

电磁辐射与加速器束流动力学导论

Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第十二章 集体效应的粒子动力学：宏粒子模型

内容提要

- | | |
|------------|-----------|
| □ 束流负载基本定理 | □ 强头尾不稳定性 |
| □ 束团崩溃不稳定性 | □ 头尾不稳定性 |
| □ 罗宾逊不稳定性 | |

作为讨论集体效应的三章，上一章介绍了尾场与阻抗，重点放在测试粒子感受到源粒子的尾场与阻抗，为场动力学。其中，假设测试粒子与源粒子间的相对距离固定为权宜之计¹。这一章与下一章将把重点放在粒子动力学，即考虑电磁部件的尾场或阻抗函数为已知，希望分析尾场或阻抗对束团产生的影响。这一章的讨论基于宏粒子模型 (macroparticle model)，将束团视为一个或少数几个代表性粒子，由其运动方程研究集体动力学问题；下一章的讨论基于连续体模型，将束团视为一相空间的连续分布函数，此分布满足 Vlasov 方程，研究集体动力学问题即求解 Vlasov 方程。

束团由许多粒子组成，一般 $pC (10^{-12} C)$ 电荷量束团约包含 10^6 个粒子，而 $nC (10^{-9} C)$ 电荷量束团则约包含 10^9 个粒子。从理论层面，描述粒子动力学的两个方式可以看成走两个极端：将束团整体当做一个或少数几个宏粒子、将束团整体当做无限多个粒子组成的连续函数分布。从数值模拟层面看，原则上如果束团中的每个粒子的运动方程已知，虽相对直观、且暴力，但可对逐个粒子进行求解，此思路又称粒子跟踪模拟 (particle tracking simulation)。

- 解析理论：单个、少数几个宏粒子 \Rightarrow 这一章将重点介绍。
- 数值模拟：逐个粒子跟踪，约 $10^4 \sim 10^7$ 个模拟粒子 (simulation particles)。注意，受限于计算资源或时间，一般对 10^6 个模拟粒子的计算已经是个人电脑的上限；对多于 10^9 个模拟粒子的情况，一般需要集群计算机；对 $> 10^{10}$ 再更多模拟粒子情况，超算硬件也将很难负荷。
- 解析理论：连续体相空间分布函数 \Rightarrow 第13章将重点介绍。

12.0 问答预览

1. 什么是束流负载效应？

\Rightarrow 束流负载效应是指束团经过射频谐振腔时，自身引起的尾场会改变谐振腔原本的场，总体形成的有效电场将一定程度上影响粒子。

2. 什么是束团崩溃不稳定性？

¹回顾一下 kick-drift 模型的思路。

⇒ 束团崩溃不稳定性是一种横向集体不稳定性，由束团头部粒子驱动尾部粒子产生类似共振行为的运动导致束团崩溃。束团崩溃不稳定性可以是单束团或多束团不稳定性。

3. 什么是罗宾逊不稳定性?

⇒ 罗宾逊不稳定性是一种纵向集体不稳定性，由束团经过谐振腔时留下的尾场扰动后续绕行束团导致束团不稳定。罗宾逊不稳定性可以是单束团或多束团不稳定性。

4. 什么是强头尾不稳定性? 与束团崩溃不稳定性有什么区别?

⇒ 强头尾不稳定性是一种横向单束团集体不稳定性，由束团头部粒子驱动尾部粒子产生共振运动，与束团崩溃不稳定性不同，束团在储存环中经历纵向同步振荡，导致头部尾部粒子角色互换，从而产生双向循环驱动。

5. 什么是头尾不稳定性? 与强头尾不稳定性有什么区别?

⇒ 头尾不稳定性是一种横向单束团集体不稳定性，由束团头部粒子驱动尾部粒子产生共振运动，与强头尾不稳定性不同，额外考虑了色品效应，导致粒子运动与尾场相位错开 90° ，从而产生集体不稳定性。

6. 什么是耦合束团不稳定性?

⇒ 耦合束团不稳定性是一种多束团集体效应，由束团之间的相互作用导致束团不稳定。还可细分横向与纵向耦合束团不稳定性。

7. 什么是宏粒子模型? 它的优点和缺点是什么?

⇒ 宏粒子模型将束团视为单个或少数几个代表性粒子，通过其运动方程研究集体动力学问题。优点是分析简单，物理图像清晰；如果仅用单个宏粒子，缺点是无法体现束团内部的动力学过程。

8. 什么是反馈系统? 它在抑制集体效应中起到什么作用?

⇒ 反馈系统通过先检测束团参数特征，计算修正信号，并通过制动器修正束团轨迹，从而抑制集体效应。

9. 什么是驱动谐振子模型? 它如何用于分析集体效应?

⇒ 驱动谐振子模型将集体效应的尾场或阻抗函数视为驱动源项，通过分析简谐振子的宏粒子(或束团质心)响应来研究集体效应。

10. 什么是集总模型和分散模型? 适用条件为何?

⇒ 集总模型假设尾场或阻抗集中在特定位置，适用于分析束团在储存环中多圈绕行的动力学过程；分散模型假设尾场或阻抗平均分散在传输段，适用于分析束团的单次经过动力学过程。两者在 $|\delta\nu| \ll 1/2\pi$ 时可视为等价。

12.1 粒子加速器集体不稳定性年代表

自上世纪 50 年代末和 60 年代初以来，高能粒子加速器中的集体不稳定性就已经开始被研究。这个主题的重要性在于它是决定加速器最终性能的主要因素之一。多年来，这一主题的发展可以通过发现、理解和抑制多种集体不稳定性机制来证明。每个加速器在追求性能的过程中，都会遇到由束团电流强度造成的效果（“天花板”）。在分析、理解和可能抑制一效应之后，随着流强进一步提高，新的集体效应会出现。这个过程不断重复²，最终结果是对加速器的更深刻理解和达到更高的性能。以下总结加速器集体不稳定性被发现时的大致时间表：

- negative mass instability (1959)
- resistive wall instability (1960)
- Robinson instability (1964)
- beam breakup instability (1966)
- head-tail instability (1969)
- microwave instability (1969)
- Landau damping (1969) - a stabilizing mechanism
- beam-beam limit in colliders (1971)
- potential well distortion (1971) - Haissinski equation
- Sacherer formalism (1972) - more rigorous treatment
- anomalous bunch lengthening (1974)
- transverse mode coupling instability (1980)
- hose instability (1987)
- coherent synchrotron radiation instability (1990)
- sawtooth instability (1993)
- electron beam-ion instability (1997)
- microbunching instability (2005)



笔记 此讲义仅讨论其中一些集体效应，对其它效应感兴趣的读者，可参考 Alexander Wu Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020) 一书的 Chapter 8、Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 或 King-Yuen Ng, Physics of Intensity Dependent Beam Instabilities, World Scientific (2005)。



笔记 在 Alexander Wu Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020) 一书的 Chapter 8 开头提到，除个别研究每个效应 — 即 **各个击破**，集体效应间的相互影响 (interplay) 将是未来研究集体效应的可能方向之一。

²因此，一台加速器永远不会“过时”，因为总是可以无止尽地 push 该加速器性能。

12.2 束流负载基本定理

参考图 12.1, 理想情况下, RF 谐振腔提供粒子加速需要的纵向电场。束团经过 RF 谐振腔时会额外引起尾场, 从而改变谐振腔的有效电场(电位)。在束流存在时的运行模式下, 有必要对 RF 谐振腔进行适当的调整以补偿此效应。

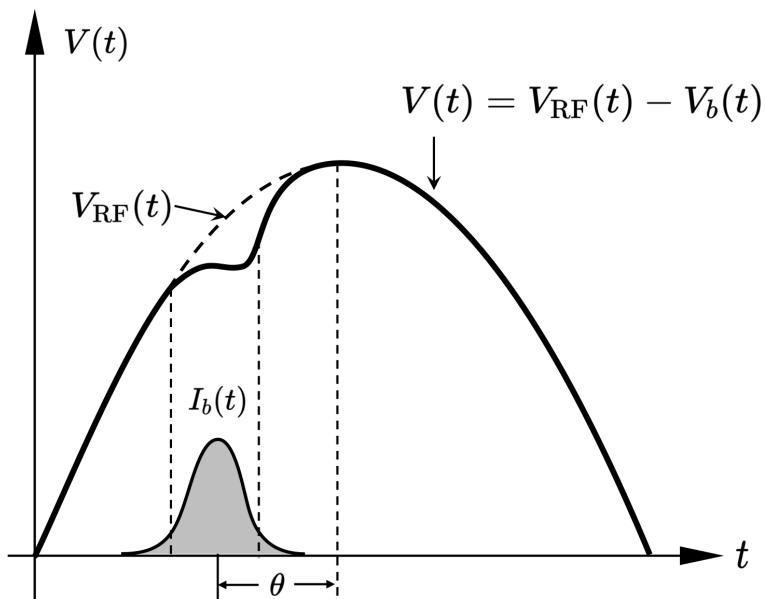


图 12.1: 束流负载效应。束团经过 RF 谐振腔时, 感受到的加速梯度与理想情况相比, 存在差异, 此差异由于束团自身尾场导致。

定理 12.1. 束流负载基本定理 (fundamental theorem of beam loading)

当带电粒子束团经过 RF 谐振腔时, 束团将感受到其自身引起的尾场振幅最大值的一半 ($\frac{1}{2}$)。

证明 假设在 RF 谐振腔里, 储存的能量为 $\mathcal{W} = \alpha V^2$, 其中, V 为电位(或电场振幅), α 为比例常数。假设总电荷量 q 、电流 I_b 的束团经过此谐振腔时引起的电位为 V_b 。在经过谐振腔时, 此束团可能感受到自己产生的电位的一部分(以 $0 \leq f \leq 1$ 表示)有效电位为 $V_e = fV_b$, 其中, 假设 V_b 与束团电流 I_b 可能存在相位差 χ 。

现在, 考虑两个完全一样、电荷量 q 、电流 I_b 的两束团, 一前一后分别进入 RF 谐振腔。两个束团将分别引起尾场, 对应的电位有(相量形式)

$$\begin{aligned}\tilde{V}_b(1) &= V_b \\ \tilde{V}_b(2) &= \tilde{V}_b(1)e^{i\theta} = V_b e^{i\theta}\end{aligned}$$

这些尾场电位将在谐振腔中残留一段时间，储存的能量可写成

$$\begin{aligned} W_c &= \alpha |\tilde{V}_b(1) + \tilde{V}_b(2)|^2 = \alpha |V_b(1 + e^{i\theta})V_b(1 + e^{-i\theta})| \\ &= \alpha \left(2V_b \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 = 2\alpha V_b^2 (1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (12.1)$$

此两束团将感受到自己产生的尾场电位的一部分为有效电位，并且，后方束团还感受到前方束团留下来的一部分尾场。此两束团在进入与离开谐振腔时，总体能量的改变可写为 ΔU ，有

$$\Delta U = [qV_e] + [qV_e + qV_b \cos(\chi + \theta)] \quad (12.2)$$

由能量守恒定律，此两束团在与进入离开谐振腔前后的能量改变即它们残留尾场储存在谐振腔的能量， $\Delta U = W_c$ 。比较两式系数，得

$$\chi = 0, \quad V_b = \frac{q}{2\alpha}, \quad V_e = \frac{1}{2}V_b, \quad f = \frac{1}{2} \quad (12.3)$$

其中， $f = \frac{1}{2}$ 表示束团经过 RF 谐振腔时，将感受到其引起的尾场电位的 $\frac{1}{2}$ 。

注 以上“束团”可换为粒子。

注 更详细的讨论可以参考 S.Y. Lee, Accelerator Physics, 4th ed., pp.340-341 或 P.B. Wilson, Introduction to wakefields and wake potentials, AIP Conference Proceedings **184**, 525 (1989). <https://doi.org/10.1063/1.38045>

12.3 几种常见的束团不稳定性

在开始介绍几种常见的束团不稳定性之前，我们先对加速器集体不稳定性进行“分类”，期许能帮助学习与理解。此处的分类方式不是唯一，但一般来说是合理、实用的分类：

- 单束团不稳定性 (single-bunch instability) 或多束团不稳定性 (multi-bunch instability);
- 单次经过 (single-pass) 不稳定性、少数几次经过 (few-pass) 不稳定性或储存环 (∞ 次) 不稳定性;
- 横向 (transverse) 不稳定性或纵向 (longitudinal) 不稳定性。

12.3.1 束团崩溃不稳定性

作为第一个束团集体不稳定性例子，我们考虑直线加速器中单次经过的束团崩溃横向不稳定性 (beam breakup instability, BBU)，属于 single-pass single-bunch transverse instability。

现在考虑一束团，束团以两个宏粒子表征，分别位于束团的前方 (“头部”，标记为 1 号粒子) 与后方 (“尾部”，标记为 2 号粒子)。下面我们将看到，虽然一个束团内包含许多粒子，但是仅用两个具有代表性的宏粒子，其实已经可以包含 BBU 深刻的物理图像。由于尾场影响的是后方粒子，粒子 1 产生尾场，但其运动不受尾场影响。因此，粒子 1 的横向运动可以视为单纯的 betatron 振荡，有³

$$y_1(s) = \hat{y} \cos k_\beta s \quad (12.4)$$

其中， \hat{y} 为 betatron 振荡的振幅， $k_\beta = \nu_\beta/R$ 为 betatron 振荡波数，这里用了平滑近似。注意到，上式为 Hill 方程 $y'' + k_\beta^2 y = 0$ 的解。距离粒子 1 后方 $|z|$ 处的粒子 2，其运动除了纯光学的 betatron 振荡外，还受前方粒子 1 残留的尾场的影响，因此，其运动方程为⁴，⁵

$$y_2'' + k_\beta^2 y_2 = -\frac{Ne^2 W_\perp(z)}{2EL} y_1 = -\frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 W_\perp(z)}{2\gamma L} \hat{y} \cos k_\beta s \quad (12.7)$$

³这里不限于 y 方向， x 方向也可以。

⁴此式为结合洛伦兹力的牛顿运动方程。假设粒子能量 γ 不变，头部尾部宏粒子携带同号电荷，考虑头部尾部宏粒子电荷量分别有 $q_{\text{头部}} = q_{\text{尾部}} = Ne/2$ ，质量有 $Nm/2$ ，对尾部宏粒子

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{coll}} \Rightarrow \gamma \left(\frac{N}{2} m \right) \frac{d^2 y}{dt^2} = F_{y,\text{ext}} + F_{y,\text{coll}} \\ F_{y,\text{coll}} &\rightarrow \frac{1}{L} \int F_{y,\text{coll}} ds = -\frac{q_1 q_2 y}{L} W_\perp \end{aligned} \quad (12.5)$$

其中， L 为结构长度 (记得 impulse approximation)。利用 $ds = cdt$ ， $F_{y,\text{ext}} = -c^2 k_\beta^2 y$ 导致 y 方向 betatron 振荡，于是有

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + k_\beta^2 y = -\frac{e^2 N W_\perp}{2EL} y \quad (12.6)$$

⁵有些读者或许认为此处的 $\cos k_\beta s$ 是不是该写成 $\cos k_\beta(s+z)$ 更好？此写法涉及追赶时间的概念，这里暂且忽略此效应。

其中, $E = \gamma mc^2$, L 为感兴趣的结构长度, 如单个谐振腔周期长度。 $\frac{W_\perp}{L}$ 为单位长度的横向尾场函数。这里的 $r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 m_0 c^2$ 为粒子经典半径, 仅视为一复合常数。注意到, 分母的 2 表征此双粒子模型中的粒子 1 与粒子 2 各分享一半的束团电荷。求解上式时, 为了简单起见, 一般假设 k_β 为常数, 此近似成立的条件为 $k_\beta L \ll 1$ 或传输段聚焦散焦沿 s 为均匀分布。由高等数学知识, 此方程有如下解

$$y_2(s) = \hat{y} \left[\cos k_\beta s - \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 W_\perp(z)}{4k_\beta \gamma L} s \sin k_\beta s \right] \quad (12.8)$$

混着共振项的集体不稳定。

其中, 第一项表征纯光学、自由不受拘束的 betatron 振荡, 第二项则为尾场驱动的共振项。由于此共振项与 s 成正比, 因此束团横向振荡的振幅随着束团前进 s 增加时, 将快速增加, 最终导致束团不稳定, 称束团崩溃不稳定性 (BBU)。

为了定量描述此不稳定性, 令共振项的振幅为

$$\Upsilon = -\frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 W_\perp(z) L_0}{4k_\beta \gamma L} \quad (12.9)$$

其中, $L_0 \geq L$ 为结构总长度。对短束团而言, 由于 $W_\perp(z) \leq 0$, $\Upsilon \geq 0$ 。图 12.2 画出束团头部与尾部随着 s 前进时, 束团 yz 分布的大致样貌, 可以看到, 当束团头部在轴上时, 束团尾部偏离轴的振幅最大。

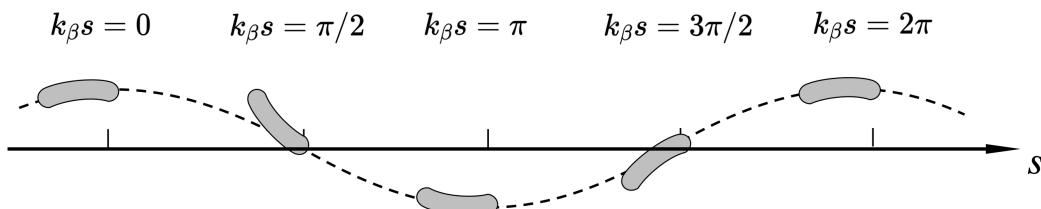


图 12.2: 束团崩溃不稳定性示意图。尾部粒子的振荡行为类似于 $s \sin k_\beta s$ 。

定理 12.2. 束团崩溃不稳定性 (BBU)

又称二极尾场束团崩溃不稳定性 (dipole-wake beam breakup instability), 为单束团头部驱动尾部导致的横向集体不稳定性, 属短程效应。一般来说, 要保持束团品质不至于太差的话, 要求

$$|\Upsilon \hat{y}| \ll \text{束团横向尺寸} \quad (12.10)$$

其中,

$$\Upsilon = -\frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 W_\perp(z) L_0}{4k_\beta \gamma L}$$

一种抑制束团崩溃不稳定的思路为提供束团尾部粒子更强的聚焦使其不至于崩溃, 称 BNS 阻尼 (BNS damping) 或 BNS 聚焦 (BNS focusing)^a, 可通过如下方式实现:

- 射频四极铁 (RF quadrupole magnet, RFQM), 其能提供束团内不同纵向位置有不同强度的横向聚焦场。根据 Panofsky-Wenzel 定理, 在不同纵向位置的粒子, 由于 RFQM, 粒子横向动量的改变将引起粒子的纵向振荡频率存在横向

坐标依存关系，即 RFQM 将导致束团有额外的纵向振荡频率分散，即提供了一种朗道阻尼^b。

- 妥善安排束团于射频腔不同相位，致使束团尾部能量较低，利用磁聚焦结构的色品 ξ ，使产生束团头尾有不同的聚焦强度

$$\frac{\Delta k_\beta}{k_0} = \xi \frac{\Delta E}{E} \quad (12.11)$$

其中， $k_0 = 2\pi/L_0$ ， L_0 为直线加速器总长。这也能提供一种阻尼机制。

^aBalakin, Novokhatsky, and Smirnov 于 1983 年提出。

^b更多讨论可参考 A. Grudiev, Radio frequency quadrupole for Landau damping in accelerators, Phys. Rev. Accel. Beams 17, 011001 (2014). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.17.011001>。感谢姜伯承老师提供此参考素材。 □

以上分析假设粒子能量恒定，且横向尾场函数 $W_\perp(z)$ 为常数，即束团纵向长度不变，只考虑横向振荡振幅的共振驱动。更复杂的 BBU 模型可包含：

1. 考虑粒子加速或减速过程，则纯光学运动方程需要推广为如下形式

$$\frac{d}{ds} \left[\gamma(s) \frac{dy_1}{ds} \right] + k_\beta^2 \gamma(s) y_1 = 0 \quad (12.12)$$

↔ 更多讨论可参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 pp. 139-141。

2. 考虑随束团内 z 改变的聚焦源 $k_\beta \rightarrow k_\beta + \Delta k_\beta \Rightarrow$ 利用此方式可以有效抑制束团崩溃不稳定性，称 BNS damping。

↔ 更多讨论可参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 pp. 142-143。

3. 考虑横向尾场函数不再是常数，而与横向位置 x 有关，称四极尾场束团崩溃不稳定性 (quadrupole-wake beam breakup instability)。

↔ 更多讨论可参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 §3.3。

✍ 练习 12.1 考虑 BBU，将两个宏粒子的情况推广至 N 个宏粒子模型。此模型可视为从单束团束团崩溃模型推广为多束团束团崩溃模型。 ■

解 参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 Exercise 3.6。 ■

注 比较第二册 §7.9 介绍过的单粒子共振。

💡 笔记 思考一下，这里分析的束团崩溃不稳定性，束团内头部粒子通过尾场不断驱动尾部粒子。对头部与尾部粒子，本质上有没有违反牛顿第三运动定律？

💡 笔记 以上分析 BBU 时，假设的尾场为短程尾场，尾场的有效长度 < 束长。但是，当束长

足够短时，短程尾场或许不再短程。特别是当多个极短束团间距也足够小时，短程尾场可能变成长程尾场。更多讨论可参考 C.-Y. Tsai et al., Coherent-radiation-induced longitudinal single-pass beam breakup instability of a steady-state microbunch train in an undulator, Phys. Rev. Accel. Beams **24**, 114401 (2021). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.114401>。

12.3.2 罗宾逊不稳定性

作为第二个束团集体不稳定性例子，我们考虑储存环同步加速器的罗宾逊不稳定性 (Robinson instability)，属于 multi-pass single-bunch longitudinal instability。动力学过程与前一小节介绍的束团崩溃不稳定性非常不同，值得琢磨。

在开始推导之前，以下给出一个分析储存环多圈不稳定性时经常使用的数学恒等式，能够化简 e 指数求和为 Dirac delta 函数求和，称 Poisson 求和公式。

定理 12.3. Poisson 求和公式 (Poisson sum formula)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx} = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi p) \quad (12.13)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\Omega)T_0 k} = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \Omega - \frac{2\pi}{T_0} p\right) \quad (12.14)$$

证明 利用傅里叶变换定义。

注 以上求和指标由 $k = -\infty$ 至 $+\infty$ 。如果采用单侧 Poisson 求和公式，从 $k = 0$ 至 $+\infty$ ，严谨的做法需要推广傅里叶变换的定义，此处不论。感兴趣的读者可参考 J.P. Skinner and P.J. Collins, A One-Sided Version of the Poisson Sum Formula for Semi-Infinite Array Green's Functions, IEEE TAP **45**, 4, 601 (1997). <https://doi.org/10.1109/8.564085>。 □

参考图 12.3，在环形加速器中，当一束团经过谐振腔结构时，粒子残留的尾场（或阻抗）其频率成分如果恰好满足谐振腔共振频率，则因为在共振频率的品质因数 Q 很大，尾场可能残留在谐振腔较长时间。当残留时间足够长时，后方绕行束团进入谐振腔结构就可能受到尾场扰动。此处“后方绕行束团”可以是其它束团，也可以是本来绕行的同一束团。存在某些适当条件时，束团可能无法变得不再稳定，称罗宾逊不稳定性 (Robinson instability)。

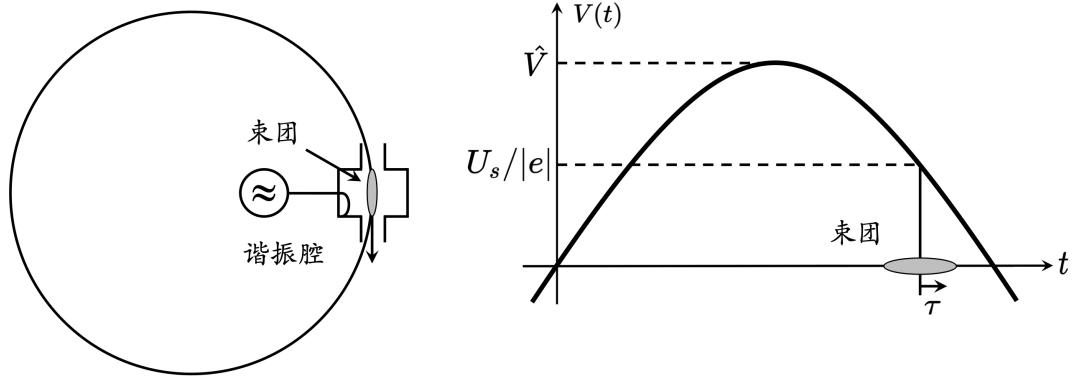


图 12.3: 单束团在储存环中逐圈绕行经过高频谐振腔。

首先，将单束团整体视为一个宏粒子，则在被动⁶谐振腔内，有如下纵向运动方程⁷

$$\begin{aligned} z_{n,\text{fin}} &= z_{n,\text{ini}} \\ \delta_{n,\text{fin}} &= \delta_{n,\text{ini}} + \frac{k_{s0}^2 C}{\eta} z_{n,\text{ini}} - \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0}{\gamma} \sum_{k=0}^n W_{\parallel}(kC - nC + z_n - z_k) \end{aligned} \quad (12.16)$$

其中，下标 ini 表示束团在进入谐振腔前，下标 fin 则表示束团离开谐振腔时。此处 $\frac{4\pi\epsilon_0 N r_0}{\gamma} = \frac{e^2 N}{\gamma m c^2} = \frac{e^2 N}{E}$ 。 W_{\parallel} 为粒子经过谐振腔时的纵向尾场函数，其宗量 $kC - nC + z_n - z_k$ 表征束团在第 n 圈受到第 k 圈产生尾场的影响。 k_{s0} 项则为谐振腔提供的纵向聚焦。在谐振腔外储存环剩余部分，束团有如下纵向运动方程

$$\begin{aligned} z_{n+1,\text{ini}} &= z_{n,\text{ini}} - \eta C \delta_{n,\text{fin}} \\ \delta_{n+1,\text{ini}} &= \delta_{n,\text{fin}} \end{aligned} \quad (12.17)$$

其中， C 为储存环周长， η 为储存环滑相因子， k_{s0} 为同步振荡波数。由于 $|kC - nC| \gg |z_n - z_k|$ ，利用泰勒展开，有如下尾场函数近似

$$W_{\parallel}(kC - nC + z_n - z_k) \approx W_{\parallel}(kC - nC) + (z_n - z_k) W'_{\parallel}(kC - nC) \quad (12.18)$$

以上两组方程可以合并写成如下的二阶差分方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_n}{dn^2} + k_{s0}^2 C^2 z_n &= \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta C}{\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} W_{\parallel}(kC - nC + z_n - z_k) \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta C}{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\parallel}(kC - nC + z_n - z_k) \\ &\approx \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta C}{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [W_{\parallel}(kC - nC) + (z_n - z_k) W'_{\parallel}(kC - nC)] \end{aligned} \quad (12.19)$$

⁶主动谐振腔表示谐振腔内已经存在外部嵌入的场，被动谐振腔指的是在粒子经过之前，内部不存在场。

⁷此式为结合洛伦兹力的牛顿运动方程。假设粒子能量 γ 不变，现在宏粒子代表束团整体，因此有电荷量 $q = Ne$ ，质量有 Nm

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{dt} = F_z &\Rightarrow \frac{d\delta}{ds} = \frac{1}{\gamma(Nm)\beta c} \frac{dp_z}{dt} = -\frac{Ne^2}{\gamma m c^2 C} W_{\parallel} \\ F_z \rightarrow \frac{1}{C} \int F_z ds &= -\frac{q^2}{C} W_{\parallel} \end{aligned} \quad (12.15)$$

其中， C 为储存环周长。

上式中，等式右边求和内的第一项即 §11.7.5 介绍的能量损耗因子。这一项因为不包含 z_n, z_k ，属于“静态”能量损失，又称寄生能量损失 (parasitic energy loss)，不影响集体效应动力学过程。第二项里的 $z_n W'_{\parallel}(kC - nC)$ 对应势阱畸变 (potential well distortion, PWD)。势阱畸变将在下一章 §13.2 介绍。由于此项与 z_n 有关，也属于“静态”项，可挪到等式左边与 $k_s^2 C^2 z_n$ 项合并，不作为驱动项参与集体效应动力学。以下将看到，这一项也可以不挪到等式左边，还是可以分析。第二项里的 $z_k W'_{\parallel}(kC - nC)$ 将作为等式右边驱动项参与集体动力学过程，是导致罗宾逊不稳定性根本原因。

进一步化简，有

$$\frac{d^2 z_n}{dn^2} + k_s^2 C^2 z_n = \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta C}{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [W_{\parallel}(kC - nC) - W'_{\parallel}(kC - nC) z_k] \quad (12.20)$$

其中， $k_s^2 = k_{s0}^2 - \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta}{\gamma C} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W'_{\parallel}(kC - nC)$ 。

略去寄生能量损失项，为求解上面方程，假设⁸

$$z_n \propto e^{-in\Omega T_0} \quad (12.21)$$

代入方程，令 $k - n = k$ 哑变元代换，有

$$\begin{aligned} \Omega^2 - \omega_s^2 &= \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta c}{\gamma T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\Omega T_0} W'_{\parallel}(kC) \\ &= i \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta}{\gamma T_0^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \Omega) Z_{\parallel}(p\omega_0 + \Omega) \end{aligned} \quad (12.22)$$

其中， $\omega_s = ck_s$ ，上式第二个等号使用了 Poisson 求和公式，并采用了尾场与阻抗的傅里叶变换。此式称罗宾逊不稳定的色散方程 (dispersion equation)，或称久期方程 (secular equation)。

上面提到，势阱畸变项 $z_n \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta C}{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W'_{\parallel}(kC - nC)$ 也可以不挪到等式左边，还是可以分析。如果保留在等式右边，则有

$$\frac{d^2 z_n}{dn^2} + k_s^2 C^2 z_n = \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta C}{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [W'_{\parallel}(kC - nC) z_n - W'_{\parallel}(kC - nC) z_k] \quad (12.23)$$

还是假设 $z_n \propto e^{-in\Omega T_0}$ ，则色散方程有

$$\begin{aligned} \Omega^2 - \omega_s^2 &= -\frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta c}{\gamma T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-ik\Omega T_0}) W'_{\parallel}(kC) \\ &= -i \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta}{\gamma T_0^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [p\omega_0 Z_{\parallel}(p\omega_0) - (p\omega_0 + \Omega) Z_{\parallel}(p\omega_0 + \Omega)] \end{aligned} \quad (12.24)$$

由此可以看到，等式右边的第一项

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} W'_{\parallel}(kC) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} p\omega_0 Z_{\parallel}(p\omega_0) \quad (12.25)$$

⁸思考一下会发现，这里只需要正比符号即足够，不需要解 z_n 的振幅。这种求解方式其实只求解方程的特征值，由特征值判断动态系统的稳定性。

对应势阱畸变效应。

直接求解此方程的 Ω 不容易, 因为等式两边都包含 Ω 。因此, 一般采用迭代近似解^{9,10}。在束团电荷较低时, 集体效应不明显, 有 $\text{Re } \Omega \approx \omega_s$ 。因此, 等式右边的 Ω 以 ω_s 代入, 默认等式左边的 Ω 为一次迭代后的解。求得的特征值 Ω 中, 实部表征振荡频移 (frequency shift), 虚部表征束团振幅增长/衰减率 (growth/damping rate)。考虑

$$\Omega^2 - \omega_s^2 = (\Omega + \omega_s)(\Omega - \omega_s) \approx 2\omega_s(\Omega - \omega_s) \quad (12.26)$$

则上式表征振荡频移的实部有

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \text{Re}(\Omega - \omega_s) \\ &= \frac{2\pi\epsilon_0 N r_0 \eta}{\gamma T_0^2 \omega_s} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [p\omega_0 \text{Im} Z_{\parallel}(p\omega_0) - (p\omega_0 + \omega_s) \text{Im} Z_{\parallel}(p\omega_0 + \omega_s)] \end{aligned} \quad (12.27)$$

其中, 等式右边求和里的第一项标识势阱畸变, 第二项则为集体动力学项。

虚部表征束团质心振荡振幅增长/衰减率, 有

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &= \text{Im}(\Omega - \omega_s) \\ &= \frac{2\pi\epsilon_0 N r_0 \eta}{\gamma T_0^2 \omega_s} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \omega_s) \text{Re} Z_{\parallel}(p\omega_0 + \omega_s) \left\{ \begin{array}{l} > 0, \text{unstable} \\ < 0, \text{stable} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (12.28)$$

对 RLC 型谐振腔阻抗, 有

$$Z_{\parallel}(\omega) = \frac{R_S}{1 + iQ \left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R} \right)} \quad (12.29)$$

假设 $\omega_s \ll \omega_R/2Q$ 且 $|\omega_R - h\omega_0| \ll \omega_R/2Q$, 求和可以进一步化简, 有

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &= \frac{2\pi\epsilon_0 N r_0 \eta h \omega_0}{\gamma T_0^2 \omega_s} [\text{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 + \omega_s) - \text{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 - \omega_s)] \\ &\approx \frac{8\pi\epsilon_0 N r_0 \eta R_s Q^2 \Delta\omega}{\pi \gamma T_0 h} \end{aligned} \quad (12.30)$$

其中, $\Delta\omega \equiv \omega_R - h\omega_0$ 。

从以上推导, 我们得到了窄带谐振腔阻抗导致的单束团多圈动力学特征值, 其增长率 τ^{-1} 的符号决定系统稳定性。现在, 参考图 12.4, 根据 τ^{-1} 的解析表示式中的

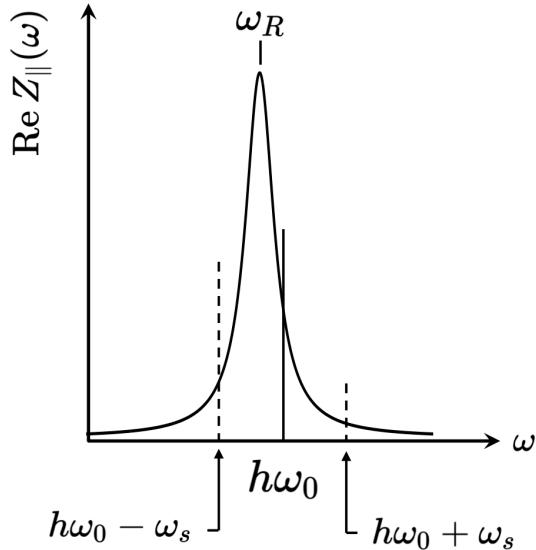
$$\tau^{-1} \propto \eta [\text{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 + \omega_s) - \text{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 - \omega_s)] \quad (12.31)$$

⁹这里采用的近似有两层意思, 一层为数学, 一层为物理。数学上的意思可以视为迭代, 令自洽意义上的解为 Ω , 通过一阶阶迭代, 可写为 $\Omega = \Omega^{(0)} + \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)} + \dots$ 。默认结果能收敛, 那么, $\Omega^{(0)} = \omega_s \in \mathbb{R}$ 。将 $\Omega^{(0)}$ 代入等式右边, 将等式左边得到的 Ω 记为 $\Omega^{(1)} \in \mathbb{C}$, 然后再将 $\Omega^{(1)}$ 作为已知, 代入等式右边, 从等式左边得到的 Ω 记为 $\Omega^{(2)} \in \mathbb{C}$ 。如此一阶阶迭代, 原则上可以得到越来越准确的 Ω 。物理上来看, 这么做要小心一种情况, 即当阻抗函数为窄带函数时, 此时 Ω 如果稍不准确, 那么阻抗函数在 $\Omega + p\omega_0$ 与 $\omega_s + p\omega_0$ 的取值可能就会有较大差异。一般常温谐振腔 $Q \sim 10^4$ 问题可能不大, 但超导谐振腔 $Q \sim 10^{10}$ 或激光谐振腔 $Q \sim 10^{12}$ 或许要留意。

¹⁰此迭代近似解未必总是成立。当纵向运动受 RF 谐振腔逐圈影响明显时, 近似可能不成立。更多讨论可参考 A. Mosnier, F. Orsini, and B. Phung, Analysis of the Heavily Beam-loaded SOLEIL RF System, WEP28G, Proc. EPAC98. <https://accelconf.web.cern.ch/e98/PAPERS/WEP28G.PDF>。

可以看到，在穿越能量以上 (above transition) 区间，有 $\eta > 0$ ，则当 $\operatorname{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 + \omega_s) > \operatorname{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 - \omega_s)$ 时， $\tau^{-1} > 0$ ，束团将变得不稳定；反之，束团将保持稳定。在 below transition 时，结论颠倒。一般来说，改变粒子逐圈绕行频率 ω_0 不容易，所以抑制罗宾逊不稳定性手段一般调变谐振腔的 ω_R ，使与 $h\omega_0$ 拉开适当距离。

$$\operatorname{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 + \omega_s) - \operatorname{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 - \omega_s) < 0$$



$$\operatorname{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 + \omega_s) - \operatorname{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 - \omega_s) > 0$$

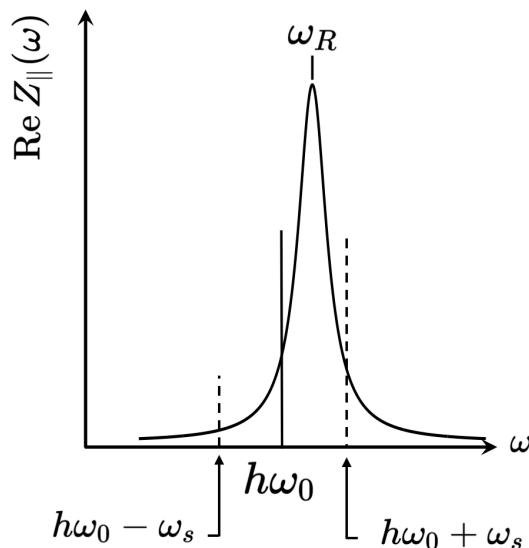


图 12.4：上图在穿越能量以上 (above transition) 区间为稳定；下图在穿越能量以下 (below transition) 区间为稳定。或者说，上图在穿越能量以下 (below transition) 时不稳定；下图在穿越能量以上 (above transition) 时不稳定。

物理图像 以上呈现的是目前最普遍、关于罗宾逊不稳定的介绍。从宏粒子模型出发，列写储存环多圈运动方程，通过 $z_n \propto e^{-in\Omega T_0}$ ，方程从时域转到频域，得到色散方程或

久期方程，最后再通过迭代解法求出频移与不稳定性增长率。图 12.4 对不稳定的呈现方式在频域，体现的是不稳定性增长率与宏粒子束团谐波绕行频率、同步振荡频率与阻抗采样频率之间的差异关系，此种呈现方式并没有给出太多关于罗宾逊不稳定的物理图像。此处尝试从时域给出物理图像。

考虑储存环操作在穿越能量以上 (above transition) 区间，根据 §8.2 介绍的同步加速器稳相原理，对 $\eta > 0$ 情况，较高能量的粒子较晚抵达，当 $\pi/2 < \phi_s < \pi$ 时，获得加速或能量补偿较少 $\Delta E < U_0$ ，则能量将变得靠近同步粒子的能量，下一圈绕行时间将相对前一圈较早到达，更接近同步粒子的抵达时间。不妨设想一个简化情况，即忽略同步辐射能量损失，假设 $\phi_s = \pi$ 。

由此，设想一个情况，如果一束团中的粒子有 $\delta > 0$ ，且由于尾场或阻抗影响，导致逐圈损失的能量较少，即感受到的阻抗 $\text{Re } Z_{\parallel}$ 较小 (对应图 12.5 右上角红色束团的 $\delta > 0$ 的部分粒子)，那么，得到的 RF cavity 能量补偿就少，此粒子就无法有效通过稳相原理使其行为更接近同步粒子，如此一来，束团就不再那么稳定。此种情况如果逐圈积累，那么最终束团将可能变得不稳定。相反地，如果 $-\delta > 0$ 的粒子由于尾场或阻抗影响，导致逐圈损失的能量较多，即感受到的阻抗 $\text{Re } Z_{\parallel}$ 较大 (对应图 12.5 左上角蓝色束团的 $\delta > 0$ 的部分粒子)，那么，得到的 RF cavity 能量补偿就多，此粒子就能借助稳相原理使其行为更快地接近同步粒子，如此一来，束团就更趋于稳定。以上描述的物理过程用到了 §8.2 介绍的纵向动力学过程

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{\Delta T}{T_0} = -\eta\delta \Rightarrow \omega = \omega_0(1 - \eta\delta) \quad (12.32)$$

定理 12.4. 罗宾逊不稳定性 (Robinson instability)

在储存环中，粒子逐圈经过 RF 谐振腔，谐振频率一般非常接近粒子绕行频率的整数倍，即， $\omega_{\text{RF}} \approx h\omega_0$ 。在这个谐振频率附近，为了更有效地储存加速粒子的电磁场，通常具有窄带特性，即， Q 值很大。因此，不可避免地，谐振腔在这个谐振频率附近也有非常大的阻抗。也就是说，当粒子经过该谐振腔时，容易留下 $\omega \approx h\omega_{\text{RF}}$ 频率分量的尾场。分析发现，当加速器操作在穿越能量以上 (above transition) 时 ($\eta > 0$)，在不考虑其它可能的集体效应下，如果要束团稳定运行，则谐振腔频率应与绕行频率有如下关系 [称罗宾逊条件 (Robinson criterion)]

$$\omega_{\text{RF}} < h\omega_0 \quad (12.33)$$

或者，谐振腔频率应与绕行频率不满足以上关系时，则束团将不稳定，称为罗宾逊不稳定性 (Robinson instability)。

利用宏粒子模型，可以给出束团质心逐圈绕行时振荡振幅的增长率，当 $\tau^{-1} > 0$

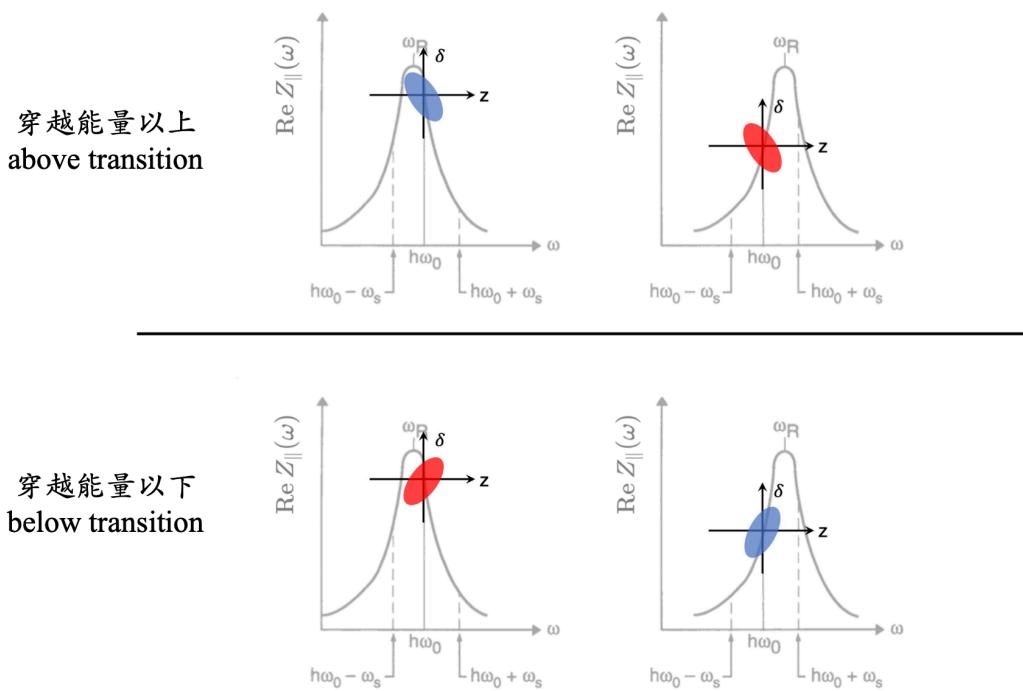


图 12.5: 罗宾逊机制。束团中的不同粒子在储存环中逐圈绕行的不同行为。上排为穿越能量以上 (above transition) 情况, 下排为穿越能量以下 (below transition) 情况。蓝色束团表示整体稳定, 红色束团表示不稳定。

(或衰减率, 当 $\tau^{-1} \leq 0$), 其中

$$\begin{aligned}\tau^{-1} &= \text{Im}(\Omega - \omega_s) \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta}{2\gamma T_0^2 \omega_s} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \omega_s) \text{Re } Z_{||}(p\omega_0 + \omega_s) \\ &\approx \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta h \omega_0}{2\gamma T_0^2 \omega_s} [\text{Re } Z_{||}(h\omega_0 + \omega_s) - \text{Re } Z_{||}(h\omega_0 - \omega_s)]\end{aligned}\quad (12.34)$$

$$\approx \frac{8\pi\epsilon_0 N r_0 \eta R_S Q^2 \Delta\omega}{\pi\gamma T_0 h} \quad (12.35)$$

上式第一个近似假设了阻抗为窄带阻抗, 第二个近似进一步假设阻抗为 RLC 形态的窄带阻抗。

除了振荡振幅的增长率或衰减率外, 还有相应的频移 (frequency shift), 有

$$\begin{aligned}\Delta\Omega &= \text{Re}(\Omega - \omega_s) \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta}{2\gamma T_0^2 \omega_s} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [p\omega_0 \text{Im } Z_{||}(p\omega_0) - (p\omega_0 + \omega_s) \text{Im } Z_{||}(p\omega_0 + \omega_s)] \\ &\approx -\frac{48\pi\epsilon_0 N r_0 \eta R_S Q^3 \nu_s \Delta\omega}{\pi\gamma T_0 h^2}\end{aligned}\quad (12.36)$$

其中,

- N 为束团内粒子总个数

- r_0 为粒子的经典半径；对电子，有 $r_0 = r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.8179403 \times 10^{-15}$ m；对质子，有 $r_0 = r_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p c^2} \approx 1.534698 \times 10^{-18}$ m
- $\eta = \alpha - \frac{1}{\gamma^2}$ 为滑相因子
- γ 为粒子能量的洛伦兹因子
- T_0 为绕行时间周期
- ω_s 为同步振荡频率，有 $\omega_s = \omega_0 \sqrt{\frac{h|e|V_{RF}|\eta \cos \phi_s|}{2\pi\beta^2 E}} = \frac{c}{R} \sqrt{\frac{h|e|V_{RF}|\eta \cos \phi_s|}{2\pi E}}$
- $\nu_s = \omega_s/\omega_0$ ，其中， ω_0 为绕行(角)频率
- $\Delta\omega = \omega_{RF} - h\omega_0$
- Q 为谐振腔品质因数
- R_S 为谐振腔的分路阻抗(shunt impedance)

注 当加速器操作在 below transition 时 ($\eta < 0$)，结果相反。当加速器操作在 $\eta = 0$ 时，以上分析不适用。

证明 参考 A.W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书 §4.1。

注 一般来说，对室温谐振腔，调频偏离范围应小于同步振荡频率 $\omega_s = 2\pi f_s \approx 2\pi(10 \sim 20 \text{ kHz})$ 。对超导谐振腔，调频范围有更多考虑因素，一般在 $2 \sim 4 \text{ kHz}$ 左右。因超导谐振腔的 Q 很大，此调频范围其实相对宽得多。

注 此处分析忽略了 RF 反馈、低电平系统等对束团动力学的影响。更完整的分析需要推广上面介绍的模型，特别是频率调谐 $\Delta\omega$ 取值。

注 Robinson 不稳定性本质上为一种径向模耦合(radial mode coupling)。关于径向模耦合与角向模耦合的讨论，可参考 §13.6。 □



笔记 这里介绍的罗宾逊不稳定性又称交流罗宾逊不稳定性(AC Robinson instability)，本质上为一种径向模耦合不稳定性。还有一种罗宾逊不稳定性称直流罗宾逊不稳定性(DC Robinson instability)，产生的机制不一样。此处没有介绍，感兴趣的读者可参考 T. Yamaguchi et al., Systematic study on the static Robinson instability in an electron storage ring, Phys. Rev. Accel. Beams **26**, 044401 (2023). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.26.044401>。

练习 12.2 考虑一储存环， $\eta = 0.03$ (假设穿越能量以上情况)，电子束团参数有： $N = 10^{11}$, $E = 1 \text{ GeV}$, $\omega_0 = 9.4 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $\nu_s = 0.01$, 谐振腔参数有： $h\omega_0/2\pi = 360 \text{ MHz}$, $R_S = 1 \text{ M}\Omega$, $Q = 2000$, $h = 240$ 。假设谐振腔调谐到不稳定区间，与谐波绕行频率差为 $\Delta\omega/2\pi = 10 \text{ kHz}$ ，估算频移与不稳定增长时间。 ■

解

$$\Delta\Omega \approx 0.2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}, \quad \tau \approx 1.2 \text{ ms}$$



笔记 回忆一下, §1.13 讨论谐振腔的时候, 介绍过几种不同的品质因数, 包含固有品质因数 Q_0 、有载品质因数 Q_L 、外部品质因数 Q_e , 想一下, 这里的品质因数是哪一种?

✍ **练习 12.3** 基于上面给定的参数, 利用 MATLAB, 数值求解逐圈宏粒子的运动方程, 验证理论模型的估算结果。 ■ ■

解

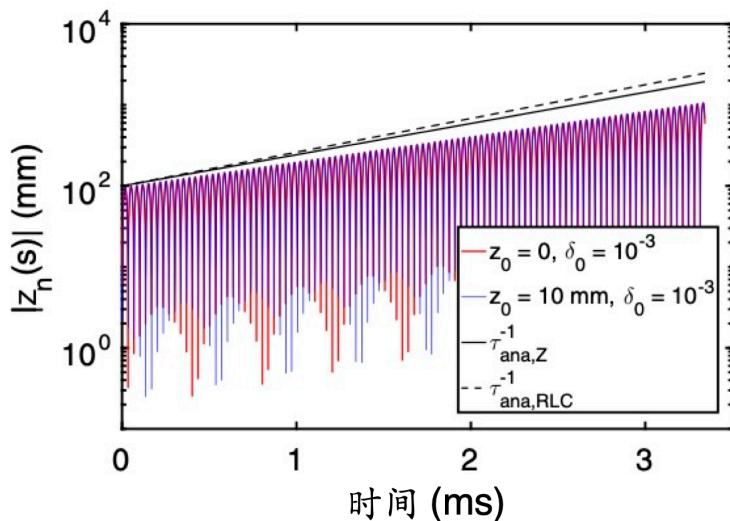


图 12.6: 束团纵向质心坐标随时间逐圈演化, 其中, 红线与蓝线为逐圈宏粒子模型计算结果, 实线是通过对 RLC 型谐振腔阻抗数值取值代入增长率求和公式得到, 即 Eq.(12.34), 虚线则是通过进一步简化 RLC 型谐振腔的解析近似模型得到, 即 Eq.(12.35)。

以上分析假设了单束团、多圈、由纵向长程、单模尾场驱动的纵向集体不稳定性。罗宾逊不稳定性分析还可以进一步推广到其它情况, 包含:

- 一般谐振腔不只存在单模, 将单模 RLC 谐振腔模型推广至包含高阶模情况, 将发现要通过调变谐振腔不同模之间的谐振频率以同时抑制所有可能的不稳定模式未必容易 ⇒ [躲得过初一, 未必躲得过十五]。
- 从单束团多圈推广为多束团多圈, 第 n 个束团受其余 $M - 1$ 束团与第 k 圈尾场影响的运动方程有

$$z_n''(s) + k_{s0}^2 z_n(s) = \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta}{\gamma C} \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} W_{\parallel} \left[-kC - \frac{m-n}{M}C + z_n(s) - z_m \left(s - kC - \frac{m-n}{M}C \right) \right]$$

可用类似方法求解增长率。这里的多束团分布可考虑沿着储存环均匀填充 (even fill) 或非均匀填充 (uneven fill) 或甚至部分填充 (fractional filling)。

⇒ 更多讨论可参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 pp. 209-210, 或 King-Yuen Ng, Physics of Intensity Dependent Beam Instabilities, World Scientific (2005) 一书的 §8.3.4。

3. 考虑单模横向尾场驱动的横向集体不稳定性，称横向罗宾逊不稳定性 (transverse Robinson instability)。此时，不稳定性增长率有

$$\begin{aligned}\tau^{-1} &= \text{Im}(\Omega - \omega_\beta) \approx -\frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 c}{2\gamma T_0^2 \omega_\beta} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re} Z_\perp(p\omega_0 + \omega_\beta) \\ &\approx -\frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 c}{2\gamma T_0^2 \omega_\beta} [\text{Re} Z_\perp(h\omega_0 + \Delta_\beta \omega_0) - \text{Re} Z_\perp(h\omega_0 - \Delta_\beta \omega_0)] \\ &\approx -\frac{8\epsilon_0 N r_0 c^2 R_S Q^2}{\pi\gamma\omega_\beta h^3} (\omega_R - h\omega_0) \Delta_\beta\end{aligned}$$

其中， Δ_β 为 $\nu_\beta = \omega_\beta/\omega_0$ 的小数部分，有 $-\frac{1}{2} < \Delta_\beta < \frac{1}{2}$ 。与纵向罗宾逊不稳定性不同的地方在于，现在横向罗宾逊不稳定性与加速器操作在穿越能量以上 (above transition) 或穿越能量以下 (below transition) 无关，即与 η 的正负号无关，而与 Δ_β 的正负有关，即 betatron tune 是在整数之上或整数之下有关。

- ↔ 更多讨论可参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 §4.2。
4. 这里的分析基于宏粒子模型，实际的束团分布存在有限尺寸，如何推广不稳定性增长率公式。
5. 从单一谐振腔推广到多个谐振腔，其中，有些可以是主动或被动谐振腔。

集体效应分析的标准“产物”为束团振荡频率的偏移（称“频移”）与不稳定增长率。对横向尾场或阻抗驱动的集体效应，频移为集体振荡模式的振荡频率与 betatron 振荡频率及同步振荡频率的偏移；对纵向尾场或阻抗驱动的集体效应，频移则定义为集体振荡模式的振荡频率与同步振荡频率的偏移。略过证明细节，以下给出集体不稳定性频移与增长率的一般关系。

定理 12.5. 集体不稳定性频移与增长率的一般关系

根据 §11.7.6 定义的横向与纵向有效阻抗，按 Sacherer 理论，有

$$\begin{aligned}\Delta\omega_\perp &= \Omega^{(\ell)} - \omega_\beta - \ell\omega_s = -i\mathcal{A}(Z_\perp)_{\text{eff}} \\ \Delta\omega_\parallel &= \Omega^{(\ell)} - \ell\omega_s = +i\mathcal{B}\left(\frac{Z_\parallel}{n}\right)_{\text{eff}}\end{aligned}\tag{12.37}$$

其中，增长率 $\tau_{\perp,\parallel}^{-1} \equiv \text{Im} \Delta\omega_{\perp,\parallel}$ ，系数

- $\mathcal{A} > 0$ ，与电流、束长、横向 betatron 振荡频率有关。
- $\mathcal{B} > 0$ ，与电流、动量紧缩因子、纵向同步振荡频率有关。

上式中的其它量有

- $\Omega^{(\ell)}$ 为复振荡频率
- $(Z_\perp)_{\text{eff}}$ 为横向有效阻抗
- $\left(\frac{Z_\parallel}{n}\right)_{\text{eff}}$ 为纵向有效阻抗
- ℓ 为角向模指标

- ω_β 为横向 betatron 振荡频率
- ω_s 为纵向同步振荡频率

证明 参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书, 对纵向集体效应, 可参考该书 §6.3 或 Eq. (6.83), 对横向集体效应, 可参考该书 §6.6 或 Eq. (6.188)。 \square

练习 12.4 试利用以上结果, 结合有效阻抗 (effective impedance) 的概念, 推导罗宾逊不稳定性增长率。 ■

解 参考此讲义 §13.8.5。 ■

性质 12.1. 集体稳定的必要条件

由上可推论, 稳定性的必要条件可写为

$$\text{束团稳定} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(Z_\perp)_{\text{eff}} > 0 \\ \operatorname{Re}\left(\frac{Z_\parallel}{n}\right)_{\text{eff}} < 0 \end{cases} \quad (12.38)$$

反之未必成立, 即阻抗函数如果不满足以上条件, 但只要能提供足够的阻尼效应, 则束团仍能保持稳定。

注 对宽带阻抗, 第 11 章介绍过, $\operatorname{Re}(Z_\perp)_{\text{eff, BB}} = 0$ 且 $\operatorname{Re}\left(\frac{Z_\parallel}{n}\right)_{\text{eff, BB}} = 0$ 。如果要使横向有效阻抗实部为正, 一般需要靠调整色品为正, 即 $\xi > 0$ 。 \square

一般解法 结束这一小节前, 说明一下, 以上分析的步骤中将离散的映射 $(z_n, \delta_n) \rightarrow (z_{n+1}, \delta_{n+1})$ 写为差分方程 $(dz_n/dn, d\delta_n/dn) \rightarrow d^2 z_n/dn^2$, 这一步可以替换为更具一般性的离散形式的拉普拉斯变换, 称 Z 变换 (Z-transform)。

定义 12.1. Z 变换 (Z-transform)

对单侧 (unilateral) 时序信号 Y_n , 定义其 Z 变换为

$$\tilde{Y}(z) = \mathcal{Z}[Y_n] \equiv \sum_{j=0}^{\infty} Y_j z^{-j} = Y_0 + Y_1 z^{-1} + Y_2 z^{-2} + \dots \quad (12.39)$$

其中, z 扮演类似于空间频率的角色。其对应的逆变换定义为

$$Y_n = \mathcal{Z}^{-1}\{\tilde{Y}(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \tilde{Y}(z) z^{n-1} dz \quad (12.40)$$

注 对细节感兴趣的读者, 可参考 Sabor Elaydi, An Introduction to Difference Equations (Springer-Verlag, New York, 2005) 一书。 \square

性质 12.2. Z 变换的卷积与平移特性

根据以上定义的 Z 变换，有对应的卷积定理 (convolution theorem)

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{k=0}^n \mathbf{B}_{n-k} Y_k \right] = \tilde{\mathbf{B}}(z) \tilde{Y}(z) \quad (12.41)$$

与平移定理 (shifting theorem)

$$\mathcal{Z} [Y_{m+k}] = z^k \tilde{Y}(z) - \sum_{r=0}^{k-1} Y_r z^{k-r} \quad (12.42)$$

证明 参考 Sabor Elaydi, An Introduction to Difference Equations (Springer-Verlag, New York, 2005) 一书。 □

以下采用 Z 变换分析罗宾逊不稳定性。简化起见，令 $\frac{4\pi\epsilon_0 N r_0}{\gamma} W_{\parallel} \equiv \mathcal{W}_{\parallel}$ ，则前述映射方程可写为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{n+1, \text{ini}} &= \begin{pmatrix} 1 & -\eta C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{n, \text{fin}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\eta C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k_{s0}^2 C}{\eta} - \sum_{k=0}^n \mathcal{W}'_{\parallel}(kC - nC) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{n, \text{ini}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{W}'_{\parallel}(kC - nC) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{k, \text{ini}} \right\} \end{aligned} \quad (12.43)$$

写成更紧凑的形式，有

$$Y_{n+1} = \mathbf{R} \left(\mathbf{M}_n Y_n + \sum_{k=0}^n \mathbf{W}_{n-k} Y_k \right) \quad (12.44)$$

其中， $Y = [z \ \delta]^T$ 。暂时略去 $\sum_{k=0}^n \mathcal{W}'_{\parallel}(kC - nC)$ 项，即忽略势阱畸变效应，上式可化简为

$$Y_{n+1} \approx \begin{pmatrix} 1 - k_{s0}^2 C^2 & -\eta C \\ \frac{k_{s0}^2 C}{\eta} & 1 \end{pmatrix} Y_n + \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{W}'_{\parallel}(kC - nC) & 0 \end{pmatrix} Y_k = \mathbf{A} Y_n + \sum_{k=0}^n \mathbf{B}_{n-k} Y_k \quad (12.45)$$

注意到，这里 \mathbf{B}_{n-k} 矩阵的 (1,1) 项对应高阶 (二阶) 效应，应略去，此处视为 0。现在，我们将利用 Z 变换求解此矩阵差分方程。对等式两边取 Z 变换，有

$$z \tilde{Y}(z) - z Y_0 = \mathbf{A} \tilde{Y}(z) + \tilde{\mathbf{B}}(z) \tilde{Y}(z) \quad (12.46)$$

其中，用了两个变换的卷积与平移特性。移项后，有

$$\tilde{Y}(z) = \frac{z}{z \mathbb{I} - \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}(z)} Y_0 \quad (12.47)$$

其中， \mathbb{I} 为单位矩阵。系统稳定性取决于当分母的行列式值为零时，即

$$\det \begin{pmatrix} z - 1 + k_{s0}^2 C^2 & \eta C \\ -\frac{k_{s0}^2 C}{\eta} - \tilde{\mathcal{W}}'_{\parallel}(z) & z - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (12.48)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{W}}'_{\parallel}(z) &= \frac{4\pi\epsilon_0Nr_e}{\gamma_0} \mathcal{Z} \left[W'_{\parallel}(z) \right] \\
 &= \frac{4\pi\epsilon_0Nr_e}{\gamma_0} \sum_{j=0}^{\infty} W'_{\parallel}(-jC) z^{-j} \\
 &= \frac{4\pi\epsilon_0Nr_e}{\gamma_0} \frac{i}{2\pi c} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega Z_{\parallel}(\omega) e^{-ij\omega T_0} e^{+ij\Omega T_0} d\omega \\
 &= \frac{4\pi\epsilon_0Nr_e}{\gamma_0} \frac{i\omega_0}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \omega Z_{\parallel}(\omega) \left[\sum_{j=0}^{\infty} e^{-ij\omega T_0} e^{+ij\Omega T_0} \right] d\frac{\omega}{\omega_0} \\
 &= \frac{4\pi\epsilon_0Nr_e}{\gamma_0} \frac{i\omega_0}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \omega Z_{\parallel}(\omega) \left[\frac{e^{-i(\omega-\Omega)T_0}}{e^{-i(\omega-\Omega)T_0} - 1} \right] d\frac{\omega}{\omega_0} \\
 &\approx \frac{4\pi\epsilon_0Nr_e}{\gamma_0} \frac{i\omega_0}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \omega Z_{\parallel}(\omega) \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \Omega - p\omega_0) \right] d\frac{\omega}{\omega_0} \\
 &= \frac{4\pi\epsilon_0Nr_e}{\gamma_0} \frac{i}{cT_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (\Omega + p\omega_0) Z_{\parallel}(\Omega + p\omega_0)
 \end{aligned} \tag{12.49}$$

其中¹¹,

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-ij\omega T_0} e^{+ij\Omega T_0} = \frac{e^{-i(\omega-\Omega)T_0}}{e^{-i(\omega-\Omega)T_0} - 1} \tag{12.50}$$

根据以上行列式计算, 有色散方程¹²

$$(z - 1)^2 + \eta C \left[\frac{k_{s0}^2 C}{\eta} + \tilde{\mathcal{W}}'_{\parallel}(z) \right] = 0 \tag{12.51}$$

令 $z = e^{-i\Omega T_0}$, 其中, T_0 为单圈绕行周期, $\Omega \in \mathbb{C}$ 为待解(复)频率。假设 $|\Omega T_0| \ll 1$, 则色散方程可进一步化简为

$$-\Omega^2 T_0^2 + k_{s0}^2 C^2 + \eta C \tilde{\mathcal{W}}'_{\parallel}(z) = 0 \tag{12.52}$$

将上面 $\tilde{\mathcal{W}}'_{\parallel}(z)$ 显形式代入化简, 可得

$$\Omega^2 - \omega_{s0}^2 = i \frac{4\pi\epsilon_0Nr_e\eta}{\gamma_0 T_0^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (\Omega + p\omega_0) Z_{\parallel}(\Omega + p\omega_0) \tag{12.53}$$

与前面基于差分方程得到的色散方程结果一致。相较于前面, 差了 $p\omega_0 Z_{\parallel}(p\omega_0)$ 项。这是因为此处忽略了尾场函数展开

$$W_{\parallel}(kC - nC + z_n - z_k) \approx W_{\parallel}(kC - nC) + (z_n - z_k) W'_{\parallel}(kC - nC) \tag{12.54}$$

其中的第一项 $W_{\parallel}(kC - nC)$, 即忽略寄生损失效应 (parasitic loss)。



笔记 当储存环中的谐振腔不再能考虑薄透镜近似时, 采用 Z 变换将体现其分析的一般性。对此分析方式感兴趣的读者, 细节可参考 C.-Y. Tsai, Theoretical formulation of multiturn collective dynamics in a laser cavity modulator with comparison to Robinson and high-gain free-

¹¹这里求和也可以通过 Poisson 求和公式, 感兴趣的读者可以自行尝试。

¹²这里省略了行列式矩阵中元素 (1,1) 的 $k_{s0}^2 C^2$ 项。

electron laser instability, Phys. Rev. Accel. Beams **25**, 064401 (2022). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.064401>。

12.3.3 强头尾不稳定性

前面介绍了两种不稳定性，分别为束团崩溃不稳定性与罗宾逊不稳定性。作为第三个束团集体不稳定性例子，我们考虑强头尾不稳定性 (strong head-tail instability)。

强头尾不稳定性一方面与束团崩溃不稳定性类似，都是单束团效应。束团崩溃不稳定性是束团前方粒子产生尾场，持续地驱动束团后方粒子，产生与 $s \sin k_\beta s \propto s$ 成正比的共振运动。与束团崩溃不稳定性不同的地方在于，现在强头尾不稳定性的束团不再是单次经过直线加速器，而是在储存环加速器。直线加速器与储存环的区别在于，束团在储存环中经历纵向同步振荡，经过半个同步振荡周期后，束团纵向相空间分布转了半圈，即束团头部与尾部粒子角色互换。由此，强头尾不稳定性不再是单向的由束团中同一批粒子驱动束团中另一批粒子，而是双向循环的半个同步振荡周期互换角色。可以预期，当同步振荡频率增加时，头部尾部粒子角色互换频率增加，则尾场效应不容易积累。然而，当不幸地满足一些条件时，束团不稳定性不再呈线性增加，而是指数增长。

参考下图 12.7，首先，将单束团视为由两个宏粒子组成，束团中粒子 1 (P1) 与粒子 2 (P2) 各自进行横向 betatron 振荡与纵向同步振荡。考虑横向集体效应，尾部粒子 (可能是粒子 P1 或 P2) 会感受到头部粒子 (可能是粒子 P2 或 P1) 偏离轴时产生的横向尾场。忽略同步振荡时，即直线加速器中的束团崩溃不稳定性。

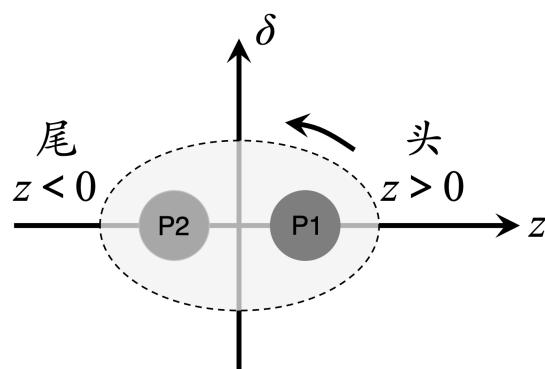


图 12.7: 双粒子模型表征一束团整体。

简单起见，考虑一粒子感受到横向恒定尾场，即

$$W_\perp(z) = \begin{cases} -W_1 & , \text{if } -(bunch\ length) < z < 0 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (12.55)$$

此粒子同时有横向 betatron 振荡与纵向同步振荡，假设 $\omega_s \ll \omega_\beta$ 。在前半个同步振荡周期，即 $0 < t < \frac{T_s}{2}$ ，有

这里等式右边项故意换一个方式写，仍是 SI/MKS 单位制。

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_\beta^2 x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_\beta^2 x_2 = \frac{Ne^2 W_1}{2\gamma m C_0} x_1 \end{cases} \quad (12.56)$$

其中, x_1 与 x_2 为 betatron 振荡的横向偏移, $\cdot \equiv d/dt$, N 为束团内粒子总个数, C_0 为储存环周长。假设远离 synchro-betatron 耦合效应。

现在, 求解上面微分方程的解 x_1, x_2 , 假设初始条件有 $x_1(0) = \hat{x}_1$ 与 $\dot{x}_1(0) = 0$, 则其解可写为

$$\begin{cases} x_1(t) = \hat{x}_1 \cos \omega_\beta t \\ x_2(t) = \hat{x}_2 \cos \omega_\beta t + \frac{Ne^2 W_1}{4\omega_\beta \gamma m C_0} \hat{x}_1 t \sin \omega_\beta t \end{cases} \quad (12.57)$$

其中, x_2 解的第二项包含与时间 t 成正比的项, 表征共振驱动, 类似于束团崩溃不稳定的解。再经过半个同步振荡周期时 $\frac{T_s}{2} < t < T_s$, 粒子运动方程变为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_\beta^2 x_1 = \frac{Ne^2 W_1}{2\gamma m C_0} x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_\beta^2 x_2 = 0 \end{cases} \quad (12.58)$$

注意, 此时解的初始条件为前面在 $t = \frac{T_s}{2}$ 时刻的结果。为更好求解, 引入如下“相量”(phasor) 表示

$$\tilde{x}(t) = x(t) + i \frac{\dot{x}(t)}{\omega_\beta} \quad (12.59)$$

定义 $\Upsilon = \frac{Ne^2 W_1 T_s}{8\omega_\beta \gamma m C_0}$, 则在前半个 T_s 有

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}_{T_s/2} = e^{-i\omega_\beta \times T_s/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\Upsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) \end{pmatrix} \quad (12.60)$$

在后半个 T_s 有

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}_{T_s} = \underbrace{e^{-i\omega_\beta \times T_s/2} \begin{pmatrix} 1 & i\Upsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\Upsilon & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 - \Upsilon^2 & i\Upsilon \\ i\Upsilon & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(0) \\ \tilde{x}_2(0) \end{pmatrix} \quad (12.61)$$

由第 7 章知道, 对一维动力学系统, 如果要求束团稳定, 即要求

$$|\text{Trace}(\mathbf{M})| \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \Upsilon \leq 2 \Rightarrow \frac{\pi Ne^2 W_1}{4\omega_\beta \omega_s \gamma m C_0} \leq 2 \quad (12.62)$$

其中, \mathbf{M} 为辛矩阵。

由以上推导, 得到了强头尾不稳定性的动力学特征, 即存在阈值条件, 当 $\Upsilon \leq 2$ 时, 束团保持稳定; 否则将存在强头尾不稳定性。

注 上面分析取自 Edwards and Syphers 一书的 §6.4.2, 与 Chao 一书的 §4.3 稍有不同, 后者处理 $x_1(0) = \hat{x}_1$ 与 $\dot{x}_1(0) = \hat{x}_1$ 的更一般情况, 因此, 解的形式更复杂些。但结论不变。

如果不采取此方法, 问题仍可求解。感兴趣的读者不妨一试。

感兴趣的读者可参考 Chao 一书的 §4.3。



笔记 以上非常巧妙、聪明的分析方式最早由 R.D. Kohaupt 与 R. Talman 于 1980 年提出。原始论文可参考 R.D. Kohaupt, Simplified presentation of head-tail turbulence, DESY M-80/19 (1980). <https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/1981/8104/8104353.pdf>、R. Talman, The influence of finite synchrotron oscillation frequency on the transverse head-tail effect, Nucl. Instru. Methods A **193**, 423-435 (1982). [https://doi.org/10.1016/0029-554X\(82\)90234-8](https://doi.org/10.1016/0029-554X(82)90234-8)。

定理 12.6. 强头尾不稳定性 (strong head-tail instability)

在储存环中，存在同步振荡的束团，其束团内前方粒子产生尾场驱动束团内后方粒子，并随着同步振荡周期改变前方粒子与后方粒子作为源粒子与测试粒子的角色。驱动尾场为横向短程尾场。按宏粒子模型分析，稳定性条件有

$$\frac{\pi Ne^2 W_1}{4\omega_\beta \omega_s \gamma m C_0} \leq 2 \quad (12.63)$$

其中，

- N 为束团内粒子总个数
- C_0 为储存环周长
- $W_1 = |W_\perp|$ 为横向尾场函数
- γ 为洛伦兹因子，表征束团能量
- ω_β 为横向 betatron 振荡频率
- ω_s 为同步振荡频率，有 $\omega_s = \omega_0 \sqrt{\frac{h|e|V_{RF}|\eta \cos \phi_s|}{2\pi\beta^2 E}} = \frac{c}{R} \sqrt{\frac{h|e|V_{RF}|\eta \cos \phi_s|}{2\pi E}}$

细节不论，按更细致的 Vlasov 方程分析，阈值(峰值)电流有

$$I_{b,\text{th}} = -A \frac{\nu_s(E/|e|)}{\langle \text{Im } Z_\perp \beta_x \rangle} \cdot \frac{\sigma_{z0}}{R} \quad (12.64)$$

其中，

- ν_s 为 synchrotron tune
- E 为束团能量
- $Z_\perp(\omega_\beta)$ 为横向阻抗函数
- $\langle \text{Im } Z_\perp \beta_x \rangle$ 为沿储存环的加权平均
- σ_{z0} 为平衡束长
- $R = C/2\pi$ 为储存环平均半径。

以上公式中的 A 根据不同文献有不同结果，大致范围落在

$$\sqrt{2\pi} \leq A \leq \frac{16}{3}\sqrt{\pi} \quad (12.65)$$

注 关于以上阈值电流的讨论，可参考 Jack's Book, p.50。

注 强头尾不稳定性又称快头尾不稳定性 (fast head-tail instability)、横向模式耦合不稳定性 (transverse mode coupling instability, TMCI)、横向微波不稳定性 (transverse microwave instability)。如果超过阈值，一般只能靠外部横向反馈系统 (transverse feedback system) 抑制。

性质 12.3. 强头尾不稳定性几个特性

强头尾不稳定性几个特性：

- 当束团强度足够低而满足上式时，束团可以稳定运行；
- 强头尾不稳定性有明确的阈值条件；
- 纵向同步振荡 ω_s 提供系统稳定机制；
- 对直线加速器而言 $\omega_s \rightarrow 0$ ，即束团崩溃不稳定性；
- 类似于 BBU，根据 BNS 阻尼思路，在半个同步振荡周期内，可通过提供更强的聚焦使抑制束团尾部振荡。



笔记 Donald Edwards and Michael Syphers, An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (2004) 一书的 §6.4.2，尾场驱动项的分母少了 C_0 。

以上分析考虑了储存环中单束团、多圈、由横向尾场驱动的集体不稳定性。模型仍可进一步推广，包含：

1. 束团横向 betatron 振荡与纵向同步振荡是解耦的，存在耦合时，以上分析不适用，需要推广。
~~ 更多讨论可参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 pp. 189-191。
2. 考虑横向尾场函数不再是常数，而与横向位置 x, y 有关，称四极尾场强头尾不稳定性 (quadrupole-wake strong head-tail instability)。
~~ 更多讨论可参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 §4.4。
3. 一般假设纵向弱聚焦，即 $\omega_s \ll \omega_\beta$ 。对纵向强聚焦情况，如 $\omega_s \sim \omega_\beta$ ，以上分析不适用，需要推广。此时需要列写头部粒子与尾部粒子的纵向运动方程。

12.3.4 头尾不稳定性

不同于前一小节介绍的“强”头尾不稳定性 (strong head-tail instability, SHTI)，这一小节讨论头尾不稳定性 (head-tail instability, HTI)。虽然名称接近，但是物理效应不太一样，宜留意其区别。

头尾不稳定性 (HTI) \neq 强头尾不稳定性 (SHTI)。

前一节讨论“强”头尾不稳定性时，虽然粒子的横向 betatron 振荡与纵向同步振荡都

在理论模型中，即粒子同时存在横向与纵向振荡。但是，有一个效应忽略了：当粒子做纵向同步振荡时，该粒子的纵向相空间坐标 (z, δ) 同时改变，而粒子的能量偏差坐标 δ 的改变所体现的效应在上一节的理论模型中没有考虑。思考一下，会发现，粒子的能量偏差坐标 δ 与粒子的横向 betatron 振荡还是有关系的，即 §7.10 介绍的“色品”：由磁刚度关系可知，不同能量的粒子有稍微不同的横向 betatron 振荡频率。参考定义 7.24，(自然) 色品 ξ 的定义为

$$\Delta\nu_\beta = \xi\delta \quad (12.66)$$

其中， $\Delta\nu_\beta = \nu_\beta(\delta) - \nu_\beta(0)$ 为能量偏差粒子横向 betatron tune $\nu_\beta(\delta)$ 与参考粒子 $\nu_\beta(0)$ 的差。由 §7.10 的讨论知，对全环而言，横向 x, y 方向的自然色品皆为负，即 $\xi_{x,y} < 0$ 。以下考虑 xz 方向动力学，以 s 为独立变量 ($z = s - ct$)，色品采用美式惯例¹³。以上色品定义还可写成

$$\omega_\beta(\delta) = \omega_\beta(0) + \xi\delta\omega_0 = \omega_{\beta 0} + \xi\delta\omega_0 \quad (12.67)$$

其中， ω_0 为粒子绕行储存环的(角)频率。

开始分析集体效应动力学前，先“感受”一下同时考虑纵向同步振荡、横向 betatron 振荡与色品效应时的相空间动力学过程。然后，再把横向短程尾场加到分析的模型里。

先讨论纯光学。

对纯光学 (pure optics) 情况，头尾粒子的横向 betatron 振荡满足 Hill 方程。根据 §7.10，考虑平滑近似，Hill 方程可写成

$$x'' + \left(\frac{\nu_{x0}}{R}\right)^2 x = 0 \Rightarrow x'' + \left(\frac{\omega_\beta}{c}\right)^2 x = 0 \quad (12.68)$$

其解可写成¹⁴

$$x_{1,2}(s) = \tilde{x}_{1,2} e^{-i\psi_{\beta 1, \beta 2}(s)} \quad (12.69)$$

其中，粒子 1 与粒子 2 由于能量偏差导致的 betatron 相位差可以通过如下方式估算。对其中一粒子，先计算其与参考能量粒子的 betatron 相位差，有

$$\psi_\beta(s; \delta) - \psi_\beta(s; 0) \equiv \psi_\beta(s) = \int_s^{s+C_0} \omega_\beta(\delta) \frac{ds}{c} = \omega_{\beta 0} \frac{s}{c} - \frac{\xi\omega_0}{c\eta} z(s) \quad (12.70)$$

其中， $z(s) = z(s; \delta) - z(s; 0)$ 为非参考粒子与参考粒子的束内间距， $\omega_\beta(\delta = 0) = \omega_{\beta 0}$ 。

定义 12.2. 色品频率 (chromatic frequency) ω_ξ

考虑色品效应时，由于能量偏差导致的 betatron 振荡频率改变，有

$$\omega_\beta(\delta) = \omega_{\beta 0} + \Delta\omega_\beta(\delta; \xi) = \omega_{\beta 0} + \xi\delta\omega_0 \quad (12.71)$$

当束团传输一段距离后，束团内某一粒子与参考粒子 ($\delta = 0$) 将积累一 betatron 相

¹³不同教科书对色品的定义可能采用不同惯例，读者宜留意美式惯例与欧式惯例的区别。

¹⁴严格来说，解应该取实部。取实部符号此处略去。

位差，积累的速率可以色品频率 ω_ξ 表征，定义为

$$\omega_\xi \equiv \frac{\xi\omega_0}{\eta} \quad (12.72)$$

其中， ξ 为色品， ω_0 为绕行角频率， η 为滑相因子。 □

接着讨论，以上积分用到了单粒子纵向运动方程 $z' = -\eta\delta$ 且假设参考粒子 $z(s, \delta = 0) = 0$ 。现在，定义束团中的头尾粒子，分别为粒子 1 与粒子 2，满足

$$\begin{aligned} z_1 &= \hat{z} \sin \frac{\omega_s s}{c} \\ z_2 &= -z_1 = -\hat{z} \sin \frac{\omega_s s}{c} \end{aligned} \quad (12.73)$$

其中， \hat{z} 表示束团头部粒子与尾部粒子的间距，可视为束长。至于这里为什么不直接写成 σ_z 却写成 \hat{z} ，是因为这么写保留了考虑束团内不同间距头尾粒子的弹性。当然，相应的尾场函数也有不同取值（如果尾场不是常数）。由 $z' = -\eta\delta$ ，知

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{z'_1}{\eta} = -\frac{\omega_s \hat{z}}{c\eta} \cos \frac{\omega_s s}{c} \\ \delta_2 &= -\frac{z'_2}{\eta} = \frac{\omega_s \hat{z}}{c\eta} \cos \frac{\omega_s s}{c} \end{aligned} \quad (12.74)$$

由于粒子 1 与 2 的角色在半个同步振荡周期后将交换，以下仅称粒子 1 或粒子 2，不再通称头部或尾部粒子。图 12.8 给出粒子 1 与 2 的纵向相空间相对位置与彼此由于能量偏差导致的 betatron 相位差 $\Delta\psi_\beta$

$$\Delta\psi_\beta = \psi_{\beta 1} - \psi_{\beta 2} = -\frac{\xi\omega_0}{c\eta}(z_1 - z_2) \quad (12.75)$$

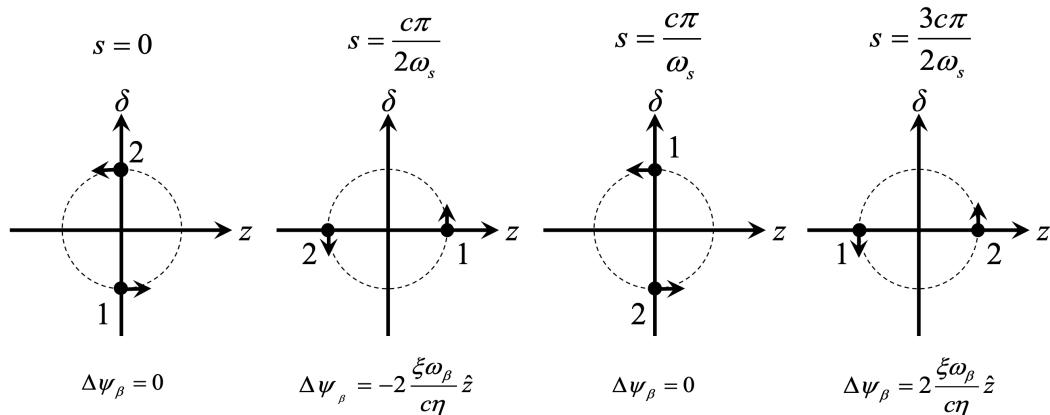


图 12.8：双粒子模型表征一束团整体，考虑了色品效应时，粒子 1 与粒子 2 在同步振荡不同时期的相对 betatron 相位差 $\Delta\psi_\beta = \psi_{\beta 1} - \psi_{\beta 2} \propto -\xi/\eta \times (z_1 - z_2)$ 。此处假设 $\eta > 0$ 。图例修改自 Chao (1993)。

粒子 1 与粒子 2 的 Hill 方程解可写为

$$\begin{aligned} x_1(s) &= \tilde{x}_1 e^{-i\psi_{\beta 1}(s)} = \tilde{x}_1 e^{-i\omega_{\beta 0} \frac{s}{c} + i\frac{\xi\omega_0}{c\eta} \hat{z} \sin \frac{\omega_s s}{c}} \\ x_2(s) &= \tilde{x}_2 e^{-i\psi_{\beta 2}(s)} = \tilde{x}_2 e^{-i\omega_{\beta 0} \frac{s}{c} - i\frac{\xi\omega_0}{c\eta} \hat{z} \sin \frac{\omega_s s}{c}} \end{aligned} \quad (12.76)$$

可以看到，头部粒子与尾部粒子（注意，不是粒子 1 与粒子 2）间的 betatron 相位差总是小于零，如果 $\xi/\eta > 0$ 。反之，头部粒子与尾部粒子（注意，不是粒子 1 与粒子 2）间的 betatron 相位差总是大于零，如果 $\xi/\eta < 0$ 。以下将看到，正是因为 $\xi \neq 0$ 才导致头尾不

稳定性。由于色品效应导致的头部粒子与尾部粒子间的 betatron 相位差总是同号，因此，尾场函数就可能随着 s 单向积累，最终导致集体不稳定性。

分析完纯光学情况后，现在把横向尾场加进来。简单起见，考虑一粒子感受到横向恒定尾场，即

$$W_{\perp}(z) = \begin{cases} -W_1 & , \text{ if } -(\text{bunch length}) < z < 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (12.77)$$

先考虑粒子 1 在粒子 2 之前，则 Hill 方程有

$$\begin{aligned} x''_1 + \left[\frac{\omega_{\beta}(\delta_1)}{c} \right]^2 x_1 &= 0, & \omega_{\beta}(\delta_1) &= \omega_{\beta 0} - \frac{\xi \hat{z} \omega_0 \omega_s}{c \eta} \cos \frac{\omega_s s}{c} \\ x''_2 + \left[\frac{\omega_{\beta}(\delta_2)}{c} \right]^2 x_2 &= \frac{N 4 \pi \epsilon_0 r_0 W_1}{2 \gamma C_0} x_1, & \omega_{\beta}(\delta_2) &= \omega_{\beta 0} + \frac{\xi \hat{z} \omega_0 \omega_s}{c \eta} \cos \frac{\omega_s s}{c} \end{aligned} \quad (12.78)$$

再加尾场。

可以看到，粒子 1 由于此时在头部，为自由振荡的 Hill 方程，粒子 2 由于在尾部，受粒子 1 产生的尾场影响，为带有驱动项的 Hill 方程。

将 $x_1(s)$ 的纯光学解代入粒子 2 的驱动 Hill 方程等式右边，假设振幅 \tilde{x}_2 随时间缓变，即保留 \tilde{x}'_2 项、忽略 \tilde{x}''_2 项。已知

$$\begin{aligned} x'_2(s) &= \tilde{x}'_2 e^{-i\psi_{\beta 2}} - i \frac{d\psi_{\beta 2}}{ds} \tilde{x}_2 e^{-i\psi_{\beta 2}} \\ x''_2(s) &= \tilde{x}''_2 e^{-i\psi_{\beta 2}} - i \frac{d\psi_{\beta 2}}{ds} \tilde{x}'_2 e^{-i\psi_{\beta 2}} - i \frac{d\psi_{\beta 2}}{ds} \left(\tilde{x}'_2 e^{-i\psi_{\beta 2}} - i \frac{d\psi_{\beta 2}}{ds} \tilde{x}_2 e^{-i\psi_{\beta 2}} \right) \\ &\approx -2i \frac{\omega_{\beta}(\delta_2)}{c} \tilde{x}'_2 e^{-i\psi_{\beta 2}} - \left[\frac{\omega_{\beta}(\delta_2)}{c} \right]^2 x_2(s) \end{aligned} \quad (12.79)$$

则有

$$\begin{aligned} x''_2 + \left(\frac{\omega_{\beta}(\delta_2)}{c} \right)^2 x_2 &\approx -2i \frac{\omega_{\beta}(\delta_2)}{c} \tilde{x}'_2 e^{-i\psi_{\beta 2}(s)} \stackrel{!}{=} \frac{N 4 \pi \epsilon_0 r_0 W_1}{2 \gamma C_0} \tilde{x}_1(0) e^{-i\psi_{\beta 1}(s)} \\ \Rightarrow \tilde{x}'_2(s) &= i \frac{N 4 \pi \epsilon_0 r_0 W_1 c}{4 \gamma C_0 \omega_{\beta}(\delta_2)} \tilde{x}_1(0) e^{-i[\psi_{\beta 1}(s) - \psi_{\beta 2}(s)]} \end{aligned} \quad (12.80)$$

将分母的 betatron 振荡频率近似为纯光学量，即 $\omega_{\beta}(\delta_2) \approx \omega_{\beta 0}$ ，则有

$$\tilde{x}'_2(s) \approx i \frac{N 4 \pi \epsilon_0 r_0 W_1 c}{4 \gamma C_0 \omega_{\beta 0}} \tilde{x}_1(0) e^{2i \frac{\xi \omega_0 \hat{z}}{c \eta} \sin \frac{\omega_s s}{c}} \quad (12.81)$$

其中，如果 $|\frac{\xi \omega_0 \hat{z}}{c \eta}| \ll 1$ ，则指数项可泰勒展开，有

$$e^{2i \frac{\xi \omega_0 \hat{z}}{c \eta} \sin \frac{\omega_s s}{c}} \approx 1 + 2i \frac{\xi \omega_0 \hat{z}}{c \eta} \sin \frac{\omega_s s}{c} \quad (12.82)$$

对 s 积分后，则 \tilde{x}_2 的解可以写成

$$\tilde{x}_2(s) = \tilde{x}_2(0) + i \frac{N 4 \pi \epsilon_0 r_0 W_1 c}{4 \gamma C_0 \omega_{\beta 0}} \tilde{x}_1(0) \left[s + i \frac{2 \xi \omega_0 \omega_{\beta 0} \hat{z}}{\eta \omega_s} \left(1 - \cos \frac{\omega_s s}{c} \right) \right] \quad (12.83)$$

类似于强头尾不稳定性分析，束团在储存环中多圈绕行时，可根据同步振荡周期，将头尾粒子的演化以传输矩阵描述。定义半个同步振荡周期后的“强度因子”¹⁵

$$\Upsilon = \frac{\pi N 4 \pi \epsilon_0 r_0 W_1 c^2}{4 \gamma C_0 \omega_{\beta 0} \omega_s} \left(1 + i \frac{4 \xi \omega_0 \omega_{\beta 0} \hat{z}}{\pi c \eta} \right) \quad (12.84)$$

¹⁵如果我们把色品设为零，则退化回强头尾不稳定性结果，如预期。

这里 Υ 的实部与上一小节定义的 Υ 虽然形式看似不同，其实等价。读者可自行推导验证。

对前半个同步振荡周期，有

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}_{s=\pi c/\omega_s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\Upsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}_{s=0} \quad (12.85)$$

对后半个同步振荡周期，有

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}_{s=2\pi c/\omega_s} = \begin{pmatrix} 1 & i\Upsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}_{s=\pi c/\omega_s} \quad (12.86)$$

于是，一个完整的同步振荡周期的传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & i\Upsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\Upsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \Upsilon^2 & i\Upsilon \\ i\Upsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (12.87)$$

由第 7 章知道，对一维动力学系统，如果要求束团稳定，即要求 $0 \leq \Upsilon \leq 2$ 。但此时 $\Upsilon \in \mathbb{C}$ ，因此，此结论不再成立：束团不存在稳定区间。 \mathbf{M} 的两个特征值有

$$\lambda_{\pm} = 1 - \frac{\Upsilon^2}{2} \pm \frac{\Upsilon}{2} \sqrt{\Upsilon^2 - 4} \quad (12.88)$$

当 $|\Upsilon| \ll 1$ 时，特征值可简化写为

$$\lambda_{\pm} \approx 1 \pm i\Upsilon \approx e^{\pm i\Upsilon} \quad (12.89)$$

其中，下标 \pm 表示两个振荡模，其对应的单位时间增长率(即特征值 Υ 的虚部 $\times \omega_s / 2\pi$)分别为

$$\tau_{\pm}^{-1} = \mp \frac{N4\pi\epsilon_0 r_0 W_1 c \omega_0 \xi \hat{z}}{2\pi\gamma C_0 \eta} \quad (12.90)$$

可以看到，当其中一个模稳定时，另一个模就不稳定。事实上，这两个模对应的物理效应分别为：

1. “+”模为同相位模，对应束团横向分布的质心振荡。
2. “-”模为 π 相位模，对应束团横向分布的尺寸。

由上可知，“+”模与“-”模完全对称，基于宏粒子模型给出的结论为无法完全抑制头尾不稳定性。其实，按更细致、完整的动理学理论分析，此头尾不稳定性的振荡模不完全对称，因此仍有机会抑制头尾不稳定性。下一章将介绍动理学理论 Vlasov 分析，但是暂不触及头尾不稳定性。感兴趣的读者可参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 §6.7。

注 回想一下，上面求解 x_1, x_2 时，忽略了“取实部”操作，直接按指数惯例操作。这是因为我们其实对解 x_1, x_2 的具体形式并不关心，真正关心的是其(复)振幅 \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 随几个同步振荡周期后是否收敛或发散。

以下整理头尾不稳定性结果：

定理 12.7. 头尾不稳定性 (head-tail instability)

在储存环中，存在同步振荡的束团，考虑色品效应，其束团内前方粒子产生尾场驱动束团内后方粒子，并随着同步振荡周期改变前方粒子与后方粒子作为源粒子与测试粒子的角色。驱动尾场为横向短程尾场。按宏粒子模型分析，稳定性条件较为严苛，有

$$\xi = 0 \quad \text{或} \quad W_{\perp} = 0 \quad (12.91)$$

其中， ξ 为加速器全环的色品 (chromaticity)。

按更细致、完整的动理学理论 (kinetic theory) Vlasov 方程分析，给出的稳定性条件为

$$\xi > 0 \quad (12.92)$$

一般 $\xi \approx 2 \sim 4$ 即足够。太大的 ξ 虽然能更有效抑制头尾不稳定性，但也将导致其它色品效应。头尾不稳定性增长率为

$$\tau^{-1} = -\frac{I_b c^2}{8\sigma_{z0}\omega_{\beta}(E/|e|)} \cdot \text{Re}(Z_{\perp})_{\text{eff}} \quad (12.93)$$

其中，

- I_b 为单束团 (平均) 电流
- σ_{z0} 为束长
- ω_{β} 为横向 betatron 振荡频率
- E 为粒子参考能量
- $(Z_{\perp})_{\text{eff}}$ 为横向有效阻抗

注 上式为基于 Vlasov 方程分析的结果，进一步分析会发现，对高阶 ($\ell = \pm 1$) 头尾不稳定性在 $\xi < 0$ 的某些区间仍有 $\tau^{-1} < 0$ 。但是，对最低阶 ($\ell = 0$) 头尾不稳定性，要求 $\xi > 0$ 。最先被激发的头尾不稳定性为最低阶情况。更多讨论可参考 §13.8.4。

注 此头尾不稳定性 没有 阈值条件，即只要考虑集体 (流强) 效应，就有头尾不稳定性。换句话说，增加 ω_s 对抑制不稳定性无效。根据 Vlasov 分析，增加 ω_{β} 能缓解，但无法抑制。□

结束这一小节前，这里比较一下头尾不稳定性与强头尾不稳定性。

性质 12.4. 头尾不稳定性 vs. 强头尾不稳定性

1. 强头尾不稳定性为模式耦合不稳定性，存在阈值条件。头尾不稳定性没有阈值条件，只要考虑集体 (流强) 效应，就有此不稳定性。
2. 强头尾不稳定性可以视为头尾不稳定性在 $\xi = 0$ 时的特例吗？数学上，可以。

当 $\xi = 0$ 时，头尾不稳定性的 Υ 退化回强头尾不稳定性的 Υ ，方程的解也退化为强头尾不稳定性的解。但是，物理上机制不同，不是特例。

3. 从物理机制看，强头尾不稳定性具有共振特性，头尾不稳定性则不是共振，而是色品效应导致粒子运动与尾场相位错开 90° 相位差。
4. 调整色品能够抑制头尾不稳定性，但无法抑制强头尾不稳定性。
5. 在加速器运行的实际情况，束团运动同时包含头尾不稳定性与强头尾不稳定性。
6. 当电流低于强头尾不稳定的阈值时，操作在穿越能量以上 (above transition) 且色品为负时，或操作在穿越能量以下 (below transition) 且色品为正时，存在头尾不稳定性，此不稳定性增长时间约为几个同步振荡周期。当电流高于强头尾不稳定的阈值时，此时虽仍有头尾不稳定性，但主导的机制为强头尾不稳定性，此不稳定性增长时间短于同步振荡周期 (因此称“快”头尾不稳定性)。导致强头尾不稳定的物理机制为横向模式耦合。□

结束这一小节前，回顾、同时思考一下，这里介绍的储存环“宏粒子”分析的意义。宏粒子模型除了将真实束团浓缩成一个没有内在结构的点状粒子外，当我们在分析储存环的罗宾逊不稳定性时，做了 $z_n \propto e^{-in\Omega T_0}$ 的假设，从本应完整求解 z_n 的问题转化为求解特征频率 $\Omega \in \mathbb{C}$ 的问题；在分析储存环的强头尾或头尾不稳定性时，从本应完整求解 \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 的问题转化为求解矩阵 $\begin{pmatrix} 1 - \Upsilon^2 & i\Upsilon \\ i\Upsilon & 1 \end{pmatrix}$ 特征频值的问题。可以说，在储存环中，“宏粒子”分析的核心并不是分析那个被浓缩成一点的粒子的(不)稳定性，真正分析的是一个振荡模式，是频域的概念。由此可见，在储存环中的“宏粒子”分析不同于单次经过直线加速器的束团崩溃不稳定性 (BBU) 的时域分析。单个宏粒子只能体现单个振荡模式；双粒子模型能体现质心振荡与等效束团尺寸。因此，可以想象，如果要分析高阶振荡模式的(不)稳定性问题，则必要将束团视为多个“宏粒子”的组成。

12.3.5 耦合束团不稳定性

很多时候，TMCI 是一环形加速器“单束团”集体效应的“天花板”，即单束团的电流阈值通常由 TMCI 给出的阈值限制。多束团导致的长程集体效应 — 通称耦合束团不稳定性 (coupled bunch instability, CBI)。留意中文用字区别：

模式耦合不稳定性 (MCI) \neq 耦合束团不稳定性 (CBI)。

前述的罗宾逊不稳定性即是纵向耦合束团不稳定性 (longitudinal coupled bunch instability, LCBI) 一例。如果因为一些原因而无法避免发生耦合束团不稳定性，如果不稳定性增长时间较慢，至少比同步辐射阻尼时间长，则此不稳定性将不会持续太久，即天然的同步辐射阻尼效应能够将其有效抑制。如果不稳定性增长时间较同步辐射阻尼时间短或无法产生自身抑制机制，一般采用逐束团反馈系统 (bunch-by-bunch feedback system) 抑

制。幸运的是，当今设计的谐振腔部件自身即能具备较好的模式抑制，因此，纵向耦合束团不稳定性一般不太困扰实际加速器运行。逐束团反馈系统示意图可参考图 12.9，一般包含：

- 束流信号提取器 (pickup, 如 BPM)、
- 射频前端 (RF front-end)、
- 数字信号反馈处理器 (feedback processing) \Rightarrow 用来算出修正信号、
- 制动器 (actuator) 或 kicker 腔 \Rightarrow 修正束团轨迹。

反馈系统的目地是使束团稳定，需提供阻尼使束团串整体具有小于零 (负的) 净增长率¹⁶。反馈系统应具备合适的数据采集和数据处理速率，可进行数据记录，允许编程环境，用于将反馈算法编码到现场可编程逻辑门阵列 (field-programmable gate array, FPGA) 中。

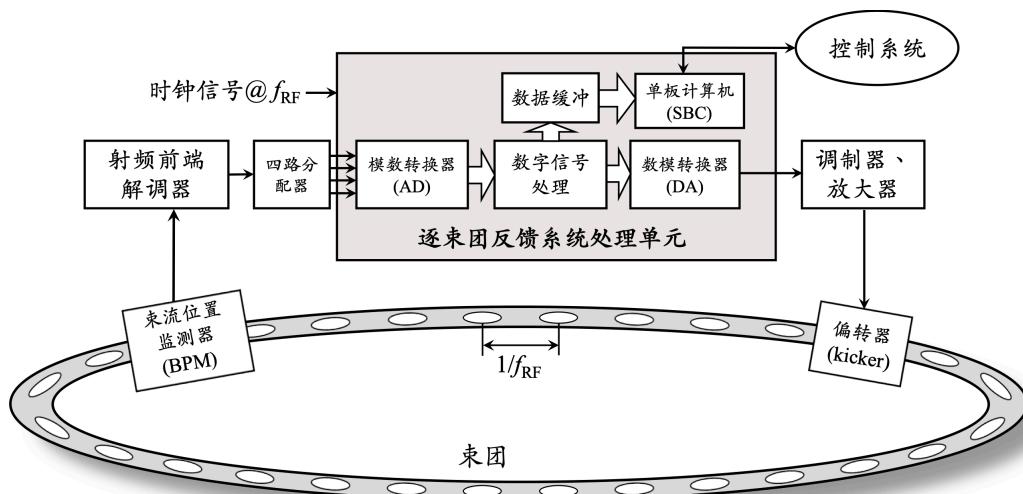


图 12.9：逐束团反馈系统可用来抑制横向或纵向耦合束团不稳定性。图例修改自 <https://www.esrf.fr/UsersAndScience/Publications/Highlights/2006/XRS/XRS06>。

尽管纵向耦合束团不稳定性一般不太是大问题，但横向耦合束团不稳定性 (transverse coupled bunch instability, TCBI) 就比较让人头疼，一般被认为是“多束团”集体效应的“天花板”。TCBI 的一例为横向电阻壁阻抗导致的电阻壁不稳定性 (resistive wall instability)。TCBI 一般不直接、马上对束团造成影响，而是相对缓慢导致束团发射度增加。一般采用横向逐束团反馈系统抑制 TCBI。但是，也看到有通过巧妙调整储存环加速器的色品 (chromaticity)¹⁷以抑制 TCBI 的方案。对调整色品后，如何抑制 TCBI，其物理机制仍不是非常清楚。一种说法认为通过调整色品，先抑制了作为先兆 (precursor) 的单束团头尾不稳定性后，大概率能缓解多束团的横向耦合束团不稳定性。

¹⁶理想的反馈系统在单圈内将束团“踢”回设计轨道，但工程实际一般是分多次、多圈“踢”。现代的逐束团反馈系统一般能提供的有效阻尼时间约 20 圈绕行周期时间。

¹⁷留意，由前面介绍知道，色品也被用来抑制头尾不稳定性。

在加速器集体效应分析中，宏粒子模型的优点是分析相对简单、物理图像清晰。由前面几个集体效应例子可以看到，尽管仅将束团视为单个或两个宏粒子组成单元，模型已经能够给出丰富的物理内涵，参考图 12.10。由于宏粒子模型本身限制，缺点也很明显，即无法很好地体现束团内部的动力学过程，特别是束团内局部或微结构动力学。因此，一种更具一般性的分析方法将束团视为连续体分布，或相空间分布函数，然后针对特定问题研究束团相空间分布函数的演化过程，将在下一章介绍。

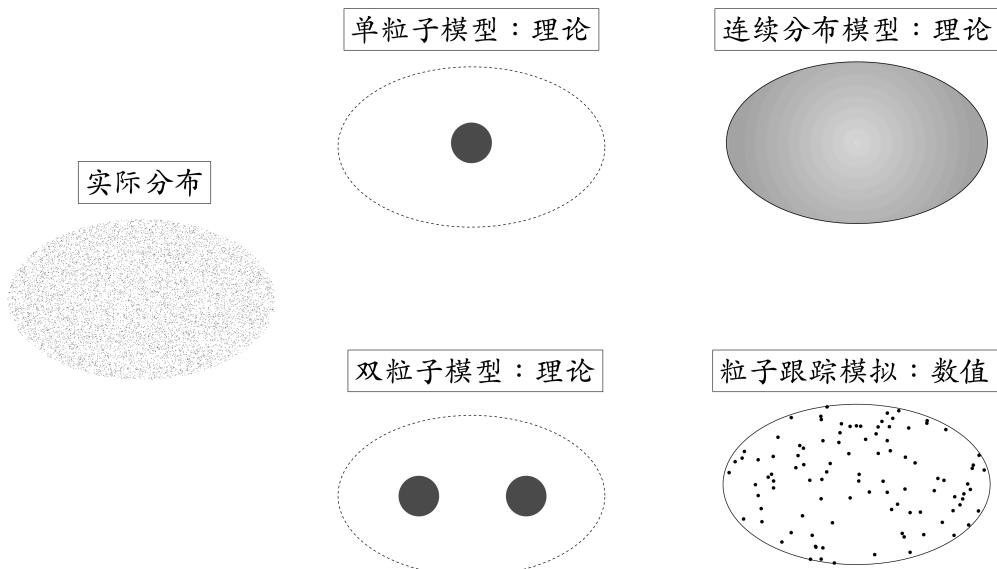


图 12.10：束团实际分布、几种理论模型与粒子跟踪模拟示意图。

12.4 浅谈：反馈模型

12.4.1 转移函数

对于电气专业的读者，看到图 12.11 应不陌生，此图给出反馈系统框架图，抽象对应图 12.9。在图 12.11 中，一个本质上不稳定的系统 G ，能够通过适当设计反馈 H ，有望使得系统整体变得稳定。噪声或扰动源可能来自束团绕行在加速器过程产生的外部源 (process noise) 或是反馈系统自身产生 (sensor noise)。外部源可能有：束团注入时的误差、加速器的射频腔、束团与环境交互作用的尾场、阻抗。

练习 12.5 根据图 12.11，推导此闭环反馈系统的转移函数 (closed-loop transfer function)。 ■

解 假设外部输入信号为 $X(s)$ ，输出信号为 $\Sigma(s)$ 。将中间信号，即 process noise 与 kick voltage 的合成信号，写成 $Z(s)$ 。按图 12.11，有

$$\Sigma(s) = G(s)Z(s), \quad Z(s) = X(s) - H(s)\Sigma(s)$$

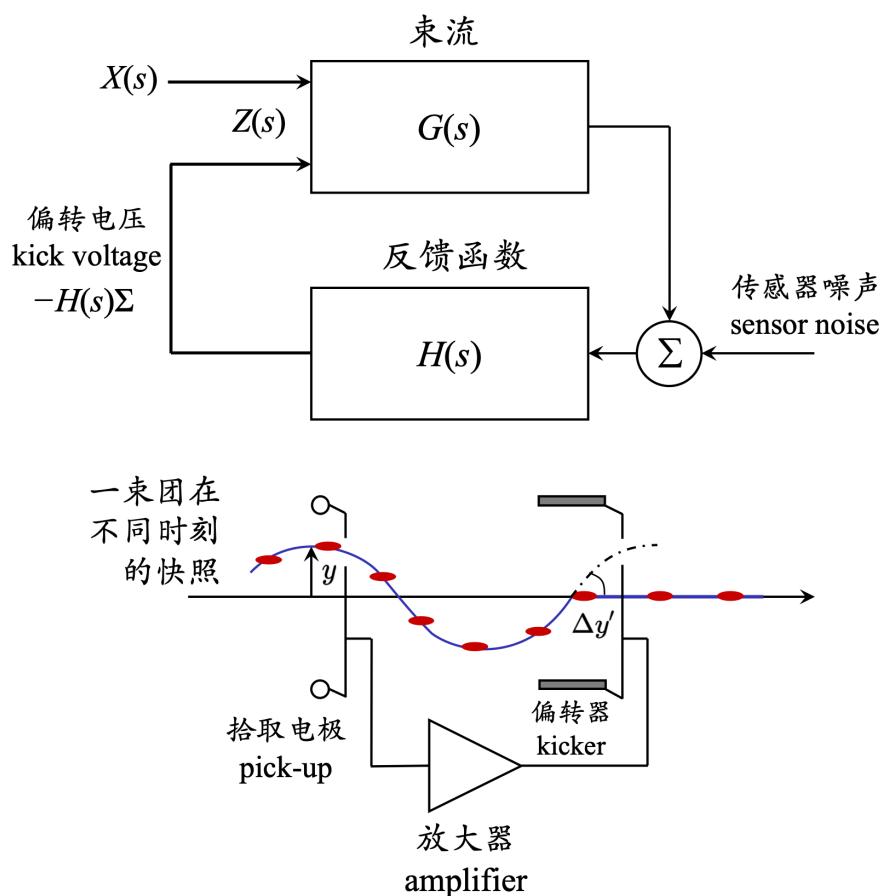


图 12.11：上图为反馈系统框架图，下图为特别针对横向的逐束团反馈系统示意图。噪声或扰动源可能来自束团绕行在加速器过程产生的外部源 (process noise) 或是反馈系统自身产生 (sensor noise)。图例修改自 Handbook §7.2.14。

代入后，化简，有

$$\Sigma(s) + G(s)H(s)\Sigma(s) = G(s)X(s) \Rightarrow \frac{\Sigma(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

■

由上练习可知，如果要反馈系统能够对集体效应导致的放大有抑制效果，则抑制倍数约有 $1 + G(s)H(s)$ 。

抑制耦合束团不稳定性反馈系统还可细分逐束团反馈系统 (bunch-by-bunch feedback system) 或逐模式反馈系统 (mode-by-mode feedback system)。细节此处不论，感兴趣的读者请自行参考相关文献。

以上讨论将集体效应视为黑盒子，即 $G(s)$ ，其中，输入信号为束团参数特征（比如，横向 betatron 振荡的束团质心坐标、纵向同步振荡的束团质心坐标、束团电流密度调制振幅等），输出信号为对应的、被放大的参数特征。现在，我们试着将黑盒子 $G(s)$ 打开，但是不巨细靡遗地通过底层一步步分析，而还是抽象地当成一种共振驱动模型，就像荡秋千——我们打算用驱动的简谐振子 (driven harmonic oscillator)，其中，驱动源抽象地认定为集体效应。共振驱动模型的运动方程可写为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A e^{-i\Omega t} \quad (12.94)$$

其中， x 可以是束团中个别粒子经历横向 betatron 振荡的坐标，则 ω_0 为 ω_β ，而 Ω 为代表集体效应的驱动频率，可以视为窄带阻抗中，对应峰值阻抗的频率。当描述粒子纵向运动时， ω_0 将为 ω_s 。以下分析不考虑单粒子 synchro-betatron 横纵向耦合。

受集体效应激励影响下，束团质心坐标 $\langle x \rangle$ 作为输出坐标，有如下结果：

定理 12.8. 驱动谐振子的质心响应

对一简单谐振子，无外部驱动源时的特征振荡频率为 ω_x ，当外部激励源有形式 $A e^{-i\Omega t}$ 时（其中， $A \in \mathbb{C}$ ），简谐振子的质心坐标响应可写成

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{A}{2\omega_x} e^{-i\Omega t} \int_L d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega - \Omega} \\ &= \frac{A}{2\omega_x} e^{-i\Omega t} \left[\text{P.V.} \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega - \Omega} + i\pi\rho(\Omega) \right] \\ &= \frac{A}{2\omega_x \Delta\omega} e^{-i\Omega t} [f(u) + ig(u)] \end{aligned} \quad (12.95)$$

其中，

$$u = \frac{\omega_x - \Omega}{\Delta\omega} \quad (12.96)$$

表征外部驱动源频率与特征振荡频率的相对偏移。这里的 $\rho(\omega)$ 描述的是束团内多个粒子（即多个简谐振子）的特征振荡频率的分布函数， $\Delta\omega$ 为特征振荡频率分布

函数的频宽。以上 $f(u) + ig(u)$ 又称为束团的转移函数或响应函数 (beam transfer function, BTF)。这里的 \int_L 为朗道积分，将在 §13.5.1 介绍，其对应的朗道阻尼效应将在第 16 章讨论。

证明 参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 §5.1。

注 这里我们不打算细究朗道积分与朗道阻尼效应，而将重点放在驱动谐振子的质心响应与转移函数。

注 对不同形态的特征振荡频率分布函数，其 $\Delta\omega$ 不同。公平的比较可采用半高全宽 $\Delta\omega_{1/2}$ 。 $\Delta\omega$ 与 $\Delta\omega_{1/2}$ 的关系可参考附录 A.6。□



笔记 学过控制理论的读者，可以试着对比闭环反馈系统的转移函数与驱动谐振子的质心响应的转移函数。对贴近物理系统的控制理论感兴趣的读者，可参考 John Bechhoefer, Control Theory for Physicists, Cambridge University Press (2021) 一书。

12.4.2 等效阻尼率

这一小节简短介绍反馈系统的等效阻尼率。将通过反馈系统对粒子运动的影响分析，采用两种等价分析方法：相空间作用量-角度分析、简谐振子模型。以横向 y 方向运动为例，参考图 12.11，比较上方框架图与下方示意图，反馈系统的输出 $\Delta y'$ 对应 Σ ，输入 y 对应 Z 。假设输入 (pickup) 在位置 s_0 ，对应的 betatron 函数 β_{y0} ；输出 (kicker) 在位置 s ，对应的 betatron 函数 β_y ；上游 pickup 与下游 kicker 间距 $\Delta s = s - s_0$ ，对应的 betatron 相位超前 $\Delta\psi_y = \psi_y - \psi_{y0} = k_{\beta_y}(s - s_0)$ 。

相空间作用量-角度分析 定义反馈系统的增益因子 g 为

$$\Delta y'(s) = g y(s_0) \quad (12.97)$$

留意，这里 g 的量纲为 长度⁻¹。此式表示反馈系统将根据在上游 s_0 位置的 y 信息给在下游 s 位置的 y' 一个“修正”，即 $y'(s) \rightarrow y'(s) + \Delta y'(s)$ 。通过反馈系统对粒子运动的影响，我们想找到对应的等效阻尼率。以下将反馈系统的阻尼率写成 τ_{FB}^{-1} ，可以想象， τ_{FB}^{-1} 可能与 s_0, s 位置处的 betatron 函数及 s_0, s 间的 betatron 相位超前 $\Delta\psi_y$ 有关。

反馈系统对粒子相空间坐标的影响 $\Delta y'(s)$ 由于与相位超前 $\Delta\psi_y$ 有关，因此较合理的分析可将 (y, y') 以作用量-角度坐标 (ψ_y, J_y) 描述。根据 §7.3，在 s_0 有

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{2\beta_{y0}J_{y0}} \cos \psi_{y0} \\ y'_0 &= -\sqrt{\frac{2J_{y0}}{\beta_{y0}}} (\sin \psi_{y0} + \alpha_{y0} \cos \psi_{y0}) \end{aligned} \quad (12.98)$$

在 s 有

$$\begin{aligned} y(s) &= \sqrt{2\beta_y J_y} \cos(\psi_{y0} + \Delta\psi_y) \stackrel{!}{=} \sqrt{2\beta_y J_y} \cos\psi_y \\ y'(s) &= -\sqrt{\frac{2J_{y0}}{\beta_y}} [\sin(\psi_{y0} + \Delta\psi_y) + \alpha_{y1} \cos(\psi_{y0} + \Delta\psi_y)] + g y_0 \\ &\stackrel{!}{=} -\sqrt{\frac{2J_y}{\beta_y}} [\sin\psi_y + \alpha_y \cos\psi_y] \end{aligned} \quad (12.99)$$

由上等式右边第二个等号，可以将 J_y 写成 J_{y0} 与 ψ_{y0} 、 $\Delta\psi_y$ 形式，有

$$J_y = J_{y0} \left[1 - 2g\sqrt{\beta_{y0}\beta_y} \cos\psi_{y0} \sin(\psi_{y0} + \Delta\psi_y) + g^2 \beta_{y0}\beta_y \cos^2\psi_{y0} \right] \quad (12.100)$$

对 ϕ_{y0} 在 $0 \sim 2\pi$ 范围内取平均，即 $\int_0^{2\pi} (\dots) d\psi_{y0} / 2\pi$ ，有

$$\bar{J}_y = J_{y0} \left(1 - g\sqrt{\beta_{y0}\beta_y} \sin\Delta\psi_y + \frac{1}{2} g^2 \beta_{y0}\beta_y \right) \quad (12.101)$$

假设 $\Delta\psi_y \approx \pi/2$ ，上式可以进一步化简写成

$$\bar{J}_y \approx J_{y0} e^{-\frac{2t}{\tau_{FB}}} \quad (12.102)$$

其中，等效阻尼率有

$$\frac{1}{\tau_{FB}} = \frac{g\sqrt{\beta_{y0}\beta_y} \sin\Delta\psi_y}{2T_0} \approx \frac{g\sqrt{\beta_{y0}\beta_y}}{2T_0} \quad (12.103)$$

这里的 $T_0 = C_0/c$ 为绕行周期。

 **练习 12.6** 要求一反馈系统具有阻尼时间为 40 圈绕行周期时间，在 pickup 与 kicker 处的 betatron 函数约为 10 m，试估算需要的反馈增益因子。 ■



笔记 留意，以上描述的 y_0 , y'_0 , $y(s)$, $y'(s)$ 对应的实际物理量应视为质心坐标，即 $\langle y \rangle_0$, $\langle y' \rangle_0$, $\langle y \rangle(s)$, $\langle y' \rangle(s)$ 。

简谐振子模型 另一种等效描述反馈模型的方式采用简谐振子。考虑

$$y''(s) + k_{\beta_y}^2 y(s) = -g \langle y \rangle(s_0) \quad (12.104)$$

留意，这里的 g 与上面第一种方法定义的 g 有不同的量纲，符号惯例也不同。令质心坐标有

$$\langle y \rangle(s) = Be^{-i\Omega s/c} \quad (12.105)$$

代入简谐振子方程，有

$$y''(s) + k_{\beta_y}^2 y(s) = -gBe^{-i\Omega s_0/c} \quad (12.106)$$

其中， $k_{\beta_y} = \omega_{\beta_y}/c$ 。其质心坐标响应的解可写成¹⁸

$$\langle y \rangle(s) = -\frac{gBc^2}{2\omega_{\beta_y}(\omega_{\beta_y} - \Omega)} e^{-i\Omega s_0/c} \quad (12.107)$$

¹⁸完整的分析不能这么做，应利用前面介绍的定理，考虑振荡频率的有限频宽，这里只想粗略估算反馈的等效阻尼率。

对比 $\langle y \rangle(s) = Be^{-i\Omega s/c}$, 有

$$\Omega - \omega_{\beta_y} \approx \frac{gc^2}{2\omega_\beta} e^{i\omega_{\beta_y} \Delta s/c} \quad (12.108)$$

对应的反馈等效阻尼率有

$$\frac{1}{\tau_{FB}} = \text{Im } \Omega \approx \frac{gc^2}{2\omega_{\beta_y}} \sin \frac{\omega_{\beta_y} \Delta s}{c} \quad (12.109)$$

以上推导用到了迭代思路。根据以上对 Ω 的规定，反馈系统要能抑制不稳定性，则要求 $g < 0$ 。此外，要使 $|\tau_{FB}^{-1}|$ 最大，则有 $\frac{\omega_{\beta_y} \Delta s}{c} = \Delta\psi_y = \pi/2$ ，此时反馈系统为 resistive。当 $\frac{\omega_{\beta_y} \Delta s}{c} = \Delta\psi_y = 0$ 或 π 时，则反馈系统为 reactive。

 **练习 12.7** 试利用平滑近似 $\bar{\beta}_y \approx C_0/2\pi\nu_x$ ，说明上式与第一个方法结果一致。 ■

12.5 浅谈：粒子运动方程的集体效应驱动项该用集总模型或分散模型？

回顾一下这一章介绍束团崩溃不稳定性时，其后方粒子运动方程为

$$y_2'' + k_\beta^2 y_2 = -\frac{Ne^2 W_\perp(z)}{2EL} y_1 \quad (12.110)$$

这里的尾场函数应视为随着 s 恒定，仅与 z 相关的函数，称这种尾场模型为分散 (distributed) 模型。当介绍罗宾逊不稳定性时，绕行的宏粒子运动方程为

$$\frac{d^2 z_n}{dn^2} + k_{s0}^2 C^2 z_n = \frac{4\pi\epsilon_0 N r_0 \eta C}{\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} W_\parallel(kC - nC + z_n - z_k) \quad (12.111)$$

这里的尾场函数应视为当束团逐圈经过谐振腔时感受到的尾场，称这种尾场模型为集总 (lumped) 模型。再看强头尾不稳定性或头尾不稳定性，当束团中头尾粒子分别通过留下的尾场驱动彼此时，该运动方程涉及的尾场函数在半个同步振荡周期内总是存在，可视为分散模型。并且，这种“分散”不只分散在单圈储存环周长，甚至可分散在数百圈/倍的储存环周长。

粒子运动方程的尾场、阻抗项该用集总模型或分散模型？一种回答是：视情况而定。如果关心束团的单次经过动力学过程，即关心束团随 s 在不同位置的状态时，那么应该采用分散模型的思路。如果关心的是束团在储存环中多圈绕行的动力学过程，即关心束团随绕行圈数的演化时，那么应该采用集总模型的思路。

细心的读者或许会问：如果同一个问题分别用两种思路分析，那结果如何？可能随不同问题，结果各异。这里不打算针对特定问题讨论，而尝试从一般情况说明：当满足尾场或阻抗在束团经历一段传输距离后所导致的(复)频移足够小时，两种思路结果可忽略视为等价。总结为如下定理：

定理 12.9. 集总模型、分散模型等价的适用条件： $|\delta\nu| \ll 1/2\pi$

假设参数条件远离所有可能的单粒子共振情况，在纯光学的“平滑近似”下，当束团经历一段传输距离后所集体效应导致的(复)频移满足如下条件时

$$|\delta\nu| \ll \frac{1}{2\pi} \quad \text{或} \quad |\delta\nu| \ll \nu_0 \quad (12.112)$$

其中， ν_0 为不考虑集体效应时的纯光学振荡频率，与横向运动相关时，为横向 betatron tune $\nu_{\beta 0}$ ；与纵向运动相关时，为纵向 synchrotron tune ν_{s0} 。

证明 考虑储存环单圈绕行情况，考虑粒子横向 betatron 振荡运动。对储存环而言，纯光学“平滑近似”有 $\nu_{\beta 0} = C/(2\pi\bar{\beta}) = R/\bar{\beta}$ (C 为储存环周长或一段磁聚焦结构传输段长度)、 $\omega_{\beta 0} = c/\bar{\beta}$ 、 $k_{\beta 0} = 1/\bar{\beta}$ 。现在考虑集总模型、分散模型两种情况，分别列写其运动方程为：

- 集总模型：假设尾场、阻抗集中在位置 s_0 处，强度有 $W_{\text{集总}}$

$$x'' + \frac{1}{\bar{\beta}^2}x + W_{\text{集总}} \cdot \delta(s)x = 0 \quad (12.113)$$

- 分散模型：假设尾场、阻抗平均分散在储存环或一段磁聚焦结构传输段，强度有 $W_{\text{分散}} = W_{\text{集总}}/C$

$$x'' + \frac{1}{\bar{\beta}^2}x + W_{\text{分散}} \cdot x = 0 \quad (12.114)$$

以下将证明上面这两种形式的运动方程在单圈绕行情况下，集体效应导致的（复）频移给出同样的形式。

从分散模型开始，存在尾场情况下，总频移有

$$2\pi\nu = C \left(\frac{1}{\bar{\beta}^2} + W_{\text{分散}} \right)^{1/2} = 2\pi\nu_{\beta 0}\bar{\beta} \left(\frac{1}{\bar{\beta}^2} + W_{\text{分散}} \right)^{1/2} \quad (12.115)$$

将集体效应的影响视为微扰，则有

$$\nu_{\beta} = \nu_{\beta 0} + \delta\nu = \nu_{\beta 0} \left(1 + \bar{\beta}^2 W_{\text{分散}} \right)^{1/2} \quad (12.116)$$

泰勒展开后，有

$$\delta\nu \approx \frac{\nu_{\beta 0}\bar{\beta}^2 W_{\text{分散}}}{2} = \frac{\bar{\beta} C W_{\text{分散}}}{4\pi} = \frac{\bar{\beta} W_{\text{集总}}}{4\pi} \quad (12.117)$$

现在，考虑集总模型，存在尾场情况下，总频移可以通过求其对应矩阵的迹，有

$$\begin{aligned} \cos(2\pi\nu_{\beta}) &= \frac{1}{2} \times \\ \text{Trace} \left[\begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu_{\beta 0}) & \bar{\beta} \sin(2\pi\nu_{\beta 0}) \\ -(1/\bar{\beta}) \sin(2\pi\nu_{\beta 0}) & \cos(2\pi\nu_{\beta 0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -W_{\text{集总}} & 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

化简后，有

$$\begin{aligned} &\cos(2\pi\nu_{\beta 0}) \cos(2\pi\delta\nu) - \sin(2\pi\nu_{\beta 0}) \sin(2\pi\delta\nu) \\ &= \cos(2\pi\nu_{\beta 0}) - \frac{W_{\text{集总}}\bar{\beta}}{2} \sin(2\pi\nu_{\beta 0}) \end{aligned}$$

当 $\delta\nu \ll \frac{1}{2\pi}$ 或 $\delta\nu \ll \nu_{\beta 0}$ 时，有

$$\delta\nu \approx \frac{\bar{\beta} W_{\text{集总}}}{4\pi} \quad (12.118)$$

由此证明两种思路等价。

注 留意此定理成立的两个前提假设。 □

练习 12.8 证明以上定理，考虑储存环多圈绕行情况，假设粒子纵向同步振荡运动。 ■



笔记 从分析角度看，无论是集总模型或分散模型，以上定理提供了分析集体动力学的“便利”，即可以在不需要完整 lattice 信息情况下，就能开展集体效应分析。这并不是说完整 lattice 信息是多余的：完整的集体效应分析如果能有完整的 lattice 信息自然最理想，但如

果只关注特定的集体效应的物理图像，则仅需要 lattice 的部分信息即足够。

第十二章 补充习题

1. 试简述束团负载基本定理 (fundamental theorem of beam loading)。
2. 试简述直线加速器中的束团崩溃不稳定性，及 BNS damping 的基本思路。
3. 试简述 Robinson 不稳定性。考虑穿越能量以上 (above transition) 情况，简述利用调谐机制抑制不稳定性的基本思路。
4. 以 dipole mode 为例，简述强头尾不稳定性与头尾不稳定性。说明其区别。
5. 分析集体效应时，时常关心的是模式“频移”与对应的“增长率”。试利用驱动谐振子模型说明为什么关心的量是频移与增长率，而不是其它量？有时候我们还关心一些束团物理量的“阀值”，试利用驱动谐振子模型说明阀值的概念从何而来？

