

电磁辐射与加速器束流动力学导论

Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

一些有用的参考书籍与素材

既然作为“讲义”，不是百科全书也不是工具书，就不打算也无法“包山包海”¹。在这份讲义不够完整的地方，笔者推荐一些目前市面上较经典的几本教科书或讨论特定专题的参考书：

一 电磁理论

- John David Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd ed., John Wiley & Sons (1998)
- Julian Schwinger, Lester L. Deraad Jr., Kimball Milton, and Wu-Yang Tsai, Classical Electrodynamics, Perseus Books (1998)
- Charles A. Brau, Modern Problems in Classical Electrodynamics, Oxford University Press (2004)
- Andrew Zangwill, Modern Electrodynamics, Cambridge University Press (2013)
- Richard Feynman, Robert Leighton, and Mathew Sands, The Feynman Lectures on Physics, Volume II, Addison-Wesley Publishing Company (1964). https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_toc.html
- Gennady Stupakov and Gregory Penn, Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics, Springer (2018). 此书特别针对与粒子加速器相关的经典力学与电磁理论进行介绍。此书可能的勘误列表 http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1492.htm#article

二 加速器物理基础

- Mathew Sands, The Physics of Electron Storage Rings — An Introduction, SLAC-121 (1970). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacreports/reports02/slacr-121.pdf>
- Philip J. Bryant and Kjell Johnsen, The Principles of Circular Accelerators and Storage Rings, Cambridge University Press (1993)
- Alexander Wu Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020)
- Alexander Wu Chao, Special Topics in Accelerator Physics, World Scientific (2022)
- Simone Di Mitri, Fundamentals of Particle Accelerator Physics, Springer (2022)
- Shyh-Yuan Lee, Accelerator Physics, 4th ed., World Scientific (2019). <https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/50490>
- Helmut Wiedemann, Particle Accelerator Physics, 4th ed., Springer (2015). <https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/23641>
- Andrzej Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Press (2014)

¹此讲义附录 I 给出 CERN CAS 列举的一般课的课程大纲，此讲义内容大概涵盖 80% 以上内容，作为导论应该足够。

-
- Mario Conte and William M. MacKay, An Introduction to the Physics of Particle Accelerators, 2nd ed., World Scientific (2008)
 - Klaus Wille, The Physics of Particle Accelerators, Oxford University Press (2005)
 - Edmund Wilson, An Introduction to Particle Accelerators, Oxford University Press (2001).
<https://library.oopen.org/handle/20.500.12657/76447>
 - Donald Edwards and Michael Syphers, An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (2004)
 - James Rosenzweig, Fundamentals of Beam Physics, Oxford University Press (2003)
 - Martin Reiser, Theory and Design of Charged Particle Beams, Second, Updated and Expanded Edition, Wiley-VCH (2008)
 - Rob Appleby, Graeme Burt, James Clarke, and Hywel Owen, The Science and Technology of Particle Accelerators, CRC Press (2021). <https://library.oopen.org/handle/20.500.12657/53311>
 - Martin Berz, Kyoko Makino, and Weishi Wan, An Introduction to Beam Physics, CRC Press (2015). <https://library.oopen.org/handle/20.500.12657/50888>
 - Alex J. Dragt, Lie Methods for Nonlinear Dynamics with Applications to Accelerator Physics. <https://www.physics.umd.edu/dsat/dsatliemethods.html>
 - 金玉明, 电子储存环物理 (修订版), 中国科学技术大学出版社 (2001)
 - 刘乃泉, 加速器理论 (第 2 版), 清华大学出版社 (2004)
 - 陈佳洱 主编, 加速器物理基础, 北京大学出版社 (2012)

三 同步辐射理论、自由电子激光理论

- Albert Hofmann, The Physics of Synchrotron Radiation, Cambridge University Press (2004)
- Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers — Principles of Coherent X-Ray Generation, Cambridge University Press (2017). 此书有中文译本：黄森林、刘克新译, 同步辐射与自由电子激光 — 相干 X 射线产生原理, 北京大学出版社 (2018)
- Peter Schmuser, Martin Dohlus, Jorg Rossbach, and Christopher Behrens, Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime, 2nd ed., Springer (2014)
- Evgeny L. Saldin, Evgeny A. Schneidmiller, and Mikhail V. Yurkov, The Physics of Free Electron Lasers, Springer (1999)
- Toshiyuki Shiozawa, Classical Relativistic Electrodynamics — Theory of Light Emission and Application to Free Electron Lasers, Springer (2004)
- Henry Freund and Thomas Antonsen Jr., Principles of Free Electron Lasers, 3rd ed., Springer (2018)
- Charles A. Brau, Free-Electron Lasers, Academic Press, Inc. (1990)
- Thomas C. Marshall, Free-Electron Lasers, Macmillan Publishing Company (1985)

-
- 刘祖平, 同步辐射光源物理引论, 中国科学技术大学出版社 (2009)
 - 贾启卡, 自由电子激光物理导论, 科学出版社 (2022)
 - David Attwood and Anne Sakdinawat, X-rays and Extreme Ultraviolet Radiation: Principles and Applications, 2nd ed., Cambridge University Press (2016)

四 集体效应理论

- Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993). <https://www.slac.stanford.edu/~achao/wileybook.html>
- King-Yuen Ng, Physics of Intensity Dependent Beam Instabilities, World Scientific (2005)
- Bruno W. Zotter and Semyon A. Kheifets, Impedances and Wakes in High-Energy Particle Accelerators, World Scientific (1998)
- Shaukat Khan, Collective Phenomena in Synchrotron Radiation Sources: Prediction, Diagnostics, Countermeasures, Springer (2006)
- J.C. Bergstrom, Jack's Book — On Beam Instabilities and Other Things (2016)

五 束流量测与诊断

- Michiko G. Minty and Frank Zimmermann, Measurement and Control of Charged Particle Beams, Springer (2003). <https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/50057>
- Peter Strehl, Beam Instrumentation and Diagnostics, Springer (2006)
- Smaluk Victor, Particle Beam Diagnostics for Accelerators: Instruments and Methods, VDM Verlag Dr. Muller (2009)

六 工具书

- Alexander Wu Chao, Karl Hubert Mess, Maury Tigner, and Frank Zimmermann ed., Handbook of Accelerator Physics and Engineering, 3rd. ed., World Scientific (2023)
- Graham Woan, The Cambridge Handbook of Physics Formulas, Cambridge University Press (2000)

七 高等数学基础

- Jon Mathews and R.L. Walker, Mathematical Methods of Physics, Addison-Wesley (1970)
- George B. Arfken, Hans J. Weber, and Frank E. Harris, Mathematical Methods for Physicists, 7th ed., Elsevier (2013)
- Philip M. Morse and Herman Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1953)
- 郑志军、虞吉林编著, 应用数学 — 分析过程和摄动方法, 中国科学技术大学出版社 (2023)

此外，在几乎万能的网际网路世界也能找到许多关于粒子加速器的许多的素材，包含科普、教学、综述、科研类的文献。以下列举一些推荐网页：

- 科普：粒子加速器对人类社会在方方面面的应用 ⇒ <http://www.accelerators-for-society.org/> 里面有许多关于粒子加速器的科普介绍，包含科学、环境、能源、国防安全、工业、医学等面向。
- 教学：CERN Yellow Report ⇒ <https://cds.cern.ch/collection/CERN%20Yellow%20Reports?ln=en> 包含许多珍贵的、媲美教科书的加速器基础教程。
- 教学：美国粒子加速器学校 (U.S. Particle Accelerator School, USPAS) ⇒ <https://uspas.fnal.gov/> 里面有最新办学信息，还有许多过去加速器学校的上课讲义、材料等。此外，早期由美国物理联合会 (American Institute of Physics, AIP) 出版的会议记录文集中，有几卷包含了丰富、珍贵的加速器会议记录，其中许多是长篇教程、前沿综述等：
 - AIP Conference Proceedings No. 57: Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction (BNL, 1979). <https://pubs.aip.org/aip/acp/issue/57/1>
 - AIP Conference Proceedings No. 87: The Physics of High Energy Particle Accelerators (Fermilab, 1981). <https://pubs.aip.org/aip/acp/issue/87/1>
 - AIP Conference Proceedings No. 105: The Physics of High Energy Particle Accelerators (SLAC, 1982). <https://pubs.aip.org/aip/acp/issue/105/1>
 - AIP Conference Proceedings No. 127: The Physics of Particle Accelerators (BNL/-SUNY, 1983). <https://pubs.aip.org/aip/acp/issue/127/1>
 - AIP Conference Proceedings No. 153: The Physics of Particle Accelerators (Fermilab, 1984 & SLAC, 1985). <https://pubs.aip.org/aip/acp/issue/153/1>
 - AIP Conference Proceedings No. 184: The Physics of Particle Accelerators (Fermilab, 1987 & Ithaca, N.Y. 1988). <https://pubs.aip.org/aip/acp/issue/184/1>
 - AIP Conference Proceedings No. 249: The Physics of Particle Accelerators (Upton, N.Y. 1989). <https://pubs.aip.org/aip/acp/issue/249/1>
 - High Quality Beams — Joint US-CERN-JAPAN-RUSSIA Accelerator School, AIP Publishers, 2001. <https://pubs.aip.org/aip/acp/issue/592/1>

Springer 也出版了一些关于粒子束讲义：

- Lecture Notes in Physics No. 247: Nonlinear Dynamics Aspects of Particle Accelerators, Springer-Verlag Publishers, 1985. <https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0107342>
- Lecture Notes in Physics No. 296: Frontiers of Particle Beams, Springer-Verlag Publishers, 1986. <https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0031487>
- Lecture Notes in Physics No. 343: Frontiers of Particle Beams; Observation, Diagnosis and Correction, Springer-Verlag Publishers, 1988. <https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0018278>

-
- Lecture Notes in Physics No. 400: Frontiers of Particle Beams: Intensity Limitations, Springer-Verlag Publishers, 1990. <https://link.springer.com/book/10.1007/3-540-55250-2>
 - Lecture Notes in Physics No. 425: Frontiers of Particle Beams: Factories with $e^+ e^-$ Rings, Springer-Verlag Publishers, 1992. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-13972-1>

自由电子激光理论早期进展的一些文献 — PQE² — 也具有借鉴意义：

- Physics of Quantum Electronics, Vol. 5: Novel Sources of Coherent Radiation, Addison-Wesley, 1978.
 - Physics of Quantum Electronics, Vol. 7: Free-Electron Generators of Coherent Radiation, Addison-Wesley, 1979.
 - Physics of Quantum Electronics, Vol. 8: Free-Electron Generators of Coherent Radiation, Addison-Wesley, 1981.
 - Physics of Quantum Electronics, Vol. 9: Free-Electron Generators of Coherent Radiation, Addison-Wesley, 1981.
-
- 科研：物理评论 — 加速器与束物理 (Physical Review Accelerators and Beams, PRAB) ⇒ <https://journals.aps.org/prab/> 一个业内高度认可、标准的加速器物理与工程期刊。此外，在 1970 至 2000 年期间，“粒子加速器”(Particle Accelerator, PA) 期刊也享誉盛名，尽管现在不再出版，但当时的论文已全部归档，全文链接 ⇒ <https://cds.cern.ch/record/229735?ln=en>。
 - 科研：核仪器与方法 (Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, NIM) ⇒ <https://www.sciencedirect.com/journal/nuclear-instruments-and-methods-in-physics-research-section-a-accelerators-spectrometers-detectors-and-associated-equipment> 也是一个业内标准的加速器期刊，包含探测器与核技术应用等。
 - 科研：联合加速器会议网 (Joint Accelerator Conferences Website, JACoW) ⇒ <https://www.jacow.org/> 收录许多过去举办的国际加速器会议与会议论文，也有即将举办的会议信息。
 - 综述：2008 年至 2019 年间，由 World Scientific 出版的年刊“加速器科学与技术回顾”(Reviews of Accelerator Science and Technology, RAST) <https://www.worldscientific.com/worldscinet/rast> 按十个主题收录了加速器各领域目前最新进展，具有借鉴意义。
 1. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 1: Overview, World Scientific (2008) 总览
 2. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 2: Medical Applications of Accelerators, World Scientific

²<https://www.pqeconference.com/pqe-history>

(2009) 医疗应用

3. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., *Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 3: Accelerators as Photon Sources*, World Scientific (2010) 先进光源
4. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., *Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 4: Accelerator Applications in Industry and the Environment*, World Scientific (2011) 工业与环境应用
5. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., *Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 5: Applications of Superconducting Technology to Accelerators*, World Scientific (2012) 超导技术
6. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., *Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 6: Accelerators for High Intensity Beams*, World Scientific (2013) 强流加速器
7. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., *Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 7: Colliders*, World Scientific (2014) 对撞机
8. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., *Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 8: Accelerator Applications in Energy and Security*, World Scientific (2015) 能源与国家安全应用
9. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., *Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 9: Technology and Applications of Advanced Accelerator Concepts*, World Scientific (2016) 先进加速器技术与应用
10. Alexander Wu Chao and Weiren Chou ed., *Reviews of Accelerator Science and Technology — Vol. 10: The Future of Accelerators*, World Scientific (2019) 加速器的未来

目录

0 几个术语、惯例、基础知识与单位制转换	1
0.1 几个术语	3
0.2 惯例	9
0.2.1 $j = -i$	9
0.2.2 $2\pi, \sqrt{2\pi}$	9
0.2.3 $q, e, -e, e^{(\dots)}$	16
0.3 基础知识	18
0.4 单位、量纲、物理常数	24
0.5 单位制转换	26
0.6 数量级的前缀词	31
0.7 基础高等数学练习题	32
第零章 补充习题	33

第一部分 时变电磁场、电磁辐射理论	36
--------------------------	-----------

1 电磁场基础：复习	37
1.0 问答预览	37
1.1 基本方程	40
1.1.1 静电场基本方程	45
1.1.2 恒定电场基本方程	48
1.1.3 静磁场或恒定磁场基本方程	49
1.1.4 电磁场分界面边界条件	51
1.2 无源电磁场方程	54
1.3 趋肤效应	57
1.3.1 浅谈：超导体的电磁特性	61
1.4 位函数	64
1.5 电磁场能量守恒定律	70
1.6 求解电磁波方程：思路	76
1.7 求解电磁波方程：波动问题	77
1.8 求解电磁波方程：波形问题	79
1.9 电磁波定向传播的几个类型	83
1.10 波速	87
1.11 电磁波的偏振：极化 (polarization)	90
1.11.1 在 EUV/X 射线波段，物质折射率小于、但非常接近 1	95
1.12 波导	97

1.12.1 波导的激励	109
1.13 谐振腔	111
1.13.1 真实谐振腔形状	119
1.14 金属加速结构的梯度极限：击穿	123
1.15 谐振腔微扰理论：Slater 定理	126
1.16 四向量的洛伦兹变换	129
1.17 电、磁场的洛伦兹变换	132
1.18 相对论多普勒效应	133
1.19 康普頓散射	135
1.19.1 逆康普頓散射	136
1.19.2 激光与电子交互作用：定性介绍	136
1.19.3 激光波荡器	137
1.19.4 浅谈：电磁辐射场的散射截面	138
1.20 镜像法求解电磁场问题	140
1.20.1 镜像电荷法	140
1.20.2 镜像电流法	143
1.21 电磁超材料	146
1.21.1 如何构造超材料？	148
1.22 定向电磁波的高斯束模型	151
1.23 二维静场问题分析 — 复变函数应用	157
1.23.1 基本定义与定理	157
1.23.2 留数定理 \Rightarrow 安培环路定理、磁场高斯定律	160
1.23.3 保角映射	162
1.23.4 平行板电容器边缘场问题	168
1.23.5 浅谈：史密斯图	170
1.24 浅谈：为什么 Maxwell 电磁理论这么难？	173
第一章 补充习题	175
2 电磁辐射的基础理论	182
2.0 问答预览	182
2.1 推迟条件	184
2.2 Lienard-Wiechert 场	187
2.2.1 粒子匀速运动产生的场 $\dot{\beta} = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{E}(t) \parallel \mathbf{r}_b$	190
2.2.2 推导：Lienard-Wiechert 场	193
2.3 Jefimenko 公式与 Heaviside-Feynman 公式	197
2.4 浅谈：生活中的电磁辐射	199
2.4.1 天然辐射	199
2.4.2 人工辐射	199

2.4.3 生活中电磁辐射的量化与对人体的影响	200
第二章 补充习题	202
3 电磁辐射的定量理论：功率、能量、谱	203
3.0 问答预览	203
3.1 Lienard-Wiechert 场的频域表示	205
3.1.1 关于 Lienard-Wiechert 场的几点讨论	205
3.1.2 相对论粒子加速运动产生的场的一般结果	205
3.2 辐射功率、辐射能量、角分布	209
3.3 横向、纵向加速	214
3.3.1 横向加速	214
3.3.2 偶极辐射	217
3.3.3 纵向加速	221
3.3.4 浅谈：波瓣、定向性、天线增益	224
3.4 电子加速器的几种电磁辐射机制：定性介绍	226
3.4.1 契伦科夫辐射 (Cherenkov radiation)	226
3.4.2 渡越辐射 (transition radiation)	228
3.4.3 Smith-Purcell 辐射	229
第三章 补充习题	232
4 同步辐射	233
4.0 问答预览	234
4.1 同步辐射的定性讨论	236
4.1.1 同步辐射张角 $\theta \approx \frac{1}{\gamma}$	236
4.1.2 同步辐射特征频率 $\omega_c \approx \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$	236
4.1.3 同步辐射由横向水平极化主导 $P_\sigma : P_\pi \approx 7 : 1$	240
4.1.4 同步辐射是量子力学效应，不是经典力学效应	240
4.2 同步辐射的定量讨论	243
4.3 一些计算细节	245
4.4 一些辐射物理量的分布函数	251
4.4.1 同步辐射功率 频谱 角 分布	251
4.4.2 同步辐射功率 频谱 分布	254
4.4.3 同步辐射功率 角 分布	257
4.4.4 同步辐射 偏振 或 极化 分布	257
4.4.5 同步辐射 光量子 分布	259
4.4.6 讨论：中心极限定理	260
4.5 辐射形成长度 (formation length)	263
4.6 整理：同步辐射实用公式	267
第四章 补充习题	270

5 波荡器辐射	271
5.0 问答预览	271
5.1 四代光源大致进展	272
5.2 波荡器辐射的定性讨论	274
5.2.1 共振条件 $\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_u^2}{2} + \gamma^2 \theta^2\right)$	275
5.2.2 波荡器辐射像甩动的探照灯，谱宽 $\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \approx \frac{1}{N_u}$	279
5.2.3 平面型波荡器是线偏振主导	279
5.3 波荡器辐射的定量讨论	282
5.4 一些辐射物理量的分布函数	285
5.4.1 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率 频谱 角 分布	285
5.4.2 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率 角 分布	286
5.4.3 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率 频谱 分布	289
5.4.4 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率 光量子 分布	290
5.4.5 $K_u \geq 1$ 波荡器辐射分析的两个区别	292
5.4.6 $K_u \geq 1$ 波荡器辐射功率 频谱 角 分布	292
5.4.7 $K_u \geq 1$ 波荡器辐射功率 角 分布、形成长度	294
5.5 整理：波荡器辐射实用公式	297
第五章 补充习题	299
第二部分 单粒子动力学、自由电子激光导论	301
6 粒子加速器基础：综述与哈密顿力学基础	302
6.0 问答预览	302
6.1 经典力学理论：拉格朗日量、哈密顿量	304
6.2 相空间与 Liouville 定理	308
6.3 正则变换	313
6.3.1 作用量-角度变换	319
6.4 磁刚度 $B\rho$ 与 Frenet-Serret 坐标系	323
6.4.1 Frenet-Serret 坐标系向量运算	327
6.5 加速器哈密顿量	328
6.6 浅谈：电路理论的力学观点	331
第六章 补充习题	335
7 粒子加速器基础：束流光学 — 横向	337
7.0 问答预览	338
7.1 几种常见的磁铁部件	340
7.1.1 真空漂移段	340
7.1.2 二极铁	340
7.1.3 四极铁	341

7.1.4 六极铁	346
7.1.5 螺线管	352
7.1.6 磁铁的磁场强度极限：饱和、磁滞	357
7.2 Hill 方程	360
7.3 Courant-Snyder 参量、Twiss 参量	368
7.4 传输矩阵概念初探	377
7.4.1 浅谈：光学的 ABCD 传输矩阵	384
7.5 发射度：一个加速器中重要的物理量	388
7.6 几种常见的磁聚焦结构单元	397
7.7 非参考粒子的几种效应的分类	401
7.8 传输矩阵 — Case 1	403
7.9 闭轨畸变、共振 — Case 2	414
7.9.1 非线性动力学问题基本思想	424
7.10 色散、色品 — Case 3	427
7.11 一个用来衡量储存环横向磁聚焦结构设计的物理量：动力学孔径	442
7.11.1 动量孔径	446
第七章 补充习题	447
8 电子纵向动力学与同步辐射效应	453
8.0 问答预览	454
8.1 几个描述粒子纵向运动的物理量	456
8.1.1 讨论： z, s, ct 与束团头部尾部粒子符号惯例	467
8.2 同步加速器稳相原理与纵向动力学	469
8.2.1 高次谐波腔、双 RF 系统	488
8.3 同步辐射经典效应：辐射阻尼	493
8.3.1 纵向	494
8.3.2 横向： y	498
8.3.3 横向： x	500
8.3.4 讨论：阻尼是一种束团冷却效应	510
8.4 同步辐射量子效应	512
8.4.1 纵向	513
8.4.2 横向： x	516
8.4.3 横向： y	517
8.4.4 讨论：量子激发效应的另一种分析方式	523
8.5 波荡器、扭摆器辐射的效应	525
8.6 加速器中的粒子如何加速	527
8.6.1 直线加速器	527
8.6.2 环形同步加速器	531

8.6.3 能量回收型直线加速器	533
8.6.4 加速元件的简化传输矩阵表示	536
8.6.5 浅谈：从直线加速器到同步加速器的注入与引出	537
8.7 整理：常见磁铁部件的六维线性传输矩阵	540
8.7.1 浅谈：光学的 Kostenbauder 传输矩阵	545
8.8 储存环的纵向逐圈跟踪方程	548
8.9 一个电子储存环自然发射度的定标定律	550
8.10 电子同步辐射加速器进展	554
第八章 补充习题	561
9 多粒子电磁辐射	566
9.0 问答预览	566
9.1 线性叠加原理与形成因子	567
9.1.1 纵向	567
9.1.2 横向	568
9.1.3 相干辐射谱	570
9.2 同步辐射脉冲形成长度	574
9.2.1 纵向	574
9.2.2 横向	575
9.3 电子束与多粒子电磁辐射束的物理图像	576
10 自由电子激光理论	578
10.0 问答预览	578
10.1 激光原理	580
10.1.1 激光器的几个性能指标	585
10.2 自由电子辐射：不同波段可调谐辐射源	587
10.2.1 自由电子激光 vs. 相干波荡器辐射	603
10.2.2 辐射产生的另一种视角：能量、动量守恒	603
10.3 三种工作模式与几个重要输出指标	607
10.3.1 比较：传统激光 vs. 自由电子激光	613
10.3.2 浅谈：一维 FEL 基本方程组推导思路	614
10.4 低增益 FEL	616
10.4.1 浅谈：[JJ]	624
10.5 高增益 FEL：一维	627
10.5.1 浅谈：增益过程电子束与辐射场的相位差	633
10.6 回顾：三种工作模式	635
10.6.1 SASE	635
10.6.2 FEL 放大器	638
10.6.3 FEL 振荡器	638

10.7 高增益 FEL: 三维	642
10.7.1 衍射效应、增益引导效应	643
10.7.2 有限发射度、有限角散效应	646
10.7.3 电子横向 betatron 振荡效应	648
10.7.4 谢明公式	650
10.8 低增益 FEL: 三维与其它效应考虑	653
10.8.1 平衡或饱和过程	653
10.8.2 光学谐振腔稳定性条件	654
10.8.3 振荡器设计思路与定标定律	658
10.8.4 FEL 延滞: 一种滑移效应	661
10.8.5 饱和输出特性估算	662
10.9 高增益 FEL 谐波产生与全相干方案	663
第十章 补充习题	682
 第三部分 多粒子动力学与集体效应	 685
11 集体效应的场动力学: 尾场与阻抗	686
11.0 问答预览	687
11.1 定性介绍	689
11.1.1 平均场近似	689
11.1.2 微扰理论	690
11.1.3 追赶长度	693
11.1.4 “三无”定理	696
11.2 空间电荷场	697
11.2.1 束内散射效应与 Touschek 效应	704
11.2.2 浅谈: 结晶束	710
11.3 有限电导率圆柱金属真空管的电磁场计算	712
11.3.1 电阻壁阻抗尾场计算的实用公式	717
11.3.2 浅谈: 金属管壁的电导率、反常趋肤效应与表面阻抗	718
11.3.3 浅谈: 同步加速器的金属真空管样貌	726
11.4 圆柱谐振腔的电磁场计算	728
11.5 尾场	734
11.5.1 基本定义	734
11.5.2 特性	739
11.5.3 讨论: 尾场加速	742
11.6 阻抗	747
11.6.1 基本定义	747
11.6.2 同步条件	749

11.6.3 Panofsky-Wenzel 定理	750
11.6.4 特性	753
11.7 尾场与阻抗公式	759
11.7.1 一个近似、有用的集总化模型 — 等效 RLC 模型	759
11.7.2 类腔结构的阻抗估算	764
11.7.3 几何光学近似分析	776
11.7.4 尾场与阻抗模型公式	777
11.7.5 能量损耗因子	804
11.7.6 有效阻抗	808
11.8 关于宽带阻抗模型的更多讨论	811
11.9 关于尾场定义的更多讨论	815
第十一章 补充习题	817
12 集体效应的粒子动力学：宏粒子模型	821
12.0 问答预览	821
12.1 粒子加速器集体不稳定性年代表	823
12.2 束流负载基本定理	824
12.3 几种常见的束团不稳定性	826
12.3.1 束团崩溃不稳定性	826
12.3.2 罗宾逊不稳定性	829
12.3.3 强头尾不稳定性	842
12.3.4 头尾不稳定性	845
12.3.5 耦合束团不稳定性	851
12.4 浅谈：反馈模型	853
12.4.1 转移函数	853
12.4.2 等效阻尼率	856
12.5 浅谈：粒子运动方程的集体效应驱动项该用集总模型或分散模型？	859
第十二章 补充习题	862
13 集体效应的粒子动力学：Vlasov 方程	863
13.0 问答预览	863
13.1 无碰撞动理学方程	865
13.2 线性化 Vlasov 方程：零阶分析	874
13.3 线性化 Vlasov 方程：一阶分析	881
13.4 积分方程：思路一	882
13.4.1 单次经过加速器微束团不稳定性	885
13.5 色散方程：思路二	888
13.5.1 讨论：朗道积分	888
13.5.2 Keil-Schnell 条件	891

13.5.3 储存环微束团不稳定性	893
13.6 模式分解：思路三	896
13.6.1 微波不稳定性	899
13.7 三种思路的比较	902
13.8 几种常见的束团不稳定性：分类与半定量讨论	904
13.8.1 势阱畸变效应	905
13.8.2 微波不稳定性	906
13.8.3 基于相空间模式分解的讨论	907
13.8.4 头尾不稳定性	909
13.8.5 耦合束团不稳定性	912
13.8.6 电阻壁不稳定性	915
13.8.7 离子导致的集体不稳定性	917
13.8.8 自由电子激光不稳定性	919
13.9 讨论：复频率的实部与虚部	920
13.10 浅谈：横向不稳定性“四维”Vlasov 分析	922
第十三章 补充习题	924
 第四部分 三个专题与束测原理	 927
14 兆伏、超快电子束动力学	928
14.0 问答预览	928
14.1 泵浦-探测：一种研究物质结构的技巧	930
14.2 超快电子成像平台概述	933
14.2.1 浅谈：电子散射、晶体衍射	934
14.2.2 电子束亮度	943
14.2.3 兆伏超快电子衍射：总论	946
14.3 MeV UED 组成单元	947
14.3.1 MeV UED 束线	947
14.3.2 激光系统	949
14.3.3 射频系统：光阴极电子枪、加速腔	951
14.3.4 传输段	955
14.3.5 束测元件	959
14.3.6 样品室	966
14.3.7 衍射成像系统	967
14.4 MeV UED 总体设计参数	968
14.4.1 激光系统	968
14.4.2 束流动力学：初始主体物理参数与仿真结果	974
14.4.3 束流动力学：暗电流仿真与评估	976

14.4.4 射频光阴极电子枪附近的发射度增长因素与估算	980
14.5 射频光阴极高亮度电子动力学	984
14.5.1 单粒子动力学	984
14.5.2 雪茄型或松饼型	989
14.5.3 1.4-cell 或 1.6-cell	990
14.5.4 光阴极电荷上限	990
14.5.5 几个实用公式	991
14.6 空间电荷切片束矩阵	994
14.6.1 RF 腔传输矩阵	997
14.6.2 空间电荷传输矩阵 $\Rightarrow 7 \times 7$ 空间电荷传输矩阵	998
14.6.3 整体束团与切片束团的分与合	1000
14.7 空间电荷束包络方程	1003
14.8 Kapchinsky-Vladimirskey (KV) 分布	1006
14.9 空间电荷效应主宰的束动力学与几个定标定律	1012
第十四章 补充习题	1016
15 相干同步辐射	1017
15.0 问答预览	1018
15.1 定性描述	1020
15.1.1 “场”观点	1020
15.1.2 “粒子”观点	1020
15.2 一维模型	1024
15.2.1 Case A	1027
15.2.2 Case B	1030
15.2.3 Case C	1033
15.2.4 Case D	1035
15.2.5 一维稳态与暂态 CSR 尾场	1037
15.3 数值算例	1041
15.4 一维模型的几个结果	1043
15.4.1 讨论：辐射阻抗函数的一种计算方法	1052
15.4.2 讨论：非相干同步辐射的切片发射度与切片能散增加	1053
15.5 研究现状总论	1056
15.6 二维 CSR 模型研究动机与现况	1060
第十五章 补充习题	1066
16 高亮度电子微束团动力学	1067
16.0 问答预览	1067
16.1 高亮度电子束：双面刃	1068
16.2 单次经过加速器的微束团不稳定性理论	1069

16.2.1 比拟：一种“速调管”放大器	1069
16.2.2 积分方程	1071
16.2.3 四弯铁磁压缩结构的微束团不稳定性	1078
16.2.4 研究现状总论	1086
16.2.5 浅谈：不同信号类型的频域描述	1092
16.3 储存环微束团不稳定性理论	1095
16.3.1 两种观点	1095
16.3.2 色散方程	1097
16.3.3 特征方程	1100
16.3.4 数值求解 Vlasov-Fokker-Planck 方程	1101
16.3.5 研究现状总论	1102
16.4 稳态微聚束：一种崭新的电子储存环高平均功率、相干辐射源	1104
16.4.1 总论	1104
16.4.2 两类可能的方案与工作原理	1107
16.4.3 激光-电子束交互作用	1109
16.4.4 研究现状总论	1112
16.4.5 浅谈：面向极紫外光刻应用的相干光源	1112
第十六章 补充习题	1117
17 加速器束测基础原理	1118
17.0 问答预览	1118
17.1 束团时频信号	1120
17.1.1 时域：库仑场、辐射场	1120
17.1.2 频域：束流频谱	1120
17.2 零阶矩：电流、电荷	1129
17.2.1 电流	1129
17.2.2 电荷	1130
17.3 一阶矩：位置、到达时间	1132
17.3.1 位置	1132
17.3.2 到达时间	1134
17.3.3 能量	1135
17.4 二阶矩：发射度、能散、束长	1137
17.4.1 横向尺寸：束流截面测量	1137
17.4.2 发射度	1140
17.4.3 束长	1145
17.4.4 能散	1148
17.5 其它物理量	1149
17.5.1 横向 betatron 振荡频率	1149

17.5.2 纵向同步振荡频率	1149
17.5.3 动量紧缩因子	1150
17.5.4 束流损失	1150
17.5.5 Courant-Snyder 函数	1150
17.5.6 色散函数	1151
17.5.7 色品函数	1151
17.5.8 动力学孔径	1152
17.5.9 阻抗函数	1153
17.5.10 电子束纵向分布	1156
17.6 加速器反馈系统	1157

第五部分 附录 1160

A 杨振宁先生对加速器领域的看法	1161
B 数学基础	1163
B.1 三种正交坐标系的向量微积分与坐标变换	1163
B.2 常用向量恒等式、微分运算	1168
B.3 偏微分、全微分、对流导数、莱布尼兹法则、费曼积分技巧	1175
B.4 δ 函数、留数定理、常用积分公式、三角函数恒等式、双曲函数恒等式 .	1177
B.4.1 δ 函数	1177
B.4.2 留数定理	1180
B.4.3 一些与三角函数相关的特殊积分	1183
B.4.4 一些常用积分公式	1184
B.4.5 三角函数、双曲函数恒等式	1189
B.5 其它恒等式、特殊函数、近似展开公式、级数求和公式	1191
B.6 几种常见分布函数的定义	1212
B.7 矩阵的一些实用特性	1214
B.7.1 矩阵相关性	1215
B.7.2 矩阵特征分解	1216
B.7.3 高维矩阵的基本介绍	1218
B.8 归一化完备基底函数展开特性	1222
B.9 一元代数方程的一般解公式	1226
B.10 时间平均定理	1227
B.11 矩阵指数	1228
B.12 二阶偏微分方程的分类与解法	1230

C 目前正在设计、建设或运行的电子加速器参数	1234
C.1 直线加速器	1234
C.2 常温、光阴极、射频电子枪的典型参数	1235
C.3 自由电子激光	1236
C.4 同步辐射储存环	1237
C.5 能量循环/回收直线加速器	1243
C.6 对撞机	1244
D 电磁频谱	1247
E Livingston 图	1248
F 粒子加速器对人类社会在方方面面的应用	1249
G 符号表	1253
H 部分教科书使用惯例比较	1259
I CERN 加速器学校课程大纲	1261
J 加速器学家小传	1277
J.1 Helmut Wiedemann — 温文儒雅、受崇敬的加速器专家	1277
J.2 Shyh-Yuan Lee — 加速器人才树木园	1279
J.3 Klaus Halbach — 世界级加速器磁铁专家	1280
J.4 Rodolfo Bonifacio — 经典与量子自由电子激光先驱	1281
J.5 Kaoru Yokoya — 直线加速的成功道路	1283
J.6 Kwang-Je Kim — 细推物理须行乐，何用浮名绊此生	1285
J.7 John Madey — 第一位实现自由电子激光器的科学家	1286
J.8 Claudio Pellegrini — 高增益自由电子激光不稳定性	1287
J.9 Albert Josef Hofmann — 同步辐射理论大师	1288
J.10 John Paul Blewett — 几乎为首位见证同步辐射的人之一	1289
J.11 Alexander Wu Chao — 加速器百科全书	1291
J.12 Kenneth Robinson — 谦逊孤独，卓越天才	1292
J.13 Yaroslav Derbenev — 西伯利亚蛇	1294
J.14 Ernest Orlando Lawrence — 回旋加速器的发明者	1295
J.15 Ernest David Courant — 虎父无犬子、横向强聚焦发明者	1296
J.16 Hartland Sweet Snyder — 横向强聚焦发明者、黑洞共同发现者	1297
J.17 Milton Stanley Livingston — 横向强聚焦发明者、Livingston 图	1298
J.18 Edwin McMillan — 纵向稳相原理提出者	1299
J.19 Wolfgang Panofsky — SLAC 首任主任	1300
J.20 Robert Wilson — 费米实验室首任主任	1301

J.21 Gersh Budker — “相对论”的工程师	1302
J.22 Bruno Touschek — 世界上第一台对撞机 AdA 建造者	1303
J.23 Matthew Sands — 费曼物理学讲义、SLAC-121	1305
J.24 Simon van der Meer — 随机冷却机制的发明者	1306
J.25 Nikolay Vinokurov — “OK”	1307
J.26 Lawrence Jackson Laslett — 低调卓越、洞见非凡	1308
J.27 Franklin James Sacherer — 攀岩与物理的双绝英才	1309
J.28 Michael David Borland — ELEGANT	1310
J.29 Robert Siemann — PRST-AB	1311
J.30 方守贤 — 中国高能加速器事业的开拓者和奠基人	1312

第零章 几个术语、惯例、基础知识与单位制转换

正式开始前，先介绍几个术语、惯例、基础知识与单位制转换。

以前大二学过电磁场与洛伦兹力方程 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 知道，磁场使带电粒子转弯（但不做功），电场使带电粒子加速或减速。在粒子加速器中，引导带电粒子转弯的磁场一般为随时间恒定的磁场（又称静磁场），这是指相对于实验室静止坐标而言的静磁场；使带电粒子加速或减速的电场可以是静电场也可以是时变电场。如果一加速器利用静电场加速或减速带电粒子，那称这种加速器为静电加速器。目前来说，更多的加速器种类采用时变电场加速粒子，加速效率更好，也能将粒子加速到更高能量¹。随后在 §0.3 将总结几种常见粒子加速器的类型。

对讲义标题的几个关键字先勾勒一个模糊的物理图像也许会有帮助。标题中，“加速器”全名为带电粒子加速器，一般特指通过人为方式产生高能量带电粒子束的装置^{2,3}，已经对医学、工业、国防、科技方面具有广泛且重要的应用。从工程角度看，加速器的基本构成可用图 1 体现，其中，“粒子源”、“真空加速室”、“导引聚焦系统”、“运输系统”为主体系统，其余真空设备、束流诊断、供电、控制、靶室（如：实验站）等为辅助系统。主体系统与辅助系统同样重要，相辅相成。

由此讲义标题中的加速器束流动力学知，后面的讨论将聚焦于“真空加速室”（如：利用电场加速带电粒子的射频谐振腔）、“导引聚焦系统”（如：使带电粒子弯转、聚焦的磁铁）、“运输系统”等，即带电粒子在加速器部件中的动力学。此外，这份讲义讨论的对象主

¹初学加速器物理或是眼尖的读者或许对这个描述觉得不自然，认为应该是将粒子加速到更高 速度，而不是将粒子加速到更高 能量。其实，对高能电子加速器，电子速率通常非常接近光速，以 $v = 0.9999c$ 与 $v = 0.999999c$ 区别两种不同速度的粒子没有以 36.1 MeV 与 361 MeV 区别两种不同能量来得方便。粒子能量高了十倍，但是速率则差不多都是光速。这里的 eV 表示电子伏特，为能量单位， $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ 。

²虽然不是此讲义讨论的对象，分析方式也不一样，但是值得一提的是：宇宙 (universe) 本身也可视为一种粒子加速器，加速宇宙中的带电粒子，称宇宙加速器 (cosmic accelerators)。宇宙加速器中的粒子可能受许多星体的磁场而转弯。因此，要寻根找到产生粒子的源并不容易。但是，如果对高能宇宙粒子，由于受到的弯转程度较小，有机会追溯其根源。目前来说，已知 $\text{GeV} = 10^9 \text{ eV}$ 能量级的粒子大概源于太阳； $\text{TeV} = 10^{12} \text{ eV}$ 至 $\text{PeV} = 10^{15} \text{ eV}$ 能量级的粒子大概源于银河系 (Milky Way)，加速机制可能是脉冲星 (pulsars) 或超新星 (supernovae) 的冲击波。更高能量的宇宙粒子，如 10 PeV 至百 EeV 能量级， $\text{EeV} = 10^{18} \text{ eV}$ ，目前被认为源于银河系外的星体。

³如果查英语字典，如：Merriam-Webster，对“accelerator”一字的定义有：

- a muscle or nerve that speeds the performance of an action
- a device (such as a gas pedal) for increasing the speed of a motor vehicle engine
- a substance that speeds a chemical reaction
- an apparatus for imparting high velocities to charged particles (such as electrons)
- an item of computer hardware that increases the speed at which a program or function operates, e.g., graphics accelerator

将发现，第四个定义虽接近、但仍不是目前最地道的“粒子加速器”的定义，因其定义仍局限在“速度”，而不是“能量”。由狭义相对论知，粒子加速到相对论速度时，可视为粒子的有效质量增加。于是，1948 年斯坦福大学 E.L. Ginzton 等人曾试着将粒子加速器命名为 ponderator(重量器) 或 mass aggrandiser(质量增加器)。但这些词似乎不如“accelerator”受到人们青睐，因此并没有流传太久。目前几乎所有文献在描述粒子加速器时仍采用“accelerator”一字。感兴趣的读者可参考 E.L. Ginzton, W.W. Hansen, and W.R. Kennedy, A Linear Electron Accelerator, Rev. Sci. Instrum. **19**, 89-108 (1948). <https://doi.org/10.1063/1.1741225>。

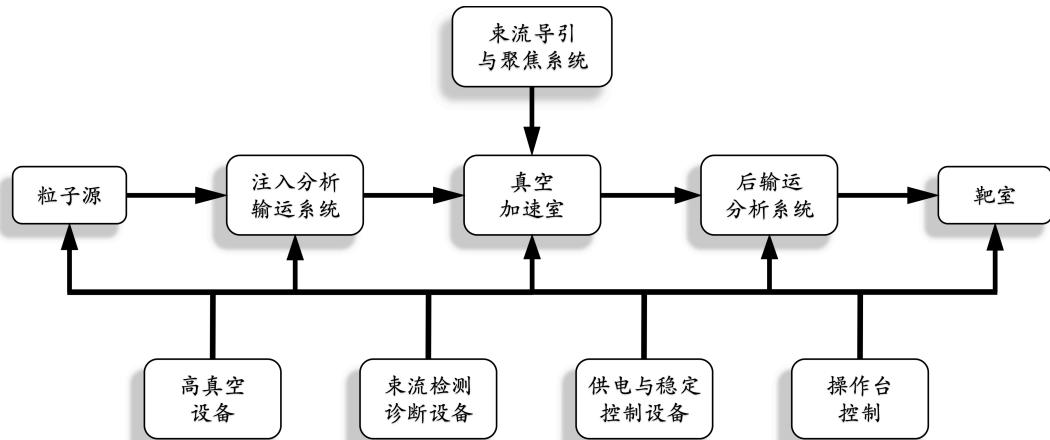


图 1: 加速器工程的基本构成元素。图例修改自陈佳洱 主编的加速器物理基础一书。

要是“电子”，是目前加速器领域中主要的粒子源种类之一。对电气专业的读者，虽然可能实际进行的课题未必都属于主体系统的课题，但是，如果能对主体系统里的工作原理具备基本的认识，对正在或即将进行的课题相信能有所帮助。

讲义标题中的另一个专有名词 — 电磁辐射 — 则是带电粒子在经历“加速”(或减速，减速也是一种加速度) 过程中的必然结果。这里的必然指的是带电粒子的运动在满足麦克斯韦 (Maxwell) 方程组的前提下，就要产生电磁辐射。如果不产生电磁辐射，那么要么是用了简化、近似版本的麦克斯韦方程组，要么是视而不见、蒙着眼睛当作粒子不辐射或者辐射的影响几乎可以忽略。电磁辐射是时变电磁场的一种，包含电生磁、磁生电的过程。

定义. 加速器学科

为结合应用物理、电气、机械等工程的跨学科、交叉学科领域，包含设计、建造、运行粒子加速器。这个学科从研究相对论性带电粒子在电磁场中的运动行为，观察、诊断，进而操控 (manipulate) 这些带电粒子使其在加速器中的行为达到预期的设计指标。加速器学科涉及的领域包含：

- 电磁场、微波工程：电源、磁铁、电磁辐射、高频微波源、波导、谐振腔、辐射防护等。
- 光学：哈密顿力学、电子光学、激光光学等。
- 等离子体物理：束流-电磁场的相互作用、集体动力学等。
- 计算机：控制理论、控制工程、数据获取与处理、多目标优化等。
- 机械：结构物质的机械 (如膨胀、褶皱、振动)、真空、热、流体特性等。
- 其它：基本粒子、材料科学、纳米技术、固体物理等。

加速器发展历程 ≈ 科技进步历程

0.1 几个术语

为了描述带电粒子的运动，需要几个最基本的物理量。这里的带电粒子又称“自由粒子”，是已经游离了，且不受原子核束缚的带电粒子，也不像金属里的自由电子受临近金属原子或离子碰撞影响。下面介绍的内容为特殊相对论或狭义相对论 (special theory of relativity) 中非常基础的内容，假设读者在大学物理学过，这些内容是粒子加速器领域常用的语言。

定义 0.1. 狹义相对论的两大假设

狹义相对论的两大假设：在惯性系 (inertial frame)^a 中，有

1. 相对性原理：物理规律在所有惯性系中，形式不变。或者说，物理规律不限于仅在某一特殊的惯性坐标系中存在。
2. 光速恒定不变：在所有自由空间惯性系中，光速都是 c ，各向同性，没有偏好的方向，且与源的运动状态无关。

^a满足牛顿第一运动定律的坐标系，称惯性系 (inertial frame)。 □

首先，如果没有特别声明，假设讨论的粒子运动都处于惯性系。敏锐的读者会问：书名为“加速器”，但却在惯性系讨论，这样讨论是否违反自治性？严格来说，粒子经历加速过程，如果坚持将参考坐标系定在被加速的粒子上，在实验室静止坐标看，确实处于非惯性系 (non-inertial frame)，因此，严格自治的分析应在非惯性系下构建的理论进行。但是，那样将涉及一般相对论或广义相对论 (general theory of relativity) 理论，并且 Maxwell 电磁场理论也要修正 ⇒ 太复杂、太困难了。如果不是要求绝对自治 — 而只要分析的准确程度满足我们需要 — 那么粒子加速过程可不妨视为由一段段局域惯性运动组成。如此一来，狹义相对论与 Maxwell 电磁理论这些前人搭建起来的理论体系就可以发挥作用，我们也可以在此基础上“大展身手”。

[退一步，海阔天空]。

现在，先从描述单个粒子的运动学 (kinematics) 开始，自由粒子总能量 E 为静止能量 $E_0 = m_0 c^2$ 与动能 T 之和，即

$$E = E_0 + T = m_0 c^2 + T \equiv \gamma m_0 c^2 \quad (1)$$

这里的 m_0 为粒子静止质量。不同种类的粒子有不同的静止质量，比如，电子的静止质量写成 $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、质子的静止质量写成 $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 1833 m_e$ 。如果没有特别声明，此讲义假设粒子为电子，即 $m_0 = m_e$ 。上式中，粒子总能量又与洛伦兹因子 γ 关联，有

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{m_e c^2} \approx \frac{E [\text{MeV}]}{0.511} \quad (2)$$

其中，电子等效的静止能量约为 $m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV}$ 。 v 为粒子速率， c 为光速，归一化速

度/速率 β 定义为

$$\beta = |\boldsymbol{\beta}| = \left| \frac{\mathbf{v}}{c} \right| = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad (3)$$

可以想像，当 $v \rightarrow c$ 时，一般 $\gamma \gg 1$ ，由此，上式中的根号可以根据泰勒展开 $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ 进一步化简。

定义 0.2. 相对论因子、洛伦兹因子 (Lorentz relativistic factor) β, γ

总能量 E 的粒子，相对论因子 $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$ ，其中， m_0 为粒子的静止质量， c 为光速。对电子而言， $m_0 c^2 = m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV}$ 称电子的静止能量 (rest-mass energy)。

归一化速率因子 $\beta = v/c$ ，其中， $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 。

注 当 $\gamma \gg 1$ 时，有

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

注 这里的粒子总能量 E 不要与电场函数 E 搞混。一般从前后文讨论应该不难区分。



笔记 讨论相对论电子的电磁辐射时，电子速度非常接近光速，如：对 GeV 能量的电子，有 $\frac{c-v}{c} = 1 - \beta \approx 10^{-7}$ 。但是，如果第一步就取 $\beta = 1$ ，那么很多相对论效应引起的电磁现象就看不到了。事实上，许多辐射效应正是由于 $1 - \beta \approx \frac{1}{2\gamma^2}$ 这个小量引起的。所以，必须小心处理与 $\beta \rightarrow 1$ 相关的近似，特别是在电磁辐射场的相位项。

太早做近似，可能不小心丢了想看的物理效应；太晚做近似，问题容易变得太复杂。

除了能量外，自由粒子 (机械) 动量 (mechanical momentum) \mathbf{p} 定义为

$$\mathbf{p} \equiv \gamma m_0 \mathbf{v} = \gamma m_0 c \boldsymbol{\beta} \quad (4)$$

正则动量 (canonical momentum) $\boldsymbol{\pi}$ 定义为

$$\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{p} + q\mathbf{A} = \gamma m_0 c \boldsymbol{\beta} + q\mathbf{A} \quad (5)$$

其中， \mathbf{A} 为向量位函数 (vector potential)⁴。对电子而言， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。在磁场环境中，一般 $\mathbf{p} \neq \boldsymbol{\pi}$ 。

洛伦兹力方程 (Lorentz force equation) 为

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_0 \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \stackrel{!}{=} q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

其中， $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 为粒子的在 t 时刻的位置坐标。

上面这个式子的 $\mathbf{r}(t)$ 好不好解？ \Rightarrow 难度因分析的问题而异。如果场是给定的且均匀的，即 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(t)$ 已知，那么可以相对容易地解出 $\mathbf{r}(t)$ 。但是，一般

⁴又称磁场矢势或向量磁位。位函数包含标量位函数 φ 与向量位函数 \mathbf{A} 。假设读者已经在大二电磁学见过这些函数；此讲义 §1.4 将简短介绍。

电磁场为空间分布函数，因此，要得到自治解不容易。更不用说当粒子经历加速过程额外产生电磁辐射场时， $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 还需要相应地更新其值，那么求解 $\mathbf{r}(t)$ 就是个挑战。

一般来说，粒子加速器加速的不是一个粒子，而是粒子群，称束团 (beam) 或束流 (bunch)。如果一加速器只能加速一个粒子，那么这个加速器也太昂贵了。原则上，假如能得到束团中每个粒子的位置坐标随时间的关系 $\mathbf{r}_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ 时，我们对该束团的信息就完全掌握了。先从一个粒子的分析开始，暂时略去下标 i ，由于洛伦兹力方程为 $\mathbf{r}(t)$ 二阶微分方程，总是可以等价地写成两个一阶微分方程组的形式。即， $d^2\mathbf{r}(t)/dt^2$ 方程可以写成 $d\mathbf{r}(t)/dt$ 方程与 $d\mathbf{r}'(t)/dt$ 方程。再来，向量 \mathbf{r} 包含三个方向，因此，可以预期，在一阶微分方程形式下，要完整描述每个粒子在三维空间的运动，需要六个坐标变量：

$$x(t), x'(t), y(t), y'(t), z(t), z'(t)$$

这里做两点说明：

- 在加速器束流动力学中，为了方便描述粒子坐标，更常用的是

$$x(s), x'(s), y(s), y'(s), z(s), \delta(s)$$

这六个坐标又称相空间 (phase space) 坐标，用来描述粒子的“状态 (state)⁵”，写成

$$\mathbf{X}(s) = (x, x', y, y', z, \delta)^T = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中， $x' = dx/ds, y' = dy/ds, \delta = \Delta E/E_0$ ， E_0 为参考粒子能量。

- 上面的时间坐标不写成 t 而是写成 s ，且 $(x, x', y, y', z, \delta)$ 是在随参考粒子移动的直角坐标系下的定义，更准确地说，是 Frenet-Serret 坐标。这里先知道有这么一回事就行，第 6 章会说明每个坐标如何定义。

多数时候，分析粒子动力学是在实验室静止坐标系 (lab frame) 下进行的；少数时候，在与粒子同步前进的移动坐标系 (beam rest frame) 又称随移坐标系 (co-moving frame) 下分析可能更方便。高能加速器中的粒子运动速度接近光速，实验室静止坐标系与粒子的移动坐标系间需服从洛伦兹变换 (Lorentz transformation)，参考图 2，有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & c\beta\gamma \\ 0 & 0 & \frac{\beta\gamma}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \quad (8)$$

⁵意义非常类似在自动控制理论里学过的状态变量。

其中，假设沿 $+z$ 方向、以速率 v “移动”的坐标系以 ' \prime ' 标注。

注 不要将移动坐标系的 ' \prime ' 与上面相空间坐标的 ' \prime ' 符号混淆。一般从前后文讨论应该不难区分。

以上结果可以反着写，即 $\beta \rightarrow -\beta$ ，有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -c\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\frac{\beta\gamma}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (9)$$

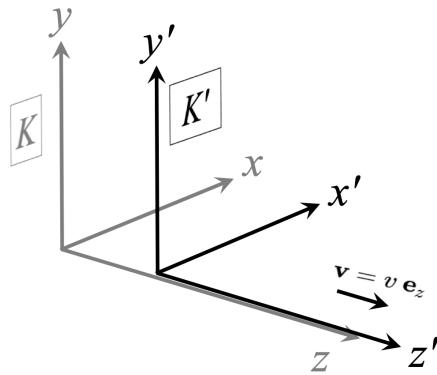


图 2: 洛伦兹变换。

由以上结果，可以推知两个事实：静止观察者将看到移动物体呈现“时慢、尺缩”。总结如下：

定理 0.1. 时慢 (time dilation)、尺缩 (length contraction)

静止观察者将看到以 $v < c$ 高速运动的物体时，对移动物体的观察将呈现“时慢、尺缩”效应。假设一个相对静止的对象 (object) 长度为 L_0 ，称固有长度或原长度 (proper length)，则现在该对象以平行于延伸长度的方向、以 $v < c$ 高速运动时，静止的观察者看到的移动对象长度不再是 L_0 ，而是缩短后的长度

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (10)$$

如果对象的“延伸长度方向”与相对观察者“运动方向”垂直，则无尺缩效应。

证明 假设待测对象在静止坐标系中的长度为 L_0 ，沿着运动方向两端位置写为 z'_1, z'_2 ，两端时刻写为 t'_1, t'_2 ， $L_0 = z'_1 - z'_2$ 。测量长度时，“要求”在 同一时刻 量测（想想是否合理）。现在，观察者相对对象有一沿着 z 方向的运动，则 z'_1, z'_2, t'_1, t'_2 与

观察者坐标 z_1, z_2, t_1, t_2 服从洛伦兹变换

$$\begin{aligned} z'_1 &= \gamma z_1 - \beta c \gamma t_1 \\ z'_2 &= \gamma z_2 - \beta c \gamma t_2 \\ t'_1 &= -\frac{\beta \gamma}{c} z_1 + \gamma t_1 \\ t'_2 &= -\frac{\beta \gamma}{c} z_2 + \gamma t_2 \end{aligned} \quad (11)$$

将前两式相减，按观察者对长度测量的要求，令 $t_1 = t_2$ ，有

$$L_0 = \gamma(z_1 - z_2) - \beta c \gamma(t_1 - t_2) \stackrel{!}{=} \gamma(z_1 - z_2) = \gamma L \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (12)$$

得证。

类似地，假设一个相对静止的坐标系中，事件发生时间差为 T_0 ，称固有时长或原时间 (proper time)，则现在发生事件的坐标系以 $v < c$ 高速运动时，静止的观察者看到的事件发生长度不再是 T_0 ，而是变长后的时间差

$$T = T_0 \gamma = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13)$$

证明 假设待测事件在静止坐标系中的时长为 T_0 ，沿着运动方向两端位置写为 z'_1, z'_2 ，两端时刻写为 t'_1, t'_2 ， $T_0 = t'_1 - t'_2$ 。测量事件时长时，“要求”在 同一位置量测 (想想是否合理)。现在，观察者沿着 z 方向的运动，则 z'_1, z'_2, t'_1, t'_2 与观察者坐标 z_1, z_2, t_1, t_2 服从洛伦兹变换

$$\begin{aligned} z_1 &= \gamma z'_1 + \beta c \gamma t'_1 \\ z_2 &= \gamma z'_2 + \beta c \gamma t'_2 \\ t_1 &= \frac{\beta \gamma}{c} z'_1 + \gamma t'_1 \\ t_2 &= \frac{\beta \gamma}{c} z'_2 + \gamma t'_2 \end{aligned} \quad (14)$$

将后两式相减，按观察者对事件时长测量的要求，令 $z_1 = z_2$ ，有

$$T = \frac{\beta \gamma}{c} (z'_1 - z'_2) + \gamma T_0 = \gamma T_0 \quad (15)$$

□

初学加速器物理的读者可能好奇：什么程度的粒子算是相对论粒子？多高能的粒子算相对论粒子？虽然没有明确定义，但当粒子的动能开始超过其静止能量时，可以开始认为粒子为相对论粒子。

✍ **练习 0.1** 证明对电子而言，此时有 $v \approx 0.87c$ 。 ■

✍ **练习 0.2** 假设一电子直线加速器总长为 3 km，加速后最终能量为 60 GeV。假设加速过程能量改变为线性，平均加速梯度为 20 MV/m，初始速度为 $c/2$ 。站在电子移动坐标，加

速器长度由于相对论效应长度收缩，估算在电子移动坐标看到的长度大概多长？ ■

解 30 cm。 ■

✎ **练习 0.3** 以上仅给出相对论运动学的重要结果。对这些结果存疑，或不明白但想弄清楚这些结果如何得到的读者，可查找大学物理，试着自行推导上面结果。 ■

解 提示：利用狭义相对论的两大假设。 ■

大学物理学过，电子静止质量为 $m_e \approx 9.1 \times 10^{-31}$ kg，质子静止质量为 $m_p \approx 1833m_e \approx 1.67 \times 10^{-27}$ kg。它们对应的静止能量为：电子静止能量 $E_0 = m_e c^2 \approx 0.511$ MeV，质子静止能量为 $E_0 = m_p c^2 \approx 938.27$ MeV。可以看到，质子非常重，较难达到相对论速度。图 3 给出在不同能量下，电子与质子的归一化速率 $\beta = v/c$ ，验证此直观图像。

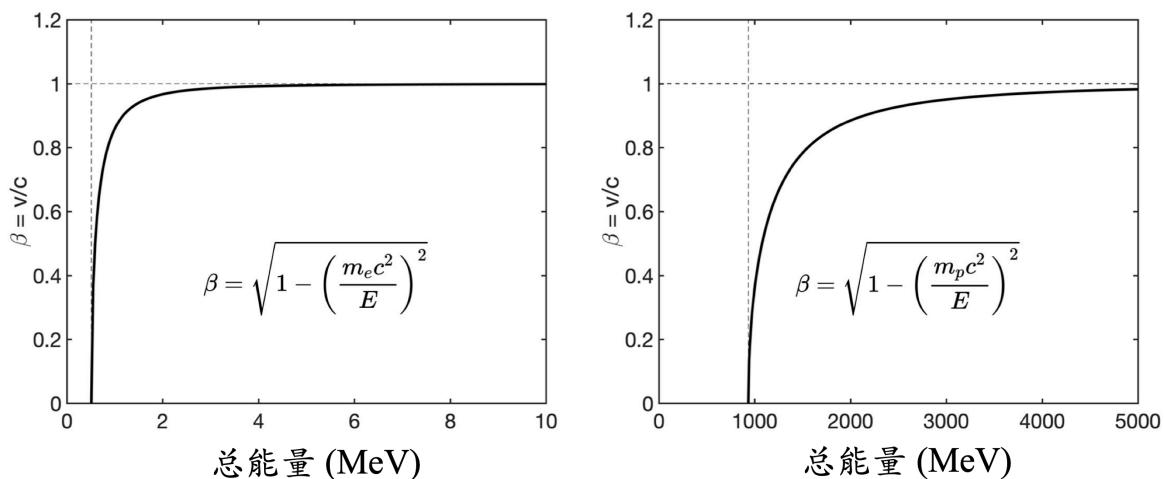


图 3：(左) 电子与(右) 质子的归一化速率与粒子总能量的关系。

结束这一节前，还希望给初学加速器物理的读者留下一个印象：

电子很轻，容易辐射，是产生高频电磁辐射的良好粒子源。

电子辐射将在第2章至第5章详细介绍。

0.2 惯例

0.2.1 $j = -i$

多数情况下，时变电磁场随时间、空间振荡具有周期性，分析时常使用平面波或时间或空间谐波 (harmonics) 展开形式。对时间维度展开，此讲义采用 $e^{-i\omega t}$ ($t > 0$) 惯例。对空间维度展开，如当波往 $z > 0$ 传播时，采用 e^{ikz} ($z > 0$)。

大二电磁学课堂使用的惯例采用 $e^{j\omega t}$ ($t > 0$)、 $e^{-\Gamma z}$ ($z > 0$)。比较两种惯例，知

$$k = i\Gamma = i(\alpha + j\beta) = i(\alpha - i\beta) = \beta + i\alpha \quad (16)$$

0.2.2 $2\pi, \sqrt{2\pi}$

不同惯例时常出现在傅里叶变换与拉普拉斯变换。傅里叶变换 (Fourier transform) 是一种从时域到频域的变换，此讲义采用如下定义：

定义 0.3. 傅里叶变换

参考图 4，时间上的傅里叶变换定义为

$$\tilde{f}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(z, t) e^{i\omega t} \quad (17)$$

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad (18)$$

上面第一式称顺向傅里叶变换 (forward Fourier transform)，第二式称逆傅里叶变换 (inverse Fourier transform)。如果 $f(z, t)$ 为实函数，则以上还可改写成

$$\tilde{f}^*(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(z, t) e^{-i\omega t} \quad (19)$$

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}^*(z, \omega) e^{i\omega t} \quad (20)$$

类似地，空间上的傅里叶变换也有

$$\tilde{f}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z, t) e^{-ikz} \quad (21)$$

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k, t) e^{ikz} \quad (22)$$

注 有些参考书或文献定义傅里叶变换与逆变换的系数为 $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ 。这里我们采用 $(1, \frac{1}{2\pi})$ 惯例。

注 以上空间上傅里叶变换为一维，如果对三维空间，则有

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (23)$$

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (24)$$

留意，以上 $\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}$ 为简写形式，此积分实际为三重积分，在直角坐标系下有 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz$ 。 $\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z$ 亦同。

注 傅里叶变换有时视为运算子，符号化的顺向傅里叶变换可写成 $\mathcal{F}[f]$ 或其逆傅里叶变换 $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}]$ 。

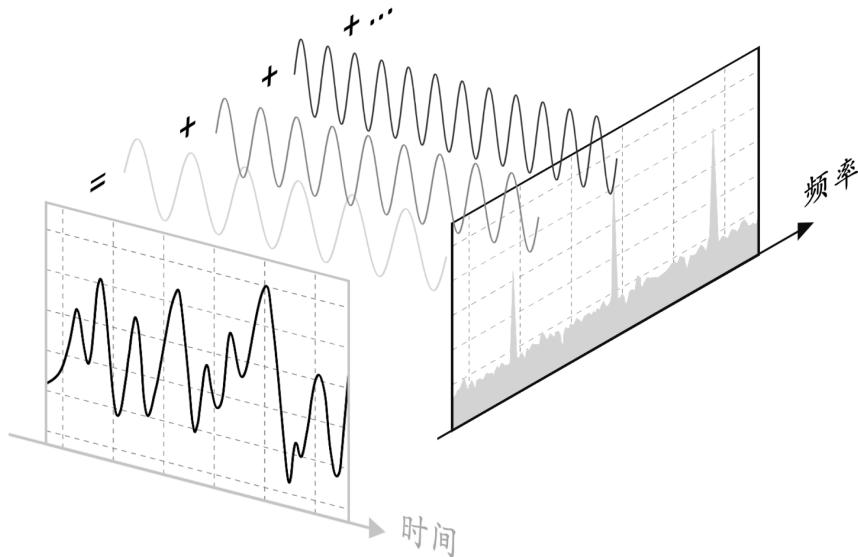


图 4: 傅里叶变换时域频域关系示意图。

注 讨论电磁辐射时，时常在时域物理量与频域物理量间变换，不同文献或教科书可能采用不同惯例，宜留意。大多数加速器物理教科书采用 $(1, \frac{1}{2\pi})$ 惯例。但经典电动力学教科书 J.D. Jackson 采用 $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ 惯例。此外，A. Hofmann 也采用 $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ 惯例。

注 除了系数惯例 $(1, \frac{1}{2\pi})$ 、 $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ 可能不同之外，不同教科书取顺、逆傅里叶变换的指数部分正负号 $\pm i\omega t$ 、 $\mp ikz$ 也可能不同。经典电动力学教科书 J.D. Jackson 的指数符号与此讲义一致，但 A. Hofmann 一书与此讲义颠倒，宜留意。

注 数学物理教科书 Mathews & Walker 采用 $(1, \frac{1}{2\pi})$ 惯例，该书不用 (t, ω) 或 (z, k) ，而是写成 (x, y) ，并且其指数正负号颠倒，宜留意。

注 “工程惯例”(engineering convention) 形式的傅里叶变换，为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{j\omega t} \tilde{f}(\omega), \quad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} f(t) \quad (25)$$

留意指数部分正负号差别。

定义 0.4. (傅里叶) 正弦、余弦变换

对偶函数 $f(t) = f(-t)$, 其 $\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}(-\omega)$ 。以上傅里叶变换根据对称性, 可定义(傅里叶)余弦变换为

$$\tilde{f}(z, \omega) = 2 \int_0^\infty dt f(z, t) \cos(\omega t) \quad (26)$$

$$f(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \tilde{f}(z, \omega) \cos(\omega t) \quad (27)$$

对奇函数 $f(t) = -f(-t)$, 其 $\tilde{f}(\omega) = -\tilde{f}(-\omega)$ 。以上傅里叶变换根据对称性, 可定义(傅里叶)正弦变换为

$$\tilde{f}(z, \omega) = 2 \int_0^\infty dt f(z, t) \sin(\omega t) \quad (28)$$

$$f(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \tilde{f}(z, \omega) \sin(\omega t) \quad (29)$$

定理 0.2. Parseval 定理

按以上傅里叶变换定义, 有以下定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (30)$$

其中, f 与 \tilde{f} 互为傅里叶变换。第二个等号成立前提为 $f(t)$ 为实函数(一般物理上碰到的都是)。此定理一般可以应用来决定频谱的振幅绝对值。

注 如果采用 $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ 惯例, 则为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (31)$$

练习 0.4 思考一下, 傅里叶变换的不同系数惯例能不能通过实验量测排除其中一个而留下另一个? 如果能, 实验该如何设计? 如果不能, 问题出在哪? ■

定理 0.3. 卷积定理

对函数 $f(t), g(t)$, 先定义卷积

定义 0.5. 卷积 (convolution)

参考图 5, 定义为

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - t)g(t)d\tau \quad (32)$$

按以上傅里叶变换定义, 有以下卷积定理 (convolution theorem)

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \quad (33)$$

其中, $\mathcal{F}[f]$ 表示 $f(t)$ 的傅里叶变换, $\mathcal{F}[g]$ 表示 $g(t)$ 的傅里叶变换。

另一种写法为

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(t - \tau)g(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega(t-\tau)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(\tau) e^{i\omega\tau} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t}
 \end{aligned} \tag{34}$$

或写成

$$(f * g)(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}\tilde{g}]$$

注 如果采用 $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ 惯例，则为

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(t - \tau)g(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega(t-\tau)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(\tau) e^{i\omega\tau} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t}
 \end{aligned} \tag{35}$$

□

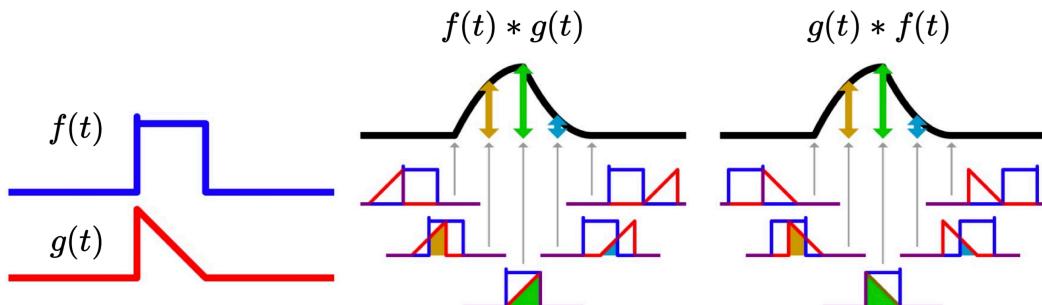


图 5: 卷积定义示意图。图例修改自 wikipedia。



笔记 卷积 (convolution)、互相关 (cross-correlation)、自相关 (autocorrelation) 的定义很类似，更多讨论可参考 §10.2。

性质 0.1. 傅里叶变换特性

基于此讲义定义的傅里叶变换，一些特性总结如下：

描述	$f(t)$	$\tilde{f}(\omega)$
时域微分	$\dot{f}(t) = df/dt$	$-i\omega \tilde{f}(\omega)$
频域微分	$t f(t)$	$-i \frac{d\tilde{f}}{d\omega}$
时域积分	$\int_{-\infty}^t g(\tau)d\tau$	$\frac{\tilde{g}(\omega)}{i\omega} + \pi \tilde{g}(\omega)\delta(\omega)$
对称	$f(t)$	$\tilde{f}(-\omega)$
时间逆转	$f(-t)$	$\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega)$
时移	$f(t - \tau)$	$e^{i\omega\tau} \tilde{f}(\omega)$
频移	$f(t)e^{iat}$	$\tilde{f}(\omega + a)$
相似	$f(kt)$	$\frac{1}{ k } \tilde{f}\left(\frac{\omega}{k}\right)$
复数共轭	$f^*(t)$	$\tilde{f}^*(-\omega)$
乘积	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w)\tilde{g}(\omega-w)dw$
卷积	$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$\tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)$
常数	a	$2\pi a\delta(\omega)$
δ -函数	$\delta(t - t_0)$	$e^{i\omega t_0}$
高斯函数	$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\pi/a} e^{-\omega^2/4a}$

练习 0.5 试着证明以上“时域积分”情况。

解 可先将积分按如下方式改写

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau = g(t) * u(t)$$

应用卷积定理即得证。 ■

练习 0.6 如果“时域积分”情况改为

$$f(t) = \int_t^{\infty} g(\tau)d\tau$$

推导其傅里叶变换。

解 类似地，积分可写成

$$f(t) = \int_t^{\infty} g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(\tau-t)d\tau = g(t) * u(-t)$$

于是有

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\tilde{g}(\omega)}{-i\omega} + \pi G(\omega)\delta(\omega)$$

练习 0.7 作为练习，验证以下两个函数的傅里叶变换：

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \Leftrightarrow \tilde{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{u}(\omega) = -\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$$

■

定理 0.4. 傅里叶变换经验定理

当我们对一(组)偏微分方程仅有片面信息而不知道更多时，做傅里叶变换。□

有时当傅里叶变换不好用时，比如：变换想在单侧进行 $t > 0$ 且希望避免当 $t \rightarrow +\infty$ 时函数发散，则一般采用拉普拉斯变换 (Laplace transform)，依循以上 $(1, \frac{1}{2\pi})$ 惯例，定义如下：

定义 0.6. 拉普拉斯变换

定义拉普拉斯变换 (Laplace transform) 如下：

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (36)$$

及其逆变换如下：

$$f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(s)e^{st} ds \quad (37)$$

其中，

- $s = \sigma + i\omega$
- $H(t)$ 为 Heaviside unit step function, $H(t \geq 0) = 1, H(t < 0) = 0$
- C 为复 s 平面的路径积分
- σ 的选择要求 $F(s)$ 在 $\operatorname{Re} s > \sigma$ 为解析 (analytic)

顺拉普拉斯变换较直观，逆拉普拉斯变换则需要谨慎选择复 s 平面的积分路径。一般来说，由于 $F(s) \propto |s|^{-n}$ ，因此，积分路径由复 s 平面右半侧足够远的地方开始。又积分函数的 e^{st} 在左半平面 $\operatorname{Re} s < 0$ 足够远处指数衰减，因此，积分路径常绕道左侧，从而形成封闭围道。如果 $F(s)$ 在复平面为多值函数，则积分路径应避开分支切割 (branch cut) 线，参考图 6。

注 由于 $H(t < 0) = 0$ 可知， C 如果要形成封闭围道，应选复 s 平面右半侧。上式逆拉普拉斯变换积分又称 Bromwich 积分 (Bromwich integral)。

注 拉普拉斯变换有时视为运算子，符号化可写成 $\mathcal{L}[f(t)]$ 或其逆拉普拉斯变换 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 。□

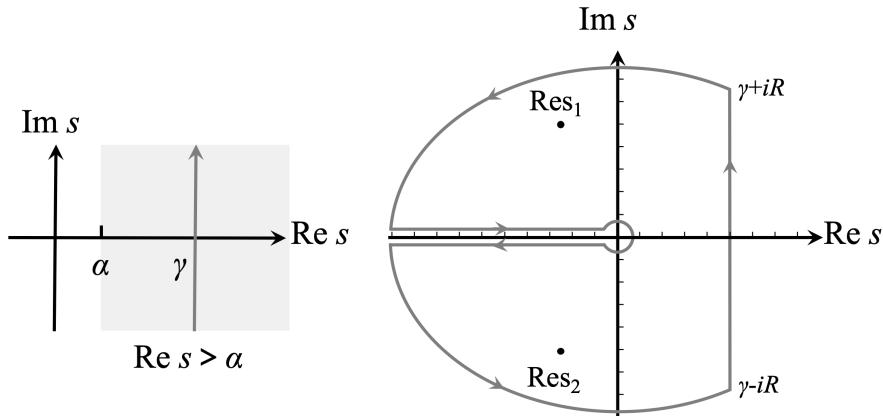


图 6: 逆拉普拉斯变换积分路径示意图。

性质 0.2. 拉普拉斯变换特性

总结如下：

操作	$f(t)$	$F(s)$
一阶时域微分	$\dot{f} = df/dt$	$sF(s) - f(t=0)$
二阶时域微分	$\ddot{f} = d^2f/dt^2$	$s^2F(s) - sf(t=0) - \dot{f}(t=0)$
一阶频域微分	$tf(t)$	$-dF(s)/ds$
时域积分	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
频域积分	$f(t)/t$	$\int_s^\infty F(\xi)d\xi$
相似特性	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
时移	$f(t-\tau)u(t-\tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
频移	$f(t)e^{at}$	$F(s-a)$
卷积	$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
时间反转	$f(-t)$	$F(-s)$
δ 函数	$\delta(t-a)$	e^{-as}
指数函数	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
多项式函数	$t^a, a \in \mathbb{R}^+$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{n+1}}$

定理 0.5. 初始值、最终值定理

对 $f(t)$, 若存在 $F(s)$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) &= \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \\ \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \end{aligned} \tag{38}$$

进行逆傅里叶变换或逆拉普拉斯变换时, 有时候需要假设复变函数在无穷远处的收敛性与无穷远处半圆弧的复变函数积分的收敛性。这两者由以下两数学引理保证。

定理 0.6. Riemann-Lebesgue 引理

当 $f(t)$ 为连续函数且绝对可积，有

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\tilde{f}(\omega)| = 0 \quad (39)$$

注 此引理想表达的是，物理上符合常理（“合理”）的函数，要求其谱函数在极高频趋近于零是合理的。□

定理 0.7. Jordan 引理

又称 Jordan 半圆弧引理，为复变函数理论中的一个重要引理，通常用于计算含有半圆弧的复变函数积分。设 $R > 0$ ，考虑 ω 复平面半圆弧 C_R 上， $\omega = Re^{i\theta}$ ，其中， $0 \leq \theta \leq \pi$ ，如果复变函数 $|f(\omega)|$ 在 C_R 上有界，且在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 有 $\lim_{R \rightarrow \infty} f(\omega = Re^{i\theta}) = 0$ ，则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 0 \quad (40)$$

其中， t 为任意正实数。

注 此引理想表达的是，在半圆弧 C_R 上，指数项 $e^{i\omega t}$ 的振荡迅速，而 $f(\omega)$ 的有界特性和在半圆弧边上趋近于零确保了整个积分趋近于零，使得我们可以通过对整个 ω 实轴上的积分，将积分的路径从半圆弧替换为实轴，从而更容易进行计算。□

0.2.3 $q, e, -e, e^{(\dots)}$

不同教科书或文献对“电荷单元”采用不同符号，一般采用 q ，有些则写成 e 或 $-e$ 。电子带负电的事实在多数教科书或文献选择包含在 q 中，即对电子而言，有 $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ；一些教科书或文献中写为 e 时，有时指 $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，有些则写为 $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，即只考虑电荷量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，可能给读者带来困惑，宜留意。

如果此讲义讨论对象不限于电子，即对一般带电粒子均适用的话，而将电子电荷写成 q 时，表示 $q = -e < 0$ 。当此讲义表示式中出现 e 时， $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} > 0$ 。有时为避免歧义，此讲义或将电荷量写成 $|e|$ 。对一些物理量，如：辐射功率或能量，与电荷平方成正比，写成 q^2 或 e^2 则不至于造成困惑。

以上 q 仅表示单个粒子的电荷量。如果表示多个粒子的电荷量，则有 $q = \pm Ne$ 或有时写成 $Q = \pm Ne$ 。此处的 Q 不应与谐振腔的品质因数混淆，宜留意。

注 这里的 e 不是自然对数底数 $e \approx 2.718$ 。讲义中不可避免将频繁出现指数函数 $e^{(\dots)}$ ，根据语境，应能容易辨别 e 为电荷单元或指数函数。

注 讲义中有些地方以 (q, p) 表示相空间正则坐标的“位置”坐标 q 与“动量”坐标 p 。根据语

境，应能容易辨别 q 为位置坐标或电荷单元。

0.3 基础知识

前面除了介绍了狭义相对论的专有名词与一些数学基础外，还需要介绍一下专属于粒子加速器这门学科的专有名词。总结如下：

- 一般而言，加速器利用电场加速带电粒子，利用磁场使带电粒子转弯。
- 粒子在加速器中运行，加速器物理学家、工程师的任务有“理解、设计、诊断、操控”带电粒子束。
- 粒子束团包含许多带电粒子，如何使尽可能多的粒子稳定且运行在设计指标是最终加速器物理学家与工程师的终极目标。这有赖于我们对电磁场与带电粒子束行为的理解。
- 电磁场动力学 \Rightarrow 麦克斯韦 (Maxwell) 方程组。
- 束流动力学 \Rightarrow 哈密顿 (Hamiltonian) 力学、洛伦兹 (Lorentz) 方程。
- 粒子运动通过洛伦兹方程由电场、磁场决定。电、磁场的“源”一部分来自外部各式各样的磁铁、微波射频谐振腔提供，另一部分则来自带电粒子束自场。因此，麦克斯韦方程组与洛伦兹方程互相耦合，粒子的最终运动状态为此耦合系统的自治解。

一般而言，加速器物理与工程涉及的背景知识中有约 98% 为“经典电磁理论”、“经典力学”、“狭义相对论”。剩下的 2% 为一些量子力学，用来探讨一部分的电磁辐射 (以光子作为图像) 效应与自旋动力学 (spin dynamics) 等。98% 的经典理论大致涵盖：

- 二极铁、四极铁、螺线管、波荡器、多极铁 \Rightarrow 静磁场。
- 波导、谐振腔 (加速腔、偏转腔) \Rightarrow 时变电磁场。
- 激光 \Rightarrow 时变电磁场、高斯波束。
- 单粒子、多粒子动力学 \Rightarrow 经典力学、狭义相对论。
- 空间电荷效应、束内散射、束束效应 \Rightarrow 静电场、狭义相对论。
- 电磁辐射、同步辐射、波荡器辐射 \Rightarrow 时变电磁场、狭义相对论。

这份讲义不讨论加速器历史发展⁶，仅总结几种常见加速器：

- 电子感应加速器 (betatron): $\leq 300 \text{ MeV}$ 、感应电场、横向弱聚焦。
- 回旋加速器 (cyclotron): D 型、等时型、超导、同步回旋等。
- 静电加速器 (electrostatic accelerator): Van de Graaf、串列、 $\leq \text{MV}$ 。
- 高压电动加速器 (high-voltage electrodynamic accelerator): 低压 AC 至高 DC、 $\leq 5 \text{ MV}$ 。
- 固定场交变梯度加速器 (fixed field alternating gradient, FFAG)。

⁶对此列表中的近代粒子加速器发展历程感兴趣的读者，可参考 A. Sessler and E. Wilson, *Engines of Discovery*, revised and expanded edition, World Scientific (2014)。

- 直线加速器 (linear accelerator, linac): 电子、质子/重离子。
- 感应直线加速器 (induction linac)。
- 同步加速器 (synchrotron)、储存环 (storage ring)。
- 感应直线加速器 (induction linac)。
- 激光/等离子体尾场加速器 (laser/plasma wakefield accelerator)。
- 对撞机 (collider): 轻子 (lepton)、强子 (hadron)。
- 中子 (neutron) 源或中子加速器⁷。
- 梅花瓣型加速器 (Rhodotron): 10 ~ 12 MeV 高功率电子加速器。

这份讲义着重介绍的加速器类型主要有三类: 电子直线加速器 (图 7)、电子同步加速器或储存环 (图 8)、能量回收型直线加速器 (图 9)。

 **笔记** 对其它类型粒子加速器感兴趣的读者, 请自行查找关于那些加速器的介绍及大致工作原理或参考 Handbook §1.6。

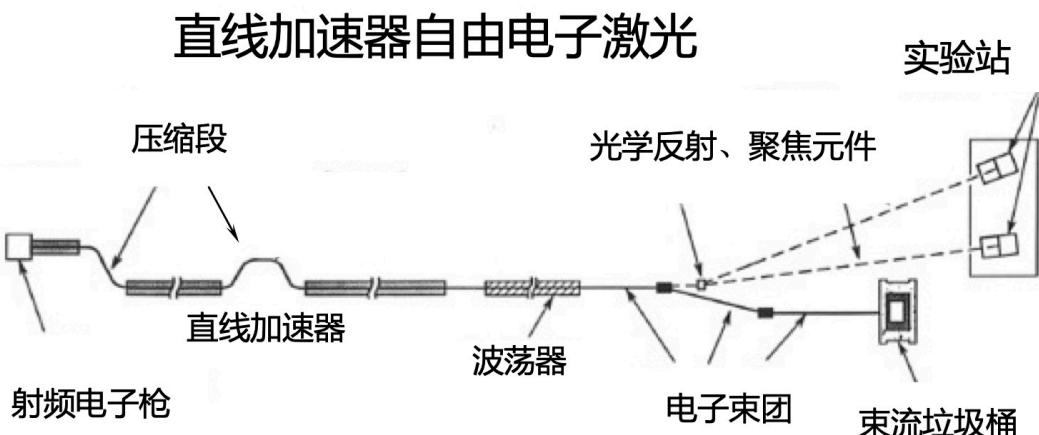


图 7: 电子直线加速器, 用来产生、加速高亮度电子束, 为自由电子激光器的驱动源。直线加速器由一系列射频腔通过提供电子束能量实现电子的高速加速, 而磁聚焦元件则负责聚焦与适当压缩束团, 并确保其在传输过程的稳定性。直线加速器驱动的自由电子激光器在先进材料研究、生物、医学成像等科学应用中发挥重要作用。

前面 §0.1 介绍了特殊相对论的基础知识, 利用 γ, β, p, E, T 等物理量能够用来描述带电粒子运动。这些物理量相互关联, 其关系与微小偏差量间的关系总结于下表以方便查

⁷思考一下, 中子不带电, 怎么加速? 按能量区分, 有

- 慢中子 (slow neutrons): 动能 $\leq 1 \text{ keV}$, 在此能量范围内, 由低到高还可细分冷中子 (cold neutrons)、热中子 (thermal neutrons, $\approx 0.0253 \text{ eV}$, 在室温下与周围介质分子处于热平衡状态)、超热中子 (epithermal neutrons, $0.025 \sim 0.4 \text{ eV}$) 和共振中子 (resonance neutrons)。
- 中能中子 (intermediate neutrons): 动能 $1 \sim 100 \text{ keV}$ 之间, 与原子核相互作用主要为弹性散射。
- 快中子 (fast neutrons): 动能 $0.1 \sim 20 \text{ MeV}$ 之间, 与原子核相互作用主要为弹性散射与非弹性散射。此能量区间的非弹性散射截面较大, 且随靶原子核的质量数以及入射中子能量的增大而增加, 快中子可以穿透较厚的物质, 容易获得物质内部的详细信息。
- 高能中子 (high energy neutrons, ultrafast neutrons): 动能 $\geq 20 \text{ MeV}$, 与原子核相互作用主要有弹性散射与非弹性散射, 还可能发生产生次级粒子的核反应。

储存环同步加速器储存环光源

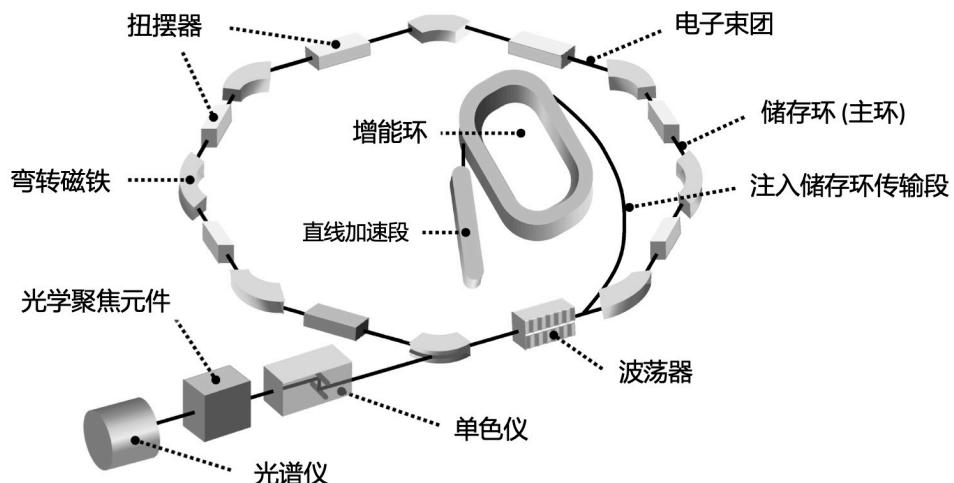


图 8: 电子同步加速器或储存环，为一种环形加速器，通过射频腔加速、弯转磁铁和四极铁弯曲和聚焦，以及从增强器（又称增能环）至储存环的注入传输段引导。射频腔提供能量使粒子加速或补充能量，而磁铁调控轨迹，使粒子形成稳定的环形封闭路径。电子束产生的辐射场通过单色仪、光学聚焦元件导向不同实验站，促进广泛的科学的研究。同步辐射储存环的设计旨在保持电子束稳定高速绕行轨道，利用射频腔和磁铁的协同作用，使其稳定产生同步辐射场，满足用户多种实验需求。

能量回收加速器自由电子激光

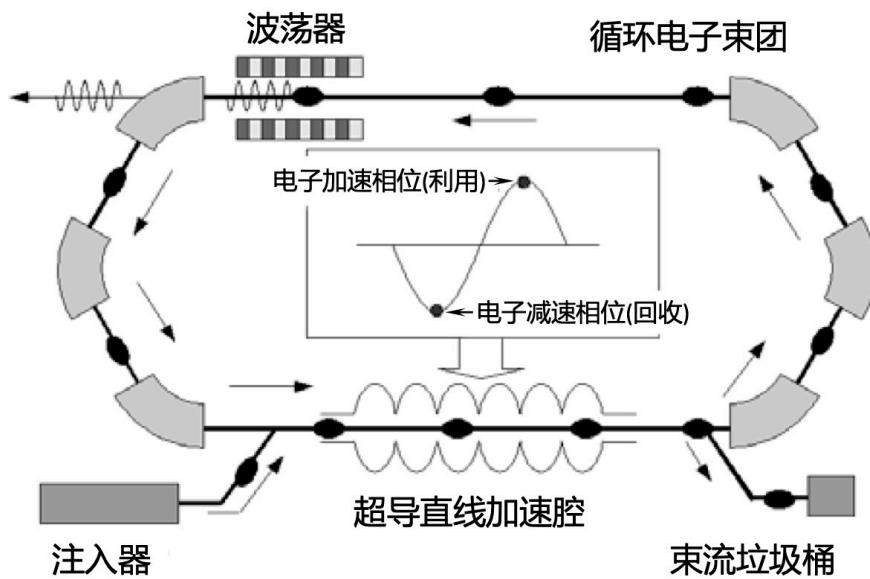


图 9: 能量回收型直线加速器。ERL 是一种较先进的粒子加速器形态，旨在通过回收和重复使用粒子束能量实现高效能源利用。其主要部件包括：超导直线加速腔、弯转段、能量回收系统、束流传输线。直线加速器通过射频腔加速带电粒子，而弯转段利用磁铁元件弯曲和聚焦粒子束。独特之处在于能量回收系统，通过循环弯转段 (recirculation arc) 与适当调整加速腔与束团相位减速粒子从而回收粒子束的能量。此一整合设计使 ERL 相较于传统直线加速器具有更高的能量使用效率，由于其优越的粒子束团特性，适用于先进光源或核物理实验等多种应用。

阅。

定理 0.8. 相对论因子 β, γ 、动能 T 、动量 p 间的运动学关系

假设粒子的 β, γ 为洛伦兹因子， E 为粒子总能量，为静止能量 $E_0 = m_0 c^2$ 与动能 T 之和，总动量为 p ，则有如下表的运动学关系。

有时候会将一些运动学物理量以 $\beta\gamma$ 复合量形式表示，有

$$\begin{aligned} p &= m_0 c (\beta\gamma) \\ \gamma &= \sqrt{1 + (\beta\gamma)^2} \\ \beta &= \frac{(\beta\gamma)}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}} \end{aligned} \tag{41}$$

证明 利用 $E = E_0 + T = m_0 c^2 + T = \gamma m_e c^2$ 与 $E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$ 及洛伦兹因子 β, γ 的定义。注意，对相对论粒子而言， $T \neq \frac{1}{2} m_0 v^2$ 。 \square

	β	cp	T	E	γ
$\beta =$	β	$\frac{cp}{E} = \frac{cp/E_0}{\sqrt{(cp/E_0)^2 + 1}}$	$\sqrt{1 - \left(1 + \frac{T}{E_0}\right)^{-2}}$	$\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} = \frac{cp}{E}$	$\sqrt{1 - \gamma^{-2}}$
$cp =$	$E_0/\sqrt{\beta^{-2} - 1}$ $= E\beta$	cp	$[T(2E_0 + T)]^{1/2}$ $= T\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{1/2}$	$\sqrt{E^2 - E_0^2}$ $= E\beta$	$E_0\sqrt{\gamma^2 - 1}$
$E_0 =$	$cp/\beta\gamma$ $= E(1 - \beta^2)^{1/2}$	$cp(\gamma^2 - 1)^{-1/2}$	$T/(\gamma - 1)$	$\sqrt{E^2 - c^2 p^2}$	E/γ
$T =$	$\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right]E_0$	$\sqrt{E_0^2 + c^2 p^2} - E_0$ $= cp\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}$	T	$E - E_0$	$E_0(\gamma - 1)$
$\gamma =$	$(1 - \beta^2)^{-1/2}$	$\frac{cp}{E_0\beta} = \left[1 - \left(\frac{cp}{E_0}\right)^2\right]^{1/2}$	$1 + T/E_0$	E/E_0	γ

	$d\beta$	$d(cp)$	$d\gamma = dE/E_0 = dT/E_0$
$d\beta =$	$d\beta$	$\left[1 + (cp/E_0)^2\right]^{-3/2} d(cp)/E_0$ $= \gamma^{-3} d(cp)/E_0$	$\gamma^{-2} (\gamma^2 - 1)^{-1/2} d\gamma$ $= \beta^{-1} \gamma^{-3} d\gamma$
$d(cp) =$	$E_0(1 - \beta^2)^{-3/2} d\beta = E_0\gamma^3 d\beta$	$d(cp)$	$\frac{E_0\gamma d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{E_0 d\gamma}{\beta}$
$d\gamma = dE/E_0$ $= dT/E_0 =$	$\beta(1 - \beta^2)^{-3/2} d\beta$ $= \beta\gamma^3 d\beta$	$\left[1 + (E_0/cp)^2\right]^{-1/2} d(cp)/E_0$ $= \beta d(cp)/E_0$	$d\gamma$

	$d\beta/\beta$	dp/p	dT/T	$dE/E = d\gamma/\gamma$
$d\beta/\beta =$	$d\beta/\beta$	$\gamma^{-2}dp/p$ $= dp/p - d\gamma/\gamma$	$[\gamma(\gamma + 1)]^{-1}dT/T$	$(\gamma^2 - 1)^{-1}d\gamma/\gamma$ $= (\beta\gamma)^{-2}d\gamma/\gamma$
$dp/p =$	$\gamma^2d\beta/\beta$	dp/p	$[\gamma/(\gamma + 1)]dT/T$	$\beta^{-2}d\gamma/\gamma$
$dT/T =$	$\gamma(\gamma + 1)d\beta/\beta$	$(1 + \gamma^{-1})dp/p$	dT/T	$\gamma(\gamma - 1)^{-1}d\gamma/\gamma$
$dE/E =$	$(\beta\gamma)^2d\beta/\beta$	β^2dp/p	$(1 - \gamma^{-1})dT/T$	$d\gamma/\gamma$
$d\gamma/\gamma =$	$(\gamma^2 - 1)d\beta/\beta$	$= dp/p - d\beta/\beta$		

练习 0.8 在狭义相对论中，粒子的静止能量被定义为 $E_0 = m_0c^2$ ，其中， c 是光速， m_0 是静止质量。用静止能量 E_0 和动能 T 表示总能量 E 和动量 p 。 ■

练习 0.9 利用狭义相对论的符号 $\beta = v/c$ 和 $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ，证明 $\gamma = E/E_0$ 和 $\beta = pc/E$ 。 ■

练习 0.10 已知质子的动能 T 为 1 GeV，其静止能量 $m_p c^2 = 0.9383 \text{ GeV}/c^2$ ，求其总能量。 ■

练习 0.11 已知相对论动量和总能量的关系有 $E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2$ ，写出其动量 p （单位 GeV/c ）。 ■

0.4 单位、量纲、物理常数

在正式开始介绍内容之前，这里附上一些常见物理量的单位 (unit)、量纲 (dimensionality) 与物理常数表。

定律 0.1. 量纲、因次、单位

Dimensionality 为量纲、因次。Unit 为单位。对于方程式或表示式，等式 (或不等式) 两边的量纲要平衡。对于方程式或表示式，等式 (或不等式) 两边的单位也要平衡。

注 关于单位制的简短介绍，可以参考 J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd ed., John Wiley & Sons (1998) 的 Appendix 1。

注 对不同单位制选择，方程式或表示式两边的单位与量纲都要平衡/一致。 □

表 1：一些物理量的国际单位与量纲。取自 A.W. Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020)。

物理量	单位 (SI, MKS)	量纲 (M 表质量, L 表长度, T 表时间, K 表温度)
长度 ℓ	meter	L
面积 A	m^2	L^2
体积 V	m^3	L^3
质量 M	kilogram	M
体密度 ρ	kg/m^3	ML^{-3}
时间 t	second	T
速度、速率 v	m/s	LT^{-1}
力 F	newton	MLT^{-2}
压力、压强 P	pascal	$ML^{-1}T^{-2}$
能量 E	joule	ML^2T^{-2}
动量 P		MLT^{-1}
功率 P	watt	ML^2T^{-3}
电荷量 q	coulomb	$M^{1/2}L^{1/2}$
电流 I	ampere	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$
位能、势能 V, φ	volt	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$
电场 E	V/m	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-2}$
磁场 H	A-turn/m	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$
电位移 D	C/m ²	$M^{1/2}L^{-3/2}$
磁通量 Φ	weber	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$
磁感应强度 B	Tesla	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$
导电率 σ_c	$1/(ohm\cdot m)$	$L^{-2}T$
电阻率 ρ_r	ohm-meter	L^2T^{-1}
电阻 R	ohm	LT^{-1}
电容 C	farad	$L^{-1}T^2$
电感 L	henry	L
温度 T	kelvin	K

表 2: SI 单位制基本物理常数的数值。下划线为目前采用的准确数值。取自 A.W. Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020).

物理量	数值
真空中的光速 c	<u>2.99792458</u> $\times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
真空磁导率 μ_0	<u>$4\pi \times 10^{-7}$</u> Henry m^{-1}
真空介电系数 $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	8.854187817 $\times 10^{-12}$ Farad m^{-1}
电荷单元 q	<u>1.602176634</u> $\times 10^{-19}$ C
普朗克常数 h	<u>6.62607015</u> $\times 10^{-34}$ J s = <u>4.135667696</u> $\times 10^{-15}$ eV Hz $^{-1}$
玻尔兹曼常数 k_B	<u>1.380649</u> $\times 10^{-23}$ J K $^{-1}$ = 8.617333 $\times 10^{-5}$ eV K $^{-1}$
引力常数 G	6.67428 $\times 10^{-11}$ Newton m 2 kg $^{-2}$
阿伏伽德罗常数 N_A	<u>6.02214076</u> $\times 10^{23}$
电子静止质量 m_e	9.1093822 $\times 10^{-31}$ kg
质子静止质量 m_p	1.6726216 $\times 10^{-27}$ kg
电子静止能量 $m_e c^2$	0.51099891 MeV
质子静止能量 $m_p c^2$	938.27201 MeV
精细结构常数 $\alpha_f = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$	1/137.0359997
真空阻抗 $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c}$	376.7303 Ω
电子经典半径 $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$	2.8179403 $\times 10^{-15}$ m
质子经典半径 $r_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p c^2}$	1.534698 $\times 10^{-18}$ m
电子康普顿波长 $\lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c}$	2.4263106 $\times 10^{-12}$ m

0.5 单位制转换

虽然多数加速器教科书采用国际单位制(又称 SI 单位制、MKS 单位制),有些理论分析的文献仍采用高斯单位制(又称 CGS 单位制)⁸。这里给出常见物理量在不同单位制间的转换。下表为 **SI 制转换到 CGS/高斯单位制**,取自 J.D. Jackson 一书。

物理量	高斯单位制	国际单位制
光速	c	$(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$
电场(电位,电压)	$\frac{(\mathbf{E}, \varphi, V)}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	(\mathbf{E}, φ, V)
电位移	$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}} \mathbf{D}$	\mathbf{D}
电荷密度 (电荷,电流密度, 电流,极化强度)	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}(\rho, q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$	$(\rho, q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$
磁感应强度	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{B}$	\mathbf{B}
磁场	$\frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$	\mathbf{H}
磁化强度	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{M}$	\mathbf{M}
导电率	$4\pi\epsilon_0\sigma$	σ
介电系数	$\epsilon_0\epsilon$	ϵ
磁导率	$\mu_0\mu$	μ
电阻(阻抗)	$\frac{(R, Z)}{4\pi\epsilon_0}$	(R, Z)
电感	$\frac{L}{4\pi\epsilon_0}$	L
电容	$4\pi\epsilon_0 C$	C

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\epsilon_0 = 8.8541878 \dots \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu_0 = 1.2566370 \dots \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7303 \dots \Omega$$

此处举一例说明。在 SI 单位制中,单位长度的相干同步辐射(coherent synchrotron radiation, CSR) 阻抗可以写成⁹

$$\frac{Z_{||}^{\text{SI}}(\omega)}{L} = \frac{Z_0}{2\pi} \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{1/3} \rho^{2/3}} \quad (42)$$

其中, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = \frac{1}{c\epsilon_0} \approx 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$ 为真空阻抗(free space impedance 或 vacuum impedance) 的 SI 制表示式, ρ 为弯转半径, 这里当它为一已知量。至于这个阻抗式子怎么推导,暂且不论。现在要将此 SI 制 CSR 阻抗式转换为 CGS 制表示式。首先,参

⁸高斯单位制可视为早期 CGS 单位制与电磁单位制的融合。

⁹这里的 L 表示长度,不要与电感符号混淆。

考上表，可以看到，SI 制的阻抗转换到 CGS 制需要将公式中的阻抗符号 Z^{SI} 换成 $\frac{Z^{\text{CGS}}}{4\pi\epsilon_0}$ 。于是，CGS 制的单位长度相干同步辐射阻抗可以写成

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\parallel}^{\text{CGS}}(\omega)}{4\pi\epsilon_0 L} &= \frac{Z_0}{2\pi} \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{1/3}\rho^{2/3}} \\ \Rightarrow \frac{Z_{\parallel}^{\text{CGS}}(\omega)}{L} &= 4\pi\epsilon_0 \times \frac{Z_0}{2\pi} \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{1/3}\rho^{2/3}} \\ &= \epsilon_0 Z_0 \times 2 \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{1/3}\rho^{2/3}} \\ &= 2 \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{4/3}\rho^{2/3}} \end{aligned} \quad (43)$$

这里 $\epsilon_0 Z_0 = 1/c$ 。

 **笔记** 在高斯制中， ϵ_0, μ_0 本身没有意义，即高斯制表示式中不应该出现 ϵ_0, μ_0 。只有相对介电系数 ϵ 与磁导率 μ 有意义，对自由空间或真空，此处 $\mu = \epsilon = 1$ (无量纲)。

 **练习 0.12** 检验单位长度 CSR 阻抗在 SI 单位制与 CGS 单位制的单位与量纲。 ■

解

$$\frac{Z_{\parallel}^{\text{SI}}(\omega)}{L} = \frac{\Omega}{\text{meter}}, \quad \frac{Z_{\parallel}^{\text{CGS}}(\omega)}{L} = \frac{\text{sec}}{\text{cm}^2}$$



下表为 **CGS/高斯单位制转换到 SI 单位制**，取自 J.D. Jackson 一书。

物理量	高斯单位制	国际单位制
光速	c	$(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$
电场 (电位, 电压)	(\mathbf{E}, φ, V)	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}(\mathbf{E}, \varphi, V)$
电位移	\mathbf{D}	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}\mathbf{D}$
电荷密度 (电荷, 电流密度, 电流, 极化强度)	$(\rho, q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}(\rho, q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$
磁感应强度	\mathbf{B}	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\mathbf{B}$
磁场	\mathbf{H}	$\sqrt{4\pi\mu_0}\mathbf{H}$
磁化强度	\mathbf{M}	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\mathbf{M}$
导电率	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
介电系数	ϵ	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
磁导率	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
电阻 (阻抗)	(R, Z)	$4\pi\epsilon_0(R, Z)$
电感	L	$4\pi\epsilon_0 L$
电容	C	$\frac{C}{4\pi\epsilon_0}$

此处还举同一例说明。在高斯单位制中，单位长度的相干同步辐射阻抗为

$$\frac{Z_{\parallel}^{\text{CGS}}(\omega)}{L} = 2 \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{4/3} \rho^{2/3}} \quad (44)$$

现在要将此式转换为 SI 制。首先，参考上表，可以看到，在原高斯制表示式中，将 Z^{CGS} 写成 $4\pi\epsilon_0 Z^{\text{SI}}$ 即可。于是，SI 制的相干同步辐射阻抗可以写成

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \frac{Z_{\parallel}^{\text{SI}}(\omega)}{L} &= 2 \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{4/3} \rho^{2/3}} \\ \Rightarrow \frac{Z_{\parallel}^{\text{SI}}(\omega)}{L} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{4/3} \rho^{2/3}} = \frac{Z_0 c}{2\pi} \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{4/3} \rho^{2/3}} \\ &= \frac{Z_0}{2\pi} \frac{e^{i\pi/6}}{3^{1/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega^{1/3}}{c^{1/3} \rho^{2/3}} \end{aligned} \quad (45)$$

回到前面最初给出的 SI 制表示式。



笔记 比较 $Z_{\parallel}^{\text{CGS}}(\omega)$ 与 $Z_{\parallel}^{\text{SI}}(\omega)$ ，可以看到，真空阻抗 Z_0 在两种单位制间转换时，有

$$Z_0 = \frac{4\pi}{c} \quad (46)$$

留意，这并不指 Z_0 的取值可以通过 $\frac{4\pi}{3 \times 10^8}$ 得到。上式只是在两种单位制间转换时的符号变换。有些文献换一个等价方式描述，即

$$\begin{aligned} \frac{Z_0 c}{4\pi} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} && (\text{SI units}) \\ \frac{Z_0 c}{4\pi} &= 1 && (\text{CGS units}) \end{aligned}$$

上面给出的是阻抗函数在 SI 制与高斯单位制间的转换。在加速器理论中，常遇到的还有尾场函数在 SI 制与高斯单位制间的转换。这里给出单位长度相干同步辐射尾场函数分别在 SI 制与高斯单位制间的表示式，通过琢磨它们之间的转换关系，可以套用到其它阻抗或尾场函数。

$$\frac{W_{\parallel}^{\text{SI}}(z)}{L} = -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{2}{3^{4/3} \rho^{2/3} z^{4/3}} \Leftrightarrow \frac{W_{\parallel}^{\text{CGS}}(z)}{L} = -\frac{2}{3^{4/3} \rho^{2/3} z^{4/3}} \quad (47)$$

注 由上可知，如果已知 CGS 单位制的阻抗或尾场函数表示式，则将其乘上 $Z_0 c / 4\pi$ 后，可得 SI 单位制的阻抗或尾场函数表示式。此外，应随时留意表示式所在单位制，当在 CGS 单位制时，表示式里面的物理量应保持使用 CGS 单位制对应的数值；当在 SI 单位制时，表示式里面的物理量应保持使用 SI 单位制对应的数值。

SI 制与高斯单位制间的符号转换有时候非常令人困惑，此讲义不细究其间转换，而是举两个例子，通过分别对照其在两种单位制间的形式，提供转换的“灵感”。

练习 0.13 已知一 CGS 单位制的阻抗函数可写为

$$Z_{\parallel}^{\text{CGS}} = \frac{2(1+i)}{\pi^{1/2}} \sqrt{\frac{g}{cb^2 |\omega|}}$$

转换为 SI 单位制表示式，并检验单位与量纲。 ■

解

$$Z_{\parallel}^{\text{SI}} = (1+i) \frac{Z_0}{2\pi^{3/2}} \frac{1}{b} \sqrt{\frac{cg}{|\omega|}}$$

此外，还有一个常见的物理量，称经典电子半径 (classical radius of electron)，写成 r_e ，在 SI 制下，有

$$r_e^{\text{SI}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.818 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (48)$$

在高斯单位制，有

$$r_e^{\text{CGS}} = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.818 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (49)$$

注意到，在高斯单位制中没有 $1/4\pi\epsilon_0$ 。

除了以上在不同单位制间的“符号”转换外，有时还需要对其“数值”进行转换。关于数值转换，可以参考下表，取自 J.D. Jackson。

物理量	符号	国际单位制	高斯单位制	
长度	ℓ	1 meter (m)	10^2	centimeters (cm)
质量	m	1 kilogram (kg)	10^3	grams (g)
时间	t	1 second (s)	1	second (s)
频率	ν, f	1 hertz (Hz)	1	hertz (Hz)
力	F	1 newton (N)	10^5	dynes
功	W	1 joule (J)	10^7	ergs
能量	U	1 joule (J)	10^7	ergs
功率	P	1 watt (W)	10^7	ergs s ⁻¹
电荷量	q	1 coulomb (C)	3×10^9	statcoulombs
电荷密度	ρ	1 C m ⁻³	3×10^3	statcoul cm ⁻³
电流	I	1 ampere (A)	3×10^9	statamperes
电流密度	J	1 A m ⁻²	3×10^5	statamp cm ⁻²
电场	E	1 volt m ⁻¹ (Vm ⁻¹)	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$	statvolt cm ⁻¹
电位	φ, V	1 volt (V)	$\frac{1}{300}$	statvolt
极化强度	P	1 C m ⁻²	3×10^5	dipole moment cm ⁻³
电位移	D	1 C m ⁻²	$12\pi \times 10^5$	statvolt cm ⁻¹ (statcoul cm ⁻²)
导电率	σ	1 siemens m ⁻¹	9×10^9	s ⁻¹
电阻	R	1 ohm (Ω)	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	s cm ⁻¹
电容	C	1 farad (F)	9×10^{11}	cm
磁通量	Φ	1 weber (Wb)	10^8	gauss cm ² or maxwells
磁感应强度	B	1 tesla (T)	10^4	gauss (G)
磁场	H	1 A m ⁻¹	$4\pi \times 10^{-3}$	oersted (Oe)
磁化强度	M	1 A m ⁻¹	10^{-3}	magnetic moment cm ⁻³
电感	L	1 henry (H)	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	—



笔记 对电磁学单位制感兴趣的读者，可参考胡友秋编著，电磁学单位制，中国科学技术大学出版社(2012)。

0.6 数量级的前缀词

很多时候出于方便分析与交流等原因，一些物理量的取值会带数量级前缀 (prefix)，比如： 10^{-6} m 会在米 (m) 前面加一个前缀词 μ 表示，即 $1 \mu\text{m}$ ，再有 10^{-3} s = 1 ms 等。下表整理了一些用来描述较大物理量与较小物理量的前缀，取自 David Attwood 一书。

数量级	前缀	符号	数量级	前缀	符号
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deka	da	10^{-24}	yocto	y

0.7 基础高等数学练习题

作为讲义正文开始的前置篇幅 — 第零章 — 到此大致告一段落。对进行不同课题、具不同专业背景的读者看待所需要的前置知识自然不同。对加速器理论课题感兴趣的读者，通常要求具备部分高等数学的基础。此讲义无法 — 也不可能 — 罗列所有需要的知识点。此讲义将下面即将用到的相关数学基础知识整理在附录B供参考。

其它可能用到的、零星的高等数学内容则作为这一章的补充习题。

第零章 补充习题

1. 将以下矩阵对角化

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

解 涉及的概念：特征值、特征向量、相似变换。

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. 矩阵对角化在积分计算有时候非常方便，特别是加速器物理中针对束团分布函数对相空间坐标积分的情况。计算如下积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - xy + y^2)} dx dy$$

解 此定积分值为 $\sqrt{4/3}\pi$ 。

3. 矩阵对角化在求解一系列由线性方程组成的矩阵方程时也很有用。对 2×2 方阵 \mathbf{A} ，解下面方程

$$\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

其中， \mathbb{I} 为 2×2 单位矩阵。如果将上面矩阵方程视为四个耦合的方程组来解，虽然直观，却置学过线性代数理论于无用武之地，甚为可惜。

解 此为多项式矩阵函数。

4. 试完成以下微分、积分计算，并说明计算过程用到的定理（如果用到的话）

- a) 化简如下微分

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, z) dx$$

- b) 计算如下积分

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

- c) 计算如下积分

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

- d) 计算如下积分

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

- e) 计算如下积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

- f) 考虑当 $0 < a < 1$ 时，计算如下积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx$$

g) 分别考虑 $\tau < 0$ 与 $\tau > 0$ 时, 计算如下积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} d\omega$$

h) 分别计算如下积分

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{P.V. } \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

i) 分别计算如下积分

$$\text{P.V. } \int_1^4 \frac{1}{x-2} dx \quad \text{P.V. } \int_1^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

j) 分别计算如下积分

$$\text{P.V. } \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{P.V. } \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

5. 假设初始条件为 $y(x=a) = c_1, y'(x=a) = c_2$, 证明如下二阶微分方程的解

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x) \frac{dy}{dx} + B(x)y(x) = g(x)$$

可以写成积分方程形式, 有

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt$$

其中,

$$f(x) = \int_a^x (x-t)g(t)dt + (x-a)[c_1A(a) + c_2] + c_1$$

与核函数 (kernel function)

$$K(x,t) = (t-x)[B(t) - A'(t)] - A(t)$$

6. 高等数学课堂学过, 微分方程 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ 的解可以写成 $x = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$ 形式 (或写成 \sin, \cos, \sinh, \cosh 形式)。无需推导, 写出如下几个常见微分方程的解

a) 考虑

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + f = 0$$

b) 考虑上面方程的一种推广情况

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f = 0$$

其中, $\nu \in \mathbb{R}$

c) 考虑

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{df}{dx} \right] = 0$$

d) 考虑上面方程的一种推广情况

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{df}{dx} \right] + \ell(\ell+1)f = 0$$

e) 如上 (a), 但是形式稍微不同

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + K^2 f = 0$$

当 $K^2 > 0$ 为 x 的缓变函数时, 尝试 WKB 法求近似解。

7. 试对一个双变数的函数, 如 $f(x,y)$, 在 (x_0, y_0) 附近泰勒展开至第二阶。

8. 给定合适的初始或边界条件后, 二阶偏微分方程, 如 $\nabla^2 f(\mathbf{r}) = 0$ 或 $\nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, 一般怎么解? 定性描述解题策略即可。

9. 对一阶偏微分方程, 如

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

其中 $x = x(t)$, 一般怎么解?

10. 对一维波方程, 如

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

一般怎么解?

11. 对一维扩散方程, 如

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

一般怎么解?

