得了开创性的成就，对有限元法 (finite element method) 的推动发挥了重要作用，该数值方法被广泛应用于解决偏微分方程和结构分析问题。他的工作奠定了有限元法在各种科学和工程学科中的应用基础。

J.16 Hartland Sweet Snyder — 横向强聚焦发明者、黑洞共同发现者

出生于美国犹他州盐湖城 (Salt Lake City)，并毕业于犹他大学 (University of Utah)。他在加州大学伯克利分校 (University of California, Berkeley) 进行研究生学习，师从 J. Robert Oppenheimer，于 1940 年获得博士学位。他们一起研究了在核燃料耗尽后非常重的恒星的最终状态。他们发现这些恒星将经历引力坍缩，因此是第一个意识到这一可能性的人。如今，我们相信黑洞 (black hole) 是宇宙的一个非常重要的组成部分。大多数天文学家认为每个星系的中心都有一个黑洞——包括我们自己的星系，肯定有黑洞在推动活跃星系核。

离开伯克利后，Snyder 去了西北大学 (Northwestern University)，1947 年，他与著名物理学家 S.A. Goudsmit 一起到密西根大学 (University of Michigan)，创建了新的布鲁克黑文国家实验室。在那里，他为宇宙射线理论、散射理论和量子场论做出了贡献。他还协助建造和运行了布鲁克黑文的第一个高能加速器，即 Cosmotron。他还积极参与了受控核聚变能的研究。他以共同发现横向强聚焦而闻名。他在交变梯度同步加速器 (Alternating Gradient Synchrotron, AGS) 的电子模型的建设和研究中发挥了重要作用，并参与了 AGS 的设计。1960 年，他从布鲁克黑文休假，并在英国的剑桥电子加速器 (Cambridge Electron Accelerator, CEA) 工作。然后，他去了伯克利，致力于后来成为费米实验室加速器的项目。在他的最后几年里，虽经历了许多次心脏病发作，但他利用在医院的时间学习俄语，最终在伯克利时因心脏病发作而辞世。Snyder 以少年般的热情、良好的精神和愉快的举止而闻名。

J.17 Milton Stanley Livingston — 横向强聚焦发明者、Livingston 图

出生于美国威斯康辛州 (Wisconsin)，五岁时随家人搬到加利福尼亚南部。他的父亲已经成为一名高中教师，发现牧师的薪水无法维持一个庞大家庭的生活。为此，他父亲在一边购买了一片 10 英亩的橙子园和牧场。Livingston 在农场学到了各种技能并从事了各种农场工作。他对工具和农机产生了浓厚兴趣；这些技能成为了他后来一生中作为复杂科学系统设计师和建造者的基础。

他在波莫纳学院 (Pomona College) 获得了本科教育，后来在达特茅斯 (Dartmouth College) 获得硕士学位，并在加州大学伯克利分校 (University of California, Berkeley) 获得博士学位。在那里，在劳伦斯的指导下，他在博士期间建造了第一台回旋加速器 (cyclotron)。他使用了 Edlefson 之前使用的 4 英寸磁铁，建造了一个真空室并在其中安装了一个空心的 D 形加速电极，添加了一个射频振荡器，并将整个系统组装在一起。在劳伦斯的积极帮助和监督下，他于 1930 年 11 月左右首次发现了谐振加速的证据。

他着手设计和建造下一台机器，一台基于直径 11 英寸极块磁体的设计，可以达到 1 MV。加速过程发生在一对空心的 D 形电极之间的间隙中，间隙的边缘有网格以限制电场在“D 形”之间的空间。1934 年，Livingston 前往康奈尔大学，建造了当时在伯克利以外的另一台 2 MeV 回旋加速器，与核物理学家 Hans Bethe 合作发表实验核物理领域的“圣经”级论文 (Bethe Bible)¹¹。1938 年，他前往麻省理工学院 (Massachusetts Institute of Technology, MIT)，建造了一台在二战期间广泛用于灭菌血液和制造医学用途放射性示踪剂的回旋加速器。

在战争期间，他从事雷达和雷达对抗方面的反潜作战工作。战争结束后不久，他离开了麻省理工学院，并在布鲁克海文国家实验室的启动中发挥了重要作用，他是该实验室第一台加速器 Cosmotron 的推动者。在那之后不久，他提出一种设计修改，领导交替梯度聚焦的概念。然后，他搬到了英国剑桥，在那里建造了 6 GeV 剑桥电子加速器 (Cambridge Electron Accelerator, CEA)，并担任 CEA 的首任主任长达 10 多年。于 1970 年退休，搬到了美国新墨西哥州的 Santa Fe，在那里，除其他事务外，他还撰写了洛斯阿拉莫斯的历史，而在空闲时间里则制作珠宝。

¹¹M. Stanley Livingston and H. A. Bethe, Nuclear Physics C. Nuclear Dynamics, Experimental, Rev. Mod. Phys. **9**, 245 (1937).

J.18 Edwin McMillan — 纵向稳相原理提出者

出生于加州的 Redondo Beach，其父亲是一名医生，早早介绍他进入加州理工学院 (California Institute of Technology, Caltech)，在那里他开始对科学产生了浓厚兴趣。于 1924 年进入 Caltech，主修物理学，但学习了大量的化学，并在与 Linus Pauling 的密切合作中受到很大影响。McMillan 于 1928 年获得理学学士学位，一年后获得理学硕士学位。他在普林斯顿攻读博士，于 1932 年获得学位。随后获得了为期两年的国家研究奖学金，并在劳伦斯的说服下，于 1932 年前往伯克利。在那里，他试图测量质子的磁矩 (magnetic moment)，但著名的物理学家 Otto Stern 抢先他一步。1934 年，劳伦斯邀请他加入 Rad Lab (即如今的 Lawrence Berkeley Laboratory)，并于 1935 年加入伯克利的物理系。之后他在伯克利度过了余生。

在第二次世界大战期间，他协助发展了雷达技术，然后前往 Los Alamos 参与原子弹的研制。随后，他对在冷战期间建立核武库提出了批评。与同事一起，他发现了放射性物种铍 10 (beryllium 10)、碳 14 (carbon 14) 以及新元素镎 (neptunium, Np) 和钚 (plutonium, Pu)。放射性碳已成为古代化石和考古物品定年的重要工具。

他在粒子加速器方面的最重要贡献包括纵向稳相原理 (与 V.I. Veksler 独立发现) 和电子同步加速器的发展，以及作为劳伦斯团队的关键成员，该团队开发了一系列越来越大的回旋加速器。曾任劳伦斯实验室的第二任主任，在此期间帮助推动了实验室进入许多新领域。

McMillan 是一位终身收藏家和爱好者。他热爱户外活动，年轻时攀登过惠特尼山 (Mount Whitney) 和马特洪峰 (Mount Matterhorn)，并经常在海洋中游泳。后来的日子里，他经常访问沙漠地区，收集岩石和贝壳，从事园艺和养殖兰花。他为人谦逊、随和而宜人。

J.19 Wolfgang Panofsky — SLAC 首任主任

认识他的人一般称他 Pief，出生于德国柏林(Berlin)，1934 年到美国。于 1938 年获得普林斯顿大学的文学学士学位，1942 年获得加州理工学院的博士学位。Panofsky 和他的兄弟同时在普林斯顿，两人自然都是他们各自班级的佼佼者，但其中一人略胜一筹。为了清楚表示指的是哪个人，他们被称为“聪明的皮夫”(The smart Panofsky) 和“笨蛋皮夫”(The dumb Panofsky)。

Panofsky 的才能早有人认可，在第二次世界大战期间，1942 年至 1943 年，他被任命为加州理工学院的一个军事研究项目负责人。他参与了 Los Alamos 有关核武器的诊断工作。1945 年，他到加州大学伯克利分校，迅速在学术界崭露头角，并一直待到加州政府对教职员实施效忠誓言(Loyalty Oath)，而他反对这一规定。因此，1951 年，他转到了斯坦福大学(Stanford University)，一直任教至退休。

在伯克利，Panofsky 与 Luis Alvarez 密切合作。他曾担任斯坦福高能物理实验室主任，然后成为斯坦福直线加速器中心(Stanford Linear Accelerator Center, SLAC) 的首任主任，直到 1984 年退休。没有皮夫就没有 SLAC，他确定了实验室的方向并组织了使其成为世界著名的研究。事实上，SLAC 的许多成员因得益于 Panofsky 而获得了诺贝尔奖。他在高能物理领域产生了重大影响，不仅通过自己的研究，间接通过 SLAC 的影响，还通过他对美国能源委员会和后来的能源部(Department of Energy, DOE) 的咨询工作。Panofsky 的观点对许多议题产生了影响，因为他的忠告总是明智而合理。他曾在许多重要的高能物理咨询委员会上任职，而他未能参与的少数几个委员会也会寻求他的看法、意见和判断。Panofsky 的专业知识不仅限于高能物理，他曾在检测核爆炸、军备控制、核材料控制和后冷战威慑政策等广泛问题上担任顾问。他在一些更广泛领域的许多重要委员会中任职，如总统科学顾问委员会、军备控制与裁军局和总统军备控制总顾问委员会等。Panofsky 在军备控制方面付出了大量努力。在国家科学院，他是国际安全与军备控制委员会的成员，后来成为主席。在他的领导下，该委员会与苏联，然后是中国，在美国与这些国家的关系较为疏远的时期建立了有益的互动。

J.20 Robert Wilson — 费米实验室首任主任

Robert Wilson 是对粒子加速器发展影响最为深远的人物之一, 堪称继 Ernest Lawrence 之后的重要人物。他在粒子加速器科学领域的贡献令人难以置信 (beyond belief)。

出生于美国怀俄明州 (Wyoming) 的牧场主家庭, 童年时期在“边疆”美国度过, 从 8 岁开始表现出对机械事物的兴趣。就读于加州大学, 在劳伦斯的指导下攻读博士学位, 在研究生阶段就为粒子加速器技术做出了重要贡献, 于 1940 年获得博士学位。然后他去普林斯顿大学, 参与了该大学有关铀电磁分离的短暂项目。之后, 他前往 Los Alamos, 负责回旋加速器实验室, 并随后成为物理研究部门主管。战后, Wilson 在确保原子能受到民用控制方面发挥了重要作用。他是启动美国科学家联合会 (Federation of American Scientists) 的关键人物, 并在终身内一直参与军备控制事务。

1946 年, Wilson 到哈佛大学 (Harvard University), 仅待了两年, 建造了一个回旋加速器, 并首次提出了在癌症治疗中使用快质子的概念。这一想法具有重要的开创性意义, 因为这一创见, 如今有越来越多的质子治疗设备。他建造的回旋加速器在接下来的几十年里继续用于治疗癌症患者。1947 年, 他前往康奈尔大学 (Cornell University), 在那里建造了核研究实验室 (Laboratory of Nuclear Studies) 和一系列四个电子同步加速器, 从 300 MeV 到 12 GeV 不等。他是首位在实验中验证横向强聚焦革命性概念的科学家。

1967 年, 他成为新成立的费米实验室 (当时称为“国家加速器实验室”) 的主任。在那里, 他以比最初提案低 30% 的成本建造了加速器。与此同时, 他在建筑结构甚至电力线设计方面展现出的艺术天赋是显而易见的。他本人是一位颇有造诣的雕塑家。他的创造力和想像力令人难以置信。例如, 费米实验室的一部分被还原为最初的草原, 很快就吸引了稀有的鸟类。一群野牛 (“bison”) 也被引入其中。

或许 Robert Wilson 最令人铭记的是他在 1969 年对参议员 Pastore 提出的问题的精彩回应:

- Pastore: “这个加速器的希望与国家安全有任何关联吗?”
- Wilson: “不, 先生。我不这么认为。”
- Pastore: “一点都没有?”
- Wilson: “一点都没有。”
- Pastore: “在这方面没有价值?”
- Wilson: “它只与我们彼此尊重的程度、人类的尊严、我们对文化的热爱有关。它涉及到的是: 我们是否是优秀的画家、优秀的雕塑家、伟大的诗人这些问题。我的意思是, 这些是我们在国家中真正尊重、崇敬的事物, 以及我们为之而爱国的事物。它 (加速器本身) 与直接保卫我们的国家无关, 只是让它 (加速器本身) 值得被保卫才是。”

J.21 Gersh Budker — “相对论”的工程师

出生于俄国一个村庄，1936 年加入莫斯科国立大学 (Moscow State University)，于 1941 年毕业。他立即成为一名高射炮手，并有了他第一个发明：改进炮制导系统。战后，他在库尔恰托夫研究所 (Kurchatov Institute) 从事等离子体物理的研究，同时在莫斯科国立大学担任讲师。在 Dubna，他对加速器产生了兴趣。他研究了共振、磁场整平、束流引出等，并在 1956 年的第一次国际加速器会议上提出了一些激进的想法。与库尔恰托夫研究所的八名同事一起，他开始研究电子储存环。1958 年，他的工作被迁至新西伯利亚 (Novosibirsk)，他在那里建立了自己的研究所，成为苏联最重要的研究所之一。在 Budker 的领导下，这个团队建造了一个又一个的电子储存环，进行了高能物理研究。1966 年，他发明了束流冷却，特别是用电子冷却强子束 (electron cooling)。Budker 将自己描述为一个“相对论工程师”(relativistic engineer)，但实际上他的贡献比这更多。

J.22 Bruno Touschek — 世界上第一台对撞机 AdA 建造者

粒子加速器的发展在很大程度上与欧洲历史上最动荡的时期重叠，纳粹种族主义驱逐了许多才华横溢的科学家离开家园，迫使他们逃离，扰乱了他们的职业生涯和可能参与的项目。在美国，二战爆发使得建造回旋加速器的计划暂时搁浅，因为急需聚焦精英头脑来建造电磁分离裂变材料用于武器的 Calutron。Touschek 是那些未能及时离开祖国的人之一。他的祖国奥地利，希特勒的出生地，正在为其被德国吞并做准备。1937 年，当他仍在维也纳的学校学习时，尽管成绩名列前茅，但因为有犹太血统而被要求离开。得知这一情况后，量子理论的奠基人 Arnold Sommerfeld 邀请他到德国汉堡 (Hamburg)，那里对他的来历了解得不太清楚。正是在这里，他了解到 Wideroe¹² 正计划建造一台 15 MeV 的电子感应加速器 (betatron)。1944 年，他努力运用哈密顿力学解决了电子感应加速器循环束流轨道的稳定性问题。

随后，Touschek 搬到了德国柏林 (Berlin)，在战争即将结束时，为了躲避轰炸，他试图驾驶一辆电动车去车站，携带着他珍贵的书库，搭乘火车前往汉堡。在汉堡，他立即引起了党卫军的怀疑，他们无法理解他经常访问那里的商会。党卫军逮捕了他，但不得不将他从一个监狱转移到另一个监狱；他逃脱了，但在携带书籍时晕倒，被当作死人留下，但医生治疗他的伤口后又将他交给了党卫军。正是在监狱里的这段时间，他发展了同步辐射理论，这个理论写在量子力学教科书的边缘，使用隐形墨水书写，由他的朋友 Wideroe 走私出来。

Touschek 是一个另类，同时富有想像力的人，其性格在其他方面也有所体现，比如他有两只猫，称“普朗克”(Planck) 和“泡利”(Pauli)。他声称其中一只相当聪明，而另一只则被认为不太聪明，因为它甚至在给予钥匙后也无法打开一罐沙丁鱼。有一位同事回忆道，Touschek 在他的课堂笔记中散布着幽默而看似不合时宜的双关语，这让学生们又惊叹又思考，他是如何接近疯狂科学家的刻板形象。这种幽默和风趣的表现方式展现了 Touschek 的与众不同，使他在学生和同事中留下了深刻的印象。此外，还有一段关于 Touschek 的学生在他的办公室里学习的回忆。学生描述了 Touschek 在黑板上密密麻麻地写满了不断变化的公式，而在中心位置，用白色粉笔写着“amice diem perdidi”(我浪费了美好的一天)。这个故事展现了 Touschek 对学生的影响，以及他对教育的态度。他不仅教授物理知识，还教导学生珍惜时间和努力工作。这些有趣的故事和回忆揭示了 Touschek 作为一位杰出物理学家和导师的多面性。他的幽默风趣、对学生的影响以及对工作的热情都使他成为一个令人难忘的人物¹³。

Touschek 是一位同时具备理论与实验的天才物理学家，尽管在 Wideroe 一次访问期

¹²挪威加速器物理学家，是第一位实用 linac drift tube (LDT) 的建造者。

¹³此段内容部分取自 Luisa Bonolis, Luciano Maiani, and Giulia Pancheri, Bruno Touschek 100 Years — Memorial Symposium 2021, Springer (2021)。

间曾试图劝阻 Wideroe 考虑束团对撞的事，他认为这是微不足道的事，并预测永远不会被专利化。然而，后来 Touschek 又重新考虑了这些建议，并建造了有史以来第一台对撞机 AdA (Anello di Accumulazione)。1952 年，他的职业生涯最富有成果的时期开始了。他研究事量子场论，同时建造了 AdA，这是第一台用于物理研究的对撞机。为了完成这项工作，他将整个设备带到了巴黎奥赛 (Orsay, Paris)，那里有一台电子直线加速器，足以产生足够的正电子来制造绕行方向相反的束流。他受到他的意大利和其他同事的极大喜爱。然而，由于他的生活方式，他的健康逐渐恶化。在 1977 年，当他刚刚被任命为欧洲核子研究中心 (CERN) 的高级职务，并在进行随机冷却的研究时，他因肾炎突发而病逝，享年 56 岁。

J.23 Matthew Sands — 费曼物理学讲义、SLAC-121

出生于美国麻州，获得了克拉克大学 (Clark University) 的学士学位，随后在 1941 年获得了莱斯研究所 (Rice Institute) 的硕士学位。在 1941 年至 1943 年间在美国海军军械实验室 (US Naval Ordnance Lab) 工作，然后在 1943 年至 1946 年间在 Los Alamos 工作。战后，桑兹在麻省理工学院 (MIT) 工作，于 1946 年至 1950 年间获得了博士学位，随后加入了加州理工学院 (Caltech) 的教职，从 1950 年到 1963 年在那里任教。从 1963 年到 1969 年，他担任了 SLAC 的副主任。1969 年，他搬到了加州大学圣克鲁兹分校 (University of California, Santa Cruz) 的新校区，并一直与该校保持关联，担任物理学教授、物理系主任和校区副校长。他于 1985 年正式退休。

Sands 在物理学方面做出了许多非常重要的贡献。他是第一个意识到量子效应可能对电子束产生宏观影响的人。他于 1969 年发表的有关储存环中电子束的所有方面的专著仍然被广泛阅读。在 1959 年，他首次提出了级联加速器 (cascading accelerators) 的概念，以达到非常高的能量，这个方案现在在所有高能加速器装置中都得到了采用。在 SLAC 工作期间，他非常积极地推动了高能储存环的研究，为 SPEAR 的发展做出了贡献。

他是多本技术书籍的作者或合著者，但可能最广为人知的是费曼物理学讲义 (Feynman Lectures on Physics) 的合著者之一。Sands 在加速器领域的理论能力与他在这个领域以及核物理和宇宙射线物理方面的技术技能相结合，为加速器物理领域做出了许多富有想像力的贡献。这些才华与出色的管理能力相结合，丰富了他的领导履历。Sands 一生中一直在军备控制领域非常活跃。他曾是国防分析研究所的顾问，是普高会议科学与世界事务以及美国科学家联盟 (Federation of American Scientists) 的成员。

J.24 Simon van der Meer — 随机冷却机制的发明者

于 1925 年出生在荷兰海牙 (Hague, Netherlands) 的一教师家庭。由于德国占领期间大学关闭，他未能上大学，因此不得不在高中的人文学科中度过一段时间。热衷于电子学技术，他给家里配备了许多电子设备；比如，当时刚兴起的电冰箱在冰箱门打开后没有灯，他发明了一种装置，能够在打开冰箱门时同时亮灯。战后，他终于有机会在 Delft 大学学习“技术物理学”(technical physics)，这个学科非常适合他后来在加速器领域的工作。

van der Meer 于 1952 年毕业后，加入位于 Eindhoven 的飞利浦实验室，主要研究电子显微镜的高压设备与电子学。随后，1956 年加入当时新成立的欧洲核子研究中心(CERN)。随着 CERN 启动了一个项目，制造一个高强度的中微子(neutrino)束，他对加速器科学做出了第一次原创贡献，即被称为“中微子角”(neutrino horn)的脉冲装置，该装置用来聚焦中微子的父粒子 π 和 μ 粒子。他的下一个贡献是参与建造一个小型储存环，用于储存 μ 子并精确测量它们的反常磁矩(anomalous magnetic moment)。后来，当其他同事提出使用费米实验室的加速器或 SPS 加速器使质子和反质子对撞，并需要储存和聚焦反质子束时，他们记得他早先提出的一种称为随机冷却(stochastic cooling)的想法。此想法被认为与 Liouville 守恒定律相矛盾。van der Meer 有着富有想像力的头脑，可以大量生成新的想法，但在宣布其可行性之前，会经过严格分析。针对 Carlo Rubbia 的提案，他重新审视了这个想法，找到了使其奏效的方法，并参与了在一个小环中冷却束流的实验，称初级冷却实验(Initial Cooling Experiment, ICE)。他不仅能够证明随机冷却是有效的，而且它的竞争机制，电子冷却(electron cooling)，也在 ICE 中进行了测试，但对反质子束的冷却效果较差。

由于发明随机冷却机制的决定性贡献，Simon van der Meer 与 Carlo Rubbia 在 CERN 的 SPS 同步加速器发现了传递弱作用的 W 和 Z 玻色子，获得 1984 年诺贝尔物理学奖。尽管许多诺贝尔奖获得者被认为是发展实验技术而非发现新现象的人，但与加速器密切相关的这类例子很少。Simon van der Meer 与 Carlo Rubbia 共同分享的诺贝尔奖贡献显然是其中之一。与许多诺贝尔同行不同的是，Carlo Rubbia 几乎总是在自信心的推动下取得巨大成就，而 Simon van der Meer 是一个谦逊而安静的人，当他退休时，更愿意将讲座巡回演讲留给其他性格更外向的人，而选择照顾自己的花园并偶尔与一些朋友见面。

J.25 Nikolay Vinokurov — “OK”

出生在新西伯利亚(Novosibirsk)的数学教师家庭, Vinokurov 就读于新西伯利亚国立大学(Novosibirsk State University), 在 1972 年按照大学生的通常做法, 进入了核物理研究所(Budker Institute of Nuclear Physics, BINP)。1974 年, 他从新西伯利亚国立大学毕业, 此后他一直在 BINP 工作。在 BINP, 他的第一个任务是协助调试储存环 VEPP-3。因此, 他既涉及储存环的束流动力学, 也涉及合成辐射的产生。Skrinsky 和 Vinokurov 在自由电子束团概念的基础上, 于 1977 年提出通过在两个波荡器之间插入一个磁聚束器(magnetic buncher)来改进束团动力学, 该设备被称为“光学速调管”(optical klystron, OK), 因为电子的纵向运动类似于常规射频速调管。

此后, 对新设备进行了理论和实验研究和开发。Vinokurov 于 1979 年发明了可变间隙永磁铁螺旋极板, 并在光学速调管中使用。1983 年, 为光学速调管的第二个改型建造了世界上第一台混合永磁铁波荡器(variable-gap permanent magnet undulator)。长波荡器的一个有趣应用是可用来对储存环中单个电子的运动进行实验研究, 并观察由同步辐射的量子涨落引起的电子混沌运动。

几乎从自由电子激光(FEL)研究一开始, Vinokurov 就清楚了基于储存环的 FEL 无法期望产生高功率。而且, FEL 的电子效率较低。因此, 1979 年, Skrinsky 和 Vinokurov 提出使用能量回收直线加速器(energy recovery linac, ERL)用于产生高功率 FEL。这是一个由 Vinokurov 和 Budker 研究所的其他科学家和工程师共同追求的想法。尽管第一台基于 ERL 的 FEL 在美国杰斐逊实验室(Jefferson Laboratory, JLab)建造, 然后在日本 JAERI 建造了另一台 FEL, 但在 2003 年, Budker 研究所才投入使用一台高功率太赫兹 FEL。另一个具有 FEL 的双轨 ERL 于 2009 年投入运行。现在, 新西伯利亚设施的两台 FEL 在 $40 \sim 240 \mu\text{m}$ 的波长范围内拥有世界上最高的平均功率。在 1995 年, Vinokurov 在理论上证明了使用多段波荡器进行高增益 FEL 的可能性, 现在所有高增益 FEL 都使用这种配置。他还参与了一些其它 FEL 项目, 包括韩国 Korea Atomic Energy Research Institute(KAERI) 太赫兹 FEL、美国杜克大学 FEL(Duke FEL)、美国阿贡国家实验室的 LEUTL 和 SLAC 的 LCLS。

J.26 Lawrence Jackson Laslett — 低调卓越、洞见非凡

Laslett 出生于波士顿，在加州理工学院完成本科学习，随后于 1933 年到加州大学伯克利分校，师从劳伦斯攻读研究生。Laslett 最初对分子束 (molecular beam) 工作有兴趣，但后来转而加入劳伦斯的回旋加速器项目。他是首批回旋加速器的关键开发人员之一，并与同事一起在哥本哈根建造了欧洲第一台回旋加速器。

Laslett 在物理学多个领域做出重要贡献，但其最核心的成就是在粒子加速器设计方面的贡献。在爱荷华州立大学 (Iowa State University) 任教期间 (1946-1963 年)，他对弱聚焦同步加速器设计做出了许多严谨深入的研究。作为中西部大学联合会 (Midwestern Universities Research Association, MURA) 的成员，他在交替梯度聚焦理论、对撞束、非线性动力学理论等方面扮演了重要角色。Laslett 还是将计算机应用到计算麦克斯韦方程组求解电磁场的先驱之一。同时，他也利用电脑研究粒子轨道运动，证实了混沌现象的存在。

二战期间，Laslett 在麻省理工学院 (Massachusetts Institute of Technology, MIT) 辐射实验室从事航空雷达研发工作。他还曾在海军部研究办公室任职，并成为美国原子能委员会高能物理部门的首任负责人。1963 年，他加入劳伦斯-伯克利国家实验室，继续在加速器设计和理论领域处于领导地位，为电子环形加速器、重离子聚变加速器计划和束流集体不稳定性问题做出重大贡献。Laslett 孜孜以求，乐于探讨物理学问题，对同行们的影响和贡献是巨大的，被追慕为良师益友。直至 1993 年 5 月 7 日在伯克利去世，他都全身心投入了加速器物理的事业。

以上部分内容取自<https://www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/31725>。

J.27 Franklin James Sacherer — 攀岩与物理的双绝英才

Sacherer 出生于旧金山 (San Francisco)，1968 年他在加利福尼亚大学伯克利分校获得物理博士学位。进入加速器领域受到博士论文导师 Lloyd Smith¹⁴教授的影响。Sacherer 在加速器领域作出了重大贡献。在研究束流集体效应方面，他的工作确立了一个至今广为使用的通用框架 — Sacherer integral equation 与 Sacherer mode coupling theory。他谦逊低调，对自己的成就并不满意，总是渴望能做更多。

Sacherer 在 1960 年代初就开始了在加州优胜美地 (Yosemite) 山谷的自由攀登 (free climbing) 运动。自由攀登是一种不使用人工固定保护点的攀岩方式，仅凭借手脚直接抓握和踩踏岩石而垂直前行。从 1961 年到 1965 年，他参与了许多经典路线的首次攀爬和首次自由攀登，推动了自由攀登运动的发展。他与 Chuck Pratt 和 Royal Robbins 等人一同将山谷的自由攀登水平推进到了 5.10 级别¹⁵。

Frank Sacherer 一生辗转于理论物理研究与攀岩之间。他 1968 年获得博士学位后，1970 年加入欧洲核子研究中心 (CERN)，致力于研究粒子加速器束流集体效应和随机冷却 (stochastic cooling)，为后来的超级质子-反质子对撞机 (Super Proton-Antiproton Synchrotron, Sp̄S) 做出了重大贡献。1978 年 8 月 30 日，他不幸遇难于法国阿尔卑斯山的一次攀登活动中。Sacherer 是攀登家和加速器物理学家的杰出人物。

以上部分内容取自 <https://pubs.aip.org/physicstoday/article/32/2/69/432265/Frank-J-Sacherer>、<http://www.supertopo.com/climbers-forum/268647/Frank-Sacherer-1940-1978>。

¹⁴Lloyd Smith 是一位杰出的加速器理论家，从 20 世纪 40 年代到 70 年代为美国和世界多座大型加速器的设计做出了重要贡献。1986 年前后，对在储存环中的波荡器对束流动力学的非线性效应的研究是此一分析的经典工作之一，至今仍是波荡器和光源设计中广为参考的权威文献 (<https://inspirehep.net/files/d5db45e0245092dd37755a0374e942b4>)。在职业生涯后期，Smith 主要从事重离子聚变 (heavy-ion fusion) 束流稳定性研究。Smith 于 1994 年退休，2000 年去世。

¹⁵攀岩的难度等级通常使用 Yosemite Decimal System (YDS) 区分，分为五个级别 (Class 1 至 Class 5)。自由攀登属 Class 5，可再细分为：5.0-5.7 为初级难度、5.8-5.9 为中等难度、5.10a-5.10d 为困难、5.11a-5.11d 为极其困难、5.12a-5.12d 为世界级、5.13a 及以上为世界顶尖。其中，5.10 被视为技术性攀岩的入门，5.11 为硬式攀岩的开端，5.13 及以上为世界一流的高度路线。对细节感兴趣的读者，可参考 The Yosemite Decimal System, <https://climber.org/data/decimal.html>。

J.28 Michael David Borland — ELEGANT

1985 年本科毕业于加州理工学院 (California Institute of Technology)，获得物理学学士学位。随后，进入斯坦福大学 (Stanford University)，师从 Helmut Wiedemann 教授。1991 年获得应用物理学博士学位，论文研究内容为设计和调试 1.5-cell 热阴极微波电子枪¹⁶。毕业后至今，他一直在粒子加速器领域持续耕耘。目前在电子加速器社群广为人知的加速器设计和模拟程序 ELEGANT (ELEctrон Generation ANd Tracking) 源于 Borland 的部分博士论文工作。Borland 在电子枪、直线加速器和储存环等加速器的设计、调试、运行和模拟方面拥有丰富的经验，因在电子加速器驱动光源方面的贡献而广受赞誉。有一个有趣的故事是，2001 年，他利用自己开发的 ELEGANT 程序发现了 LCLS 设计中的相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 驱动的微束团不稳定性 (microbunching instability)。这一发现随后在实验中得到验证，如今已成为国际关注的热点课题。他还因在阿贡国家实验室 (Argonne National Laboratory, ANL) 的 APS (Advance Photon Source) 储存环的低发射度磁聚焦结构设计和实现 top-up 工作模式方面的突出贡献而获奖。

ELEGANT 是目前最广泛使用的加速器设计和粒子跟踪模拟程序之一，为世界各地的加速器学家提供了一个灵活的、设计和理解线性加速器和储存环工具。不仅适用于储存环，ELEGANT 还被用于设计和研究自由电子激光装置，比如：SLAC 的 LCLS 等项目设计。Borland 还与他人合作开发了用于加速器控制系统应用的程序工具包，开发的算法和软件被世界上多个加速器装置，如 APS、BESSY、ELETTRA、LCLS、LHC、NSRRC、RHIC、SPring-8 和 TJNAF 等广泛采用，用于束流动力学和非线性优化等多个领域。除了 ELEGANT 计算程序外，Borland 将不断重复进行的相同科学估算整合到一个名为 TAPAs (Toolkit for Accelerator Physics on Androids)¹⁷ 的安卓应用程序中，可应用于对粒子加速器、电子储存环、直线加速器、同步辐射装置、自由电子激光器等设备特性的快速评估。

2013 年，Borland 在国际粒子加速器会议 (IPAC13) 获得亚洲未来加速器委员会的加速器科学奖 (Accelerator Prize)，以表彰他开创性地开发了广泛应用于环形加速器、能量循环/回收加速器和 FEL 设计、模拟和分析的 ELEGANT 程序及其 SDDS(Self Describing Data Sets) 平台，并首次从数值模拟结果预测了上述的微束团不稳定性。Borland 是阿贡国家实验室杰出科学家，美国物理学会会士，现任阿贡国家实验室 APS 加速器系统部门副主任，长期主导 APS 储存环升级项目 (APS Upgrade, APS-U) 的束流物理设计工作。

以上部分内容取自 <https://www.anl.gov/profile/michael-david-borland>、<https://www.aps.anl.gov/APS-News/2018/michael-borland-of-the-aps-named-an-argonne-distinguished-fellow>。

¹⁶M. Borland, A High-Brightness Thermionic Microwave Electron Gun, SLAC-402, UC-414 (1991). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacreports/reports03/slac-r-402a.pdf>。

¹⁷<https://accelconf.web.cern.ch/napac2016/papers/tupob61.pdf>

J.29 Robert Siemann — PRST-AB

Robert (“Bob”) Siemann 本科毕业于布朗大学 (Brown University)，随后在康奈尔大学 (Cornell University) 得到博士学位。1969-1972 年，Siemann 在 SLAC 担任研究助理一职。接着在布鲁克海文国家实验室一年后，Siemann 加入康奈尔大学成为教员并开始崭露头脚。Siemann 在 1991 年从康奈尔大学来到 SLAC，担任领导角色，致力于在 SLAC 建立一个加速器物理学的学术项目，并发展加速器教员团队。在他的职业生涯中，他始终支持加速器物理学作为一个独立的学术领域，并为之不懈努力。在 Burton Richter — 当时 SLAC 主任 — 的支持下，他成功说服了斯坦福大学和 SLAC 创建了一系列拥有终身教员的加速器物理教席。

Bob 是一个伟大的实验学家。他专精实验仪器与技术，但他专注的是物理。根据赵午教授的一段回忆¹⁸：“为了物理的目的，如果他必须用到理论，他也会毫不犹豫地作它。事实上，他就写了几篇关于理论方面的论文。所以我说他是一个真正的实验学家！但我想他最终最喜爱的还是实验。每当他谈到实验的时候，他的眼睛就睁得特大。如果遇到有人提问，他就会找邻近的黑板，露出牙齿带着满意的微笑，然后画着他经过审慎思考的实验设计，描述他的实验，并给提问者一些深刻的物理意含。这些时光是最令人享受的，无论对他或是提问者。如今如果我想起 Bob，第一个映入脑海的，我想就是这个情景。”

Bob Siemann 与美国物理学会的 Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams 期刊 (PRST-AB) — 现改名为 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) — 的历史紧密相连。他对该期刊的创立发挥了关键作用，并担任了九年的编辑。在他的编辑任期内，该期刊成为加速器物理学领域的标准期刊，为加速器物理学的学术交流和知识传播做出了重要贡献。

Bob Siemann 在 SLAC 的领导和科研工作对加速器科学领域同样产生深远的影响。他不仅在技术上有所创新，在培养年轻科学家和推动学术交流方面做出了巨大贡献。他的工作和他对科学的热情激励了一代又一代的研究人员。Bob Siemann 在 2008 年由于白血病不幸去世。Bob Siemann 的生平事迹体现了他对加速器物理学的深刻理解和对教育的热忱。作为 SLAC 的教授，他帮助引入了斯坦福大学先进的加速器物理学术项目。他的教学方式鼓励学生自主思考，并通过提出正确的问题来指导他们。他对实验物理学的热爱和对设计实验的追求，为加速器科学领域做出了巨大贡献。他的同事和学生们将深深地怀念他，他的遗产和对科学的贡献将继续激励着未来的科学家们。

以上部分内容取自 <https://journals.aps.org/prab/>、<https://www-conf.slac.stanford.edu/RobertSiemann/>、https://icfa-usa.jlab.org/archive/newsletter/icfa_bd_nl_47.pdf。

¹⁸<https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.11.120005>

J.30 方守贤 — 中国高能加速器事业的开拓者和奠基人

方守贤院士是中国的一位杰出科学使者。他的加速器职业始于 20 世纪 50 年代末，当时他被派往莫斯科学习粒子动力学，先后在 Lebedev Institute 和 Dubna 的 Joint Institute of Nuclear Research 进行研究。几年后，他回到中国，致力于等时性回旋加速器 (isochronous cyclotron) 和同位素分离器 (isotope separator) 的研究。

在 1978 年，当时中国开放了大门。他们计划在北京建造一台大型质子同步加速器。方守贤是这一计划的先锋，访问欧洲核子研究中心 (CERN) 与 John Adams 讨论计划，并邀请顾问访问北京，培训一代新的中国加速器建造者。他和在高能物理研究所 (Institute for High Energy Physics, IHEP) 的同事还邀请了来自美国实验室的顾问，很快许多西方科学家都在中国文化中接受了教育，亲身体验了他们中国同行的热情和专业智慧。

加深合作的下一步是中国派遣访问学者到西方实验室工作。1982 年，方守贤来到 CERN 加入反质子积累器组 (Antiproton Accumulator Group)，他设计了一个新的收集环，并发明了一种纠正其光学色散的新方法。一旦中欧合作蓬勃发展，方返回北京，领导北京正负电子对撞机 (Beijing Electron Positron Collider, BEPC) 的设计，并在完成后按计划和预算成为其主任。他曾经向同事透露，他本可以愿意放弃行政职责以回到理论工作，但 1988 年，他成为北京高能物理研究所的所长。1991 年，他当选为中国科学院院士，并成为数学与物理学部主席。尽管荣誉无数，但他仍然是那位谦逊而开朗的朋友，总是愿意抽出时间招待同事，谈论多年来共同经历的事情。

后记

呼应“前言”一开始提到的，此讲义最初是面向以电气专业或应用物理专业的大二以上本科生或低年级研究生准备的，讲义所介绍的内容无论从广度、深度都还不够完整，仍有诸多不足之处。作为后记，以下给出在此讲义之后进一步学习的引导，提供感兴趣的读者作为参考。下面提及的书目中的大多数已经在“前言”中列举详细信息。

- Ch 0** 数理基础部分，过于追求数学严谨的数学物理教科书未必实用。并且，教科书作者的科研经历也一定程度影响了教科书内容选材与品味。对此讲义涉及的数理基础整理在附录 B，对想深入探索部分内容的读者，可参考 Mathews and Walker，该书的内容安排是我目前见过比较贴近作为与此讲义结合的高等数学教科书。此外，建议再备有一本作为参考书，比如 Arfken。
- Ch 1** 电磁理论部分。对电气专业的读者，如果大二电磁学没有太多机会比较深入探索电磁理论，可考虑从 Feynman 物理学讲义的第二册开始。结合带电粒子动力学的电磁场理论又称电动力学。在过去半个世纪，Jackson 的电动力学一直是“圣经”级别的存在，应出现在书架上。此外，建议再备有一本作为参考书，比如 Zangwill，这是近年比较流行，完整且包含相对新颖内容的教科书。
- Ch 2 & 3** 电磁辐射的一般理论。此讲义在这部分主要取材自 Hofmann。希望进一步学习的读者，不妨参考该书。留意，根据此讲义采用的傅里叶变换惯例，引用该书部分结果时已经做了相应的修改。
- Ch 4** 同步辐射理论部分，仍建议 Hofmann 一书。该书的分析从 Lienard-Wiechert 场开始。另一种分析方式可从傍轴波方程开始，别有风味、殊途同归。对此感兴趣的读者，可参考 Kim, Huang, and Lindberg 一书的 Chapter 2 或 C. Brau 一书。
- Ch 5** 关于波荡器辐射的更深入探讨，建议 Hofmann 一书。其它多数涉及波荡器辐射的参考书，这部分一般只是配菜，主菜是自由电子激光理论。
- Ch 6** 经典力学部分，此讲义仅停留在非常初浅的介绍，仅满足后面章节介绍加速器束动力学需要的背景知识。对稍微再深入些，但仍与此讲义介绍的内容相关的，可参考 Stupakov and Penn。如单纯对分析力学与狭义相对论感兴趣的读者，建议可备一本教科书，如 Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko, Classical Mechanics, 3rd Ed., Addison Wesley (2011) 或参考剑桥大学 David Tong 讲义，为线上资源<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/teaching.html>。
- Ch 7 & 8** 此部分内容为正统加速器理论的核心。此讲义包含的内容非常有限，侧重重点不同，建议读者书架上应备有至少如下一本：
- A. Wolski (2014) — 特点包含横向耦合束团的分析、非线性传输映射。
 - H. Wiedemann (2015) — 全面、完整，砖头书级别。
 - S.Y. Lee (2019) — 全面、完整，侧重储存环分析。留意该书采用的惯例与此讲义在某些地方有些不同。

- A.W. Chao (2020) — 全面、完整，砖头书级别。

- Ch 10** 自由电子激光的理论体系相对独立，使用的符号惯例也与其它主题有些差别。早期、相对定性的讨论、小巧玲珑的入门教材有 Marshall 一书。偏单次经过自由电子激光理论的有 Kim, Huang, and Lindberg 与 Schmuser 等人的书。更定性、深入讨论的教科书有 Saldin 等人一书，可属“天花板”级别的存在。留意，此书使用的许多物理量都采用归一化，未必适合初学。对长波长自由电子激光振荡器的讨论，也许 Brau 一书有相对丰富的讨论。留意，不同作者采用的归一化物理量稍有区别。
- Ch 11** 集体效应“场”动力学部分，Chao (1993) 一书的 Chapter 2 给出一套分析尾场、阻抗的“范式”。稍稍遗憾的是该书采用 CGS 单位制，里面许多式子需要经过适当转换才方便当前 SI/MKS 单位制使用。Zotter and Kheifets 一书则为全面介绍如何求解尾场、阻抗的教科书。对“场”动力学感兴趣的读者，应备有此书。
- Ch 12 & 13** 集体效应“粒子”动力学部分，经过三十余年，Chao (1993) 一书至今仍是“圣经”级别的存在，尽管该书采用 CGS 单位制。Ng 一书也是少数全面探讨集体效应的经典参考书之一。
- Ch 14** 从加速器领域看，全面介绍超快电子成像的教材甚少，目前似乎仅有上海交通大学向导教授编著的“加速器超快电子探针技术及其应用”一书。
- Ch 15 & 16** 相干同步辐射与微束团动力学至今仍为活跃、热门的研究领域，还没有参考书或教材，相关的参考文献已在篇章内容提及，此处不论。
- Ch 17** 关于束测，对“物理”感兴趣的读者，可参考 Minty & Frank Zimmermann 一书；对“工程”实际感兴趣的，可参考 Strehl 或 Victor。

- 对粒子加速器发展历史感兴趣的读者，可参考 A. Sessler and E. Wilson, *Engines of Discovery, revised and expanded edition*, World Scientific (2014)。
- 对三个临近相关领域：粒子加速器、激光、等离子体的具有启发性的讨论，感兴趣的读者可参考 Andrei Seryi and Elena Seraia, *Unifying Physics of Accelerators, Lasers and Plasma*, 2nd ed, CRC Press (2023)¹⁹。
- 对加速器科学的众多应用与技术回顾，可参考 World Scientific 出版的年刊 *Reviews of Accelerator Science and Technology (RAST)*。

除上面建议的参考材料外，书架上还应备有一本加速器物理或工程领域从业人员不可或缺的参考书 — *Handbook of Accelerator Physics and Engineering*。讲义的最后以如下打油诗结尾：

书香悠悠乐读情，粒子加速律动新。
横向扭摆振荡歌，纵向同步舞影伸。
电磁辐射彩虹舞，束流动力奏鸣音。
集体效应妙思泉，超亮电子梦中寻。

¹⁹<https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/50889>

索引

- 2×2 transfer matrix
elements, 403
elements, cavity, 536
stability, 408
 $2\pi, \sqrt{2\pi}$ convention, 9
 6×6 transfer matrix
elements, 540
[JJ], 624
 δ function, 1177
 δ_{mn} function, 1177
 \mathcal{H} function, 438
 i, j convention, 9, 54
[JJ]_h factor, 298
- ABCD matrix, 384
Accelerator Driven Systems, 1250
accelerator Hamiltonian \mathcal{H} , 329
action-angle transform, 319, 424
adiabatic damping, 390
ADTS, amplitude-dependent tune shift, 483
Airy function, 1197
Alfvén current, 882
alternating-gradient focusing, 362
analytic continuation, 889
analytic function, definition, 157
anomalous dispersion, 88
anomalous Doppler effect, 134
anomalous magnetic moment, 1135
anomalous skin effect, 59, 717, 723
APS beamline, 558
- BBGKY hierarchy, 311
BCS surface resistance, 63
beam breakup instability, 904
beam breakup, BBU, 827
beam matrix Σ , 391
beam rigidity $B\rho$, 323
- beam rigidity $E^a \rho$, 323
beam transfer function (BTF), 855, 1155
Beer-Lambert law, 722
Bessel function, 1178, 1191, 1193, 1222
betatron, 176
betatron resonance, 422
Beth representation, 348
blow-out regime, 989
blowout regime, 1005
BNS damping, 827
Bohr radius, 242, 935
booster synchrotron, 531
bore radius, 345
Boussard criterion, 892
Bragg condition, 937
Bragg peak, 1251
Bragg's law, 937
breakdown rate (BDR), RF, 124
brightness, 550
collider, 686
electron beam, 4D, 944
electron beam, 5D, 943
radiation, 588
- broadband-narrowband substitution, 879
bunch compression factor, 466
bunch-by-bunch feedback system, 851
bunching factor
complete random phase, 638
definition, 1-D, 567
definition, 1-D continuum, 883, 1072
definition, 1-D, ensemble average, 627
definition, 3-D, 569
- Busch theorem, 957
- Campbell theorem, 513
canonical transformation
generating functions, 314

-
- Cardano formula, 1226
 Carlson's elliptic integral, 998
 catch-up distance, 695, 815
 Cauchy principal value, 1182
 Cauchy theorem, 158
 Cauchy's integral formula, 158, 1181
 Cauchy-Riemann condition, 157, 349
 causality, 734
 Einstein causality, 734
 finite-speed causality, 184, 734
 local causality, 734
 Newtonian causality, 734
 relativistic causality, 184, 734
 cavity
 circular cylindrical modes, 112
 Landau cavity, 488, 708, 709
 pillbox cavity TM_{010} , 117
 quality factor Q , 114
 rectangular modes, 111
 RF breakdown, 123
 shunt impedance R_S , 116
 Slater theorem, 126
 TE,TM,E,H mode definition, 83
 Cayley-Hamilton theorem, 1217
 central limit theorem, CLT, 261, 296
 Chao-Gareyte scaling law, 907
 Cherenkov acceleration, 746
 Cherenkov radiation, 226
 inverse Cherenkov radiation, 231, 599
 chicane, 467
 CSR-induced microbunching gain formula, 1082
 optics, 1079
 Child-Langmuir law, 991
 chirp, 463
 chirped pulse amplification (CPA), 467
 Cholesky decomposition, 1001
 chromatic frequency ω_ξ , 810
 chromatic frequency ω_ξ , 437, 846
 chromaticity ξ , 432
 different conventions, 432
 cigar vs. pancake, 1005
 classical radius of electron, 217
 closed orbit distortion, COD, 414
 closed-loop transfer function, 853
 coasting beam, 441, 882, 906, 1071
 unbunched beam, 482
 coherence
 longitudinal, 591
 transverse, 592
 coherence length
 longitudinal, laser, 592
 transverse, electron beam, 949
 transverse, laser, 592
 coherent synchrotron radiation (CSR)
 Case A, 1027
 Case B, 1029
 Case C, 1033
 Case D, 1035
 CSR-induced microbunching gain formula, 1082
 chicane, 1082
 CSR-induced microbunching gain formula, 1084
 general, 1084
 definition, wake function, 1026
 incoherent, see synchrotron radiation, 1026
 overtaking distance, 1041
 parallel-plate impedance, 1045
 point-kick model, 1050
 slippage distance, 1039
 steady-state impedance, 1043
 steady-state wakefield, 1037
 suppression conditions, 1056
 collective effects
 beam breakup, BBU, 827
 CSR, 1046
 definition, 691

- dispersion equation, coasting beam, 888, 1097
 fast beam-ion instability, 917
 fundamental theorem of beam loading, 824
 Haissinski equation, 876
 head-tail instability, 849
 ion trapping instability, 917
 kick factor κ_{\perp} , 806
 Landau damping, 1078
 longitudinal mode coupling instability, 899
 loss factor κ_{\parallel} , 806
 microbunching instability, 1075
 microwave instability, 899
 negative mass instability, 906
 potential well distortion, PWD, 875
 resistive wall instability, 915
 Robinson instability, 834
 Sacherer integral equation, 897
 space charge
 beam dynamics, 994
 field dynamics, 697
 strong head-tail instability, 844
 transverse microwave instability, 844
 transverse mode coupling instability, TMCI, 844
 Volterra integral equation, 883
 compression factor, 466
 Compton scattering effect, 135
 inverse, 136
 conductivity, AC, 58, 718
 conductivity, DC, 58, 718
 configuration space (x, y) , 328
 confluent hypergeometric function, 1199
 conformal mapping, 162, 167
 Schwarz-Christoffel mapping, 167
 Smith chart, 170
 Constants, 24
 constitutive relation $\mathbf{D}(\mathbf{E}), \mathbf{H}(\mathbf{B})$, 41
 CGS units, 175
 convention
 $2\pi, \sqrt{2\pi}, 9$
 $\Delta z, \Delta\tau, \Delta\phi$, 468
 i, j , 9, 54
 k, Γ , 9, 57, 77
 z, s, ct and bunch head vs. tail, 467
 capacitive, inductive, 748
 convolution theorem (faltung theorem), 11
 Z-transform, 839
 cooling
 coherent electron cooling, 510
 electron cooling, 510
 laser cooling, 510
 stochastic cooling, 510
 Cornu spiral, 772, 1183
 corrector, 417
 correlation function
 auto-correlation, 591
 convolution, 595
 cross-correlation, 595
 cosine integral, 1183
 Coulomb field, 697
 Coulomb gauge, 66
 coupled bunch instability, 766, 810, 851, 904
 coupled bunch mode, 912
 Courant-Snyder parameters, 369
 critical angle, 94
 cross section, 935
 differential, 934
 cryogenic temperatures, 343
 crystalline beam, 710
 cyclotron frequency ω_c , 356
 dark current, 979
 Fowler-Nordheim formula, 979
 Darwin width, 665
 Dawson function, 1187

-
- de Moivre formula, 54
 de Moivre theorem, 381
 Debye length
 longitudinal, 697
 transverse, 697
 Debye-Waller model, 941
 delta function, 1177
 Kronecker, 1177
 Derbenev criterion, 1039
 diamagnetic $\mu_r < 1$, 42
 dielectric linear accelerator, DLA, 742
 differential cross section, 139, 934
 diffusion, 262, 420
 anomalous diffusion, 262
 sub-diffusion, 262
 super-diffusion, 262
 dipole radiation, 217, 219
 direct product, 1219
 direct sum, 1220
 dispersion equation
 1-D high-gain FEL, 628
 microbunching instability, 888
 Robinson instability, 841
 dispersion function D, η, R_{16} , 427
 comparison, 438
 distribution
 δ -function, 1212
 bi-Lorentz, 1212
 elliptical, 1212
 Gaussian, 1212
 Lorentz, 1212
 normal, 1212
 parabolic, 1212
 rectangular, 1212
 tri-elliptical, 1212
 triangular, 1212
 water-bag, 1212
 distribution width $\Delta\omega$, 1213
 Doppler effect, 133, 236
 anomalous, 134
 dose, 200
 Drude model, 58, 718
 Drude-Lorentz model, 718
 dual-energy storage ring, 1117
 dynamic aperture, 442, 914
 Earnshaw's theorem, 454, 481
 effective impedance, 809
 elliptic functions, 1203
 elliptic integrals, 1199
 elliptic theta function $\vartheta_3(u, q)$, 915
 emittance
 beam, 389
 beam's vs. lattice's, 370, 1144
 bulk vs. slice, 393, 1001
 coupling κ , 519
 geometric ϵ , 390
 longitudinal, 487
 natural ϵ , 390
 normalized ϵ_N , 390
 photon, 576
 single-particle, 376
 statistical definition, continuous distribution, 392
 statistical definition, discrete distribution, 393
 emittance compensation, 982
 energy acceptance, 444, 482, 708, 709
 energy recovery linac, ERL, 533
 energy spread
 correlated, bulk, 463
 incoherent, uncorrelated, slice, 463
 ensemble, 308
 ergodic hypothesis, 388
 error function, 1186
 complementary, 1186
 complex, 1186

- imaginary, 1186
- Euler-Lagrange equation, 306
- evanescent wave, 77, 104, 230
- Ewald sphere, 943
- exponential integral, 1183
- extraction, 537
- factorial function, 1209
- double, 1209
- Faddeeva function, 1187
- faltung theorem, 11
- fast beam-ion instability, 917
- fast head-tail instability, 904
- FEL instability, 919
- wakefield approach, 919
- FEL parameter, 612
- Fermi velocity, 722
- Ferrari formula, 1226
- ferromagnetic $\mu_r \gg 1$, 42
- Feynman diagram, synchrotron radiation, 241
- Feynman's integration trick, 1175
- Feynman-Heaviside formula, 197
- finesse, 586
- first recurrence map, 376
- fixed point, 477
- attractor, repellor, 477
- SFP, UFP, 477
- fixed-field alternating gradient (FFAG), 363
- Floquet transformation, 364
- flux, 550, 588
- formation length
- synchrotron radiation, longitudinal, 263,
 574
- synchrotron radiation, transverse, 263, 575
- undulator radiation, longitudinal, 295
- undulator radiation, transverse, 295
- wake function, 695
- Fourier transform
- convolution theorem, 11
- definition, 9
- Parseval theorem, 11, 209
- properties, 12
- sine transform, cosine transform, 10
- Fowler-Nordheim formula, 979
- Fraunhofer diffraction, 771
- free-electron laser (FEL)
- 1-D ($2N + 1$) equations, 609
- 1-D high-gain, 628
- 3-D high-gain, guiding effect, 644
- ADM, 677
- amplifier, 638
- DEHG, 679
- EEHG, 670
- group velocity, 631
- HGHG, 669
- inverse FEL, 599, 746
- iSASE, 665
- lethargy, 661
- low-gain pendulum equation, 616
- Madey theorem, 621
- Ming Xie fitting formula, 650
- oscillator, FELO, 638
- PEHG, 674
- phase velocity, 631
- Pierce parameter, 612
- resonance condition, 601, 663
- SASE, 635
- self-seeding, 663
- sideband instability, 637
- storage ring, 1237
- Frenet-Serret coordinate
- calculus, 327
- definition, 325
- left-hand vs. right-hand, 329
- frequency map analysis, 444
- Fresnel diffraction, 771
- Fresnel integrals, 772, 1183

-
- fundamental theorem of beam loading, 824
 gain guiding, 644
 Gamma function, 1197
 Gauss divergence theorem, 1168
 ghost imaging, 595
 globatron, 323
 Goos-Hanchen effect, 94
 Gouy phase, 155, 265, 370
 Gram-Schmidt process, 85
 Green's theorem, 1168
 group velocity, 87
 gyro-frequency, 356
 H function, 438
 Hadamard product, 1219
 Haissinski integral equation, 876
 Halback formula, 277
 Hamilton's equations of motion, 307
 Hamiltonian \mathcal{H}
 definition, 306
 integrable, 426, 476
 KAM theorem, 426
 quasi-integrable, 426
 torus, tori, 321, 476
 Hankel transform, 1232
 harmonic cavity, 488, 708, 709
 harmonic number h , 478
 head-tail instability, 849, 904
 Heaviside step function, 1196
 Heaviside-Feynman formula, 197
 Helmholtz equation
 frequency domain, 57
 time domain, 64
 Helmholtz theorem, 1169
 Hermite polynomial, 1223
 higher harmonic cavity, HHC, 488, 708, 709
 Hill equation, 364
 hourglass effect, 1244
 Huygens principle, 64
 hypergeometric function, 1198
 confluent, 1199
 hysteresis, 357
 image charge method, 140
 image current method, 143
 Imbert-Fedorov effect, 94
 impedance
 broadband, 767
 cavity resonator, 747
 CSR, 782, 1043, 1045
 dimensionality, 748
 impedance function Z_{\parallel}, Z_{\perp} , 802
 impedance function Z_{\parallel}, Z_{\perp} , 747, 802
 LSC, 779
 LSC, low frequency, 747
 order of magnitude estimate, 765
 periodic structure, 783
 resistive wall, ASE, 725, 784
 resistive wall, NSE, 747
 RLC, 759
 step-in, step-out, 813
 tables, 786
 impedance budget, 804
 index of refraction, 92
 critical angle, 94
 metamaterial, 147
 x-ray, 95
 injection, 537
 emittance convention, 390
 off-axis vs. on-axis, 537
 single-turn vs. multi-turn, 537
 swap-out injection, 537
 top-up injection, 537
 injector scaling, 1013
 intrabeam scattering, IBS, 704
 inverse Cherenkov acceleration, 746
 inverse Compton scattering, 136

-
- inverse Smith-Purcell acceleration, 746
 ion trapping instability, 917
 IOTA, Integrable Optics Test Accelerator, 442
 isochronous, 466

 Jacobi-Anger identity, 668, 1191
 Jacobian matrix, 319
 Jefimenko formula, 197
 JJ factor, 624
 JJ_{*h*} factor, 298
 Jordan's lemma, 16
 Joule's law of heating, 48

 Keil-Schnell criterion, 891
 Keil-Schnell-Boussard criterion, 892
 kick factor κ_{\perp} , 806
 Kilpatrick limit, 124
 Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM) theorem, 426

 Kostenbauder matrix, 384, 545
 Kramers-Kronig relation, 597, 755
 Kronecker delta function, 1177
 Kummer function, 1199

 Lagrangian L
 definition, 306
 Landau cavity, 488, 708, 709
 Landau damping, 715, 1078
 loss of Landau damping, 1077
 Landau's contour method, 888
 Landau's prescription, 889
 Langevin equation, 523
 Laplace transform
 definition, 14
 Landau contour, 888
 properties, 14
 Larmor frequency ω_L , 356
 Larmor radius, 356
 laser ablation, 942
 laser heater, 1086

 laser resonator stability, 655
 laser undulator, 137, 277, 602
 laser wakefield acceleration, LWFA, 742
 laser-electron modulation, 665
 Laslett tune shift, 921
 lattice
 DBA, TBA, MBA, 397
 FODO, 397
 FODO, properties, 410, 436
 Laue condition, 937
 Laurent series, 159
 Lawson-Woodward theorem, 745
 Legendre polynomial, 1222
 Leibniz Rule, 1175
 length contraction, 6
 Leontovich boundary condition, 60, 712, 723
 lethargy, 661
 Lie operator, 316
 Lienard-Wiechert formula
 frequency-domain, 207
 time-domain, 187, 206
 linear acceleration, 527
 standing-wave structure, 528
 traveling-wave structure, 527
 Liouville theorem, 311, 865
 ensemble, 308
 Livingston plot, 1248
 local momentum aperture, 446
 longitudinal coupled bunch instability, 904
 longitudinal mode coupling instability, 899, 904
 Lorentz force equation, 41
 CGS units, 175
 Lorentz relativistic factor
 conversion, 21
 definition, 4
 Lorentz transformation
 E, B, 132
 coordinate, 5

- Doppler effect, 133
 Doppler effect, anomalous, 134
 four-vector, 129
 length contraction, 6
 space-time, 129
 time dilation, 6
 Lorenz gauge, 66
 loss factor κ_{\parallel} , 806
 loss of Landau damping, 1077
 loss tangent $\tan \delta$, 55
 luminosity, 686
 lumped vs. distributed model, 360, 859
 Madey theorem, 621
 magnet
 bore radius, 345
 combined-function, 343
 dipole, 340
 quadrupole, 341
 room-temperature vs. superconducting, 342
 sextupole, 346
 skew quadrupole, 342
 solenoid, 355
 strength, 347
 magnetic hysteresis, 357
 magnetization currents, 50
 magnetized beam, 957, 1090
 magnetizedbeam, 989
 Mathieu equation, 364
 Mathieu function, 364
 matrix exponential, 1228
 matrix properties, 1216
 rank, 1215
 Maxwell equations
 boundary conditions, 51, 65
 CGS units, 175
 covariant form, 130
 electrostatics, 45
 free space, 40
 magnetostatics, 49
 material, 42
 Maxwell-Klimontovich equations, 919
 mean free path, 721
 mean transverse kinetic energy, MTE, 944
 Meissner effect, 62
 Mellin transform, 1232
 metamaterial, 146
 metamaterial $\mu_r < 0$, 42
 method of steepest descent, 1208
 microbunching instability, 904
 Microbunching instability (MBI)
 bunched beam, storage ring, 899
 coasting beam, single-pass, 883
 coasting beam, storage ring, 888
 formula, chicane, 1082
 formula, general, 1084
 klystron analogy, 1069
 laser heating, 1086
 model comparison, 902
 suppression conditions, 1086, 1089
 microwave instability, 899, 904
 Ming Xie fitting formula, 650
 mirror symmetry, 382
 mismatch parameter B_{mag} , 1144
 Möbius accelerator, 379
 Möbius transform, 170, 385
 momentum compaction factor α_c, R_{56} , 456
 monodromy matrix, 378
 Moore's law, 1113
 moving screen method, 1142
 multi-bunch mode, 912
 multipacting, 123
 NAFF, 444
 narrowband-broadband substitution, 879
 NEG, non-evaporable getter, 555
 negative mass effect, 462

- negative mass instability, 906
 Newton's law vs. radiation reaction, 692, 828
 nonlinear resonance, 424, 478
 normal dispersion, 88
 numerical aperture, 969, 1114
 Nyquist theorem, 1127
 optical guiding, 644
 orthogonal expansion, 1222
 P.V., definition, 1182
 Pade approximant, 1207
 pancake vs. cigar, 1005
 Panofsky-Wenzel theorem, 751
 paramagnetic $\mu_r > 1$, 42
 parametric resonance, 424, 478
 parasitic energy loss, 831
 paraxial approximation, 329
 paraxial wave equation, 152, 250, 775
 Parseval theorem, 11, 209
 particle sources, 1069
 PDE, 1230
 - boundary condition, 1231
 - Dirichlet condition, 1231
 - elliptical, 1230
 - homogeneous vs. inhomogeneous, 1230
 - hyperbolic, 1230
 - initial condition, 1231
 - Neumann condition, 1231
 - parabolic, 1230
 - Robin condition, 1231
 - solution technique, 1232
- pepper-pot method, 1141
 phase advance ψ , 375
 phase space (x, p_x) , 309, 328
 phase velocity, 87
 photoinjector scaling, 1013
 photon emittance, 576
 Pierce parameter, 612
 plasma frequency, 59, 721
 index of refraction, 92
 plasma oscillation, 781
 plasma wakefield acceleration, PWFA, 742
 Poincare map, 376
 Poincare section, 376
 point-kick model, see CSR, 1050
 Poisson bracket, 315
 Poisson noise, 637
 Poisson sum formula, 829, 1120, 1178
 polarization, 90
 polarization charges, 47
 ponderomotive acceleration, 746
 ponderomotive motion, 137, 599
 population inversion, 580
 potential well distortion, PWD, 831, 874, 875, 904
 power spectral density, 1092
 Poynting theorem, 72
 Poynting vector, 70
 principle of longitudinal phase stability, 469
 quadrupole scan method, 1142
 quality factor Q , 114
 - coupling coefficient, 115
 - loaded, external, 115
- radiation
 - dipole, electric, 219
 - dipole, magnetic, 219
 - multipole, 221
 - quadrupole, 221
- radiation reaction vs. Newton's law, 692, 828
 radiation shielding, 266, 571, 1039
 ramp function, 1196
 ramping, booster, 531
 ramping, linac, 527
 rank, 1215
 Rayleigh length, Rayleigh range, 153, 264, 642

- RDT, resonance driving term, 424
 rectangular function, 1179
 Residual Resistance Ratio (RRR), 724
 residue theorem, 159, 1180
 resistive wall instability, 766, 851, 915
 resonance, 418
 - difference resonance, 422
 - nonlinear, 424
 - order, 422
 - parametric, 424
 - RDT, resonance driving term, 424
 - sum resonance, 422
 resonator
 - circular cylindrical modes, 112
 - pillbox cavity TM_{010} , 117
 - quality factor Q , 114
 - rectangular modes, 111
 - RF breakdown, 123
 - shunt impedance R_S , 116
 - Slater theorem, 126
 - TE,TM,E,H mode definition, 83
 retardation condition, 67, 184
 RF breakdown, 123, 742
 - figure of merit, 124
 - Kilpatrick limit, 124
 RF breakdown rate (BDR), 124
 RFQ, radio-frequency quadrupole, 453, 1006
 RFQM, radio-frequency quadrupole magnet, 453, 828, 1006
 Riemann-Lebesgue lemma, 15
 RLC circuit model, 759
 - mechanics view, 331
 Robinson instability, 834, 904
 - DC, 836
 - dispersion equation, 832, 841
 - secular equation, 832, 841
 Robinson sum rule $\sum_{i=x,y,z} \mathcal{J}_i = 4$, 506
 rocking curve, 665
 Sacherer integral equation, 897
 Sacherer mode coupling theory, 838, 898
 saddle-point method, 1208
 sagitta, 405
 scaling, RF photoinjector, 1013
 scattering cross section, 138, 934
 Schottky effect, 944, 981
 Schroedinger equation, 934
 secular equation, 832, 1217
 Shintake monitor, 1138
 shot noise, 637, 943
 shunt impedance R_S , 116, 738, 759
 simple harmonic oscillator, SHO, 304
 sinc function, 1179
 sine integral, 1183
 single-particle emittance, 376, 499
 single-particle equations
 - single-pass accelerator, 439
 - storage ring, 441
 skin effect, anomalous, 723
 skin effect, skin depth, 59, 717
 Slater theorem, 126
 slippage factor $\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$, 459
 Smith chart, 170
 Smith-Purcell acceleration, 746
 Smith-Purcell radiation, 229
 - inverse Smith-Purcell radiation, 231, 599
 Snell's law, 92
 Sokhotski-Plemelj theorem, 757, 889, 1182
 solid angle, 70, 210
 space charge
 - beam dynamics, 994
 - definition, 697
 - direct space charge field, 698
 - envelope equation, 1004
 - field dynamics, 697
 - indirect space charge field, 140, 698
 - perveance, 998, 1009

- special functions
- Airy function, 1197
 - Bessel function, 1178, 1193, 1222
 - Dirac delta function, 1177
 - Gamma function, 1197
 - Hermite polynomial, 1223
 - Legendre polynomial, 1222
 - modified Bessel function, 1191
- spectral fluence, 213
- spectral flux, 550, 588
- spiral curve, 238
- split-ring resonator (SRR), 149, 962
- stability boundary diagram, 1155
- stability condition
- 1-D, 2×2 , 408
 - n-D, $2n \times 2n$, 410
- stable fixed point, SFP, 477
- steady-state microbunching, SSMB, 1104
- Steinmetz's equation, 358
- Stirling's formula, 1209
- Stokes curl theorem, 1168
- storage-ring FEL, 1237
- strong focusing, 362
- strong head-tail instability, 844, 904
- structure factor, 937
- substitution, narrowband \leftrightarrow broadband, 879
- superconductor, 61
- surface impedance, 61, 712, 718, 723, 724
- surface plasmon polariton, 230
- surface resistivity, 60
- Sv, 200
- symplectic condition, 319, 409
- synchro-betatron coupling, 499
- synchrotron
- energy ramping, 531
 - mapping equation, 548
- synchrotron oscillation
- low-gain FEL, 618
- storage ring, 481
- synchrotron radiation
- bunch form factor, 568, 1156
 - coherent, see coherent synchrotron radiation, 1026
 - damping, 494
 - damping partition number $\mathcal{J}_{x,y,z}$, 506
 - energy-momentum conservation, 603
 - Feynman diagram, 241
 - formation length — longitudinal, 263, 574
 - formation length — transverse, 264, 575
 - opening angle, 236
 - practical formula, 267
 - properties, 249
 - quantum correction, 250
 - quantum excitation, 512
 - quantum lifetime, 522
 - radiation integrals $\mathcal{I}_{1,2,3,4,5,6}$, 496
 - shielding, 266, 571, 1039
 - slice emittance growth, 1053
 - slice energy spread increase, 1053
- tangent map, 378
- telescope, 383
- theoretical minimum emittance, TME, 551
- theta function $\vartheta_3(u, q)$, 915
- Thomas-BMT equation, 1135
- Thomson scattering, 136
- time dilation, 6
- TMCI (transverse mode coupling instability), 844
- total internal reflection, 94
- Touchard polynomial, 1211
- Touschek effect, 697, 708
- trace space (x, x') , 328
- transit time factor, 529
- transition γ_t , 459
- transition crossing, 460, 484
- transition radiation, 228

-
- inverse transition radiation, 231, 599
 transparent, 382
 transverse deflecting cavity, TDC, 964
 transverse gradient undulator, TGU, 674
 transverse microwave instability, 844, 904
 transverse mode coupling instability, TMCI, 844, 904
 tune ν , 375
 betatron tune $\nu_{x,y}$, 375, 475
 synchrotron tune ν_s , 375, 482
 tune diagram, 422
 tune shift, 418, 424
 ADTS, amplitude-dependent tune shift, 483
 complex, 920
 tune spread, 920
 turbulent instability, 897, 904
 Twiss parameters, 369
 two-temperature model, TTM, 942

 unbunched beam, 906
 undulartor
 in-vacuum, 272
 out-of-vacuum, 272
 undulator
 laser, 137
 undulator radiation
 formation length — longitudinal, 295
 formation length — transverse, 295
 practical formula, 297
 properties, 283
 resonance condition, 276, 587
 Unit & Dimensionality, 24
 Unit conversion table
 numeric, 29
 symbolic, 26, 27
 unit impulse function, 1177
 unstable fixed point, UFP, 477

 Van de Graaff accelerator, 175

 variation of constants, 430
 Vlasov equation, 310, 867
 stationary solution, 868
 transient solution, 870
 Vlasov-Fokker-Planck equation, 867
 Vlasov-Maxwell equations, 919
 Volterra integral equation, 883, 1075
 vortex beam, 957, 1090

 wakefield
 broadband, 767
 catch-up distance, 695, 815
 CSR, 782, 1026, 1037, 1041
 Derbenev criterion, 1039
 cylindrical cavity, 728
 dimensionality, 738
 No-wake theorem, 696
 order of magnitude estimate, 765
 resistive wall, 712
 RLC, 760
 space charge, 697
 vs. electric field, 738
 wake function W_{\parallel}, W_{\perp} , 734
 wake potential V_{\parallel}, V_{\perp} , 736
 wakefield $\mathcal{W}_{\parallel}, \mathcal{W}_{\perp}$, 736, 802
 wakefield acceleration, 742
 water-bag distribution, 1010
 waveguide
 band, 97
 circular cylindrical mode plots, 106
 circular cylindrical modes, 105
 rectangular mode plots, 104
 rectangular modes, 100
 TE,TM,E,H mode definition, 83
 weak focusing, 362
 Weizsäcker-Williams approximation, 704
 Wideroe's condition, 176
 Wiener-Khinchin theorem, 596, 1094
 Wigner distribution, 396

- Wronskian, 430
- Xie Ming fitting formula, 650
- Z-transform, 839
- 加速器物理学家
- Blewett, John Paul (1910-2000), 加拿大, 233, 1161, 1289
 - Bonifacio, Rodolfo (1940-2016), 意大利, 628, 1281
 - Budker, Gersh Itskovich (1918-1977), 俄国, 510, 1302
 - Chao, Alexander Wu (1949-), 美国, 734, 1104, 1291
 - Christofilos, Nicholas Constantine (1916-1972), 希腊, 362, 1161
 - Colson, William (1944-), 美国, 617
 - Courant, Ernest David (1920-2020), 美国, 362, 369, 1296
 - Davidson, Ronald Crosby (1941-2016), 加拿大, 995
 - Derbenev, Yaroslav (1940-), 俄国/美国, 1039, 1294
 - Fang, Shouxian (1932-2020), 中国, 1312
 - Gluckstern, Robert L. (1924-2008), 美国, 775
 - Haissinski, Jacques (1935-), 法国, 876
 - Halbach, Klaus (1924-2000), 美国/德国, 1280
 - Hofmann, Albert Josef (1933-2018), 瑞士, v, 1288
 - Kim, Kwang-Je (1944-), 美国, 1285
 - Laslett, Lawrence Jackson (1913-1993), 美国, 921, 1308
 - Lawrence, Ernest Orlando (1901-1958), 美国, 1161, 1295
 - Lawson, John David (1923-2008), 英国, 772, 995
 - Livingston, Milton Stanley (1905-1986), 美国, 362, 1161, 1298
 - Madey, John M.J. (1943-2016), 美国, 585, 1286
 - McMillan, Edwin Mattison (1907-1991), 美国, 1299
 - Ng, King-Yuen (1949-), 美国, 733
 - Orlov, Yuri Fyodorovich (1924-2020), 俄国, 507
 - Panofsky, Wolfgang Kurt Hermann (1919-2007), 德国/美国, 1300
 - Pellegrini, Claudio (1935-), 意大利/美国, 1287
 - Piwinski, Anton (1934-), 德国, 704
 - Reiser, Martin (1931-2011), 美国, v
 - Robinson, Kenneth (1925-1979), 美国, 507, 1292
 - Sacherer, Franklin James (1940-1978), 美国, 897, 1309
 - Saldin, Evgeny L. (1951-), 俄国, 1069
 - Sands, Matthew Linzee (1919-2014), 美国, v, 1305
 - Sessler, Andrew Marienhoff (1928-2014), 美国, 1078
 - Shintake, Tsumoru (1955-), 日本, 1138
 - Siemann, Robert H. (-2008), 美国, 1311
 - Snyder, Hartland Sweet (1913-1962), 美国, 362, 369, 1297
 - Symon, Keith Randolph (1920-2013), 美国, 364
 - Touschek, Bruno (1921-1978), 奥地利, 708, 1303
 - Twiss, Richard Quintin (1920-2005), 英国, 369
 - Vaccaro, Vittorio Giorgio (1941-2023), 意大利, 748
 - Van de Graaff, Robert Jemison (1901-1967), 美国, 175

- van der Meer, Simon (1925-2011), 荷兰, 510, 1306
- Vinokurov, Nikolay Aleksandrovich (1952-), 俄国, 1307
- Wideroe, Rolf (1902-1996), 挪威, 176
- Wiedemann, Helmut (1938-2020), 美国, v, 1277
- Wilson, Robert Rathbun (1914-2000), 美国, 1301
- Xie, Ming (1959-2004), 中国, 650
- Yokoya, Kaoru (1947-), 日本, 1283
- 数学家
- de Moivre, Abraham (1667-1754), 法国, 54
- Arnold, Vladimir Igorevich (1937-2010), 俄国, 426
- Bessel, Friedrich Wilhelm (1784-1846), 德国, 1222
- Cardano, Gerolamo (1501-1576), 意大利, 54, 1226
- Cauchy, Baron Augustin-Louis (1789-1857), 法国, 1181
- Cayley, Arthur (1821-1895), 英国, 1217
- de Moivre, Abraham (1667-1754), 法国, 381
- Euler, Leonhard (1707-1783), 瑞士, 54, 306
- Ferrari, Lodovico de (1522-1565), 意大利, 1226
- Floquet, Achille Marie Gaston (1847-1920), 法国, 364
- Fourier, Jean-Baptiste Joseph (1768-1830), 法国, 9
- Gauss, Carl Friedrich (1777-1855), 德国, 40, 54, 1168
- Green, George (1793-1841), 英国, 64, 737, 999, 1168
- Hamilton, William Rowan (1805-1865), 爱尔兰, 306, 1217
- Heaviside, Oliver (1850-1925), 英国, 197
- Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand (1821-1894), 德国, 57
- Hermite, Charles (1822-1901), 法国, 1223
- Hoene-Wronski, Jozef Maria (1776-1853), 波兰, 430
- Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804-1851), 德国, 313, 668
- Jordan, Marie Ennemond Camille (1838-1922), 法国, 16
- Khinchin, Aleksandr Yakovlevich (1894-1959), 俄国, 596
- Kolmogorov, Andrey Nikolaevich (1903-1987), 俄国, 426
- Lagrange, Joseph-Louis (1736-1813), 法国, 306
- Laplace, Pierre-Simon (1749-1827), 法国, 14, 40, 76
- Laurent, Pierre Alphonse (1813-1854), 法国, 159
- Lebesgue, Henri Leon (1875-1941), 法国, 15
- Legendre, Adrien-Marie (1752-1833), 法国, 1222
- Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716), 英国, 1175
- Lie, Marius Sophus (1842-1899), 挪威, 316
- Liouville, Joseph (1809-1882), 法国, 311
- Lorenz, Edward Norton (1917-2008), 美国, 66
- Mathieu, Emile Leonard (1835-1890), 法国, 364
- Moser, Jurgen Kurt (1928-1999), 德国/美国, 426
- Pade, Henri Eugene (1863-1953), 法国, 1207

- Parseval, Marc-Antoine (1755-1836), 法国, 11, 209
- Poincare, Jules Henri (1854-1912), 法国, 376
- Poisson, Simeon Denis (1781-1840), 法国, 44
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826-1866), 德国, 15
- Stokes, George Gabriel (1819-1903), 爱尔兰, 1168
- Volterra, Vito (1860-1940), 意大利, 883
- Wessel, Caspar (1745-1818), 挪威-丹麦, 54
- Wiener, Norbert (1894-1964), 美国, 596
数量级
 储存环磁聚焦结构函数, 438
 电子储存环时间尺度, 509
 自由电子激光空间尺度, 652
- 物理学家
 Ampere, Andre-Marie (1775-1836), 法国, 40
 Bardeen, John (1908-1991), 美国, 63
 Beth, Richard Alexander (1906-1999), 美国, 348
 Biot, Jean-Baptiste (1774-1862), 法国, 40
 Bloch, Felix (1905-1983), 美国, 364, 1280
 Bohr, Niels Henrik David (1885-1962), 丹麦, 242
 Boltzmann, Ludwig Eduard (1844-1906), 奥地利, 388, 867
 Bragg, William Henry (1862-1942), 英国, 1251
 Busch, Hans Walter Hugo (1884-1973), 德国, 957
 Campbell, Norman Robert (1880-1949), 英国, 513
 Cherenkov, Pavel Alekseyevich (1904-1990), 俄国, 226
 Compton, Arthur Holly (1982-1962), 美国, 135
 Cooper, Leon N (1930-), 美国, 63
 Coulomb, Charles-Augustin (1736-1806), 法国, 40
 de Broglie, Louis Victor Pierre Raymond (1892-1987), 法国, 933
 Debye, Peter Joseph William (1884-1966), 荷兰/美国, 697
 Dirac, Paul Adrien Maurice (1902-1984), 英国, 1177
 Doppler, Christian Andreas (1803-1853), 奥地利, 133
 Drude, Paul Karl Ludwig (1863-1906), 德国, 718
 Dyson, Freeman John (1923-2020), 英国/美国, 173
 Earnshaw, Samuel (1805-1888), 英国, 454
 Einstein, Albert (1879-1955), 德国, 40, 596
 Faraday, Michael (1791-1867), 英国, 40
 Fermi, Enrico (1901-1954), 意大利/美国, 323
 Feynman, Richard Phillips (1918-1988), 美国, 197
 Feynman, Richard Phillips (1918-1988), 美国, 1175
 Fokker, Adriaan Daniel (1887-1972), 荷兰, 867
 Frank, Ilya Mikhailovich (1908-1990), 俄国, 226
 Fresnel, Augustin-Jean (1788-1827), 法国, 772
 Gibbs, Josiah Willard (1839-1903), 美国, 40, 308
 Ginzburg, Vitaly Lazarevich (1916-2009), 俄国, 228
 Goos, Hermann Fritz Gustav (1883-1968),

- 德国, 94
 Gouy, Louis Georges (1854-1926), 法国, 155
 Hanchen, Hilda (1919-2013), 德国, 94
 Heaviside, Oliver (1850-1925), 英国, 40, 1196
 Heisenberg, Werner Karl (1901-1976), 德国, 396
 Hertz, Heinrich Rudolf (1857-1894), 德国, 40
 Hill, George William (1838-1914), 美国, 364
 Huygens, Christiaan (1629-1695), 荷兰, 64
 Jackson, John David (1925-2016), 美国, v
 Jeans, James Hopwood (1877-1946), 英国, 867
 Jefimenko, Oleg Dmitrovich (1922-2009), 乌克兰, 197
 Kramers, Hendrik Anthony (1894-1952), 荷兰, 755
 Kronig, Ralph (1904-1995), 德国, 755
 Landau, Lev Davidovich (1908-1968), 俄国, 889, 1078
 Langevin, Paul (1872-1946), 法国, 523
 Larmor, Joseph (1857-1942), 英国, 356
 Laue, Max Theodor Felix von (1879 - 1960), 德国, 937
 Leontovich, Mikhail Aleksandrovich (1903-1981), 俄国, 60, 712
 Lienard, Alfred-Marie (1869-1958), 法国, 187
 Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928), 荷兰, 40, 129
 Lorenz, Ludvig Valentin (1829-1891), 丹麦, 66
 Maxwell, James Clerk (1831-1879), 英国, 40
 McMillan, Edwin Mattison (1907-1991), 美国, 469
 Meissner, Fritz Walther (1882-1974), 德国, 62
 Nyquist, Harry (1889-1976), 瑞士, 1127
 Oersted, Hans Christian (1777-1851), 丹麦, 40, 49
 Onnes, Heike Kamerlingh (1853-1926), 荷兰, 61
 Panofsky, Wolfgang Kurt Hermann (1919-2007), 德国/美国, 751
 Pendry, John Brian (1943-), 英国, 146
 Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1858-1947), 德国, 867
 Poynting, John Henry (1852-1914), 英国, 70
 Purcell, Edward Mills (1912-1997), 美国, 229, 1280
 Savart, Felix (1791-1841), 法国, 40
 Schott, George Augustus/Adolphus (1868-1937), 英国, 189
 Schrieffer, John Robert (1931-2019), 美国, 63
 Schroedinger, Erwin Rudolf Josef Alexander (1887-1961), 奥地利, 173
 Schwinger, Julian Seymour (1918-1994), 美国, 97, 233
 Sievert, Rolf Maximilian (1896-1966), 瑞典, 200
 Slater, John Clarke (1900-1976), 美国, 126
 Strutt, John William (3rd Baron Rayleigh), (1842-1919), 英国, 153
 Tamm, Igor Yevgenyevich (1895-1971), 俄国, 226
 Thomson, Joseph John (1856-1940), 英国, 136
 Thomson, William (1824-1907), 英国, 140
 van Kampen, Nicolaas Godfried (1921-

- 2013), 荷兰, 1078
- Veksler, Vladimir Iosifovich (1907-1966),
俄国, 469
- Veselago, Victor Georgievich (1929-2018),
俄国/乌克兰, 146
- Vlasov, Anatoly Aleksandrovich (1908-1975),
俄国, 310
- Wiechert, Emil Johann (1861-1928), 德国, 187
- Yang, Chen Ning (1922-), 中国, 1161
- 表格**
- $2\pi, \sqrt{2\pi}$, 9
 - $\Delta z, \Delta \tau, \Delta \phi$, 468
 - i, j 惯例, 9
 - z, s, ct 、头部 vs. 尾部粒子, 467
 - FEL 放大器 vs. FEL 振荡器, 641
 - Frenet-Serret 坐标系左右手惯例, 329
 - 三种坐标系
 - 定义, 1165
 - 梯度、散度、旋度和 Laplace 算子展开, 1169
 - 三角函数恒等式, 1189
 - 不同分布函数的定义 $\rho(\omega)$, 1212
 - 不同分布函数的特征宽度 $\Delta\omega$, 1213
 - 不同教科书符号惯例比较, 1259
 - 传统常温磁铁 vs. 超导磁铁, 342
 - 传统激光 vs. 自由电子激光, 613
 - 位置向量 \mathbf{r} 的微分运算, 1174
 - 加速器基础科学问题, 1017
 - 加速器应用、模拟与技术难题, 1017
 - 加速器集体不稳定性年表, 823
 - 单位制转换 — 数值, 29
 - 单位制转换 — 符号, 26, 27
 - 单侧傅里叶变换公式, 717
 - 双曲函数恒等式, 1190
 - 同步辐射储存环, 1238
 - 同步辐射实用公式, 267
 - 商业激光覆盖频谱, 583
 - 四代光源亮度比较, 589
 - 四极铁梯度, 361, 497
 - 复变函数与静电、静磁场基本方程的关系, 162
 - 容性、感性阻抗惯例, 748
 - 对撞机, 1244
 - 尾场与阻抗公式, 786
 - 尾场函数数值单位变换, 739, 749
 - 尾场势、尾场力公式, 740
 - 常温、光阴极、射频电子枪, 1235
 - 常温自由电子激光 vs. 超导自由电子激光, 613
 - 常用向量恒等式 $\cdot, \times, \nabla, \nabla\cdot, \nabla\times$, 1168
 - 常用积分公式, 1184
 - 微波频段定义, 97
 - 数量级前缀词, 31
 - 波荡器辐射实用公式, 297
 - 泰勒展开近似公式, 1205
 - 物理常数, 24
 - 电子加速器光源形态的束团特性, 1106
 - 电磁频谱, 1247
 - 直线加速器, 1234
 - 级数求和公式, 1210
 - 能量循环/回收直线加速器, 1243
 - 自由电子激光, 1236
 - 贝塞尔函数及其一阶导数函数的根, 108
 - 量纲, 24
 - 铝、铜金属的一些特性参数, 722

