

电磁辐射与加速器束流动力学导论

Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第八章 电子纵向动力学与同步辐射效应

内容提要

- | | |
|----------------------------------|----------------|
| □ 动量紧缩因子 α_c 、滑相因子 η | 散 |
| □ 纵向束长压缩原理 | □ 同步辐射电子储存环特性 |
| □ 同步加速器稳相原理 | □ 量子寿命 |
| □ 纵向同步振荡 | □ 粒子加速原理 |
| □ 同步辐射阻尼、量子激发 | □ 电子储存环发射度定标定律 |
| □ 电子储存环平衡发射度、束长与能 | |

上一章介绍了单粒子的横向动力学 — 束流光学，主要讨论几种磁铁部件对粒子横向运动的影响，讨论了几个磁铁部件形成的周期性磁聚焦结构(如：储存环)对粒子与束团的影响。横向磁场作为粒子的聚焦源，介绍了一种系统的、得到广泛应用的分析量化方式 — Courant-Snyder 理论。这一章将考虑粒子的纵向动力学，考虑环形加速器中，射频/微波谐振腔作为加速或补偿粒子能量损失的能量源。由于关心的对象为电子，当其在闭环储存环或同步加速器弯转时，必须考虑同步辐射效应。第 4 章讨论过电子产生的同步辐射特性，当时更偏重于对辐射“场”的讨论。这里反过来，将讨论电子发出的同步辐射场怎么回头对粒子产生影响，首当其冲的是粒子能量/动量改变。粒子能量/动量偏差坐标 δ 为六维相空间坐标中的纵向坐标。因此，研究的重点首先是电子的纵向动力学。但是，同步辐射效应也对粒子横向动力学产生影响，这部分也在这一章讨论。

横向聚焦在上一章讨论了，但是还没讨论纵向聚焦。基于时变场加速的加速器，束团如果要在加速器中稳定运行，空间中 x, y, z 三个方向都需要外部提供聚焦才行。在描述粒子的纵向动力学时，射频/微波谐振腔除作为加速或补偿粒子(小幅)能量损失的能量源，同时，谐振腔也作为纵向聚焦源，好比横向的聚焦、散焦磁铁部件。由于不像横向的强聚焦，纵向聚焦一般为弱聚焦，且聚焦的场源也不像磁铁静磁场那样为多项式形式 $B_y + iB_x \propto (x + iy)^n$ ，而是像时变场的正弦函数形式 $E \propto \sin(kz - \omega t), \cos(kz - \omega t)$ 。因此，目前多数文献描述纵向动力学的方式与横向的 Courant-Snyder 理论不太一样，将在以下介绍。

以下如没有特别声明，这一章一律假设电子参考能量“大致”恒定。

注 在一些加速器教科书中，会有专门章节介绍射频 RF 直线加速器，篇幅一般从 Maxwell 方程组出发，介绍波导、谐振腔的电磁场。大型直线加速器的射频腔通常形成周期性串列结构，用以加速带电粒子。一般还讨论半开放的谐振腔形成周期结构之后的色散曲线等。加速重离子时，一般用射频四极直线加速器 (radio-frequency quadrupole, RFQ)，边聚焦、边加速¹。关于单个波导、谐振腔的介绍，已包含在此讲义第 1 章中，作为时变电磁场

¹ 在 1970 年由俄国科学家 V.A. Teplyakov 和 I.M. Kapachinsky 发明。第一个建造的射频四极直线加速器 RFQ

内容。这一章介绍的粒子纵向动力学主要在磁聚焦结构传输段的动力学过程。在大型直线加速器的射频腔周期串列结构的粒子动力学此处仅提及，不打算展开讨论。对射频/微波直线加速器感兴趣的读者，可参考 T.P. Wangler, RF Linear Accelerators, 2nd completely revised and enlarged edition, Wiley-VCH (2008)。



笔记 在这一章开始介绍前，先思考一个有趣的问题：既然横向采用静磁场聚焦带电粒子，纵向能不能也采用静磁场聚焦带电粒子？若先不考虑粒子加速问题，就是对一静止的带电粒子束，能不能采用静磁场或静电场在三个方向使之聚焦？答案：不行。此论证的结果称 Earnshaw 定理 (Earnshaw's theorem)。对此证明感兴趣的读者，可自行查找相关文献。

8.0 问答预览

1. 什么是动量紧缩因子 α_c ？

⇒ 动量紧缩因子 α_c 是描述具有能量偏差的粒子绕行路径长与参考粒子路径长之比的物理量，反映了能量偏差对粒子纵向运动的影响。

2. 同步加速器稳相原理是什么？

⇒ 束团内不同能量的粒子会经历不同的路径长度，导致不同的绕行时间。通过调整射频谐振腔的相位，可以使不同能量偏差的粒子获得适当的能量补偿，从而保持束团内粒子能量分布的稳定。

3. 什么是(纵向)同步振荡？

⇒ 纵向同步振荡是指粒子在纵向位能阱中进行的周期振荡运动，同步振荡频率与射频腔的场梯度有关。

4. 在粒子加速器中，啁啾与束团的纵向相空间分布有何关系？

⇒ 啁啾是指束团内不同纵向位置的粒子能量偏差在束团纵向位置分布上存在关联。啁啾可以影响束团的纵向相空间分布，使其呈现“斜”的形状。

5. 同步辐射阻尼效应是什么？

⇒ 同步辐射阻尼效应是指电子在弯转过程中发出的电磁辐射能量与粒子自身能量存在依存关系。能量较高的粒子产生的电磁辐射能量大，能量较低的粒子产生的电磁辐射能量小。经过谐振腔合适相位得到能量补偿后，存在的阻尼效应。同步辐射阻尼会导致束团发生纵向和横向阻尼振荡，使束团纵向能散与横向发射度减小，是一种冷却效应。

6. 什么是同步辐射量子激发效应？它如何影响束团的纵向能散和横向发射度？

⇒ 同步辐射量子激发效应是指电子在弯转过程中发出光子的随机性，导致束团能散和

linac 在美国 Los Alamos 得到“概念验证”，尽管尺寸小但非常成功。RFQ 是一种特别针对低速、高电流的直线加速元件，具有高捕获效率，可用于加速从 keV/核到 MeV/核的任何核子种类。与直线漂移管加速段 (linac drift tube) 不同，RFQ 沿着束轴线放置四个带有适当间隔径向调制的翼片，并且谐振腔以电四极模式激发。横向强聚焦自然地发生，而来自径向翼片调制的电场的纵向分量则提供了束团纵向加速。由于在翼片上可能的非常细微的周期性，它特别适用于低速粒子。RFQ 也在离子注入、同位素生产和中子源等许多应用中找到其用途，目前约三分之一 RFQ 被应用在重离子设备，其余加速质子。未来它们将更多地被用于放射性种类的加速器、串列静电加速器等许多需要强流设备中。此处 RFQ 一词容易与射频四极铁 (radio-frequency quadrupole magnet, RFQM) 混淆。此讲义采用姜伯承建议的 RFQM(RF Quadrupole Magnet) 来标注。

发射度增加。量子激发效应与同步辐射阻尼效应抵消达平衡后，使束团能散与发射度保持有限值。

7. 什么是量子寿命？

⇒ 量子寿命是指束团在储存环中由于有限真空管壁或能量接受范围而失去粒子的时间长度。量子寿命是束团稳定性的重要指标。

8. 能量回收型直线加速器如何回收能量？它相比传统直线加速器有何优势？

⇒ 能量回收型直线加速器通过将加速后的电子束减速并回收其能量，回收的能量用来加速新的电子束，从而实现能量的循环利用。能量回收型直线加速器可以提高束团重复频率和平均电流，并降低装置能耗。

9. 电子束如何从直线加速器注入到储存环中？

⇒ 电子束可以通过脉冲冲击磁铁引导进入储存环，并与储存环中的循环束团接合。注入方式可以分为单圈注入、多圈注入、离轴注入和纵向注入等。

10. 什么是束团的注入与引出？在储存环中有什么作用？

⇒ 束团的注入和引出是为了维持储存环的稳定运行和持续输出。注入是将新束团加入储存环，引出是将旧束团移出。

8.1 几个描述粒子纵向运动的物理量

先介绍几个描述粒子纵向运动的物理量。首先，最基本的一个纵向运动量为粒子的绕行路径长。第6章介绍过，在 Frenet-Serret 坐标 (x, y, s) 中，长度微分元可写为

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 ds^2$$

结合 $x' = dx/ds, y' = dy/ds$ ，粒子绕行路径长可定义如下：

定义 8.1. 动量紧缩因子 (momentum compaction factor)

对 平面环形加速器，粒子绕行路径长为

$$C = \oint \sqrt{\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 + x'^2 + y'^2} ds \approx C_0 + \oint \frac{x}{\rho} ds + \dots \quad (8.1)$$

其中， $C_0 = \oint ds$ 。令 $\Delta C = C - C_0$ ，定义非参考粒子与参考粒子由于能量偏差导致的绕行路径差有

$$\alpha_c \equiv \frac{1}{C} \frac{d\Delta C}{d\delta} = \frac{1}{C} \oint \frac{D(s)}{\rho} ds \quad (8.2)$$

其中，

$$\Delta C = \left[\oint \frac{D(s)}{\rho} ds \right] \delta \quad (8.3)$$

这里把非参考粒子的相对横向偏移 $x(s)$ 写成 $\Delta x(s) = D(s)\delta$ ，是相对于参考能量 $\delta = 0$ 的粒子而言。

对 直线加速器 或 单次经过 (single-pass) 加速器，则上面闭合线积分 $\oint \rightarrow \int_0^s$ ，将 $D(s)$ 写成 $R_{16}(s)$ 。定义动量紧缩因子 $R_{56}(s)$ 为

$$R_{56}(s) \equiv - \int_0^s \frac{R_{16}(\tau)}{\rho(\tau)} d\tau \quad (8.4)$$

留意与上面定义环形加速器时有个负号的符号差别。

注 在一阶近似下，非弯转段 ($\rho = \infty$) 不贡献动量紧缩因子。

注 一般情况， $\alpha_c > 0$ ，即能量稍高的粒子绕行的路径更长些（以下将进一步说明）。

注 α_c 无量纲，为储存环的集总参数，仅由磁聚焦结构决定，与束团参数无关。 R_{56} 为长度量纲，可以是单次经过加速器沿 s 的函数。当 $s = s_f$ 时，可视为单次经过加速器的集总参数。

注 上面 $\oint \frac{D(s)}{\rho} ds$ 有时以符号 \mathcal{I}_1 标注，称第一（同步）辐射积分 (the first synchrotron radiation integral)。后面会介绍。

注 如果加速器包含不只 xs 平面弯转，还有 ys 平面的话，则

$$\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \rightarrow \left(1 + \frac{x}{\rho_x} + \frac{y}{\rho_y}\right) \quad (8.5)$$

注 有些教科书直接将 $R_{56} \equiv \alpha_c L$ ，其中， L 为磁聚焦结构传输段长度，如：Wiedemann、Di Mitri 等。但是，此讲义所采用的定义， R_{56} 与 α_c （或 η ，后面将定义）差

一个负号。关于负号来源的讨论，可参考 A. Wolski 一书的 Eq. (5.35) 及其邻近篇幅讨论。



笔记 想想一般情况 $\alpha_c > 0$ 的根本原因是？可能需要回顾第6章介绍的 Frenet-Serret 坐标系。

回顾一下第7章介绍的内容。利用叠加原理，非参考能量粒子的横向 x 坐标可以写为 $x = x_{\text{COD}}(s) + x_\beta(s) + D(s)\delta$ ，其中：

- $x_{\text{COD}}(s)$ 为参考粒子在外部磁铁部件误差下的闭轨；
- $x_\beta(s)$ 为满足齐次 Hill 方程的非参考粒子 ($x, x' \neq 0$) 的 betatron 振荡；
- $D(s)\delta$ 为色散导致的横向偏差，满足非齐次 Hill 方程。

对直线加速器或单次经过加速器，描述纵向非参考粒子的方法可借鉴如上思路，将横向偏移以传输矩阵元素表示，有 $x(s) = R_{11}(s)x_0 + R_{12}(s)x'_0 + R_{16}(s)\delta_0$ 。依样画葫芦，束团内纵向非参考粒子 ($z \neq 0$) 的纵向位置偏差相对于参考粒子 ($z = 0$) 于是可写成

$$z(s) = R_{51}(s)x_0 + R_{52}(s)x'_0 + R_{56}(s)\delta_0 \quad (8.6)$$

其中，这里的 R_{51}, R_{52} 可写成如下形式：

$$R_{51}(s) = - \int_0^s \frac{R_{11}(\tau)}{\rho(\tau)} d\tau \quad (8.7)$$

$$R_{52}(s) = - \int_0^s \frac{R_{12}(\tau)}{\rho(\tau)} d\tau \quad (8.8)$$

这么轻易就写出来了？是不是凑的？片刻思考后，读者可能有两个问题：

1. R_{51}, R_{52} 能这么直观地与 R_{11}, R_{12} 关联吗？
2. 如果可以，该怎么写？上面结果是否合理？

先回答第一个问题：可以 \Rightarrow 通过辛条件 (symplectic condition) 关联，传输矩阵的元素存在 $\mathbf{M}^T \mathbf{S} \mathbf{M} = \mathbf{S}$ 约束条件。上一章 §7.8 介绍过，从数学上来说，辛条件可视为哈密顿量的内禀特性。这个概念或许稍微抽象，其实， R_{51}, R_{52} 能与 R_{11}, R_{12} 关联的事实可以通过物理图像理解，即在前面定义的路径长的概念下，粒子的横向偏移将会连带影响纵向路径差偏移。

对于第二个问题，下面试着将 R_{51}, R_{52} 以 R_{11}, R_{12} 函数表示。

证明 根据常数变易法，有

$$\begin{aligned}
 R_{16}(s) &= D(s) = S(s) \int_0^s d\tau \frac{C(\tau)}{\rho(\tau)} - C(s) \int_0^s d\tau \frac{S(\tau)}{\rho(\tau)} \\
 &= S\bar{C} - C\bar{S} \\
 R_{26}(s) &= D'(s) = S'\bar{C} + S\bar{C}' - C'\bar{S} - C\bar{S}' \\
 &= S'\bar{C} + S\frac{C}{\rho} - C'\bar{S} - C\frac{S}{\rho} \\
 &= S'\bar{C} - C'\bar{S} \\
 &= S'(s) \int_0^s d\tau \frac{C(\tau)}{\rho(\tau)} - C'(s) \int_0^s d\tau \frac{S(\tau)}{\rho(\tau)}
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

这里我们使用临时定义的化简符号。

考虑如下 4×4 矩阵，对应 $[x \ x' \ z \ \delta]^T$

$$\begin{pmatrix} C & S & 0 & D \\ C' & S' & 0 & D' \\ R_{51} & R_{52} & 1 & R_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

通过辛条件， $\mathbf{M}^T \mathbf{SM} = \mathbf{S}$ ，展开后，有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}^T \mathbf{SM} &= \begin{pmatrix} C & C' & R_{51} & 0 \\ S & S' & R_{52} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & D' & R_{56} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & S & 0 & D \\ C' & S' & 0 & D' \\ R_{51} & R_{52} & 1 & R_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C & C' & R_{51} & 0 \\ S & S' & R_{52} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & D' & R_{56} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C' & S' & 0 & D' \\ -C & -S & 0 & -D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -R_{51} & -R_{52} & -1 & -R_{56} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & CS' - C'S & 0 & CD' - C'D + R_{51} \\ SC' - S'C & 0 & 0 & SD' - S'D + R_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ DC' - D'C - R_{51} & DS' - D'S - R_{52} & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

于是，有

$$\begin{aligned}
 R_{51} &= DC' - D'C = R_{16}R_{21} - R_{26}R_{11} \\
 R_{52} &= DS' - D'S = R_{16}R_{22} - R_{26}R_{12}
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

将以上 D, D' 代入 R_{51} , 有

$$\begin{aligned}
 R_{51} &= DC' - D'C \\
 &= (S\bar{C} - C\bar{S})C' - (S'\bar{C} - C'\bar{S})C \\
 &= \bar{C}(SC' - S'C) \\
 &= -\bar{C} = -\int_0^s d\tau \frac{C(\tau)}{\rho(\tau)} = -\int_0^s d\tau \frac{R_{11}(\tau)}{\rho(\tau)}
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

依此类推, 可得

$$R_{52} = -\bar{S} = -\int_0^s d\tau \frac{S(\tau)}{\rho(\tau)} = -\int_0^s d\tau \frac{R_{12}(\tau)}{\rho(\tau)} \tag{8.13}$$

由此得证。

瞎猫碰上死耗子, 前面写出来的式子是正确的!



笔记 上面介绍的 α_c 或 R_{56} 通称动量紧缩因子或纵向色散函数, 但是 R_{51}, R_{52} 一般没有特别称呼。一般直称 R_{51}, R_{52} 或者称横纵向耦合系数。

注 以上 R_{51}, R_{52} 与 R_{11}, R_{12} 的积分关系中, 负号是辛条件要求的。而前面关于单次经过加速器的 R_{56} 与 R_{16} 的积分关系中, 负号则与此讲义采用的 $z = s/\beta_0 - ct$ 惯例有关。在一些教科书或文献中, 定义 $R_{56} = +\int_0^s [R_{16}/\rho] ds$, 宜留意。

定义 8.2. 动量紧缩因子 (momentum compaction factor) α_c 与渡越能量 γ_t

对储存环或同步加速器, 定义为

$$\alpha_c = \frac{1}{\gamma_t^2} \equiv \left\langle \frac{D}{\rho} \right\rangle \quad \text{或} \quad \gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}} \tag{8.14}$$

其中, γ_t 称为渡越能量或穿越能量 (transition gamma), 尖括弧 $\langle \dots \rangle \equiv \int_0^s (\dots) ds$ 。

注 一般储存环磁聚焦结构的 $\alpha_c > 0$, 因此, γ_t 为正实数。当 $\alpha_c < 0$ 时, γ_t 为纯虚数, 此时的磁聚焦结构设计称为虚 γ_t 磁聚焦结构 (imaginary- γ_t lattice)。 □

定义 8.3. 滑相因子 (slippage factor) η

顾名思义, 滑相因子为由于粒子能量偏差导致的相位滑移的相对量。对储存环或同步加速器, 定义为

$$\eta \equiv \frac{1}{\tau_0} \frac{d\Delta\tau}{d\delta} = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2} \tag{8.15}$$

其中, τ_0 为参考粒子经历磁聚焦结构传输段或绕行环形加速器的时间。

注 当粒子经历加速期间, γ 改变, 因此 η 会变, 但是 α_c 不变。当 $\gamma = \gamma_t$ 时, $\eta = 0$, 此时称粒子恰好处在穿越能量。后面讨论会发现, 此刻的粒子束缺乏纵向聚束, 相对脆弱。

注 $\eta > 0$ 称穿越能量以上 (above transition); $\eta < 0$ 称穿越能量以下 (below transition)。

粒子在加速期间，可能在储存环中经历自 $\eta < 0$ 至 $\eta > 0$ 过程，称跨越穿越能量 (transition crossing)。

注 对直线加速器或单次经过加速器，虽然一般采用 R_{5j} 描述纵向动力学，但有时候会引入 η ，此时恒有 $\eta < 0$ ，因为默认 $\alpha_c = 0$ 。

注 不要将滑相因子与有时写成 $\eta_{x,y}$ 的横向色散函数符号搞混。

注 有些文献定义滑相因子为 $\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c$ ，如：Conte & MacKay、Bryant & Johnsen。与此讲义差一负号，且连带相关物理量也将差一负号，宜留意。□



笔记 对 FODO 磁聚焦结构，有 $\gamma_t \approx \nu_x$ 。

上面介绍了几个物理量的定义，对单次经过加速器传输段， R_{5i} ($i = 1, 2, 6$) 的意义相对清楚。但是，如：滑相因子 η 为什么以如此方式量化，上面只给出数学定义。以下进一步说明为什么以此方式定义。根本原因是不同能量或动量的粒子在环形加速器中经历不太一样的路径，因此走出的总路径长有所不同。



笔记 有些读者可能纳闷：为什么先定义 α_c ，再定义 η ？为什么不直接给出完整的 η 定义，比如

$$\eta \equiv \frac{1}{\tau_0} \frac{d\Delta\tau}{d\delta} = \left\langle \frac{D}{\rho} \right\rangle - \frac{1}{\gamma^2}$$

两个可能的理由：

- 上一章介绍横向运动的时候，对能量偏差没有谨慎处理，很多时候虽然考虑能量偏差了，但仍假设 $\beta_0 \rightarrow 1$ 。因此，能量偏差导致的效应仅体现在路径差，即 α_c 。对横向动力学，这么做影响不大，既然定义了 α_c ，就用吧。**偶尔糊涂一次**。
- 这一章介绍纵向运动的时候，能量偏差对粒子绕行加速器一周时间的影响除了体现在路径差，也会体现在能量偏差本身的速度差。此外，当考虑粒子从低能到高能的加速而导致能量改变过程，这时候速度差的效应也会体现，并且这些效应可能是显著的。对纵向动力学，有时候用 η 是必要的。**不能再糊涂了**。但后面会看到，也不是所有时候都总用 η 。**也不是时刻清醒**。

以下分析：当参考能量粒子经历一磁聚焦结构传输段或绕行环形加速器时，如果将参考能量粒子的绕行时间写为 $\tau_0 = \frac{L_0}{v_0}$ ，则非参考能量粒子的绕行时间为？假设非参考能量粒子绕行时间为 τ 、经历的距离为 L 、速度 v ，则²

²这时候要小心些， v 不能当 c ，也不能与参考能量粒子视为同样的速度。

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{L}{v} = \frac{L_0 + \Delta L}{v_0 + \Delta v} = \frac{L_0 \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right)}{v_0 \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0}\right)} \\
&\approx \frac{L_0}{v_0} \left[\left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) \left(1 - \frac{\Delta v}{v_0}\right) \right] \\
&= \frac{L_0}{v_0} + \frac{\Delta L}{v_0} - \frac{L_0 \Delta v}{v_0^2} - \frac{\Delta L \Delta v}{v_0^2} \xrightarrow{\text{高次项, 忽略}}
\end{aligned}$$

感兴趣的量为相对抵达时间差，有

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_0} = \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} = \frac{\Delta L}{L_0} - \frac{\Delta v}{v_0} \quad (8.16)$$

其中，需要粒子速度与动量的关系³，有

$$p = \gamma m_e v \Rightarrow \Delta p = \Delta\gamma \cdot m_e v_0 + \gamma_0 m_e \Delta v \quad (8.17)$$

另外，由 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ，有

$$\Delta\gamma = -\frac{1}{2}(1 - \beta^2)^{-3/2} \times (-2\beta\Delta\beta) = \beta\gamma^3\Delta\beta = \frac{\beta\gamma^3}{c}\Delta v \quad (8.18)$$

因此

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \frac{\beta_0\gamma_0^3}{c}\Delta v \cdot m_e v_0 + \gamma_0 m_e \Delta v = m_e (\beta_0^2\gamma_0^3 + \gamma_0) \Delta v = \gamma_0^3 m_e \Delta v \\
\Rightarrow \frac{\Delta p}{p_0} &= \gamma_0^2 \frac{\Delta v}{v_0}
\end{aligned}$$

于是，

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_0} = \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} = \frac{\Delta L}{L_0} - \frac{\Delta v}{v_0} = \alpha_c \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} = \eta\delta = \eta \frac{1}{\beta_0^2} \frac{\Delta E}{E_0} \quad (8.19)$$

其中，滑相因子的定义 $\eta \equiv \alpha_c - \frac{1}{\gamma_0^2}$ 派上用场。

相对时间差的贡献由相对路径差与相对速度差组成。由此说明了为什么滑相因子 η 以该形式定义。由于是相对时间差 $\Delta\tau$ ，当与射频加速场的周期 T_{RF} 相对比之后，“相位”的概念就出来了，于是称滑相因子 (phase slippage factor)。

定义 8.4. 穿越能量以上 (above transition)、穿越能量以下 (below transition)

定义为

- $\eta > 0$ 称穿越能量以上 (above transition)，此时高能粒子较晚到达，在束团尾部；低能粒子较早到达，在束团头部；
- $\eta < 0$ 称穿越能量以下 (below transition)，此时高能粒子较早到达，在束团头部；低能粒子较晚到达，在束团尾部。

注 粒子在加速期间，可能在储存环中经历自 $\eta < 0$ 至 $\eta > 0$ 过程，称跨过穿越能

³回忆一下，§7.10讨论能量偏差效应时，一般就写成 δ 。现在不能像那时对能量或动量偏差那样糊里糊涂了。

量 (transition crossing)。

注 由于电子很轻，很容易加速到相对论速度，所有的高能电子储存环均操作在穿越能量以上 (above transition)。□

由 $\frac{\Delta\tau}{\tau_0} = \eta\delta$ 知，对于 $\eta < 0$ 情况，高于参考能量的粒子，其绕行的时间周期较短，因此将超前于参考粒子。乍看之下，这个结果好像符合预期，因为高于参考能量的粒子的跑得比参考粒子快些，自然会超前于参考粒子。但是，这种看似符合预期的“乍看”论证，其实是瞎猫碰上死耗子，没有考虑周全但却得到与事实一致的结果。较完整的论证应该是：高于参考能量的粒子，虽然速率更大些(因此跑的更快)，但其额外经历的距离也较长(回忆一下磁刚度 $E \propto B\rho$)，最终到底早于或晚于参考粒子抵达，还要视这两个效应的净效应决定。如果由于较大速率占了主导，尽管额外跑的距离需要花时间，但仍由于较大的速率而赶上参考粒子，则其绕行的时间周期较短，因此将超前于参考粒子，有 $\Delta\tau = \tau - \tau_0 < 0$ 。

基于类似的论证，对更高能量的粒子来说，当 $\eta > 0$ 时，根据相对论运动学，将给出稍微令人意外的结果，称负质量效应。

定义 8.5. 负质量效应 (negative mass effect)

由 $\frac{\Delta\tau}{\tau_0} = \eta\delta$ 知，对于 $\eta > 0$ 情况或当参考粒子能量 $\gamma > \gamma_t$ 时，此时高于参考能量的粒子，其绕行的时间周期较长，因此将落后于参考粒子。这个稍微令人意外的结果是由于能量较高的粒子走了比较大圈，又称负质量效应 (negative mass effect)。□



笔记 以下整理一下目前讨论得到的结果。粒子在经历一磁聚焦结构传输段或储存环中的时间差、纵向路程差或绕行频率差可相互关联如下：

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{\Delta C}{C_0} + \frac{\Delta v}{v_0} = -\left(\alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\Delta p}{p_0} = -\eta\delta \approx -\eta \frac{\Delta E}{E_0} \quad (8.20)$$

其中， $f_0, T_0, C_0, v_0, p_0, E_0$ 分别为理想参考粒子绕行的环形加速器的频率、周期、周长、参考速度、参考动量、参考能量。

以上介绍的是描述单个粒子的纵向动力学。当描述多个粒子形成的束团时，量化其纵向相空间分布可用类似 §7.5 介绍的束矩阵 Σ 描述。回忆一下，横向 2×2 的束矩阵有

$$\Sigma = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^T \rangle = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xx' \rangle \\ \langle xx' \rangle & \langle x'^2 \rangle \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

其中， $\epsilon = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$ 为束团的几何发射度。

区别是，现在纵向束矩阵一般不再以 Courant-Snyder 参数形式呈现⁴，更常见的是通

⁴ 以 Courant-Snyder 理论描述粒子纵向动力学的讨论，可以参考 X.J. Deng et al., Courant-Snyder formalism of longitudinal dynamics, Phys. Rev. Accel. Beams **24**, 094001 (2021). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.094001>。

过类似如上的二阶矩 (second moments) 描述。在写出束团纵向分布的束矩阵之前，先定义啁啾，用来描述束团纵向分布在相空间的“倾斜”程度，即 $z\text{-}\delta$ 的相关联程度。

定义 8.6. 咨啾 (chirp)

当粒子束内不同纵向位置的粒子，其能散在束团内纵向位置分布上存在明确关联时，称啁啾，即束团内不同粒子的 (z, δ) 坐标存在关联。定义啁啾为

$$h(z) \equiv \frac{\partial \delta}{\partial z} \quad (8.22)$$

当束团分布足够“线性”时，有 $h(z) \approx \frac{\langle z\delta \rangle}{\langle zz \rangle}$ ，称线性啁啾 (linear chirp)，参考图 8.1。啁啾的常用单位量纲为 m^{-1} 。

注 当束团不存在能量啁啾时，即束团的纵向相空间分布要不是“躺平”的，要不就是“立起来”的，两者无法分辨，仅是横纵轴坐标的缩放差异而已。此时，束团的能量偏差分布以能散表征，又称非相干能散 (incoherent energy spread) 或切片能散 (slice energy spread)。当束团存在能量啁啾时，即束团的纵向相空间分布看起来是“斜”的，可能左倾或右倾。此时，束团的 局域 能量偏差分布以能散表征，仍称非相干能散 (incoherent energy spread) 或无关能散 (uncorrelated energy spread) 或切片能散 (slice energy spread)；但是，还存在一种束团 整体 的能量偏差，称相关能散 (correlated energy spread) 或整体能散 (bulk energy spread)。

注 咨啾一词取自于光学，对激光场或部分相干辐射场，其频率成分如果在时间上存在明确关联，称激光场或辐射场存在啁啾，光场的线性啁啾一般定义为

$$u = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (8.23)$$

辐射场的 $(\Delta t, \Delta \omega)$ 相空间分布又称 Wigner 分布。 □

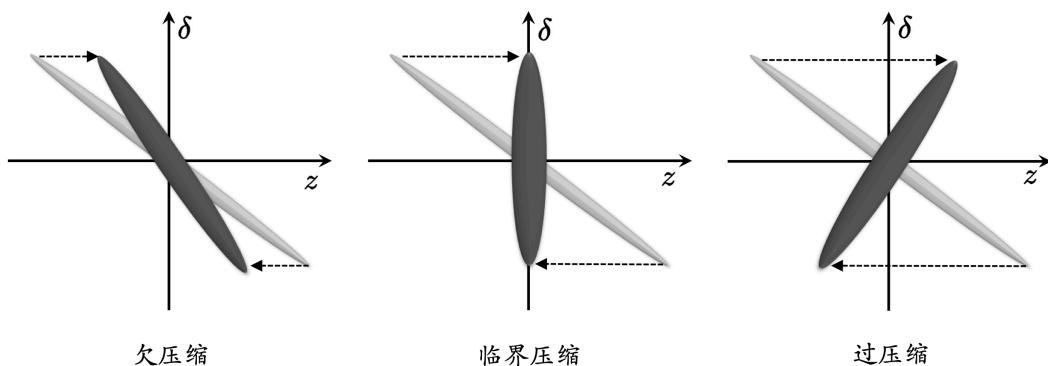


图 8.1：束团的 (z, δ) 斜率为线性啁啾。图中浅色分布为初始束团纵向相空间分布，深色分布为传输一段 $R_{56} > 0$ 距离后的相空间分布。纵向相空间分布在 z 轴上的投影表征束团长度，在 δ 轴上的投影表征束团能散。经过一段距离传输后，如果束长减小，表示束团经历压缩。左图称“欠压缩” (under compression)，中间图称临界压缩 (critical compression)，右图称过压缩 (over compression)。

由以上讨论，纵向束矩阵可以写成

$$\Sigma = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^T \rangle = \begin{pmatrix} \langle zz \rangle & \langle z\delta \rangle \\ \langle \delta z \rangle & \langle \delta\delta \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z^2 & \sigma_{z\delta} \\ \sigma_{z\delta} & \sigma_\delta^2 \end{pmatrix} \quad (8.24)$$

许多束团纵向动力学的描述可以通过纵向束矩阵结合传输矩阵量化(复习 §7.5)，如：束长 σ_z 、能散 σ_δ 、啁啾 $h \approx \frac{\langle z\delta \rangle}{\langle zz \rangle}$ 等。

以下举一例说明。我们从一个束长 σ_{z0} 、非相干能散 $\sigma_{\delta0}$ 、初始无能量啁啾的纵向一维束团开始 ($s = s_0$)，根据其相空间坐标 (z, δ) ，束团分布可写为

$$\Sigma(s_0) = \begin{pmatrix} \sigma_{z0}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta0}^2 \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

在粒子加速器中，一般用射频谐振腔的 RF 场给予束团一能量啁啾。参考图 8.2。想像 RF 场为一正弦函数，当束团被放在除了 $\pi/2, 3\pi/2$ 相位外，就能获得一“非零斜率”的场，即束团中不同 z 位置的粒子感受到不同的 RF 场，因此获得不同能量偏差 δ ，从而建立束团内 $z-\delta$ 关系，即啁啾。忽略谐振腔的长度，粒子经过 RF 场的过程可假设“瞬间”完成，即粒子的纵向相对坐标 z 固定不变 (frozen)，仅改变能量，即

$$\begin{aligned} z(s_1) &= z(s_0) \\ \delta(s_1) &= \delta(s_0) + \frac{qV_{RF}}{E_0} \sin \phi(s_0) = \delta(s_0) + \frac{qV_{RF}}{E_0} \sin(\omega_{RF}t(s_0) + \phi_{RF}) \\ &= \delta(s_0) + \frac{qV_{RF}}{E_0} \sin(k_{RF}(s_0 - z(s_0)) + \phi_{RF}) \\ &\stackrel{!}{=} \delta(s_0) + \frac{qV_{RF}}{E_0} \sin(-k_{RF}z(s_0) + \phi_{RF}) \end{aligned} \quad (8.26)$$

其中， $z = s - ct$ ， $k_{RF} = \omega_{RF}/c$ 。

如果在谐振腔出口位置 $s = s_1$ 的相空间坐标写为

$$\begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{s=s_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R_{65} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{s=s_0} \quad (8.27)$$

其中， $R_{65} \equiv \frac{\partial \delta}{\partial z}$ 表征谐振腔 RF 场的能量调制强度。按 R_{65} 定义，即将上面能量改变的式子线性化，有

$$R_{65} = \frac{\partial \delta}{\partial z} = -\frac{qV_{RF}}{E_0} \frac{\omega_{RF}}{c} \cos\left(\frac{\omega_{RF}}{c}z + \phi_{RF}\right) \approx -\frac{qV_{RF} \cos \phi_{RF}}{E_0} \frac{\omega_{RF}}{c} \quad (8.28)$$

其中，假设束长占射频谐振腔波长比例很小。一般将相位 ϕ_{RF} 设定在 0 或 π 附近，因此，离开谐振腔与进入谐振腔时，束团中心能量不变。有时候也将 R_{65} 写成 h 。当写成 R_{65} 时，强调其为谐振腔自身特性，即能量调制强度；当写成 h 时，强调束团特性，即束团获得的能量啁啾。两种符号体现其命名时的偏好取向而已。以下我们将 R_{65} 写为 h 。

参考图 8.2，当 $qV_{RF} > 0$ 时，当 $\phi_{RF} = 0$ 时 — 称 zero crossing，按此讲义惯例，束团得到能量啁啾为负，即 $h < 0$ 。

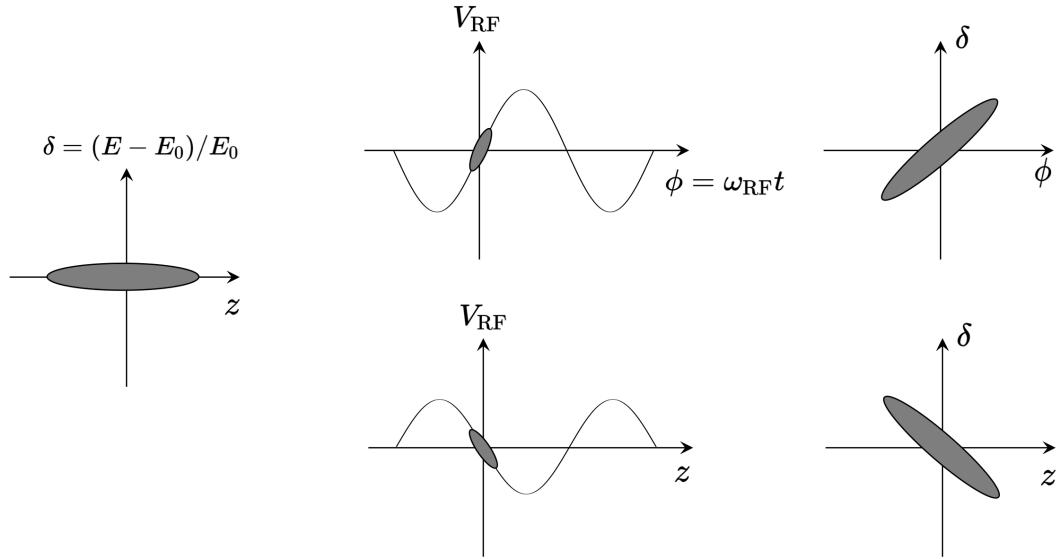


图 8.2: 束团压缩前要先获得能量啁啾，再通过 R_{56} 调整纵向相空间分布。一般选 $\phi_{RF} = 0$ ，又称 zero crossing。按此讲义惯例，当束团能量啁啾 $h < 0$ ，因此压缩束团要求 $R_{56} > 0$ 。注意 V_{RF} 波形与 z 或 ϕ 的区别。留意，不同文献使用的惯例可能相同。

现在，当束团经过一 $R_{56} \neq 0$ 的纵向色散段，束团将经历压缩或拉伸过程。为了进一步说明，纵向色散段的一般线性传输矩阵可以 R_{56} 表征⁵

$$\begin{pmatrix} 1 & R_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

于是，束团经过此纵向色散段后，假设位置在 $s = s_2$ ，粒子相空间坐标演化可写为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{s=s_2} &= \begin{pmatrix} 1 & R_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{s=s_1} = \begin{pmatrix} 1 & R_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{s=s_0} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + hR_{56} & R_{56} \\ h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{s=s_0} \\ &= \mathbf{M}(s_0 \rightarrow s_2) \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_{s=s_0} \end{aligned} \quad (8.30)$$

其中，整体传输段合成的 2×2 传输矩阵以 \mathbf{M} 表示。也可以用 \mathbf{R} 表示。

此为基于线性传输矩阵的单粒子相空间演化。根据 §7.5，纵向束团整体的相空间演化可应用纵向束矩阵，按下式描述

$$\begin{aligned} \Sigma(s_2) &= \mathbf{M}(s_0 \rightarrow s_2) \Sigma(s_0) \mathbf{M}^T(s_0 \rightarrow s_2) \\ &= \begin{pmatrix} R_{56}^2 \sigma_{\delta 0}^2 + (R_{56}h\sigma_{z0} + \sigma_{z0})^2 & h\sigma_{z0}^2(R_{56}h + 1) + R_{56}\sigma_{\delta 0}^2 \\ h\sigma_{z0}^2(R_{56}h + 1) + R_{56}\sigma_{\delta 0}^2 & h^2\sigma_{z0}^2 + \sigma_{\delta 0}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.31)$$

当通过上游能量调制段与下游纵向色散段后，束团将被压缩或拉伸，以束团压缩因子 C

⁵这里先不纠结于怎么构造 $R_{56} \neq 0$ 的磁聚焦结构的细节。

表示，有

$$C \equiv \frac{\sigma_{z,s_0}}{\sigma_{z,s_2}} = \frac{\sigma_{z0}}{\sqrt{R_{56}^2 \sigma_{\delta0}^2 + (R_{56}h\sigma_{z0} + \sigma_{z0})^2}} \quad (8.32)$$

其中， h 为初始能量啁啾。当 $C > 1$ 时，束团压缩；当 $C < 1$ 时，束团拉伸；当 $C = 1$ 时，束长不变。

可以看到，当 $R_{56} = 0$ 时， $C = 1$ 。此时的磁聚焦结构又称等时性 (isochronous) 结构。

再进一步简化，考虑初始束团能散很小时， $\sigma_{\delta0} \rightarrow 0$ ，则有

$$C \equiv \frac{\sigma_{z,s_0}}{\sigma_{z,s_2}} \approx \frac{\sigma_{z0}}{|R_{56}h\sigma_{z0} + \sigma_{z0}|} = \frac{1}{|1 + hR_{56}|} \quad (8.33)$$

因此，当 $h = -1/R_{56}$ 时，束团达到临界压缩，最短束长为 $\sigma_{z,\min} = |\sigma_{z0}|/|R_{56}\sigma_{\delta0}|$ ，参考图 8.1。

定理 8.1. 束团压缩因子公式

存在初始能量啁啾 h ，经过纵向色散段 R_{56} 后的束团，其束团压缩因子可写成

$$C \equiv \frac{\sigma_{z,s_0}}{\sigma_{z,s_2}} = \frac{\sigma_{z0}}{\sqrt{R_{56}^2 \sigma_{\delta0}^2 + (R_{56}h\sigma_{z0} + \sigma_{z0})^2}} \quad (8.34)$$

当初始束团能散很小时，有

$$C \equiv \frac{\sigma_{z,s_0}}{\sigma_{z,s_2}} \approx \frac{\sigma_{z0}}{|R_{56}h\sigma_{z0} + \sigma_{z0}|} = \frac{1}{|1 + hR_{56}|} \quad (8.35)$$

- 当 $C > 1$ 时，束团压缩；
- 当 $C < 1$ 时，束团拉伸；
- 当 $C = 1$ 时，束长不变。

练习 8.1 作为练习，验证一下 $\mathbf{M}(s_0 \rightarrow s_2)$ 保辛。 ■

练习 8.2 这里假设 $\phi_{RF} \approx 0$ ，即基本不改变粒子参考能量。如果考虑 $\phi_{RF} \neq 0$ ，此时粒子参考能量改变，试给出更准确的 R_{66} 表示式。此时， R_{66} 未必为 1。 ■

练习 8.3 以上分析仅考虑一维纵向相空间动力学，试推广到 (x, y, z) 三维情况，写出推广的束团压缩因子表示式。 ■

练习 8.4 基于二阶矩的束矩阵只能表征线性传输过程的束团相空间分布，无法体现非线性传输过程或者束团的非线性特征，如：束团局部扭曲等。思考一下，如何推广束矩阵概念，使能够一定程度上体现非线性传输过程或者束团的非线性特征？ ■

解 高阶矩、切片等。不同方法，各有优缺。 ■

注 总体来说，以上分别利用谐振腔提供束团能量调制与利用纵向色散提供束团压缩的方法，属于纵向强聚焦 (longitudinal strong focusing)。与一般情况下谐振腔被同时用来提供能量补偿与纵向聚焦——称纵向弱聚焦 (longitudinal weak focusing)——有所不同。对纵向强聚焦，束团的纵向相空间分布在很短的距离内产生显著改变；对纵向弱聚焦，束团的纵向相空间分布一般在同步振荡周期内才有显著变化（下一节将介绍）。两者截然不同。此种情况如同横向弱聚焦与横向强聚焦的差别。在横向强聚焦 (§7.3) 被提出来之前，一般弯转磁铁与聚焦/散焦磁铁都是“一体”的，即通过修整磁体剖面，改善磁场，使同时包含弯转磁场与聚焦/散焦磁场。自横向强聚焦被提出来后，磁铁的功能就分开了，二极铁负责使粒子转弯，四极铁负责使粒子束团聚焦或散焦。

 **笔记** 图 8.2 右下角的四弯铁磁聚结构，如果束团没有能量啁啾，则 $C = 1$ ，称旁路传输 (bypass transport)。当束团存在能量啁啾，且将此磁聚结构用来压缩束团时，称磁压缩器 (bunch compressor 或称 chicane)。关于磁压缩器的更多介绍，将在 §16.2.3 讨论，或可参考 Handbook 的 §4.5。

 **笔记** 上面介绍的基于能量啁啾与磁压缩器的带电粒子束压缩原理与光学上的激光脉冲压缩原理很像，称啁啾脉冲放大 (chirped pulse amplification, CPA)。CPA 最早在 1985 年由 Gerard Mourou 和 Donna Strickland 提出⁶，思路为将激光短脉冲先在时域展宽，然后放大已展宽的激光脉冲，接着再压缩放大后脉冲的过程。将激光脉冲“放大”与“压缩”两个过程分开，使得激光放大器的光学元件免受脉冲功率的影响，从而减少非线性效应，并避免材料损坏。激光脉冲的展宽和压缩是基于激光束的纵向相空间相关性属性，原理与上述带电粒子束压缩原理很像。对 CPA 原始论文感兴趣的读者，可以参考 Donna Strickland and Gerard Mourou, Compression of amplified chirped optical pulses, Optics Communications **56**, 3, 219-221 (1985). [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(85\)90120-8](https://doi.org/10.1016/0030-4018(85)90120-8)。

8.1.1 讨论： z, s, ct 与束团头部尾部粒子符号惯例

在讨论粒子纵向动力学时，时常需要分辨束团头部或尾部粒子，特别是在直线加速器或单次经过加速器，因为这时候头部和尾部粒子的动力学可能不太一样。

一般在直线加速器或单次经过加速器中，磁聚结构的全域纵向路径坐标以 s 表示，束团内相对束团中心参考粒子的局域纵向坐标则以 z 表示。对极端相对论粒子，此讲义采用 $z = s - ct$ 惯例。因此，在这一章或第 11 章之后，我们都维持此惯例。

特别注意，第 10 章介绍自由电子激光 (free-electron laser, FEL) 理论时，我们入境随俗，将 s 与 z 颠倒。在第 10 章， z 表示波荡器中的全域、纵向沿轴坐标，束团内相对中心参考粒子的局域纵向坐标则以 s 表示，仍有 $s = z - ct$ 。但是，更多时候，FEL 理论分析

⁶与另一位物理学家 Arthur Ashkin，由于他们提出的 CPA 技术与对光学领域的贡献，获得 2018 年诺贝尔物理学奖。

时采用有质动力相位(ponderomotive phase), 定义为 $\theta = (k+k_u)z - \omega t$, 相关讨论见第10章。

回到这一章所采用惯例, $z = s - ct$, 当规定 $z = 0$ 为束团中心参考粒子时, $z > 0$ 为束团头部粒子, 此时有 $t < 0$; $z < 0$ 为束团尾部粒子, 此时有 $t > 0$ 。

有些教科书采用不同惯例, 读者应留意。以下比较不同教科书(自由电子激光教科书除外)对束团头部、尾部粒子的符号使用惯例:

- 此讲义、Chao、Conte & MacKay、Di Mitri、Wolski: 采用 $z = s - ct$ 。束团纵向局域坐标 z 、全域坐标 s 、头部粒子 $z > 0, t < 0$ 。
- Zotter & Kheifets: 同上, 但采用 $s = z - ct$, z, s 符号相反, 即束团纵向局域坐标 s 、全域坐标 z 、头部粒子 $s > 0, t < 0$ 。
- Stupakov & Penn、Wiedemann: 采用 $s = ct - z$ 。束团纵向局域坐标 s 、全域坐标 z 、头部粒子 $s < 0, t > 0$ 。

基于 $z = s - ct$ 惯例, 有 $\Delta z = z - z_0 = -c\Delta t$, 其中, $\Delta t = t - t_0$ 。有时候, Δt 写成 $\Delta\tau$ 。 Δz 还可与 RF 波长关联, 有 $\Delta z = (\lambda_{RF}/2\pi)\Delta\phi$ 。由于 $\Delta\tau = \eta\delta$, 留意不同惯例在穿越能量以上 (above transition) 或穿越能量以下 (below transition) 时, 其纵向相空间的旋转/切应方向不同。

8.2 同步加速器稳相原理与纵向动力学

上一节介绍到滑相因子，粒子由于能量偏差“滑相”了，经过谐振腔时，加速相位就存在偏差，滑走的相位能不能补偿回来，滑相补偿后的粒子是不是还能稳定运行？这一节将讨论同步加速器稳相原理与纵向动力学。

对环形加速器或储存环而言，多数情况下 $\eta > 0$ ， $\frac{\Delta\tau}{\tau_0} \approx \eta \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}$ ，即，较高能量的粒子绕行一周的时间较长，走了较长的路径，相对于参考粒子较晚才回到同一出发位置。由于 $\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$ ，在极端相对论情况下，有 $\eta \approx \alpha_c$ 。

对纵向运动而言， $\delta = 0$ 的参考能量粒子又称“同步”粒子。将同步粒子抵达谐振腔时刻写为 t_s ，对应 RF 相位写为 ϕ_s ，假设此粒子将获得加速或能量补偿⁷。考虑能量补偿情况，同步粒子经过谐振腔后，获得的能量补偿有 $\Delta E = U_0 > 0$ ，从而经历同步辐射能量损失过程的 $\delta < 0$ ，在经过谐振腔后有 $\delta = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta\gamma}{\beta^2\gamma_0} = \frac{\Delta E}{\beta^2 E_0} \equiv 0$ 。对 $\eta > 0$ 情况，较高能量的粒子较晚抵达，如果获得加速或能量补偿较少 $\Delta E < U_0$ ，则能量将变得靠近同步粒子的能量，下一圈绕行时间将变短。较低能量的粒子较早抵达，如果获得加速或能量补偿较多 $\Delta E > U_0$ ，能量将变得靠近同步粒子的能量，下一圈绕行时间变长。如此一来，束团内不同能量的粒子将更靠近同步粒子的能量。以上称为同步加速器的纵向稳相原理 (principle of longitudinal phase stability)，由 Vladimir Veksler (Lebedev Institute of Physics) 与 Edwin McMillan⁸ (University of California, Berkeley) 在 1944-1945 年独立提出，成为近代同步加速器运行的基石。

这里的如果是有成立条件的。在给出成立条件之前，参考下图 8.3、8.4、8.5。

定律 8.1. 同步加速器稳相原理

对 $\eta > 0$ 情况，较高能量的粒子较晚抵达，当 $\pi/2 < \phi_s < \pi$ 时，获得加速或能量补偿较少 $\Delta E < U_0$ ，则能量将变得靠近同步粒子的能量，下一圈绕行时间将变短。

对 $\eta < 0$ 情况，较高能量的粒子较早抵达，当 $0 < \phi_s < \pi/2$ 时，获得加速或能量补偿较少 $\Delta E < U_0$ ，能量将变得靠近同步粒子的能量，下一圈绕行时间变长。如此一来，束团内不同能量的粒子将更靠近同步粒子的能量。

注 此原理对能量补偿情况与粒子加速减速情况均成立。

注 此原理告诉我们，并不是全范围 RF 相位 $0 < \phi_s < 2\pi$ 都可以任意选择的，只有在一个约 $1/4$ 范围内（或更小范围，下面会介绍）粒子能够稳定运行。基于此原

⁷利用交变电磁场，封闭的磁聚焦结构如果加速粒子，称同步加速器 (synchrotron)；如果粒子能量保持恒定，称储存环 (storage ring)，此时交变电磁场只用来补偿粒子逐圈绕行可能的能量损失。有时候这两者通称同步加速器。以下这一章除 §8.6 外，如没有特别声明，一律假设电子参考能量“大致”恒定。

⁸由于成功生成超铀元素镎 (neptunium)，与 G. Seaborg 于 1951 年获得诺贝尔化学奖。

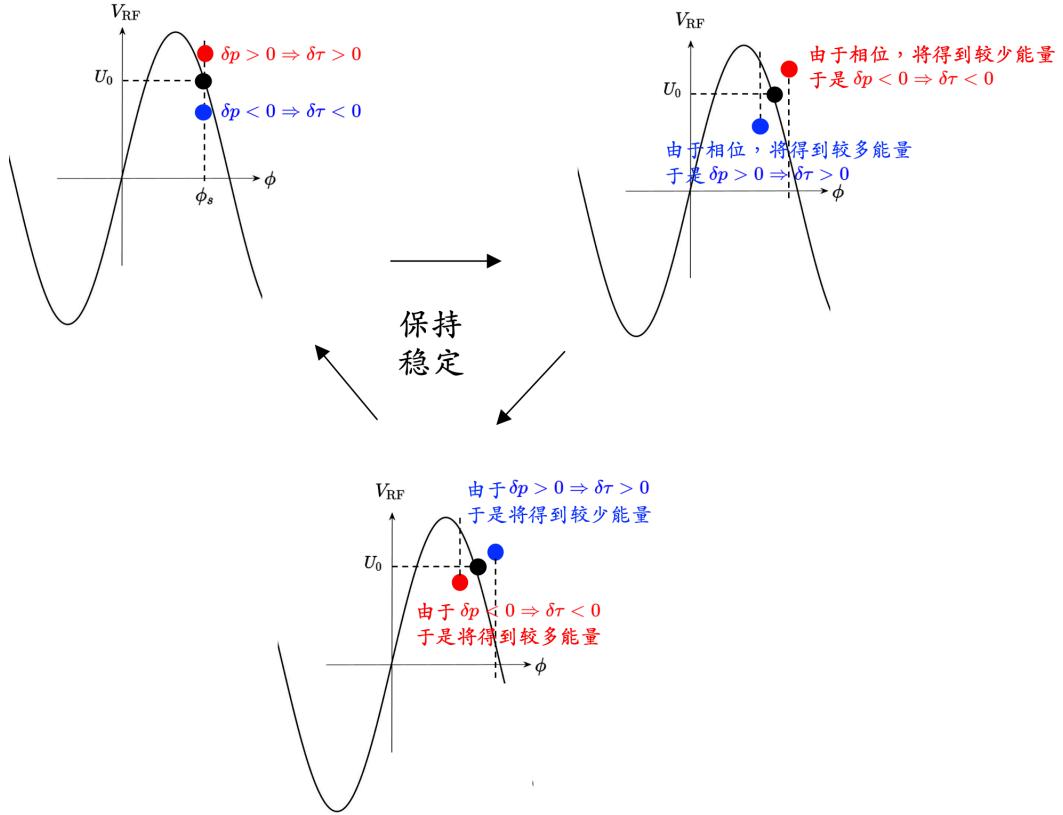


图 8.3: 纵向稳定, 假设 $V_{RF} = V_0 \sin(\omega_{RF}t + \phi_s)$, 此图考虑 $\eta > 0$, 即穿越能量以上 (above transition), $\pi > \phi_s > \pi/2$ 。

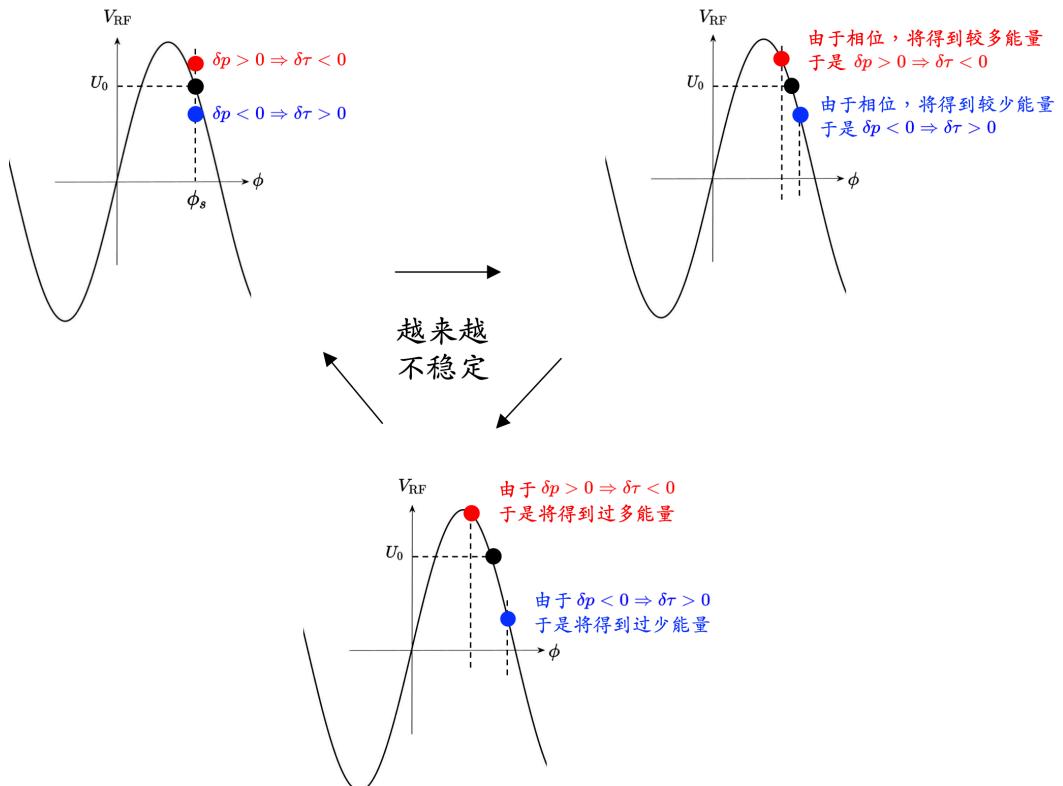


图 8.4: 纵向不稳定, 假设 $V_{RF} = V_0 \sin(\omega_{RF}t + \phi_s)$, 此图考虑 $\eta < 0$, 即穿越能量以下 (below transition), $\pi > \phi_s > \pi/2$ 。

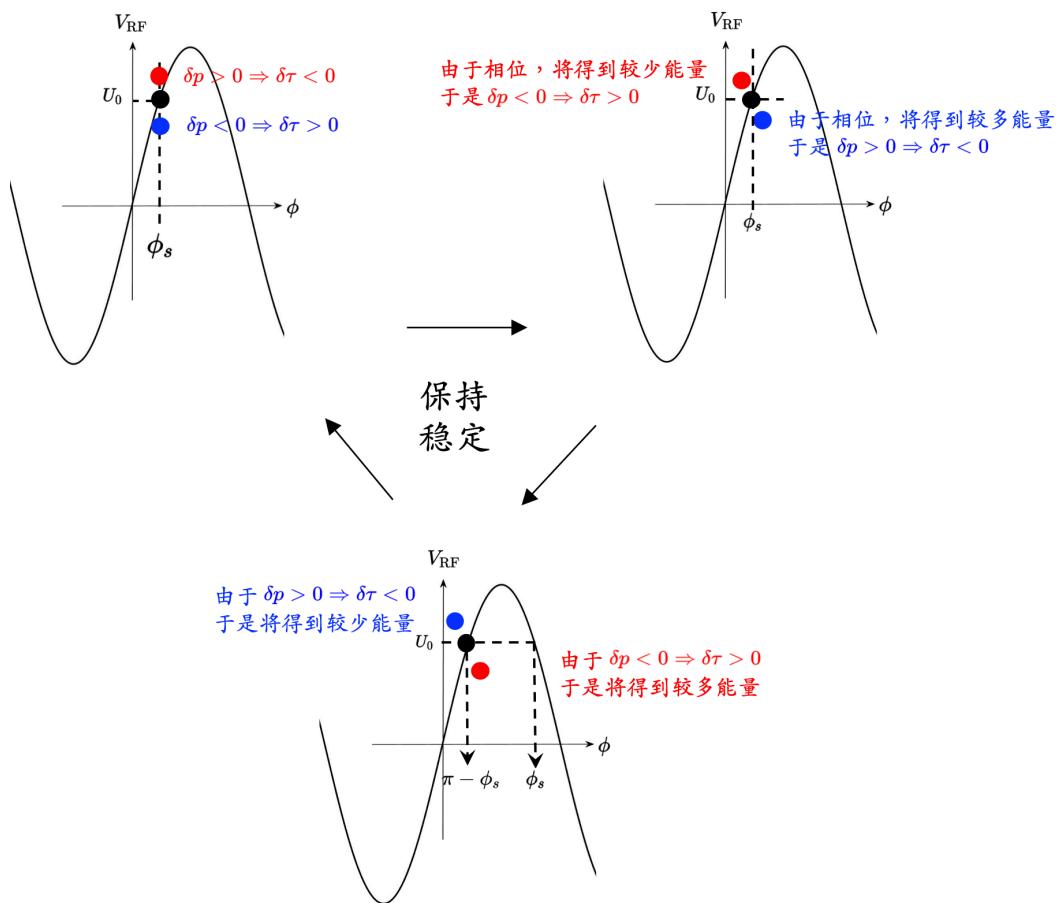


图 8.5: 纵向稳定, 假设 $V_{\text{RF}} = V_0 \sin(\omega_{\text{RF}} t + \phi_s)$, 此图考虑 $\eta < 0$, 即穿越能量以下 (below transition), $\pi/2 > \phi_s > 0$ 。

理，除了给出同步加速器能够稳定运行的相位范围外，由于高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 约束，在某些情况下，对粒子横向聚焦或散焦可能存在影响。□



笔记 回顾上一章 §7.2 介绍横向强聚焦原理，根据以上介绍的纵向稳相原理，能够理解这里的纵向稳相原理属于纵向弱聚焦。进一步说，谐振腔同时提供两个功能：对粒子提供能量、聚焦。这是目前绝大多数电子同步加速器的共同特性。对束团中的不同粒子，得到加速或能量补偿对应谐振腔的电压，不同相位差别为是补偿的多与少；对束团中的不同粒子，感受到的聚焦强度对应的则是谐振腔电压的梯度，即电场，不同相位差别为聚焦强度的大小。思考一下，从横向弱聚焦转变到横向强聚焦的好处，有没有对应从纵向弱聚焦到纵向强聚焦的好处？有没有什么有效的方法实现？

上一章介绍横向动力学时，分析方式大致分两种：一种是着重于磁聚焦结构特性（即， $\beta(s), \alpha(s)$ 沿着 s 的包络振荡等），另一种则是分析束团在相空间的行为（粒子的 betatron 振荡对应在相空间绕行形成相椭圆）。由于一般考虑的情况是束团横向相空间椭圆与磁聚焦结构相空间契合（matched）的情况，加上横向 betatron 振荡一般比粒子在加速器中的绕行频率高些 $\nu_\beta \gg \nu_0 = 1$ ，因此，标准、典型的分析采用 Courant-Snyder 参量 $\beta_{x,y}, \alpha_{x,y}, \gamma_{x,y}, \epsilon_{x,y}$ 等。

$$\nu_s \ll 1 \ll \nu_\beta$$

与横向动力学相比，现在纵向动力学分析更倾向于直接在纵向相空间中分析。部分原因是，横向磁铁部件一般由线性场组成，或其位函数 A_s 为一次或二次式，哈密顿量为二次型 $\mathcal{H}_0(x, P_x, s) = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}K(s)x^2$ ，对应横向相空间分布接近椭圆⁹。影响粒子纵向动力学的电磁部件为射频腔，一般假设为 $\sin(\omega_{RF}t + \phi_s)$ 或 $\cos(\omega_{RF}t + \phi_s)$ ，为非线性场，对应纵向相空间分布不再是椭圆，而是类似于图 8.6 下排的“鱼眼”(fish eye) 或“高尔夫球杆”(golf-club-like) 形状。



笔记 由图 8.6 上排 RF 场的正弦函数形态可以看到，有 $\partial E_z / \partial z \neq 0$ 。由电场高斯定律知， $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，即

$$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (8.36)$$

当 $\partial E_z / \partial z \neq 0$ 时，伴随着 $\partial E_\rho / \partial \rho \neq 0$ 。由此可看出，横向磁场聚焦的必要性。对束团经历射频/微波谐振腔的动力学过程，可参考经典论文 K.-J. Kim, RF and space-charge effects in laser-driven RF electron guns, Nucl. Instru. Methods A **275**, 201-218 (1989). [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(89\)90688-8](https://doi.org/10.1016/0168-9002(89)90688-8)。

到目前为止，虽然得到了同步加速器稳相原理，但人们对纵向动力学的介绍还停留在定性阶段。为了进一步分析，我们需要定量些。现在尝试构造非参考粒子纵向相空间

⁹注意，这里仅限于线性场。如果分析横向非线性动力学，即由六极铁或更高级磁铁的影响，那么哈密顿量就不再是二次型，当然相空间也不再是椭圆。

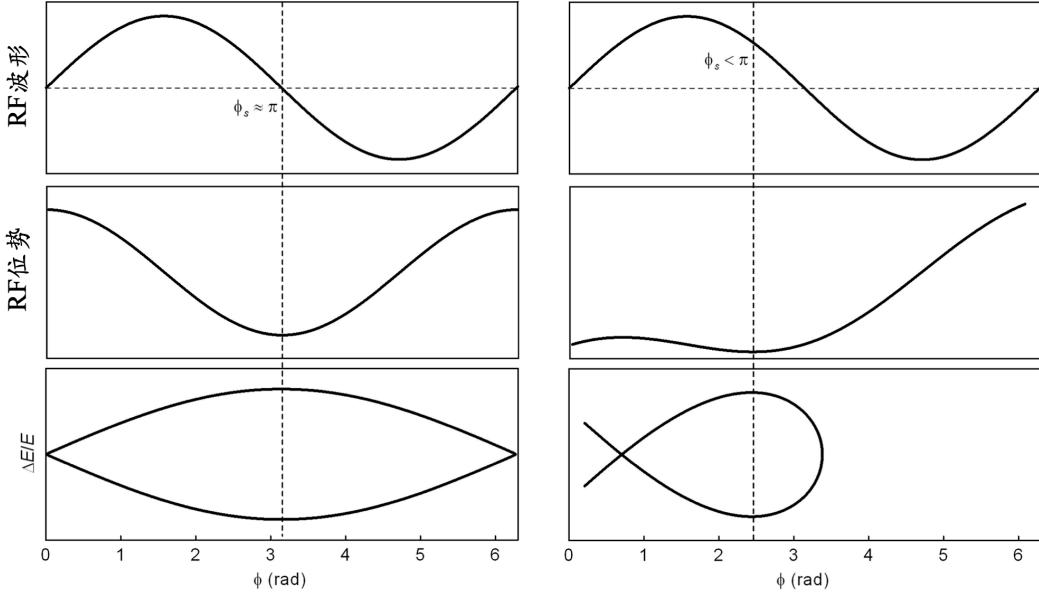


图 8.6: RF 腔波形(上排)、位势(中排)与对应的相空间拓扑(下排)。

坐标 (z, δ) 的运动方程。首先，

$$z' \equiv \frac{dz}{ds} \approx \frac{\Delta z}{C_0} = -\frac{\Delta \tau}{\beta_0 \tau_0} = -\eta \delta \quad (8.37)$$

其中，负号是由于束团内非参考粒子(z)与参考粒子($z \equiv 0$)的间距、参考粒子路径长 s 、与非参考粒子时刻 t 的定义导致。此处我们采取的定义为¹⁰

$$z = \frac{s}{\beta_0} - ct \Rightarrow \Delta z = \frac{C_0}{\beta_0} - cT = \frac{C_0}{\beta_0} - \frac{C}{\beta} = \frac{C_0}{\beta_0} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \quad (8.38)$$

注意，这里用到了平滑近似 (smooth approximation)，即假设非参考粒子相对于参考粒子的距离差 z 是一段磁聚焦结构或是绕行储存环一圈之后的积累效应。对于单次经过加速器，可以写成

$$z' = R'_{56} \delta \quad (8.39)$$

此处 $R'_{56} = dR_{56}/ds$ ，且留意 R_{56} 与 $\eta = \alpha_c - \gamma^{-2} \approx \alpha_c$ 差一个负号。

再来，考虑非参考粒子的能量方程。由于非参考粒子与参考粒子进入加速腔的时刻不同，存在时间差，对应到射频相位差，得到的能量也就存在差异。以下采用“正弦”惯例，即粒子经过加速腔感受到的能量按 $qV_{\text{RF}} \sin \phi$ 计算^{11,12}。假设参考粒子看到的加速场相位为 ϕ_{RF} ，则非参考粒子的能量偏差可以写为

$$\Delta \delta = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{qV_{\text{RF}}}{E_0} \sin \left(\phi_{\text{RF}} - \frac{\omega_{\text{RF}}}{c} z \right) - \frac{U_0}{E_0} \quad (8.40)$$

其中， U_0 表示粒子绕行时可能产生的能量损失或能量改变，可能由于同步辐射效应或其他效应。这里的 U_0 可以是一个常数，也可以是能量偏差 δ 的函数，下面会进一步介绍，

¹⁰这里采用 $s = ct + z$: 束团头部 $z > 0$ ($t < 0$)，束团尾部 $z < 0$ ($t > 0$)。

¹¹对电子而言， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ C。以下讨论的结论独立于电荷符号，为免除负号可能带来的不必要的困扰，读者不妨视 $qV_{\text{RF}} > 0$ 。

¹²一般来说，同步加速器或储存环社群习惯采用“正弦 (sin)”惯例；直线加速器社群有些采用“余弦 (cos)”惯例。阅读文献或引用公式时宜留意其使用的惯例。

现在先暂时当作常数。当 $z = 0$ 时，上式变成参考粒子的能量偏差。

由此，非参考粒子的能量方程可写为

$$\delta' \equiv \frac{d\delta}{ds} \approx \frac{\Delta\delta}{C_0} = \frac{qV_{RF}}{E_0 C_0} \sin\left(\phi_{RF} - \frac{\omega_{RF}}{c} z\right) - \frac{U_0}{E_0 C_0} \quad (8.41)$$

将 z' 与 δ' 方程合并，有

$$\frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{qV_{RF}}{E_0 C_0} \eta \sin\left(\phi_{RF} - \frac{\omega_{RF}}{c} z\right) + \eta \frac{U_0}{E_0 C_0} \quad (8.42)$$

现在，将 ϕ_{RF} 写成 ϕ_s 用以强调参考粒子的相位为“同步”相位 (synchronous phase)，表征同步相位的粒子正是那个能够恰好获得补偿能量损失的粒子，即

$$\sin \phi_s = \frac{U_0}{qV_{RF}} \quad (8.43)$$

在实际情况下，由于束团长度一般远短于射频加速场的波长，即束团覆盖的相位范围 $\ll 2\pi$ ，或 $\omega_{RF}z/c = k_{RF}z \ll \phi_{RF}$ 或 $\omega_{RF}z/c \ll 1$ ，则上面 z'' 方程可以进一步化简

$$\frac{d^2z}{ds^2} + k_z^2 z = 0 \quad (8.44)$$

其中， $k_z^2 = -\frac{qV_{RF}}{E_0 c C_0} \eta \cos \phi_s$ 。注意，这里的 ϕ_s 不能写成 ϕ_{RF} 。此即简谐振子的运动方程！通解有类似 $z = A \sin(k_z s + \phi_0)$ 的形式¹³。

回忆一下横向 betatron 振荡的 Hill 方程，有

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0 \quad (8.45)$$

其形式是不是很像？如果粒子经过周期性磁聚焦结构，则这里的 $K(s) = K(s + L)$ 是周期函数。如果粒子在储存环中，逐圈绕行经过同一个加速腔， $k_z(s) = k_z(s + C)$ 也可以视为周期函数；在直线加速器中，粒子经过一串列加速腔，如果形成周期结构，那么 $k_z(s) = k_z(s + L)$ 也是周期函数。如上一章介绍，粒子有横向 betatron 振荡；那么，这里也有类似的纵向振荡，又称纵向 synchrotron 振荡。

大学物理学过简谐振子，这里回顾一下。粒子在一个局限的范围内振荡，是因为有外部聚焦源，也可以视为外部聚焦源形成位能阱或势阱 (potential well)，粒子在阱里如果偏离最低位能处¹⁴，就会振荡，就有振荡频率。比如，在加速器中的粒子，由于横向聚焦/散焦四极铁会导致 betatron 振荡，振荡频率与聚焦/散焦强度有关，即 $\nu_\beta \propto \sqrt{K}$ 。那么，纵向振荡从何而来？RF 加速器腔。其提供纵向位能阱，使偏离同步粒子的非参考粒子有纵向 synchrotron 振荡，振荡频率与 RF 腔场梯度有关，即 $k_z \propto \sqrt{V_{RF}}$ 。

在介绍横向振荡时，定义了 betatron tune 为横向振荡频率与绕行频率的比值， $\nu_\beta = \frac{\omega_\beta}{\omega_0}$ 。现在，也可以依样画葫芦定义 synchrotron tune 为纵向振荡频率与绕行频率的比值，

¹³这里 z 的通解中 A 为一常数，对比横向运动的通解，我们可能会倾向于将其写成 $A \sim \sqrt{\epsilon_z \beta_z}$ ，从而定义纵向发射度与纵向 betatron 函数。这么想是完全可行的，但不幸的是，目前最普遍的分析纵向力学的方式不是采用 Courant-Snyder 参量，而是直接分析纵向相空间结构。细节往下接着介绍。

¹⁴粒子如果恰好在位能阱底部就不振荡，就好比参考粒子。一般非参考粒子总会有些偏差，就会振荡。

$\nu_s = \frac{k_z}{k_0} = \frac{k_z}{2\pi/C_0}$, 有

$$\nu_s = \frac{k_z C_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{qV_{RF}}{E_0} \frac{\omega_{RF} C_0}{c} \eta \cos \phi_s} \quad (8.46)$$



笔记 这里写出了纵向 synchrotron tune 的显形式。回忆一下，有没有类似的横向 betatron tune 的显形式？一般教科书不会写 betatron tune 的显形式，而是给出其积分定义式

$$\nu = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\omega_\beta}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\tau}{\beta(\tau)} \quad (8.47)$$

这是因为横向磁聚焦结构有许多不同类型，如：FODO、DBA、TBA 等。对于不同的磁聚焦结构，其 $\beta(s)$ 解不尽相同，因此很难给出一个公式，此积分公式已经算是通用的表示式。相对于横向，纵向的聚焦结构相对单一，就是射频谐振腔或 RF 腔。如果遇到特殊形式的纵向聚焦源，那么就要重新构建纵向粒子运动方程才能写出其纵向振荡频率。



练习 8.5 审视上面推导 k_z 的过程，用了 $\omega_{RF}z/c \ll 1$ 的假设。如果不做此假设，试着推导纵向振荡频率 k_z 。 ■

好，现在接着讨论。我们可以利用以上得到的 ν_s 回头验证同步加速器的稳相原理。粒子在纵向位能阱中要能稳定振荡， $z = A \cos(k_z s + \phi_0)$ ，表示振荡频率要是实数 $\nu_s \in \mathbb{R}$ ，否则运动将变得无界而不稳定。由此给出以下结论：

- 当 $\eta < 0$ 穿越能量以下 (below transition) 时，稳定振荡要求 $\sin \phi_s > 0, \cos \phi_s > 0$ ，即 $0 < \phi_s < \frac{\pi}{2}$ ；
- 当 $\eta > 0$ 穿越能量以上 (above transition) 时，稳定振荡要求 $\sin \phi_s > 0, \cos \phi_s < 0$ ，即 $\frac{\pi}{2} < \phi_s < \pi$ 。

与本章前面定性讨论的同步加速器稳相原理的结论一致。



笔记 由于横向、纵向聚焦源的差异，横向多以密集、周期性磁聚焦结构提供聚焦/散焦源，有 $\nu_\beta \gg \nu_0 = 1$ ；纵向聚焦源一般由射频 RF 腔提供，属于弱聚焦，有 $\nu_s \ll 1$ 。于是，有

$$\nu_s \ll 1 \ll \nu_\beta \quad (8.48)$$

数量级而言，一般 $\nu_s \sim 10^{-3}$ ，而 $\nu_\beta \sim 10$ 。

再接着拿纵向与横向动力学对比，横向相空间像是个椭圆，纵向相空间像“鱼眼”或“高尔夫球杆”形状。追溯其原因，前者像椭圆是因为横向哈密顿量为二次型，有

$$\mathcal{H}_0(x, P_x, s) = \frac{1}{2} P_x^2 + \frac{1}{2} K(s) x^2 \quad (8.49)$$

按第7章思路，最终可以导出不变量 $\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon$ ，表征相空间椭圆。

那么，既然纵向不再是椭圆形状，那么其哈密顿量形式像什么？由上面介绍的 z' 与

δ' 运动方程，根据第6章介绍的哈密顿运动方程，可以“重构”纵向运动的哈密顿量，有

$$\mathcal{H}(z, \delta) = -\frac{1}{2}\eta\delta^2 + \frac{qcV_{\text{RF}}}{\omega_{\text{RF}}E_0C_0} \left[\sin(\phi_s) \cdot \frac{\omega_{\text{RF}}z}{c} - \cos\left(\phi_s - \frac{\omega_{\text{RF}}z}{c}\right) \right] \quad (8.50)$$

其中，我们用同步相位 ϕ_s 取代参考粒子相位 ϕ_{RF} ，假设参考粒子的能量损失恰好由射频 RF 腔完美补偿， $\sin \phi_s = \frac{U_0}{qV_{\text{RF}}}$ 。

练习 8.6 利用哈密顿运动方程，结合这里的哈密顿量，推导粒子纵向运动方程。 ■

练习 8.7 如果考虑粒子有净加速或净减速，则不能用 ϕ_s 取代 ϕ_{RF} ，适当改写哈密顿量，推导粒子纵向运动方程。 ■

有了此粒子纵向运动的哈密顿量 $\mathcal{H}(z, \delta)$ 之后，我们比起先前只有运动方程本身，现在多了些“弹性”：我们可以直接通过对此哈密顿量的研究 — 而不要求解 x, x' 与 z', δ' 的微分方程组 — 就能获得纵向力学的物理图像。第6章介绍过，系统哈密顿量一定程度上表征系统总能量，即，动能与位能总和¹⁵。如果我们把此哈密顿量画在 (z, δ) 相空间中，将其等值的点连起来，形成等高线 (contour)，则是一系列、层层的“鱼眼”，如图 8.7：

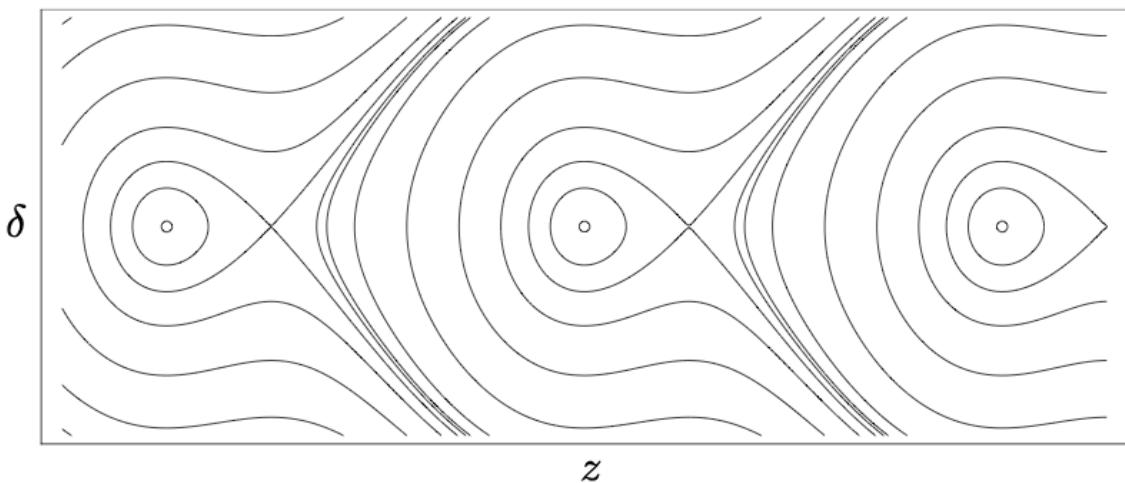


图 8.7：纵向相空间拓扑。

笔记 此处图 8.7 的一圈圈环称 Hamiltonian tori，是一种不变环面。就是说，在同一环上，虽然 (z, δ) 取值不同，但是具有相同的 $\mathcal{H}(z, \delta)$ 值。在不同环上， $\mathcal{H}(z, \delta)$ 取值不同。这些环彼此不相交，又称不变环面 (invariant tori)。具备此特性的系统又称可积系统 (integrable system)。

练习 8.8 试着用 MATLAB 画出类似于图 8.7 的相空间拓扑。 ■

¹⁵这里的哈密顿量确实可视为总能量 $\mathcal{H}(z, \delta) = \text{K.E.} + \text{P.E.}$ ，可以将 $-\frac{1}{2}\eta\delta^2$ 视为动能 K.E.(δ)，将 $\frac{ecV_{\text{RF}}}{\omega_{\text{RF}}E_0C_0} [\sin(\phi_s) \cdot \frac{\omega_{\text{RF}}z}{c} - \cos\left(\phi_s - \frac{\omega_{\text{RF}}z}{c}\right)]$ 视为位能 P.E.(z)。但是，并不是所有的哈密顿量都能很好地表达总能量的概念，特别是针对特定问题经过特殊正则变换之后的哈密顿量。



笔记 从单粒子稳定性角度看，与纵向 separatrix 对应的概念，在横向为动力学孔径。但是，概念上仍有些许差别：separatrix 的定义是明确的，在 separatrix 内的粒子稳定运动，在 separatrix 外的粒子漫无目的漂移。但是，在动力学孔径范围内边缘附近的粒子最多只能说在有限圈范围内稳定，因此，概念上相对模糊些。

从图 8.7 可以看到，有些等高线是封闭的，有些等高线是开放的。粒子如果没有其它效应，即粒子运动方程遵循上面形式的哈密顿量，那么哈密顿量守恒，粒子在相空间的运动轨迹就循着某一条等高线演化——可以是封闭也可以是开放——在相空间绕出一轨迹。如果粒子循着封闭轨迹，则粒子运动是有界的 (bounded)、稳定的；如果粒子循着开放轨迹，则粒子的运动是无界的 (unbounded) 或漂移的 (drift)。在这些等高线中，有一条等高线是特别的，在其一侧是封闭线，另一侧则是开放线。这条区分封闭线与开放线的特别轨迹称分界线 (separatrix)。分界线内的封闭区域通称 phase space bucket。分界线里面存在一个点，称稳定固定点 (stable fixed point, SFP)，分界线作为分隔封闭与开放的边缘，可能存在不稳定固定点 (unstable fixed point, UFP) 或称鞍点 (saddle point)。

定义 8.7. 固定点

对一哈密顿系统 $H(q, p; s)$ ，定义固定点为相空间中满足 $q' = 0, p' = 0$ 的点集。

物理图像为，当粒子落在固定点时，将不再运动。等价的几何描述为相空间中的哈密顿流 (Hamiltonian flow) 在固定点的速度场 (velocity field, $q' = 0, p' = 0$) 为零。

注 上述 q, p 不限于位置与动量，可以是任一组相空间正则坐标。如果哈密顿量的正则变量为 $H(\phi, J; \theta)$ ，则固定点满足 $\phi' = 0, J' = 0$ 。

一般来说，固定点分两类：

- 稳定固定点 (stable fixed point, SFP) \Rightarrow 粒子在附近为稳定运动，运动轨迹为封闭轨迹，又称椭圆固定点 (elliptical fixed point)。
- 不稳定固定点 (unstable fixed point, UFP) \Rightarrow 粒子在附近为非稳定运动，运动轨迹为开放轨迹，又称双曲线固定点 (hyperbolic fixed point) 或鞍点 (saddle point)。

注 在哈密顿力学分析，寻找固定点位置很重要，因为它们决定了相空间的拓扑结构。上述的分界线 (separatrix) 决定稳定与非稳定运动范围的重要分界：分界线内存在一个点，称稳定固定点，分界线边缘可能存在不稳定固定点。

注 在非线性动力学理论中，特别是混沌力学，还有一组专有名词称为“吸收子” (attractor) 或“排斥子” (repellor)。这里介绍的稳定固定点可视为一种吸收子。但吸收子的概念更广泛，不仅包含固定“点”，其它不同几何面貌的极限环 (limit cycle)、极

限环面 (limit torus) 等也是。与吸收子对应的概念为排斥子，此处不论。



笔记 固定点为哈密顿系统在相空间的固有拓扑结构，许多有趣、丰富的动力学与此紧密联系。虽然这一章不打算介绍纵向共振，我们还是在这里简短评论。由于粒子纵向运动大抵与射频腔有关，束团内不同位置的粒子彼此间感受到的射频场差异不再是简单的线性关系。距纵向相空间中心不同距离（即不同振幅）的粒子，其纵向同步振荡频率 ν_z 不再相同，对外部扰动的响应也不再相同，导致的共振称非线性共振 (nonlinear resonance)。对纵向运动，外部扰动源可能来自无意或者有意，比如：射频振幅或相位调制 (RF amplitude/phase modulation)，此时，系统哈密顿量的时变成分可能导致粒子纵向运动出现参数振荡 (parametric resonance)，束团内不同粒子的不同纵向振荡频率成分可能相互影响，驱动形成参数共振。一般来说，参数振荡可表示成“ $m : n$ 共振”，其中，整数 m, n 分别表示驱动频率与受振频率阶数。非线性运动的分析一般采用角度-作用量变换 (action-angle transform)。单粒子共振分析的内容非常丰富。对纵向参数共振的分析感兴趣的读者，可参考 S.Y. Lee 一书的 Chapter 3 §III。

下面图 8.8、8.9、8.10 给出 $\eta > 0$ 的几种不同 ϕ_s 时的相空间拓扑与对应的哈密顿量位能项。粒子束团如果要能稳定在加速器中运动，则要求束团处在相空间中封闭轨迹线的范围内，如此粒子运动才是有界的。由上给出的哈密顿量可知，由于 \sin, \cos 为周期函数，周期为射频频率倒数 ω_{RF}^{-1} ，因此，可以想像，在加速器中，纵向相空间是周期、重复出现的，恰好对应加速器多束团运行。一般来说，储存环的设计会使粒子绕行环的绕行频率 $\omega_0 = 2\pi c/C_0$ 与射频 RF 腔的频率具有整数倍的关系，即

$$h = \frac{\omega_{\text{RF}}}{\omega_0} \quad (8.51)$$

称 h 为谐波数 (harmonic number)，为正整数，一般数量级为几百。



笔记 这里的 h 为谐波数，不要与能量啁啾 h 搞混。

一个由谐波数 h 的射频腔组成的加速器系统，原则上可允许最多 h 个束团运行，每个束团在各自对应的 phase space bucket 进行纵向同步振荡。有时由于其它考量，可能使其中一些 bucket 空置，仅部分填充一部分 bucket。

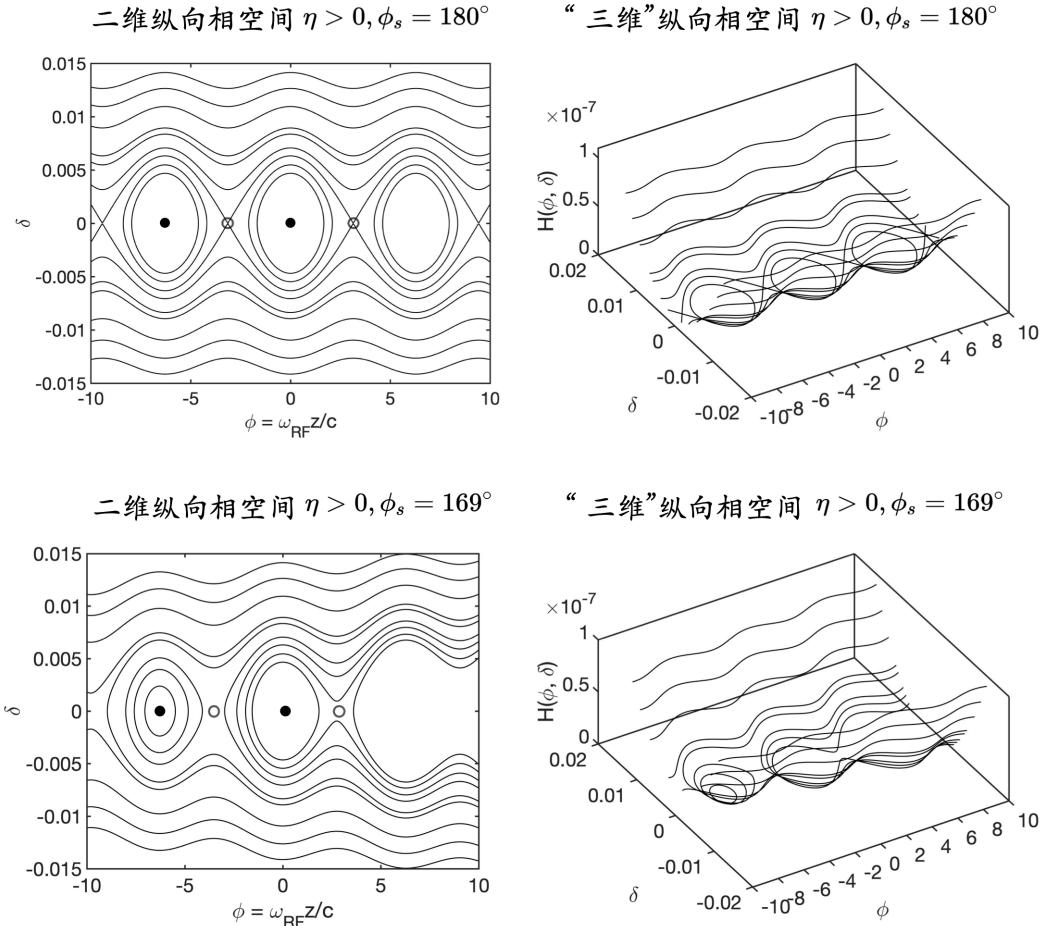


图 8.8: 纵向相空间拓扑。当 $\phi_s = 180^\circ$ 时，每个 phase space bucket 周期的等高线相对于 ϕ 是对称的，参考上排；当 $\phi_s \neq 180^\circ$ 时，等高线不对称，参考下排。

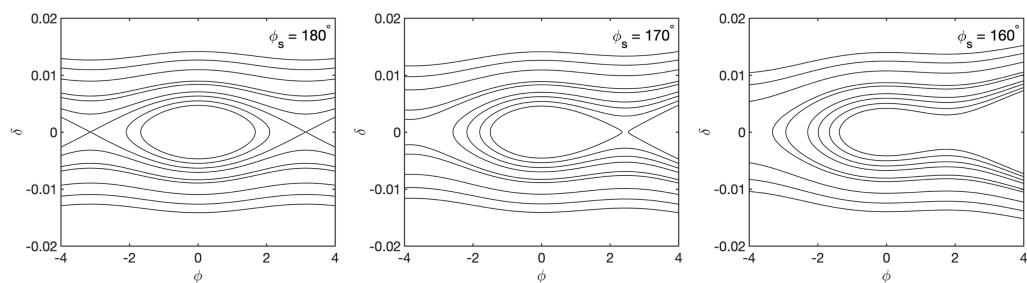


图 8.9: 纵向相空间拓扑。当 $\phi_s \neq 180^\circ$ 时，每个 phase space bucket 周期的等高线相对于 ϕ 变得不对称，且越偏离 180° 越不对称。

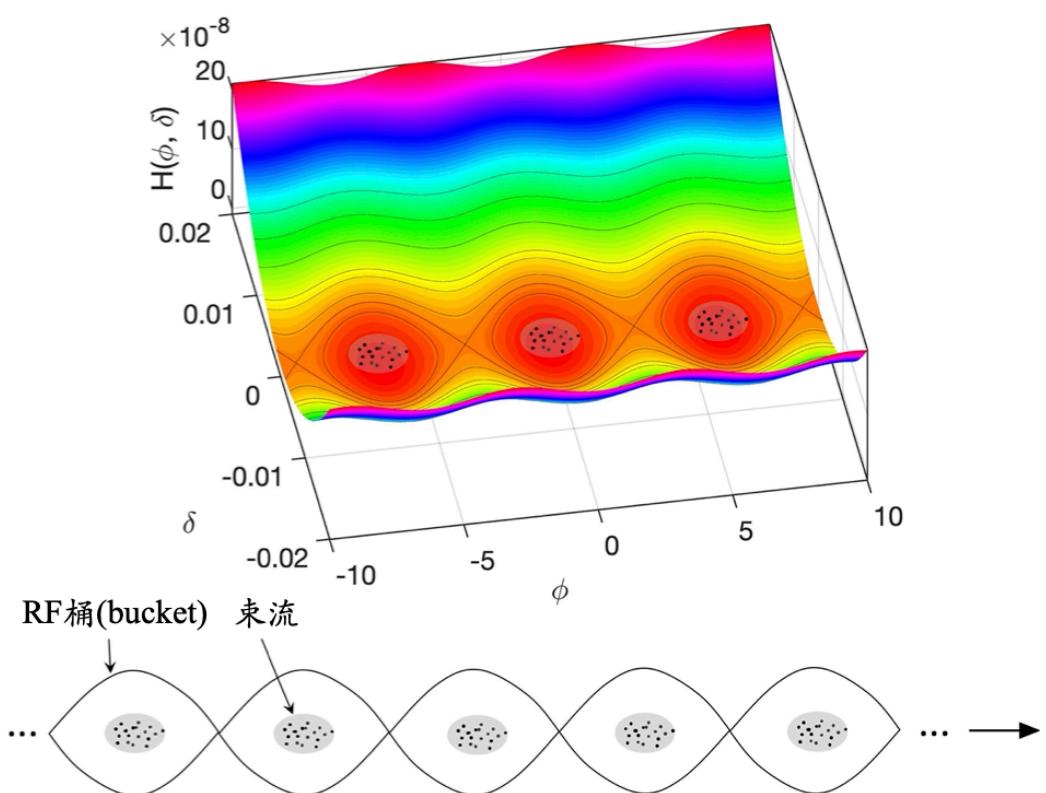


图 8.10: 纵向相空间拓扑。多束团依次填充在相空间“桶”(phase space bucket) 中。



笔记 想像三维势能阱，加速器设计目标就是将粒子束团局限在其中，使尽可能有界、稳定振荡。辐射、尾场、束内散射等效应来搅局，将在后面陆续介绍。

练习 8.9 可以证明，不存在三个维度“同时”聚焦或散焦的情况。提示：参考 Earnshaw 定理。 ■

练习 8.10 目前介绍的动量紧缩因子 α_c 是基于一阶动力学定义的。证明当考虑高阶 α_c 时，有

$$\begin{aligned} C &= C_0 (1 + \alpha_{c0}\delta + \alpha_{c1}\delta^2 + \alpha_{c2}\delta^3 + \dots) \\ \alpha_c &= \frac{1}{C} \frac{d\Delta C}{d\delta} \equiv \alpha_{c0} + 2\alpha_{c1}\delta + 3\alpha_{c2}\delta^2 + \dots \\ \eta(\delta) &= \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2} \equiv \eta_0 + \eta_1\delta + \eta_2\delta^2 + \dots \end{aligned} \quad (8.52)$$

其中，

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = \left(\alpha_0 - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \\ \eta_1 = \frac{3\beta_0^2}{2\gamma_0^2} + \alpha_1 - \alpha_0\eta_0 \\ \eta_2 = -\frac{\beta_0^2(5\beta_0^2-1)}{2\gamma_0^2} + \alpha_2 - 2\alpha_0\alpha_1 + \frac{\alpha_1}{\gamma_0^2} + \alpha_0^2\eta_0 - \frac{3\beta_0^2\alpha_0}{2\gamma_0^2} \end{array} \right. \quad (8.53)$$

解 对具有动量偏差的非参考能量粒子， $p = m_0c\beta\gamma = p_0 + \Delta p$ ，其中，

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\beta\gamma}{\beta_0\gamma_0} - 1 \quad (8.54)$$

于是，

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma_0} &= \sqrt{1 + 2\beta_0^2\delta + \beta_0^2\delta^2} \\ \frac{\beta}{\beta_0} &= \frac{1 + \delta}{\sqrt{1 + 2\beta_0^2\delta + \beta_0^2\delta^2}} = 1 + \frac{1}{\gamma_0^2}\delta - \frac{3\beta_0^2}{2\gamma_0^2}\delta^2 + \frac{\beta_0^2(5\beta_0^2-1)}{2\gamma_0^2}\delta^3 + \dots \end{aligned} \quad (8.55)$$

已知 $\boxed{\omega R/\omega_0 R_0 = \beta/\beta_0}$ ，有

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\beta R_0}{\beta_0 R} - 1 \quad (8.56)$$

又有 $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\eta(\delta)\delta$ 。比较系数后，可得结果。

纵向哈密顿量与相空间坐标 δ 的函数依存关系变得更复杂，纵向动力学将变得“多姿多彩”。对此感兴趣的读者，可参考 Shyh-Yuan Lee, Accelerator Physics, 4th ed., World Scientific (2019) 一书的 Chapter 3 §I。 ■

以下整理粒子在纵向相空间进行同步振荡时的特性：

定理 8.2. 同步振荡周期、bucket area、bucket height

纵向振荡又称同步振荡 (synchrotron oscillation)。当振幅 很小时，忽略净加速或净减速，则有

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + k_z^2 z = 0 \quad (8.57)$$

其中， $k_z^2 = -\frac{qV_{RF}}{E_0 c C_0} \frac{\omega_{RF}}{c} \eta \cos \phi_s$ 。纵向同步振荡频率 (synchrotron tune) 为

$$\omega_s = \nu_s \omega_0 = \frac{k_z C_0}{2\pi} \omega_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{-\frac{qV_{RF}}{E_0} \frac{\omega_{RF} C_0}{c} \eta \cos \phi_s} \quad (8.58)$$

当 $\sin \phi_s = 0$ 时，phase space bucket 的有效面积 (bucket area) 有

$$\mathcal{A}_0 = 16 \sqrt{\frac{qV_{RF}}{2\pi E_0 h |\eta|}} \quad (8.59)$$

其中， E_0 为参考能量。当 $\phi_s \neq \pi$ 时， \mathcal{A}_0 将逐渐缩小。当 $\sin \phi_s = 0$ 时，bucket height 可以表示为

$$\delta_{max} = \sqrt{\frac{2qV_{RF}}{\pi h |\eta| E_0}} \quad (8.60)$$

又称能量接受度 (energy acceptance)。对电子， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ C, $qV_{RF} > 0$ 。

证明 对比哈密顿量在固定点的值与拓扑特性。

以上纵向运动方程还可以写为

$$z' = -\eta \delta$$

$$\delta' = \begin{cases} 0, & \text{unbunched beams} \\ \frac{1}{\eta} \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 z, & \text{bunched beams} \end{cases} \quad (8.61)$$

其中， $R = C_0 / 2\pi$ 为储存环平均弯转半径^a。对 unbunched beams^b，定义其在纵向相空间不旋转，即 $\nu_s \equiv 0$ ，对应到束长很长或忽略 RF 与辐射能量损失效应时的近似情况。

证明 $z' = -\eta \delta$ 前面已说明。这里推导 δ' 的式子。由前面介绍，有

$$\begin{aligned} \delta' &= \frac{qV_{RF}}{E_0 C_0} \sin \left(\phi_{RF} - \frac{\omega_{RF}}{c} z \right) - \frac{U_0}{E_0 C_0} \\ &= \frac{qV_{RF}}{E_0 C_0} \left(\sin \phi_{RF} \cos \frac{\omega_{RF}}{c} z - \cos \phi_{RF} \sin \frac{\omega_{RF}}{c} z \right) - \frac{U_0}{E_0 C_0} \\ &\approx \frac{U_0}{E_0 C_0} \left(\cos \frac{\omega_{RF}}{c} z - 1 \right) - \frac{qV_{RF}}{E_0 C_0} \frac{\omega_{RF}}{c} \cos \phi_s \cdot z \\ &\approx \frac{k_z^2}{\eta} z = \frac{1}{\eta} \frac{\nu_s^2}{R^2} z \end{aligned}$$

其中，近似符号包含 $\phi_{RF} = \phi_s$ ，即 RF 谐振腔能量恰好补偿能量损失，即忽略粒子净加速或净减速。此外，假设 $\frac{\omega_{RF}}{c} z \ll 1$ ，即束长占比相对于 RF 波长很小，即假设束团的同步振荡振幅很小。

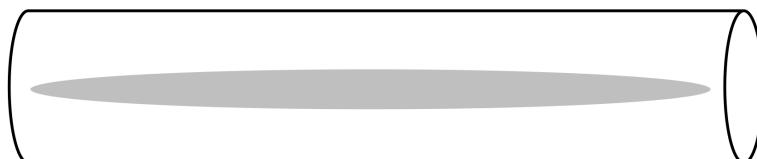
^a注意，这里的 R 与弯转磁铁的弯转半径 ρ 有所区别，因为储存环一般不是完美的圆，而是由离散的弯转段与直线段拼接而成。一般 $R > \rho$ 。

^b又称 coasting beam，中文称为未聚束。

注 以上讨论的 δ_{\max} 表征储存环纵向力学效能的物理量：能量接受度 (energy acceptance)，通常为纵向相空间“高度”(bucket height)。 δ_{\max} 越大越好。比较 §7.11介绍的动力学孔径 — 衡量储存环横向磁聚焦结构设计的物理量。

未聚束 (unbunched beam 或 coasting beam) 与聚束的差别在于束团是否考虑纵向聚焦源的影响，即是否考虑 RF cavity 的影响。参考图 8.11。当一未聚束束团或束长长于 RF 谐振腔波长的束团多次经过 RF 谐振腔时，会逐渐从未聚束状态转变形成聚束束团。换句话说，在一加速器中，如果采用时变电场加速粒子，则粒子束团长度只能短于谐振腔波长，不太可能总是处于未聚束状态。不考虑其它效应，则聚束束团的束长差不多与前面介绍的 phase space bucket 宽度在同一个数量级。

未聚束 (unbunched beam, DC beam) $\sigma_z \rightarrow \infty$



聚束 (bunched beam) $\sigma_z \leq \lambda_{RF}$

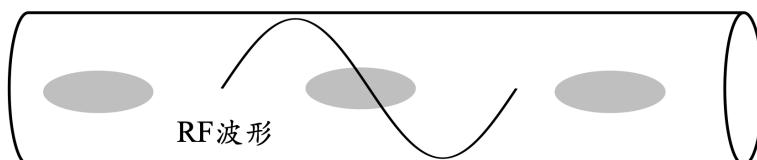


图 8.11: 未聚束与聚束的差别。

✍ **练习 8.11** 若 $\omega_{RF}z/c$ 不再 $\ll 1$ ，即束长占相空间区域不再局限小振幅振荡范围，推导一般振幅的同步振荡频率。 ■



笔记 对横向 betatron 振荡与纵向同步振荡，粒子在 (横向与纵向) 相空间中心附近的小振幅振荡频率与偏离中心附近的大振幅振荡频率不同。上一章与这里主要介绍的都是小振幅振荡，振荡频率与振幅无关。对大振幅振荡，其振荡频率与振幅有关，且为非线性关系，称振幅相关的振荡 (amplitude-dependent tune shift, ADTS)。只要外部场包含空间不均匀的非线性分量，如横向六极铁或更高极磁铁、纵向正弦函数形式的电磁场，对大振幅振荡情况，其振荡频率与振幅有关，横向 betatron tune 与纵向 synchrotron tune 则应写成 $\nu_{\beta x}(J_x), \nu_{\beta y}(J_y)$ 或 $\nu_s(J_s)$ ，其中， $J_{x,y,s}$ 为表征振幅的横向 x, y 与纵向 z 方向的作用量 (action) 变量。



练习 8.12 试推导在纵向相空间中，当 $\sin \phi_s = 0$ 时，phase space bucket 的有效面积。 ■

解

$$\mathcal{A}_0 = 16 \sqrt{\frac{qV_{\text{RF}}}{2\pi E_0 h |\eta|}} \quad (8.62)$$

其中, E_0 为参考能量。对电子, $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $qV_{\text{RF}} > 0$ 。当 $\phi_s \neq \pi$ 时, \mathcal{A}_0 将逐渐缩小。细节推导可参考 Shyh-Yuan Lee, Accelerator Physics, 4th ed., World Scientific (2019) 一书的 Chapter 3 §II.2。 ■

练习 8.13 由上一章与这一章学到的横纵向运动方程, 可写为

$$\begin{aligned} x'' + \left(\frac{\nu_x}{R}\right)^2 x &= 0 \\ y'' + \left(\frac{\nu_y}{R}\right)^2 y &= 0 \\ z' &= -\eta\delta, \\ \delta' &= \begin{cases} 0, & \text{unbunched beams} \\ \frac{1}{\eta} \left(\frac{\nu_s}{R}\right)^2 z, & \text{bunched beams} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.63)$$

试推论其在相空间的运动如图 8.12。 ■

由此练习与以上讨论可知, 当从穿越能量以下 (below transition) 跨越到穿越能量以上 (above transition) 时, 存在一时刻 $\eta = 0$, 使得 $\frac{\Delta\tau}{\tau_0} = \eta \frac{\Delta\gamma}{\gamma} = 0 \cdot \frac{\Delta\gamma}{\gamma}$, 即, 束团不再纵向相空间“旋转”。这使得束团非常脆弱, 容易受集体效应影响。此时称 cross transition。避免束团经历 cross transition 时可能的束流损失或束团品质下降, 可将束团引出旧的环, 然后注入新的储存环, 从而使束团避开面临 cross transition, 即设计两个以上的储存环(假设各自的 transition gamma 为 $\gamma_{T1,T2}$), 当粒子自其中一个环引出后 $\gamma < \gamma_{T1}$, 经过传输段, 进入下一个环时满足 $\gamma > \gamma_{T2}$ 。另一个办法是使用 fast electronics, 使 RF 相位在当束团即将经历 cross transition 的很短时间内相差 π 。CERN PS 为第一例采用此方案成功跨越 cross transition 困难的加速器 (Wolfgang Schnell 的雀巢咖啡罐)。还有一个巧妙的做法, 设计一个环使 transition gamma 为纯虚数, 称 imaginary- γ_T lattice。

现在, 我们试着利用纵向哈密顿量 $\mathcal{H}(z, \delta)$ 分析一个情况。当一束团注入 phase space bucket 之后, 束团中的粒子会在位能阱底部附近进行纵向同步运动。当束团运动达到平衡时, 并不是束团中的粒子都相对静止了, 而是束团中的粒子各自进行纵向同步运动, 当所形成的整体束团分布看起来不随时间改变时, 即称达到平衡。利用哈密顿量, 我们可以估算在平衡时, 束团的束长 σ_z 与能散 σ_δ 的关系。

练习 8.14 由 (z, δ) 纵向运动方程, 构造其对应的哈密顿量。 ■

解

$$\mathcal{H}(z, \delta) = -\frac{\eta}{2} \delta^2 - \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\nu_s}{R}\right)^2 z^2 \quad (8.64)$$

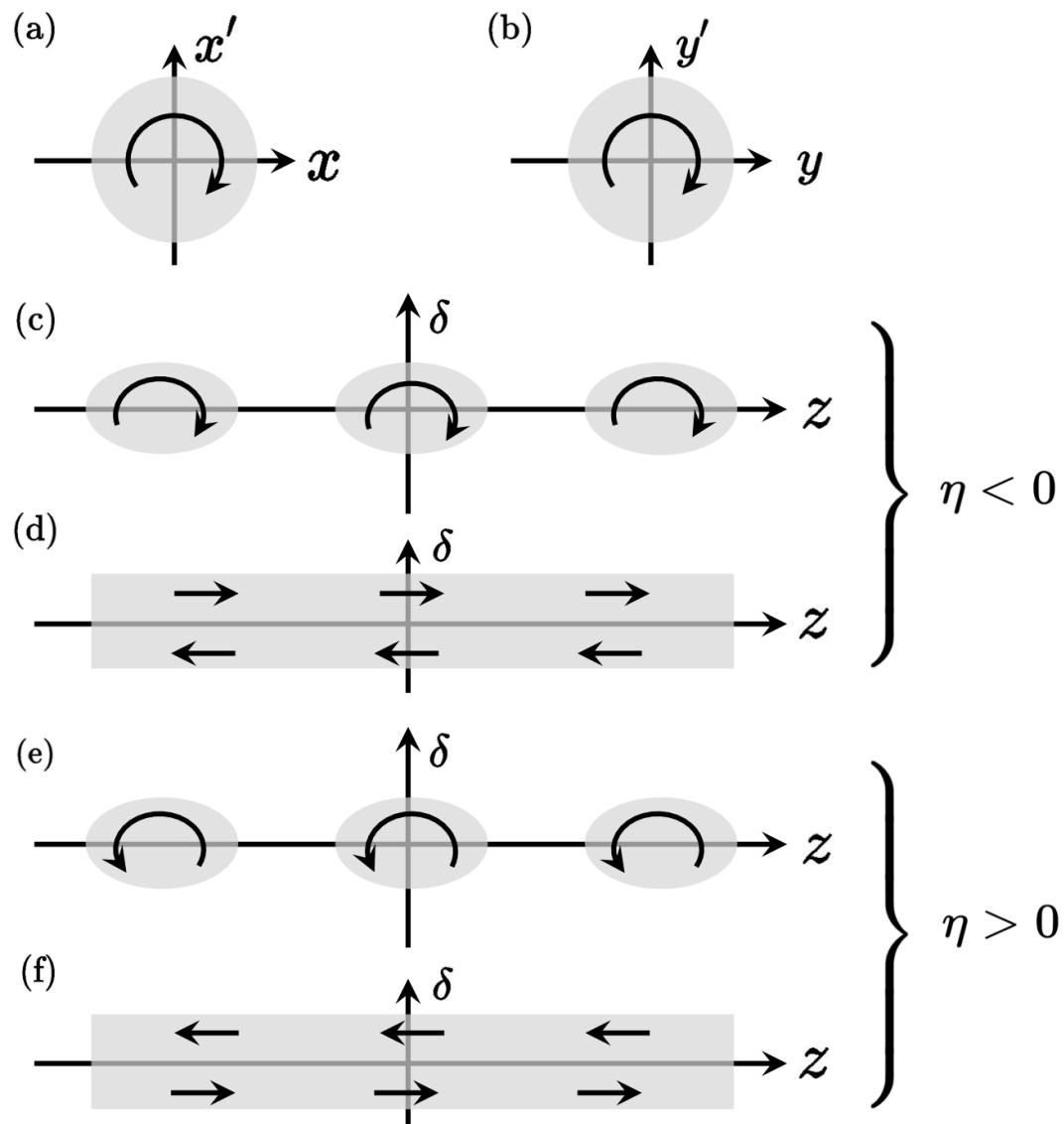


图 8.12: 横纵向相空间拓扑。箭头方向为粒子运动轨迹方向。(a,b) 为横向相空间。(c,d) 分别为 bunched beam 与 unbunched beam 在 below transition ($\eta < 0$) 时的纵向相空间运动。(e,f) 分别为 bunched beam 与 unbunched beam 在穿越能量以上 ($\eta > 0$) 时的纵向相空间运动。当束团处于 transition crossing 时, $\eta = 0$, 粒子在相空间不动 (freeze)。注意, 这里 (c,e) 的运动为旋转 (rotate), (d,f) 的运动为剪切 (shear)。留意, 这里纵向相空间坐标使用 (z, δ) 惯例, 如果使用 (τ, ϵ) 惯例, 相空间旋转/切应方向将颠倒。图例修改自 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993)。

此哈密顿量也可由本节上面介绍的哈密顿量经过 $\omega_{RF}z/c \ll 1$ 与 ν_s 化简后得到。 ■

不难想像，达平衡时，束长 σ_z 与能散 σ_δ 的比值应该契合相空间 phase space bucket 的宽与高的比值。就是说，束团虽不完全填满 phase space bucket，但是束团在平衡时的分布形态应该与相空间比例形态一致。因此，束团束长 σ_z 与能散 σ_δ 的比值就可以通过哈密顿量体现在相空间的形态给出。考虑当某时刻，粒子在 $z = \sigma_z, \delta = 0$ 处，经过约 1/4 个同步振荡周期，粒子的位置将在 $z = 0, \delta = \sigma_\delta$ 。将这两个时刻的相空间坐标代入哈密顿量，由于哈密顿量守恒，有¹⁶

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_\delta} = \frac{|\eta| R}{\nu_s}$$

其中， $R = C_0/2\pi$ 为储存环平均弯转半径。

定理 8.3. 稳定束团的束长、能散关系

对 (z, δ) 纵向相空间，假设 $\omega_{RF}z/c \ll 1$ ，在对应的哈密顿量情况下

$$\mathcal{H}(z, \delta) = -\frac{\eta}{2}\delta^2 - \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\nu_s}{R}\right)^2 z^2 \quad (8.65)$$

有

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_\delta} = \frac{|\eta|R}{\nu_s} \quad (8.66)$$

其中， $\eta = \alpha_c - 1/\gamma^2$ 为滑项因子， $\nu_s = \omega_s/\omega_0$ 为 synchrotron tune， $R = C_0/2\pi$ 为储存环平均弯转半径。

注 由于 $\nu_s \propto \sqrt{\eta}$, $\sigma_z \propto \sqrt{\eta}$ 。当 $\eta \rightarrow 0$ 或 $\alpha_c \rightarrow 0$ 时，即准等时储存环 (quasi-isochronous storage ring) 情况，此定标关系不再成立。进一步讨论可参考 X.J. Deng et al., Breakdown of classical bunch length and energy spread formula in a quasi-isochronous electron storage ring, Phys. Rev. Accel. Beams **26**, 054001 (2023). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.26.054001>。

注 此关系适用情况： $I_b \rightarrow 0$ 、忽略集体效应、忽略同步辐射效应。 □

以上定理给出了在考虑束团纵向同步振荡效应情况下，平衡时的束长与能散的关系。这个式子还没有给出平衡时 σ_z 或 σ_δ 的绝对数值。此外，回顾一下，这个式子仅考虑粒子经过射频加速腔时，参考粒子在同步相位 ϕ_s ，恰好补偿 U_0 作为一常数，且非参考粒子在位能阱底部附近，忽略其它效应的情况。另外，这里分析所基于的哈密顿量 \mathcal{H} 仅考虑纵向动力学变量，类似于第7章介绍横向动力学时的哈密顿量仅包含横向变量一样。在第7章我们曾经介绍过一种横纵向耦合，即色散效应。这一章的分析忽略了纵横向的耦合。当射频加速腔在无色散区域，即 $D = 0, D' = 0$ 或 $R_{16} = R_{26} = 0$ 处，则这里的分析基本适用。但如果射频腔所在区域存在色散，则纵向 (z, δ) 动力学将通过 D, D' 或 R_{16}, R_{26} 耦合到横向 (x, x') ，这种情况下，完整的分析需要考虑横纵向耦合效应。对于部

¹⁶此式又称能量均分定理 (equipartition theorem)。在经典统计力学中，能量均分定理是一种联系系统温度 (此处为动能项 $\eta\delta^2/2$) 及其平均能量的基本公式。能量均分的初始概念是热平衡时能量被等量分到各种形式的运动中。

分或全耦合情况，其束流动力学分析方式不止一种，仍是目前加速器领域相对活跃的研究课题。

此讲义第 2 章至第 5 章曾介绍过，电子在储存环中经历弯转段时，将产生电磁辐射。考虑到动量或能量守恒，电子发出电磁辐射（光子）的同时，自身也要受到“反作用”（back-reaction）。这个“反作用”立即体现在 (x', y', δ) ，随后再（通过一段距离的传输）体现在 (x, y, z) 。下一节将介绍，当进一步考虑同步辐射对粒子与束团的效应时，束团从暂态过渡到平衡态时的动态过程。



笔记 前面推导了粒子的纵向运动方程

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + k_z^2 z = 0 \quad (8.67)$$

其中， $k_z^2 = -\frac{qV_{RF}}{E_0} \frac{\omega_{RF}}{cC_0} \eta \cos \phi_s$ 。其通解可写成 $z(s) = A \cos(k_z s + \phi_0)$ 。

虽然上面的介绍没有沿着如第 7 章讨论横向动力学的思路引入 Courant-Snyder 函数，现在如果接续 Courant-Snyder 函数的思路，则 A 可写成

$$A = \sqrt{2\beta_z \epsilon_z} \quad (8.68)$$

其中， β_z 与束长相关， ϵ_z 为纵向单粒子发射度/作用量，并且

$$k_z s + \phi_0 \rightarrow \psi_z \quad (8.69)$$

定义纵向相位超前为

$$\frac{d\psi_z}{ds} = -\frac{\eta}{\beta_z} \Rightarrow \psi_z = -\int \frac{\eta}{\beta_z} ds \quad (8.70)$$

其中， η 为滑相因子。由此可与横向动力学理论对应参照。

不同教科书、不同分析场合，列写纵向方程时用的纵向相空间坐标各异。除了上面介绍的 (z, δ) 坐标，在储存环中常见的还有 (τ, ϵ) ，其中

- $\tau \equiv t - t_s$ 为粒子（逐圈）抵达某一固定位置 s （如：谐振腔）时与同步粒子的时间差；
- $\epsilon \equiv \frac{\Delta E}{E_s} = \frac{E - E_s}{E_s}$ 为相对于同步粒子的能量偏差。



笔记 如采用 (z, δ) 惯例，则束团头部粒子为 $z > 0$ ；如采用 (τ, ϵ) 惯例，则束团头部粒子为 $\tau < 0$ 。此处 ϵ 为能量偏差，不要与发射度混淆。

由于 $z = \frac{s}{\beta_0} - ct \approx s - ct$, 因此, 纵向运动方程有¹⁷

$$\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt} \approx \frac{\Delta T}{T_{\text{rev}}} = \eta \frac{\Delta p}{p_0} \approx \alpha_c \frac{\Delta p}{p_0} \approx \alpha_c \frac{\Delta E}{E_s} = \alpha_c \epsilon \quad (8.71)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{d(\Delta E/E_s)}{dt} \approx \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{\delta E}{E_s} \\ &\approx \frac{\omega_{\text{rev}} q V_{\text{RF}}}{2\pi E_s} (\sin \phi_s + \cos \phi_s \cdot h\omega_{\text{rev}}\tau) - \frac{\omega_{\text{rev}} U_0}{2\pi E_s} \\ &= \omega_{\text{rev}}^2 \frac{h q V_{\text{RF}} \cos \phi_s}{2\pi E_s} \tau = \frac{\omega_s^2}{\eta} \tau \end{aligned} \quad (8.72)$$

其中, 同步相位满足 $qV_{\text{RF}} \sin \phi_s = U_0$ 。一般用 $\dot{()}$ 表示 $d()/dt$, 用 $(')'$ 表示 $d()/ds$ 。



笔记 比较两种不同惯例的纵向运动方程:

$$\begin{aligned} z' &= -\eta \delta, & \dot{\tau} &= \eta \epsilon \\ \delta' &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 z, & \dot{\epsilon} &= \frac{\omega_s^2}{\eta} \tau \end{aligned} \quad (8.73)$$

其中, $\eta = \alpha_c - 1/\gamma^2$, $\omega_s = \nu_s \omega_0 = \nu_s c/R$ 。

练习 8.15 由 (τ, ϵ) 纵向运动方程, 构造其对应的哈密顿量。 ■

注 对 U_0 项, 在这一节中仅当作常数, 即, 无论对参考粒子或非参考粒子, 需要补偿的能量损耗皆为 U_0 。注意, 这里 U_0 并不限定是同步辐射效应; 因此, 粒子在储存环中的纵向同步振荡与同步辐射效应没有必然关系。与纵向同步振荡有必然关系的是纵向聚焦部件, 即射频腔。考虑同步辐射的话, $U_s = U_s(\gamma)$, 对参考粒子或非参考粒子, 需要补偿的能量损耗将不太一样。下一节将考虑同步辐射效应, 针对此项展开讨论。

8.2.1 高次谐波腔、双 RF 系统

以上介绍的粒子纵向动力学假设加速器中只有“一种”谐振腔, 即粒子看到明确的一个频率、一个对应该谐振腔频率的相位差、一个 bucket。此种谐振腔又称主 RF 腔 (main RF cavity)。有时候, 为了一些应用目的, 会在加速器中额外增加“第二种”谐振腔, 称次 RF 腔 (secondary RF cavity), 或高次谐波腔 (higher harmonic cavity, HHC), 操作在不同频率或不同模式或不同相位差条件。这种由两种不同谐振腔组成的加速器系统一般称双 RF 系统 (double RF system)。原则上, 可以有更多不同种的 RF 腔组成等, 可以预见, 其纵向动力学将变得更复杂。一般来说, 安装了这个额外的高次谐波腔的应用目的可能有:

- 调整纵向相空间拓扑结构, 改变相空间宽度 (bucket width)、高度 (bucket height) 等。
- 调整小振幅同步振荡频率。
- 调整粒子同步振荡频率频散 (synchrotron oscillation frequency spread), 一般为增加

¹⁷ 此处 $\dot{\tau}$ 的第二个近似符号假设电子为极端相对论粒子, 即 $\eta = \alpha_c - \gamma^{-2} \approx \alpha_c$ 。这个假设未必需要, 虽然在一些教科书中介绍辐射阻尼时做此假设。这么写的时候多数已经假设穿越能量以上 (above transition) (除了 imaginary- γ_t lattice 情况)。

频散¹⁸。

- 调控 (manipulate) 纵向相空间, 对束团进行拉伸 (lengthening)、压缩 (shortening)、旋转 (rotation)、分离 (splitting)、堆叠 (stacking) 等, 通称相空间体操 (phase space gymnastics, RF gymnastics)。
- 产生一系列束团串, 其中每个束团的束长可调变。

在加速器中安装的高次谐波腔还可细分两类: 主动 (active HHC) 与被动 (passive HHC)。主动高次谐波腔运行的驱动源为外部馈入的射频功率源; 被动高次谐波腔运行的驱动源则由经过的束团自己产生。束团经过就能驱动高次谐振腔? 束团为相对论带电粒子, 自身携带库仑场, 即携带电磁场能量, 经过高次谐振腔有机会激励谐振腔使其工作。更准确地说, 束团经过高次谐振腔时将在腔内产生尾场, 从而激励谐振腔。尾场的概念将在第 11 章介绍。

以下简短介绍双 RF 系统的纵向动力学。继续维持正弦惯例。仅有主腔时, RF 波形可写为

$$V = V_1 \sin \phi \quad (8.74)$$

其中, V_1 为主腔的峰值电压, ϕ 为粒子与主 RF 腔的相位差。

同时存在主腔与 n 次谐波腔时, 根据叠加原理, RF 波形可写为

$$\begin{aligned} V &= V_1 \sin \phi + V_n \sin (n\phi + \Phi_n) \\ &= V_1 [\sin \phi + r \sin (n\phi + \Phi_n)] \end{aligned} \quad (8.75)$$

其中, $r \equiv V_n/V_1$ 。一般情况下, $V_n < V_1$ 。如果主腔的谐波数为 $h = \omega_{RF}/\omega_0$, 则谐波腔的谐波数可写成 $h_n = nh = n\omega_{RF}/\omega_0$ 。对最一般情况, n 不限于整数, 也可以是分数, 即分数谐波腔。此处简化起见, 仅讨论整数谐振腔。

上面的相位参数 Φ_n 可视为主 RF 波形或位势与谐波 RF 波形或位势的相位差 (“错位”), 将决定整体双 RF 系统的特性。参考图 8.13, 分别对应 $\Phi_n = 0$ 情况与 $\Phi_n = \pi$ 情况。图 8.14 则给出单一主腔 (single RF) 与双 RF 的两种不同 Φ_n 情况所对应的波形、位势、相空间拓扑结构。

结合操作在穿越能量以上 (above transition) 或穿越能量以下 (below transition) 情况, Φ_n 的选择将决定此双 RF 系统对束长为压缩或拉伸, 总结如下:

- 对 above transition ($\eta > 0$), 当 n 为偶数时, $\Phi_n = 0$ 对应束长拉伸模式。
- 对 above transition ($\eta > 0$), 当 n 为奇数时, $\Phi_n = 0$ 对应束长压缩模式。
- 对 above transition ($\eta > 0$), 当 n 为偶数时, $\Phi_n = \pi$ 对应束长压缩模式。

¹⁸后面第 13 章将介绍束团不稳定性。利用 HHC 增加的频散能加强对束团的朗道阻尼效应, 从而抑制束团集体不稳定性。基于此种应用的 HHC 有时又称朗道谐振腔 (Landau cavity)。

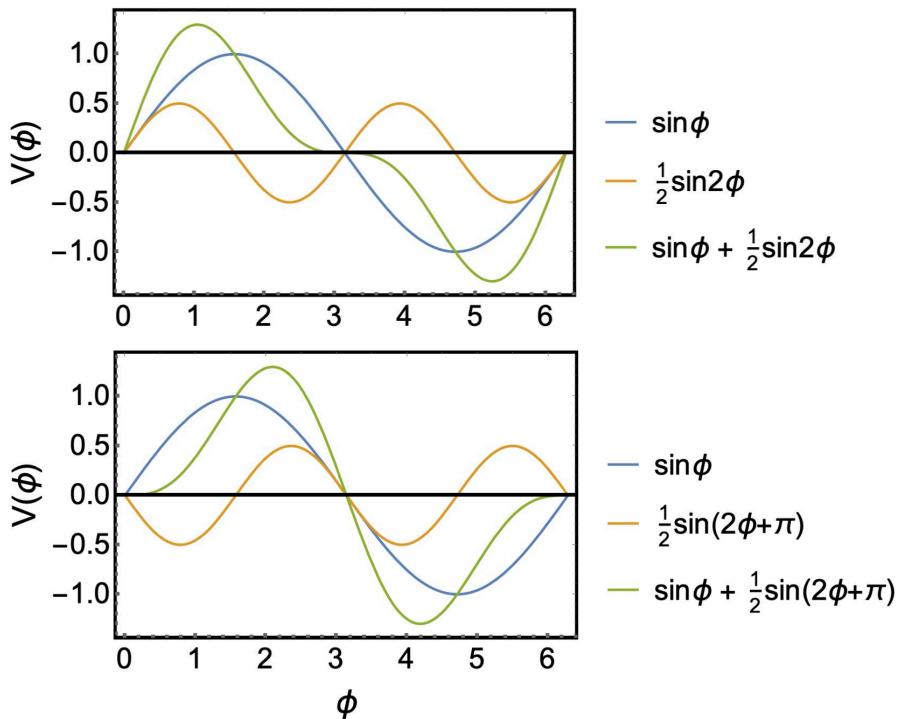


图 8.13: 主腔 RF 波形、谐波 RF 波形与两者叠加后的波形。

- 对 above transition ($\eta > 0$)，当 n 为奇数时， $\Phi_n = \pi$ 对应束长拉伸模式。
- 对 below transition ($\eta < 0$)，当 n 为偶数时， $\Phi_n = 0$ 对应束长压缩模式。
- 对 below transition ($\eta < 0$)，当 n 为奇数时， $\Phi_n = 0$ 对应束长拉伸模式。
- 对 below transition ($\eta < 0$)，当 n 为偶数时， $\Phi_n = \pi$ 对应束长拉伸模式。
- 对 below transition ($\eta < 0$)，当 n 为奇数时， $\Phi_n = \pi$ 对应束长压缩模式。

存在主腔与高次谐波腔时，同步相位将不再与前面介绍的单一主腔为完全自由的参数 ϕ_{s0} ，如今写成 ϕ_s ，由如下方式决定

$$\sin \phi_{s0} = \sin \phi_s + r \sin(n\phi_s + \Phi_n) \quad (8.76)$$

需根据 r, n, ϕ_{s0}, Φ_n 的实际参数，求解 ϕ_s 。细心的读者能够看出此式为粒子经过双 RF 系统的能量改变（可能获得或失去能量），一般当作设计谐波腔参数的条件式之一。另外两个条件式将在下面给出。



笔记 如果存在双 RF 系统的储存环经历 transition crossing，即经历 η 变号过程，则如果要维持系统运行在同样模式， Φ_n 需要在经历 η 变号过程即时切换。

定理 8.4. 最优平坦条件

如果双 RF 系统将用作束长拉伸，则使在相空间中心“最优平坦”区域需满足如下条件

$$V'(\phi_s) = 0 \quad \text{且} \quad V''(\phi_s) = 0 \quad (8.77)$$

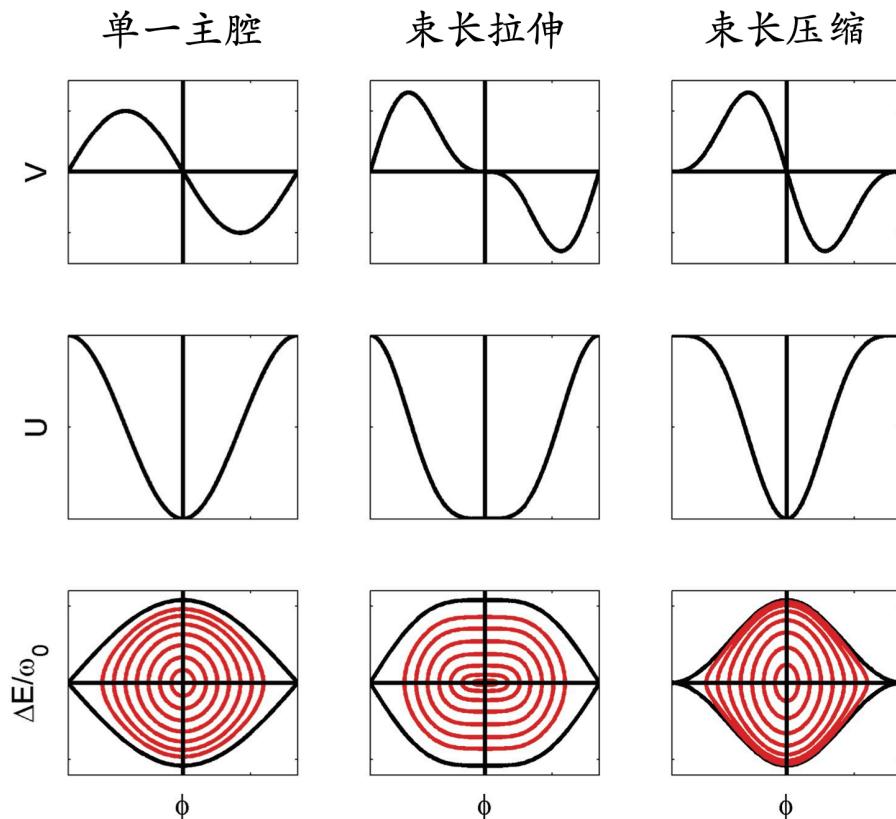


图 8.14: 不同 RF 腔的波形 (上) $V(\phi)$ 、位势 (中) $U(\phi)$ 、对应的纵向相空间拓扑 (下) $(\phi, \Delta E/\omega_0)$ 。左排为前面介绍过的单一主腔 (single RF) 情况，中排为束长拉伸 (bunch lengthening mode, BLM) 情况，右排为束长压缩模式 (bunch shortening mode, BSM) 情况。此处相空间结构相对于 RF 相位 ϕ 左右对称，为不考虑粒子净加速/减速情况，即 $\sin \phi_{s0} = 0$ 。由左排中间图可以看到，单一主腔的位势 $U(\phi) \propto \phi^2$ 。当操作在 BLM 时，双 RF 腔合成的位势 $U(\phi) \propto \phi^4$ ，中间较为平坦。当操作在 BSM 时，双 RF 腔合成的位势 $U(\phi) \propto \phi^2$ ，函数依存关系与单一主腔一样，但与单一主腔相比更窄些。图例修改自 Handbook §4.9.3.2, E. Shaposhnikova, Double rf systems in hadron rings。

或有

$$\begin{aligned}\cos \phi_s &= -rn \cos(n\phi_s + \Phi_n) \\ \sin \phi_s &= -rn^2 \sin(n\phi_s + \Phi_n)\end{aligned}\quad (8.78)$$

其中，

- ϕ_s 为双 RF 系统的同步相位, $\phi_s \neq \phi_{s0}$
- $r = V_n/V_1$
- n 为谐波腔频率
- 相位 Φ_n 决定双 RF 系统的操作模式

结合 $\sin \phi_{s0} = \sin \phi_s + r \sin(n\phi_s + \Phi_n)$, 给定 n 与 ϕ_{s0} , 能证明有

$$r^2 = \frac{1}{n^2} - \frac{\sin^2 \phi_{s0}}{n^2 - 1} \quad (8.79)$$

对粒子无净加速/减速情况, 即 $\sin \phi_{s0} = 0$, 则 $r = 1/n$, 还有

$$\begin{aligned}\Phi_n &= (1 - n)\phi_s + \pi \\ \phi_s &= \phi_{s0} = 0 \text{ 或 } \pi\end{aligned}\quad (8.80)$$

注 对电子储存环, 当考虑同步辐射能量损失时(后面将介绍), $\phi_{s0} \neq 0$, 此时可通过数值求解, 得到满足以上几个约束条件的解。

注 如果不是以束长拉伸为应用, 则谐振腔设计未必要求满足以上条件。 □

作为双 RF 系统的另一种应用, 利用 HHC 增加同步振荡频率的频散(frequency spread)能加强对束团的朗道阻尼效应, 从而抑制束团集体不稳定性。前面介绍单一主腔的粒子小振幅同步振荡频率有

$$\omega_{s0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{-\frac{qV_{RF}}{E_0} \frac{\omega_{RF} C_0}{c} |\eta \cos \phi_s|} \quad (8.81)$$

对双 RF 系统, 粒子小振幅同步振荡频率有

$$\omega_s = \omega_{s0} \times \sqrt{\frac{\cos \phi_s + rn \cos(n\phi_s + \Phi_n)}{\cos \phi_{s0}}} \quad (8.82)$$

对应用于束长拉伸情况, 在最优条件下, 在双 RF 系统相空间中心的粒子, 其小振幅同步振荡频率为零, 符合预期。为了最大限度增加同步振荡频散, 则应考虑使 $\Delta f_s(0) = f_s(0) - f_{s0}$ 最大化。



笔记 更多讨论可参考 Handbook §4.9.3 或 A. Hofmann and S. Myers, Beam dynamics in a double RF system, The 11-th International Conference on High-Energy Accelerators, CERN, Geneva, pp. 610-14 (1980). <https://cds.cern.ch/record/879237?ln=en>。

8.3 同步辐射经典效应：辐射阻尼

回忆一下，§3.3.1 与 §4.3 介绍过，单个电子经过弯转段的瞬时同步辐射功率有

$$P_s = \frac{2c r_e m_e c^2 \beta^4 \gamma^4}{3\rho^2} \quad (8.83)$$

在储存环中绕行一周后，其辐射能量有¹⁹

$$U_s = \oint P_s dt = P_s \frac{2\pi\rho}{\beta c} = \frac{4\pi r_e m_e c^2 \beta^3 \gamma^4}{3\rho} \quad (8.84)$$

可以看到， $U_s = U_s(\gamma)$ ，即相对于参考能量粒子，非参考能量粒子由于能量偏差，产生同步辐射的能量损失与参考粒子的能量损失有些许差别。因此， U_s 不再为一常数，而是与粒子能量有关的函数。先考虑一般情况，根据泰勒展开，有²⁰

$$U_s \approx U_{s0} + \frac{dU_s}{dE} \Delta E \quad (8.85)$$

则

$$\dot{\tau} = \eta\epsilon, \quad \epsilon = \frac{\Delta E}{E_s} \quad (8.86)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{d(\Delta E/E_s)}{dt} \approx \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{\delta E}{E_s} \approx \frac{\omega_{\text{rev}} q V_{\text{RF}}}{2\pi E_s} (\sin \phi_s + \cos \phi_s \cdot h\omega_{\text{rev}}\tau) - \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{U_s(\epsilon)}{E_s} \\ &= \omega_{\text{rev}}^2 \frac{h q V_{\text{RF}} \cos \phi_s}{2\pi E_s} \tau - \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{dU_s}{dE} \epsilon \end{aligned} \quad (8.87)$$

其中， $qV_{\text{RF}} \sin \phi_s = U_{s0} \neq U_s(\epsilon)$ 。对电子， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ C， $qV_{\text{RF}} > 0$ 。

以上两个一阶耦合微分方程可以合并为一个二阶微分方程，有

$$\ddot{\epsilon} + \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{dU_s}{dE} \dot{\epsilon} - \omega_{\text{rev}}^2 \frac{h\eta q V_{\text{RF}} \cos \phi_s}{2\pi E_s} \epsilon = 0 \quad (8.88)$$

通解²¹为

$$\epsilon(t) = e^{-\alpha_\epsilon t} \cos \left(\sqrt{\omega_s^2 - \alpha_\epsilon^2} t + \phi_0 \right) \approx e^{-\alpha_\epsilon t} \cos (\omega_s t + \phi_0) \quad (8.89)$$

其中， $\omega_s \gg \alpha_\epsilon$

$$\omega_s = \omega_{\text{rev}} \sqrt{-\frac{h\eta q V_{\text{RF}} \cos \phi_s}{2\pi E_s}}, \quad \alpha_\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{dU_s}{dE} \quad (8.90)$$

当 $\alpha_c > 0$ 时，纵向同步运动稳定性要求 $\omega_s \in \mathbb{R}$ ，即 $\phi_s \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ，此即上一节介绍的同步加

¹⁹ 此处对储存环加速器，将 $\oint P_s dt$ 算为 $\frac{2\pi\rho}{\beta c}$ 已经过度简化了，下面会介绍更准确的计算同步辐射能量的处理方法。

²⁰ 可以看到，分析一步一步递进。这里先将 U_s 对能量 E 泰勒展开，还不限于 $U_s(E)$ 的具体函数形式，即不限于同步辐射，其它辐射机制也适用此式。

²¹ 具有类似阻尼简谐振荡形式的二阶微分方程

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\alpha \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = 0$$

其通解有

$$f(t) = e^{-\alpha t} (C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t})$$

其中， $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ 。通解形式可分三类：(A, B, C 为待解系数)

- 欠阻尼解 (under-damped, $\omega_0 > \alpha \geq 0$) $\Rightarrow f(t) = C e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \phi_0), \Omega > 0$ 。
- 过阻尼解 (over-damped, $0 < \omega_0 < \alpha$) \Rightarrow 当 $t \gg 1$ 时， $f(t) \approx C e^{-(\alpha-\Gamma)t}$ ，其中， $\Gamma = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ 。
- 临界阻尼解 (critically-damped, $\omega_0 = \alpha$) $\Rightarrow f(t) = (A + Bt) e^{-\alpha t}$ 。

速器纵向稳相原理。注意，以上分析假设粒子在纵向相空间为小振幅振荡，即 $\hbar\omega_{\text{rev}}\tau \ll 1$ 。当振荡振幅不在同步相位附近时，振荡为非线性，分析需要从原始带有 \sin, \cos 的哈密顿量开始。现在看一下 α_ϵ 在这里扮演的角色。作为二阶微分方程中与 $\dot{\epsilon}$ 成正比的摩擦项，当 $\alpha_\epsilon > 0$ 时，系统为阻尼振荡 (damped oscillation)，振荡物理量随时间呈指数衰减，阻尼率 (damping rate) 为 α_ϵ 。

注 这里的 ϵ 为能量偏差，不要与束团发射度搞混。**§8.1** 节介绍的 (纵向) 动量紧缩因子 α_c 与这里介绍的纵向辐射阻尼率 α_ϵ (以及下面将介绍的横向辐射阻尼率 $\alpha_{v,h}$) 符号相似，不要与 Courant-Snyder 参量搞混了。

以下讨论同步辐射的阻尼效应，限定 U_s, P_s 为 **§4.3** 节介绍过的明确形式。考虑当电子经过弯转段产生辐射时，电子能量改变引起的阻尼效应将发生在纵向同步振荡，也发生在横向 betatron 振荡。以下将分别讨论。定量讨论前，先定性描述同步辐射阻尼效应。

定义 8.8. 同步辐射阻尼 (synchrotron radiation damping)

为一种天然的、经典力学的阻尼效应，同步辐射阻尼效应 同时 发生在纵向与横向。

电子转弯时发出电磁辐射 (同步辐射)。对纵向而言，一个束团中，假设参考粒子能量为 E_s (此参考粒子又称同步粒子 synchronous particle)，发出的同步辐射能量为 U_0 。则，高于参考能量 ΔE 的电子发出的同步辐射能量较大，低于参考能量 ΔE 的电子发出的同步辐射能量较小，整个束团的能散倾向于变小，为纵向阻尼效应。

对横向而言，假设参考粒子发出的同步辐射能量为 U_{s0} ，假设粒子 (总) 动量减小的方向与光子发出的方向平行^a，此刻 x, x', y, y' 不变。但是，当电子绕行经过 RF 谐振腔时，补充同步辐射时损失的能量或动量仅发生在“一个”方向，因此， x', y' 就变小了 (因为分母变大)。此为横向阻尼效应。

注 注意，上面叙述不要求补偿同步辐射时损失的能量或动量仅发生在“纵向 (z)”方向。只要求一个确切方向就行，即使与纵向 z 有偏差，那么仍然存在同步辐射阻尼效应。

^a由于电子产生同步辐射是在存在磁场的弯转段中，这里的动量应为正则动量 $\pi = \gamma m_e c \beta + q \mathbf{A}$ ， π 与 β 是否总是平行需要进一步论证。这里忽略论证细节，先当 π 与 β 平行。

8.3.1 纵向

已知 $P_s = \frac{2c r_e m_e c^2 \gamma^4}{3\rho^2} = \frac{2c^3 r_e e^2 E_s^2 B^2}{3(m_e c^2)^3}$ 。假设磁场 B 不变，存在粒子能量偏差时，即 $E \rightarrow E_s + \Delta E$ ，有

$$P(\Delta E) = \frac{2c^3 r_e e^2 (E_s + \Delta E)^2 B^2}{3(m_e c^2)^3} \quad (8.91)$$

在储存环中，单个非参考能量粒子绕行一圈后，与参考粒子相比，积累的辐射能量差为

$$\Delta U = [P(\Delta E) - P_s] T_0 = 2 \frac{P_s \Delta E}{E_s} T_0 = 2 \frac{U_{s0}}{E_s} \Delta E \quad (8.92)$$

由此可知，比参考能量稍高的电子 $\Delta E > 0$ 将辐射较多能量（相对于 U_0 ）。暂时忽略同步振荡，则经过谐振腔时，参考粒子与能量稍高的非参考粒子获得的平均能量补偿是一样的。比参考能量稍低的电子 $\Delta E < 0$ 将辐射较少能量（相对于 U_0 ）。类似地，经过谐振腔时获得的平均能量补偿是一样的。因此，束团整体能散有阻尼效应，称纵向同步辐射阻尼效应。根本原因是较高（低）能量的粒子辐射较多（少）。参考图 8.15。

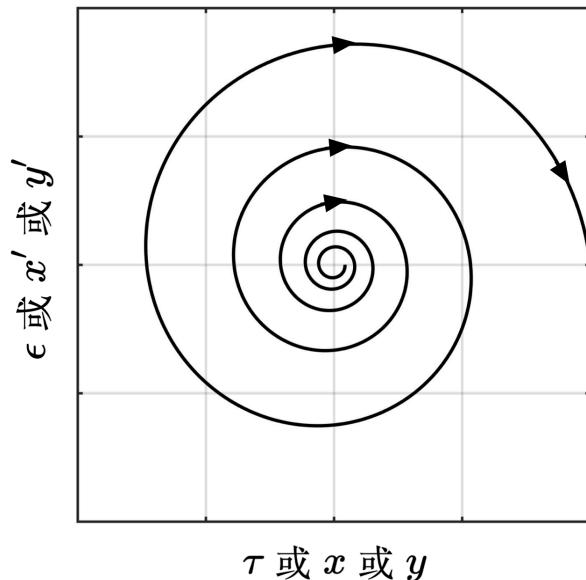


图 8.15：纵向同步辐射阻尼效应示意图。同步辐射阻尼效应发生在三个维度相空间中，不仅在纵向 (τ, ϵ)，也包含横向 (x, x' , y, y')，但机制不完全一样。

纵向同步辐射阻尼率可以估算如下，忽略不同能量粒子路径差影响

$$\alpha_\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{dU_s}{dE} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{\Delta U_s}{\Delta E} = \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{U_{s0}}{E_s} = \frac{U_{s0}}{T_{\text{rev}} E_s} = \frac{\langle P \rangle}{E_s} \quad (8.93)$$

其中，下标 rev 表示绕行一圈的物理量。 $\omega_{\text{rev}} = 2\pi f_{\text{rev}} = \frac{2\pi}{T_{\text{rev}}} = \frac{2\pi}{T_0}$ 。 $\langle P \rangle = U_{s0}/T_{\text{rev}} = U_{s0}/T_0$ 。纵向同步辐射阻尼时间定义为 $\tau_\epsilon = 1/\alpha_\epsilon$ ，有

$$\tau_\epsilon \equiv \frac{1}{\alpha_\epsilon} = \frac{T_{\text{rev}} E_s}{U_{s0}} \quad (8.94)$$

有时候 α_ϵ 写成 α_z , τ_ϵ 写成 τ_z 。

截至目前为止，分析还是非常粗略的，因为我们对粒子绕行一圈时，能量损失的评估为 $\Delta U = (P - P_s)T_0$ 。虽然考虑了非参考粒子 P 与参考粒子 P_s 的辐射功率差异，但是它们绕行周期都还是 T_0 。更准确的评估还应包含不同能量粒子绕行时的路径差，即

$$dC = \left(1 + \frac{D_x}{\rho} \beta_0 \delta \right) ds \quad (8.95)$$

此处的 δ 为非参考粒子与参考粒子本身的能量差异， $\beta_0 \approx 1$ 。 $dC = ds$ 为参考能量粒子绕行一周的路径差。以上路径差会在计算辐射能量损失时体现，即

$$U_s = \oint P_s dt = \oint P_s \frac{dC}{\beta_0 c} \approx \frac{1}{c} \oint P_s \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) ds \quad (8.96)$$

另外，当弯转磁铁为非均匀而存在横向梯度时，也会影响粒子的路径差，此时 $B = B_y(x) = B_0 + x \frac{\partial B_y}{\partial x}$ ，根据磁刚度，这里的磁场梯度 $\frac{\partial B_y}{\partial x}$ 可以通过能量偏差与同步辐射能量/功率表示式联系，有

$$\frac{dU_s}{dE} = \frac{1}{c} \oint \left(\frac{dP_s}{dE} + \frac{D_x}{\rho} \frac{P_s}{E} \right)_{E_s} ds \quad (8.97)$$

其中， E_s 为参考粒子能量。磁场梯度将藏在 $\frac{dP_s}{dE}$ 项。由前面的 $P_s = \frac{2c^3 r_e e^2 E_s^2 B^2}{3(m_e c^2)^3}$ 知，

$$\begin{aligned} \frac{dP_s}{dE} \Big|_{E_s} &= 2 \frac{P_s}{E_s} + 2 \frac{P_s}{B_0} \frac{dB}{dE} = 2 \frac{P_s}{E_s} + 2 \frac{P_s}{B_0} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{dx}{dE} \\ &= 2 \frac{P_s}{E_s} + 2 \frac{P_s}{B_0} \frac{D_x}{E_s} \frac{\partial B}{\partial x} \end{aligned} \quad (8.98)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{dU_s}{dE} &= \frac{1}{c} \oint \left(2 \frac{P_s}{E_0} + 2 \frac{P_s}{B_0} \frac{D_x}{E_s} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{P_s D_x}{E_s \rho} \right)_{E_0} ds \\ &= \frac{U_{s0}}{E_s} \left\{ 2 + \frac{1}{c U_{s0}} \oint \left[D_x P_s \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right]_{E_s} ds \right\} \end{aligned} \quad (8.99)$$

根据前面介绍的 $\alpha_\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{rev}}}{2\pi} \frac{dU_s}{dE}$ ，将上式 $\frac{dU_s}{dE}$ 代入，其中， \oint 项就给出了对同步辐射阻尼率的修正。多数文献将 \oint 项写成 \mathcal{D} ，即

$$\mathcal{D} = \frac{1}{c U_{s0}} \oint \left[D_x P_s \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right]_{E_s} ds \quad (8.100)$$

当考虑了不同能量粒子路径差与弯转磁铁梯度等因素后，就可以给出更准确的纵向同步辐射阻尼率的表示式，一般以同步辐射积分 (synchrotron radiation integrals) 的形式表示。此处忽略推导细节，仅给出结果：

$$\alpha_\epsilon = \frac{U_{s0}}{2T_{\text{rev}} E_s} (2 + \mathcal{D}) = \frac{U_{s0}}{2T_{\text{rev}} E_s} \left(2 + \frac{\mathcal{I}_4}{\mathcal{I}_2} \right) = \frac{r_e \gamma^3}{3 T_{\text{rev}}} (2\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_4) \quad (8.101)$$

其中，额外多出的修正项 $\mathcal{D} = \mathcal{I}_4/\mathcal{I}_2$ 。如果考虑 $x-z$ 平面加速器，则 $\mathcal{I}_4 = \mathcal{I}_{4x}$ 。同步辐射积分的定义整理如下。

 **练习 8.16** 试着推导以上结果。

解 可参考 S.Y. Lee 或 A. Wolski 教科书。



笔记 关于准确计算同步辐射能量损失或同步辐射阻尼时间的公式，可参考 Alexander Wu Chao, Karl Hubert Mess, Maury Tigner, and Frank Zimmermann ed., Handbook of Accelerator Physics and Engineering, 2nd ed., World Scientific (2013) 的 §3.1.4。

定义 8.9. 几个常用的辐射积分 (radiation integral)

电子储存环中常见的几个辐射积分定义如下：

$$\mathcal{I}_1 [\text{m}] = \oint (\kappa_x D_x + \kappa_y D_y) ds \quad (8.102)$$

$$\mathcal{I}_2 [\text{m}^{-1}] = \oint \kappa^2 ds \quad (8.103)$$

$$\mathcal{I}_3 [\text{m}^{-2}] = \oint |\kappa|^3 ds \quad (8.104)$$

$$\mathcal{I}_{4x} [\text{m}^{-1}] = \oint [\kappa^2 \kappa_x D_x + 2\kappa_x (kD_x + kD_y)] ds \quad (8.105)$$

$$\mathcal{I}_{4y} [\text{m}^{-1}] = \oint [\kappa^2 \kappa_y D_y + 2\kappa_y (kD_x - kD_y)] ds \quad (8.106)$$

$$\mathcal{I}_{5u} [\text{m}^{-1}] = \oint |\kappa|^3 \mathcal{H}_u ds \quad (8.107)$$

$$\mathcal{I}_{6x} [\text{m}^{-1}] = \oint (kD_x + kD_y)^2 ds \quad (8.108)$$

$$\mathcal{I}_{6y} [\text{m}^{-1}] = \oint (kD_x - kD_y)^2 ds \quad (8.109)$$

其中，

- x 方向曲率 $\kappa_x = 1/\rho_x$ (可能带正负号)
- y 方向曲率 $\kappa_y = 1/\rho_y$ (可能带正负号)
- $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$
- D_x, D_y 为横向水平、垂直方向的色散函数
- $\mathcal{H}_u = \beta_u D_u'^2 + 2\alpha_u D_u D'_u + \gamma_u D_u^2$, 其中, $u = x, y$
- 四极铁梯度 (强度) $k = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_x}{\partial y}$
- 斜四极铁梯度 (强度) $\underline{k} = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial y}$

注 上面 $\mathcal{I}_{4x,4y}$ 仅适用于扇形 (sector) 磁铁, 即, 在磁铁入口与出口无夹角。如果存在夹角 (如: 楔形磁铁), 则 $\mathcal{I}_{4x,4y}$ 如下

$$\mathcal{I}_{4u}|_{\text{wedge}} = \kappa_u^2 D_{u0} \tan \theta_0 + \mathcal{I}_{4u} + \kappa_u^2 D_{ue} \tan \theta_e \quad (8.110)$$

其中, $u = x, y$, D_{u0}, D_{ue} 为入口处与出口处的色散函数, θ_0, θ_e 为入口处与出口处的夹角^a。

^a这里夹角正负号的约定为: 定义极面 (pole face) 垂直于参考粒子进出时的轨迹。对于对称、矩形磁铁, 约定 θ_0, θ_e 为负值。 □

注 上面定义方式考虑了横向水平与垂直方向弯转磁铁, 但是忽略水平、垂直方向可能的耦合色散。另外, 为清楚起见, 下表总结四极铁梯度符号与聚焦/散焦的方向。对 $q > 0$ 情况,

四极铁梯度	x 方向	y 方向
$G = \partial B_y / \partial x > 0$	聚焦	散焦
$G = \partial B_y / \partial x < 0$	散焦	聚焦

注 当储存环 RF 中心频率稍微改变时，参考粒子能量产生偏移，有 $\Delta\delta = \frac{\Delta p}{p_0} = -\frac{1}{\eta} \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}}$ ，其中， $\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$ 为滑相因子 (slippage factor)。这个能量偏移将随后导致横向位置偏移，因此，四极铁不再只有聚焦/散焦，还贡献了一部分二极铁的 κ_x, κ_y ，即， $\kappa_x = (kD_x + \underline{k}D_y)\delta$ 与 $\kappa_y = (-\underline{k}D_x + kD_y)\delta$ ，从而给出 $\mathcal{I}_{4x,4y}$ 的能量偏差修正，

$$\Delta\mathcal{I}_{4x,4y} = 2\mathcal{I}_{6x,6y}\delta \quad (8.111)$$

由 $\mathcal{I}_{4x,4y,6x,6y}$ 的定义可以看出它们之间的关系。

此小节介绍完同步辐射阻尼的纵向效应，接着介绍横向 x, y 方向的同步辐射效应。对 $x-z$ 平面型储存环加速器，横向 x 方向情况稍微复杂，因此，先从横向 y 方向开始。

8.3.2 横向： y

上一小节估算了同步辐射阻尼的纵向效应，导致纵向同步振荡呈指数衰减，阻尼率有 α_ϵ 、或阻尼时间为 τ_ϵ 。当粒子产生同步辐射场的瞬间，电磁场携带一动量，同时有一个等大、反向的动量在粒子身上，参考图 8.16 中的下图 $d\mathbf{p}_s$ 。在粒子进入谐振腔获得能量补偿之前，由于粒子（总）动量减小的方向与光子发出的方向平行，均与 \mathbf{p}_0 平行，此时 x, x', y, y' 不变。当电子绕行经过谐振腔时，补偿同步辐射时损失的能量或动量仅发生在“一个”方向，如： z 方向 $d\mathbf{p}_{RF}$ 。因此， x', y' 就变小了（因为分母变大）。同步辐射阻尼的横向效应，对 y 方向而言，将导致横向发射度呈指数衰减。参考图 8.16。

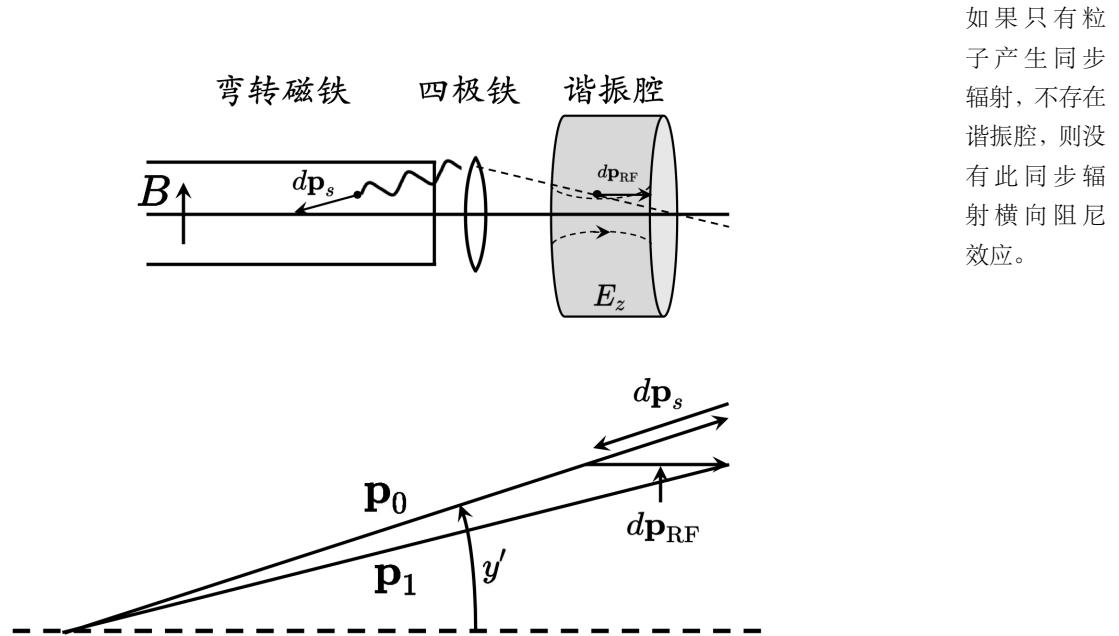


图 8.16：横向 y 方向由于同步辐射效应导致的 betatron 振荡阻尼。假设参考能量粒子发出的同步辐射能量为 U_0 ，且忽略辐射张角，即 $\theta \sim 1/\gamma \rightarrow 0$ ，仅沿切向。

先假设参考能量粒子发出的同步辐射能量为 U_0 ，且忽略辐射张角，即 $\theta \sim 1/\gamma \rightarrow 0$ ，仅沿切向。假设储存环弯转仅在 $x-z$ 平面，现考虑 y 方向，由图 8.16，考虑粒子产生辐射后，但进入谐振腔前，有 $y' = p_\perp/p_\parallel$ ，则粒子进入并离开谐振腔后，其横向 y' 的改变

可写为

$$\Delta y' = \frac{p_\perp}{p_\parallel + \Delta p} - \frac{p_\perp}{p_\parallel} \simeq \frac{p_\perp}{p_\parallel} \left[\left(1 - \frac{\Delta p}{p_\parallel} \right) - 1 \right] = -y' \frac{\Delta p}{p_0} \quad (8.112)$$

而横向 y 坐标不变，因此有

$$\delta y = 0, \quad \delta y' \approx -\frac{\delta E_\gamma}{E_s} y' \quad (8.113)$$

其中， δE_γ 为辐射场的能量， $-\delta E_\gamma$ 即为粒子能量的改变。这里几点宜留意：

- 如果只有粒子产生同步辐射，而不存在谐振腔，则没有此同步辐射横向阻尼效应。
- 上式 $\delta y'$ 分母的 E_s 指的是粒子经过谐振腔后，能量被补偿而回到参考粒子能量。
- 此处分析忽略辐射张角。考虑有限辐射张角的分析将在后面量子激发效应讨论。
- 此处分析假设谐振腔在无色散段，即 $D = 0, D' = 0$ 。当谐振腔在色散段时，束团质心将出现一偏移，但不影响下面即将得到的阻尼率表示式。
- 此处分析忽略横纵向耦合 (synchro-bevatron coupling)²²，即假设远离横纵向耦合共振。考虑横纵向耦合共振时，以下分析不适用。

为了估算对横向 y 方向束团发射度的影响，先从单粒子发射度 (single-particle emittance) 发射度开始， $I_y = \epsilon_y/2$ ，其中， $\epsilon_y = \gamma_y y^2 + 2\alpha_y y y' + \beta_y y'^2$ ，由于 y 方向散角改变导致的单粒子发射度变化有

$$\delta I_y = \frac{\delta \epsilon_y}{2} = \alpha_y y \delta y' + \beta_y y' \delta y' = -\frac{\delta E_\gamma}{E_s} (\alpha_y y y' + \beta_y y'^2) \quad (8.114)$$

以上为同步辐射效应对单粒子 y 发射度 (或称作用量，参考 §7.3 讨论) 的影响。考虑束团分布，其二阶矩特性 (对应束矩阵元素) 有

$$\langle y^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_y \beta_y, \quad \langle y y' \rangle = -\frac{1}{2} \epsilon_y \alpha_y, \quad \langle y'^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_y \gamma_y \quad (8.115)$$

绕行一圈后取平均，得

$$\langle \delta \epsilon_y \rangle = 2 \langle \delta I_y \rangle = \epsilon_y (\alpha_y^2 - \beta_y \gamma_y) \frac{\delta E_\gamma}{E_s} = -\epsilon_y \frac{\delta E_\gamma}{E_s} \quad (8.116)$$

考虑参考能量粒子，有 $\delta E_\gamma = U_{s0}$ 。因此，有横向 y 方向发射度随时间平均的演化方程

$$\frac{d\epsilon_y}{dt} = -\epsilon_y \frac{U_{s0}}{T_{rev} E_s} \quad \text{或} \quad \epsilon_y(t) = \epsilon_{y0} \exp \left(-\frac{U_{s0}}{T_{rev} E_s} t \right) \quad (8.117)$$

其中，横向 y 方向同步辐射阻尼率定为

$$\alpha_v = \frac{U_{s0}}{2T_{rev} E_s} = \frac{\langle P \rangle}{2E_s} \quad (8.118)$$

其中，分母的 2 是因为横向 betatron 振荡的振幅正比于 $\sqrt{\epsilon_y}$ 。

 **练习 8.17** 对细节感兴趣的话，试着完成中间步骤的推导。 

解 可参考 Albert Hofmann, The Physics of Synchrotron Radiation, Cambridge University Press (2004) 的 §14.2.3 或 Andrzej Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators,

²² 这里值得强调一下，这里忽略横纵向耦合是不是表示横纵向耦合很小或几乎不存在？不是，横纵向耦合存在，且可能在局部位置明显，即通过前面介绍的非零 R_{16}, R_{26} 将纵向能量偏差 δ 耦合到横向 x, x' 。但是此处分析忽略了，为什么？因为假设远离横纵向耦合共振。远离共振之后，由于横向 betatron 振荡与纵向同步振荡的时间尺度差了几个数量级，因此允许横向效应与纵向效应各自分析。

Imperial College Press (2014) 一书的 §7.1。 ■

同步辐射阻尼效应在横向 y 方向的机制示意图可参考图 8.17。比较纵向机制 — 图 8.22 — 可看出其差别。

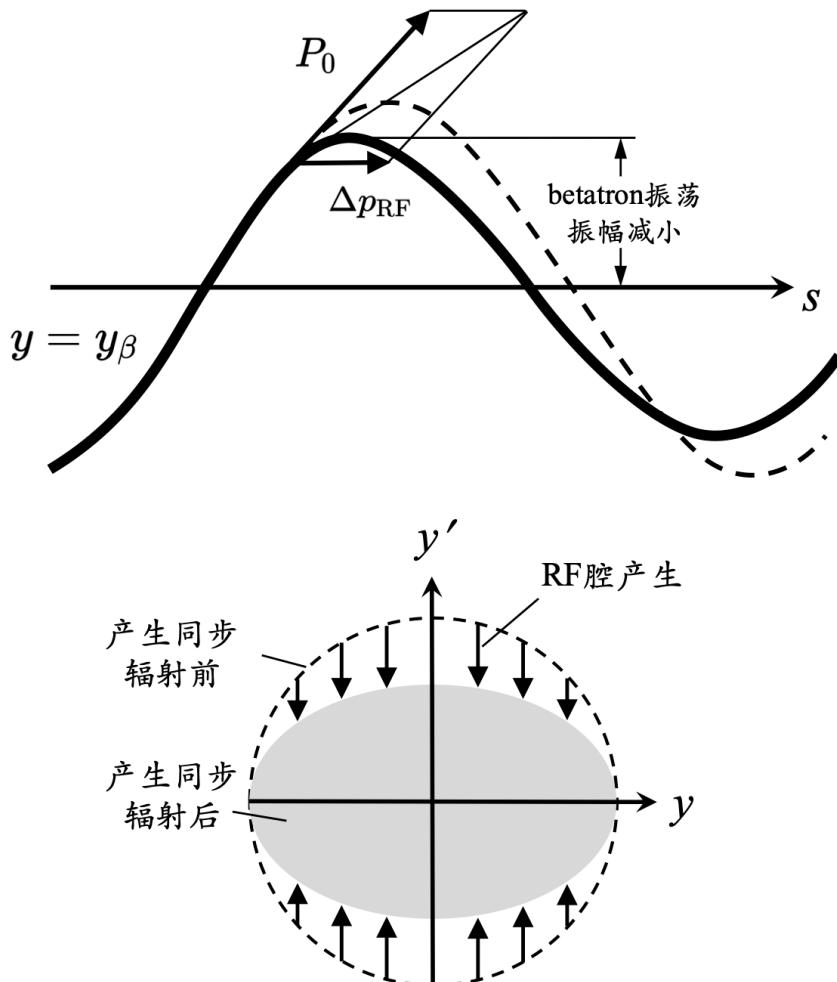


图 8.17: 横向 y 方向同步辐射阻尼效应示意图。图例修改自 Bryant & Johnsen。

8.3.3 横向: x

有些读者可能纳闷，横向 x 方向与 y 方向似乎没有区别，即横向水平 x 方向的同步辐射阻尼率可写为

$$\alpha_h \stackrel{?}{=} \frac{U_{s0}}{2T_{\text{rev}}E_s} = \frac{\langle P \rangle}{2E_s}$$

其实不然，虽然距离答案很接近了。对横向 x 方向，情况稍微复杂，因为

- x 方向为弯转平面，存在色散 D_x 或 D'_x ，即使没有同步辐射效应，非参考粒子的纵向能量偏差将通过色散耦合到横向 x 方向。
- 粒子在弯转段中经历的路径长度 ds 随不同横向 x 位置偏差有些不同（回忆 §8.1 开

头介绍的动量紧缩因子)。

- 有时候，弯转磁铁不是单纯的二极铁，而是组合磁铁，粒子在弯转段的不同横向 x 位置感受到的磁场强度不同，因此同步辐射能量也有些偏差。

先将 x 方向粒子的运动轨迹写为 betatron 振荡轨迹 ($x, x' \neq 0$, 对应 §7.7 的 Case 1) 与能量偏差轨迹 ($\delta \neq 0$, 对应 §7.7 的 Case 3) 之和, 有

$$\begin{aligned} x &= x_\beta + x_\epsilon \\ x' &= x'_\beta + x'_\epsilon \end{aligned} \quad (8.119)$$

其中, $x_\epsilon = D\delta, x'_\epsilon = D'\delta$ 。当粒子发出同步辐射场时, 不立即影响粒子总横向位置坐标, 即 $\delta x = 0$ 。但可能产生 $\delta x'$, $\delta x'$ 的分析仍类似于上面介绍的横向 $\delta y'$ 方向分析。

已知立即的效果不影响电子横向(总)偏差 δx , 对 $\delta x'$ 的计算同横向 $\delta y'$ 方向分析, 即

$$\delta x = \delta x_\beta + \delta x_\epsilon \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.120)$$

$$\delta x' = \delta x'_\beta + \delta x'_\epsilon = -x' \frac{\delta E_\gamma}{E_s} \approx -x'_\beta \frac{\delta E_\gamma}{E_s} \quad (8.121)$$

此处假设 $x'_\beta \gg x'_\epsilon$, 参考图 8.18。此假设与 $\nu_s \ll 1 \ll \nu_\beta$ 的结果一致。

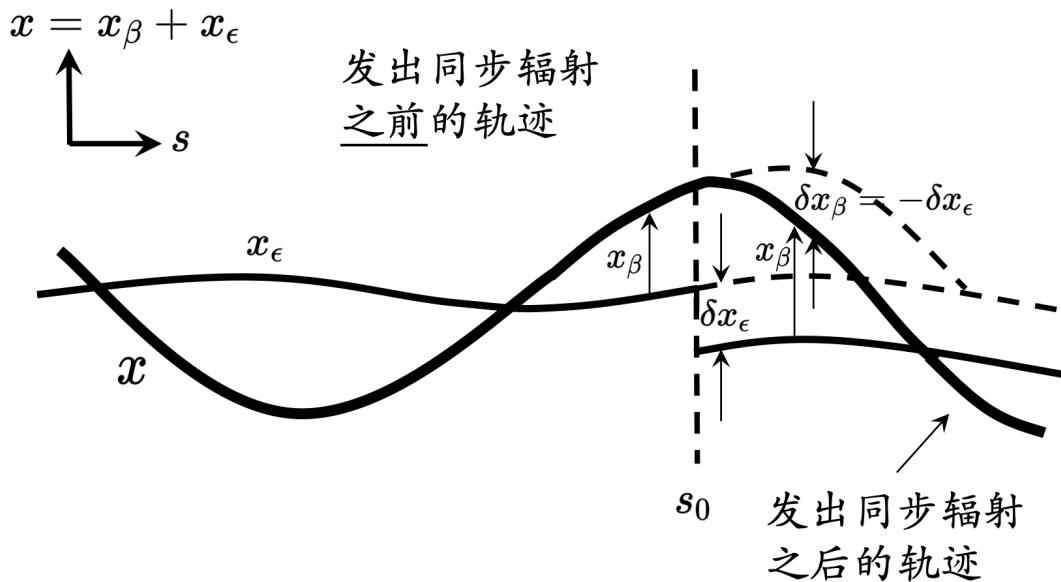


图 8.18: 横向 x 方向由于同步辐射效应导致的 betatron 振荡。 $x = x_\beta + x_\epsilon$ 视为在相对缓慢变化的 x_ϵ 轨迹上叠加 betatron 振荡 x_β 。粒子发出同步辐射造成能量改变会影响 x_β 或 x_ϵ , 但不影响当下的位置坐标 x 。图例修改自 Mathew Sands, The Physics of Electron Storage Rings — An Introduction, SLAC-121 (1970)。

已知传输段的色散 D_x 或 D'_x , 则有

$$\delta x_\epsilon = D_x \frac{\delta E}{E_s} = -D_x \frac{\delta E_\gamma}{E_s} \quad (8.122)$$

$$\delta x'_\epsilon = D'_x \frac{\delta E}{E_s} = -D'_x \frac{\delta E_\gamma}{E_s} \quad (8.123)$$

其中, $\frac{\delta E}{E_s} = -\frac{\delta E_\gamma}{E_s}$, $\delta E_\gamma > 0$ 为粒子辐射出的光子能量。

类似如上 y 方向的分析, 对束团横向 x 发射度的变化可从不变量开始进行一阶估算

$$I_x = \frac{\epsilon_x}{2} = \frac{1}{2} (\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2) \quad (8.124)$$

由于纵向同步振荡比横向 betatron 振荡慢得多, 这里的 x 仅考虑 x_β 的贡献。因此,

$$\delta x_\beta = -\delta x_\epsilon = -D_x \frac{\delta E}{E_s} = D_x \frac{\delta E_\gamma}{E_s} \quad (8.125)$$

$$\delta x'_\beta = \delta x' - \delta x'_\epsilon = -(x'_\beta - D'_x) \frac{\delta E_\gamma}{E_s} \quad (8.126)$$

因此, 单粒子发射度改变量可写成

$$\begin{aligned} \delta I_x &= \frac{\delta \epsilon_x}{2} = [\gamma_x x_\beta \delta x_\beta + \alpha_x (x'_\beta \delta x_\beta + x_\beta \delta x'_\beta) + \beta_x x'_\beta \delta x'_\beta] \\ &= -\frac{\delta E_\gamma}{E_s} [(\alpha_x x_\beta x'_\beta + \beta_x x_\beta^2) - (\gamma_x D_x x_\beta + \alpha_x (D_x x'_\beta + D'_x x_\beta) + \beta_x D'_x x'_\beta)] \end{aligned} \quad (8.127)$$

这里的 $\delta \epsilon_x$ 为
一阶小量。

接着, 估算 δI_x 或 $\delta \epsilon_x$ 绕行一圈或传输一段距离后的平均。这里要小心, 还不能立刻仿照 y 方向的分析。不同于横向 y 方向, 粒子在弯转段中经历的路径长度或时间长度随不同横向 x 位置偏差有些不同, 因此需要建立 $\frac{\delta E_\gamma}{E_s}$ 项与路径差 ds 的关系, 希望得到 $\delta \epsilon_x = (...) ds$ 。已知 $P_s \propto E^2 B^2$, 有

$$dP = 2P_s \left(\frac{dE}{E_s} + \frac{dB_y}{B_y} \right) = 2P_s \left(1 + \frac{D_x}{\rho} \frac{\rho}{B_y} \frac{dB_y}{dx} \right) \frac{dE}{E_s} \quad (8.128)$$

给出了存在能量偏差、存在横向额外聚焦/散焦时的同步辐射功率偏差。此外, 还有存在能量偏差时的路径差修正

$$\delta s' = \left(1 + \kappa \frac{x_\beta}{\rho} \right) \delta s \quad (8.129)$$

其中, 对扇形二极铁, $\kappa \approx 1$; 对矩形二极铁, $\kappa \approx 0$ 。于是

$$\begin{aligned} \delta E_\gamma &= P_s \times \frac{\delta s'}{c} = \frac{P_s}{c} \left(1 - n_B \frac{x_\beta}{\rho} \right) \left(1 + \kappa \frac{x_\beta}{\rho} \right) \delta s \\ &\approx \frac{P_s}{c} \left(2 + \frac{\kappa - 2n_B}{\rho} x_\beta \right) \delta s \end{aligned} \quad (8.130)$$

其中, $n_B = -\frac{\rho}{B_y} \frac{dB_y}{dx}$ 为组合磁铁聚焦系数²³。因此, 横向 x 方向的发射度改变随路程差

²³ x 方向聚焦有 $n_B < 0$ 。

与横向磁场变化的关系有

$$\begin{aligned}\delta\epsilon_x = 2\delta I_x &= \frac{2P_s}{cE_s} \left[\left(2 + \frac{\kappa - 2n_B}{\rho} x_\beta \right) \right. \\ &\quad \times ((\alpha_x x_\beta x'_\beta + \beta_x x_\beta^2) - (\gamma_x D_x x_\beta + \alpha_x (D_x x'_\beta + D'_x x_\beta) + \beta_x D'_x x'_\beta)) \left. \right] ds \\ &= -\epsilon_x \frac{P_s}{cE_s} \left(1 - (\kappa - 2n_B) \frac{D_x}{\rho} \right) \delta s\end{aligned}\quad (8.131)$$

略去推导细节，由此可列写横向 x 方向束团发射度随时间平均的演化方程

$$\frac{d\epsilon_x}{dt} = -\epsilon_x \frac{2r_e\gamma^3}{3T_{\text{rev}}} (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_4) = -2\alpha_h \epsilon_x \quad (8.132)$$

其中，横向 x 方向发射度的同步辐射阻尼率定为

$$\alpha_h = \frac{r_e\gamma^3 \mathcal{I}_2}{3T_{\text{rev}}} \left(1 - \frac{\mathcal{I}_4}{\mathcal{I}_2} \right) = \frac{U_{s0}}{2T_0 E_s} (1 - \mathcal{D}) \quad (8.133)$$

类似地，分母的 2 是因为横向 betatron 振荡的振幅正比于 $\sqrt{\epsilon_x}$ 。

练习 8.18 对细节感兴趣的话，试着完成以上中间步骤的推导。 ■

解 可参考 Albert Hofmann, The Physics of Synchrotron Radiation, Cambridge University Press (2004) 的 §14.2.4。 ■

同步辐射阻尼效应在横向 x, y 方向的比较可参考图 8.19。留意，这里的

$$\alpha_h = \frac{U_{s0}}{2T_0 E_s} (1 - \mathcal{D}) = \frac{U_{s0}}{2T_0 E_s} - \frac{U_{s0}}{2T_0 E_s} \mathcal{D}$$

其中，对应色散的第二项其实为“反阻尼”(anti-damping) 项，尽管这里都称辐射阻尼。

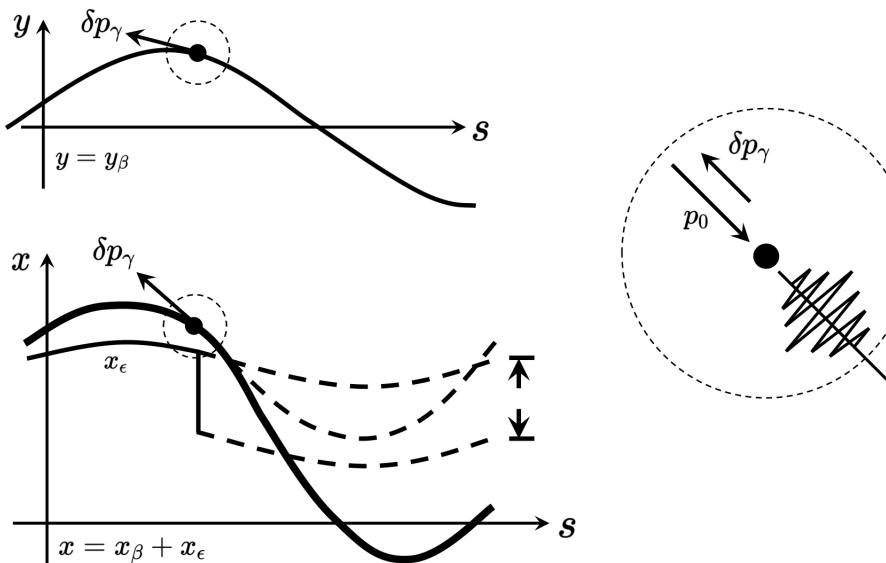


图 8.19：横向 x, y 方向同步辐射阻尼效应比较，在横向 x 方向多了色散效应 $\delta x_\epsilon \neq 0$ 。由于发出光子的瞬间， $\delta x = 0$ ，因此， $\delta x_\beta = -\delta x_\epsilon$ 。图例修改自 Bryant & Johnsen。

此外，如上一小节横向 y 方向分析时提到，此处分析假设谐振腔在无色散段，即 $D = 0, D' = 0$ 。当谐振腔在色散段时，束团质心将出现一偏移，参考图 8.20。束团质心

偏移这件事不影响束团发射度，影响发射度的机制仍为上述机制，因此，此种情况的阻尼率表示式还是一样。

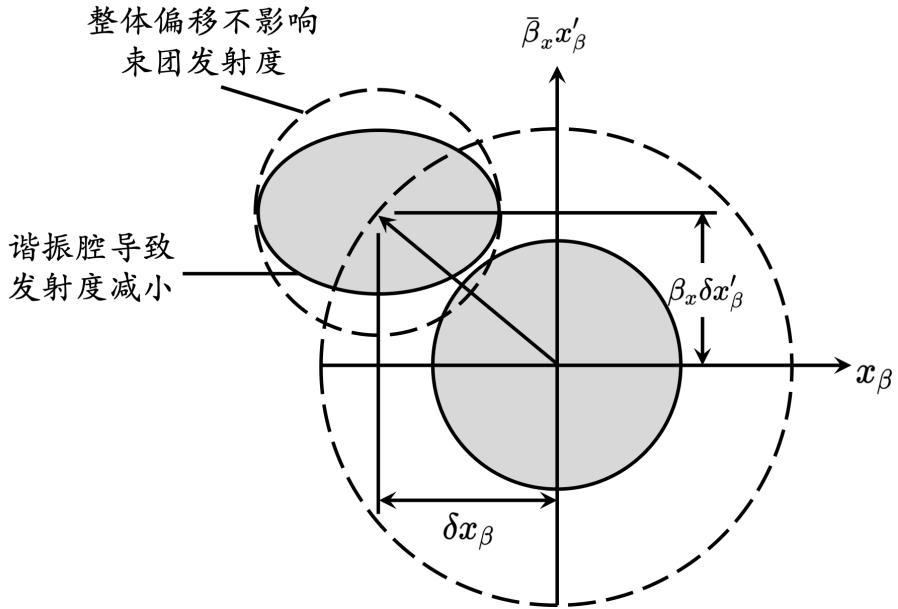


图 8.20：当谐振腔在色散段时，即 $D \neq 0$ 或 $D' \neq 0$ ，束团质心将出现一偏移，但不影响得到的阻尼率表示式，也不影响束团发射度。

作为小结，同步辐射纵向阻尼率有

$$\alpha_e = \frac{U_{s0}}{2T_{\text{rev}}E_s} (2 + \mathcal{D}) \quad (8.134)$$

横向阻尼率则有

$$\alpha_v = \frac{U_{s0}}{2T_{\text{rev}}E_s}, \quad \alpha_h = \frac{U_{s0}}{2T_{\text{rev}}E_s} (1 - \mathcal{D}) \quad (8.135)$$

其中， $\mathcal{D} = \mathcal{I}_4/\mathcal{I}_2$ 。

目前为止，我们介绍了同步辐射阻尼效应对束团在 x, y, z 三个方向的影响，给出了三个方向的辐射阻尼率或阻尼时间。同步辐射阻尼为一种天然的、经典力学的阻尼效应，同时发生在纵向与横向。过程细节的推导略过，面对实际问题需要计算同步辐射阻尼效应时，更准确的计算公式可参考 Alexander Wu Chao, Karl Hubert Mess, Maury Tigner, and Frank Zimmermann ed., *Handbook of Accelerator Physics and Engineering*, 2nd ed., World Scientific (2013)。

以下整理一些到目前为止介绍的关于同步辐射电子储存环特性的主要结果。其中，与辐射量子效应相关的部分将在下一节介绍。

性质 8.1. 同步辐射电子储存环特性

电子储存环在远离共振条件下，不存在阻尼扭摆器 (damping wiggler) 时，忽略集体效应等，达平衡时，一些束团参数可由辐射积分表示：

- 已知单圈、单电子瞬时辐射功率为

$$P_\gamma = \frac{cC_\gamma}{2\pi} \frac{E^4}{\rho^2} = \frac{e^2 c^3}{2\pi} C_\gamma E^2 B^2 \quad (8.136)$$

其中， ρ 为曲率半径， E 为粒子能量， B 为二极铁磁场。辐射功率中含有水平 x 极化部分 $P_\sigma = \frac{7}{8}P_\gamma$ 与垂直 y 极化部分 $P_\pi = \frac{1}{8}P_\gamma$ 。

- 单圈、单电子平均辐射功率 $\langle P_\gamma \rangle$

$$\langle P_\gamma \rangle = \frac{1}{C} \oint P_\gamma dz = \frac{cC_\gamma}{2\pi C} E^4 \mathcal{I}_2 \quad (8.137)$$

其中， E 为参考粒子能量， C 为储存环周长，

$$C_\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} = 8.8460 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{GeV}^3} \quad (8.138)$$

- 单圈、单电子由于二极铁导致的辐射能量有

$$U_0 = \oint P_\gamma dt = \frac{C_\gamma}{2\pi} E^4 \mathcal{I}_2 \quad (8.139)$$

- 辐射阻尼效应导致的横向、纵向振荡振幅衰减 $A_i = A_{i,0} e^{-\alpha_i t}$ ，其衰减率 $\alpha_i, i = x, y, z$ 有

$$\alpha_x = \alpha_h = \frac{C_\alpha}{C} E^3 \mathcal{I}_2 \left(1 - \frac{\mathcal{I}_{4x}}{\mathcal{I}_2} \right) \quad (8.140)$$

$$\alpha_y = \alpha_v = \frac{C_\alpha}{C} E^3 \mathcal{I}_2 \left(1 - \frac{\mathcal{I}_{4y}}{\mathcal{I}_2} \right) \quad (8.141)$$

$$\alpha_z = \alpha_e = \frac{C_\alpha}{C} E^3 \mathcal{I}_2 \left(2 + \frac{\mathcal{I}_{4x} + \mathcal{I}_{4y}}{\mathcal{I}_2} \right) \quad (8.142)$$

其中， $C_\alpha = \frac{cr_c}{3(mc^2)^3} = 2113.1 \text{ m}^2/\text{GeV}^3/\text{sec}$ 。

- 衰减时间常数为 $\tau_i = \alpha_i^{-1}$ 。

- 同步辐射阻尼与量子激发效应达平衡时，有平衡能散

$$\frac{\sigma_E^2}{E^2} = C_q \gamma^2 \frac{\mathcal{I}_3}{2\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_{4x} + \mathcal{I}_{4y}} \quad (8.143)$$

其中，对电子而言， $C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar c}{mc^2} = 3.8319 \times 10^{-13} \text{ m}$ 。

- 同步辐射阻尼与量子激发效应达平衡时，有平衡束长

$$\sigma_z = \frac{c|\eta|}{\omega_s} \frac{\sigma_E}{E} = \frac{\sqrt{2\pi}c}{\omega_0} \sqrt{-\frac{\eta E}{hqV_{RF} \cos \phi_s}} \frac{\sigma_E}{E} \propto \sqrt{|\eta|} \quad (8.144)$$

其中， ϕ_s 为同步相位 (synchronous phase)，对电子， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ， $qV_{RF} > 0$ 。为补偿参考电子同步辐射能量损失的 RF 谐振腔相位，即 $|qV_{RF}| \sin \phi_s = U_0$ ，其中 $\eta \cos \phi_s < 0$ 。 U_0 由上式给出。 $\eta = \alpha_c - 1/\gamma^2$ ， $\omega_s = \omega_0 \sqrt{-\frac{hqV_{RF}\eta \cos \phi_s}{2\pi\beta^2 E}} = \frac{c}{R} \sqrt{-\frac{hqV_{RF}\eta \cos \phi_s}{2\pi E}}$ 为小振幅同步振荡 (角) 频率。

- 同步辐射阻尼与量子激发效应达平衡时，有平衡横向束团几何发射度

$$\epsilon_u = C_q \frac{\gamma^2}{\mathcal{J}_u} \frac{\mathcal{I}_{5u}}{\mathcal{I}_2} \quad (8.145)$$

其中， $u = x, y$ ， \mathcal{J}_u 为 damping partition number。当不存在 y 方向色散时， $D_y = 0, D'_y = 0$ 时， $\epsilon_y = 0$ 。此时，需要考虑同步辐射光子导致 y 发射度不为零的效应，有

$$\epsilon_y = C_q \frac{\langle \beta_y \rangle}{2\mathcal{J}_y} \frac{\mathcal{I}_3}{\mathcal{I}_2} \quad (8.146)$$

其中， $\langle \beta_y \rangle$ 为 y 方向平均 betatron 函数。



注 当考虑临近共振或横向水平、垂直方向耦合时，以上结果不再成立。

注 考虑纵向同步振荡，则粒子能量相对于参考能量可写成 $\delta = \delta_{\max} \sin \omega_s t$ ，其中， ω_s 为同步振荡频率。由上面导出的同步辐射阻尼衰减率 $\alpha_{x,y,z}$ ，这个能量同步振荡振荡会给出对 $\mathcal{I}_{4x,4y}$ 的修正，从而有 $\Delta\alpha_{x,y,z}$

$$\frac{\Delta\alpha_z}{\alpha_z} = -\frac{\Delta\alpha_u}{\alpha_u} = \frac{\mathcal{I}_{6u}}{\mathcal{I}_2} \delta_{\max} \sin \omega_s t \quad (8.147)$$

相应地，也有对纵向同步振荡与横向 betatron 振荡振幅的修正

$$\frac{\Delta a_u}{a_{0,u}} = 4 \frac{\mathcal{I}_{6u} \delta_{\max}}{\tau_u \omega_s \mathcal{I}_2} \quad (8.148)$$

上面分析同步辐射效应对电子束团的影响时，引入了同步辐射积分。对电子储存环动力学的讨论，有时候还用阻尼配分数 (damping partition number) 描述，定义如下：

定义 8.10. 同步辐射阻尼配分数 (damping partition number)

定义三个方向的 damping partition number $\mathcal{J}_{x,y,z}$ 为

$$\mathcal{J}_x = 1 - \frac{\mathcal{I}_{4x}}{\mathcal{I}_2} \quad (8.149)$$

$$\mathcal{J}_y = 1 - \frac{\mathcal{I}_{4y}}{\mathcal{I}_2} \quad (8.150)$$

$$\mathcal{J}_z = 2 + \frac{\mathcal{I}_{4x} + \mathcal{I}_{4y}}{\mathcal{I}_2} \quad (8.151)$$

注 不要与作用量符号 $J_{x,y,z}$ 或贝塞尔函数 \mathcal{J}_n 搞混。

注 有时表示成 $\mathcal{D}_{x,y} = \mathcal{I}_{4x,4y}/\mathcal{I}_2$ 。



对均匀弯转磁铁形成的储存环，即 $C = 2\pi R = 2\pi\rho$ ，又称 isomagnetic ring。当弯转磁铁为 separate-function magnet 时，有 $\mathcal{J}_x \rightarrow 1, \mathcal{J}_y \rightarrow 1, \mathcal{J}_z \rightarrow 2$ 。

在加速器物理中，只有少数结果可以称上“定理”。下面的 Robinson 求和规则为其中之一。

定理 8.5. Robinson sum rule

又称 Robinson 定理。在三个特征维度中，由 damping partition number $\mathcal{J}_{x,y,z}$ 的定义

与辐射积分，恒有以下求和关系

$$\sum_i \mathcal{J}_i = 4 \quad (8.152)$$

其中， $i = x, y, z$ 。Robinson sum rule 指出，三个方向的 damping partition number $\mathcal{J}_{x,y,z}$ 从一个常数分配，一个方向衰减率大了，其它方向衰减率就减小。

注 以上结果还可写成

$$\alpha_e + \alpha_v + \alpha_h = 2 \frac{U_{s0}}{T_{rev} E_s} \quad (8.153)$$

求和仅与 参考粒子的 单圈辐射能量损失 U_{s0} 、参考粒子的 能量 E_s 、参考粒子的 绕行周期 T_{rev} 有关。与环的磁聚焦结构的细节设计差异无关。



笔记 通过巧妙设计储存环，能针对粒子运动的三个方向 x, y, z 调整、赋予合适的辐射阻尼率，从而优化整体电子束流动力学。比如，可以适当调整 x 方向的配分数，使横向 x 方向的阻尼率比其它方向大，从而得到更低发射度的储存环。



笔记 此定理结果由当时在英国剑桥 Cambridge Electron Accelerator (CEA) 的 K.W. Robinson 在 1956-1958 年间给出。差不多同一时期，Orlov 与 Tarasov 在 1958 也得到此结果，并且用的假设更少。此定理有时又称 Robinson-Orlov-Tarasov 定理。参考 Richard Talman and Alexander W. Chao, Orlov, Tarasov, and the Robinson sum rule, Phys. Rev. STAB 12, 084901 (2009). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.12.084901>.



练习 8.19 说明什么是 Robinson sum rule，给一个不需要太严谨的证明。



解 参考 R. Talman USPAS lecture.



笔记 上面介绍同步辐射效应在三个方向的阻尼率 $\alpha_h, \alpha_v, \alpha_e$ 时，对横向 x 方向的分析特别小心，得到的结果有

$$\alpha_h = \frac{U_{s0}}{2T_{rev} E_s} (1 - \mathcal{D}) \quad (8.154)$$

在多数情况下，当弯转磁铁为 separate-function magnet 时，有 $\mathcal{D} \ll 1$ 。直观地想，如果不要太吹毛求疵，即忽略了 \mathcal{D} 的贡献，以此方式得到的阻尼率取值似乎没有相差太多。有些读者或许纳闷，如果不是追求非常准确的计算，对横向 x 方向的分析似乎多此一举？其实，对横向 x 方向的分析应视为在 Robinson 求和规则之下，就是说三个方向的阻尼率之和应满足 Robinson 求和规则为前提。如果横向 x 方向的分析太粗糙，那么三个方向的阻尼率之和将不满足 Robinson 求和规则，也就可能存在自洽问题。由此可见，Robinson 求和规则在以上同步辐射阻尼效应分析中扮演的重要角色。也是因为 Robinson 求和规则，我们才更有信心，提升对储存环磁聚焦结构设计的视角，意识到可以通过巧妙设计储存环，针对粒子运动的三个方向 x, y, z 调整同步辐射阻尼率，从而优化整体电子束流动力学。比如，

可以适当调整 x 方向的配分数，使横向 x 方向的阻尼率比其它方向大，从而得到更低发射度的储存环。平时简单、粗略的估算或许忽略 \mathcal{D} 不是太严重，也不再是需要纠结的问题了。

当储存环中存在组合功能磁铁时，可能有 $\mathcal{D} \approx 1$ 。于是， $\mathcal{J}_x \rightarrow 0, \mathcal{J}_y \rightarrow 1, \mathcal{J}_z \rightarrow 3$ 。也就是说，横向 x 方向的同步辐射阻尼率几乎为零， $\alpha_h \rightarrow 0$ 。这将使得粒子的横向运动很可能变得不稳定。如果不改变磁聚焦结构，则如何缓解此种情况？思路是试着改变同步辐射积分 \mathcal{I}_4 ，设法改变参考粒子能量，使产生能量偏差，然后将其推到色散段。可以先通过小幅改变储存环谐振腔的频率（谐波数维持不变），从而改变粒子绕行路径长，即

$$\frac{\Delta C}{C_0} = -h \frac{c}{C_0} \frac{\Delta f}{f_{\text{RF}}^2} = -\frac{\Delta f}{f_{\text{RF}}} \quad (8.155)$$

再通过动量紧缩因子

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{1}{\alpha_c} \frac{\Delta C}{C_0} = -\frac{1}{\alpha_c} \frac{\Delta f}{f_{\text{RF}}} \quad (8.156)$$

与横向 x 方向位置偏移关联起来后，有

$$x_D(s) = -\frac{D(s)}{\alpha_c} \frac{\Delta f}{f_{\text{RF}}} \quad (8.157)$$

根据谐振腔频率的偏移方向（偏大或偏小），将不同程度改变配分数。图 8.21 为示意图。

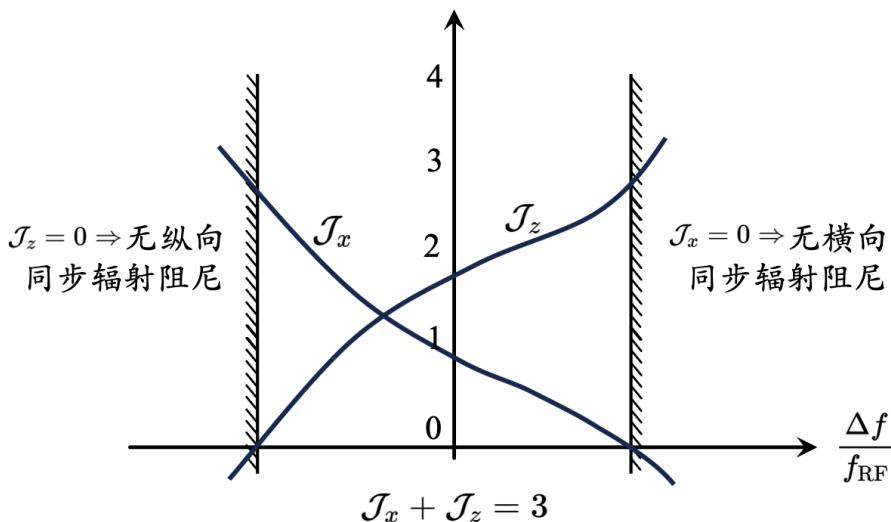


图 8.21：通过小幅调整谐振腔频率改变配分数，从而改变同步辐射阻尼率。图例修改自 K. Wille。

性质 8.2. 电子储存环辐射实用公式

单圈、平均电流 I_b 的束团，同步辐射能量有

$$U_0 [\text{keV}] = \frac{C_\gamma E^4}{\rho} = 26.5(E[\text{GeV}])^3 B[\text{T}] \quad (8.158)$$

其中， $C_\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} = 8.8460 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{GeV}^3}$ 。留意，此处储存环中的电流 I_b 定义为

定义 8.11. 储存环平均电流 I_b

定义为

$$I_b = |e|N_e f_{\text{rev}} \quad (8.159)$$

其中， N_e 为束团内电子个数， $f_{\text{rev}} = 1/T_{\text{rev}}$ 为束团绕行频率。 □

平均辐射功率有

$$P_{\text{tot}} [\text{W}] = 10^9 C_\gamma \frac{E^4 [\text{GeV}]}{\rho [\text{m}]} I_b [\text{A}] \quad (8.160)$$

光子临界能量有 $E_{\gamma c} = \frac{3}{2} \frac{\hbar c \gamma^3}{\rho} \equiv \hbar \omega_c$ ，或

$$E_{\gamma c} [\text{keV}] = 2.218 \frac{E [\text{GeV}]^3}{\rho [\text{m}]} = 0.665 E^2 [\text{GeV}] B [\text{T}] \quad (8.161) \quad \square$$

结束本节前，以下整理几个在电子储存环中常见的几个时间尺度。其中，量子寿命时间与自旋极化时间与同步辐射的量子效应有关，将在下一节介绍。光子辐射的形成时间在 §4.5 介绍过。

定律 8.2. 电子储存环的几个时间尺度

$$\tau_{x,y,z}^{(q)} \gg \tau_{\text{pol}} \gg \tau_{x,y,z} \gg \frac{2\pi}{\omega_s} \gg T_0 \gg \frac{2\pi}{\omega_{\beta_x, \beta_y}} \gg t_1 \gg \frac{\rho}{c\gamma} \quad (8.162)$$

其中，

- $\tau_{x,y,z}^{(q)}$ 为束团量子寿命时间 (quantum lifetime)
- τ_{pol} 为自旋极化时间 (spin polarization)
- $\tau_{x,y,z}$ 为同步辐射阻尼时间
- $T_0 = T_{\text{rev}}$ 为电子绕行储存环周期
- $2\pi/\omega_s$ 为纵向同步振荡时间
- $2\pi/\omega_{\beta_x, \beta_y}$ 为横向 betatron 振荡时间
- t_1 为临近两次辐射光子的时间间隔
- $\frac{\rho}{c\gamma}$ 为光子发射形成时间 (formation time)^a

^a这个时间指的是，对于绕行的电子，需要在弯转段中花大约 $\frac{\rho}{c\gamma}$ 时间，才能形成一个完整的辐射脉冲。或者说，绕行的电子需要走大约 $\frac{\rho}{\gamma}$ 的弯转距离，才能形成一个完整的辐射脉冲。形成一个完整的辐射脉冲不是瞬时的，需要有限时间。从量子力学的角度看，从一个虚光子 (virtual photon) 形成一个真实光子 (real photon) 需要大约 $\frac{\rho}{c\gamma}$ 时间。 □

 **练习 8.20** 自行查阅相关文献，试着根据同步辐射储存环，援引或估算以上定律里的时间尺度的大致数值。 ■

8.3.4 讨论：阻尼是一种束团冷却效应

前面介绍过，在一保守哈密顿系统中，束团发射度本身为守恒量。同步辐射效应在分析的系统中应视为耗散效应，即辐射阻尼将导致系统不再为严格的保守哈密顿系统。在粒子加速器中，有时候当束团发射度比设计预期高时，就需要打破 Liouville 定理，想一些办法使发射度降低，称冷却 (cooling)。相对于电子，冷却机制在重离子中更为普遍，因为重离子不容易产生同步辐射。一些常见的冷却机制有：

- 电子冷却 (electron cooling): 电子冷却常应用在离子储存环，其中低能电子束被用于冷却环绕的高能离子束。通过库仑相互作用，电子将能量/动量转移给离子，降低离子束的速度偏差 (即能散)，从而降低离子束的温度。这种冷却机制对于保持储存环中高能离子束的稳定性和寿命至关重要。电子冷却在 1966 年由俄罗斯西伯利亚核物理研究所 (BINP)²⁴ 的加速器物理学家 Gersh Budker 提出，并在 1974 年经实验验证。对电子冷却感兴趣的读者，可参考综述论文 V.V. Parkhomchuk and A.N. Skrinsky, Electron cooling: physics and prospective applications, Rep. Prog. Phys. **54**, 919 (1991). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0034-4885/54/7/001/pdf>。
- 随机冷却 (stochastic cooling): 随机冷却是粒子加速器中采用的一种技术，用于减小带电粒子束的速度分布或温度。在这种方法中，将射频信号应用于粒子束，然后检测待冷却的粒子束团的一些参数。通过使用电子学反馈系统，有选择性地移除束团中动量偏移较多的粒子，有效减小了束团的动量分布，能提高对撞机的整体效能与稳定性。随机冷却在 1970 至 1980 年间，由 CERN 加速器物理学家 Simon van der Meer²⁵ 提出并实现。对随机冷却感兴趣的读者，可参考原始论文 S. van der Meer, Stochastic cooling theory and device, Workshop on Producing High-luminosity High-energy Proton-Antiproton Collisions, Berkeley, CA, pp.73-77 (1978). https://cds.cern.ch/record/133586/files/van_der_Meer.pdf 或综述论文 John Marriner, Stochastic cooling overview, Nucl. Instru. Methods A **532**, 11-18 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.nima.2004.06.025>。
- 激光冷却 (laser cooling): 激光冷却常应用于加速器储存环或粒子俘获 (particle trapping) 实验，用于降低离子或中性原子的温度。通过使用频率精心调谐的激光束，粒子吸收并重新发射光子，导致动能/动量净损失。激光冷却还用于精密量测 (precision measurement) 和量子信息 (quantum information) 等领域。首次应用在 Heidelberg TSR 加速器冷却 $^7\text{Li}^+$ ，可参考 S. Schroder et al., First laser cooling of relativistic ions in a storage ring, Phys. Rev. Lett. **64**, 2901 (1990). <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.64.2901>。对粒子俘获应用感兴趣的读者可参考 William D. Phillips, Laser cooling and trapping of neutral atoms, Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998). <https://journals.aps.org/rmp/pdf/10.1103/RevModPhys.70.721>。
- 相干电子冷却 (coherent electron cooling, CeC): 2009 年提出的一种新的冷却机制，能

²⁴在当年，核物理研究所为 INP (Institute of Nuclear Physics)，在 1977 年后，改名为 Budker Institute of Nuclear Physics(BINP)。

²⁵S. van der Meer 与 Carlo Rubbia 由于发现弱交互作用的 W、Z 玻色子在 1984 年获得诺贝尔物理学奖。

比传统电子冷却提高高能离子束的冷却效率。在传统电子冷却中，使用的电子与环绕的离子发生相互作用，导致冷却为随机的。相比之下，CeC 采用与离子束同步的几乎单能且微群聚电子束，电子束处于相干态，有明确定义的相位关系，用来诱发集体相互作用，从而冷却离子。此种冷却技术对于在储存环中冷却高能离子束特别有益。CeC 代表加速器物理领域的一项重大进展，相较于传统方法具有更强的冷却效率。对 CeC 感兴趣的读者，可参考原始论文 Vladimir N. Litvinenko and Yaroslav S. Derbenev, Coherent Electron Cooling, Phys. Rev. Lett. **102**, 114801 (2009). <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.102.114801> 及其评论。



笔记 以上仅给出简短介绍，对加速器中粒子束冷却感兴趣的读者，可参考 Andrew M. Sessler, The Cooling of Particle Beams, LBL-36302/UC-414 (1994). <https://www.osti.gov/servlets/purl/10107696>。

8.4 同步辐射量子效应

前一节介绍了同步辐射阻尼效应，为一种天然的、经典力学的阻尼效应，同时发生在纵向与横向。“阻尼”有助于“稳定”束团，使电子束团能在储存环加速器中更稳定地绕行着。这个美好的、天然的效应如果无限制发展，则束团的横纵向发射度将完美趋近于零，即 $\epsilon_{x,y,z}(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ 。但其实，同步辐射的单电子动力学效应除了经典力学的辐射阻尼效应外，还有量子力学的激发效应，称量子激发 (quantum excitation)。第 4 章介绍过，同步辐射过程本质上是量子力学过程，电子辐射出光子存在随机性，单个频率的光子能量为 $hf = \hbar\omega$ 。正是因为这个量子效应，才阻止辐射阻尼效应免于无止尽发展，使电子束发射度、束长、能散为有限值而不致于衰减为零。

以下我们将讨论存在一阻尼衰减机制的情况下，考虑随机激发时，束团运动的统计特性。简单起见，考虑发生量子激发效应前，粒子为参考粒子， $x = y = 0, x' = y' = 0, z = 0, \delta = 0$ 。

回顾一下，考虑电子同步辐射储存环，仅考虑弯转磁铁，忽略储存环中存在波荡器的情况，即忽略波荡器辐射效应，由第 4 章，有

$$\dot{n} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_s}{E_{\gamma c}}, \quad \langle E_\gamma^2 \rangle = \frac{11}{27} E_{\gamma c}^2, \quad E_{\gamma c} = \frac{3ch\gamma^3}{4\pi|\rho|} = \frac{3m_e c^2 \lambda_{\text{Comp}} \gamma^3}{4\pi|\rho|} \quad (8.163)$$

有时候， \dot{n} 又写成 \dot{N}_{ph} 。

其中， $h = 6.6262 \times 10^{-34}$ J·sec 为普朗克常数， $\lambda_{\text{Comp}} \approx \frac{h}{(m_e c)} = 2.426 \times 10^{-12}$ m 为康普顿波长， $E_{\gamma c} = \hbar\omega_c$ 为光子临界能量。

证明 此处简短推导上面结果。令辐射光子能量为 E_γ ，由 §4.4.5 知，

$$\dot{n}_s = \frac{P_s}{E_{\gamma c}} \int_0^\infty \frac{S_s(E_\gamma/E_{\gamma c})}{E_\gamma/E_{\gamma c}} d(E_\gamma/E_{\gamma c}) = \frac{P_s}{E_{\gamma c}} \frac{15\sqrt{3}}{8} \quad (8.164)$$

平均光子能量

$$\langle E_{\gamma c} \rangle = \frac{P_s}{\dot{n}_s} = \frac{8\sqrt{3}}{45} E_{\gamma c} \quad (8.165)$$

光子能量方差有

$$\langle E_\gamma^2 \rangle = \frac{1}{\dot{n}_s} \frac{P_s}{E_{\gamma c}} \int_0^\infty E_\gamma^2 \frac{S_s(E_\gamma/E_{\gamma c})}{E_\gamma/E_{\gamma c}} d(E_\gamma/E_{\gamma c}) = \frac{22}{54} E_{\gamma c}^2 \quad (8.166)$$

其中，

$$S_s(x) \equiv \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} x \int_x^\infty K_{5/3}(z') dz' \quad (8.167)$$

为归一化辐射功率频谱函数， $\frac{dP}{d\omega} = \frac{P_s}{\omega_c} S_s\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$ ，细节可参考此讲义 §4.4.2。

在接续介绍同步辐射量子激发效应之前，先定性给出“量子激发”的定义与一个重要数学定理。

定义 8.12. 量子激发 $\propto \hbar$

除了经典的同步辐射阻尼效应之外，电子弯转过程产生同步辐射，同步辐射过程为电子放出光子的随机（统计）、量子力学过程。因此，电子束团参数存在量子涨落，相应的电子束团在平衡时的特性称量子激发效应（quantum excitation）。□

定理 8.6. Campbell 定理

假设在 $t = 0$ 时，一脉冲激发 $a\delta(t)$ 导致的粒子阻尼振荡为

$$\blacksquare(t) = ae^{-\alpha t} \cos(\omega_r t) \quad (8.168)$$

则，在每单位时间内独立且随机发生 n 次上述脉冲激发的情况下，假设脉冲的方差为 $\langle a^2 \rangle$ ，则在平衡时导致的粒子阻尼振荡振幅的方差有

$$\langle \blacksquare^2 \rangle = \dot{n} \langle a^2 \rangle g^2 = \frac{\dot{n} \langle a^2 \rangle}{4\alpha} \quad (8.169)$$

其中，

$$g^2 = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \blacksquare^2(t) dt = \int_0^\infty e^{-2\alpha t} \cos^2(\omega_r t) dt \approx \frac{1}{4\alpha} \quad (8.170)$$

这里假设阻尼率远小于系统振荡频率，即 $\alpha \ll \omega_r$ 。又称 Campbell-Hardy 定理。

 **笔记** 从以上结果看，粒子阻尼振荡振幅的方差表示式是符合物理直观的：正比于单位时间随机脉冲的频次 \dot{n} 与脉冲振幅方差 $\langle a^2 \rangle$ ，反比于阻尼强度 α 。

证明 参考 K. W. Robinson, Radiation Effects in Circular Electron Accelerators, Phys. Rev. **111**, 373 (1958). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.111.373> 与 M. Sands, Synchrotron Oscillations Induced by Radiation Fluctuations, Phys. Rev. **97**, 470 (1955). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.97.470> □



笔记 总结一下下面的分析套路。

- 纵向 \Rightarrow 已知 $\langle E_\gamma \rangle, \langle E_\gamma^2 \rangle \Rightarrow$ 利用 Campbell 定理 \Rightarrow 平衡时能散 $\sigma_{\delta 0} \Rightarrow$ 平衡时束长 σ_{z0} 。
- 横向 $x \Rightarrow$ 已知 $\delta E_\gamma \rightarrow (\delta x', \delta x) \Rightarrow$ 利用 Campbell 定理 \Rightarrow 平衡时发射度 ϵ_{x0} 。
- 横向 $y \Rightarrow$ 已知 $\delta E_\gamma \rightarrow \delta y' \Rightarrow$ 利用 Campbell 定理 \Rightarrow 平衡时发射度 ϵ_{y0} 。

8.4.1 纵向

定性来看，图 8.22 给出纵向同步辐射量子激发效应示意图。

定量分析，从单电子同步辐射发出的光子通量（单位时间内发出的光子数）开始，有

$$\dot{n} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_s}{E_{\gamma c}} \quad (8.171)$$

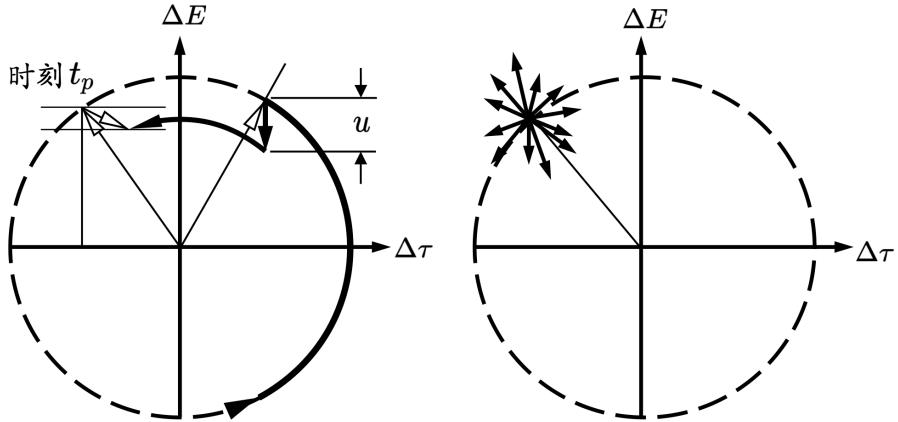


图 8.22: 纵向同步辐射量子激发效应示意图。同步辐射量子激发效应同样发生在三个维度相空间中, 图示为纵向机制。左图中, 在第一象限处, 某一时刻发生辐射, 粒子能量受到扰动后, 在稍后时刻 t_p 时, 粒子在相空间同步振荡的振幅与相位都因此些微改变。当考虑多个光子辐射、且彼此为独立事件时, 可通过 Campbell 定理分析。

其中, $E_{\gamma c} = \frac{3}{2} \frac{\hbar c \gamma^3}{\rho} \equiv \hbar \omega_c$ 为同步辐射临界能量 (critical photon energy), $P_s = \frac{c C_\gamma E^4}{2\pi \rho^2}$ 为单电子瞬时辐射功率, $C_\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} = 8.8460 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{GeV}^3}$ 。

量子激发效应具随机性, 导致电子产生同步辐射的光子能量存在一平均值、方差, 有

$$\text{光子平均能量 } \langle E_\gamma \rangle = \frac{8}{15\sqrt{3}} E_{\gamma c} \quad (8.172)$$

$$\text{光子能量方差 } \langle E_\gamma^2 \rangle = \frac{11}{27} E_{\gamma c}^2 \quad (8.173)$$

对远离共振条件下, 忽略集体效应等, 电子储存环达平衡时, 束团参数 σ_z, σ_δ 与 $\dot{n} \langle E_\gamma^2 \rangle$ 相关, 有

$$\dot{n} \langle E_\gamma^2 \rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} E_{\gamma c} P_s \quad (8.174)$$

电子束团经过一段 (包含转弯段的) 传输距离之后, 量子激发效应会导致非相干能散增加与非相干横向发射度增加, 利用 Campbell 定理, 此处的纵向阻尼率有 $\alpha_\epsilon = \frac{U_{s0}}{2T_{\text{rev}} E_s} \left(2 + \frac{\mathcal{I}_4}{\mathcal{I}_2} \right)$, 瞬时辐射功率 $P_s = \frac{2c r_e m_e c^2 \gamma^4}{3\rho^2} = \frac{2c^3 r_e e^2 E_s^2 B^2}{3(m_e c^2)^3}$ 、单位时间内发出的光子数 $\dot{n} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_s}{E_{\gamma c}}$, 则平衡时的粒子纵向能散 (即, 纵向能量偏差 δ 坐标的阻尼振荡振幅的方差) 有

$$\sigma_{\delta 0}^2 = \frac{\langle (\Delta E)^2 \rangle}{E_e^2} = \frac{\langle \dot{n} \langle E_\gamma^2 \rangle \rangle}{4\alpha_\epsilon E_e^2} = \frac{55\sqrt{3}}{288} \frac{1}{E_e^2 \alpha_\epsilon c T_{\text{rev}}} \oint P_s E_{\gamma c} ds = \frac{55\sqrt{3}}{96} \frac{\lambda_{\text{Comp}} \gamma^2 \mathcal{I}_3}{2\pi (2\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_4)} \quad (8.175)$$

细节推导略。这里引入了上面定义过的同步辐射积分 \mathcal{I}_3

$$\mathcal{I}_3 = \oint \frac{1}{|\rho|^3} ds \quad (8.176)$$

可以看到, 在直线传输段 $\mathcal{I}_3 = 0$, 不会引起能散增加。

定义 $C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \approx 3.832 \times 10^{-13} \text{ m}$, 则在平衡时的束团能散可写成以下较简洁的形式

$$\sigma_{\delta 0}^2 = C_q \gamma^2 \frac{\mathcal{I}_3}{\mathcal{J}_z \mathcal{I}_2} \quad (8.177)$$

结合前面 §8.3.1 学过的同步辐射纵向阻尼效应，可以建立束团能散的演化方程如下：

$$\frac{d\sigma_\delta^2}{dt} = -\frac{2}{\tau_\epsilon}\sigma_\delta^2 + C_q\gamma^2 \frac{2}{\mathcal{J}_z\tau_\epsilon} \frac{\mathcal{I}_3}{\mathcal{I}_2} \quad (8.178)$$

等式右边第一项为阻尼效应，第二项为量子激发效应。平衡时， $d/dt = 0$ ，有 $\sigma_\delta \rightarrow \sigma_{\delta0}$ 。其解可写成

$$\sigma_\delta^2(t) = \sigma_\delta^2(0)e^{-2t/\tau_\epsilon} + \sigma_{\delta0}^2 \left(1 - e^{-2t/\tau_\epsilon}\right) \quad (8.179)$$

其中， $\sigma_{\delta0}$ 为平衡时的束团能散。留意， $\sigma_\delta^2(0) \neq \sigma_{\delta0}^2$ 。



笔记 先阻尼，再激发，最后达平衡。分析方式：利用 Campbell 定理，在经典电动力学结果基础上加上随机效应。将两个分别考虑的效应“拼凑”起来，构造一个演化方程的思维很有意思，值得琢磨。

纵向的量子“激发”效应使束团能散增加，或者说阻止束团无限制地阻尼“冷却”。与此同时，束团在加速器的纵向同步振荡将使束团长度由于能散改变而束长也跟着改变。当同步辐射阻尼效应与量子激发效应互相抗衡达平衡时，有

$$\sigma_{z0} = \frac{\alpha_\epsilon}{c\omega_s} \sigma_{\delta0} = \frac{1}{\omega_{\text{rev}}} \sqrt{-\frac{2\pi E_e \eta}{hqV_{\text{RF}} \cos \phi_s}} \sigma_\delta \quad (8.180)$$

对电子， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ C， $qV_{\text{RF}} > 0$ 。



笔记 上面介绍过，单圈、单电子同步辐射过程发出的光子数可以通过 \dot{n} 估算，有

$$n = \dot{n} \times \frac{2\pi\rho}{c} = \frac{5\pi}{\sqrt{3}} \alpha_f \gamma \approx \frac{\gamma}{15} \quad (8.181)$$

其中， α_f 为精细结构常数， $\alpha_f = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137.036}$ 。

已知同步辐射放出光子过程中，光子张开的角度约为 $2/\gamma$ ，则单圈、单电子经历弯转过程的同时且发出同步辐射过程涉及的角度为 $\sim \frac{\gamma}{15} \times \frac{2}{\gamma} = \frac{2}{15}$ ，为一常数！并且，仅占总弯转角度 2π 的 $\frac{2}{15}/2\pi \approx 2\%$ 。由此可知，在电子弯转的多数时刻，电子仅弯转，而没有发出光子。是不是与脑海里的经典图像相差甚大？注意，这里的 2% 是辐射光子数，不是辐射能量或功率。尽管如此，以上这套半经典半量子的分析在电子储存环束流动力学中还是很有效的。

注 在电子储存环中，当系统达平衡时，束团能散由同步辐射阻尼与量子激发决定。改变 RF 腔加速电压 V_{RF} 会影响束团长度，但不影响束团能散。



笔记 如果计算单电子经历弯转过程的完整脉冲形成时间 $\tau_f \sim \rho/\gamma c$ ，则其同步辐射过程发出的光子数有

$$n = \dot{n} \times \frac{\rho}{\gamma c} \approx \alpha_f \quad (8.182)$$

其中，又是 $\alpha_f = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137.036}$ 。此式表征当电子经历 τ_f 弯转时间或 ℓ_f 弯转长度，将发出约 $\alpha_f \approx 1/137 \approx 0.0073$ 个光子。

8.4.2 横向: x

类似于前面对辐射阻尼效应的分析，电子辐射放出光子过程引起额外的 betatron 振荡，在横向 x 方向有

$$\delta x_\beta = -\delta x_\epsilon = D_x \frac{\delta E_\gamma}{E}, \quad \delta x'_\beta = D'_x \frac{\delta E_\gamma}{E} \quad (8.183)$$

注意，这里假设放出光子前 $x'_\beta = 0$ 。因此，对单粒子横向几何发射度增长有²⁶

$$\begin{aligned} \delta I_x &= \frac{\delta \epsilon_x}{2} = \frac{1}{2} (\gamma_x \delta x_\beta^2 + 2\alpha_x \delta x_\beta \delta x'_\beta + \beta_x \delta x'^2_\beta) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\gamma_x D_x^2 + 2\alpha_x D_x D'_x + \beta_x D'^2_x) \left(\frac{\delta E_\gamma}{E} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{H}_x \left(\frac{\delta E_\gamma}{E} \right)^2 \end{aligned} \quad (8.184)$$

思考一下，会发现 $\delta \epsilon_x$ 是二阶小量。

这里可以看到 §7.10 最后引入 \mathcal{H} 函数的动机与物理图像： \mathcal{H} 关联了纵向能量偏差方差与导致的横向几何发射度改变。

利用 Campbell 定理²⁷，平衡时束团整体发射度有

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{cT_{\text{rev}}} \oint \frac{\dot{n} \mathcal{H}_x \left(\frac{\delta E_\gamma}{E} \right)^2}{4\alpha_x} ds = \frac{1}{cT_{\text{rev}}} \oint \frac{\mathcal{H}_x \dot{n} (\delta E_\gamma)^2}{4\alpha_x E_e^2} ds \\ &= \frac{55\sqrt{3}}{288} \frac{1}{cE_e^2 \alpha_x T_{\text{rev}}} \oint P_s (\gamma_x D_x^2 + 2\alpha_x D_x D'_x + \beta_x D'^2_x) E_{\gamma c} ds \\ &= \frac{55\sqrt{3}}{96} \frac{\lambda_{\text{Comp}} \gamma^2}{2\pi (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_4)} \oint \frac{\gamma_x D_x^2 + 2\alpha_x D_x D'_x + \beta_x D'^2_x}{|\rho|^3} ds \end{aligned} \quad (8.185)$$

通过引入上面定义过的同步辐射积分 \mathcal{I}_5

$$\mathcal{I}_5 = \oint \frac{\gamma_x D_x^2 + 2\alpha_x D_x D'_x + \beta_x D'^2_x}{|\rho|^3} ds = \oint \frac{\mathcal{H}}{|\rho|^3} ds \quad (8.186)$$

在平衡时的束团横向几何发射度可写成以下较简洁的形式

$$\epsilon_{x0} = \frac{55\sqrt{3}}{96} \frac{\hbar}{m_e c} \gamma^2 \frac{\mathcal{I}_5}{\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_4} = \frac{55\sqrt{3}}{96} \frac{\lambda_{\text{Comp}} \gamma^2}{2\pi} \frac{\mathcal{I}_5}{\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_4} = C_q \gamma^2 \frac{\mathcal{I}_5}{\mathcal{J}_x \mathcal{I}_2} \quad (8.187)$$

此结果在 §7.10 第一次介绍 \mathcal{H} 函数时曾经给过。

²⁶已知 $\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2$ 为不变量，在 §8.3.3 分析辐射阻尼效应时，用的是

$$\delta I_x = \frac{\delta \epsilon_x}{2} = \frac{1}{2} 2 [\gamma_x x_\beta \delta x_\beta + \alpha_x (x'_\beta \delta x_\beta + x_\beta \delta x'_\beta) + \beta_x x'_\beta \delta x'_\beta]$$

与这里用的则是

$$\delta I_x = \frac{\delta \epsilon_x}{2} = \frac{1}{2} (\gamma_x \delta x_\beta^2 + 2\alpha_x \delta x_\beta \delta x'_\beta + \beta_x \delta x'^2_\beta)$$

明显前者为一阶小量，后者为二阶小量。留意，分析同步辐射量子效应的一开始，我们提到了考虑发生量子激发效应前，粒子为参考粒子，即 $x = y = z = 0, x' = y' = \delta = 0$ 。

²⁷留意，由于 ϵ_x 的概念已是方差，因此不是算 $\langle \epsilon_x^2 \rangle$ 。

类似地，结合前面 §8.3.3 学过的同步辐射横向阻尼效应，可以建立束团发射度的演化方程如下：

$$\frac{d\epsilon_x}{dt} = -\frac{2}{\tau_x}\epsilon_x + C_q\gamma^2 \frac{2}{\mathcal{J}_x\tau_x}\frac{\mathcal{I}_5}{\mathcal{I}_2} \quad (8.188)$$

其解可写成

$$\epsilon_x(t) = \epsilon_x(0)e^{-2t/\tau_x} + \epsilon_{x0} \left(1 - e^{-2t/\tau_x}\right) \quad (8.189)$$

其中， ϵ_{x0} 为平衡时的束团发射度， $\epsilon_x(0)$ 为束团的初始发射度。留意， $\epsilon_{x0} \neq \epsilon_x(0)$ 。



笔记 回忆一下，上一章介绍的 Hill 方程 $x''(s) + K(s)x(s) = 0$ 时，没有考虑同步辐射阻尼效应。如果将此效应纳入考虑，一般将 $\prime = d/ds$ 写为 $\cdot = d/dt$ ，则 Hill 方程应为

$$\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau_x}\dot{x}(t) + c^2K(t)x(t) = 0 \quad (8.190)$$

其解有

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau_x}}\sqrt{\epsilon_x\beta_x(t)}\cos[\psi(t) - \psi_0] \quad (8.191)$$

这里假设横向 betatron 振荡比同步辐射阻尼率快得多。

8.4.3 横向：y

定性来看，图 8.23 给出横向 y 方向同步辐射量子激发效应示意图。

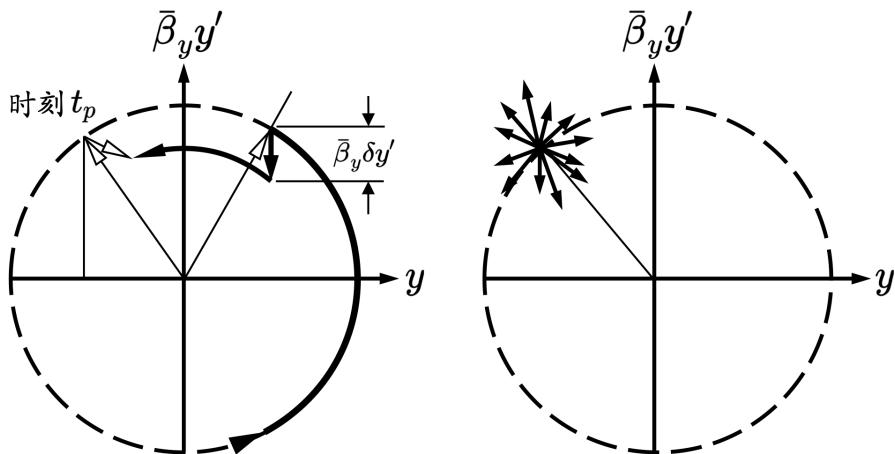


图 8.23：横向 y 方向同步辐射量子激发效应示意图。同步辐射量子激发效应同样发生在三个维度相空间中。左图中，在第一象限处，某一时刻发生辐射，粒子 y' 收到扰动后，在稍后时刻 t_p 时，粒子在相空间 betatron 振荡的振幅与相位都因此些微改变。当考虑多个光子辐射、且彼此为独立事件时，可通过 Campbell 定理分析。

在横向 y 方向，虽然没有色散，但是，辐射过程的有限张角 $\sim 1/\gamma$ 的事实仍可能导致额外的束团 y 方向发射度增加，参考图 8.24。

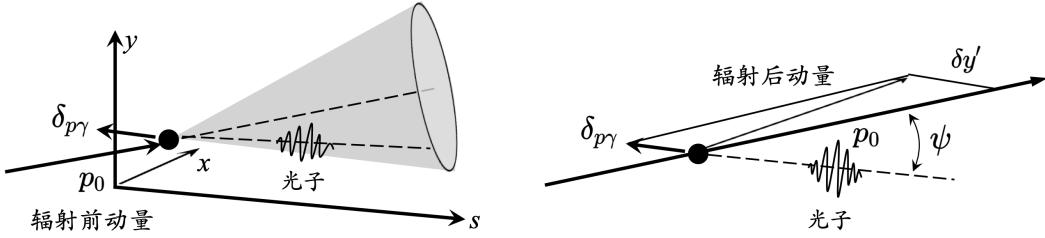


图 8.24: 横向 y 方向同步辐射量子激发效应，虽然 y 方向没有色散，仍将导致 y 方向发射度增加。

考虑电子在 ψ 方向辐射一个光子后，电子获得一 y 方向散角

$$\delta y' = -\frac{\delta p_{\gamma y}}{p_0} = -\frac{\hbar\omega\psi}{E_e} \quad (8.192)$$

单粒子、单次辐射引起的发射度改变可一阶估算

$$I_y = \frac{\delta\epsilon_y}{2} = \beta_y (\delta y')^2 \quad (8.193)$$

量子激发效应导致的单粒子横向 y 方向发射度增加，利用 Campbell 定理，平衡时束团整体横向 y 方向发射度有

$$\epsilon_y = \frac{\beta_y \dot{n} \langle \delta y'^2 \rangle}{4\alpha_v} \quad (8.194)$$

对均匀弯转磁铁形成的储存环 (isomagnetic ring)，有

$$\dot{n} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_s}{E_{\gamma c}} = \frac{5\sqrt{3}}{12} \frac{e^2\gamma}{\epsilon_0 h \rho}, \quad \alpha_v = \frac{U_s}{2T_0 E_e} \quad (8.195)$$

同步辐射的横向 y 方向角散可估算为²⁸

$$\langle \delta y'^2 \rangle = \frac{8}{27} \frac{(\hbar\omega_c)^2}{\gamma^2 E_e^2} = \frac{1}{6\pi^2} \frac{\lambda_{\text{Comp}}^2 \gamma^2}{\rho^2} \quad (8.197)$$

可得同步辐射量子激发效应导致的横向 y 方向发射度为

$$\epsilon_{y0} = \frac{5\sqrt{3}}{12} \frac{h}{2\pi m_e c} \frac{\beta_y}{\rho} = \frac{5\sqrt{3}}{24\pi} \frac{\beta_y}{\rho} \lambda_{\text{Comp}} \quad (8.198)$$

其中， $\lambda_{\text{Comp}} \approx 2.426 \times 10^{-12}$ m。一般来说， $\beta_y \sim 10$ m， $\rho \sim 10$ m，在实际储存环加速器，束团横向 x 方向几何发射度约为 nm 数量级，而横向 y 方向的发射度大约是横向 x 方向发射度的 1%。按如上估算，有 $\epsilon_y \sim 10^{-13}$ m，比实际情况小得多。这是因为在实际情况下，横向 y 方向发射度主要不是由于同步辐射有限张角的贡献，而是由于磁铁摆放误差 (alignment error) 导致非零的横向 y 方向色散 D_y, D'_y 或是横向 xy 耦合、横纵向 yz 耦合导致。

²⁸计算 $(\delta y')^2$ 时，需要评估同步辐射角散，即 $\langle \psi^2 \rangle$ 。讲义 §4.4.3 没有细讲，此处简短说明。这里的系数 $8/27$ 可由如下估算

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\omega}{\omega_c} \gamma \psi \right)^2 \right\rangle &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d(\gamma\psi) \int_0^{\infty} F_s(\omega, \psi) (\omega/\omega_c)^2 \gamma^2 \psi^2 d(\omega/\omega_c) \\ &= \frac{5 \cdot 7 \cdot 23}{2^7 \cdot 3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\gamma^2 \psi^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^{11/2}} + \frac{33}{23} \frac{\gamma^4 \psi^4}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^{13/2}} \right) d(\gamma\psi) = \frac{8}{27} \end{aligned} \quad (8.196)$$

推导细节可参考 Albert Hofmann, The Physics of Synchrotron Radiation, Cambridge University Press (2004) 的 §5.5.2。

因此，对平面型电子储存环来说，其横向水平与垂直方向平衡时的发射度一般直接按如下形式量化

$$\epsilon_x = \frac{1}{1 + \kappa} \epsilon_{x0} \quad \epsilon_y = \frac{\kappa}{1 + \kappa} \epsilon_{x0} \quad (8.199)$$

其中，耦合系数 κ 表征 xy 方向耦合。

性质 8.3. 量子激发效应的一些结果

单电子同步辐射发出的光子通量(单位时间内发出的光子数)为

$$\dot{n}_s = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_\gamma}{E_{\gamma c}} \quad (8.200)$$

其中， $E_{\gamma c} = \frac{3}{2} \frac{\hbar c \gamma^3}{\rho} \equiv \hbar \omega_c$ 为同步辐射临界能量(critical photon energy)， $P_\gamma = \frac{c C_\gamma E^4}{2\pi \rho^2}$ 为单电子瞬时辐射功率， $C_\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} = 8.8460 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{GeV}^3}$ 。

量子激发效应导致电子产生同步辐射的光子能量存在一平均值、方差，有

$$\text{光子平均能量 } \langle E_\gamma \rangle = \frac{8}{15\sqrt{3}} E_{\gamma c} \quad (8.201)$$

$$\text{光子能量方差 } \langle E_\gamma^2 \rangle = \frac{11}{27} E_{\gamma c}^2 \quad (8.202)$$

对远离共振条件下，忽略集体效应等，电子储存环达平衡时，束团参数 σ_z, σ_δ 与 $\dot{n}_s \langle E_\gamma^2 \rangle$ 相关，有

$$\dot{n}_s \langle E_\gamma^2 \rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} E_{\gamma c} P_\gamma \quad (8.203)$$

电子束团经过一段(包含转弯段的)传输距离之后，量子激发效应会导致非相干能散增加与非相干横向发射度增加，增加量(不是平衡时的能散或发射度)分别有

$$\Delta \sigma_E^2 |_{\text{量子激发}} = \frac{55 \alpha_f (\hbar c)^2}{48\sqrt{3}} \gamma^7 \int_0^L |\kappa|^3 ds \quad (8.204)$$

$$\Delta \epsilon_u |_{\text{量子激发}} = \frac{55 r_e \hbar c}{24\sqrt{3} m c^2} \gamma^5 \int_0^L |\kappa_u|^3 \mathcal{H}_u ds \quad (8.205)$$

其中， $|\kappa| = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$ ， $\kappa_u = \kappa_{x,y} = 1/\rho_{x,y}$ ， $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.8179403 \times 10^{-15} \text{ m}$ 为电子经典半径， $\alpha_f = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137.036}$ 为精细结构常数(fine structure constant)， $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.054571817 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \approx 6.582119569 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$ 为约化的普朗克常数(reduced Planck constant)。利用 Campbell 定理，平衡时有

$$\begin{aligned} \sigma_{\delta 0}^2 &= C_q \gamma^2 \frac{\mathcal{I}_3}{\mathcal{J}_z \mathcal{I}_2} \\ \epsilon_{x0} &= C_q \gamma^2 \frac{\mathcal{I}_5}{\mathcal{J}_x \mathcal{I}_2} \\ \epsilon_{y0} &= \frac{5\sqrt{3}}{24\pi} \frac{\beta_y}{\rho} \lambda_{\text{Comp}} \end{aligned} \quad (8.206)$$

其中， $C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \approx 3.832 \times 10^{-13} \text{ m}$ 。

上一节与这一节分别介绍了同步辐射阻尼效应与量子激发效应。前者为经典力学效应，有时又称同步辐射的宏观效应(macro-effect)，后者为量子力学效应，有时又称同步

辐射的微观效应 (micro-effect)。



笔记 介绍量子激发效应时，应用了 Campbell 定理，该定理给出的结果为平衡时的能散、发射度等。有些教科书不采用 Campbell 定理，而是直接单独分析量子激发效应导致的能散增加量与发射度增加量，然后再与同步辐射阻尼效应结合，写出动态方程，最终求得平衡时的能散与发射度。殊途同归。



笔记 留意，这里给出了基于同步辐射阻尼与量子激发效应后，平衡时的电子束“自然”(几何) 发射度，有 $\epsilon_{x0} \propto \gamma^2$ 。对比电子直线加速器，忽略同步辐射效应，其“自然”(几何) 发射度随能量的定标关系有 $\epsilon_{x0} \propto 1/\gamma$ ，源于 §7.5 介绍的绝热阻尼效应。

前面已经定义过同步辐射积分。一般常见情况为平面型同步加速器储存环，因此同步辐射积分可以进一步化简。以下总结化简的同步辐射积分与辐射阻尼参考、平衡时的几何(自然) 束团发射度。

性质 8.4. 平面型储存环的同步辐射积分与一些实用公式

平面型储存环的同步辐射积分有

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \int \frac{D_x}{\rho} ds \\ \mathcal{I}_2 &= \int \frac{1}{\rho^2} ds \\ \mathcal{I}_3 &= \int \frac{1}{|\rho|^3} ds, \quad \mathcal{I}_{3a} = \int \frac{1}{\rho^3} ds \\ \mathcal{I}_4 &= \int \frac{D_x}{\rho} \left(\frac{1}{\rho^2} + 2K \right) ds, \quad K = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \\ \mathcal{I}_5 &= \int \frac{\mathcal{H}_x}{|\rho|^3} ds \\ \mathcal{D} &\equiv \frac{\mathcal{I}_4}{\mathcal{I}_2}\end{aligned}$$

其中，积分沿着全环。由于在直线段 $\rho \rightarrow \infty$ ，因此积分也可视为在弯转段。相关

的物理量有

$$\begin{aligned}\alpha_c &= \frac{\mathcal{I}_1}{2\pi R} \\ U_0 &= \frac{C_\gamma}{2\pi} E^4 \mathcal{I}_2 \\ \sigma_\delta^2 &= \left(\frac{\sigma_E}{E}\right)^2 = \frac{C_q \gamma^2 \mathcal{I}_3}{2\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_4} = \frac{C_q \gamma^2 \mathcal{I}_3}{2\mathcal{I}_2 \mathcal{J}_z} \\ \mathcal{J}_x &= 1 - \mathcal{D}, \quad \mathcal{J}_y = 1, \quad \mathcal{J}_z = 2 + \mathcal{D} \\ \alpha_h &= \frac{U_0}{2T_0 E} \mathcal{J}_x, \quad \tau_x = \frac{2E}{\mathcal{J}_x U_0} T_0 = \frac{C[m]\rho[m]}{13.2\mathcal{J}_x E^3[\text{GeV}]} [\text{ms}] \\ \alpha_v &= \frac{U_0}{2T_0 E} \mathcal{J}_y, \quad \tau_y = \frac{2E}{\mathcal{J}_y U_0} T_0 = \frac{C[m]\rho[m]}{13.2\mathcal{J}_y E^3[\text{GeV}]} [\text{ms}] \\ \alpha_\epsilon &= \frac{U_0}{2T_0 E} \mathcal{J}_z, \quad \tau_\epsilon = \frac{2E}{\mathcal{J}_z U_0} T_0 = \frac{C[m]\rho[m]}{13.2\mathcal{J}_z E^3[\text{GeV}]} [\text{ms}] \\ \epsilon_x &= \frac{C_q \gamma^2 \mathcal{I}_5}{\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_4} = \frac{C_q \gamma^2 \mathcal{I}_5}{\mathcal{I}_2 \mathcal{J}_x}\end{aligned}$$

□

 **练习 8.21** 对等磁环 (isomagnetic ring, 即 $R = \rho$) 而言, 以上许多结果能以解析公式表示。利用以上整理的性质, 给出对应的简化公式。

■

解

$$U_0 = \frac{C_\gamma E^4}{\rho}, \quad C_\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} = 8.8460 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{GeV}^3} \quad (8.207)$$

$$\langle P_\gamma \rangle = \frac{U_0}{T_0} = \frac{c C_\gamma E^4}{2\pi R \rho} \quad (8.208)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\alpha_c R}{\rho} \quad (8.209)$$

$$\alpha_\epsilon = \frac{U_0}{2T_0 E} (2 + \mathcal{D}) = \frac{\langle P_\gamma \rangle}{2E} \left(2 + \frac{\alpha_c R}{\rho} \right) \approx \frac{U_0}{ET_0} = \frac{\langle P_\gamma \rangle}{E} \quad (8.210)$$

$$\alpha_y = \frac{U_0}{2ET_0} = \frac{\langle P_\gamma \rangle}{2E} \quad (8.211)$$

$$\alpha_x = \frac{U_0}{2T_0 E} (1 - \mathcal{D}) = \frac{U_0}{2T_0 E} = \frac{\langle P_\gamma \rangle}{2E} \quad (8.212)$$

$$\tau_i = \frac{1}{\alpha_i} \Rightarrow \tau_i [\text{ms}] = 0.476 \frac{C[m]\rho^2[\text{m}]}{\mathcal{J}_i E^3[\text{GeV}]}, \quad i = x, y, \epsilon \quad (8.213)$$

$$\sigma_\delta^2 = \left(\frac{\sigma_E}{E}\right)^2 = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{\hbar\omega_c}{\mathcal{J}_z E} = C_q \frac{\gamma^2}{\mathcal{J}_z \rho} \quad \text{或} \quad \sigma_\delta = \frac{\sigma_E}{E} \approx (0.62 \times 10^{-6}) \frac{\gamma}{\sqrt{\mathcal{J}_z \rho [\text{m}]}} \quad (8.214)$$

$$\epsilon_x = C_q \frac{\gamma^2 \left\langle \frac{\mathcal{H}}{|\rho|^3} \right\rangle}{\mathcal{J}_x \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle} = C_q \frac{\gamma^2 \langle \mathcal{H} \rangle_{\text{弯铁}}}{\mathcal{J}_x \rho} \quad (8.215)$$

其中, $C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \approx 3.832 \times 10^{-13}$ m, $\langle \mathcal{H} \rangle_{\text{弯铁}} = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\text{弯铁}} \mathcal{H} ds \propto L\theta^2 \propto \rho\theta^3$ 。此外,

$$\mathcal{J}_x = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_{\text{弯铁}} D_x(1 + 2\rho^2 K) ds, & \text{扇形磁铁} \\ 1 - \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_{\text{弯铁}} D_x \cdot 2\rho^2 K ds, & \text{矩形磁铁} \end{cases} \quad (8.216)$$

其中, $K = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x}$ 。

由 $\epsilon_x = \frac{\sigma_{x\beta_x}^2}{\beta_x}$, 可与能散互相关联, 有

$$\frac{\sigma_{x\beta_x}^2}{\beta_x} = \langle \mathcal{H} \rangle_{\text{弯铁}} \frac{\mathcal{J}_z}{\mathcal{J}_x} \left(\frac{\sigma_E}{E} \right)^2 \quad (8.217)$$

其中, 横向尺寸 $\sigma_{x\beta_x}$ 为粒子 betatron 振荡贡献的部分。当色散不是太大时, $\sigma_{x\beta_x} \approx \sigma_x$ 。

对等磁环, 大约有 $\mathcal{J}_x \approx 1 - \mathcal{D}$, $\mathcal{J}_y \approx 1$, $\mathcal{J}_z \approx 2 + \mathcal{D}$ 。 ■

练习 8.22 基于讲义附录的同步辐射储存环参数, 估算平衡时的辐射阻尼时间、能散与横向发射度。 ■

解 其它参数请自行搜寻相关文献。 ■

到目前为止, 我们已经介绍了电子纵向动力学与同步辐射效应的基本内容。设想, 如果现在有一设计良好的储存环, 电子束在其中由于同步辐射阻尼与量子激发效应互相抗衡, 达平衡后, 横向有平衡态的发射度, 纵向有平衡时的束长、能散。再假设束团不受集体效应影响²⁹, 那么, 电子束是不是就永远无穷无尽地绕行、稳定运行? 答案是否定的。根据等离子体气体动理论 (kinetic theory of gases), 电子束在平衡时, 其束团相空间分布要求必须为高斯分布。高斯分布的“端部”(前端与后端) 是无穷无尽延伸的, 但是加速器的金属真空管壁的有限范围的, 势必在有限范围内“截断”束团, 因此, 无法达到完美的、严格的高斯分布, 也就不可能是完美的平衡态。此外, 粒子束团达平衡时, 是“动态”平衡, 而不是“静态”平衡。束团中的电子仍会振荡, 存在跑到束团分布的“端部”区域的概率。这种概率是一种量子效应, 用“量子寿命”评估带电粒子束团在加速器中的寿命。

定义 8.13. 量子寿命 (quantum lifetime)

忽略集体效应, 考虑同步辐射阻尼与量子激发效应, 由 Fokker-Planck 方程知, 电子束团平衡时六维相空间为高斯分布, 但是, 有限的真空管壁孔径或有限的能量接受范围无法容纳理想高斯分布的束团。虽然束团分布宏观上为静态 (stationary), 束团内个别粒子为快速振荡, 每个粒子都有撞上真空管壁的概率, 导致粒子逐渐丢失, 因此束团密度分布会随着时间逐渐减小, 以量子寿命 (quantum lifetime) 量化此过程, 记为 $\tau_{x,y,z}^{(q)}$ 。 □

²⁹多粒子效应或集体效应将在下一章之后介绍。

性质 8.5. 量子寿命估算公式

对电子储存环而言，束团的(纵向)量子寿命可估算如下

$$\tau_z^{(q)} = \frac{1}{2} \tau_u \frac{e^\xi}{\xi} \quad (8.218)$$

其中， $\xi = \frac{A_u^2}{2\sigma_u^2}$, $u = x, y, z$ 。横向量子寿命由于有限的真空管壁孔径限制， A_u 为孔径尺寸之半。纵向由于相空间有限的能量接受范围，令 A_s 为 RF bucket 高度之半， $\xi = \frac{\epsilon_{\max}^2}{2\sigma_E^2}$

$$\left(\frac{\epsilon_{\max}}{E}\right)^2 = \frac{U_0}{\pi|\eta| h E} F(\zeta) \quad (8.219)$$

其中， $F(\zeta) = 2 \left[\sqrt{\zeta^2 - 1} - \cos^{-1} \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right]$, $\zeta = \frac{qV_{RF}}{U_0}$ 。

束团的横向量子寿命一般比纵向更长，由金属管壁尺寸或切割器挡板决定，可估算如下

$$\tau_{x,y}^{(q)} = \frac{\tau_{x,y}}{\xi^2} e^{\xi^2/2} \quad (8.220)$$

其中， $\xi = X_{SC}/\sigma_x$ 或 Y_{SC}/σ_x , $\tau_{x,y}$ 为横向水平或垂直方向辐射阻尼时间。

注 对于束团的量子寿命，更细致的评估需要结合磁聚焦结构设计，甚至结合集体效应分析得到的束团实际分布，通过求解 Fokker-Planck 方程才能得到。 □

8.4.4 讨论：量子激发效应的另一种分析方式

回顾一下这一节介绍量子激发效应的动力学时，我们仰赖一个重要的数学定理 — Campbell 定理，属于概率理论与统计学的结果。由于量子激发效应本质上存在随机过程，因此有些文献或教科书采用另一种分析方式，即基于随机微分方程 (stochastic differential equation, SDE) 理论。

由于同步辐射功率谱在 $0 < \omega \leq \omega_c$ 的范围内改变不大 (参考 §4.4.2) 而可近似视为常数 — 即白噪声 (white noise)，基于随机微分方程 (SDE) 的分析方法涉及求解郎之万方程 (Langevin equation)，以下简短介绍。

定义 8.14. 一维郎之万方程 (Langevin equation)

考虑一维情况，相空间坐标写成 (x, p) ，不限于横向 (x, x') ，也可以是纵向 (z, δ) 相空间坐标。一维郎之万方程的一般形式有

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{dU}{dx} - Ap + D\xi(t) \end{aligned} \quad (8.221)$$

其中，

- $U(x)$ 为位能函数 (势函数)

- A 为阻尼系数
- D 为扩散系数
- $\xi(t)$ 为噪声函数，满足如下白噪声条件：

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t') \quad (8.222)$$

以上还可写成二阶随机微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} + \frac{dU}{dx} = D\xi(t) \quad (8.223)$$



笔记 求解随机微分方程的方法不只一种，比如：随机游走法 (random walk method)、Euler 法、Heun 法等，细节此处不论。更多讨论可参考 S.Y. Lee 一书的 Appendix II.2。



除了上述介绍的郎之万方程外，基于随机微分方程的分析方法也不只一种，比如基于动理学的 Fokker-Planck 方程也是粒子加速器束动力学常用的分析方式，将在第 13 章介绍。

8.5 波荡器、扭摆器辐射的效应

电子储存环中，除了弯转磁铁为必要的部件外，在同步辐射储存环中，通常还有插件磁铁 (insertion devices)，一般为波荡器 (undulator) 或扭摆器 (wiggler)。波荡器或扭摆器的电磁辐射特性已经在第 5 章介绍过。波荡器辐射对束团的横向、纵向动力学效应分析类似于这一章介绍的同步辐射效应的分析思路。

电子储存环中，对弯转磁铁而言，将弯转磁场强度写成 B_r 、曲率写成 $1/\rho_r$ ，其中，下标 r 表示储存环量。对波荡器或扭摆器，将弯转磁场强度写成 B_w 、曲率写成 $1/\rho_w$ ，其中，下标 w 表示波荡器或扭摆器量。则一般而言，有

$$(B_r, 1/\rho_r) \ll (B_w, 1/\rho_w) \quad (8.224)$$

其等效长度有

$$L_w \ll 2\pi\rho_r \quad (8.225)$$

考虑以上结果，则弯转磁铁与插件磁铁的辐射积分有

$$\mathcal{I}_{4r} \ll \mathcal{I}_{2r}, \quad \mathcal{I}_{4w} \ll \mathcal{I}_{2w}, \quad \mathcal{I}_{4w} \ll \mathcal{I}_{2r} \quad (8.226)$$

且有

$$\frac{\mathcal{I}_{2w}}{\mathcal{I}_{2r}} = \frac{U_w}{U_r} \quad (8.227)$$

其中，

$$U_r = \frac{C_\gamma E^4}{\rho_r}, \quad U_w = \begin{cases} \frac{C_\gamma E^4 L_w}{4\pi\rho_w^2}, & \text{平面型波荡器} \\ \frac{C_\gamma E^4 L_w}{2\pi\rho_w^2}, & \text{螺旋型波荡器} \end{cases} \quad (8.228)$$

其中， $C_\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} = 8.8460 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{GeV}^3}$ 。

延续讨论同步辐射效应采用的同步辐射积分，这里将推广该积分的定义，使包含插件磁铁的贡献。包含插件磁铁的储存环，束团平衡时发射度与能散可以按以下方式估算

$$\epsilon_x = \epsilon_{x0,r} \left(1 + \frac{\mathcal{I}_{5w}}{\mathcal{I}_{5r}} \right) \left(1 + \frac{\mathcal{I}_{2w} - \mathcal{I}_{4w}}{\mathcal{I}_{2r} - \mathcal{I}_{4r}} \right)^{-1} \approx \epsilon_{x0,r} \frac{1 + \mathcal{I}_{5w}/\mathcal{I}_{5r}}{1 + \mathcal{I}_{2w}/\mathcal{I}_{2r}} \quad (8.229)$$

与

$$\left(\frac{\sigma_E}{E} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_E}{E} \right)_{0,r}^2 \left(1 + \frac{\mathcal{I}_{3w}}{\mathcal{I}_{3r}} \right) \left(1 + \frac{2\mathcal{I}_{2w} + \mathcal{I}_{4w}}{2\mathcal{I}_{2r} + \mathcal{I}_{4r}} \right)^{-1} \approx \left(\frac{\sigma_E}{E} \right)_{0,r}^2 \frac{1 + \mathcal{I}_{3w}/\mathcal{I}_{3r}}{1 + \mathcal{I}_{2w}/\mathcal{I}_{2r}} \quad (8.230)$$

其中， $\epsilon_{x0,r}$ 与 $(\frac{\sigma_E}{E})_{0,r}$ 为不含插件磁铁时的平衡发射度与能散。由上讨论知，通过适当调整 $\mathcal{I}_{2w}/\mathcal{I}_{2r}$ 、 $\mathcal{I}_{3w}/\mathcal{I}_{3r}$ 与 $\mathcal{I}_{5w}/\mathcal{I}_{5r}$ 的比值，即适当设计插件磁铁参数，将能够调整 (减小或增加) 全环的平衡发射度与能散。

插件磁铁一般安置在储存环中的直线段，此处的直线段未必为消色散段。当直线段为消色散段时， $\mathcal{I}_{5w} = 0$ ，此时包含插件磁铁时全环的平衡发射度可约略写成

$$\epsilon_x \approx \frac{\epsilon_{x0,r}}{1 + \frac{U_w}{U_r}} \quad (8.231)$$

适当设计插件磁铁参数，能够调整储存环的平衡发射度与能散，但也可能伴随缺点，比如：

- 对横向 x 方向平面型波荡器或扭摆器，将存在横向 y 方向的额外聚焦 \Rightarrow 意味着贡献横向 y 方向额外的 $\Delta\nu_y$ (频移、频散) \Rightarrow

$$\Delta\nu_y \propto \frac{L_w \langle \beta_y \rangle}{\rho_w^2} \quad (8.232)$$

留意此频移可能出现新的共振。

- 对横向 y 方向还将残留偶数阶的高阶 (非线性) 多极场 \Rightarrow 非线性强度 $\propto \lambda_w^2$ 、动力学孔径恶化 \Rightarrow 可靠高阶多极波荡器或扭摆器修正。
- 增加了全环磁铁磁场的非均匀性。
- 增加了全环对磁场误差的敏感度。



笔记 对在储存环中的波荡器对束流动力学的非线性效应的研究，可参考 Lloyd Smith, Effects of wigglers and undulators on beam dynamics, Proc. 13th Int. Conf. High-Energy Accelerators (1986). <https://inspirehep.net/files/d5db45e0245092dd37755a0374e942b4>。



笔记 此处仅给出简化情况的介绍，没有对波荡器、扭摆器辐射效应的区别深入讨论。对波荡器、扭摆器辐射效应的进一步讨论感兴趣的读者，可参考 Shyh-Yuan Lee, Accelerator Physics, 4th ed., World Scientific (2019) 一书的 Chapter 4 §III.2、§III.3。

结束这一节前，我们简短讨论一下电子经历波荡器或扭摆器的轨迹。细心的读者或许能预想到，波荡器或扭摆器总周期数为奇数或偶数，决定其磁场分布为对称 (symmetric) 或反对称 (anti-symmetric)。此外，在波荡器或扭摆器的入口与出口处的第一个或最后一个磁极，其磁场强度可能要求与其它中间磁极的磁场强度稍有不同，如此才能保证进入与离开时的横向轨迹在同一轴上。根据此一要求，对波荡器或扭摆器的磁场有如下约束条件：

定理 8.7. 波荡器或扭摆器的场积分条件

作为加速器磁聚焦结构的直线插入节，为了满足粒子进入与离开时没有净横向偏移，即 $x(s = L_w) = 0, x'(s = L_w) = 0$ ，波荡器或扭摆器的磁场必须分别满足

$$x(L_w) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{L_w} x'(s) ds = \int_0^{L_w} ds \cdot \frac{1}{B\rho} \int_0^s B_y(s') ds' = \frac{1}{B\rho} \int_0^{L_w} \int_0^s B_y(s') ds' ds = 0 \quad (8.233)$$

与

$$x'(L_w) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{L_w} \frac{1}{\rho(s)} ds = \frac{1}{B\rho} \int_0^{L_w} B_y(s) ds = 0 \quad (8.234)$$

证明 参考 R. Walker, Insertion devices: undulators and wigglers, in S. Turner ed., Synchrotron Radiation and Free Electron Lasers, CERN 98-04, CERN Accelerator School.

<https://cds.cern.ch/record/362891/files/CERN-98-04.pdf>

8.6 加速器中的粒子如何加速

虽然名为“加速”器物理，多数教科书讨论的储存环动力学 — 无论横向或纵向 — 却是“等速”(固定能量)过程，即粒子速度或能量大致恒定。即使改变，也仅如 §8.3、§8.4 讨论的由于同步辐射效应所导致的很小幅度的改变。加速器中的粒子如何加速？

8.6.1 直线加速器

对直线加速器，由于不需要考虑 §8.2 介绍的稳相原理，加速粒子的过程相对直观。在将初始束团注入加速器谐振腔时，只要放在合适的加速相位，随着粒子前进，在级联加速器谐振腔中，将一级一级逐渐获得能量，直到粒子离开谐振腔。

对一串谐振腔形成的加速结构，还可以细分两类：行波 (standing-wave, SW) 加速腔与驻波 (traveling-wave, TW) 加速腔，参考图 8.25。

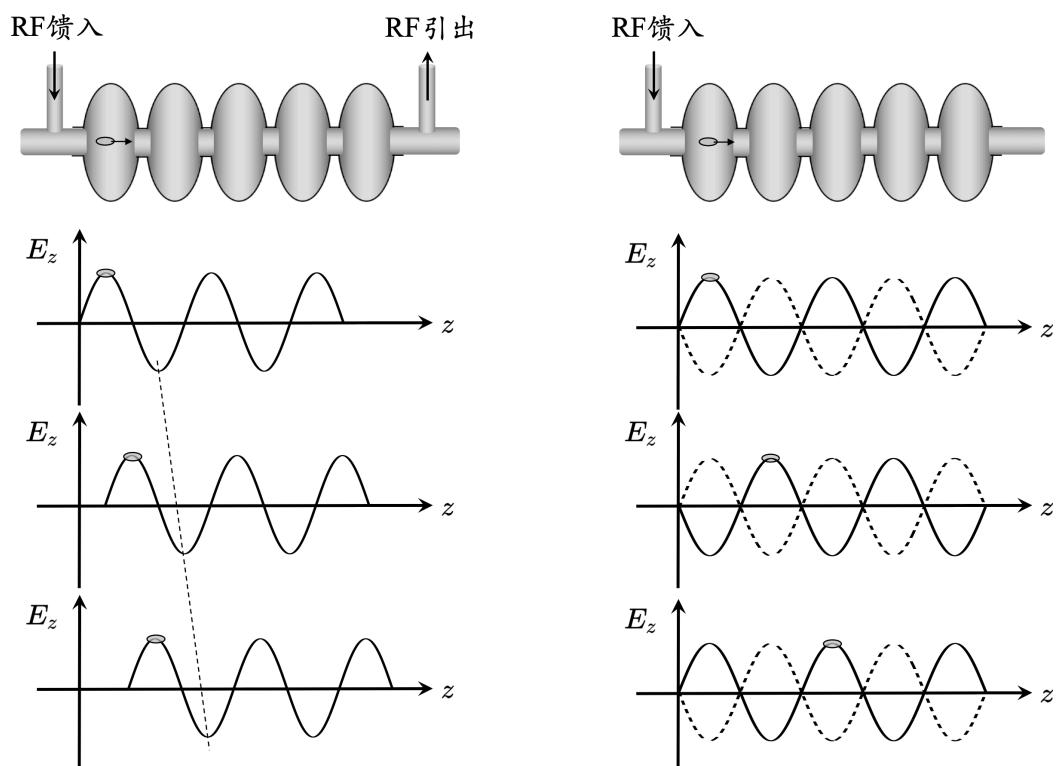


图 8.25：行波加速腔（左）与驻波加速腔（右）示意图。对行波加速腔，一般从一端馈入电磁场，激励，然后从另一端引出电磁场或接入匹配负载。

8.6.1.1 行波加速腔

顾名思义，行波加速腔里的场存在传播速度，群速 $v_g \approx c \leq v_p$ ，与粒子前行的速度 v_z 契合时，即 $v_g = v_z$ ，在合适的相位，行波电场将能量传给粒子。在轴上的行波加速腔

电场大致可写为³⁰

$$E_z^{\text{TW}}(\rho \approx 0, n = 0) = E_{z,0}^{\text{TW}} \cos(\omega t - ks + \phi_0) \quad (8.235)$$

要求相位匹配，即要求每个相邻加速腔的场相位需要满足如下约束

$$\begin{aligned} \omega t_m + \phi_m(s) &= \omega t_{m+1} + \phi_{m+1}(s) = \omega \left(t_m + \frac{d}{\beta_z c} \right) + \phi_{m+1}(s) \\ \Rightarrow \Delta\phi_m &= \phi_m - \phi_{m+1} = \frac{2\pi f_{\text{RF}}}{\beta_z c} d = \frac{2\pi}{\beta_z} \frac{d}{\lambda_{\text{RF}}} \end{aligned} \quad (8.236)$$

其中， d 为相邻加速腔的周期长度。一般选 $\Delta\phi_m = \pi/3, 2\pi/3, 5\pi/4$ 等³¹。 $\Delta\phi_m < 2\pi$ 的意思是，在一个单元腔 (unit cell) 内暂时容不下一个完整的波长。比如： $\Delta\phi_m = 2\pi/3$ 的图像为：三个单元腔恰好容纳一个完整波长。对行波加速腔，一般从一端馈入电磁场，激励，然后从另一端引出电磁场或接入匹配负载。

行波加速腔还可以细分两类：固定阻抗行波加速腔 (constant-impedance traveling-wave cavities) 与固定梯度的行波加速腔 (constant-gradient traveling-wave cavities)。细节此处不论，有兴趣的读者请自行参考相关文献。

8.6.1.2 驻波加速腔

不同于行波加速腔，驻波加速腔则是在前后两端由金属板挡上，仅留小孔让粒子通过，此腔体内的场可视为由 $+s$ 方向传播的前行波 (forward wave) 与由 $-s$ 方向传播的返波 (backward wave) 叠加形成。参考图 8.26，其电场可写成

$$\begin{aligned} E_z^{\text{SW}}(\rho \approx 0, n = 0) &= E_{z,0}^{\text{TW}} \cos(\omega t - ks + \phi_0) + E_{z,0}^{\text{TW}} \cos[\omega t - k(2\ell - s) + \phi_0] \\ &= E_{z,0}^{\text{SW}} \cos(\omega t + \phi_0) \cos(ks) \end{aligned} \quad (8.237)$$

其中， ℓ 为单个腔体长度，不失一般性，先令 $\phi_0 = 0$ ，将三角函数写成指数形式，以上可以按如下方式进一步化简

$$\begin{aligned} e^{i(\omega t - ks)} + e^{i[\omega t - k(2\ell - s)]} &= e^{i(\omega t - ks)} + e^{i(\omega t + ks)} e^{-i2k\ell} \\ &= e^{i(\omega t - ks)} + e^{i(\omega t + ks)} e^{-ip'4\pi} \\ &= 2 \cos(\omega t) \cos(ks) \end{aligned} \quad (8.238)$$

于是， $E_z^{\text{SW}}(\rho \approx 0, n = 0) = E_{z,0}^{\text{SW}} \cos(\omega t + \phi_0) \cos(ks)$ 为驻波形式，如预期。

考虑束团由多个粒子组成，束团内任一粒子相对于参考同步粒子 t_s 的相位为³²

$$\omega t = \omega(t_s + \Delta t) = \omega t_s - \omega \frac{z}{v_z} = \omega t_s - kz \quad (8.239)$$

³⁰这里 \cos 也可以写为 \sin ，只要 ϕ_0 平移 $\pi/2$ 即可。一般直线加速器社群倾向使用 \cos 惯例，同步加速器社群倾向使用 \sin 惯例。

³¹这里可以看到，如果对重离子， β_z 在加速过程的改变范围很大，因此，重离子加速腔的设计比起电子麻烦很多。

³²按 $z = \frac{s}{\beta_0} - ct$ 定义，对参考粒子，有 $z_s = \frac{s}{\beta_0} - ct_s \equiv 0$ 。对非参考粒子，则有 $z = \frac{s}{\beta_0} - ct$ 。当 $z > 0$ 表示头部粒子时，意味着 $z = z - z_s = -c(t - t_s) = -c\Delta t$ 。

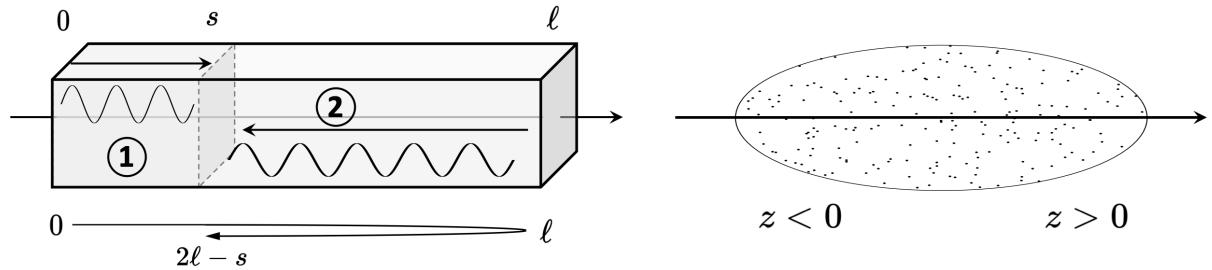


图 8.26: 驻波加速腔示意图。腔中某一位置 s 的场由前行波 1 与返波 2 叠加形成。图例修改自 Simone Di Mitri, Fundamentals of Particle Accelerator Physics, Springer (2022) 一书。

则束团内任一粒子相对于参考同步粒子 t_s 感受到的加速场可写为

$$\begin{aligned} E_z^{\text{TW}} &= E_{z,0}^{\text{TW}} \cos(\omega t_s - ks + \phi_0 - kz) \equiv E_{z,0}^{\text{TW}} \cos(\phi_{\text{RF}}^{\text{TW}} - kz) \\ E_z^{\text{SW}} &= E_{z,0}^{\text{SW}} \cos(\omega t_s + \phi_0 - kz) \cos(ks) \approx E_{z,0}^{\text{SW}} \cos(ks) \cos(\phi_{\text{RF}}^{\text{SW}} - kz) \end{aligned} \quad (8.240)$$

对驻波腔来说, 如果 $\cos ks \approx$ 定值, 则还可进一步化简写为 $E_z^{\text{SW}} \approx \bar{E}_{z,0}^{\text{SW}} \cos(\phi_{\text{RF}}^{\text{SW}} - kz)$ 。图 8.27 给出 0 模与 π 模在双腔驻波加速腔中的电场示意图。

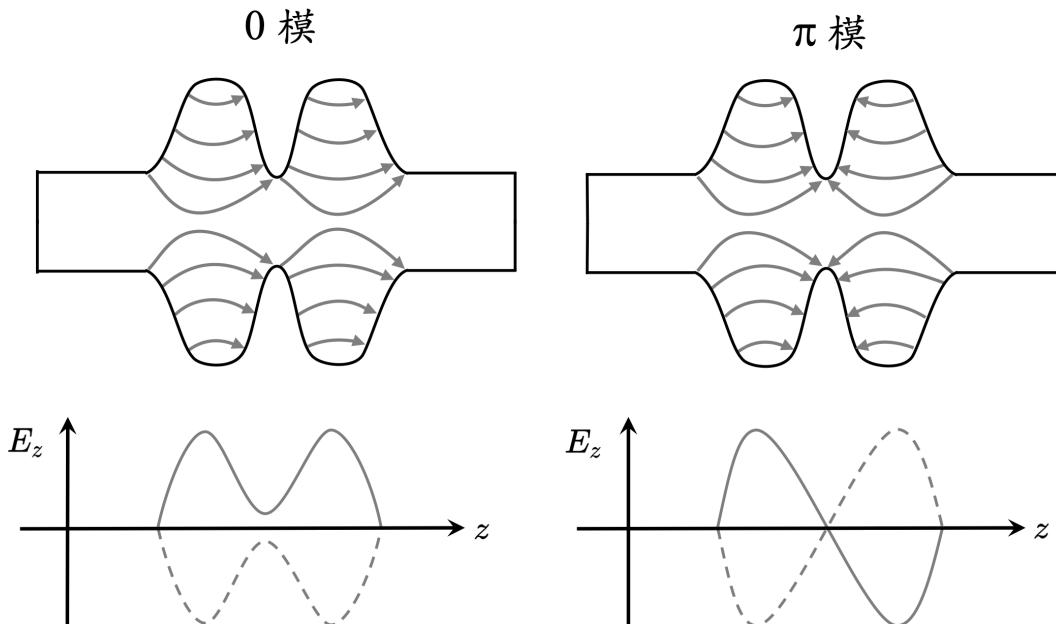


图 8.27: 双腔驻波加速腔。通常用 π 模来加速粒子。



笔记 对被加速的粒子而言, 行波加速腔与驻波加速腔何者合适? 此问题没有明确答案, 或者说, 这个问题不是好问题, 因为没有定义什么是“合适”。两者各有优缺。

对驻波直线加速器, 当粒子经过时, 加速段可能由许多加速腔构成。粒子经过每个加速结构, 有限长度的谐振腔与有限速度 $v_0 < c$ 的粒子导致粒子在经过每个谐振腔感受到的有效加速电压 V_{eff} 不再为谐振腔间隙 RF 电压的峰值 V_{RF} , 而需要乘上一无量纲修正因子, 称过渡时间因子 (transit time factor) T 。对环形同步加速器也有类似效应。总结如下:

定理 8.8. 过渡时间因子 T

对驻波直线加速器，有限(纵向)间隙长度 d 的谐振腔与有限速度 $v_0 < c$ 的粒子，当粒子经过谐振腔时，感受到的有效加速电压为

$$V_{\text{eff}} = V_g T, \quad T = \frac{\sin \frac{\theta_g}{2}}{\frac{\theta_g}{2}}, \quad \theta_g = \omega_{\text{RF}} \frac{d}{v_0} \quad (8.241)$$

其中，

- V_g 为谐振腔间隙 RF 峰值电压
- ω_{RF} 为 RF 腔中心频率
- T 为过渡时间因子 (transit time factor)
- θ_g 为粒子经过谐振腔过程累积的相位变化

对环形同步加速器，有限(纵向)间隙长度 d 的谐振腔与有限速度 $v_0 < c$ 的粒子，当粒子经过谐振腔时，感受到的有效加速电压为

$$V_{\text{eff}} = V_g T, \quad T = \frac{\sin \frac{\theta_g}{2}}{\frac{\theta_g}{2}}, \quad \theta_g = \frac{hd}{R} \quad (8.242)$$

其中， $R = C/2\pi$ 为环形加速器的平均半径， h 为谐波数。这里用了 $\omega_{\text{RF}} = h\omega_0$ ($\omega_0 = 2\pi v_0/C$ 为单圈绕行角频率)。

证明 利用下式

$$\Delta E = \frac{q}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} V(t) dt, \quad V(t) = V_g \sin(\omega_{\text{RF}} t + \phi)$$

其中， ϕ 为注入初始相位差。 □

直线加速器中，涉及不同数量级的时间尺度。图 8.28 给出示意图。

注 对 S-band RF， 1° 差不多表征 1 ps 长度。目前 S-band 的低电平射频 (low-level RF, LLRF) 技术能做到的稳定度约为 $0.001^\circ \sim 0.01^\circ$ 。

总结以上讨论知，一粒子经过加速腔后，无论是行波或驻波，其粒子能量将改变

$$\Delta U = E_{z,0}(s) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\phi_{\text{RF}}(s) - k_{\text{RF}} z) \quad (8.243)$$

其中， $E_{z,0}$ 为有效加速梯度 (电场)。研究谐振腔的场动力学与整体设计一般属于微波物理与工程范畴，此处不论。对研究粒子动力学来说，一般将 $E_{z,0}(s)$ 视为已知。作为此讲义专题，将在第三册第 14 章进一步介绍利用 $E_{z,0}(s)$ 构建粒子的传输矩阵。这一小节关于直线加速器的介绍将在此告一段落。对细节感兴趣的读者，建议参考直线加速器相关材料。

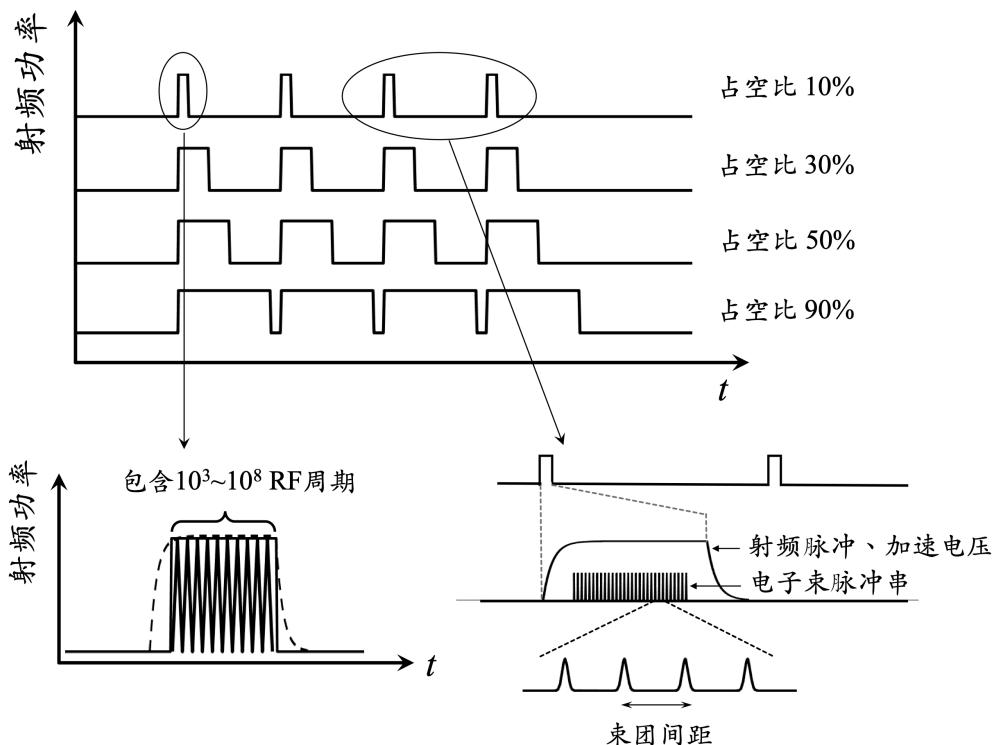


图 8.28: 基于射频 (RF) 加速器的时间尺度示意图。图例修改自 D. Alesini, Linear Accelerator Technology, CAS-CERN (2016). <https://inspirehep.net/files/12de17f852af05dd407ae32cd22d5ecc>。

8.6.2 环形同步加速器

对环形同步加速器，粒子如何加速？首先，先明确专有名词，此时我们不再用“储存环”一词，因为“储存”本身意味着固定能量。有时候为了强调粒子正处于加速过程，同步加速器又称增强器或增能环 (booster synchrotron 或简称 booster) 或存在能量增减的同步加速器 (synchrotron with energy ramping)。好，回到问题：同步加速器如何加速粒子？

如果没有细想，或许会觉得，类似于直线加速器，把粒子放在适当的加速相位，其它设定维持不变，粒子就得到加速了，不是吗？No！回忆一下 §8.2，假设穿越能量以上 (above transition) $\eta > 0$ ，假设相位 ϕ_s 为补偿同步辐射能量损失需要的相位值，现在为了进一步加速粒子，我们把粒子放在相位 $\phi < \phi_s$ 的一侧，确保粒子能够获得更多能量。很快会发现，当粒子绕行一周后，由于同步加速器的稳相原理，前一圈得到更多能量的粒子将走较长路径，使下一圈回到 RF 腔时稍微落后，而不再处在 $\phi < \phi_s$ 一侧，于是无法有效加速。这时候，稳相原理反而成了阻碍！

有些读者或许突发奇想，考虑如下情况：

- 如果先放在 $\phi > \phi_s$ 一侧呢？ \Rightarrow 无济于事。
- 增加 RF 腔加速梯度呢？ \Rightarrow 无济于事。

读者此时或许意识到问题所在：单纯调整加速相位或加速电压以加速粒子，在环形加速器不管用。问题的根源出在稳相原理。因此，不仅改变 RF 参数，还要设法调整储存环磁聚焦结构的部分特性，同时满足稳相原理。回忆 §6.4介绍的一个基本关系式：磁刚度 $B\rho$ ，有

$$B\rho = \frac{p}{|q|} \approx \frac{E}{|q|c} \quad (8.244)$$

当粒子能量增加时，弯转磁铁的磁场也应该顺着增加，保持粒子在逐圈绕行、增能过程中，不受稳相原理阻碍逐圈能获得的加速。此外，由于粒子增能过程， ρ 不变，磁刚度 $B\rho$ 增加，为了维持足够的纵向聚焦，RF 腔的加速电压也应该适当调整增加。图 8.29 为基于 TPS (Taiwan Photon Source) 增强器的数值模拟参数，其中，带电粒子能量随弯转磁场强度增加而增加，同时 RF 腔加速电压也配合增加以补偿更多的同步辐射损失。粒子能量由于受磁刚度限制，与弯转磁铁的磁场强度上升曲线一致。

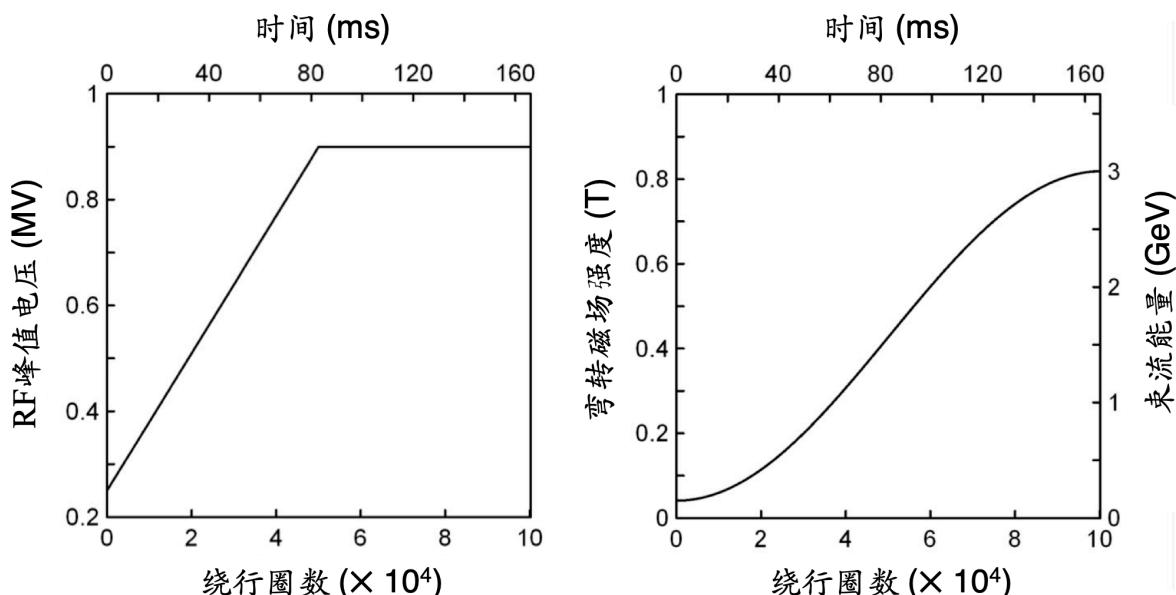


图 8.29: 基于 TPS 增强器的 RF 加速电压与弯转磁场强度曲线。

一般教科书较少讨论粒子增能过程的动力学，部分原因是其动力学过程与增能曲线不同而各异。此外，增能过程的时间较短，多数情况下人们主要关注的还是固定能量情况下储存环的动力学。在粒子增能过程，许多物理量将处于暂态，如：能量、束长、能散、synchrotron tune 等。甚至，束团相空间分布出现成丝 (filamentation) 现象，并且粒子有可能会丢失³³。前面介绍过，由于增能过程的同步辐射效应强度与电子能量的定标关系各异，很多时候采用数值模拟或粒子跟踪模拟方法研究，细节此处不论。

练习 8.23 一般同步加速器增能过程，RF 腔频率大致不变，改变的是弯转磁铁的磁场大小。并且，弯转磁场随时间变化不能太快，否则破坏同步性。试证明，随时间变化弯转

³³现在的电源技术已经非常先进，ramping 的精度、同步性都可以做的很好，升能过程中粒子俘获效率 90% 以上可以容易达到。

磁场与 RF 腔频率可以互相关联，有

$$\omega_{RF} = \frac{hc}{R} \sqrt{\frac{B^2(t)}{B^2(t) + \left(\frac{mc^2}{q\rho}\right)^2}} \quad (8.245)$$

其中， R 为环形加速器的平均半径， ρ 为弯转磁铁半径， h 为谐波数。磁场上升曲线 $B(t)$ ，包含上升时间快慢与曲线函数形式，需要尽可能维持 ω_{RF} 不变。 ■

注 对环形加速器粒子增能过程的动力学感兴趣的读者，可参考 Donald Edwards and Michael Syphers, An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (2004) 一书的 §2.2.2。

8.6.3 能量回收型直线加速器

能量回收加速器的概念最早由 Cornell 大学的 Maury Tigner 教授在 1965 年提出。能量回收直线加速器 (energy recovery linac, ERL)，顾名思义，它本质上是一种直线加速器，因此，束团特性大致由粒子经历直线加速过程的动力学决定。为什么说大致，而不说相等于直线加速器的束团特性？这是因为对直线加速器来说，束团经过每个加速单元一次之后就完成其“科学使命”，比如：高增益自由电子激光装置、直线对撞机等。这类加速器通称单次经过 (single-pass) 加速器。对能量回收型加速器来说，束团经过加速单元一般不只一次，至少两次以上：至少包含一次加速、一次减速的过程。由此可以预期，在能量回收加速器中的束团特性与传统的单次经过的直线加速器的束团特性相比将略有差异。这个差异是我们关心的。同时，能量回收型加速器不同于这一章前面介绍的在电子环形加速器中的束团特性：在储存环中，如果不考虑电子丢失效应，即假设粒子在其中绕行无穷多圈，则电子束团的特性将由同步辐射阻尼效应与量子激发效应平衡后决定。对经历不只一次但少数几次往返的能量回收型加速器，束团特性可约略视为在直线加速器的束团特性与储存环的束团特性之间的状态。但也有专属于能量回收加速器的束动力学，细节此处不论。

相比于没有能量回收的传统单次经过直线加速器，由以下讨论将知道，能量回收型加速器的束团整体功率³⁴将有效提高约两个数量级，因此，将能够驱动更强的自由电子激光装置。

图 8.30 为传统直线加速器和能量回收直线加速器应用作为自由电子激光驱动装置的示意图。在传统直线加速器中，被加速后的电子束在产生 FEL 辐射³⁵而完成使命之后就被引导到束流垃圾桶 (beam dump) 丢弃。附带一提，这里的直线加速器可以是基于常温的谐振腔，也可以是低温超导加速腔³⁶。然而，在能量回收型直线加速器中，加速后的电子

³⁴ 定义为 $P_{beam} = I_b \times \frac{E}{|e|}$ ，即束团电流与能量的乘积。

³⁵ 自由电子激光理论将在第 10 章介绍。

³⁶ 对常温谐振腔来说，外部馈入电磁场或电子束团整体功率的热效应可能导致谐振腔形变，从而限制加速梯

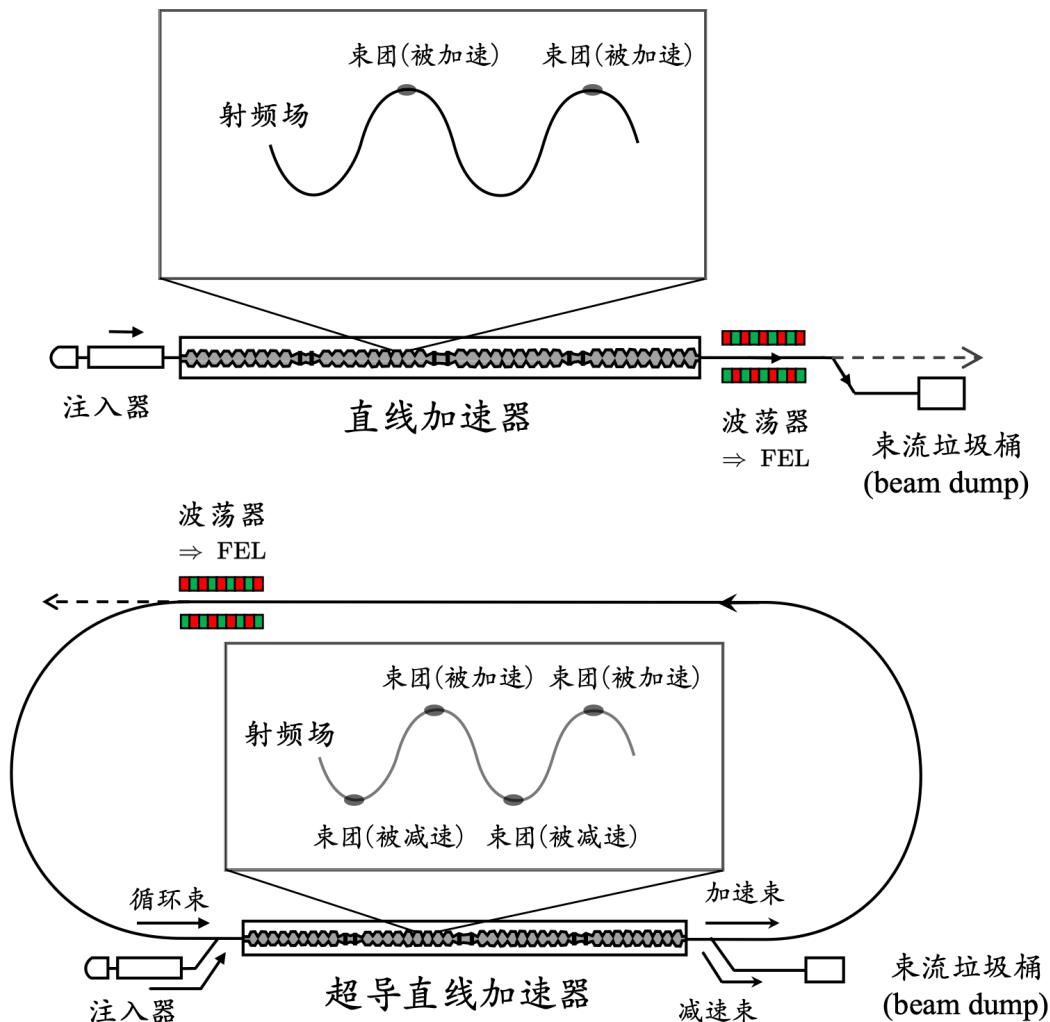


图 8.30: 上图为基于传统直线加速器驱动的自由电子激光装置，下图为基于能量回收直线加速器驱动的自由电子激光装置。在传统的直线加速器中，加速后的电子束在产生 FEL 辐射之后就被丢弃而终止，没有能量回收过程。相比之下，在能量回收直线加速器中的电子束会在产生 FEL 辐射之后通过减速 RF 相位返回主加速段，以回收束团能量。该电子束会减速至接近注入时的能量，然后才被丢弃。通过这种方式，此装置可使加速时的能量得以回收，将显著降低被丢弃的束团整体功率和装置能耗。

束在产生 FEL 辐射之后将通过一磁聚焦结构返回段(称 return arc 或 recirculation arc)引导回到主加速器，并被减速至接近注入时的能量以回收能量，然后才被引导到束流垃圾桶处理丢弃。由注入器注入的未被加速、低能量电子束和由 return arc 返回的高能量电子束汇合(但不碰在一起)，同时但在相位上交替地通过主加速器的加速和减速射频相位，参考图 8.30(下图)。因此，主加速器内传递给粒子用来加速的能量得以大部分回收，使得被丢弃的束团归还其功率，装置能耗将大幅减少，为绿能加速器。总体来说，其结果是能量回收型加速器能够实现更高的束团重复频率和更高的平均电流——通常为 $0.1 \sim 10 \text{ mA}$ — 比起传统直线加速器的 100 nA (基于常温加速腔)或 $10 \mu\text{A}$ (基于超导加速腔)有数量级提升。

有了更高的束团整体功率之后，能量回收加速器就能够产生远高于传统直线加速器的 FEL 功率。参考附录 C.5，目前正在运行或已经退役的几个中低能量在 $10 \sim 160 \text{ MeV}$ 的 ERL-FEL 装置，例如 Jefferson Lab (JLab) 的 IR Demo、JLab IR Upgrade、JLab UV Demo、BINP 的新西伯利亚能量回收加速器 (Novosibirsk ERL) 和英国 Daresbury Lab 的 ALICE。



笔记 关于能量回收加速器概念的原始论文可参考 Maury Tigner, A possible apparatus for electron clashing-beam experiments, Nuovo Cimento **37**, 1228-1231 (1965). <https://doi.org/10.1007/BF02773204>。

70 年代早期超导加速器的技术还不成熟时，此概念被搁置了一段时间，直到实现超导加速腔后，能量回收型加速器概念重新得到重视。目前既有的能量回收型加速器一般操作在中、低能量区间 ($10 < E < 500 \text{ MeV}$)，其可行性已经得到证实。对操作在高能量区间 $E > \text{GeV}$ 、高平均电流的能量回收型加速器，将面临许多束流动力学问题与技术挑战，比如：

- 对连续波模式 (continuous-wave mode, CW mode) 运行的能量回收型加速器，由注入段至主加速器的合并段 (merger) 的设计，由于能量较低，强流导致的空间电荷效应明显，确保束团品质在传输过程不受破坏是关键，设计时需要仔细考虑空间电荷效应的影响、
- 能量回收过程的动量接受度 (momentum acceptance)、束团横纵向相空间匹配等研究、
- 高频加速腔的设计，包含高阶模 (high order modes, HOM) 的抑制等、
- 从头至尾 (start-to-end, S2E) 的理论分析与仿真，需要考虑相关集体效应的影响，包含单束团、多束团不稳定性等。

以上提及的这些都是当前活跃的前沿科研领域，细节此处不论。目前的欧盟国际合作项目 PERLE(Powerful ERL for Experiments) 致力于加速电子束至 GeV 量级、平均流强 20 mA ，即 10 MW 量级的高功率 ERL 装置，可参考 <https://perle-web.ijclab.in2p3.fr>

度与加速束团的重复频率。一般高亮度电子束的平均流强约在 100 nA 量级。对超导谐振腔来说，天花板也是热效应，但机制不太一样，允许相对较高的束团重复频率，电子束的平均流强约在 $10 \mu\text{A}$ 量级。

3.fr/。

注 这里介绍的能量回收型直线加速器强调“能量回收”(energy recovery)，如果没有能量回收，而只有逐圈循环的能量增加或加速过程，一般称能量循环加速器 (energy recirculating accelerator)。

 **笔记** 一般教科书较少介绍能量回收或能量循环加速器，对细节感兴趣的读者，可参考 L. Merminga, D.R. Douglas, and G.A. Krafft, High-Current Energy-Recovering Electron Linacs, Annual Review of Nuclear and Particle Science **53**, 387-429 (2003). <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.53.041002.110456> 或 C. Adolphsen et al., The Development of Energy-Recovery Linacs, FERMILAB-PUB-22-509-AD, JLAB-ACP-22-3666. <https://inspirehep.net/literature/2106268>。

 **笔记** 近年来有些实验室开展基于 ERL-FEL 产生的极紫外 (extreme ultraviolet, EUV) 光源，希望应用作为下一代芯片生产光刻阶段的光源。基于 ERL 的极紫外 FEL 可以通过能量回收方案和超导加速器技术克服当前极紫外光刻面临的挑战，提供 10 kW 量级、特定波长的输出功率，成为最强大的极紫外光源。除 13.5 nm 的极紫外 (EUV) 波段，近期对更短波长的超越极紫外 (beyond UEV, BEUV) 光源的探索 — 约在 6.6-6.7 nm — 也开始变得热门。

8.6.4 加速元件的简化传输矩阵表示

前面分别介绍了直线加速器、环形同步加速器与能量回收型直线加速器，现在回归加速腔这个部件本身。根据 Liouville 定理，当相空间坐标采用正则坐标 (z, p_z) 时，在粒子加速过程中，其束团归一化发射度守恒。假设粒子加速过程沿谐振腔中心轴，则仅有纵向电场：横向动量不变， $\Delta p = \Delta p_z$ ，以 x 方向为例，即

$$\frac{dp_x}{ds} = \frac{d(p_x)}{ds} = \frac{d(p_z x')}{ds} = 0 \quad (8.246)$$

利用运动学关系， $\Delta p_z = \frac{\Delta E}{\beta_z c}$ ， $\delta = \frac{\Delta p_z}{p_{z0}}$ ，于是有

$$\begin{aligned} x'(s)p_z(s) &= x'(s)[p_{z0} + \Delta p_z(s)] = x'(s)\left[p_{z0} + \frac{\Delta E(s)}{\beta_z c}\right] \\ &= x'(s)\left(p_{z0} + \frac{qE_z s}{\beta_z c}\right) \stackrel{!}{=} x'_0 p_{z0}, \\ \Rightarrow x'(s) &= \frac{dx}{ds} = \frac{x'_0 p_{z0}}{p_z(s)} = \frac{x'_0 p_{z0}}{p_{z0} + \frac{qE_z s}{\beta_z c}} \stackrel{!}{=} x'_0 \frac{1}{1 + \delta} \end{aligned} \quad (8.247)$$

再对 s 积分一次，有

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + x'_0 \frac{p_{z0} \beta_z c}{qE_z} \ln\left(1 + \frac{qE_z s}{\beta_z c p_{z0}}\right) \\ &= x_0 + x'_0 \frac{p_{z0} \beta_z c}{qE_z s} s \ln\left(1 + \frac{qE_z s}{\beta_z c p_{z0}}\right) \\ &= x_0 + x'_0 \frac{s}{\delta} \ln(1 + \delta) \end{aligned} \quad (8.248)$$

尽管上面最初分析是在 p_x 中做，但最终写成传输矩阵时仍打算以 (x, x') 表示。假设加速结构长度 L ，横向 x 方向的等效传输矩阵表示有

$$\mathbf{M}_x^{\text{acc}} = \begin{pmatrix} 1 & L \frac{\ln(1+\delta)}{\delta} \\ 0 & \frac{1}{1+\delta} \end{pmatrix} \quad (8.249)$$

其中， $\delta = \frac{\Delta p_z}{p_{z0}} = \frac{qE_z s}{\beta_z c p_{z,0}}$ 。可以看到，此 $\mathbf{M}_x^{\text{acc}}$ 的行列式值 $\neq 1$ ，非保辛矩阵，这是因为采用 $(x, x')^T$ 为相空间状态变量。

注 留意，上面介绍的是谐振腔作为加速元件的横向 2×2 传输矩阵表示。前面 §8.1 介绍过，谐振腔也能提供束团能量啁啾，结合之后有

$$\begin{pmatrix} 1 & L \frac{\ln(1+\delta)}{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_{65} & 1 \end{pmatrix} \quad (8.250)$$

其中， L 为谐振腔长度（有时假设 $\rightarrow 0$ ）， $R_{65} = \frac{\partial \delta}{\partial z} \approx -\frac{|e|V_{\text{RF}} \cos \phi_{\text{RF}} \omega_{\text{RF}}}{E_0 c}$ 。

8.6.5 浅谈：从直线加速器到同步加速器的注入与引出

对电子同步辐射装置，通常粒子经历直线加速器 (linac) 或增强器 (booster synchrotron) 加速获得能量后，需要注入储存环 (storage ring)，涉及束团注入的动力学过程。图例可参考 §0.3 的图 8。如果在直线加速器中的电子能量已经达到注入储存环的参考能量，而不需要增强器，则称全能量注入 (full-energy injection)，好处是能够省去由增强器至储存环的注入传输段设计。此外，已经在同步辐射储存环中的电子束，电子发出辐射的同时，也伴随着辐射阻尼、量子激发、束内散射、量子寿命等效应，束团内的粒子将逐渐丢失，或束团特性恶化等。天下没有白吃的午餐。换句话说，加速器的“输出”，付出的代价是束团电流随时间降低、减小。因此，为了维持储存环在预设目标的稳定、持续输出，必须注入、淘汰旧有的电子束团，或者通过在已存储的束团的基础上注入新鲜的电子束团。基于此动机，就有束团的注入与引出。加速器束团注入与引出是加速器技术的一个重要分支，细节此处不论，仅简短介绍几种常见的电子束注入 (injection)、引出 (extraction) 方案。

将粒子注入储存环的方式也根据储存环的应用面向不同而异，注入方案非唯一。最简单的思路为使用一个或多个脉冲冲击磁铁 —— 一般称 pulsed septum magnet 或 kicker magnet —— 来引导注入的粒子束团串进入储存环中的设计路径轨迹。脉冲冲击磁铁不限于二极铁，有四极铁 (pulsed quadrupole magnet, PQM)、六极铁 (pulsed sextupole magnet, PSM) 等。为了避免与已经在储存环中的循环束相撞，一般在注入位置附近应妥善设计局部凸轨 (local orbit bump) —— 此设计同时缓解脉冲偏转磁铁的强度要求 —— 用来使循环束与注入束更好地“接合”。此外，注入的粒子束团串绕行一周之后，在束团回到接近注入位置之前应关闭脉冲磁铁，使注入的束团稳定绕行形成储存束流。此种磁铁为时变脉冲冲击磁铁，其设计有别于上一章介绍的用于弯转、聚焦等恒定磁场磁铁。注入可从横向水平 x

方向，也可从横向垂直 y 方向³⁷，基于以上思路的注入方法如果在束团绕行单圈内实现，称单圈注入 (single-turn injection)。另一种注入方案称多圈注入 (multi-turn injection)，通常应用在较高束团电流的储存、在上游注入加速器无法一次提供储存环要求的高流强，因此需要分多次，依序将多个束团注入储存环中的一个相空间 bucket 中。对于像质子没有明显辐射阻尼的粒子，在每次注入脉冲时间内，束团被放置在储存环设计的横向或纵向相空间的特定点上，通过巧妙安排束团偏转和相干振荡，确保不会把先前已经注入在该相空间内的质子束团排开即可。如果存在同步辐射阻尼效应，如电子束的同步辐射，那么当前注入的电子束可安排放置在相空间的“边缘”，然后等一个或几个辐射阻尼时间之后，再在同一相空间中注入下一电子束。前面介绍过，典型的同步辐射阻尼时间为几十毫秒 (ms)，因此，每秒能允许积累许多束团。

注入方案除了按上述的单圈、多圈注入，还可按与循环束团的相对关系分类，称离轴注入 (off-axis injection)、在轴注入 (on-axis injection)。顾名思义，离轴注入指的是注入的束团与循环束团存在一横向偏差，上述采用局部凸轨即是一例，采用四极铁、六极铁等多极磁铁也属于此类。在轴注入则指注入的束团与循环束团没有横向偏差，但存在纵向偏差，一般偏差在纵向相空间 RF bucket 宽度范围内，又称纵向注入 (longitudinal injection)。可以想像，如果储存环的动力学孔径很小的话 (如四代同步辐射储存环光源)，将对离轴注入造成挑战，因此，一般采用在轴注入。但是，对在轴注入而言，冲击磁铁的脉冲时间长度要短于束团间隔或 RF bucket 宽度，因此将对短脉冲磁铁技术提出较高的要求。

还有一种创新的注入方案称置换注入 (swap-out injection)。顾名思义，“置换”指的是通过逐个束团替换来实现注入，一个萝卜一个坑，注入一个就踢掉一个³⁸。此方案需要一个注入装置以提供与储存环中的循环束能量相同、电荷量相同的束团随时用以替换，并且，要同时处理被踢掉的循环束团。方案好处是对储存环的动力学孔径要求是最小的。伴随的挑战/不便是，如果即将被踢掉的束团还希望回收 (recycle) 或丢弃 (dump)，则需要设计建造一个累积环 (accumulator ring) 或降能环 (decelerator)。

如果在储存环中的粒子束在绕行一段时间后还不打算丢弃，而是在一系列加速器 (chain of accelerators) 中还有后续用途，则需要粒子引出 (extraction)。类似于注入，也有单圈引出 (single-turn extraction)。或者，也可采用共振引出 (resonant extraction) 等，细节此处不论。

注 现在许多三代电子同步辐射储存环采用一种称“恒流注入”(top-up injection) 模式 — 结合上述的离轴注入模式，如今已经成为一种范式，旨在保持储存环束流的电流基本恒定，以最大程度地维持同步辐射输出效能。此方案的形象化别称有 top-off injection、tricke injection、continuous injection 等。对注入与引出感兴趣的读者，可参考 Handbook 的 §4.12

³⁷一般来说， y 方向比较受限，受限于储存环中的波荡器或扭摆器。

³⁸或者，一串萝卜一串坑，注入一串就踢掉一串。

及其参考文献。



笔记 思考一下，这里介绍的多束团注入一相空间的过程与前面介绍的 Liouville 定理是否一致或存在冲突？

8.7 整理：常见磁铁部件的六维线性传输矩阵

第7章介绍粒子横向动力学时，给出了几种常见磁铁部件的二维线性传输矩阵。这一章介绍完粒子的纵向动力学后，这里结合横向与纵向维度，给出常见磁铁部件的六维线性传输矩阵，整理如下：

定理 8.9. 几种常见部件的六维传输矩阵

以下以 $[x \ x' \ y \ y' \ z \ \delta]^T$ 为六维相空间基底向量。对于真空漂移段 (free-space drift space)， 6×6 线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\ell}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.251)$$

其中， ℓ 为漂移段长度， γ 为参考粒子能量。

注 对低能粒子或极短电子束，漂移段是纵向色散元件。

对于弯转平面为 xs 平面的扇形二极铁 (sector dipole)^a， 6×6 线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \theta_x & \rho_x \sin \theta_x & 0 & 0 & 0 & \rho_x (1 - \cos \theta_x) \\ -\frac{1}{\rho_x} \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_x \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_x & -\rho_x (1 - \cos \theta_x) & 0 & 0 & 1 & -\rho_x (\theta_x - \sin \theta_x) + \frac{L}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.252)$$

其中， ρ_x 为弯转半径， $\theta_x = L/\rho_x$ 为弯转角度。磁铁弧形长度为 $L = |\rho_x \theta_x|$ 。由此矩阵的(2,1)元素可以看出，扇形二极铁贡献微弱的横向聚焦。一般假设 $\rho_x > 0, \theta_x > 0$ ，当磁聚焦结构同时存在顺向与反向弯转时， ρ_x 将变号，相应地， θ_x 也跟着变号。有

时候还写成如下形式

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \frac{L}{\rho_x} & \rho_x \sin \frac{L}{\rho_x} & 0 & 0 & 0 & \rho_x \left(1 - \cos \frac{L}{\rho_x}\right) \\ -\frac{1}{\rho_x} \sin \frac{L}{\rho_x} & \cos \frac{L}{\rho_x} & 0 & 0 & 0 & \sin \frac{L}{\rho_x} \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \frac{L}{\rho_x} & -\rho_x \left(1 - \cos \frac{L}{\rho_x}\right) & 0 & 0 & 1 & -\rho_x \left(\frac{L}{\rho_x} - \sin \frac{L}{\rho_x}\right) + \frac{L}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.253)$$

对于 x 方向聚焦 (则 y 方向散焦) 四极铁 (focusing quadrupole)，有 $K_x > 0, K_y = -K_x < 0$ ，则 6×6 线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K_x} \ell) & \frac{\sin(\sqrt{K_x} \ell)}{\sqrt{K_x}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{K_x} \sin(\sqrt{K_x} \ell) & \cos(\sqrt{K_x} \ell) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\sqrt{K_y} \ell) & \frac{\sin(\sqrt{K_y} \ell)}{\sqrt{K_y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{K_y} \sin(\sqrt{K_y} \ell) & \cos(\sqrt{K_y} \ell) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\ell}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.254)$$

其中， ℓ 为磁铁长度。在一个维度上为 \sin, \cos ，在另一个维度上将有 \sinh, \cosh ，可利用 $\sin(ix) = i \sinh x$ 与 $\cos(ix) = \cosh x$ 化简。

对于 x 方向散焦 (则 y 方向聚焦) 四极铁 (defocusing quadrupole)，有 $K_x < 0, K_y = -K_x > 0$ ，其 6×6 线性传输矩阵形式同上。

对斜四极铁 (skew quadrupole)，为正四极铁旋转 45° ，由于 xy 耦合，横向至少需要 4×4 矩阵才能描述，纵向可视为漂移段，则 6×6 线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} C_+ & \frac{S_+}{\sqrt{q}} & C_- & \frac{S_-}{\sqrt{q}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{q}S_- & C_+ & -\sqrt{q}S_+ & C_- & 0 & 0 \\ C_- & \frac{S_-}{\sqrt{q}} & C_+ & \frac{S_+}{\sqrt{q}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{q}S_+ & C_- & -\sqrt{q}S_- & C_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\ell}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.255)$$

其中，

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{\cos \theta + \cosh \theta}{2}, & C_- &= \frac{\cos \theta - \cosh \theta}{2} \\ S_+ &= \frac{\sin \theta + \sinh \theta}{2}, & S_- &= \frac{\sin \theta - \sinh \theta}{2} \end{aligned} \quad (8.256)$$

其中， $q = -\frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial y}$ ， $\theta = \sqrt{q}\ell$ ， ℓ 为斜四极铁长度。

对于矩形二极铁 (rectangular dipole)，由于需要考虑边缘场效应， 6×6 传输矩阵可以分别从二维分块矩阵构造。边缘场有类似四极铁的聚焦/散焦效果。 x 方向 2×2 线性传输矩阵有

$$\tilde{\mathbf{M}}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \frac{\theta_x}{2}}{\rho_x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_x & \rho_x \sin \theta_x \\ -\frac{1}{\rho_x} \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \frac{\theta_x}{2}}{\rho_x} & 1 \end{pmatrix} \quad (8.257)$$

其中， $\rho_x > 0$ 为弯转半径， θ_x 为矩形二极铁的弯转角度。

类似地， y 方向 2×2 线性传输矩阵有

$$\tilde{\mathbf{M}}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \frac{\theta_y}{2}}{\rho_x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \frac{\theta_y}{2}}{\rho_x} & 1 \end{pmatrix} \quad (8.258)$$

纵向 z 方向 2×2 线性传输矩阵同上面的扇形二极铁。

对螺线管，包含主体与边缘场的总体 6×6 线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} C^2 & SC/k & SC & S^2/k & 0 & 0 \\ -kSC & C^2 & -kS^2 & SC & 0 & 0 \\ -SC & -S^2/k & C^2 & SC/k & 0 & 0 \\ kS^2 & -SC & -kSC & C^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\ell}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.259)$$

其中， $k = \frac{B_s}{2B\rho}$ ， $B\rho$ 为磁刚度， ℓ 为螺线管长度， $C = \cos k\ell, S = \sin k\ell$ 。

有时候分析螺线管时，不需要整体，只需要主体或边缘场的一部分，则有 6×6 主体传输矩阵

$$\mathbf{M}_{\text{body}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin 2k\ell}{2k} & 0 & \frac{(1-\cos 2k\ell)}{2k} & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2k\ell & 0 & \sin 2k\ell & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(1-\cos 2k\ell)}{2k} & 1 & \frac{\sin 2k\ell}{2k} & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2k\ell & 0 & \cos 2k\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\ell}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.260)$$

其中， ℓ 为螺线管长度。入口与出口 6×6 边缘场传输矩阵有

$$\mathbf{M}_{\text{entry}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\text{exit}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.261)$$

其中， $k = \frac{B_s}{2B\rho}$ ， $B\rho$ 为磁刚度。

以上有

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{exit}} \mathbf{M}_{\text{body}} \mathbf{M}_{\text{entry}} \quad (8.262)$$

注 对螺线管， x, y 维度的 2×2 分块矩阵的行列式值 $\neq 1$ 。但整体 6×6 为辛矩阵。

*粒子进入与离开扇形二极铁时，假设参考粒子的轨迹与磁铁横向极面垂直。 \square

对螺线管总体而言，如果按实体组成构造，其传输矩阵可以拆解成主体场与边缘场，即

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{exit}} \mathbf{M}_{\text{body}} \mathbf{M}_{\text{entry}} \quad (8.263)$$

也可以按物理效应构造，将其拆解为横向 xy 两个方向同时聚焦 (focusing) 与旋转 (rotation) 的合成，即

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{rotation}} \mathbf{M}_{\text{focusing}} \quad (8.264)$$

其中，

$$\mathbf{M}_{\text{focusing}} = \begin{pmatrix} \cos k\ell & (\sin k\ell)/k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k \sin k\ell & \cos k\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\ell & (\sin k\ell)/k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin k\ell & \cos k\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\ell}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.265)$$

与

$$\mathbf{M}_{\text{rotation}} = \begin{pmatrix} \cos k\ell & 0 & \sin k\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos k\ell & 0 & \sin k\ell & 0 & 0 \\ -\sin k\ell & 0 & \cos k\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin k\ell & 0 & \cos k\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.266)$$

注 不难看出，以上列举的部件中，凡是考虑了有限长度的，其纵向动量紧缩因子 R_{56} 都包含 ℓ/γ^2 。敏锐的读者可能觉得这一项的存在有些不自然，因为这表示该矩阵元素依赖于粒子特性。这与先前的认知 — 传输矩阵应独立于粒子参数，仅与部件参数有关 — 似乎有些出入。确实如此。当考虑极端相对论粒子时， $\gamma \rightarrow \infty$ ，部件长度本身导致的漂移效应可忽略不计，即纵向动量紧缩因子 $R_{56} \rightarrow 0$ 。对粒子处于非极端相对论但仍可视为高能近似，真空漂移效应 R_{56} 或许可以忽略，视研究的效应而定。



笔记 如果考虑的是真空漂移段纵向空间电荷引起的微束团动力学，则 $R_{56} \neq 0$ 必须保留，

否则其物理效应无法体现。微束团动力学将在第 16 章介绍。

以上总结了几种常见部件的六维传输矩阵，回忆一下关于传输矩阵的推导。在 §7.4 与 §7.8 介绍横向 2×2 传输矩阵时，虽然没有针对特定电磁部件分析，但我们知道横向 2×2 传输矩阵可以通过求解 Hill 方程得到。其实，对线性传输矩阵的推导还可以通过更一般、有系统的方式构造：电磁部件的哈密顿量。我们可以通过 §6.5 给出的加速器哈密顿量的一般形式开始，其中，几种常见部件的向量位函数 A_s 已经在 §7.1 给出。这里演示一个最简单的例子：推导真空漂移段的 6×6 传输矩阵。

由 §6.5 节的加速器哈密顿量开始，对真空漂移段，有 $\rho = \infty, A_s = 0$ ，其哈密顿量有

$$\mathcal{H} = \frac{\delta}{\beta_0} + \left(\frac{x'^2}{2D} + \frac{y'^2}{2D} - D \right) \quad (8.267)$$

其中， $D = \sqrt{1 + \frac{2\delta}{\beta_0} + \delta^2}$ = 定值。由哈密顿运动方程，六维相空间坐标的运动方程有

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x'} = \frac{x'}{D}, & \frac{dy}{ds} &= \frac{y'}{D} \\ \frac{dx'}{ds} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0, & \frac{dy'}{ds} &= 0 \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \delta} = \frac{1}{\beta_0} - \frac{\partial D}{\partial \delta} = \frac{1}{\beta_0} - \frac{\delta}{D} - \frac{1}{\beta_0 D} \\ \frac{d\delta}{ds} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (8.268)$$

其中， $\frac{\partial D}{\partial \delta} = \frac{1}{2D} \left(2\delta + \frac{2}{\beta_0} \right) = \frac{1}{D} \left(\delta + \frac{1}{\beta_0} \right)$ 。上面微分方程求解后，得

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{x'_0}{D} \ell, & y_1 &= y_0 + \frac{y'_0}{D} \ell \\ x'_1 &= x'_0, & y'_1 &= y'_0 \\ z_1 &= z_0 + \left(1 - \frac{1}{D} \right) \frac{\ell}{\beta_0} - \frac{\delta_0}{D} \ell \\ \delta_1 &= \delta_0 \end{aligned} \quad (8.269)$$

其中，假设 ℓ 为漂移段长度。由于 $\delta_0 = \delta(s=0)$ 为小量，上面结果可进一步化简，利用

$$1 - \frac{1}{D} = 1 - \left(1 + \frac{2\delta}{\beta_0} + \delta_0^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \left(1 - \frac{\delta}{\beta_0} \right) = \frac{\delta}{\beta_0} \quad (8.270)$$

泰勒展开后，有

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x'_0 \ell, & y_1 &= y_0 + y'_0 \ell \\ x'_1 &= x'_0, & y'_1 &= y'_0 \\ z_1 &= z_0 + \frac{\delta_0}{\beta_0^2} \ell - \left(1 - \frac{\delta_0}{\beta_0} \right) \delta_0 \ell \\ &\approx z_0 - \left(1 - \frac{1}{\beta_0^2} \right) \delta_0 \ell \approx z_0 + \frac{\ell}{\gamma^2} \delta_0 \\ \delta_1 &= \delta_0 \end{aligned} \quad (8.271)$$

其中， $1 - \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{1-\gamma^2} \approx -\frac{1}{\gamma^2}$ 。将以上结果以矩阵表示，可得真空漂移段的 6×6 传输矩

阵。



笔记 以上推导的最后一步是将解得的相空间坐标泰勒展开而得到最终线性解。更严谨的做法为在写出哈密顿量时就想好泰勒展开到第几阶，这样更系统、规范，也更容易出错。

✍ **练习 8.24** 将真空漂移段的哈密顿量先展开至 x', y', δ 的二阶项，再利用哈密顿运动方程求解相空间坐标，证明得到的线性传输矩阵与上面结果一致。 ■

✍ **练习 8.25** 针对 §7.1 给定的 A_s ，对不同电磁部件，推导其对应的 6×6 线性传输矩阵。 ■

✍ **练习 8.26** 组合功能弯转磁铁同时包含二极与四极磁场，推导其对应的 6×6 线性传输矩阵。 ■

解 参考 Andrzej Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Press (2014) 一书的 §3.2。 ■

8.7.1 浅谈：光学的 Kostenbauder 传输矩阵

上一章 §7.4.1 简短介绍了横向一维 2×2 光学部件的传输矩阵。回忆一下，当时先定义一个关键的复光束参量 $q(z)$ 用来描述光场传输特性，然后根据不同光学部件的特性，利用 A, B, C, D 四个矩阵元素构造出 $q(z)$ ，此过程又称 Möbius 变换，可写为

$$q_{\text{out}} = \frac{Aq_{\text{in}} + B}{Cq_{\text{in}} + D} \quad (8.272)$$

当光束线自 $s = s_i$ 至 $s = s_f$ 传输，其横向坐标有

$$\begin{pmatrix} x \\ \Theta \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Theta \end{pmatrix}_i \quad (8.273)$$

其中， x 为光束线相对于参考轨迹的横向偏移， Θ 为光束线相对于参考轨迹的夹角。对不同的光学部件， A, B, C, D 取值不同。原则上， A, B, C, D 仅与光学部件本身参数有关，与光束参数无关。ABCD 模型又称束线矩阵理论 (ray matrix theory)。

以上适用于横向一维情况，或横向二维但圆柱对称情况，则 $x \rightarrow r, \Theta \rightarrow r'$ 。对于横向非对称情况，从横向一维推广至横向二维仍相对容易。但如果考虑将横向推广到包含纵向，则光场的纵向时间-频率分布可能涉及色散，将相对复杂些。这一小节介绍的 Kostenbauder 传输矩阵为一种（非唯一）常用的描述横纵向光场传输特性的方法。此理论模型又称束线-脉冲矩阵理论 (ray-pulse matrix theory)。以下简短描述其思路。

相对于参考轨迹，考虑非参考光束线，其 x 为光束线相对于参考轨迹的横向偏移， Θ

为光束线相对于参考轨迹的夹角， Δt 为光束线相对于参考轨迹的(纵向)时刻差， $\Delta\nu$ 为光束线频率相对于中心频率的差³⁹。按此定义，则光束的传输矩阵可写为

$$\begin{pmatrix} x \\ \Theta \\ \Delta t \\ \Delta\nu \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & E \\ C & D & 0 & F \\ G & H & 1 & I \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Theta \\ \Delta t \\ \Delta\nu \end{pmatrix}_{\text{in}} \quad (8.274)$$

其中，Kostenbauder 矩阵元素 E, F, G, H, I 的物理意义可参考图 8.31

$$E = \frac{\partial x_{\text{out}}}{\partial \Delta\nu_{\text{in}}}, \quad F = \frac{\partial \Theta_{\text{out}}}{\partial \Delta\nu_{\text{in}}}, \quad G = \frac{\partial \Delta t_{\text{out}}}{\partial x_{\text{in}}}, \quad H = \frac{\partial \Delta t_{\text{out}}}{\partial \Theta_{\text{in}}}, \quad I = \frac{\partial \Delta t_{\text{out}}}{\partial \Delta\nu_{\text{in}}} \quad (8.275)$$

类似于辛条件，以上传输矩阵元素间满足如下条件

$$\begin{aligned} AD - BC &= 1 \\ BF - ED &= \lambda_\ell H \\ AF - EC &= \lambda_\ell G \end{aligned} \quad (8.276)$$

其中， λ_ℓ 为光场中心波长。

对光学色散元件，由于不同频率成分的光场经过时将积累不同程度的相位差。对具有稍微不同频率的光脉冲来说，经过此光学部件积累的相位可通过矩阵元素运算得到，可以证明有

$$\Psi = \frac{\pi \Delta\nu^2}{B} (EH - BI) - \frac{\pi}{B \lambda_\ell} Q(\Delta\nu) \quad (8.277)$$

其中，

$$Q(\Delta\nu) = \begin{pmatrix} x_{\text{in}} & x_{\text{out}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -1 \\ -1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{in}} \\ x_{\text{out}} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} E & \lambda_0 H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{in}} \\ x_{\text{out}} \end{pmatrix} \quad (8.278)$$

略去证明细节，先前定义的复光束参量 $q(z)$ 现在也可以推广为 2×2 的复光束参量矩阵 $\tilde{Q}(z)$ ，且有

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_{\text{out}} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} A & 0 \\ G & 1 \end{pmatrix} (\tilde{Q}_{\text{in}}) + \begin{pmatrix} B & E/\lambda_\ell \\ H & I/\lambda_\ell \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\tilde{Q}_{\text{in}}) + \begin{pmatrix} D & F/\lambda_\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad (8.279)$$

对细节感兴趣的读者，可参考原始论文 A.G. Kostenbauder, Ray-pulse matrices: a rational treatment for dispersive optical systems, IEEE JQE **26**, 1148-1157 (1990). <https://doi.org/10.1109/3.108113> 或 Jean-Claude Diels and Wolfgang Rudolph, Ultrashort Laser Pulse Phenomena 一书的 §2.7。

³⁹注意，不要与 tune shift 搞混。

$$\begin{pmatrix} x \\ \Theta \\ \Delta t \\ \Delta \nu \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & E \\ C & D & 0 & F \\ G & H & 1 & I \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Theta \\ \Delta t \\ \Delta \nu \end{pmatrix}_{\text{in}}$$

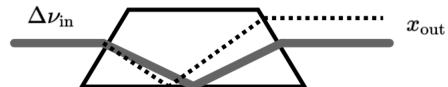
矩阵元素

物理图像

图例

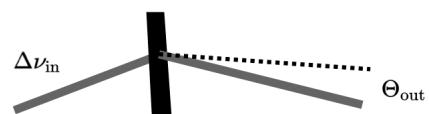
$$E = \frac{\partial x_{\text{out}}}{\partial \Delta \nu_{\text{in}}}$$

位置色散
Position dispersion



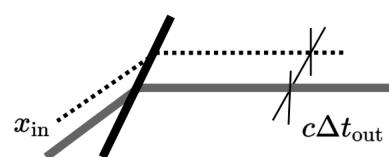
$$F = \frac{\partial \Theta_{\text{out}}}{\partial \Delta \nu_{\text{in}}}$$

角度色散
Angular dispersion



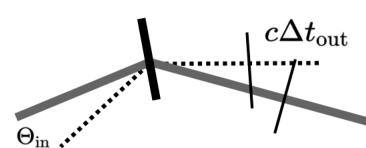
$$G = \frac{\partial \Delta t_{\text{out}}}{\partial x_{\text{in}}}$$

脉冲前沿倾斜
Tilt of pulse front



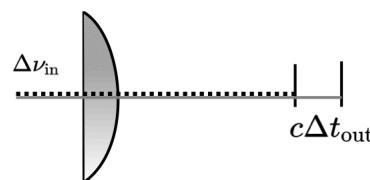
$$H = \frac{\partial \Delta t_{\text{out}}}{\partial \Theta_{\text{in}}}$$

角度色散导致延迟
Delay due to angular dispersion



$$I = \frac{\partial \Delta t_{\text{out}}}{\partial \Delta \nu_{\text{in}}}$$

频散导致延迟
Delay due to spectrum

图 8.31: Kostenbauder 矩阵元素 E, F, G, H, I 的物理意义。图例修改自 Diels & Rudolph。

8.8 储存环的纵向逐圈跟踪方程

到目前为止, 介绍的单粒子运动方程采用微分方程形式。当忽略同步辐射效应时, 纵向运动方程有

$$\begin{aligned} z' &\equiv \frac{dz}{ds} = -\eta\delta \\ \delta' &\equiv \frac{d\delta}{ds} = \frac{qV_{\text{RF}}}{E_0C_0} \sin\left(\phi_{\text{RF}} - \frac{\omega_{\text{RF}}}{c}z\right) \end{aligned} \quad (8.280)$$

其中, z 为束团内任一粒子相对于参考粒子的纵向坐标⁴⁰, $\delta = \Delta E / \beta^2 E_0$ 为束团内任一粒子相对于参考粒子的归一化能量偏差, s 为演化的“时间”变量。

很多时候, 特别是采用数值模拟分析纵向动力学时, 需要列写逐圈跟踪方程, 此时纵向相空间坐标 (z, δ) 会以其它等价形式描述, 比如: $(\phi, \Delta E)$, 其中, ϕ 为束团内任一粒子相对于参考粒子同步相位的相位差⁴¹, ΔE 则为束团内任一粒子相对于参考粒子的能量偏差。以 $(\phi, \Delta E)$ 描述的纵向运动方程有

$$\begin{aligned} \Delta E_{n+1} &= \Delta E_n + qV_{\text{RF}} \sin \phi_n - U_0 = \Delta E_n + qV_{\text{RF}} (\sin \phi_n - \sin \phi_s) \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi h\eta \frac{\Delta E_{n+1}}{\beta^2 E_0} \end{aligned} \quad (8.281)$$

其中, 下标 $n, n+1$ 记录逐圈跟踪, 此时演化的“时间”变量为 t 或圈数 n 。此时对应的系统哈密顿量可写为

$$H(\phi, \Delta E) = \frac{1}{2} \frac{h\omega_0^2 \eta}{\beta^2 E_0} \left(\frac{\Delta E}{\omega_0} \right)^2 + \frac{eV_{\text{RF}}}{2\pi} [\cos \phi - \cos \phi_s + (\phi - \phi_s) \sin \phi_s] \quad (8.282)$$

或改写成“动能”项与“位能”项

$$\underbrace{(\Delta E)^2}_{\text{kinetic-like energy}} = -\underbrace{\frac{eV_{\text{RF}}\beta^2 E_0}{\pi h\eta} [\cos \phi - \cos \phi_s + (\phi - \phi_s) \sin \phi_s]}_{\text{potential-like energy}} + \underbrace{\frac{2\beta^2 E_0}{h\eta} H}_{\text{constant}} \quad (8.283)$$

其中, “位能”项即对应 §8.2 介绍的位势, 有

$$V(\phi) = \frac{eV_{\text{RF}}\beta^2 E_0}{\pi h\eta} [\cos \phi - \cos \phi_s + (\phi - \phi_s) \sin \phi_s] \quad (8.284)$$

以上逐圈跟踪方程写成离散的映射形式 (synchrotron mapping equation), 由束团内粒子第 n 圈相位与能量偏差信息决定该粒子在第 $(n+1)$ 圈的能量偏差信息。接着, 结合粒子在第 $(n+1)$ 圈的能量偏差信息与第 n 圈的相位信息, 决定该粒子在第 $(n+1)$ 圈的相位。

 **练习 8.27** 思考一下, 逐圈跟踪的映射方程如果写成以下形式

$$\begin{aligned} \Delta E_{n+1} &= \Delta E_n + qV_{\text{RF}} (\sin \phi_{n+1} - \sin \phi_s) \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi h\eta \frac{\Delta E_n}{\beta^2 E_0} \end{aligned}$$

是否合理? 试论证。 ■

⁴⁰按此讲义惯例, $z > 0$ 对应束团头部粒子, $z < 0$ 则对应束团尾部粒子。

⁴¹一般惯例假设 $\phi < \phi_s$ 的粒子为头部粒子, $\phi > \phi_s$ 则对应束团的尾部粒子。

以上的逐圈跟踪方程尚不考虑同步辐射效应，如果加入同步辐射效应，则需要考虑同步辐射阻尼与量子激发效应，即纵向逐圈跟踪方程可写成

$$\begin{aligned}\Delta E_{n+1} &= \Delta E_n + eV_{\text{RF}} \sin \phi_n - U_0 - U_{\text{rad, damping}} - U_{\text{rad, excitation}} \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi h \eta \frac{\Delta E_{n+1}}{\beta^2 E_0}\end{aligned}\quad (8.285)$$

其中， U_0 表征同步辐射能量损失，可以采用经典力学图像结果

$$U_0 \rightarrow U_0^{\text{classical}} [\text{MeV}] = 8.846 \times 10^{-2} \frac{E^4 [\text{GeV}]}{\rho [\text{m}]} \quad (8.286)$$

或量子力学图像结果

$$U_0 \rightarrow U_0^{\text{quantum}} = N_\gamma \langle E_\gamma \rangle = \frac{5\pi\alpha_f\gamma}{\sqrt{3}} \times \frac{8}{15\sqrt{3}} E_{\gamma c}, \quad E_{\gamma c} = \frac{3}{2} \hbar c \frac{\gamma^3}{\rho} \quad (8.287)$$

此处 $U_0^{\text{classical}}$ 与 U_0^{quantum} 两式等价。

Eq. (8.285) 中表征同步辐射阻尼项的 $U_{\text{rad, damping}}$ 在一阶近似下可写成

$$U_{\text{rad, damping}} \approx \frac{dU}{dE} \Delta E = \frac{U_0}{E_0} (2 + \mathcal{D}) \Delta E \quad (8.288)$$

此外，表征同步辐射量子激发项的 $U_{\text{rad, excitation}}$ 可写成

$$U_{\text{rad, excitation}} = \sqrt{N_\gamma \langle E_\gamma^2 \rangle} \mathcal{R} \quad (8.289)$$

其中， \mathcal{R} 为平均值为 0、方均根为 1 的高斯分布随机变量⁴²。

此处略去论证细节，仅给出包含上述效应的纵向逐圈跟踪方程的最终形式

$$\begin{aligned}\Delta E_{n+1} &= \Delta E_n + qV_{\text{RF}} \cos(\omega_{\text{rf}} \phi_n + \phi_s) - U_0 - \frac{2T_{\text{rev}}}{\tau_e} \Delta E_n + 2\sigma_{\delta 0} \sqrt{\frac{T_{\text{rev}}}{\tau_e}} \mathcal{R}_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \frac{2\pi h \eta}{\beta^2 E_0} \Delta E_{n+1}\end{aligned}\quad (8.290)$$

其中， $\sigma_{\delta 0}$ 为阻尼效应与激发效应达平衡时的能散(非初始能散)，逐圈更新的 \mathcal{R}_n 为平均值为 0、方均根为 1 的高斯分布随机变量。



笔记 逐圈跟踪方程适合用于数值模拟，包含的物理效应也能很直观地体现在方程组中的每一项。对此感兴趣的读者，可考虑用自己熟悉的语言编写一段代码，实现储存环的纵向逐圈动力学模拟，并与理论结果对比。

注 以上逐圈跟踪方程假设参考粒子为固定能量，不涉及粒子加速过程。此外，还假设储存环中只有一个谐振腔，不包含高次谐波腔。对涉及粒子增能的加速过程或同时包含主腔与谐波腔情况，可适当修改推广逐圈跟踪方程。

⁴²在 MATLAB 中，可通过 `normrnd(0, 1)` 生成。

8.9 一个电子储存环自然发射度的定标定律

第4章介绍了单电子的同步辐射特性，知道当辐射频率成分高于临界频率 $\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$ 时，同步辐射功率随指数衰减 $\propto e^{-\omega/\omega_c}$ 。为了覆盖短波长同步辐射用户，一般电子同步辐射储存环的能量设定在 $1 \sim 10 \text{ GeV}$ 范围。

此外，直观认为，由多个粒子形成的电子束团，其束团整体的辐射功率与束团特性有关。如果忽略辐射场自身的衍射效应，则电子束产生的同步辐射特性与电子束团的特性可以互相关联，涉及的概念称辐射亮度 (brightness)，定义如下。

定义 8.15. 亮度 (brightness)

光源的亮度定义为单位面积内的光子通量，有

$$\mathcal{B} \equiv \frac{\text{辐射谱通量 (spectral flux)}}{\text{辐射场横向相空间面积 (transverse phase space area)}} = \frac{dN_{\text{ph}}}{\Delta A \Delta \Omega d\omega dt} \quad (8.291)$$

其中，

- $\Delta A \propto \Sigma_x \Sigma_{x'} \Sigma_y \Sigma_{y'}$ 为光子分布的横向相空间面积
- Ω 为自源至观察位置的立体角
- ω 为辐射光的频率
- t 为时间

“亮度”是设计同步辐射或 FEL 一个很有用的量化光束品质的参数。

注 许多情况下，使用单色仪选择局部频率的光谱，以分母 $d\omega$ 或 $\Delta\omega$ 表征。

注 谱通量 (spectral flux) 的量纲为单位时间、单位中心频率、单位立体角的光子数。

有时候，单位中心频率会采用单位中心 相对 频率，即 $d\omega \rightarrow d\omega/\omega_0$ 。 □

更多关于亮度的讨论参见 §10.2。此处分母的 $\Delta A \propto \Sigma_x \Sigma_{x'} \Sigma_y \Sigma_{y'}$ 应视为光子分布函数的横向相空间面积。忽略辐射场自身的衍射效应，光子分布函数的横向相空间面积可近似⁴³视为电子束的横向相空间面积——即电子束横向几何 (自然) 发射度 $\epsilon_{x,y}$ 。基于此思路，如果能降低电子束横向发射度，则同步辐射亮度将能得到有效提高。由 §8.3 性质 8.1，当同步辐射阻尼与量子激发效应达平衡时，有平衡横向束团几何发射度

$$\epsilon_x = C_q \frac{\gamma^2}{\mathcal{J}_x} \frac{\mathcal{I}_{5x}}{\mathcal{I}_2} = C_q \gamma^2 \frac{\langle \frac{\mathcal{H}_x}{|\rho|^3} \rangle}{\mathcal{J}_x \langle \frac{1}{\rho^2} \rangle} \xrightarrow{\text{等磁环}} C_q \gamma^2 \frac{\langle \mathcal{H}_x \rangle_{\text{弯铁}}}{\mathcal{J}_x \rho} \quad (8.292)$$

其中，简化起见，做了等磁环近似，即 $\langle R \rangle = C/2\pi = \rho$ ， C 为储存环周长。上式中的 \mathcal{H}_x

⁴³此“近似”条件成立的前提为，除追求更低的束团发射度，还要求电子束与辐射束之间有更好的匹配 (重叠)，以提高有效亮度。

函数定义为

$$\mathcal{H}_x = \gamma_x D_x^2 + 2\alpha_x D_x D'_x + \beta_x D'^2_x = \frac{D_x^2 + (\beta_x D'_x + \alpha_x D_x)^2}{\beta_x} \sim \rho \theta^3 \sim L \theta^2 \quad (8.293)$$

其中, L 为弯铁长度, θ 为弯转角度。 $\langle \dots \rangle$ 为对全环取平均。

由此可以看到, 要进一步降低束团发射度, 可通过调整全环磁聚焦结构弯铁内的光学参数, 减小弯铁内的 \mathcal{H}_x 函数达到。以上 θ 可以推广为磁聚焦结构单元节 (lattice cell) 的弯转角度, 则 L 为对应的单元节长度。由于 $\mathcal{J}_x \approx 1$, 因此有以下关于电子储存环自然发射度的定标定律。

定律 8.3. 电子储存环自然发射度的定标定律

考虑同步辐射阻尼与量子激发效应后, 电子储存环自然发射度的定标关系有

$$\epsilon_x \propto \gamma^2 \theta_c^3 \propto \frac{E^2}{N_c^3} \quad (8.294)$$

或

$$\epsilon_{N,x} = \gamma \epsilon_x \propto \gamma^3 \theta_c^3 \propto \frac{E^3}{N_c^3} \quad (8.295)$$

其中, $E = \gamma m_e c^2$ 为粒子能量、 $N_c = 2\pi/\theta_c$ 为全环中的单元节总数, 也可视为储存环弯铁总数, θ_c 为每个单元节的弯转角度。

注 此定律忽略束内散射 (intrabeam scattering, IBS) 效应, 如果考虑 IBS, 则定标关系需要修正。更多讨论可参考 X. Huang, Potential performance limit of storage rings, IPAC 2017 (WEPAB114). <https://accelconf.web.cern.ch/ipac2017/papers/wepab114.pdf>。

注 以上讨论还忽略了储存环插件磁铁元件 (如: 波荡器、扭摆器) 对电子束团发射度的影响。更多讨论可参考 Shyh-Yuan Lee, Accelerator Physics, 4th ed., World Scientific (2019) 一书的 Chapter 4 §III.3。

注 对电子直线加速器, 其自然发射度随能量的定标定律源于绝热阻尼效应, 有 $\epsilon_x \propto 1/\gamma$ 。 □

练习 8.28 试估算多弯铁磁消色散聚焦结构单元有

$$\epsilon_0 \approx \frac{C_q \gamma^2}{12\sqrt{15}} \left(\frac{M+1}{M-1} \right) \theta^3.$$

其中, M 为单元节内的弯转磁铁个数, θ 为每块弯转磁铁的 (平均) 弯转角度。对 DBA 情况, $M = 2$; 对理论最小发射度 (theoretical minimum emittance, TME) 情况, $M \rightarrow \infty$ 。 ■

解 参考 A. Wolski 一书的 §7.3.3。

由此定律可以看出，当单元节总数越多 (N_c 越大) 或单个弯铁弯转角度越小 (θ_c 越小)，当忽略集体效应影响时，所能达到的最小自然发射度就越低。因此，现在电子同步辐射储存环的设计趋势是将更多、更短的弯转磁铁安排在一单元节内，使得单元节变得更紧凑。此一趋势一般伴随着同步辐射储存环周长变大。根据 Eq. (8.292)，不同的磁聚焦结构单元节设计有不同的 $\mathcal{F}_{\text{lattice}}$ ，其中，

$$\frac{\langle \mathcal{H}_x \rangle}{\mathcal{J}_x} = \mathcal{F}_{\text{lattice}} \rho \theta^3 \quad (8.296)$$

因此，设计并优化能够使 $\mathcal{F}_{\text{lattice}}$ 尽可能小的磁聚焦结构单元节成为目前储存环设计的普遍目标。例如：在储存环部分采用横向 x 方向散焦，通过调整 \mathcal{I}_{4x} ，增加 $\mathcal{J}_x = 1 - \mathcal{I}_{4x}/\mathcal{I}_2$ ，从而达到减小 $\mathcal{F}_{\text{lattice}}$ 的目的。

自从 2010 年 MAX-IV 同步辐射储存环磁聚焦结构引入多弯铁消色散段 (multi-bend achromat, MBA) 单元节设计之后 (参考图 8.32)，十年内世界上许多同步辐射储存环已积极考虑采用 MBA 作为升级或建设方案。更多的单元节或更短的弯转磁铁表征单元内较小的色散。MBA 单元节的特点是具有高场强的四极铁与六极铁，使得 $\langle \mathcal{H}_x \rangle$ 更小。可以预见，下一代储存环同步辐射光源将具有更好的效能。对相同尺寸与相同能量的储存环，利用 MBA 可以使横向自然发射度比原先的效能再提升 10 至 50 倍，即发射度降 10 至 50 倍。由于有较强的四极磁场，可以使电子束团束腰处 (即 betatron 函数、色散函数) 在弯转磁铁的中央位置附近，从而降低束团发射度。

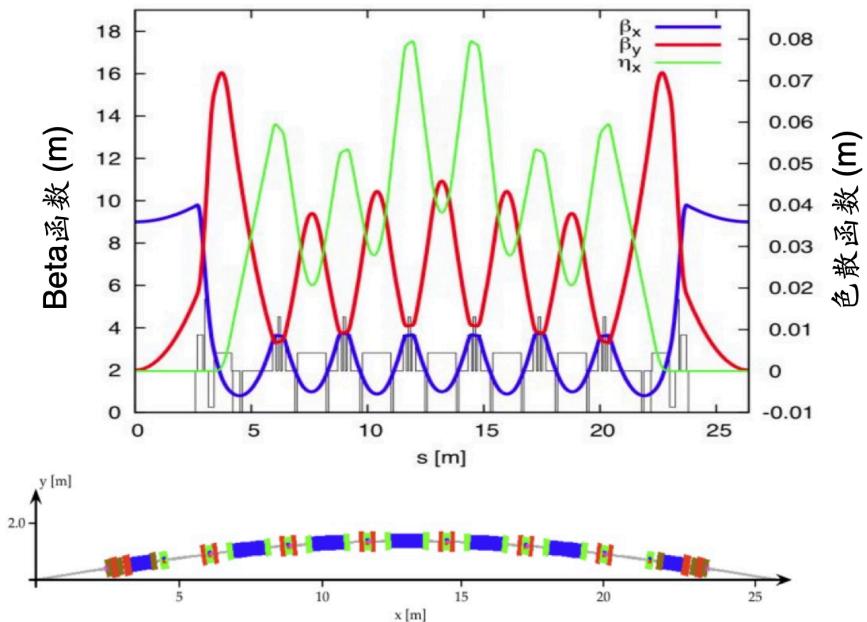


图 8.32: MAX-IV 3 GeV 储存环磁聚焦结构单元节及其 Courant-Snyder 函数。图例取自 M. Eriksson et al., The MAX IV Facility, Journal of Physics: Conference Series **425**, 072008 (2013). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/425/7/072008>。

由以上讨论还可以看到，能量越低，似乎也能使束团发射度降低。然而，能量降低之

后，束内散射 (intrabeam scattering, IBS) 效应⁴⁴将开始变得显著而不能再忽略。此外，较小的 betatron 函数与色散函数似乎意味着束团在磁聚焦结构传输段多处位置的尺寸较小，将使得修正色品的六极铁效能降低，意味着需要更强的六极场才行。由于六极场为非线性场，更强的六极场将使得动力学孔径或动量孔径减小，可能对储存环整体效能产生影响。

为了达到更高的辐射亮度与辐射场的横向相干性，近年的衍射极限储存环设计的特点是提高了横向 x, y 方向耦合，在环中的一些位置使电子束的横向 x, y 方向尺寸相当。

这一节仅简单讨论电子储存环自然发射度的定标定律。更深入的讨论可参考 S.Y. Lee 一书的 Chapter 4 §III。结束这一章前，我们提出一个问题：为什么追求磁聚焦结构单元节的设计都是以消色散为前提？如果单元节存在余下非零的色散，对储存环整体发射度如何改变、是否影响效能？根据 S.Y. Lee 一书 Chapter 4 §III.F 的讨论，非消色散磁聚焦结构单元节理论上能达到的最低发射度可比消色散单元节能达到的最低发射度还低约两倍。但是，在单元节间的直线段将不再是无色散了，而是存在残余色散。因此，付出的代价是对安装在直线段的波荡器或扭摆器，产生的辐射场特性降低与对电子束的可能负面影响。尽管如此，并不是没有缓解办法，可以在直线段增加一段 QBA (quadrupole-bend achromat)，为一种特殊的双弯铁结构，能匹配直线段的残余非零色散。因此，这种能够在进一步降低发射度的同时，还提供接近消色散的直线段。

⁴⁴将在第 11 章讨论。

8.10 电子同步辐射加速器进展

这一节简要回顾电子同步加速器作为同步辐射光源的大致进展：

1. **第一代**：高能物理电子储存环的副产品、一种寄生的能量损耗 (parasitic loss)、不是有意产生的。1960 年代开始，作为高能粒子物理用途的电子同步加速器，伴随产生的同步辐射开始少数应用。当时这类加速器的横向 x 方向几何发射度约 $0.1 \sim 1 \mu\text{m}$ 。
2. **第二代**：有意、专门设计电子束以产生的电磁辐射，称同步辐射，主要靠储存环的弯转磁铁产生。1970 年代开始，这类加速器的横向 x 方向几何发射度约 $0.01 \sim 0.1 \mu\text{m}$ ，有些已经开始安装扭摆器等插件磁铁 (insertion device)。
3. **第三代**：电子储存环中有意、专门设计插件磁铁以产生的电磁辐射，称波荡器辐射。追求插件磁铁辐射亮度提升。1990 年代开始，这类加速器的横向 x 方向几何发射度约 1 nm 。此时的同步辐射加速器还可大致区分两类，一类属于相对低能区， 3 GeV 左右，产生软 X 射线为主；一类属于相对高能区， $6 \sim 8 \text{ GeV}$ 左右，产生硬 X 射线为主。
4. **第四代**⁴⁵：自由电子激光⁴⁶、衍射极限⁴⁷储存环。追求更低的发射度与更高亮度，探索多参量间的平衡与全面优化。

这里简短总结电子储存环作为同步辐射光源中，第三代光源与第四代光源的几个区别。这些区别源于技术的发展和对第四代同步辐射光源中更高的亮度、相干性和稳定性的追求。

- **磁聚焦结构单元节** \Rightarrow 在第三代同步辐射光源中，磁聚焦结构设计通常使用双弯铁消色散系统 (double bend achromat, DBA) 单元或三弯铁消色散系统 (triple bend achromat, TBA) 单元，以实现低平衡自然/几何发射度。相比之下，第四代同步辐射光源基于多弯铁消色散系统 (multi-bend achromat, MBA) 单元节概念，允许比第三代光源更低的自然平衡发射度和更高的亮度和相干性，参考图 8.33。
- **磁铁配置** \Rightarrow 第三代同步辐射光源通常使用组合功能二极磁铁配置，通过在二极偏转场中添加较小的四极聚焦/散焦场分量来实现。相比之下，有的第四代同步辐射光源采用四极铁中心偏移配置来实现二极铁的弯转功能，工程实现更具挑战性，但允许更强的磁场和超低发射度。
- **真空管道系统** \Rightarrow 第四代同步辐射光源的真空管道系统具有小的金属管道孔径和紧凑的真空仪器空间以容纳所需数量的磁铁⁴⁸。以往第三代光源常采用集中式 (lumped) 真空吸气泵。先前的尝试已证实使用 NEG 涂层⁴⁹的真空管道能实现小孔径真空系

⁴⁵关于第四代光源认定，还有其它未定论的候选名单，如：能量回收加速器 (energy recovery linac, ERL) 的先进光源、衍射极限储存环 (diffraction limited storage ring, DLSR) 等。

⁴⁶第 10 章将介绍。

⁴⁷“衍射极限”一词的意义将在第 9 章将介绍。

⁴⁸更小的金属管道孔径是由于磁铁设计追求更高场强的磁场，更紧凑是由于更多的弯铁磁铁。这将给加速器组成的其它部分，如束测、真空部件等，带来更多挑战。

⁴⁹NEG 为非挥发性吸气剂 (non-evaporable getter)，是一种在真空技术中使用的涂层。吸气剂是一种添加到真空系统中的材料，用于吸收和保留微量气体，从而保持更高的真空水平。留意，非挥发性吸气剂不是蒸发，而

统中所需的真空级别和紧凑空间，且为分布式 (distributed) 方案。

- 束团稳定性 \Rightarrow 由于超低发射度和相对较强的磁场，第四代同步辐射光源对束团稳定性要求比第三代光源更严苛。这需要在整个建设过程中，从土木工程到光学系统安排，都要仔细考虑稳定性。与第四代光源相比，第三代同步辐射光源的稳定性要求较低，这是由于它们的不同设计参数和操作特性所致。

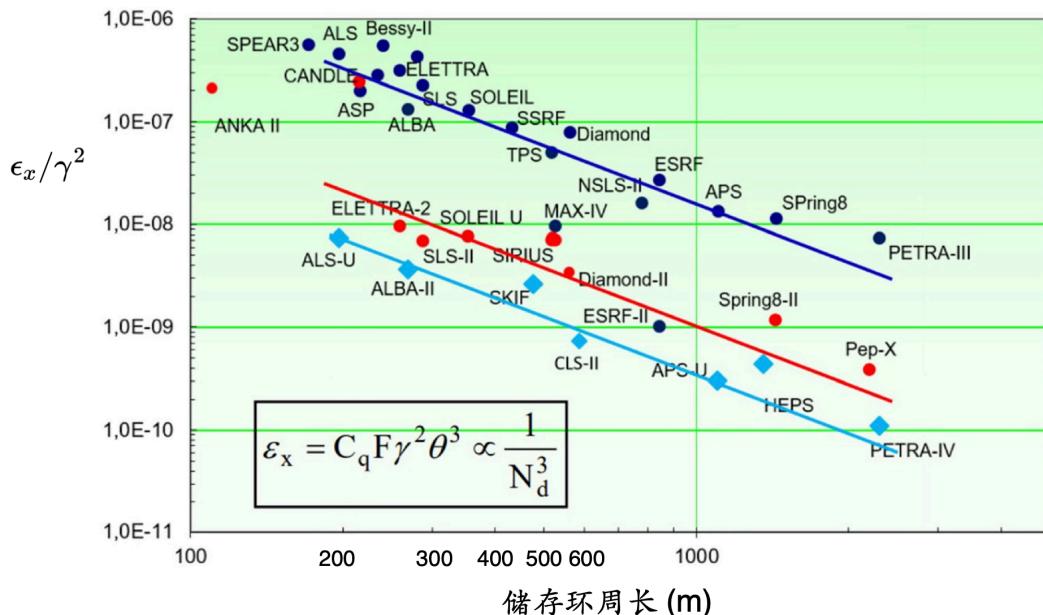


图 8.33: 三代与四代同步加速器储存环发射度 ϵ_x/γ^2 随储存环周长的关系。图中深蓝色点为三代储存环同步辐射光源、红色点为四代储存环同步辐射光源、天蓝色点为全面优化后更低发射度的四代储存环同步辐射光源。图例取自 S. Shin, New era of synchrotron radiation: fourth-generation storage ring, AAPPS Bulletin 31, 21 (2021). <https://link.springer.com/article/10.1007/s43673-021-00021-4>。

目前来说，全面优化的四代储存环同步辐射光源正在如火如荼开展，包含：

- MAX-IV (瑞典): 自 2017 年已开始运行
- ESRF-EBS (法国): 自 2020 年已开始运行
- Sirius (巴西): 自 2020 年已开始运行
- APS-U (美国): 正在建设并计划于 2023 年投入运行
- HEPS (中国): 正在建设并计划于 2025 年投入运行
- ELETTRA 2.0 (意大利)、SLS-II (瑞士) 和 SKIF (俄国): 获得资金支持
- PETRA-IV (德国)、ALS-U (美国) 和 Diamond (英国): 完成概念设计，2021 年进入技术设计阶段
- Korea-4GSR (韩国): 2021 年获得批准建造

是经历化学反应来捕获和保留气体分子。NEG 涂层通常由反应性金属组成，如：锆或钛，并被应用到真空系统内的表面。当激活时，这些涂层可以有效吸收和固定残留气体，特别是氢气和其他反应性气体，从而改善系统内的真空环境。NEG 涂层的激活涉及将其暴露在热源下，引发涂层材料与真空中的气体之间的化学反应。这种反应形成稳定的化合物，降低了气体浓度，有助于保持更洁净和更稳定的真空。NEG 涂层通常用于各种真空系统中，包括在粒子加速器、同步辐射光源和其他需要高真空条件的科学仪器中。它们通过帮助维持所需的真空水平，有助于提高这些系统的整体性能和寿命。相应地，也有一些挑战/议题需要克服/考虑，比如：传输管道的阻抗、热效应沉积等问题将影响束团的集体效应特性。

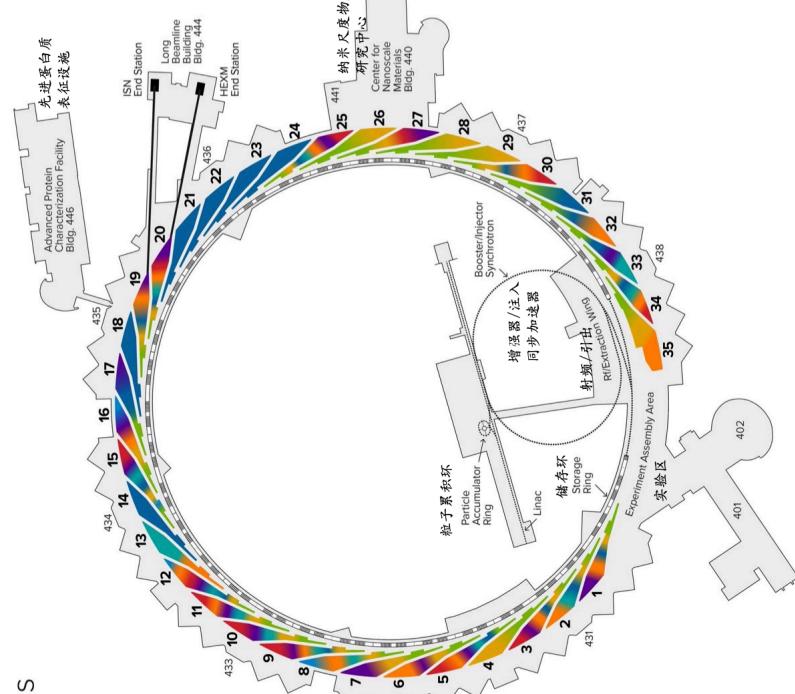
此讲义主要介绍加速器装置的束流物理与辐射特性，不打算深入介绍下游应用。作为同步辐射装置的用户 (user)，同步辐射光在储存环中产生之后，还要经过一段光束线才能抵达实验站(有时简称“线站”)。光束线的设计与电子束磁聚焦结构类似，包含引导、聚散焦、调整色散、滤波等。图 8.34 为美国阿贡国家实验室 (Argonne National Laboratory, ANL) 的先进光子源 (Advanced Photon Source, APS) 同步辐射装置的光束线布局图。为了有效提取同步辐射光，实验站均沿着切线方向排布。APS 共有 35 条光束线，实验涵盖物理、生命科学、化学、材料与环境科学等。

美国先进光子源 -- 光束线站

ADVANCED PHOTON SOURCE

Beamline Disciplines and Locations

SECTOR	BEAMLINE	DISCIPLINE
1	1-BM-B-C-1-ID-B-C-E XSD	KEY
2	2-BM-A-B-2-ID-D 2-ID-E XSD	生物与 环境科学
3	3-ID-B-C,D XSD	催化科学
4	4-ID-B,G,H-POLAR XSD	化学
5	5-BM-B-5-ID-B-C,D DND-CAT	地球科学
6	6-BM-A,B COMPRES/XSD 6-ID-B,C-6-ID-D XSD	物理
7	7-BM-B-7-ID-B,C,D XSD	聚合物
8	8-ID-E-XPCFS 8-BM-B XSD	
9	9-ID-D-CSII 9-BM-B,C XSD	
10	10-BM-A,B-10-ID-B MR-CAT	
11	11-BM-B-11-ID-B 11-ID-C-11-ID-D XSD	
12	12-BM-B-12-ID-B 12-ID-E XSD	
13	13-BM-C,D-13-ID-E GSECARS	
14	14-ID-B BiCARS	
15	15-ID-B,E-15-ID-C,D ChemMatCARS	
16	16-BM-B,D-16-ID-B 16-ID-E HPCAT/XSD	
17	17-BM-B XSD 17-ID-B IMCA-CAT	
18	18-ID-D Bio-CAT	
19	19-ID-B,X SN XSD	
20	20-ID-D,E-HEXM XSD	
21	21-ID-D-21-ID-F 21-ID-G LS-CAT	
22	22-ID-D-22-ID-E SER-CAT	
23	23-ID-B-23-ID-D GM/CA-XSD	
24	24-ID-C-24-ID-E NE-CAT	
25	25-ID-C 25-ID-D,E ASL XSD	
26	26-ID-C CNM/CA-XSD	
27	27-ID-B XSD	
28	28-ID-B,C-28-ID-D,E-28-ID-F 28-ID-G,CHEX XSD	
29	29-ID-C,D XSD	
30	30-ID-B,C XSD	
31	31-ID-D XSD 31-ID-E LRL-CAT	
32	32-ID-B,C XSD	
33	33-BM-C 33-ID-A,B,C-PYCHOC XSD	
34	34-ID-E-ATOMIC 34-ID-E-3DMM XSD	
35	35-ID-B,C,D E DCS	



U.S. DEPARTMENT OF ENERGY Argonne National Laboratory is a U.S. Department of Energy laboratory managed by UChicago Argonne, LLC.

图 8.34：美国先进光子源 APS 储存环光束线布局图。图例修改自 <https://www.aps.anl.gov/Beamlines>。

实验站数目一般比光束线数目多，即一条光束线能支持的实验/应用不止一种。以其中一条光束线 Sector 30 为例，参考图 8.35，主要进行非弹性 X 射线散射相关实验，这条束线包含三个实验站：A-Station (图 8.35 未标出)、B-Station、C-Station。

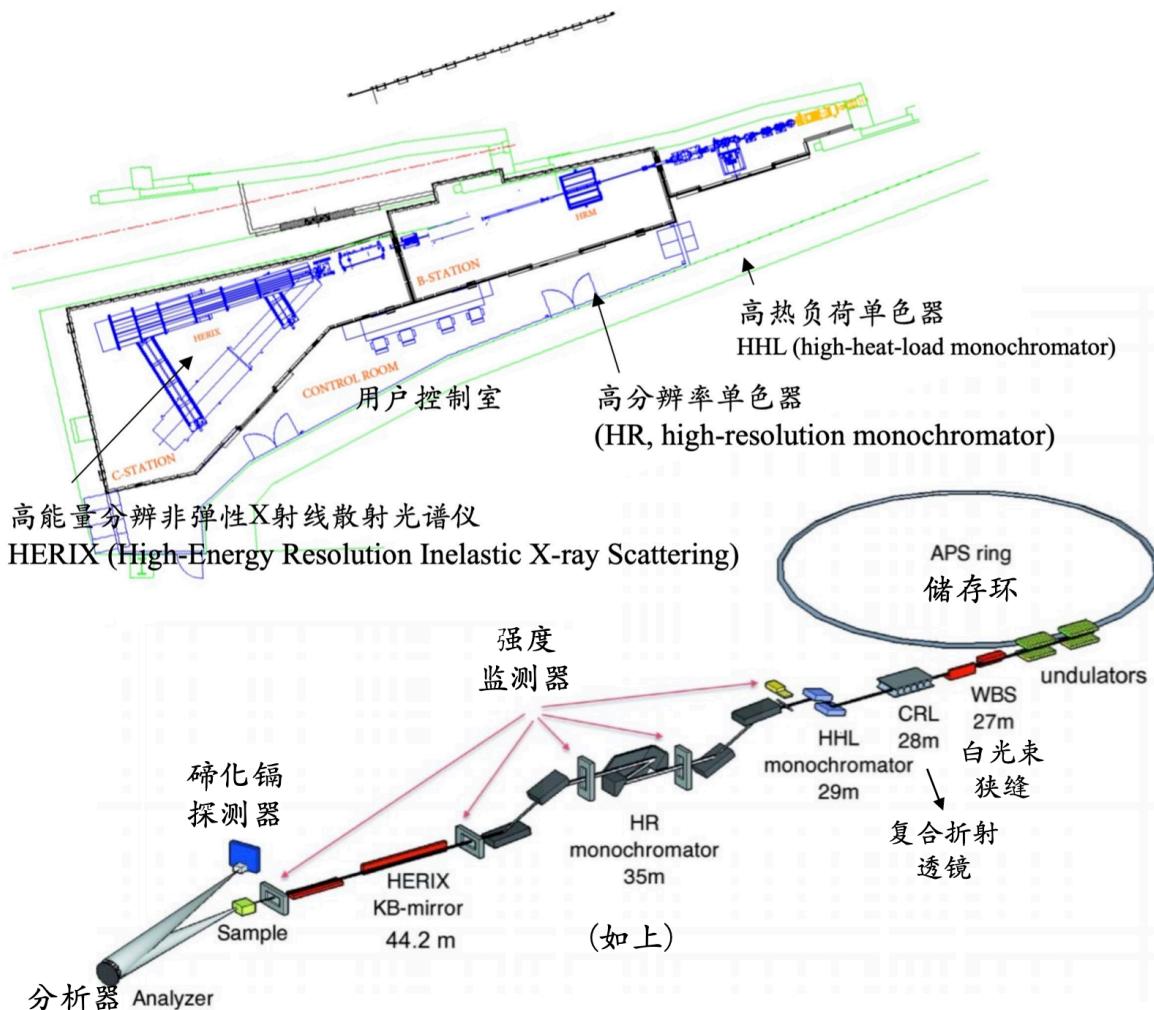


图 8.35：美国先进光子源 APS 储存环光束线 30-ID，主要进行非弹性 X 射线散射相关实验。图例修改自<https://www.aps.anl.gov/Beamlines>。

关于 APS 储存环光束线的更多细节，可参考<https://www.aps.anl.gov/Beamlines>。对利用同步辐射进行实验的更多介绍，可参考 David Attwood and Anne Sakdinawat, X-Rays and Extreme Ultraviolet Radiation — Principles and Applications, Cambridge University Press (2016)。

根据实验用户的不同需要，特别是时间分辨相关的实验 (time-resolved measurement)，有时候需要在条件允许的前提下，适当调整储存环电子束团串的时序结构 (time structure)，以产生用户希望的同步辐射光束串。图 8.36 给出几种典型的时序结构操作模式示意图。留意，相邻束团串 — 无论是电子束或辐射光束 — 的最短间距一般为 RF 波长。不同电子

束团串填充模式能够允许的操作电流可能是不同的，主要受多粒子效应的影响，将在第 11 章至第 13 章介绍。

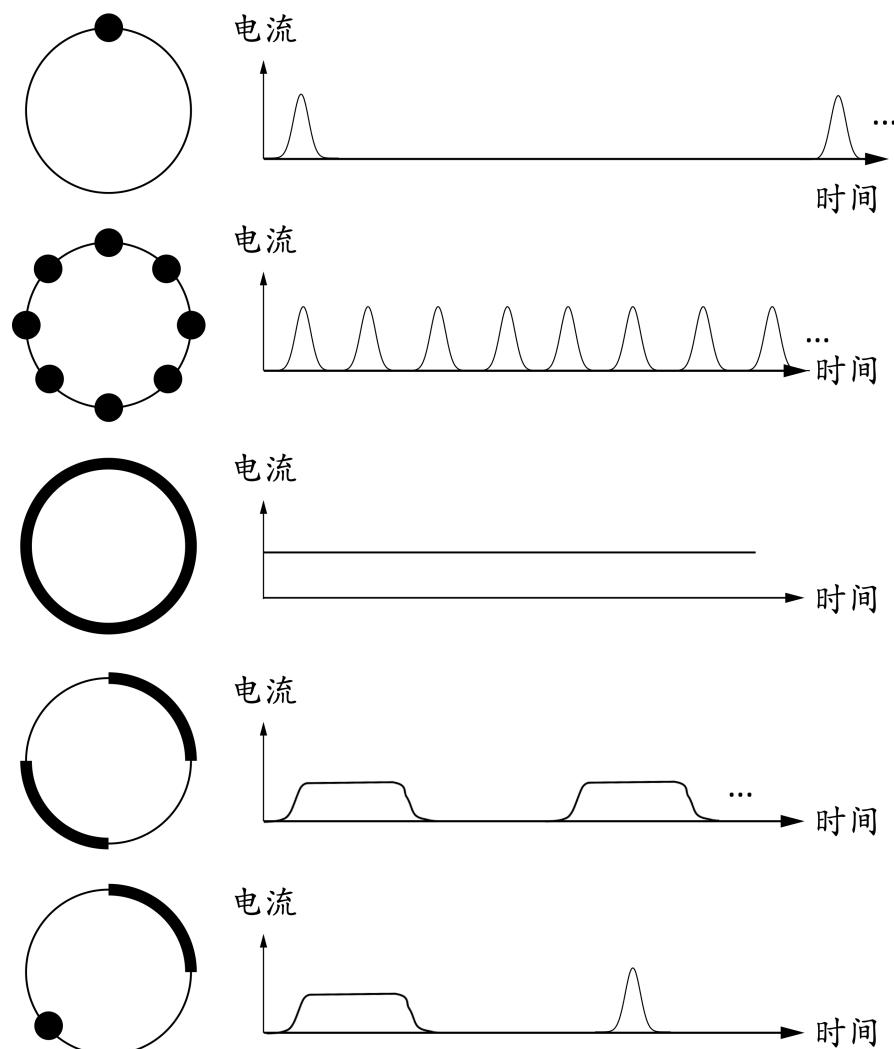


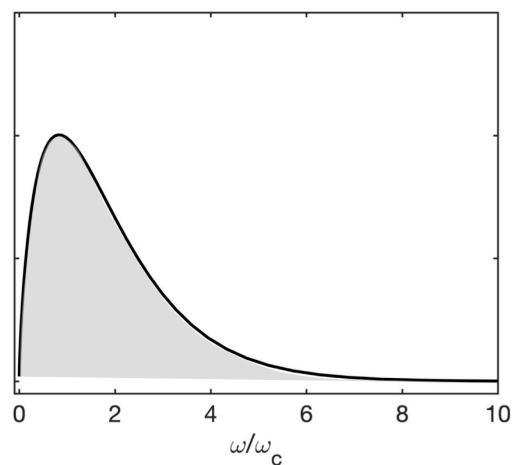
图 8.36：同步辐射储存环电子束团串典型时序结构的示意图。由上至下分别为单束团模式、等间距多束团（未必 8 个束团）模式、未聚束模式、双长束团模式、一长束一短束模式。

注 图 8.36 为电子束团串时序结构，对应产生的同步辐射串的时序结构也非常类似。回顾一下 §4.4 介绍过，周期绕行运动的电子产生的同步辐射会在频谱上形成离散的谱线。实际情况下，由于电子逐圈补偿能量与辐射能量损失存在微小差异或是电子束团本身存在能散，因此，这些离散的谱线将变得模糊而仍像连续谱。参考图 8.37。

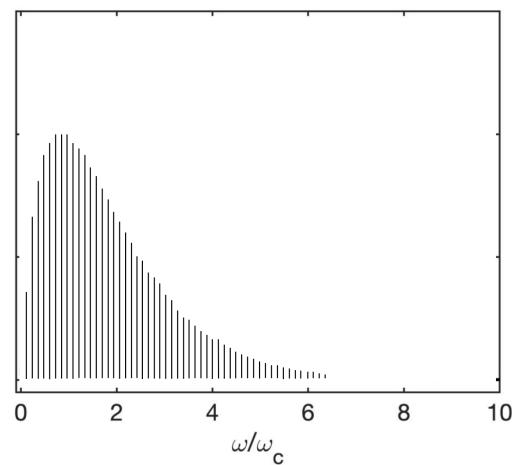
笔记 思考一下，不考虑能量偏差情况，图 8.37 中间图的每一根谱线没有粗细，在频域中与临近谱线的间隔为 c/ρ 。频谱分布的大致宽度——即同步辐射带宽——大约为 $c\gamma^3/\rho$ 。

练习 8.29 图 8.37 仅考虑单电子绕行情况，如果是多个电子（形成束团）产生的辐射频谱，频谱分布样貌会有什么改变？ ■

单次经过



周期绕行



周期绕行且存在能量偏差

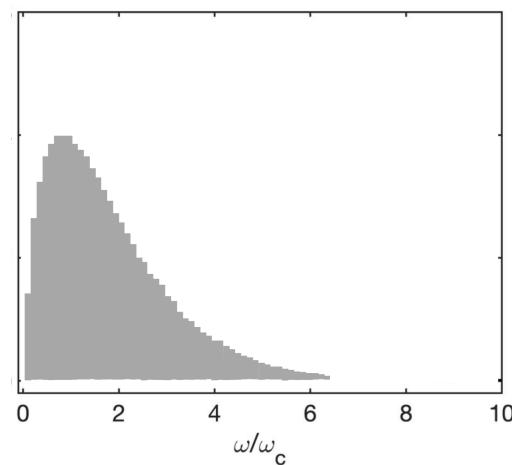


图 8.37: 同步辐射功率频谱: (上) 单次经过情况、(中) 周期绕行情况、(下) 考虑逐圈能量偏差或能散情况。

第八章 补充习题

1. 第7章介绍的 \mathbf{M} 矩阵是线性传输矩阵, 非线性传输映射 \overleftarrow{T} 张量的部分元素还可以根据定义, 结合如下线性传输矩阵方程得到。令在 $s = s_0$ 处的 Courant-Snyder 参数有 β_0, α_0 , 粒子初始条件为 $x_0 = x(s_0), x'_0 = x'(s_0)$ 。推导自 s_0 至 s , 有如下的线性传输矩阵方程

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \psi + \alpha_0 \sin \psi) & \sqrt{\beta_0 \beta} \sin \psi \\ -\frac{1+\alpha_0 \alpha}{\sqrt{\beta_0 \beta}} \sin \psi + \frac{\alpha_0 - \alpha}{\sqrt{\beta_0 \beta}} \cos \psi & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (\cos \psi - \alpha \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

其中, ψ 为自 s_0 至 s 的相位超前 (phase advance), 有

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{m_{12}}{\beta_0 m_{11} - \alpha_0 m_{12}} \right)$$

考虑纵向 z 坐标在传输过程的非线性改变量源自横向 x' 的贡献, 如

$$\Delta z = -\frac{1}{2} \int_0^L x'^2(s) ds$$

a) 证明

$$T_{511} = -\frac{1}{2} \int_0^L m_{21}^2(s) ds$$

$$T_{512} = T_{521} = -\frac{1}{2} \int_0^L m_{21}(s) m_{22}(s) ds$$

$$T_{522} = -\frac{1}{2} \int_0^L m_{22}^2(s) ds$$

b) 假设传输段长度 L 足够长而可以忽略相位超前的影响, 即 ψ 在 $s = 0$ 至 $s = L$ 间变化的效应平均之后为零, 证明

$$T_{511} \approx -\frac{\gamma_0}{4} \int_0^L ds \gamma(s)$$

$$T_{512} = T_{521} \approx -\frac{\alpha_0}{4} \int_0^L ds \gamma(s)$$

$$T_{522} \approx -\frac{\beta_0}{4} \int_0^L ds \gamma(s)$$

其中, $\beta_0 = \beta(s = 0), \alpha_0 = \alpha(s = 0), \gamma_0 = \gamma(s = 0)$ 。

c) 证明

$$\Delta z = T_{511} x_0^2 + 2T_{512} x_0 x'_0 + T_{522} x'^2_0 \approx -\frac{\epsilon_0}{4} \int_0^L \gamma(s) ds < 0$$

2. 当具有横向偏差 x 、其余相空间坐标与参考粒子相同的粒子经过扇形二极铁 (sector dipole, SD) 与矩形二极铁 (rectangular dipole, RD) 时, 将产生纵向路径差 Δz 。对同样弯转角度 θ 的扇形二极铁与矩形二极铁

a) 试估算扇形二极铁导致的纵向路径差 $\Delta z_{SD} = x\theta$ 。

b) 试估算矩形二极铁导致的纵向路径差 $\Delta z_{RD} = 2x \tan \frac{\theta}{2}$ 。

c) 对储存环而言, 一阶近似下有 $\Delta C \approx \int_0^C \frac{x}{\rho(s)} ds$ 。试估算两种不同弯转磁铁导

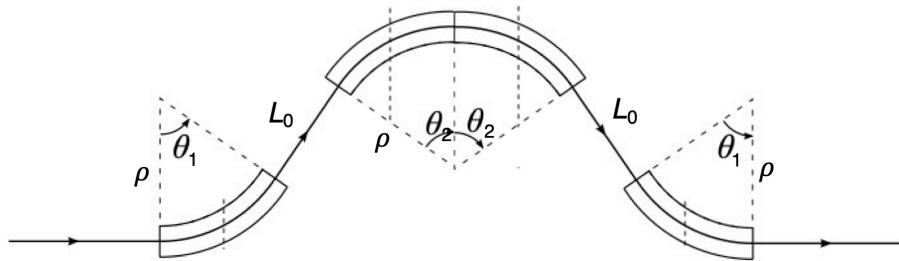
致的全环路径差 $\Delta C_{SD} - \Delta C_{RD}$ 。

3. 根据纵向路径差定义

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 ds^2$$

对于真空漂移段与四极铁，仍可能导致高阶纵向路径差。试从加速器哈密顿量 $\mathcal{H} \approx -(1 + \delta) \left(1 - \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2\right) - \frac{eA_s}{p_0}$ 估算二阶纵向路径差。

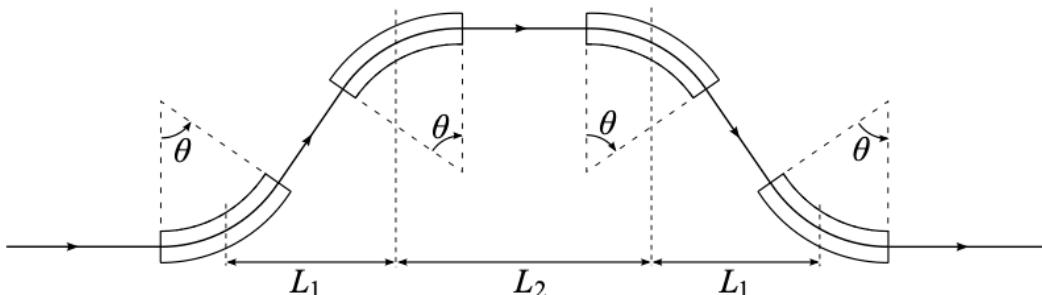
4. 考虑如下图简化的 chicane 结构，这种磁聚焦结构的一个应用是避开障碍物，局部调整束线轨迹。通过适当设计，此结构可以不引入额外的色散。



证明如果不引入额外色散，即入口与出口处有 $D = 0, D' = 0$ ，则要求 $L_0, \rho, \theta_{1,2}$ 间满足如下关系

$$L_0 = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2) - 2 \sin \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \rho$$

5. 已知利用三个或四个弯转磁铁形成的磁聚焦结构可以用作束团旁通路 (by-pass) 或者作为束团磁压缩结构 (bunch compressor chicane)，如下图



a) 定性说明其工作原理。

b) 证明粒子经过总路径长约为 $L \approx \frac{2L_1}{\cos \theta} + L_2$ 。

c) 假设参考能量粒子经过弯转磁铁的角度为 θ_0 ，非参考能量粒子弯转角度为 $\theta = \frac{\theta_0}{1+\delta}$ ，证明在 chicane 出口处非参考能量粒子纵向坐标为

$$z(s_2) = z(s_1) + 2L_1 \left(\frac{1}{\cos \theta_0} - \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

d) 由上，证明 chicane 的线性传输矩阵可以写为

$$\begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} 1 & R_{56} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \end{pmatrix}_i$$

其中， $R_{56} = 2L_1 \frac{\theta_0 \tan \theta_0}{\cos \theta_0}$ 。

e) 假设在 chicane 入口处，束团存在能量啁啾 $h_0 = \partial \delta / \partial z$ ，即 $\delta_i = \delta_0 + h_0 z_i$ 。忽

- 略束团能散(即 $\delta_0 \ll 1$), 推导束团压缩因子有 $C = \frac{1}{1+h_0 R_{56}}$ 。
- f) 当 $C \rightarrow \infty$ 时, 称束团为临界压缩。此时束团能散不能忽略, 压缩因子应如何修正? 提示: 利用束矩阵。

6. 对如下描述 (x, x', z, δ) 的单圈或周期结构单元的 4×4 传输矩阵

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & 0 & R_{26} \\ R_{51} & R_{52} & 1 & R_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 R_{16}, R_{26}, R_{56} 的取值不再为任意值, 而由 $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ 决定。此时 R_{16}, R_{26}, R_{56} 更常写为 $\eta_x, \eta'_x, L\alpha_c$, 其中, L 为储存环单圈周长或周期结构单元长度。试推导 $\eta_x, \eta'_x, \alpha_c$ 。

解

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{R_{16}(1 - R_{22}) + R_{12}R_{26}}{2 - R_{11} - R_{22}} \neq R_{16} \\ \eta'_x &= \frac{R_{21}R_{16} + R_{23}(1 - R_{11})}{2 - R_{11} - R_{22}} \neq R_{26} \\ \alpha_c &= \frac{R_{51}\eta_x + R_{52}\eta'_x + R_{56}}{L} \neq \frac{R_{56}}{L} \end{aligned}$$

注意, 此处 R_{51}, R_{52} 仍有第7章习题的结果。

$$R_{51} = R_{16}R_{21} - R_{26}R_{11}$$

$$R_{52} = R_{16}R_{22} - R_{26}R_{12}$$

7. 定性说明什么是衍射极限储存环 (diffraction-limited storage ring)? 与三代同步辐射光源相比, 电子束团的横向、纵向特性为何?
8. 说明电子(或轻子)储存环动力学与质子(或强子)储存环动力学的区别。说明为什么前者的束团分布可能存在平衡态。
9. 单电子等速圆周运动绕行一周 $C = 2\pi\rho$ 的辐射功率公式为
- $$P = \frac{\beta^4 c}{2\pi} C_\gamma \frac{E^4}{\rho^2}$$
- 其中, 对电子而言, 有 $C_\gamma \approx 8.846 \times 10^{-5} \text{ m/GeV}^3$ 。 E 是电子总能量, ρ 是曲率半径。绕行一周, 电子平均损失功率有 $\langle P \rangle = U/T_0$, 其中 $T_0 = 2\pi\rho/\beta c$ 。试估算如下情况:
- a) 对 $\rho = 4.8 \text{ m}$, $E = 1 \text{ GeV}$ 的加速器, 由 10^{11} 个电子形成的束团绕行一圈发出的非相干同步辐射功率为何?
 - b) 束团绕行一周损失的非相干同步辐射能量为何?
 - c) 当 RF cavity 电压为 0.25 MV 时, 仅考虑此同步辐射效应, 是否存在同步相位 ϕ_s 能够稳定地使束团稳定运行? 若存在, 给出 ϕ_s 。
10. 高亮度粒子束有时候也用束团的“温度”表征。借用气体动力理论, 在束团静止坐标, 束团在三个方向的温度可与其动量按如下方式关联

$$\frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} = \frac{1}{2}k_B T_x, \quad \frac{\langle p_y^2 \rangle}{2m} = \frac{1}{2}k_B T_y, \quad \frac{\langle \Delta p_z^2 \rangle}{2m} = \frac{1}{2}k_B T_z$$

a) 试证明

$$T_x = \frac{mc^2}{k_B} \beta \gamma \frac{\epsilon_x^N}{\beta_x}, \quad T_z = \frac{mc^2}{k_B} \beta^2 \sigma_p^2$$

其中, $\epsilon_{x,y}^N = \beta \gamma \epsilon_{x,y}$ 、 $\sigma_p = (\Delta p_z/p)_{\text{rms,lab}}$ 为实验室坐标物理量。提示: 需要用到洛伦兹变换。

- b) 对自光阴极产生的电子, 初始 $k_B T_{x,y,z} = 0.1 \text{ eV}$, 假设高斯分布, 其横向、纵向温度为何?
- c) 通过 100 kV 加速之后, 其横向、纵向温度为何?

11. 推导储存环中小振幅纵向同步运动的振荡频率 ω_{s0} , 不考虑粒子净加速, 忽略辐射阻尼与量子激发。
12. 以相对论重离子对撞机 (Relativistic Heavy Ion Collider, RHIC) 为例, 对完全游离的金离子 (gold ion) $^{197}\text{Au}^{79+}$, 给定如下参数

$$\gamma_{\text{inj}} = 10.4$$

$$\gamma_{\text{tr}} = 22.8$$

$$L = 3834 \text{ m}$$

$$h = 360$$

$$\phi_s = 0^\circ$$

$$mc^2 = 197 \times 0.93113 \text{ GeV}$$

$$Z = 79 \quad (\text{protons})$$

$$A = 197 \quad (\text{neutrons + protons})$$

$$V_{\text{RF}} = 300 \text{ kV}$$

- a) 估算 synchrotron tune。
- b) 估算同步振荡频率。
- c) 如果将同步相位调到 $\phi_s = 5.5^\circ$, 参考粒子逐圈绕行将获得多少能量?
- d) 将粒子加速至 $\gamma = 107.4$ (100 GeV/nucleon) 需要多久? 忽略 transition crossing 需要的时间, 即假设 transition crossing 瞬间完成。
- e) 画出从 $\gamma = 10.4$ 加速到 $\gamma = 107.4$ 过程, 同步振荡频率随能量改变的曲线。

13. 假设有一由八个相同的 DBA cell 形成的储存环同步辐射光源, 每个二极铁长度 2.7 m, 周长 176 m, 参考能量为 2.5 GeV。

- a) 计算同步辐射临界能量。
- b) 计算单个电子绕行一周损失的能量。
- c) 计算储存环的动量紧缩因子。
- d) 计算同步辐射在 x, y, z 三个方向的辐射阻尼时间。
- e) 估算电子束团横向平衡 (几何) 发射度。

14. 证明电子束团六维相空间体积由于同步辐射效应导致的阻尼总时间为 $\tau_{\text{tot}} = \frac{E}{4\langle P_\gamma \rangle}$ 。

15. 尽管强子 (hadron) 一般不产生同步辐射, 但是当能量足够高时, 产生的电磁辐射仍需纳入考虑, 大强子对撞机 (Large Hadron Collider, LHC) 即是一例。考虑 7 TeV 质

- 子储存环，环周长 26.7 km，弯转磁铁磁场强度 8.33 T，计算
- 辐射光子的临界能量。
 - 每个质子绕行一周损失的能量。
 - 质子束团平均辐射功率，假设平均电流为 0.56 A。
16. 一动能为 10 GeV 的质子同步加速器，其磁场在 1 秒内由 0 上升到 1.5 T。已知质子的质量为 0.9383 GeV，试问：
- 在 1.5 T 时，质子的动量是多少？此时的 $B\rho$ 为何？
 - 如果弯转磁铁占周长的 $2/3$ ，估算弯转磁铁的曲率半径 ρ 和平均半径 R 分别是多少？
 - 在 10 GeV 时，质子的绕行频率是多少？在 1 GeV 时的绕行频率又是多少？
 - 对 1 GeV 情况，为达到 9 GeV/s 的粒子线性能量增长率，估算每圈所需提供的电压。
 - 承上，如果 $\sin \phi_s = \sin 45^\circ$ ，估算谐振腔的峰值电压。
 - 假设全环的平均色散为 9 m，估算渡越能量 γ_{tr} 。
 - 在 $\gamma = \gamma_{\text{tr}}$ 时，粒子动量是多少？
 - 在 1 GeV 和 10 GeV 时，滑相因子 η 其值分别为何？
 - 如果谐波数为 10，在 1 GeV 时的同步振荡频率 f_s 为何？
 - 利用 MATLAB，绘制粒子同步振荡频率 f_s 随粒子动能的变化曲线（范围从 1 GeV 到 2 GeV）。
17. 一长为 50 cm、直径 75 cm 的圆柱谐振腔，试问：
- 基频共振频率为何？
 - 下一个高阶模式为何？共振频率是多少？
 - 要使质子在该基频腔体中的通过时间因子为 41%，所需的质子动能为何？
 - 如何修改加速系统以加速更低能量的质子？
 - 证明品质因数 Q 与腔体表面积 S 、体积 V 和趋肤深度 δ 之间存在如下关系
- $$Q \propto \frac{V}{\delta S}$$
18. 假设一电子储存环周长为 27 km。试问：
- 50 GeV 电子和— 100 GeV 电子绕行储存环的单圈能量损失。
 - 对于 100 GeV、束团电流为 1 mA 的束团，计算同步辐射功率损耗。
 - 100 GeV 时的临界能量和临界波长。
 - 50 GeV 和 100 GeV 时束团的平衡能散。
 - 考虑— 4 TeV 的缪子 (muon)，在半径为 4 km 的储存环中绕行，每圈能量损失（缪子质量为 105 MeV）。
 - 承上，估算缪子的同步辐射光的特征频率。
 - 承上，估算其同步辐射阻尼时间。

