

电磁辐射与加速器束流动力学导论

**Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers**

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第六章 粒子加速器基础：综述与哈密顿力学基础

内容提要

- 哈密顿量、哈密顿运动方程、相空间、Liouville 定理
- 磁刚度 $B\rho$
- 正则变换、作用量-角度变换
- Frenet-Serret 坐标系
- 加速器哈密顿量

第一部分复习了时变电磁场、介绍了电磁辐射理论。介绍辐射场的特性时，假设带电粒子的运动轨迹是在不考虑电磁辐射前提下预先给定的。严格地说，这种处理方式是不自洽的，因为当带电粒子产生辐射场时，粒子本身运动轨迹也应该改变——如果不是马上、立刻的改变，那也应该在一段时间后改变。辐射场的特性与带电粒子的运动紧密相关，因此，还需要了解带电粒子如何受电磁场影响。这里的电磁场可区分为外部电磁部件提供的电磁场 (external field)，如：用来使粒子转弯的弯转磁铁、用来聚焦粒子的四极磁铁或螺线管、用来加速粒子的射频谐振腔等，与带电粒子束团自身产生的内部电磁场，又称自场 (self field)。此讲义第二部分将重点讨论束流动力学，包含单粒子效应与多粒子集体效应。

作为第二部分的开篇，这一章简短介绍用来描述粒子束运动过程的经典力学基础与加速器束流动力学分析中常用的一种描述粒子运动过程的坐标系，为后面几章内容奠定基础，包括经典力学理论、相空间、正则变换、磁刚度 $B\rho$ 、Frenet-Serret 坐标系以及加速器哈密顿量等概念。

6.0 问答预览

1. 粒子加速器中有哪些类型的电磁场？
⇒ 可分为外部电磁场和内部电磁场，内部电磁场为束团内部产生的自场。
2. 什么是经典力学的三大体系？
⇒ 牛顿力学、拉格朗日力学、哈密顿力学。
3. 拉格朗日量和哈密顿量定义的区别是什么？
⇒ 拉格朗日量是动能减去位能 (势能)，哈密顿量是动量乘以速度减去拉格朗日量。
4. 相空间的概念是什么？
⇒ 相空间是描述动力学系统状态的抽象坐标空间，每个点表示系统在某一时刻的运动状态。
5. 什么是 Vlasov 方程？
⇒ Vlasov 方程描述了无相互作用或长程相互作用下的带电粒子束团的相空间分布函数随时间的演化。
6. 什么是 Liouville 定理？

⇒ **Liouville** 定理指出哈密顿系统的相空间体积随时间保持不变。

7. 什么是正则变换?

⇒ 正则变换是在不影响物理内涵的前提下, 将一组正则位置变量-动量变量与哈密顿函数变换到另一组正则变量和新的哈密顿函数。

8. 什么是作用量-角度变换?

⇒ 作用量-角度变换是一种特殊的正则变换, 将系统的运动状态描述为“作用量”和“角度”变量。

9. 什么是磁刚度 $B\rho$?

⇒ 磁刚度是描述带电粒子在磁场中运动轨迹的一个物理量, 定义为动量除以电荷。能量越高的粒子, 磁刚度越大。

6.1 经典力学理论：拉格朗日量、哈密顿量

经典力学大致包含三个体系：牛顿力学 (Newtonian mechanics)、拉格朗日力学 (Lagrangian mechanics)、哈密顿力学 (Hamiltonian mechanics)。后两者又称分析力学 (analytical mechanics)，为分析力学的两大主要分支。

中学与大学物理学过最多的是牛顿力学，因为其核心方程简单明了。电磁学课堂学过的洛伦兹力方程即是一例，单个带电粒子的洛伦兹力方程可写成

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\gamma m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (6.1)$$

讲义开头提过，自洽求解洛伦兹力方程未必容易，因为式中的电场、磁场要求满足 Maxwell 方程组，其中等式右边驱动项由外部场决定，而整体、严格自洽的电磁场的解还需包含带电粒子自场，即

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\gamma m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (6.2)$$

其中， $\delta\mathbf{E}, \delta\mathbf{B}$ 由带有电荷 q 、质量 m 的粒子产生，由 Lienard-Wiechert 场给出，或者说，由 Maxwell 方程组支配。

很多时候，在尚未得到完整、自洽的解之前，我们仍然希望对该问题有些认识，这个时候，拉格朗日力学或哈密顿力学理论或许将占些优势¹。

拉格朗日力学、哈密顿力学在物理专业中属于理论力学范畴，电气专业的读者未必学过。这一章将简单介绍。拉格朗日力学与哈密顿力学源于变分法 (variational method) 或最小作用量原理 (principle of least action)。不同于牛顿力学直接给出质点的运动方程式，拉格朗日力学与哈密顿力学的第一步是先构造所谓的拉格朗日量、哈密顿量。接着，根据所构造的拉格朗日量、哈密顿量，通过最小作用量原理，给出质点要求满足的运动方程 (组)。原则上，牛顿力方程是一个二阶微分方程。拉格朗日力学给出的也是一个二阶微分方程，而哈密顿力学则是给出一组 (两个) 一阶微分方程。

先从一个最简单的例子开始：简谐振子 (simple harmonic oscillator, SHO)。介绍完这个例子之后，再总结几个定义。下面用三个方式描述简谐振子的运动，并说明三种描述方式等价。

¹但其实这三种描述力学的理论框架是等价的，即，它们包含同样多的物理信息，没有其中哪一个蕴含更多物理信息。

牛顿力学 按牛顿第二定律，对质点-弹簧 (particle-spring) 系统，外力 $F = -kx$ 施加在质点上，有

$$F = m_0 a = m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow x = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

其中， $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$ ， k 为常数。当 $k \rightarrow 0$ 时，质点-弹簧系统退化成自由质点 (free-particle) 系统。给定初始时刻的振幅 $x(t=0) = x_0 = A \cos \phi_0$ 之后，简谐振子的运动 $x(t)$ 就完整描述了。

拉格朗日力学 先定义系统的拉格朗日量 (Lagrangian) L

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \equiv \text{动能} - \text{位能}$$

其中， q 为广义坐标与 $\dot{q} = dq/dt$ 为广义速度。然后根据最小作用量原理 $\delta S = 0$ (下面将给出 S 的定义，为 L 沿“时间”积分)，可以得到“欧拉-拉格朗日运动方程”

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

现将属于此特定问题的“质点-弹簧”简谐振子拉格朗日量代入此运动方程，则有

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = -kx - m_0 \ddot{x} = 0 \Rightarrow x = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

得到与牛顿力学一致结果。于是，拉格朗日力学与牛顿力学等价。

哈密顿力学 先定义系统的哈密顿量 (Hamiltonian) H

$$p(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad H(q_i, p_i) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

其中， q 为坐标变量， p 为动量变量。同样基于最小作用量原理，可以得到“哈密顿运动方程”

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

现在构造属于此特定问题的“质点-弹簧”简谐振子哈密顿量

$$H(x, p) = p\dot{x} - \left(\frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \right) = \frac{p^2}{m_0} - \left(\frac{p^2}{2m_0} - \frac{k}{2} x^2 \right) = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{k}{2} x^2$$

代入哈密顿运动方程，有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_0} \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m_0} x \Rightarrow x = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

知，哈密顿力学与拉格朗日力学及牛顿力学皆等价。

虽然这只是一个特例，仅说明而非严格证明三种力学描述的等价性。略去严格证明，此处重点是，能接受并使用哈密顿量作为分析工具，并且知道此工具包含与基于牛顿力学形式的洛伦兹力方程一样多的物理信息。

定义 6.1. 拉格朗日量 (Lagrangian) $L(q, \dot{q})$

对于广义坐标 q_i 与对应的广义速度 $\dot{q}_i = dq/dt$ ，有拉格朗日函数或拉格朗日量为

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (6.3)$$

其在 t_i, t_f 间要求满足物理真实的轨迹使得以下积分为极值 (extremum)

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt \quad (6.4)$$

称 S 为作用量 (action)。

定律 6.1. 物理真实 $\Leftrightarrow \delta S = 0$

一个满足物理真实的轨迹要求

$$\delta S = 0 \quad (6.5)$$

又称哈密顿原理 (Hamilton's principle) 或最小作用量原理 (principle of least action)。

定理 6.1. 欧拉-拉格朗日方程 (Euler-Lagrange equation)

基于最小作用量原理，给定一系统的拉格朗日量后，系统运动方程遵循欧拉-拉格朗日方程，有

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.6)$$

证明 应用变分法，有

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \end{aligned}$$

定义 6.2. 哈密顿量 (Hamiltonian) $H(q, p)$

定义广义动量 (generalized momentum) 为

$$p_i(q_k, \dot{q}_k, t) \equiv \frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.7)$$

则哈密顿函数或哈密顿量定义为

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n; t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (6.8)$$

定理 6.2. 哈密顿运动方程 (Hamilton's equations of motion)

已知动力学系统的哈密顿量 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ，则有哈密顿运动方程

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (6.9)$$

其中， \mathbf{q} 为坐标变量， \mathbf{p} 为动量变量， \mathbf{q}, \mathbf{p} 成对为正则变量，互为共轭。

或写成分量形式

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (6.10)$$

其中， q_i, p_i 称为一对正则变量，互为共轭。

注 如果系统为一维，则 $\mathbf{q} = x, \mathbf{p} = p_x$ 。如果二维，则 $\mathbf{q} = (x, y), \mathbf{p} = (p_x, p_y)$ ， $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \rightarrow \nabla_{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ， $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \rightarrow \nabla_{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial p_x}, \frac{\partial}{\partial p_y} \right)$ 视为二维“梯度”算子。对高维情况，以此类推。

证明 利用变分法与最小作用量原理。 □



笔记 拉格朗日力学常用在量子力学 (quantum mechanics)，特别是相对论量子力学，因为拉格朗日量是不变量 (invariant)，较容易处理。哈密顿力学不保证不变量，因此，在量子力学中不好处理。但是，分析动态系统时则常用哈密顿力学，因其相空间演化过程衍生的物理图像更适合于处理动力学问题。因此，在量子动力学 (quantum dynamics) 讨论中时常使用哈密顿力学。

6.2 相空间与 Liouville 定理

相空间的概念在许多领域出现，在物理领域有：经典力学、统计力学、动态系统；在工程领域有：自动控制理论，又称状态空间 (state space)。

定义 6.3. 相空间 (phase space)

相空间是动力学系统的一种描述方式。一般而言，动力学系统的“状态”(state) 可以由“位置”(position) 与“动量”(momentum) 描述，形成二阶微分方程(组)。位置与动量一般是时间的函数。相空间中的每一点表征动力学系统在每一时刻的运动状态。随着时间推进而描绘出来的相空间轨迹表征这个动力学系统的演化过程。

对于一个由 N 个粒子组成的保守 (conservative)、决定性 (deterministic) 的动力学系统，相空间为 $6N$ 维，其中，“ $6 = 3 + 3$ ”表示三维位置坐标与对应的三维动量坐标。明确给定系统的初始条件后，相空间轨迹是唯一的。

对于一个由 N 个粒子组成的保守、决定性的动力学系统，相空间 分布函数 满足 Liouville 方程。相空间分布函数的概念表征 系综内某一 N 个粒子状态 在相空间的概率密度 (probability density)。

注 这里的 $6N$ 维相空间又称 Γ 空间 (Γ -space)。

以上定义中出现“相空间分布函数”一词，与“系综”概念有关。这里说明一下“系综”的含义。

定义 6.4. 系综 (ensemble)

系综可视为是一系列 N 个粒子不同初始状态的集合^a。指明一初始条件后， N 个粒子形成的一个状态称系统 (system)，有时称成员 (member)。系综就是一系列不同系统或一系列不同成员的集合。

注 根据研究对象的特性，系综细分三类：

- 对一系列不同系统或成员，如果它们各别的能量都一样，且粒子数不变，则称微正则系综 (microcanonical ensemble)，为封闭 (close) 系统。
- 对一系列不同系统或成员，如果满足它们各别的能量可以不一样，但粒子数不变，则称正则系综 (canonical ensemble)。
- 对一系列不同系统或成员，如果满足它们各别的能量与粒子数都可以不一样，则称巨正则系综 (grand canonical ensemble)，为开放 (open) 系统。

注 系综的概念最早由 J.W. Gibbs 在 1902 年提出。

^a An ensemble = a collection.

由上可推论, 如果两条相空间轨迹存在哪怕一个共同交点, 那么这两条相空间轨迹就要重合, 其实就只有一条。换句话说, 两条相空间轨迹要不重合, 要不永不重合。

如果觉得对这个描述不太能理解, 可能是把“相空间”想成了“实空间”导致的误解。以二维实空间 (real space) 为例, 比如 xy 平面, 两个球各自在此平面运动, 形成两条实空间运动轨迹。这两条轨迹可以交点, 对应实际情况为碰撞, 碰撞前轨迹不重合, 碰撞后轨迹也不重合。但是, 如果把这两个球看做一系统 (注意, 不是两系统), 想像它们在相空间坐标 $(x_1, p_{x_1}, x_2, p_{x_2}, y_1, p_{y_1}, y_2, p_{y_2})$ 随时间演化, 即表征这两个球为一系统的运动状态。明确这两个球为系统的初始条件后, 相空间轨迹是唯一的。如果初始条件不同, 则相空间轨迹不重合; 如果相空间轨迹重合, 只有一种情况: 初始条件一样。如果理解仍有困难, 还可以这么想: 假设当两条相空间轨迹在 t_0 时刻前扫出各自不同的轨迹, 在 t_0 时刻重合。那么, 现在以重合处的相空间坐标为初始条件, 在 t_0 时刻后只会扫出一条相空间轨迹 — 因为系统为保守的、决定性的。由此反推在 t_0 前应该也要是相同轨迹才是, 如果扫出各自不同的轨迹就不合理了。

注 在有些文献中, 相空间坐标以“坐标-动量”交错形式 (x, p_x, y, p_y, z, p_z) 安排。也见到在一些文献中, 相空间坐标以“先坐标, 再动量”形式 (x, y, z, p_x, p_y, p_z) 安排。两种不同形式的区别为, 在写成矩阵形式时, 辛矩阵的形式将有所不同。

定理 6.3. 六维相空间坐标 (6-D phase space)

如果忽略系统中各个粒子之间的交互作用, 则可以用 退化的、六维 (而不是 $6N$ 维) 相空间描述该动力学系统。对于一个由 N 个粒子组成的保守 (conservative)、决定性 (deterministic)、无交互作用的动力学系统, 可用六维相空间描述。

此时, 六维相空间在某一时刻的 每个点 表示系统中 每个粒子 的运动状态, 所有点形成的集合表征该时刻系统的运动状态。所有点随着时间在相空间中扫出的轨迹表征这个系统随时间的演化过程。

对于一个由 N 个粒子组成的保守、决定性、无交互作用的六维动力学系统, 相空间分布函数满足 Vlasov 方程。如果存在长程交互作用 (long-range interaction)^a, 则相空间分布函数 仍 满足 Vlasov 方程。

注 在退化的、六维 (而不是 $6N$ 维) 相空间中, 就没有上述“相空间轨迹要不重合, 要不永不重合”的结论了。

注 这里的六维相空间又称 μ 空间 (μ -space)。

^a怎么区分长程作用或短程作用? 一种衡量方式可以按等离子体理论的德拜长度 (Debye length), 将在 §11.2 介绍。





笔记 上面介绍的相空间是针对带电粒子, 对光子也有相空间的概念, 又称维格纳相空间 (Wigner phase space)。

定理中提到 Vlasov 方程, 将在第 13 章进一步讨论, 这里先给出其 Vlasov 方程的形式。

定律 6.2. Vlasov 方程

对一哈密顿动力学系统, 对一连续带电粒子束团 (等离子体) 分布, 描述其六维相空间连续分布函数 (或概率密度函数) $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 随时间 t 的演化, 将相空间坐标写成 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , 其中, $\mathbf{q} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 。如果忽略束团内粒子间短距离的碰撞效应, 即束团内没有交互作用或交互作用为长程作用 (long-range interaction)^a, 则此六维相空间分布函数 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 满足如下形式的 Vlasov 方程:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (6.11)$$

其中, 留意 df/dt 与 $\partial f/\partial t$ 的区别。这里的相空间分布函数满足以下归一化条件

$$\iiint d\mathbf{q} \iiint d\mathbf{p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = N \quad (6.12)$$

有些文献为了使 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 函数更接近概率密度函数, 将 $\frac{f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)}{N} \rightarrow f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$, 则有

$$\iiint d\mathbf{q} \iiint d\mathbf{p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = 1 \quad (6.13)$$

宜留意不同文献采用的惯例。

注 此方程的物理图像: 对一哈密顿动力学系统 (保守、决定性、无交互作用), 当观察者与束团一同运动时, 束团在六维相空间的粒子密度 (或概率密度) 分布函数不随时间改变, 即 $df/dt = 0$ 。但是, 当观察者在实验室静止坐标 — 不是跟着束团一同运动时 — 看到的束团在相空间未必不随时间改变, 可能改变也可能不变, 即 $\partial f/\partial t \neq 0$ 。当 $\partial f/\partial t = 0$ 时, 称系统在实验室静止坐标达“稳态”(steady-state) 或称达“平衡”(equilibrium)。

定理 6.4. Vlasov 方程有许多稳态/平衡解

Vlasov 方程有许多稳态/平衡解。更多讨论参考第 13 章。


证明 参考等离子体教科书。 □

^a怎么区分长程作用或短程作用? 一种衡量方式可以按等离子体理论的德拜长度 (Debye length), 将在 §11.2 介绍。 □



笔记

$$\begin{aligned} \text{steady-state/equilibrium} &\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{或} \quad f(t_i) = f(t_{i-1}) \\ \text{stationary} &\Leftrightarrow \frac{df}{dt} = 0 \end{aligned}$$

 **练习 6.1** 证明对一个由 N 个粒子组成的保守、决定性、无相互作用的六维动力学系统，相空间分布函数满足 Vlasov 方程。 ■

解 这个证明不容易，感兴趣的读者可以参考等离子体理论的教科书。这里想强调的是，这是一个“定理”，是可以证明的，是基于一些假设才成立的，并不是在一般情况总是成立的结论。 ■

注 如果 N 个粒子组成的束团存在内部交互作用，那么 Vlasov 方程还成立吗？或者，还令人满意地成立吗？

 **笔记** 从 Liouville 方程一步步化简到 Vlasov 方程涉及“BBGKY 层次结构”(BBGKY hierarchy)，以五位物理学家名字命名，分别为 N. Bogoliubov、M. Born、H.S. Green、J.G. Kirkwood、J. Yvon，有时又称 Bogoliubov 层次结构。感兴趣的读者，应参考等离子体动力学理论相关文献。对与加速器理论相关的入门介绍性质的文献，可参考 A.H. Sorensen, Introduction to Intrabeam Scattering, CERN Accelerator School: General Accelerator Physics (1986). <https://cds.cern.ch/record/370784/files/135.pdf>。

定理 6.5. 刘维尔 (Liouville) 定理

对于 $6N$ 维动力学系统，系统的状态可以由一个点描述，该点邻近的系统点形成其相空间分布函数(或概率密度函数)，此函数随时间演化为一常数。或，在以位置坐标与其共轭动量坐标形成的相空间里，哈密顿系统的相空间体积不可压缩。

对六维动力学系统，在一个粒子附近的区域，当粒子在磁场或与速度无关的场中运动，其相空间分布函数(或概率密度函数)随时间演化为一常数。

证明 略，感兴趣的读者可以参考等离子体理论的教科书。

注 严格上说，粒子加速过程 本身 (不考虑加速过程以外的其它任何效应) 适用于 Liouville 定理。但是，Liouville 定理不适用于电子加速导致的辐射效应，包含辐射阻尼、量子激发等，因为辐射场与粒子速度相关，参考 Lienard-Wiechert 场公式。 □

描述 N 个粒子，用 $6N$ 维系统，刘维尔定理是普适成立的。每个粒子用三个位置、三个动量坐标描述，无论粒子彼此间是否存在交互作用，只要粒子运动方程是二阶微分方程形式，那么刘维尔定理就成立²。但是，用 $6N$ 维系统分析太复杂了，特别是对于大量粒子组成的系统，比如，在加速器中， $N > 10^6$ 或甚至可达到 $N \sim 10^{11}$ 。对六维系统，能分析的情况就变得局限。但是，只要粒子彼此间的交互作用可以忽略，那么能在六维系统分析将是万幸！

²从物理上说，所有质点系统的运动方程都可写成二阶微分方程形式。

这里给出 $6N$ 维系统中, 根据刘维尔定理, $6N$ 维相空间分布函数应该满足的运动方程。由于对此讲义以下讨论的实用性不高, 仅列出作为参考。

定律 6.3. Liouville 方程

对一哈密顿动力学系统, 描述 $6N$ 维相空间分布函数 (或概率密度函数) ρ 随时间 t 的演化, 将相空间坐标写成 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , 其中, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ 。在空间中三个方向上有 $q = x, y, z, p = p_x, p_y, p_z$ 。

若仅考虑一个方向, 则 $2N$ 维相空间分布函数 $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 满足如下形式的 Liouville 方程:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0 \quad (6.14)$$

对于一般情况, 则有

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) = 0 \quad (6.15)$$

这里的 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i}$ 类似“梯度”运算, 有时也写成 $\nabla_{\mathbf{q}_i}, \nabla_{\mathbf{p}_i}$ 。注意, 下标 i 不是 (x, y, z) 。

对一哈密顿动力学系统, 如果已知系统哈密顿量 (Hamiltonian) 为 H , 则以上方程还可以写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0 \quad (6.16)$$

其中, $\{\bullet, H\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bullet}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \bullet}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$ 为泊松括号 (Poisson bracket)。这里用了哈密顿运动方程。

□

这里以图 6.1 结束这一小节讨论。

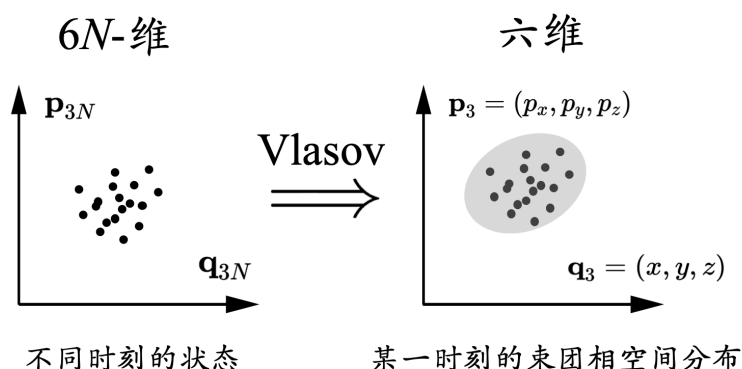


图 6.1: $6N$ 维相空间退化到六维相空间: Vlasov 方程。左图的每个“点”指的是 N 个粒子在不同时刻的状态, “点”不是个别粒子的状态; 右图的“点”指的是个别、真实的粒子在某一时刻的相空间状态, 此时所有“点”的集合可以看成是束团, 即灰色区域。

6.3 正则变换

前面已经介绍了哈密顿力学将作为分析加速器中带电粒子运动状态的语言，介绍了相空间的概念，用以描述带电粒子的运动状态。许多粒子形成束团，则我们现在知道，束团的相空间分布函数严格满足不怎么实用的 $6N$ 维 Liouville 方程，但是，如果忽略束团内粒子间碰撞效应，且束团内没有交互作用或交互作用为长程作用，则束团的相空间分布函数将服从 Vlasov 方程。我们将满足使用 Vlasov 方程作为分析工具。

这里的相空间分布函数以 f 表示，其坐标函数依存关系可以是 (q, p) ，也可以是其它形式的坐标。有时候，为了方便分析，需要将 (q, p) 转换为其它形式的坐标。相空间坐标的变换能不能随意？如果希望从 (q, p) 坐标变换到新坐标的同时，仍保住不希望丢失的“物理内涵”，那么新旧相空间坐标的变换就不能太随意。


 **笔记** 什么是“物理内涵”？ \Rightarrow 不变形 (covariance)、不变量 (invariant)、辛 (symplecticity) 等。

定义 6.5. 正则变换

在不影响物理内涵前提下，不同正则位置变量-动量变量与不同哈密顿函数之间的变换，称为正则变换 (canonical transformation)。

注 由上可知，如果我们有一组 (正则) 位置变量-动量变量以及一哈密顿函数，我们想在不影响物理内涵情况下，改写哈密顿量形式，也可以应用正则变换。

注 正则变量 \neq 正则变换。

 **笔记** 正则变换的概念最早在 1837 年由德国数学家 Carl Gustav Jacobi (1804-1851) 提出。

考虑以下情况，针对同一动力学系统：

- A 某选择一组 (q, p) 并构建哈密顿量 $H(q, p, t)$
- B 某选择一组 (Q, P) 并构建哈密顿量 $H'(Q, P, t)$

只要两人都不出错，那么，即使 H 与 H' 的数学形式非常不同，它们给出的哈密顿运动方程要描述一样的物理内涵。

考虑与时间无明显关系的一维情况，已知一组正则变量 q, p 与哈密顿量 $H(q, p)$ 。现在，我们想引入一个新的动量变量 P 。这个新的动量变量与旧的 q, p (或其中之一) 有关，

但是, P 要求按 我们希望的 形式出现³。由于新的动量变量 P 与新的位置变量 Q 相关, 坐标间变换函数就要是 (Q, q) 或 (Q, p) 的函数。

为满足新的一组位置变量-动量变量为正则变量, 要求如下情况:

1. 新的动量变量如预期按变换生成, 且
2. 新的位置变量需要 (被旧的位置变量或旧的动量变量)“迁就”, 以满足正则变换。

由旧换新的正则变换, 且要满足上面两个要求的方式仅有如下四种可能:

定理 6.6. 四类生成函数 (generating functions)

旧位置坐标 $q \rightarrow Q$ 新位置坐标: $F_1(q_i, Q_i, t)$

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (6.17)$$

旧位置坐标 $q \rightarrow P$ 新动量坐标: $F_2(q_i, P_i, t)$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (6.18)$$

旧动量坐标 $p \rightarrow Q$ 新位置坐标: $F_3(p_i, Q_i, t)$


$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (6.19)$$

旧动量坐标 $p \rightarrow P$ 新动量坐标: $F_4(p_i, P_i, t)$

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (6.20)$$

证明 参考经典力学教科书。 □

下面我们用一个例子说明正则变换。

 **练习 6.2** 对一组旧正则坐标 (q, p) , 希望换一组新正则坐标如下:

$$Q = p, \quad P = -q$$

如何构建生成函数? ■

解 两个方式:

- 将新位置变量 Q 视为我们希望看到的生成形式, 则可对应前面定理的 F_2 或 F_4 。会发现, F_2 无法生成。因此, 生成函数可选为

$$F_4 = \sum_i p_i P_i$$

- 将新动量变量 P 视为我们希望看到的形式, 则可对应前面定理的 F_1 或 F_3 。会发现, F_3 无法生成。因此, 生成函数可选为

$$F_1 = \sum_i Q_i q_i$$

³想做正则变换的背后总是有个动机, 这个动机一般是为了化简些什么, 最常见的就是化简一些变量。因此, 一个新的、按希望的样子变量是“目的”, 正则变换是“手段”。

注 生成函数的选择不是唯一。



笔记 上面这个练习中，给出了新旧位置变量-动量变量的明确形式，目标是构造生成函数。在实际情况，未必都是如此操作。更常见的情况或许是，对新位置、新动量的形式都有些期待，但只能对其中之一的新形式有所坚持。然后，通过寻找四类生成函数中最合适的一类，构造该类正则变换的生成函数 F ，然后得到预期的、坚持的新变量的形式，对另一个变量的新形式则受制于生成函数的要求。

现在假想给定两组正则变量，比如： (q_i, p_i) 与 (Q_i, P_i) ，怎么知道或判断这两组变量能不能通过正则变换的方法相互转换？能不能办法给出一个定理或判据？可以，通过泊松括号。

在给出定理前，这里先定义什么是泊松括号。

定义 6.6. 泊松括号 (Poisson bracket)

对两个函数 $f(q_i, p_i; t)$ 与 $g(q_i, p_i; t)$ ，按经典力学，定义 f 与 g 的泊松括号为

$$\{f, g\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (6.21)$$

有时候又写成 $\{f, g\}_{q,p}$ 。

性质 6.1. 泊松括号的几个特性

如下:

- $\{g, f\} = -\{f, g\}$
- $\{f, f\} = 0$
- 当 q_i, p_i 为哈密顿量 $H = H(q_i, p_i; t)$ 的坐标与共轭动量变量, 且满足哈密顿运动方程

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (6.22)$$

时, 有

$$\{q_i, q_k\} = \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{q_i, p_k\} = \delta_{ik} \quad (6.23)$$

- f 的时间演化方程可以写为

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \end{aligned} \quad (6.24)$$

- 以上 $\frac{df}{dt}$ 称 convective derivative
- 如果 $\frac{df}{dt} = 0$, 则 f 为一积分常数 (integral of motion)
- 如果 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, 即 f 没有明显时间依存关系 $f = f(q_i, p_i)$, 则

$$\{f, H\} = 0 \Leftrightarrow f \text{ 为一积分常数 (integral of motion)} \quad (6.25)$$

- 当系统哈密顿量没有时间的明显依存关系时, 即 $H = H(q_i, p_i)$, 则 H 本身就是一积分常数。

注 $\frac{df}{dt} \neq \frac{\partial f}{\partial t}$ 。

□

□

按如上定义的泊松括号, 哈密顿运动方程可以写成

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\{H, q_i\} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\{H, p_i\} \end{cases} \quad (6.26)$$

这种看起来形式更为对称、简洁的写法可能引入更进阶的理论, 称李代数 (Lie algebra)。

李代数 \approx 泊松括号的代数

细节此处不论, 以下仅定义李算子 (Lie operator), 在某些文献加速器束动力学分析的文献可能遇到。

定义 6.7. 李算子 (Lie operator)

根据泊松括号的定义

$$\{f, g\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (6.27)$$

李算子定义为

$$:f: \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \quad (6.28)$$

因此,

$$\{f, g\} = :f: g \quad (6.29) \quad \square$$

引入李算子符号后, 上面哈密顿运动方程 $\dot{q} = -\{H, q\} = -:H: q$ 的解就可以符号上写成

$$q(t) = e^{-t(:H:)} q(t_0) \quad (6.30)$$

其中, $e^{-t(:H:)}$ 称演化算子 (evolution operator) 或生成元 (generator)。当然, 这里只是将解以李算子符号表示, 尚不涉及如何写出此演化算子的显形式。



笔记 李代数作为的加速器束流动力学的一种分析技巧, 可能应用在单粒子非线性动力学。对于加速器中的非线性元件, 例如: 第7章将介绍的六极铁, 李代数提供了一种分析粒子运动中非线性效应的有效方法。由于研究非线性动力学几乎不可避免要做近似, 采用李代数技巧能在分析过程保持相空间中的面积, 对探讨粒子稳定性至关重要。对李代数应用在加速器束流动力学感兴趣的读者, 可参考 Alexander Wu Chao, *Special Topics in Accelerator Physics*, World Scientific (2022) 一书的 Chapter 4 或 Andrzej Wolski, *Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators*, Imperial College Press (2014) 一书的 Chapter 10。

回到前面提到的问题, 假想有两组正则变量, 比如: (q_i, p_i) 与 (Q_i, P_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), 怎么知道或判断这两组变量能不能通过正则变换的方法相互转换? 或者, 换一个方式说, 如果给出 (q_i, p_i) 与 (Q_i, P_i) 的变换

$$Q_i = Q_i(q_k, p_k), \quad P_i = P_i(q_k, p_k), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.31)$$

或反过来写成

$$q_i = q_i(Q_k, P_k), \quad p_i = p_i(Q_k, P_k), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.32)$$

怎么判断/检验此变换为正则变换?

略去证明细节, 这里仅给出结论:

新旧坐标的变换为正则变换 \Rightarrow 新旧坐标的泊松括号不变。

定理 6.7. 检验两组坐标间的变换是否为正则变换的方法


设有两组正则坐标 (q_i, p_i) 与 (Q_i, P_i) , 满足以下关系则表示 (q_i, p_i) 与 (Q_i, P_i) 间的变换为正则变换

$$\{Q_i, Q_k\}_{q,p} = \{q_i, q_k\}_{q,p} = 0 \quad (6.33)$$

$$\{P_i, P_k\}_{q,p} = \{p_i, p_k\}_{q,p} = 0 \quad (6.34)$$

$$\{Q_i, P_k\}_{q,p} = \{q_i, p_k\}_{q,p} = \delta_{ik} \quad (6.35)$$

□

 **练习 6.3** 证明以下两组坐标变换为正则变换

a) $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, 其中, $Q_i = p_i, P_i = -q_i$ 。

b) $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, 其中, $Q_i = -p_i, P_i = q_i$ 。

■

结束这一小节前, 我们试着改写一下泊松括号为矩阵形式, 对后面 §7.8 的讨论可能有些启发。考虑两个函数 $f(q_i, p_i; t)$ 与 $g(q_i, p_i; t)$, 暂时考虑 $i = 1$ 情况, 其泊松括号有

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{q,p} &\equiv \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \frac{\partial g}{\partial q_i} & \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{pmatrix}^T \mathbf{S} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.36)$$

这里的 \mathbf{S} 称辛矩阵。对 $i > 1$ 的一般情况, 也能写出类似形式。当由 (q_i, p_i) 至 (Q_i, P_i) 的变换为正则变换时, 由⁴

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, g\}_{q,p} \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, g\}_{Q,P} \quad (6.37)$$

⁴这里可不妨将 g 视为系统的哈密顿量 H , 当生成函数不明显包含时间关系时, 有 $H' = H$, 因此, $g' = g$ 。

于是, 有 $\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$ 。由上

$$\begin{aligned}
 \{f, g\}_{q,p} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial P_i} \end{pmatrix}^T \mathbf{S} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial g}{\partial P_i} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial P_i} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q_i} & \frac{\partial Q}{\partial p_i} \\ \frac{\partial P}{\partial q_i} & \frac{\partial P}{\partial p_i} \end{pmatrix} \mathbf{S} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q_i} & \frac{\partial P}{\partial q_i} \\ \frac{\partial Q}{\partial p_i} & \frac{\partial P}{\partial p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial g}{\partial P_i} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial P_i} \end{pmatrix}^T \mathbf{M}^T \mathbf{S} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial g}{\partial P_i} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \{f, g\}_{Q,P} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial P_i} \end{pmatrix}^T \mathbf{S} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial g}{\partial P_i} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

其中,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q_i} & \frac{\partial P}{\partial q_i} \\ \frac{\partial Q}{\partial p_i} & \frac{\partial P}{\partial p_i} \end{pmatrix} \tag{6.39}$$

称变换矩阵, 有时又称雅可比矩阵 (Jacobian matrix), 也可视为 §7.8 将介绍的传输矩阵。由上可以看到, 正则变换保证了 $\mathbf{M}^T \mathbf{S} \mathbf{M} = \mathbf{S}$, 称辛条件 (symplectic condition)。



笔记 此处先注记一下, 更多讨论可参考 §7.8。

$$\text{一般正则变换} \Leftrightarrow \mathbf{M}^T \mathbf{S} \mathbf{M} = \mathbf{S}$$

$$\text{一维正则变换} \Leftrightarrow \det \mathbf{M} = 1$$

6.3.1 作用量-角度变换

正如上述讨论的, 生成函数的选择不是唯一。在许多领域, 有许多漂亮、巧妙的正则变换, 一旦被应用, 就能够有效化简问题, 甚至给出新的物理视角。这一节介绍一个特殊的正则变换: 作用量-角度变换 (action-angle transform)。

已知简谐振子的哈密顿量为

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} \tag{6.40}$$

利用哈密顿运动方程, 位置与动量变量可解得, 有

$$x = a \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad p = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \tag{6.41}$$

现在, 想通过正则变换, 将 $(x, p) \rightarrow (\phi, I)$, 其中, $\phi = \omega_0 t + \phi_0$ 。将新动量变量 I 视为我们希望看到的简单形式, 如: 常量。按前面定理, 可以选择第一类或第三类生成函数。

既然得到了完整解, 为什么还要多此一举做正则变换?

这里选择第一类

$$F_1(x, \phi) = \int_0^x p dx = - \int_0^x \omega_0 x \tan \phi dx = -\frac{\omega_0 x^2}{2} \tan \phi \tag{6.42}$$

可以得到新的动量坐标，称作用量 (action)

$$I = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = \frac{\omega_0 x^2}{2} (1 + \tan^2 \phi) = \frac{1}{2\omega_0} (\omega_0^2 x^2 + p^2) \quad (6.43)$$

对应的新的位置坐标可以从正则变换的另一个关系 $p_i = \partial F_1 / \partial q_i$ 得到，有

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = -\omega_0 x \tan \phi \Rightarrow \phi = -\tan^{-1} \frac{p}{\omega_0 x} \quad (6.44)$$

与新的哈密顿量

$$H' = \omega_0 I \quad (6.45)$$

其中，这里的生成函数 $\partial F_1 / \partial t = 0$ ，与时间无明显关系。

在新的正则坐标系的运动方程为

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow I = \text{常数} \quad (6.46)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega_0 \Rightarrow \phi = \omega_0 t + \phi_0 \quad (6.47)$$

上式结果表明，简谐振子在位能函数 $\frac{\omega_0^2 x^2}{2}$ 内做固定振幅 I 、绕行频率 ω_0 的相空间圆周运动。虽然这个结果同样能够通过完整解 $x = a \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ 得到，但是，通过作用量-角度变换后，物理图像变得简单明了。

通过上面这个例子，希望说明作用量-角度变换是一种非常有用的正则变换，在没有牺牲物理内涵情况下，将一个具有周期振荡的问题大大简化。对于简谐振子，由于存在解析解，进行作用量-角度变换就显得有些多此一举。其实，这种变换真正发挥威力的时候是在对于较复杂、非简谐振子的情况，可以先将系统变换到作用量-角度坐标之后，再利用微扰方法近似、化简问题。

以下考虑从简谐振子 $H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2}$ 过渡到一般位能形式的谐振子，参考图 6.2

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + U(x) \quad (6.48)$$

由上可知， H 含有总能量的概念。对于在相空间封闭轨迹的粒子，能量固定，写做 E 。因此，有

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p = \sqrt{2[E - U(x)]} \quad (6.49)$$

现在，想通过正则变换，将 (x, p) 转变到其中一个含有“能量”的变量。采用第二类正则变换，有

$$F_2(x, E) = \int_0^x dx' \sqrt{2[E - U(x')]} \quad (6.50)$$

按正则变换定理，有

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_2}{\partial x} = \sqrt{2[E - U(x)]} \\ Q &= \frac{\partial F_2}{\partial E} = \int_0^x dx' \frac{1}{\sqrt{2[E - U(x')]} \end{aligned} \quad (6.51)$$

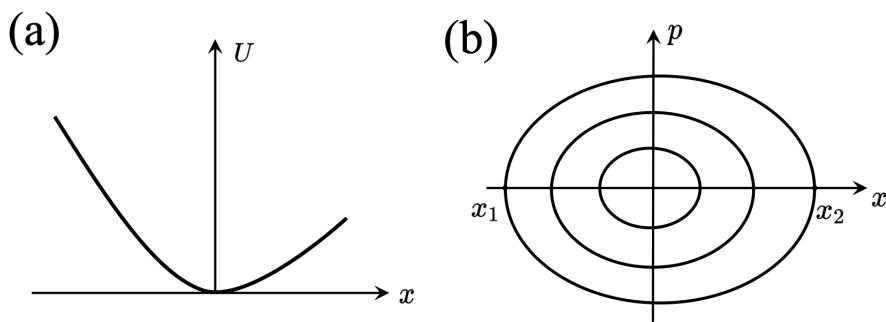



图 6.2: 一般谐振子的 (a) 位能函数与 (b) 相空间拓扑。

则有新哈密顿量 $H'(Q, E) = H = E$, 及对应新正则坐标的运动方程有


$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial E} = 1, \quad \dot{E} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \quad (6.52)$$


$\dot{Q} = dQ/dt = 1 \Rightarrow Q(t) = t + t_0$ 。可以看到, 与“能量”坐标形成共轭的是“时间”。

 **笔记** 回忆以前大学物理学过的, 上面 $Q = \int_0^x dx' \frac{1}{\sqrt{2[E-U(x')])}}$ 其实就是求单摆周期的积分公式

$$\frac{1}{2}T = \pi\omega^{-1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{p(x')} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{\sqrt{2[E-U(x')])}}$$

是不是殊途同归?

 **笔记** 此处图 6.2(b) 的一圈圈环称 Hamiltonian tori, 是一种不变环面。就是说, 在同一环上, 虽然 (x, p) 取值不同, 但是具有相同的 $H(x, p)$ 值。在不同环上, $H(x, p)$ 取值不同。这些环彼此不相交, 又称不变环面 (invariant tori)。具备此特性的系统又称可积系统 (integrable system)。

 **笔记** 一般的不可积哈密顿系统是什么样子? 特殊情况或许能知道一些, 但一般的不可积哈密顿系统, 不知道。

这里的“时间 Q ”随时间将不断、无止尽地增加, 有时候分析未必方便。为了进一步将这里的“时间 Q ”与“能量 E ”变量转变成“角度 ϕ ”与“作用量 J ”, 考虑将生成函数 F_2 “修改”如下⁵

$$\tilde{F}_2(x, J) = F_2(x, E(J)) \quad (6.53)$$

则有新哈密顿量 $\tilde{H}(\phi, J) = E(J)$ (参考第二类生成函数 $H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$), 及对应新正则坐标的运动方程

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J} = \frac{dE}{dJ} \equiv \omega(E), \quad \dot{J} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi} = 0 \quad (6.54)$$

作用量 J 可写成 $J(E) = \int_{E_{\min}}^E \frac{dE'}{\omega(E')}$ 。从这里我们得到几个结论:

⁵ $E(J) = \omega(E)J$

1. $\dot{J} = 0 \Rightarrow$ 作用量 J 为时间的常数。
2. $\dot{\phi} = \omega(E) \Rightarrow$ 角度 $\phi(t) = \omega(E)t + t_0$, 与 $\omega(E)$ 成正比, 但绕行频率与能量有关。

到此为止, 已经把一般位能形式 $U(x)$ 的谐振子的运动方程分析出来了, 尽管它的完整解仍无法得知, 因为 $U(x)$ 的具体形式尚未给定。注意到, 这两个结论是在 $U(x)$ 的具体形式给定之前得到的。如果没有这个正则变换, 很难从原始形式哈密顿量 $H(x, p) = \frac{p^2}{2} + U(x)$, 或其对应的、没有经过作用量-角度变换的哈密顿运动方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -U'(x) \end{cases} \quad (6.55)$$

得到这些物理图像!



笔记 上面这一系列操作, 虽然没有从作用量-角度变换直接写出完整的、显形式的解, 却已经从分析中得到一些物理图像。一个 不准确 的比拟: 作用量-角度变换就像从直角坐标 $(x, y) \rightarrow (\rho, \phi)$ 极坐标, 其中, 半径 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 对应作用量 J , 相角 ϕ 对应角度 ϕ 。

我们在以上 §6.2 与 §6.3 对哈密顿力学的介绍将停留在此, 以下的介绍将针对加速器中的粒子动力学展开, 包含 Frenet-Serret 坐标系、加速器哈密顿量等。这里的讨论“假设”物理系统是保守的、无耗散的, 其哈密顿量存在一正交基底, 比如, 简谐振子的正交基底有 $\sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t$ 。此讲义后面将讨论的情况未必都是完美、理想、无耗散情况, 比如, 电子弯转过程的同步辐射能量损失、在波荡器中的波荡器辐射、自由电子激光等将使系统不再是理想的无耗散情况, 这时候怎么办? 既然我们在这没有细讲耗散、非厄米 (non-Hermitian) 哈密顿量, 可以预期, 后面我们也不打算太严谨地通过哈密顿力学这套分析方式处理耗散系统。后面我们采取的几种方式不外乎:

- **闭起眼**, 暂时忽略耗散效应, 比如, 分析电子储存环横向动力学时。
- 在描述物理系统 (建模) 时, 推导出带有阻尼项的简谐振子的微分方程后, 直接近似求解该方程。对耗散效应的严格处理, **睁一只眼闭一只眼**, 绕开构建哈密顿量的过程。比如, 处理同步辐射阻尼效应时。
- 处理自由电子激光的粒子动力学过程, 一般简化起见, 也是 **睁一只眼闭一只眼**, 构建哈密顿量时不考虑耗散效应。严谨的分析涉及处理耗散谐振子的动力学, 单一正交基底解无法完整描述, 需根据有效哈密顿量构造一组双正交基底 (bi-orthogonal basis), 才能完整得到耗散谐振子的解。细节此处不论。

6.4 磁刚度 $B\rho$ 与 Frenet-Serret 坐标系

前面介绍完经典力学基础后，这一节以下将正式进入与加速器物理束流动力学相关的讨论。第一个物理量——也是最重要的一个物理量——称磁刚度 (beam rigidity)，有时直接写成 $B\rho$ 。

考虑带电粒子等速圆周运动，假设电荷 $|q|$ ，弯转半径为 ρ ，有

$$F = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{\gamma m_0 v^2}{\rho} = |q|vB \Rightarrow B\rho = \frac{p}{|q|} \quad (6.56)$$

其中， $m = \gamma m_0$ ， $p = mv = \gamma m_0 v$ 。

定义 6.8. Beam rigidity $B\rho$

称磁刚度，又称 momentum rigidity。定义为

$$B\rho = \frac{p}{|q|} \quad (6.57)$$

对极端相对论粒子而言， $E = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \approx pc$ ， $B\rho$ 可近似写成

$$B\rho = \frac{p}{|q|} \approx \frac{E}{|q|c} \quad (6.58)$$

注 将 $|q| = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 与 $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ 代入，得到实用公式为

$$E [\text{GeV}] \approx 0.3 B[\text{T}] \rho[\text{m}] \quad (6.59)$$

或

$$B[\text{T}] \rho[\text{m}] \approx 3.3356 p[\text{GeV}/c] \quad (6.60)$$

注 虽然此讲义仅考虑电子，但如果对其它粒子，如：重离子 (质量数 A ，原子量 Z)，则磁刚度应修改为

$$B[\text{T}] \rho[\text{m}] \approx \frac{A}{Z} \times 3.3356 p[\text{GeV}/c] \quad (6.61)$$

对质子，有 $A = 1, Z = 1$ ，磁刚度公式形式不变。



笔记 以 CERN LHC 为例， $E = 7 \text{ TeV}$ ， $C_0 = 27 \text{ km}$ ， $R = C_0/2\pi \approx 4300 \text{ m}$ ， $B_y \approx 5.4 \text{ T}$ 。实际弯转磁场约为 8.3 T ，因为不是等磁环。



练习 6.4 美籍意大利物理学家 E. Fermi 在 1954 年设想出一个虚拟的环形加速器，粒子沿着地球赤道绕行，半径约 6371 km 。假设粒子为质子，弯转磁铁磁场强度有 10 T ，试估算基于磁刚度限制的最大可能达到的粒子总能量。此加速器又称 globatron。

解 约 20 PeV ，其中， $1 \text{ PeV} = 1000 \text{ TeV}$ 。



练习 6.5 由于在加速器中绝大多数采用磁场使粒子弯转，所以称“磁”刚度。虽然加速器中甚少采用，但电场也可使粒子弯转，相应的衡量指标称“电”刚度 (electric rigidity)，写成

精细结构常数应写为 $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ (CGS 单位制)。这张照片耐人寻味的地方在于，到底是费米教授无心的笔误，还是出于他的幽默？提示：看看费米教授闪耀的双眸。

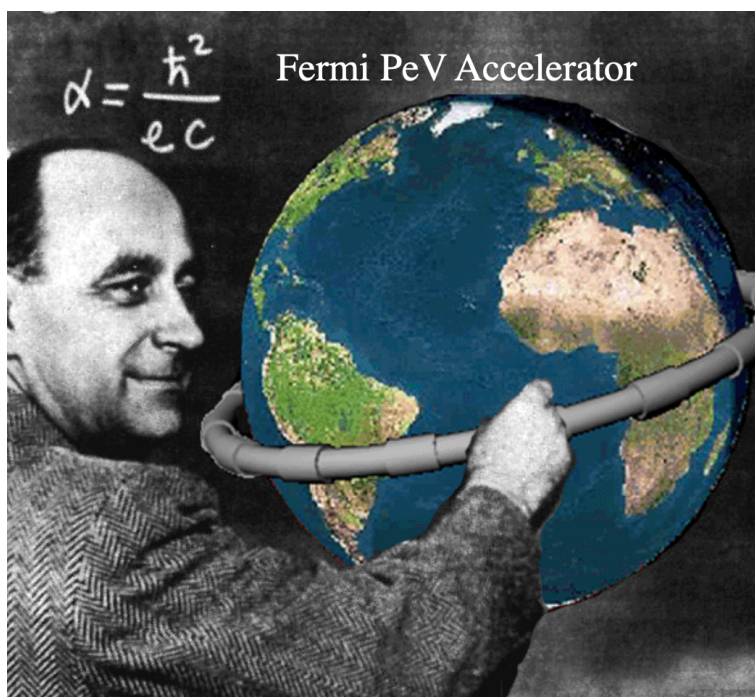


图 6.3: 费米提出的终极加速器示意图。一个有趣的地方, 留意图中黑板上的公式, 能不能看出这是什么公式? 公式有没有问题? 图例取自https://www.physics.uci.edu/tajima/Laser-Acceleration-RNC_Tajima.pdf。

$E^a \rho$ 。按类似思路, 试推导电刚度的表示式。 ■

解 $E^a \rho_E = \beta c [B\rho]$ 或 $\frac{1}{\rho_E} = \frac{E^a}{\beta c [B\rho]}$, 其中, ρ_E 为弯转半径, E^a 为与使粒子弯转的电场, 不要与上面粒子能量 E 混淆。 ■

可以看到, 能量越高的粒子, 其 $B\rho$ 越大。或者说, 在相同磁场强度下, 弯转半径越大, 即越不容易“折弯”, 或磁刚度越大。

现考虑描述加速器中的粒子运动, 片刻思考会发现, 如果束团中的每个粒子在实验室静止坐标系中都是散乱无章的, 那么以实验室静止坐标系描述这些粒子的运动是合理的。但是, 真实情况是, 加速器产生的相对论性高能粒子束是几乎以光速沿着一明确方向前进, 比如, 沿着 s 方向定向前进。因此, 如果直接在相对于实验室的静止坐标系中做, 虽然可行, 但很快会发现并不方便。

当束团中的绝大多数粒子都以光速沿着一个方向 s 前进时, 不妨可以采用与该方向坐标瞬时且平行的方向为参考纵向坐标。相对于这个前进的纵向方向, 横向 x, y 保持原本熟悉的直角坐标中的 x, y 坐标即可。为了更好地定义这个瞬时移动的坐标系, 我们取束团中的一参考粒子 (称 fictitious particle 或 reference particle) 为坐标基准, 即束团坐标的相对原点, 而描述束团中的其余粒子则靠它们与参考粒子的坐标差异。这种类似于直角坐标系的移动正交坐标系称 Frenet-Serret 坐标系。

定义 6.9. Frenet-Serret 坐标系 (x, y, s)

如图 6.4 与 6.5 所示, 相对于固定原点的广域直角坐标系 (X, Y, Z) , Frenet-Serret 坐标系为 (x, y, s) 局域直角坐标系, 满足右手定则 $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{s}}$ 或 $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_s$ 。单位向量间与曲率半径的关系有

$$\frac{d\hat{\mathbf{s}}}{ds} = -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{\rho_x(s)} - \frac{\hat{\mathbf{y}}}{\rho_y(s)} \quad (6.62)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{ds} = \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\rho_x(s)} \quad (6.63)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}}{ds} = \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\rho_y(s)} \quad (6.64)$$

曲率半径可以与磁刚度关联, 有

$$\rho_{x,y}(s) = \frac{p_0}{|e|B_{y,x}(s)} \quad (6.65)$$

其中, p_0 为参考粒子动量。

注 弯转朝内与朝外, $B_{x,y}(s)$ 符号改变, $\rho_{y,x}(s)$ 的符号跟着变。

注 对平面加速器, 假设弯转平面为 xs 平面, 则 $\rho_y = \infty$, 上式可以进一步化简。

注 关于 Frenet-Serret 坐标系更详细的讨论, 可参考微分几何教科书, 此处不论。

注 在 Frenet-Serret 坐标系中, 没有明显的时间变量, 其实已经藏在 s 中了,

$s = z + \beta ct$ 。更多讨论可参考 §8.1.1。

□

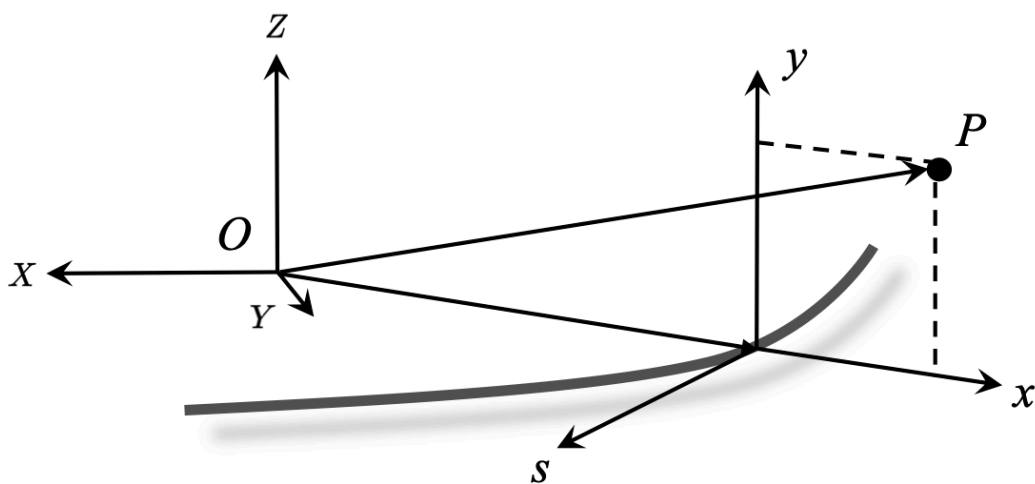


图 6.4: Frenet-Serret 坐标系 (x, y, s) 与直角坐标系 (X, Y, Z) 示意图。此图例的曲率半径为正。



笔记 有些教科书用的是“左手”Frenet-Serret 坐标 (如: S.Y. Lee), 有些是“右手”Frenet-Serret 坐标 (如: Stupakov & Penn, Conte & MacKay, Chao, Wolski, Handbook)。当整个加速器大系统 (accelerator complex) 包含多个储存环并且粒子绕行的走向 (orientation) 不一样时, 如在 A 环以顺时针、B 环以逆时针绕行时, 维持某一惯例时, 横向 x 方向朝内、朝外将颠倒, 务必小心! 对对撞机来说, 在对撞环中的两对撞粒子束可能分别以顺时针、逆时针绕行, 根据所采用的惯例, 应确保一致! 或者, 应确保使用的理论与模拟程序采用的惯例一致。

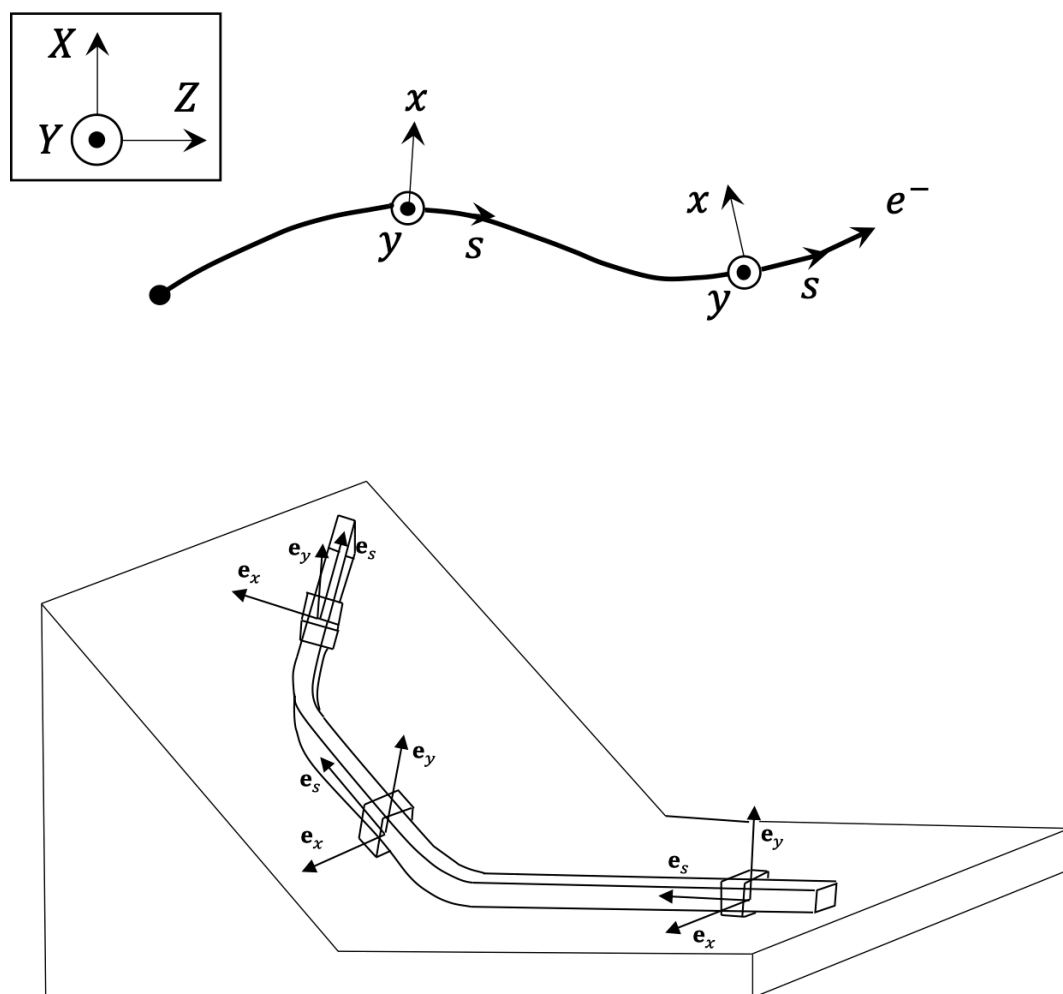


图 6.5: 广域直角坐标系 (X, Y, Z) 与局域 Frenet-Serret 坐标系 (x, y, s) 。下图修改自 T. Agoh 博士论文。



笔记 这里 Frenet-Serret 坐标的 s 在加速器物理中常称 *time-like coordinate*, 为什么这么说? 因为在加速器中的粒子几乎勇往直前“不回头”。多数束流动力学研究都用 s , 但是两个场合可能例外:

- 在光阴极附近
- 激光等离子体加速

在这两种情况, 需要区分粒子在什么时刻 t 、在什么位置 s , 有时候粒子可能“回头”。这种情况分析一般多用 *particl-in-cell* (PIC) 数值计算, 把时间坐标与空间坐标分开, 不再像 $s = z + \beta ct$ 一样揉在一起。

6.4.1 Frenet-Serret 坐标系向量运算

有些时候, 特别是计算弯转磁铁的磁场时, 需要在 Frenet-Serret 坐标系下操作。以下总结在 Frenet-Serret 坐标系中可能用到的向量运算。

$$\begin{aligned}
 d\ell^2 &= dx^2 + dy^2 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 ds^2 \\
 \nabla\varphi &= \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{s}}\frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}}\frac{\partial\varphi}{\partial s} \\
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}}\frac{\partial[(1 + \frac{x}{\rho})A_x]}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}}\frac{\partial A_s}{\partial s} \\
 (\nabla \times \mathbf{A})_x &= -\frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}}\frac{\partial A_y}{\partial s} + \frac{\partial A_s}{\partial y} \\
 (\nabla \times \mathbf{A})_y &= -\frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}}\frac{\partial[(1 + \frac{x}{\rho})A_s]}{\partial x} + \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}}\frac{\partial A_x}{\partial s} \\
 (\nabla \times \mathbf{A})_s &= -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \\
 \nabla^2\varphi &= \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

注 也有结合常见的直角坐标、圆柱坐标、球坐标、Frenet-Serret 坐标系于同一个表达式, 可参考 Handbook §1.5.2。

6.5 加速器哈密顿量

带电粒子存在外部电磁场的自由空间中，哈密顿量 H 可写成⁶

$$H = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2(\boldsymbol{\pi} - q\mathbf{A})^2} + q\varphi \quad (6.67)$$

其中，正则动量 (canonical momentum) $\boldsymbol{\pi}$ 有

$$\boldsymbol{\pi} = m \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\mathbf{A} = m\gamma\mathbf{v} + q\mathbf{A} \quad (6.68)$$

一般假设标量位函数 $\varphi = 0$ 。

以下总结两个常用的加速器哈密顿量形式，略过推导细节。

定理 6.8. 加速器哈密顿量

通过以下三次变换、近似操作，

1. 固定直角坐标系变换到移动 Frenet-Serret 坐标
2. 时间坐标变换到全域纵向坐标 s
3. 电子动量偏差很小，即 $\frac{p}{p_0} = 1 + \delta$ ，其中， $\delta \ll 1$
4. 忽略 A_x, A_y ，仅保留 A_s

可以得到加速器哈密顿量，有

$$\mathcal{H}(x, P_x, y, P_y) \approx -(1 + \delta) \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left(1 - \frac{1}{2}P_x^2 - \frac{1}{2}P_y^2\right) - \frac{q}{p_0}A_s \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \quad (6.69)$$

其中，

- $P_x = p_x/p_0, P_y = p_y/p_0, \delta = \frac{p - p_0}{p_0} \approx \frac{E - E_0}{E_0}$ 。
- 有时候用 x', y' 近似地表示 P_x, P_y ，其中， $x' \equiv \frac{dx}{ds} = \frac{v_x}{v_s} = \frac{p_x}{p_s} \approx P_x, y' \equiv \frac{dy}{ds}$ 。

证明 推导可参考 Gennady Stupakov and Gregory Penn, Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics, Springer (2018) 的 Chapter 5。

注 在一些经典力学教科书中，称 (x, p_x, y, p_y, z, p_z) 为相空间 (phase space)；称 $(x, x', y, y', z, \delta)$ 为迹空间 (trace space)。在加速器社群，一般 (x, p_x, y, p_y, z, p_z) 与 $(x, x', y, y', z, \delta)$ 都称相空间， (x, y, z) 为实空间 (real space)。在拉格朗日力学中，以广义位置坐标与广义速度坐标定义的 $(x, \dot{x} = dx/dt, y, \dot{y}, z, \dot{z})$ 则称为位形空间 (configuration space)。

注 此处， $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 。注意，有些教科书定义 $A_s = (1 + \frac{x}{\rho})\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ ，如：S.Y. Lee。Handbook 里也要小心，有时采用前者 (§1.5.2)，有时采用后者 (§2.3.1.1)。

注 上面定义的物理量中， δ 又称动量 (能量) 偏差变量，常作为相空间坐标的第六个变量。

⁶对电子，有 $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

在第八章介绍纵向动力学时， δ 变量将成为“主角”。

定理 6.9. 加速器哈密顿量

另一种形式稍微不同的加速器哈密顿量，同样通过如上类似的变换、近似操作，有

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{\delta}{\beta_0} - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{\left(\delta + \frac{1}{\beta_0}\right)^2 - P_x^2 - P_y^2 - \frac{1}{\beta_0^2 \gamma_0^2} - \frac{q}{p_0} A_s \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)} \\ &\approx \frac{\delta}{\beta_0} + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left(\frac{P_x^2}{2D} + \frac{P_y^2}{2D} - D - \frac{q}{p_0} A_s\right)\end{aligned}\quad (6.70)$$

其中， $D = \sqrt{1 + \frac{2\delta}{\beta_0} + \delta^2}$ 。第二个近似符号假设了 $\frac{P_x^2 + P_y^2}{2D^2} \ll 1$ ，此假设为电子束的傍轴近似 (paraxial approximation)。

证明 推导可参考 Andrzej Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Press (2014) 的 Chapter 2。

注 以上形式已按照此讲义使用的符号惯例对 Wolski 书中的哈密顿量进行相应修改。 $a_s \rightarrow \frac{e}{p_0} A_s$ 。此外，在 Wolski 书中， $p_{x,y}$ 为 canonical momentum，在 Stupakov & Penn 书中， $p_{x,y}$ 为 kinetic/mechanical momentum， $\pi_{x,y}$ 为 canonical momentum。

注 按 Stupakov & Penn 书中符号惯例，canonical momentum 与 kinetic/mechanical momentum 的关系为 $\pi_{x,y} = p_{x,y} + eA_{x,y}$ 。不考虑横向 $A_{x,y}$ 时，canonical momentum 退化为 kinetic/mechanical momentum；如果存在 $A_{x,y}$ ，那么要小心两者区别。



笔记 一般研究线性束流动力学或集体效应问题较少从加速器哈密顿量开始，除非研究的问题非常根本，或者研究单粒子非线性动力学，才需要重新构建针对特定问题的哈密顿量。



笔记 对加速器哈密顿量等基础概念感兴趣的读者，建议参考 R.D. Ruth, Single-particle dynamics in circular accelerators, AIP Conf. Proc. **153**, 150-235 (1987). <https://doi.org/10.1063/1.36365>。此论文包含正则扰动理论 (canonical perturbation theory) 的介绍。

此讲义 §6.4 总结了 Frenet-Serret 坐标系向量运算，基于“右手”惯例，且有纵向向量位函数分量 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ ⁷。以下整理一些常见教科书采取的“右手”、“左手”惯例或 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 、 $A_s = (1 + \frac{x}{\rho}) \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 惯例。

采用“右手”Frenet-Serret 坐标系的教科书：

- Stupakov & Penn \Rightarrow 右手、 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 。

⁷此惯例也与 I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, 8th Ed., Elsevier (2015) 一书的 §10.51、§10.61 (pp.1064-1065) 一致。

- Wolski \Rightarrow 右手、 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 。
- Handbook §1.5.2 \Rightarrow 右手、 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ ，但该书其它部分是否维持使用此惯例，应自行查证。
- Conte & MacKay \Rightarrow 右手、 $A_s = (1 + \frac{x}{\rho})\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 。
- Wiedemann \Rightarrow 右手、 $A_{c,z} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 、 $A_z = A_{c,z}(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{y}{\rho_y})$ ，且该书把 x, y 两个方向可能的弯转都写列写出来。
- Sands \Rightarrow 右手、该书横向垂直的 y 方向以符号 z 表示。
- Edwards & Syphers \Rightarrow 右手、 $A_s = (1 + \frac{x}{\rho})\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 。
- DiMitri \Rightarrow 右手、 $A_s = (1 + \frac{x}{\rho})\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 。

采用“左手”Frenet-Serret 坐标系的教科书：

- S.Y. Lee, Bryant & Johnsen \Rightarrow 左手、 $A_s = (1 + \frac{x}{\rho})\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ ，该书横向垂直的 y 方向以符号 z 表示。
- R.D. Ruth \Rightarrow 左手、 $A_s = (1 + \frac{x}{\rho})\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$
- K. Wille \Rightarrow 左手、 $A_s = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ ，该书横向垂直的 y 方向以符号 z 表示。

6.6 浅谈：电路理论的力学观点

这一章开头以“简谐振子”作为例子，说明经典力学的拉格朗日力学、哈密顿量力学与牛顿力学的等效性。后面将发现，“简谐振子”这个模型随处可见，不仅仅是出现在粒子/质点运动，电路元件也有非常类似的力学观点。甚至，电磁部件里的物理量——比如，电场线积分、磁场面积分——也有对应的力学观点。电气专业的读者对电路理论肯定不陌生，但未必从牛顿、拉格朗日或哈密顿量力学切入，这一节我们简短讨论电路理论的力学观点。

对单个元件，先回顾一下常见的三种元件在电路理论中的量化定义：

- 电容 $C \equiv \frac{q}{V}$ ，其中， V 是部件两端电位差。AC 电流经过电容元件时，有 $I(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$
- 电阻 $R \equiv \frac{V}{I}$ 。AC 电流经过电容元件时，有 $V(t) = I(t)R$
- 电感 $L \equiv \frac{\Phi}{I}$ ，其中， $\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 为磁通量。AC 电流经过电感元件时，有 $V(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$ 。

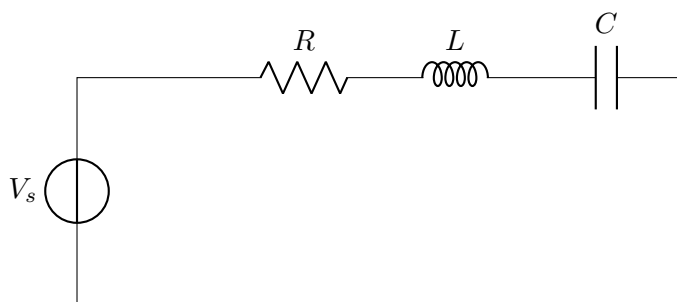
牛顿力学 从 RLC 串联电路开始，根据 Kirchhoff 电压定律，有

$$V = V_C + V_R + V_L = \frac{q}{C} + R\dot{q} + L\ddot{q} \quad (6.71)$$

其中，等式左边的 V 为外部电压激励源。将此式改写为熟悉的二阶常微分方程，有

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{V}{L} \quad (6.72)$$

当 $R = 0$ ，即电路没有损耗（短路）时，得到与简谐振子一样形式的电路方程，共振频率 $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ 。



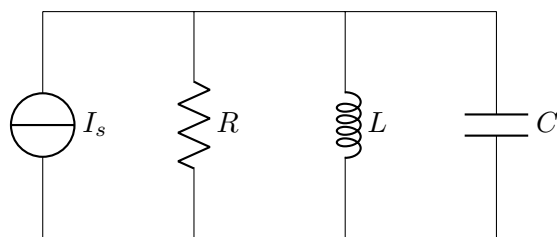
对 RLC 并联电路，根据 Kirchhoff 电流定律，有

$$I = I_C + I_R + I_L = C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + \frac{\Phi}{L} = C\ddot{\Phi} + \frac{\dot{\Phi}}{R} + \frac{\Phi}{L} \quad (6.73)$$

或写成

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{RC}\dot{\Phi} + \frac{1}{LC}\Phi = \frac{I}{C} \quad (6.74)$$

当 $R \rightarrow \infty$ ，即电路开路时，得到与简谐振子一样形式的电路方程，共振频率 $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ 。



以上演示了电路集总模型与简谐振子的对比，其实电磁场量也可以与简谐振子对比，可考虑以平面电磁波为例，时域的波方程有

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.75)$$

或在频域

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_c \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (6.76)$$

不难看出波方程也有简谐振子的形式。留意，这里的复介电系数 $\epsilon_c = \epsilon (1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon})$ 里的 i/ω 对应随时间的一次微分项。

下表给出这些对应物理量的关系⁸。

力学量	电路集总元件量	电磁场量
质量 m	电感 L	介电系数 ϵ_0
弹簧常数 k	电容倒数 $1/C$	磁导率 μ_0
位移 x	电荷 q , 磁通 $\Phi = \int^t V d\tau$	电场 E
速率 $v = dx/dt$	电流 $I = dq/dt$, 电压 $V = d\Phi/dt$	磁场 B
阻尼系数 γ	电阻 R	电导率 σ
动能 $\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$
位能 $\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	$\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$
力 $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m d\mathbf{v}/dt$	电压 $V = L dI/dt$	洛伦兹力 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

拉格朗日力学 回忆一下，系统的拉格朗日量 (Lagrangian) L 定义为

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \equiv \text{动能} - \text{位能} \quad (6.77)$$

对应的欧拉-拉格朗日运动方程有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (6.78)$$

简化起见，先忽略阻尼项与外部驱动项。对 RLC 电路，利用对比关系，“动能”项写为 $\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$ ，“位能”项写为 $\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ ，由此构造拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2 \quad (6.79)$$

代入欧拉-拉格朗日运动方程，有

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (6.80)$$

⁸这里的对应关系并不是完全严格且唯一的对应，只是在概念或数学形式上的类比。

得到不包含电阻导致耗散的阻尼项与不包含外部驱动电压源的运动方程。如果考虑阻尼项，该怎么推广？如果考虑外部驱动源，该怎么推广？留给读者自行探索。



笔记 思考一下，上面分析与串联或并联无关，为什么？在考虑外部驱动源之后，串联或并联就不太一样了。

对电磁场来说，也可以构造拉格朗日量，在空间中，单位体积称拉格朗日密度量 (Lagrangian density)

$$L(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2\mu_0} B^2(\mathbf{r}, t). \quad (6.81)$$

略去推导细节，当考虑外部驱动电荷源 ρ 或电流源 \mathbf{J} 时，可以写为

$$L(\mathbf{r}, t) = -\rho(\mathbf{r}, t)\phi(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2\mu_0} B^2(\mathbf{r}, t) \quad (6.82)$$

推导过程比起上面 RLC 电路稍微复杂，但如果依样画葫芦，将此 L 代入欧拉-拉格朗日运动方程，将分别得到无源与有源的电磁场基本方程，细节此处不论。

哈密顿力学 系统的哈密顿量 (Hamiltonian) H 定义为

$$H(q_i, p_i) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (6.83)$$

其中， $p(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ 为正则动量。对应的哈密顿运动方程

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (6.84)$$

同样，简化起见，忽略阻尼项与外部驱动项。对 RLC 电路，由上面的拉格朗日量知， $p = \partial L / \partial \dot{q} = L\dot{q}$ ，有哈密顿量

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \dot{q}p - L(q, \dot{q}) = L\dot{q}^2 - \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{q^2}{2C} \\ &= \frac{p^2}{2L} + \frac{q^2}{2C} \end{aligned} \quad (6.85)$$

对应的运动方程有

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{L} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{q}{C} \end{cases} \Rightarrow \ddot{q} = -\frac{q}{LC} \quad (6.86)$$

殊途同归，得到与上面一样的运动方程。如果考虑阻尼项或外部驱动源，上面推导需要适当推广，此处不论。

类似地，对电磁场，有单位体积哈密顿密度量 (Hamiltonian density)

$$H = \frac{1}{2}\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad (6.87)$$

眼尖的读者可能觉得这个形式很眼熟，为电磁场能量密度。此哈密顿量也可以不写成 \mathbf{E}, \mathbf{B} 而改写成 φ, \mathbf{A} 的形式。略去推导细节，不难预期，当考虑存在外部电荷时，可以写为 §6.5 介

绍的哈密顿量

$$H = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2(\boldsymbol{\pi} - q\mathbf{A})^2} + q\varphi \quad (6.88)$$

将此 H 代入哈密顿运动方程，不意外地，也将得到无源与有源的电磁场基本方程，细节此处不论。

有些读者可能觉得以上这些只是从牛顿力学到拉格朗日、哈密顿力学的变换把戏，这些内容可能对讲究“实用”的角度来看，没有立即的应用。但是，一旦这些电路模型能够纳入经典力学体系之后，那些经过严谨论证、已经发展了几个世纪的经典力学工具，就有机会派上用场，例如：更复杂的电路拓扑结构、对应电路物理量的相空间动力学、电路的非线性或混沌动力学等。或者，从电路理论得到的灵感是不是能反过头来激发人们对经典力学一贯分析的新思路？或许也值得期待。

注 以上的力学观点为经典力学。事实上，还可以将“简谐振子”这个模型推广到量子力学，于是有量子化的“简谐振子”模型。感兴趣的读者请自行参考专门介绍场论的教科书。

第六章 补充习题

1. 以一维系统 $\mathbf{X} = [x \ x']^T$ 为例, 给定系统哈密顿量 \mathcal{H} , 如: $\mathcal{H} = \frac{x'^2}{2} + \frac{K(s)x^2}{2}$ 。证明单粒子运动方程可写为

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{X}}$$

其中, \mathbf{S} 为 2×2 辛矩阵 (symplectic matrix)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

将上面方程写为 $\frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, 证明当 \mathbf{A} 与 s 无关时, 在近似条件下的解可以写成

$$\mathbf{X}(s_f) = \mathbf{M}(s_i \rightarrow s_f) \mathbf{X}(s_i)$$

其中, $\mathbf{M}(s_i \rightarrow s_f) = \mathbb{I} + (s_f - s_i)\mathbf{A}$ 。

2. (线性) 驱动谐振子模型可以如下二阶微分方程描述

$$\frac{d^2u}{dt^2} + p \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = A \cos \omega t$$

a) 试解此方程。

b) 当阻尼系数 $p = 0$ 时, 共振恰好发生在 $\omega = \omega_0$ 。试分析, 当 $p \neq 0$ 时, 共振频率发生在 $\omega < \omega_0$ 或 $\omega > \omega_0$?

c) 当驱动谐振子存在非线性项时, 如

$$\frac{d^2u}{dt^2} + p \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \gamma u^3 = A \cos \omega t$$

试说明以上 (b) 的结论未必总是成立。提示: 如果觉得解析分析太困难, 可考虑利用 *MATLAB* 或 *Mathematica* 求解。

3. 带驱动项的谐振子方程在加速器束流动力学中时常出现, 设初始条件有 $x_0 = x(0), x'_0 = x'(0)$, 试解以下方程

$$\ddot{x} + \omega_\beta^2 x = A \cos \omega_\beta t$$

解

$$\begin{aligned} x &= x_h + x_p \\ &= x(0) \cos \omega_\beta t + \frac{x'(0)}{\omega_\beta} \sin \omega_\beta t + C_1 t \cos \omega_\beta t + C_2 t \sin \omega_\beta t \end{aligned}$$

考虑如下类似但不全相同形式的驱动谐振子方程 ($\omega \neq \omega_\beta$)

$$\ddot{x} + \omega_\beta^2 x = A \cos \omega t$$

求其解。验证当 $\omega \neq \omega_\beta$ 但 $\omega \approx \omega_\beta$ 时, 会出现拍频 (beating) 现象。

4. 带驱动项的谐振子方程在加速器束流动力学中时常出现, 除了以上形式, 还有如下形式

$$\ddot{x} + \omega_{\beta 0}^2 x = Kx$$

证明这种驱动项将导致谐振子振荡频率偏移, 有 $\Delta\omega_\beta \approx -\frac{K}{2\omega_{\beta 0}}$ 。

5. 在加速器物理中，还有带随机驱动项的谐振子方程

$$\ddot{x} + \omega_{\beta 0}^2 x = \sum_i f_i \delta(t - t_i)$$

说明合理的分析应该涉及哪个(些)量，为什么？

6. 推导磁刚度 $B\rho$ 公式。利用磁刚度估算，对大强子对撞机 (Large Hadron Collider, LHC) 周长 27 km、7 TeV 质子对撞机的弯转磁铁，磁场强度大概需要多少？与实际磁场强度 8.3 T 相比较大或小？给出一个合理解释。
7. 半径为 25 m 的同步加速器在 1 秒内将质子从 50 MeV 动能加速到 1000 MeV 动能。假设弯转磁铁的磁场在质子动能为 1000 MeV 时将饱和。请问：
- 此同步加速器能够加速氘核 (deuteron) ($Z = 1, A = 2$) 到多大能量？
 - 质子和氘核在此同步加速器中的绕行频率分别为多少？

