

电磁辐射与加速器束流动力学导论

Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第十五章 相干同步辐射¹

内容提要

- 相干同步辐射的基本物理图像
- 点力模型
- 一维模型
- 研究现状总论
- 一维 CSR 的几个结果

前面第二部分第11章介绍过集体效应的场动力学—尾场与阻抗，当时介绍了有限电导率圆柱金属真空管、圆柱形谐振腔的尾场与阻抗计算，属于尾场与阻抗分析的典型对象。可以说，尾场与阻抗是描述源粒子与测试粒子通过“周围环境”交互作用的一种语言、方式。这里的“周围环境”可以是“实际”的存在，如第11章介绍过的金属真空管壁、谐振腔的不连续结构，也可以是“抽象”的、能够关联源粒子与测试粒子的物理机制，这一章将介绍的相干同步辐射即是一例。

美国加速器科学白皮书的首位亟待解决的课题 准确模拟并深入了解相干同步辐射的物理对理解高亮度电子束集体效应的物理机制是当前加速器社群面临的一重要且困难的问题。在 2003 年美国加速器科学白皮书中，该问题被列为首位亟待解决的课题。

该报告书²的附录三依序条列了四个加速器基础科学问题与二十五个加速器应用、数值模拟与工程技术的难题，包含：

1. Physics of coherent synchrotron radiation
2. Free-electron laser physics
3. Beam and plasma diagnostics with nanometer spatial resolution and femtosecond time resolution
4. Real time, single shot, beam distribution function measurement instrumentation

与

1. Brighter sources
2. Higher current sources
3. High power x-ray optics
4. Micro x-ray beam development
5. Higher gradients in both superconducting (SC) and normal-conducting (NC) structures
6. Better higher-order-mode (HOM) damping in SC and NC structures
7. AC — beam power efficiency improvements in all accelerator types, laser and conventional
8. Improved devices for beam manipulation (plasma, pulsed and CW electric and magnetic)

¹这一章部分内容受国家自然科学基金青年项目资助，项目名称“高亮度电子束相空间调制、传输与微束团不稳定研究”(11905073)与面上项目资助，项目名称“面向极紫外相干光源应用的高亮度电子稳态微聚束集体效应基础理论研究”(12275094)。

²M. Berz et al., Enhancing Accelerator Science and its Impact on Other Sciences: the Role of Universities (2003).

9. Superconducting magnets
10. Improved cradle to grave simulation including non-linearities, vibration, wakes, beam-beam etc.
11. More cost effective means for manufacture of major accelerator components
12. New approaches for high flux, high brightness femtosecond x-ray sources
13. Practical optical wavelength acceleration and manipulation schemes
14. Very compact accelerators for medicine and inspection
15. Beam cooling methods (radiation, stochastic, electron, ionization)
16. X-ray imaging
17. Materials (new materials, radiation resistant materials, new magnetic and superconducting materials)
18. Neutral particle acceleration
19. Traveling wave laser pumping with beams
20. Beam measurement instrumentation with nanometer spatial and femtosecond temporal resolution
21. Megawatt capable targets for muon and neutron production
22. Muon accelerators (induction, low frequency linac, FFAG, low frequency superconducting, high gradient, cavities)
23. Energy recovery at high current and brightness
24. Improved insertion devices for FEL and spontaneous synchrotron radiation as well as for use in emittance control in storage rings
25. Real time, single shot, beam distribution function measurement instrumentation

无论对直线加速器、同步加速器、储存环或能量循环加速器，相干同步辐射导致的集体效应给目前高亮度电子束传输过程带来挑战。只有在对这个问题更深入了解之后，我们或许才能提出有效的克服之道，并且进一步提高新一代电子加速器的效能。

15.0 问答预览

1. 什么是相干同步辐射 (CSR)?

⇒ CSR 是由多个粒子组成的束团在弯转轨道中运动时产生的相干电磁辐射。它与 ISR 的区别在于 CSR 具有相干性，即束团中不同粒子产生的辐射场在远处的相位接近，除了导致能量损失，也对束团自身产生能量调制。

2. 从“场”观点和“粒子”观点分析 CSR 的区别是什么?

⇒ “场”观点关注辐射场在远处的特性，而“粒子”观点关注束团内一粒子 (“源粒子”) 产生的辐射场对其它粒子 (“测试粒子”) 的影响。

3. CSR 对束团的影响有哪些?

⇒ CSR 对束团的影响包括能量损失、能散增加和能量调制。

4. 常见的一维 CSR 模型的假设条件是什么?

⇒ 常见的一维 CSR 模型的假设条件包括：极端相对论近似、一维线电荷模型、自由空间模型、忽略束团与辐射场的横向尺寸和仅考虑纵向分量。

5. 什么是滑移长度？它对 CSR 的影响是什么？

⇒ 滑移长度是表征束团中测试粒子与源粒子在经过弯铁一定路径长之后，彼此能够通过 CSR 相互影响的间距。

6. 什么是 Derbenev 条件？

⇒ Derbenev 条件给出一维 CSR 模型的适用范围，当束团的横向尺寸相对于纵向尺寸和弯转半径非常小时适用。

15.1 定性描述

15.1.1 “场”观点

第4章介绍过同步辐射，为单电子经过弯转轨道产生的电磁辐射，计算了辐射功率频谱、角分布、临界光子能量等。第9章介绍了多粒子电磁辐射，为多个电子形成束团整体后，产生的电磁辐射，其特性与单粒子辐射特性及束团内部纵向分布形态 $\lambda(z)$ 有关，可写成

$$\frac{d^2\mathcal{W}}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{束团}} = \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{单电子}} [N + N^2 F(\omega)] \quad (15.1)$$

其中， N 为束团内电子个数， $F(\omega)$ 定义为束团形成因子 (form factor) 或群聚因子 (bunching factor) 的模平方，有

$$F(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) e^{-i\omega z/c} \right|^2 \leq 1 \quad (15.2)$$

对为高斯分布的束团来说， $\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-z^2/2\sigma_z^2}$ ，有 $F(\omega) = e^{-(\omega\sigma_z/c)^2}$ 。辐射频谱成分中，频率较低或波长较长的波段， $F(\omega)$ 相对较大，相干性较好。当 $F \approx 1$ 时，产生的电磁辐射称相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR)。参考图 15.1，可以看到，当束团长度固定时，辐射波长较长或辐射频率较低的成分更容易体现相干性。由于 $F(\omega)$ 前跟着 N^2 ，一般 $N = 10^{6\sim 9}$ ，因此相干增强效果很可观。

15.1.2 “粒子”观点

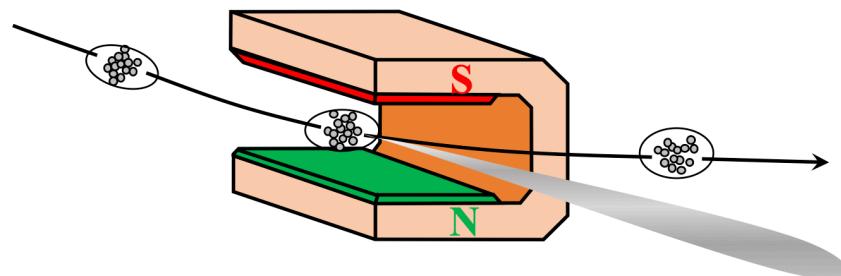
以上讨论是从“场”观点看相干同步辐射，即相干效应。从“场”观点看相干同步辐射，关心的是辐射场在远处固定观察位置的特性。此专题试着从“粒子”观点看相干同步辐射。再明确一下，从“粒子”观点看相干同步辐射，关心的是束团中的某一粒子产生的同步辐射场在束团中的其它粒子所处的位置该如何表示。下一节将从第2章、第3章介绍的 Lienard-Wiechert 场开始，重点讨论相干同步辐射的物理图像，此处先定性描述。

第2章开篇介绍的推迟条件 (retardation condition) 给出“源粒子运动”与其发出的“电磁辐射在空间传播”两者间的约束条件。光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} < \infty$ 表示电磁辐射的“产生”与“抵达”这两个事件不可能同时完成。因此，有必要区分“在何时、何地观察到电磁场”以及“在何时、何地产生电磁场”。这两组时空物理量由推迟条件联系。如图 15.2，以下我们约定，观察时刻为 t ，位置为 P ，产生电磁场的(推迟)时刻为 t' ，位置为 P' ，两者相对位置为 $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_P - \mathbf{R}(t')$ 。于是，推迟条件可以写成

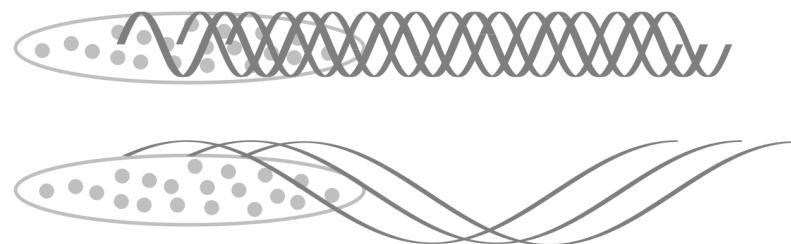
$$t = t' + \frac{r(t')}{c} \quad (15.3)$$

物理图像为：电磁辐射产生时刻 t' ，在经历以光速 c 传输一段距离 r 之后，测试粒子在时刻 t 接收到该辐射场。从图中可以看到，与第11章介绍的尾场 (wakefield) 不同，这里的同步辐射场不再是“尾”场，而更像是“头”场。但是，目前绝大多数文献研究同步辐射产生的场对电子束的影响时，仍称此为同步辐射尾场。

(a) 电子束团弯转时产生同步辐射



(b) 同样束长，产生不同波长的辐射，其相干程度不同



(c) 束团同步辐射频谱

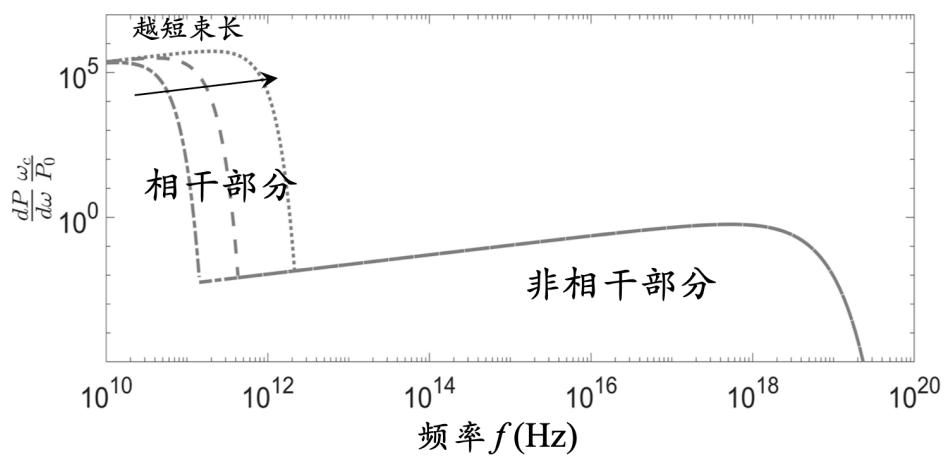
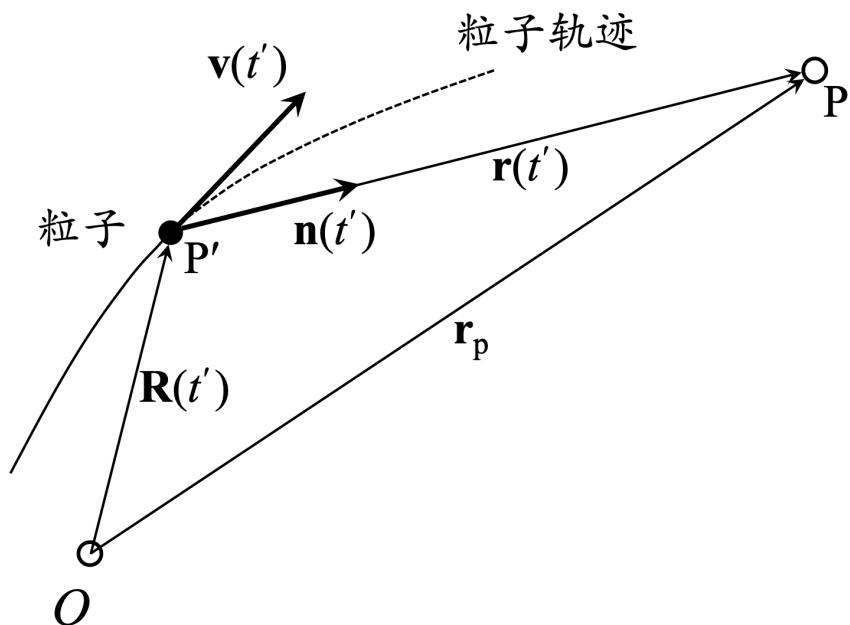


图 15.1: 从“场”观点看相干同步辐射: 相干效应。

图 15.2: 源粒子坐标 P' 与测试粒子坐标 P 。

根据以上推迟条件中“源坐标”与“观察坐标”的角色，这里分别替换为“源粒子”与“测试粒子”。注意，源粒子与测试粒子可以是同一个束团里的不同粒子，或者不同束团里的不同粒子。目前来说，多数文献考虑的情况为前者。参考图 15.3，将源粒子以红色点粒子表示，将测试粒子以蓝色点粒子表示。在稍早时刻 t' ，由于弯转时的向心加速运动，以 v 速度运动的源粒子发出电磁辐射，辐射场在真空中以直线、速度 c 传播，大致局限在辐射张角 $\pm 1/\gamma$ 内。由因果律知，单次经过的源粒子不可能被自己产生的辐射场影响：因为源粒子以速度 $v < c$ 前进，且粒子走圆弧线，辐射场以 c 传播且走更短的弦直线。经过一段时间后，在时刻 t ，束团整体经历了弯转段，此刻前方的蓝色粒子如果作为测试粒子，是否可能受到 t' 时刻由红色源粒子产生的辐射场影响？答案是，可能，如果满足上述的推迟条件。满足推迟条件是可能的，即使测试粒子以 $v < c$ 速度、沿着比弦直线更远的圆弧线运动。这是因为弦直线与圆弧线的起点不同。弦直线的起点源于源粒子在 t' 时刻的位置，而圆弧线的起点则是在 t' 时刻头部的测试粒子位置。

练习 15.1 试着自行描述以上追赶过程。 ■

好，现在能接受以上追赶过程的图像后，我们来看看这个追赶过程对电子束团可能产生的效应。首先，束团内包含许多粒子，只要满足推迟条件，每个粒子都可能成为源粒子，也都有机会成为测试粒子。如果在 t' 时刻，几个不同源粒子产生的辐射场在抵达 t 时刻时的相位没有关联，那么对束团的整体影响可以视为一个彼此无关联的随机效应，净平均为能量损失，对应的是非相干同步辐射 (incoherent synchrotron radiation, ISR) 导致的电子束整体净能量损耗。此外，由于非相干，还有束团的能散增加。已经知道，辐射

场如同平面电磁波，如果不同源粒子在 t' 时刻集体分布在对应波长的 2π 相位内³，那么在 t 时刻的影响就会呈现相干性，对 t 时刻的电子束团的影响就不再为彼此无关的随机效应。尽管净平均仍然表征能量损失，但是此时的损失量将比前述情况更多，对应的是相干同步辐射。此外，束团内还会呈现能量调制，即第 10 章介绍自由电子激光理论时介绍过的概念，受到相干同步辐射尾场或阻抗的影响将最终导致电子束团内部分布呈现微结构，称微束团不稳定性 (microbunching instability)。

- 非相干同步辐射 \Rightarrow 净能量损失、能散增加
- 相干同步辐射 \Rightarrow 净能量损失、能量调制

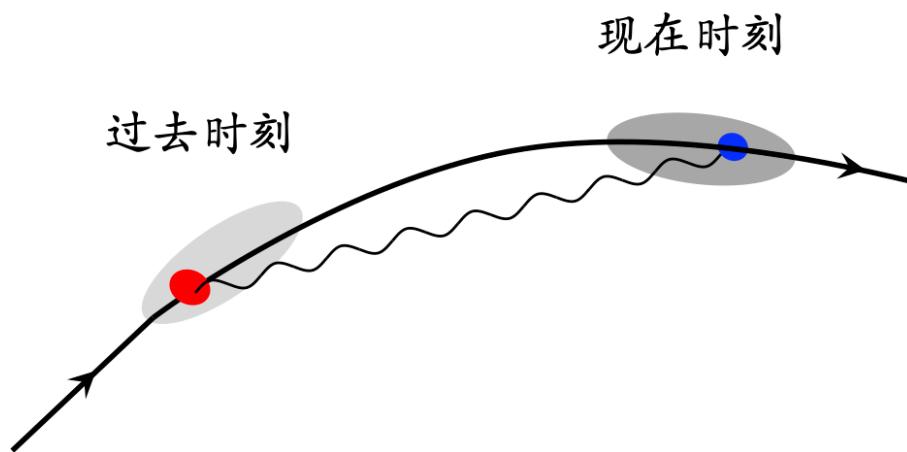


图 15.3: 从“粒子”观点看相干同步辐射：追赶效应。

此处总结以上讨论的思路。此专题主要讨论从粒子观点出发的相干同步辐射的场动力学。下一章将讨论微束团不稳定性，属粒子动力学。

粒子观点 \Rightarrow 追赶效应 \Rightarrow 相干同步辐射尾场/阻抗 \Rightarrow 微束团不稳定性

³发生这种情况是相对的：可以是束长较短，也可以是辐射波长较长。

15.2 一维模型

对于相干同步辐射场的计算，“场”观点发展较早，几篇经典文献为：

- Julian Schwinger⁴, On the Classical Radiation of Accelerated Electrons, Phys. Rev. **75**, 1912 (1949). <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.75.1912>
- Julian Schwinger, On radiation by electrons in a betatron, LBNL-39088 (1945). <https://doi.org/10.2172/1195620>
- John S. Nodwick and David S. Saxon, Suppression of Coherent Radiation by Electrons in a Synchrotron, Phys. Rev. **96**, 180 (1954). <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.96.180>
- R. Warnock and P. Morton, Fields Excited by a Beam in a Smooth Toroidal Chamber Part I: Longitudinal Coupling Impedance, Part. Accel. **25**, 113 (1990), SLAC-PUB-4562 (1988). <https://www.slac.stanford.edu/cgi-bin/getdoc/slac-pub-4562.pdf>

从“粒子”观点分析相干同步辐射场的特性则相对较晚，几篇经典文献为：

- Ya. S. Derbenev et al., Microbunch Radiative Tail-Head Interaction, TESLA-FEL 95-05 (1995). <https://cds.cern.ch/record/291102/files/SCAN-9511114.pdf>
- J.B. Murphy, S. Krinsky, and R.L. Gluckstern, Longitudinal wakefield for an electron moving on a circular orbit, Part. Accel. **57**, 9 (1997). <https://cds.cern.ch/record/1120287/files/p9.pdf>
- E.L. Saldin, E.A. Schneidmiller, and M.V. Yurkov, On the coherent radiation of an electron bunch moving in an arc of a circle, Nucl. Instru. Methods A **398**, 373 (1997). [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(97\)00822-X](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(97)00822-X)
- G. Stupakov and P. Emma, CSR Wake for a Short Magnet in Ultrarelativistic Limit, LCLS-TN-01-12 (2002). <http://www-ssrl.slac.stanford.edu/lcls/technotes/LCLS-TN-01-12.pdf>、<https://accelconf.web.cern.ch/e02/PAPERS/WEPR029.pdf>

目前关于从“粒子”观点的相干同步辐射场的回顾性综述论文不多，可参考：

- S. Di Mitri, Coherent Synchrotron Radiation and Microbunching Instability, Proceedings of the CAS-CERN Accelerator School (2018). <https://doi.org/10.23730/CYRSP-2018-001.381>
- C.L. Bohn, Coherent Synchrotron Radiation: Theory and Experiments, AIP Conf. Proc. **647**, 81-95 (2002). <https://doi.org/10.1063/1.1524861>
- A. Novokhatski, Coherent synchrotron radiation: theory and simulations, SLAC-PUB-14893 (2012). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/14750/slac-p>

⁴中文翻为施温格 (1918-1994)，犹太裔美国理论物理学家，量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 创始人之一，与费曼 (Richard Feynman)、朝永振一郎 (Shinichiro Tomonaga) 同获 1965 年诺贝尔物理学奖。

ub-14893.pdf

此讲义采用 Saldin, Schneidmiller, and Yurkov (SSY) 分析方式, 从 Lienard-Wiechert 场开始, 计算电子在局域弯转段产生的电磁辐射场, 着重于将辐射场写成以源粒子与测试粒子相对位置/间距的表示形式。在介绍计算细节前, 将做如下假设:

- 电子运动速度已经非常接近光速, 即 $v \approx c$ 或 $\gamma \gg 1$, 但 $\gamma \neq \infty$ 。一般取 $\beta = 1$, 取 $1 - \beta \approx \frac{1}{2\gamma^2} \Rightarrow$ 极端相对论近似 (ultrarelativistic approximation);
- 电子束团为一维, 即视电子束为线电荷分布, 忽略束团横向有限尺寸导致的效应 \Rightarrow 一维线电荷模型 (1-D line-charge model);
- 真空、无边界模型, 忽略金属真空管壁的屏蔽作用 \Rightarrow 自由空间模型 (free-space model);
- 分析时, 仅考虑尾部粒子对头部粒子的影响, 忽略头部粒子对尾部粒子的影响⁵, 且不考虑空间电荷场。
- 仅考虑束团沿弯转轨迹的切线(视为纵向)方向的分量, 忽略法线(视为横向)分量⁶。

分析从双粒子模型 (two-particle model) 开始, 即一束团仅包含两个粒子, 尾部为源粒子, 头部为测试粒子。回顾 §2.2, Lienard-Wiechert 场公式可以写成⁷

$$\mathbf{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{(\mathbf{L} - L\beta\mathbf{n}')}{(L - \mathbf{L} \cdot \beta\mathbf{n}')^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\mathbf{L} \times [(\mathbf{L} - L\beta\mathbf{n}') \times \mathbf{a}'])}{(L - \mathbf{L} \cdot \beta\mathbf{n}')^3} \quad (15.4)$$

此处 $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = c\dot{\beta}$, \mathbf{L} 表示从 P' 指向 P 的(直线)向量, ' 表示在稍早时刻的源粒子的物理量。Lienard-Wiechert 场的第一项一般称速度场 (velocity field), 第二项称加速场 (acceleration field)。



笔记 以下会看到, 按我们的分析, 在包含直线段与弯转段情况下, 如: 源粒子在直线段而测试粒子在弯转段、或测试粒子在直线段而源粒子在弯转段, 此时的速度场 \neq 空间电荷场。有些文献直接将速度场等同空间电荷场。哪一种取舍较合理, 目前尚无定论。

为方便下面讨论, 这里先澄清几个符号使用⁸:

- 用 $L = |\mathbf{L}|$ 表示从 P' 指向 P 的直线长度, 而用 L_s 表示从 P' 指向 P 的可能部分包含弧线的长度 (path length)。因此, 当 P' 与 P 都在弯铁内时, L 即弦长 (chord), L_s 即弧长 (arc length)。
- 用 t' 表示稍早时刻, 用 t 表示现在时刻。

⁵事实上, 头部粒子对尾部粒子的影响尽管存在, 但量级小很多。

⁶同时, 目前对 CSR 场的研究也甚少提及第11章介绍的 Panofsky-Wenzel 定理。如果要应用在 CSR 情况, 则该定理需要从直线传输段推广到包含弯转过程的 Frenet-Serret 坐标, 细节此处不论。有兴趣的读者可参考 D. Zhou and C.-Y. Tsai, Generalized Panofsky-Wenzel theorem in curvilinear coordinate systems applicable to non-ultrarelativistic beams, arXiv (2023). <https://arxiv.org/pdf/2309.04073.pdf>

⁷对电子而言, $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C} < 0$ 。

⁸这里部分参考了 W. Lou and G. H. Hoffstaetter, Phys. Rev. Accel. Beams **23**, 054401 (2020) 一文的符号惯例。
<https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.054404>

- 用 z' 表示在 t 时刻的尾部粒子，用 z 表示在 t 时刻的头部粒子。注意，都是在 t 时刻取值。

由上可知，在 t 时刻，头尾粒子之间的距离⁹可以写成

$$\Delta \equiv z - z' = L_s - \beta L \quad (15.5)$$

与第11章讨论时一样，尾场函数的标准表示式希望写成以 Δ 为函数的形式， $\Delta > 0$ 。



笔记 此式其实就是 §4.1.2 的 Eq. (4.3)，只是等式两边同乘 βc 从本来的时间差表征距离差。

考虑如图 15.4，可以看出，当两粒子从进入到离开一段有限长弯铁时，仅有如图的四种不同的几何构型。

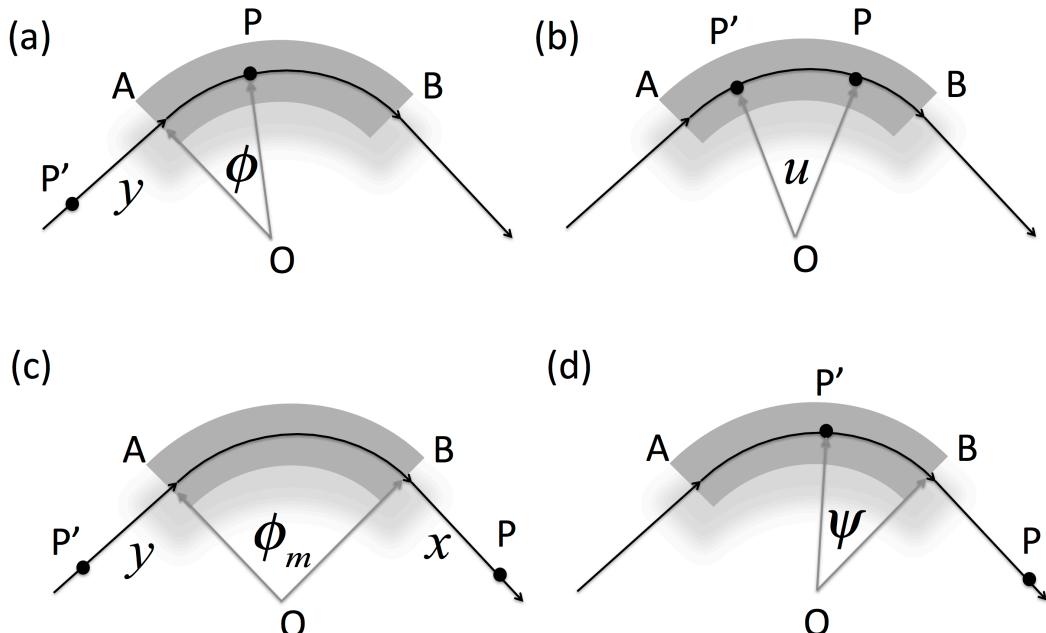


图 15.4：粒子从 A 进入到 B 离开一段有限长弯铁时的四种不同的几何构型。从 (a) 至 (d) 分别对应 SSY 论文中的 Case A 至 Case D。注意， P' 与 P 不在同一时刻，也不是同一粒子。

对 t 时刻的测试粒子，有洛伦兹力方程

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = qc\beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(P) \quad (15.6)$$

现在，定义 CSR 尾场函数。不同文献对 CSR 尾场函数的定义稍有不同，此处采用如下定义：

⁹由于束团长度（一般为 sub-mm 或 μm 量级）相对于弯铁长度（一般为 m 量级）短了好几个数量级，因此，在束团内暂时忽略弦与弧的区别，都当在直线（弦）轴上。

定义 15.1. 相干同步辐射尾场函数

单位长度 CSR 尾场函数 (wake function) 定义如下

$$w \equiv -\frac{1}{q^2} \frac{d\mathcal{E}_{\text{CSR}}}{cdt} = -\frac{1}{q} \beta \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}(P) - \mathbf{E}_{\text{SC}}] \quad (15.7)$$

其中，

$$\mathbf{E}_{\text{SC}} = \frac{q\mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0\gamma^2\Delta^2} \quad (15.8)$$

- q 为源粒子电荷，对单个电子来说， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19}$ C
- $\Delta \equiv z - z' = L_s - \beta L$
- \mathbf{n} 为在 P 位置的单位方向向量
- γ 为洛伦兹相对论因子

按此定义， $w < 0$ 表示测试粒子得到能量 (energy gain)， $w > 0$ 表示测试粒子失去能量 (energy loss)。

尾场 (wakefield) 则有

$$\mathcal{W}(z) = \int_{-\infty}^z w(z-z') \lambda(z') dz' \quad (15.9)$$

其中，对相干同步辐射而言，有 $\mathcal{W}(z < 0) = 0$ 。于是，这里积分上限也可写为 $+\infty$ 。

注 留意 Eq. (15.6) 的 \mathcal{E} 与 (15.7) 的 \mathcal{E}_{CSR} 的区别。这里把 \mathbf{E}_{SC} 排除了。

注 这里尾场函数正负号的定义与第 11 章的定义一致。有些文献采用的相干同步辐射尾场函数定义差一个负号，宜留意。



笔记 此定义方式依循 Saldin, Schneidmiller, and Yurkov (SSY)，又称重整化 (renormalization)¹⁰。

下面讨论中，先考虑 Case A，接着再考虑 Case B, C, D。

15.2.1 Case A

参考图 15.4(a)，对 Case A 来说，头部粒子在 t 时刻 (现在) 的位置 P 在弯铁内 ϕ 角处，而 t' 时刻的尾部源粒子 P' 在上游直线段，与弯铁入口的距离为 y ($y > 0$)¹¹。由于 P' 在直线段， $\mathbf{a}' = 0$ ，于是，单位长度尾场函数可以写成

$$w_A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \left(\frac{\mathcal{N}_v}{\mathcal{D}^3} - \frac{1}{\Delta^2} \right) \quad (15.10)$$

¹⁰ 重整化技巧常在物理理论中出现，主要是为了处理发散问题。发散问题源于理论模型本身的局限性：对比于物理现实 (客体)，模型本身只是个有效理论，即它的描述尺度有一定的适用范围，在某个尺度开始再往下探，模型就会失效。对束团内源粒子与测试粒子来说，当相距尺度非常小时，不难想像模型将失效，因此才有 §11.1 介绍的平均场近似。其实，所有的物理模型都只是现实 (客体) 的近似，因此所有的物理理论都可视为仅在一定范围内有效的理论。

¹¹ 这里使用符号 y 来表示 P' 与弯铁入口的距离，不是横向垂直方向，但愿不会造成混淆，尽管这里仅考虑电子束在 x - s 的二维平面弯转运动。

其中，

$$\mathcal{N}_v \equiv \beta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} - L\beta \mathbf{n}'), \quad \mathcal{D} \equiv (L - \mathbf{L} \cdot \beta \mathbf{n}') \quad (15.11)$$

现在任务即是将 $\mathcal{N}_v, \mathcal{D}$ 以已知坐标量表示。不失一般性，可将 t 时刻、位置 \mathbf{P} 的单位方向向量写成 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ ，则其它量有

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' &= (\cos \phi, \sin \phi, 0) \\ L_x &= y \cos \phi + L_c \cos \frac{\phi}{2} \\ L_y &= y \sin \phi + L_c \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (15.12)$$

其中， $\mathbf{L} = (L_x, L_y, 0)$ ， $L_c = 2R \sin \frac{\phi}{2}$ 为 AP 段弦长。

假设 $\phi \ll 1$ ，保留 $R\phi$ 之后，剩余的 ϕ 项展开至 ϕ^2 ，有

$$\begin{aligned} L_c &= R\phi - \frac{R\phi^3}{24} \\ L &= L_s - \frac{R\phi^3}{24} \frac{(R\phi + 4y)}{L_s} \\ L_s &= R\phi + y \end{aligned} \quad (15.13)$$

于是，

$$\Delta = L_s - \beta L = \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{R\phi^3}{24} \frac{(R\phi + 4y)}{L_s} \quad (15.14)$$

代入上面 \mathcal{N}_v 与 \mathcal{D} 的定义式，可以得到单位长度 CSR 尾场函数，有

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_v &= \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{R\phi^3(3R\phi + 4y)}{8L_s}, \quad \mathcal{D} = \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{R^2\phi^4}{8L_s} \\ w_A(y, \phi) &= -\frac{\gamma^2 L_s^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{64 [4L_s^2 + \gamma^2 R\phi^3(3R\phi + 4y)]}{(4L_s^2 + \gamma^2 R^2\phi^4)^3} - \frac{576}{[12L_s^2 + \gamma^2 R\phi^3(R\phi + 4y)]^2} \right) \end{aligned} \quad (15.15)$$

其中，尾场函数的第一项对应到速度场，第二项对应到空间电荷场。注意到，这里的单位长度尾场函数 $w_A = w_A(y, \phi)$ ；当 $\phi = 0$ 时，即 \mathbf{P}' 与 \mathbf{P} 都在直线段上，则两项相消， $w_A = 0$ ，表征没有 CSR 场，如预期。但是， $w_A(y, \phi)$ 还不是最终尾场函数的表示式。目前的 $w_A(y, \phi)$ 仍过于复杂，为了得到 $w_A = w_A(\Delta)$ ，还需要采用以下近似： $\gamma^2 \gg L_s/R\phi^3$ 。对极端相对论电子，此近似关系基本成立¹²。通过研究，对 $\gamma \gg 1$ 电子， w_A 的函数行为大约有¹³

- w_A 的峰值集中在 $\frac{1}{2}\gamma R\phi^2 \approx 1$ 附近；
- 当 $y \gg R\phi$ 时， w_A 值较大。

感兴趣的
话，可以自
己用 MAT-
LAB 验证。

¹²比如，当 $R = 1$ m, $L_s = R\phi + y \sim 5$ m, $\phi = 0.04$ rad 时，要求 $\gamma^2 \gg 78125$ ，即要求电子能量 $E \gg 140$ MeV。一般极端相对论电子的能量为 ≥ 1 GeV，因此近似基本成立。此条件也可以换个角度看，有 $\phi^3 \gg L_s/R\gamma^2$ ，即，经过此近似得到的尾场表示式，不适用于弯铁入口（因为 $\phi \rightarrow 0$ ）。

¹³参考 W. Lou and G.H. Hoffstaetter, Coherent synchrotron radiation wake expressions with two bending magnets and simulation results for a multитurn energy-recovery linac, Phys. Rev. Accel. Beams **23**, 054404 (2020). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.054404>

则尾场函数可以近似写为¹⁴

$$\begin{aligned} w_A(y, \phi) &\approx -\frac{\gamma^2}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{64y^3(y + \gamma^2R\phi^3)}{(4y^2 + \gamma^2R^2\phi^4)^3} - \frac{9}{(3y + \gamma^2R\phi^3)^2} \right] \\ &\approx -\frac{64\gamma^4}{\pi\epsilon_0} \frac{y^3R\phi^3}{(4y^2 + \gamma^2R^2\phi^4)^3} \end{aligned} \quad (15.16)$$

当 $y \gg R\phi$ 时, 头尾粒子间距 Δ 也可以近似化简, 有

$$\begin{aligned} \Delta(y) &= L_s - \beta L = \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{R\phi^3}{24} \frac{(R\phi + 4y)}{L_s} \approx \frac{y}{2\gamma^2} + \frac{1}{6}R\phi^3 - \frac{1}{8y}R^2\phi^4 \\ \Delta(y_p) &\approx \frac{1}{6}R\phi^3 \end{aligned} \quad (15.17)$$

因此, 尾场函数可以 Δ 形式近似写为¹⁵

$$w_A(\Delta) = A\delta\left(\Delta - \frac{1}{6}R\phi^3\right) \quad (15.18)$$

其中, 系数 A 待定, 可通过如下技巧得到¹⁶

$$A = \int_0^\infty w_A(\Delta)d\Delta = \int_0^\infty w_A(y)\frac{\partial\Delta}{\partial y}dy = -\frac{Z_0c}{\pi R\phi} \quad (15.19)$$

最后一个等号前的积分非常复杂, 但很幸运能通过 Mathematica 得到! 这里有一个隐性假设: 在弯铁上游的直线段为无穷长。好, 到目前为止, 我们已经得到了标准的尾场函数形式

$$w_A(\Delta) = -\frac{Z_0c}{\pi R\phi}\delta\left(\Delta - \frac{1}{6}R\phi^3\right) \quad (15.20)$$

有了双粒子模型的单位长度尾场函数 (wake function) 后, 束团整体经历弯铁时, 在 Case A 情境下的尾场 (wakefield) 可以通过将尾场函数与纵向束团分布 $\lambda(z)$ 卷积得到, 即

$$\mathcal{W}_A(\phi; z) = \int_{-\infty}^z w_A(z - z') \lambda(z') dz' \quad (15.21)$$

因此, 有¹⁷

$$\mathcal{W}_A(\phi; z) = \int_{-\infty}^\infty w_A(z - z') \lambda(z') dz' = -\frac{Z_0c}{\pi R\phi}\lambda\left(z - \frac{1}{6}R\phi^3\right) \quad (15.22)$$

其中, $\lambda(z)$ 为纵向束团分布函数, 满足归一化条件 $\int \lambda(z)dz = 1$ 。由此尾场表示式, 可以看到, 当 σ_z 长度的束团进入弯铁较深后, 即 $\sigma_z \ll R\phi^3/6$, Case A 的尾场影响将开始衰减。

由于束团经历 Case A 情境的过程较短, 很快头部尾部粒子都将同时进入弯转段, 因此, Case A 的 CSR 尾场或阻抗又称入口暂态 CSR 场 (entrance transient CSR)。特别注意, Case A 只是贡献了一部分暂态 CSR 场, 还有另外两部分, 下面将介绍。即,

Case A \neq 暂态 CSR; Case A \in 暂态 CSR

¹⁴当取 $\gamma \rightarrow \infty$ 时, 有 $w_A(y) \sim \delta(y - y_p)$, 其中, $y_p = \frac{1}{2}\gamma R\phi^2$ 。

¹⁵这种写法不是单纯的数学近似, 而是包含物理论证的近似手段。此式已经做了极端相对论近似, 即 $\gamma \rightarrow \infty$, 因此对低能电子束可能已经不适用。

¹⁶ $\frac{\partial\Delta}{\partial y} = \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{8y^2}R^2\phi^4$

¹⁷这里积分上限可推广至 $+\infty$, 只要假设 $w(< 0) = 0$ 。此外, 回顾第11章, 我们提过尾场函数 (wake function)、尾场 (wakefield)、尾场势 (wake potential) 的区别。

15.2.2 Case B

参考图 15.4(b), 对 Case B 来说, \mathbf{P}' 与 \mathbf{P} 都在弯转段内, 分析相对简单, 源粒子在 t' 时刻恒有 $|\mathbf{a}'| = \beta^2 c^2 / R$ 。单位长度尾场函数可写成

$$w_B = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathcal{N}_a}{\mathcal{D}^3} + \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\mathcal{N}_v}{\mathcal{D}^3} - \frac{1}{\Delta^2} \right) \right] \quad (15.23)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_v &\equiv \beta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} - L\beta \mathbf{n}') \\ \mathcal{N}_a &\equiv \beta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} \times [(\mathbf{L} - L\beta \mathbf{n}') \times \mathbf{a}']) / c^2 \\ \mathcal{D} &\equiv (L - \mathbf{L} \cdot \beta \mathbf{n}') \end{aligned} \quad (15.24)$$

现在任务即是将 $\mathcal{N}_v, \mathcal{N}_a, \mathcal{D}$ 以已知坐标量表示。不失一般性, 可将 t 时刻、位置 \mathbf{P} 的单位方向向量写成 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' &= (\cos u, \sin u, 0) \\ \mathbf{a}' &= \frac{\beta^2 c^2}{R} (-\sin u, \cos u, 0) \\ \mathbf{L} &= \left(L_c \cos \frac{u}{2}, L_c \sin \frac{u}{2}, 0 \right) \\ L_c &= 2R \sin \frac{u}{2} \approx Ru - \frac{Ru^3}{24} \end{aligned} \quad (15.25)$$

保留 Ru , 剩余的 u 展开至 u^2 , 然后代入上面 $\mathcal{N}_v, \mathcal{N}_a, \mathcal{D}$ 的式子, 有

$$\begin{aligned} L &= L_s - \frac{Ru^3}{24}, \quad L_s = Ru \\ \mathcal{N}_a &= -\frac{L_s}{2\gamma^2} \frac{(Ru)}{2R} u + \frac{(Ru)^2}{16R} u^3 \\ \mathcal{N}_v &= \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{3Ru^3}{8}, \quad \mathcal{D} = \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{Ru^3}{8} \end{aligned} \quad (15.26)$$

于是, 单位长度 CSR 尾场函数有

$$\begin{aligned} w_B(u) &= -\frac{8\gamma^4}{\pi\epsilon_0 R^2} \left[\frac{\gamma^2 u^2 - 4}{(\gamma^2 u^2 + 4)^3} + \frac{2}{\gamma^2 u^2} \left(\frac{3\gamma^2 u^2 + 4}{(\gamma^2 u^2 + 4)^3} - \frac{9}{(\gamma^2 u^2 + 12)^2} \right) \right] \\ &\approx -\frac{8}{\pi\epsilon_0 R^2 u^4} \end{aligned} \quad (15.27)$$

其中, 近似符号假设了 $\gamma u \gg 1$ (极端相对论近似)¹⁸。留意, 这还不是我们最终希望看到的函数依存关系, 因此还需要进一步化简。应用极端相对论假设 $\gamma \gg 1$, 头尾粒子之间的距离有

$$\Delta = L_s - \beta L = \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{Ru^3}{24} \approx \frac{Ru^3}{24} \quad (15.28)$$

注 这里经过 $\gamma \gg 1$ 近似后的 Δ , 即 $L_s - \beta L \rightarrow L_s - L$, 其实就是弧长与弦长的差。此值 $\frac{Ru^3}{24}$ 又称滑移长度 (slippage length), 其物理图像将在此小节结尾讨论。

现在, 可以反解 u 为 Δ 的函数, 然后代入上面的 $w_B(u)$, 于是有标准的尾场函数形

¹⁸并且也不适用于太靠近弯铁入口处。

式 $w_B(\Delta)$

$$w_B(\Delta) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3^{4/3} R^{2/3} \Delta^{4/3}} \quad (15.29)$$

由于 $\Delta = z - z'$, 不失一般性, 可令 $z' = 0$, 则 $\Delta = z$, 上式则写为

$$w_B(z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3^{4/3} R^{2/3} z^{4/3}} = -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{2}{3^{4/3} R^{2/3} z^{4/3}} \quad (15.30)$$

此即 §0.5 不同单位制之间转换的一例。

类似 Case A, 现在尝试计算束团整体经历弯铁时, 在 Case B 情境下的尾场 (wakefield)。可直接按原始定义做,

$$\mathcal{W}_B(u; z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_B(z - z') \lambda(z') dz' \quad (15.31)$$

回忆一下 Case A, 当时仰赖了对 w_A 的不只一次 (粗鲁的) 化简后, 才“猜”出一个 δ 函数形式的表示式。下面采用另一种方法 — 分部积分法 (integration by parts), 为什么用此法, 后面会回头解释。该方法的基本思路为, 按卷积定义, 根据 $w_B(z - z')$ 找一个对应的函数 $U(z')$, 利用分部积分法, 把 $\mathcal{W}_B(u; z)$ 定义式改写成另一个等价的形式, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_B(u; z) &= \int_{-\infty}^{\infty} w_B(z - z') \lambda(z') dz' = \int \frac{\partial U}{\partial z'} \lambda(z') dz' \\ &= U(z') \lambda(z') \Big|_{z'=z_i}^{z'=z_o} - \int_{z_i}^{z_o} U(z') \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \end{aligned} \quad (15.32)$$

其中, $\frac{\partial U}{\partial z'} = w_B(z - z')$ 。现在问题是, U 好找吗? 先考虑如下

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{dz'}{du} = -w_B \frac{d\Delta}{du} = -w_B \frac{Ru^2}{8} = \frac{1}{\pi\epsilon_0 Ru^2} \quad (15.33)$$

等式两边对 u 不定积分, $\int^u \frac{1}{u^2} = -\frac{1}{u}$, 于是有

$$U = -\frac{1}{\pi\epsilon_0 Ru} = -\frac{Z_0 c}{\pi Ru} \quad (15.34)$$

记得 z 为 t 时刻, 测试粒子在相对于参考位置 P 的坐标; z' 为 t 时刻, 源粒子在相对于参考位置 P 的坐标。现在, 这里的 z' 积分下限选为 $z_i = z - \Delta_{\max}$, 积分上限选为 $z_o = z$, 其中, $\Delta_{\max} = \frac{Ru_{\max}^3}{24}$ 。片刻思考后, 会发现, Δ_{\max} 的取值对应的情况是: t' 时刻, 源粒子在参考位置 P' 恰好在弯铁入口处时; 当 $z' \rightarrow z$ 时, $u \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0$; 当 $z' < z_i$ 时, 应考虑 Case A。综上, 可知

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_B(z) &= U(z') \lambda(z') \Big|_{z'=z-\Delta_{\max}}^{z'=z} - \int_{z-\Delta_{\max}}^z U \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \\ &= U(z) \lambda(z) - U(z - \Delta_{\max}) \lambda(z - \Delta_{\max}) - \int_{z-\Delta_{\max}}^z U \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda(z - \Delta_{\max})}{Ru_{\max}} + \int_{z-\Delta_{\max}}^z \frac{1}{Ru} \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \right] \end{aligned} \quad (15.35)$$

此处, 当 $z' \rightarrow z$ 时, $U(z) \lambda(z) = 0 \cdot \lambda(z) = 0$ 。当 $z' \rightarrow z$ 时, $w_B \approx -\frac{8}{\pi\epsilon_0 R^2 u^4}$ 不再适用, 因为此时不再是 $\gamma u \gg 1$, 而是 $\gamma u \rightarrow 0$ 。根据 $w_B(u)$ 的原始表达式, 在 $\gamma u \rightarrow 0$ 时, 有 $w_B \approx \frac{\gamma^4}{3\pi\epsilon_0 R^2}$ 。由此, $U = -\frac{\gamma^4 u^3}{72\pi\epsilon_0 R}$ 。故, 当 $z' \rightarrow z$ 时, $U \rightarrow 0$, $U(z) \lambda(z) \rightarrow 0$ 。

将上式中的 u_{\max} 与 Δ_{\max} 以自弯铁入口处至 P 的张角表示, 写成 $u_{\max} = \theta, \Delta_{\max} = \frac{R\theta^3}{24}$ 。此外, 以 $u = (\frac{24\Delta}{R})^{1/3}$ 代入上式被积分函数的分母 Ru 项, 化简后可以得到

$$\mathcal{W}_B(z) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R\theta} \lambda \left(z - \frac{R\theta^3}{24} \right) + \frac{1}{2 \times 3^{1/3} R^{2/3}} \int_{z - \frac{R\theta^3}{24}}^z \frac{1}{(z - z')^{1/3}} \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \right] \quad (15.36)$$

由于束团经历 Case B 情境的过程较长, 特别是当磁铁长度较长时, 因此, 当束团进入弯铁 $s \gg 2 \cdot 3^{1/3} R^{2/3}$ 距离时, 上式等式右边第一项 $\frac{1}{R\theta} \lambda \left(z - \frac{R\theta^3}{24} \right) \ll 1$ 可逐渐忽略, 剩余 Case B 的 CSR 尾场又称稳态 CSR 场 (steady-state CSR)。

上式等式右边第一项其实部分贡献了暂态 CSR 场, 第二项则是稳态 CSR 场。



笔记 现在用分部积分法推导得到稳态 CSR 尾场了。回到前面提到的, 为什么不直接代入尾场的原始卷积积分定义, 非得用分部积分, 似乎没有比较简单? 按原始定义代入后, 有

$$\mathcal{W}_B(z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_B(z - z') \lambda(z') dz' = -\frac{2}{4\pi\epsilon_0 \times 3^{4/3} R^{2/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - z')^{4/3}} \lambda(z') dz' \quad (15.37)$$

与利用分部积分法得到的结果比较, 可以看到, 此处被积分函数分母存在 $4/3$ 次方的可能极点。分部积分法得到的被积分函数分母则只存在 $1/3$ 次方的可能极点, 积分的奇异性 (singularity) 相对缓解许多。

练习 15.2 考虑一维高斯束团分布, $\lambda(z) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$, 计算其稳态 CSR 尾场 $\mathcal{W}_B(z)$ 与束团内 z 位置 CSR 场导致的能量分布。 ■

解 稳态表征 $\frac{R\theta^3}{24} \gg z$, 积分下限取 $z - \frac{R\theta^3}{24} \rightarrow -\infty$ 。利用公式

$$\mathcal{W}_B(z) = \frac{1}{2 \times 3^{1/3} R^{2/3} \pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^z \frac{1}{(z - z')^{1/3}} \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \quad (15.38)$$

则有单位长度束团整体尾场分布

$$\mathcal{W}_B(z) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2} 3^{1/3} R^{2/3} \sigma_z^{4/3} \epsilon_0} F_0 \left(\frac{z}{\sigma_z} \right) \quad (15.39)$$

或写成单位长度在束团内 z 位置能量改变

$$\frac{dE_{CSR,B}}{cdt} = -e^2 \mathcal{W}_B(z) = -\frac{Ne^2}{(2\pi)^{3/2} 3^{1/3} R^{2/3} \sigma_z^{4/3} \epsilon_0} F_0 \left(\frac{z}{\sigma_z} \right) \quad (15.40)$$

其中,

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^x d\chi \frac{1}{(x - \chi)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial \chi} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad (15.41)$$

以上稳态 CSR 场导致的单位长度在束团内 z 位置能量改变如图 15.5。可以看到, 束团整体的头部约 $1/3$ 获得能量, 尾部 $2/3$ 失去能量, 整体仍失去能量, 如预期。 ■



笔记 以上 $F_0(x)$ 需要数值积分求解, 但因为是通用函数 (universal function), 仅需求解一次即可。可通过 MATLAB 或 Mathematica 求解之后存为数值函数表。在 Z. Zhang et al.,

New J. Phys. 22, 083030 (2020) 该论文中，似乎 F_0 可以特殊函数写成解析表示式，有

$$F_0(x) = 2^{5/6} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) {}_1F_1\left(\frac{7}{6}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{2}\right) x - 2^{4/3} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) {}_1F_1\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{2}\right)$$

其中， ${}_1F_1(a; b; z)$ 为合流超几何函数 (confluent hypergeometric function)。留意，绝对数值待检验，可能差一常数倍。

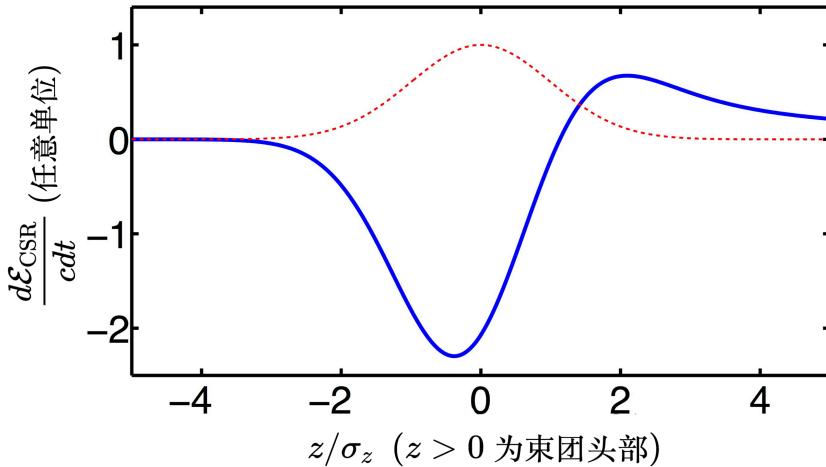


图 15.5: 一维高斯线束团的稳态 CSR 尾场。红色虚线为束团分布函数，蓝色实线为尾场分布。最小值在 $z/\sigma_z \approx -0.38$ ，最大值在 $z/\sigma_z \approx 2.1$ 。



笔记 针对 Case B 的讨论中，时常出现一个量 $\frac{Ru^3}{24}$ ，称滑移长度，其中， u 是 t' 时刻束团 P' 与 t 时刻束团 P 对应的张角。 $\frac{Ru^3}{24}$ 这个量的物理意义表征束团中测试粒子与源粒子在经过弯铁 Ru 路径长之后，彼此能够通过 CSR 相互影响的间距。当束团整体刚进入弯铁时（即摆脱 Case A 情况）， u 较小，因此 $\frac{Ru^3}{24}$ 较小，表征能影响头部测试粒子的尾部源粒子被涵盖的范围 $\leq \frac{Ru^3}{24} < \sigma_z$ 也就较少。随着束团进入弯铁更深， u 开始增加，因此 $\frac{Ru^3}{24}$ 变大，表征能影响头部测试粒子的尾部源粒子被涵盖的范围 $\leq \frac{Ru^3}{24} > \sigma_z$ 也就越来越多。等到 $\frac{Ru^3}{24} > \sigma_z$ 时，束团整体内凡是满足推迟条件的尾部源粒子，都将影响对应的测试粒子。此时即为稳态 CSR 场。

15.2.3 Case C

参考图 15.4(c)，对 Case C 来说， t' 时刻在 P' 的源粒子与 t 时刻在 P 的测试粒子都不在弯转段内，因此 $\mathbf{a}' = 0$ ，类似于 Case A。于是，单位长度尾场函数可以写成

$$w_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \left(\frac{\mathcal{N}_v}{\mathcal{D}^3} - \frac{1}{\Delta^2} \right) \quad (15.42)$$

其中，

$$\mathcal{N}_v \equiv \beta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} - L\beta \mathbf{n}'), \quad \mathcal{D} \equiv (L - \mathbf{L} \cdot \beta \mathbf{n}') \quad (15.43)$$

不失一般性，令弯转磁铁出口为坐标原点，出口漂移段为 $+x$ 轴，向量分析给出

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (1, 0, 0), \quad \mathbf{n}' = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \\ L_c &= 2R \sin \frac{\phi_m}{2} \\ L_x &= y \cos \phi_m + L_c \cos \frac{\phi_m}{2} + x \\ L_y &= y \sin \phi_m + L_c \sin \frac{\phi_m}{2}\end{aligned}\tag{15.44}$$

其中， ϕ_m 为弯转磁铁总张角。假设 $\phi_m \ll 1$ ，保留 $R\phi_m$ 之后，剩余的 ϕ_m 展开至 ϕ_m^2 ，有

$$\begin{aligned}L_c &= R\phi_m - \frac{R\phi_m^3}{24}, \quad L_s = R\phi_m + x + y \\ L &= L_s - \frac{\phi_m^2}{24} \frac{R^2\phi_m^2 + 4R\phi_m(x+y) + 12xy}{L_s} \\ \Delta &= \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{\phi_m^2}{24} \frac{R^2\phi_m^2 + 4R\phi(x+y) + 12xy}{L_s}\end{aligned}\tag{15.45}$$

代入 \mathcal{N}_v 与 \mathcal{D} 定义式，有

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_v &= \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{(R\phi_m + 2x)(3R\phi_m + 2x + 4y)\phi_m^2}{8L_s} \\ \mathcal{D} &= \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{(R\phi_m + 2x)^2\phi_m^2}{8L_s}\end{aligned}\tag{15.46}$$

可以得到单位长度 CSR 尾场函数，有

$$w_C(y, x) = -\frac{\gamma^2 L_s^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{64 [4L_s^2 + \gamma^2\phi_m^2(R\phi_m + 2x)(3R\phi_m + 2x + 4y)]}{[4L_s^2 + \gamma^2\phi_m^2(R\phi_m + 2x)^2]^3} \right. \\ \left. - \frac{576}{[12L_s^2 + \gamma^2\phi_m^2(R^2\phi_m^2 + 4R\phi_m(x+y) + 12xy)]^2} \right\}\tag{15.47}$$

类似于 Case A，假设 $\gamma^2 \gg \frac{L_s}{(R\phi_m + 2x)\phi_m^2}$, $y \gg R\phi_m$ 且 $y \gg x$ ，对应在 t 时刻的头尾粒子间距

$$\Delta(y) \approx \frac{y}{2\gamma^2} + \frac{1}{6}(R\phi_m + 3x)\phi_m^2 - \frac{1}{8y}(R\phi_m + 2x)^2\phi_m^2\tag{15.48}$$

经过数值观察，发现当源粒子在 t' 时刻在磁铁入口处上游 $y = \frac{1}{2}\gamma(R\phi_m + 2x)\phi_m \equiv y_p$ 的位置，对尾场贡献最大，因此有

$$\begin{aligned}\Delta(y_p) &= \frac{1}{6}(R\phi_m + 3x)\phi_m^2 \\ w_C(\Delta) &= C\delta\left(\Delta - \frac{1}{6}(R\phi_m + 3x)\phi_m^2\right)\end{aligned}\tag{15.49}$$

其中，系数 C 待定，可通过类似于 Case A 使用的技巧得到

$$C = \int_0^\infty w_C(\Delta)d\Delta = \int_0^\infty w_C(y) \frac{\partial \Delta}{\partial y} dy = -\frac{1}{\pi\epsilon_0(R\phi_m + 2x)} = -\frac{Z_0c}{\pi(R\phi_m + 2x)}\tag{15.50}$$

最后一个等号前的积分非常复杂，但是，又一次很幸运能通过 Mathematica 得到！类似地，这里有两个隐性假设：在弯铁上游的直线段为无穷长，弯转磁铁张角 ϕ_m 不能太小¹⁹。得到的标准尾场函数形式

$$w_C(\Delta) = -\frac{Z_0c}{\pi(R\phi_m + 2x)} \delta\left(\Delta - \frac{1}{6}(R\phi_m + 3x)\phi_m^2\right)\tag{15.51}$$

¹⁹因为 $\gamma^2 \gg \frac{L_s}{(R\phi_m + 2x)\phi_m^2}$ 。

束团整体贡献的尾场有

$$\mathcal{W}_C(z) = \int_{-\infty}^z w_C(z-z') \lambda(z') dz' = -\frac{Z_0 c}{\pi(R\phi_m + 2x)} \lambda \left(z - \frac{1}{6}(R\phi_m + 3x)\phi_m^2 \right) \quad (15.52)$$

当 $x = 0$ 时, 上式退化为 Case A 的 $\mathcal{W}_A(z)$, 如预期。

由于束团经历 Case C 情境不涉及严格意义上的 CSR, 很快头部或尾部粒子将进入弯转段, 因此, Case C 的 CSR 尾场又称横渡、暂态 CSR 场 (cross transient CSR)。有些 CSR 计算忽略 Case C 的影响。

15.2.4 Case D

参考图 15.4(d), 对 Case D 来说, t' 时刻的源粒子还在弯转段内, 因此仍可能影响在 t 时刻在下游直线段的测试粒子。这里定义 ψ 为 t' 时刻束团距离磁铁出口处的夹角。类似于 Case B, 单位长度尾场函数可写成

$$w_D = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathcal{N}_a}{\mathcal{D}^3} + \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\mathcal{N}_v}{\mathcal{D}^3} - \frac{1}{\Delta^2} \right) \right] \quad (15.53)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_v &\equiv \beta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} - L\beta \mathbf{n}') \\ \mathcal{N}_a &\equiv \beta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} \times [(\mathbf{L} - L\beta \mathbf{n}') \times \mathbf{a}']) / c^2 \\ \mathcal{D} &\equiv (L - \mathbf{L} \cdot \beta \mathbf{n}') \end{aligned} \quad (15.54)$$

向量分析给出

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (1, 0, 0), \quad \mathbf{n}' = (\cos \psi, \sin \psi, 0) \\ \mathbf{a}' &= \frac{\beta^2 c^2}{R} (-\sin \psi, \cos \psi, 0) \\ \mathbf{L} &= \left(L_c \cos \frac{\psi}{2} + x, L_c \sin \frac{\psi}{2}, 0, 0 \right), \quad L_c = 2R \sin \frac{\psi}{2} \end{aligned} \quad (15.55)$$

保留 $R\psi$, 剩余的 ψ 展开至 ψ^2 , 然后代入上面 $\mathcal{N}_v, \mathcal{N}_a, \mathcal{D}$ 的式子, 有

$$\begin{aligned} L &= L_s - \frac{R\psi^3}{24} \frac{(R\psi + 4x)}{L_s} \\ \mathcal{D} &= \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{(R\psi + 2x)^2 \psi^2}{8L_s} \\ L_s &= R\psi + x \end{aligned} \quad (15.56)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_a &= -\frac{L_s}{2\gamma^2} \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^4}{16} \frac{(R\psi + 2x)^2}{(R\psi + x)} \\ \mathcal{N}_v &= \frac{L_s}{2\gamma^2} + \frac{(3R^2\psi^2 + 8R\psi x + 4x^2)\psi^2}{8(R\psi + x)} \end{aligned}$$

于是，单位长度 CSR 尾场函数有

$$\begin{aligned} w_D(x, \psi) &= -\frac{8\gamma^4 L_s^2}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\gamma^2\psi^2(R\psi+2x)^2 - 4L_s^2)\psi^2}{[\gamma^2\psi^2(R\psi+2x)^2 + 4L_s^2]^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\gamma^2} \left(\frac{\gamma^2\psi^2(3R^2\psi^2 + 8R\psi x + 4x^2) + 4L_s^2}{[\gamma^2\psi^2(R\psi+2x)^2 + 4L_s^2]^3} - \frac{9}{[\gamma^2\psi^2 R\psi(R\psi+4x) + 12L_s^2]^2} \right) \right] \\ &\approx -\frac{8}{\pi\epsilon_0} \frac{(R\psi+x)^2}{\psi^2(R\psi+2x)^4} \end{aligned} \quad (15.57)$$

其中，第二个近似符号假设 $\gamma\psi \gg 1$ 。当 $x \rightarrow 0$ 时，上式退化为 Case B，如预期。当 $\psi \rightarrow 0$, $w_D \rightarrow 0$ ，合理。在极端相对论近似 $\gamma \gg 1$ 或 $\gamma^2 \gg (R\psi+x)/R\psi^3$ 下，有

$$\Delta = \frac{R\psi^3}{24} \frac{(R\psi+4x)}{R\psi+x} \quad (15.58)$$

标准的尾场函数形式可以通过反解 ψ 为 Δ 的函数，然后代入 $w_D(x, \psi)$ ，得到 $w_D(x, \Delta)$ 。

接着，求束团整体的尾场。类似于 Case B 的思路，利用分部积分法

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_D(x, \psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} w_D(z - z') \lambda(z') dz' = \int \frac{\partial U}{\partial z'} \lambda(z') dz' \\ &= U(z') \lambda(z')|_{z'=z_i}^{z'=z_o} - \int_{z_i}^{z_o} U(z') \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \end{aligned} \quad (15.59)$$

其中， $\frac{\partial U}{\partial z'} = w_D(z - z')$ 。为构造函数 U ，考虑

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{dz'}{d\psi} = -w_D \frac{d\Delta}{d\psi} = -w_D \frac{R\psi^2(R\psi+2x)^2}{8(R\psi+x)^2} = \frac{R}{\pi\epsilon_0(R\psi+2x)^2} \quad (15.60)$$

对 ψ 不定积分，有

$$U(\psi, x; \Delta) = -\frac{1}{\pi\epsilon_0(R\psi+2x)} \quad (15.61)$$

其中， $U(z)$ 或 $U(\Delta)$ 的 z 或 $\Delta = z - z'$ 函数依存关系藏在 ψ 中，为隐函数关系。这个隐函数方程 $\Delta\psi$ 其实仍可以解成显函数形式 $\psi(\Delta)$ ，只是形式非常复杂，但通过 Mathematica 可以做到。感兴趣的读者可自行尝试。

现在，决定积分上下限。积分下限取 $z_i = z - \Delta_{\max}$ ，其中， $\Delta_{\max} = \frac{R\psi_m^3}{24} \frac{(R\psi_m+4x)}{R\psi_m+x}$ ；积分上限取 $z_o = z - \Delta_{\max}(\psi = 0) = z$ 。于是，

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_D(z) &= (U\lambda)|_{z'=z-\Delta_{\max}}^{z'=z} - \int_{z-\Delta_{\max}}^z U \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \\ &= U(z)\lambda(z) - U(z - \Delta_{\max})\lambda(z - \Delta_{\max}) - \int_{z-\Delta_{\max}}^z U \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda(z - \Delta_{\max})}{R\phi_m + 2x} + \int_{z-\Delta_{\max}}^z \frac{1}{R\psi + 2x} \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \right] \end{aligned} \quad (15.62)$$

其中， $U(z) = 0$ ，因为 $w_D \rightarrow 0$ ，当 $z' \rightarrow z$ 时。

如果直接按卷积定义做，则束团整体尾场有

$$\mathcal{W}_D(x, \psi) = \int_{z-\Delta_{\max}}^z w_D(z-z') \lambda(z') dz' = -\frac{8}{\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(R\psi+x)^2}{\psi^2(R\psi+2x)^4} \lambda(z') dz' \quad (15.63)$$

缺点是被积分函数的奇异性较明显。

分析发现，束团经历 Case D 情境有时可能比 Case B 对束团的影响还严重，因此，Case D 尽管为出口暂态 CSR 场 (exit transient CSR)，其重要性不可小觑。

练习 15.3 上面对 CSR 的一维模型采用 Lienard-Wiechert 公式，不妨利用 §2.3 介绍的 Jefimenko 公式，试着重新推导以上四种 Case，看是否能得到等价结果。 ■

练习 15.4 上面对 CSR 的一维模型采用 Lienard-Wiechert 公式，不妨利用 §2.3 介绍的 Feynman-Heaviside 公式，试着重新推导以上四种 Case，看是否能得到等价结果。 ■

15.2.5 一维稳态与暂态 CSR 尾场

上面四种 CSR 尾场是按单个弯转磁铁的四种几何构型分类的。也可以按稳态与暂态 CSR 尾场进行分类，则稳态 CSR 尾场指的是源粒子与测试粒子相对“追赶”关系保持不变，即 Case B 的第二项，因此，稳态 CSR (steady-state CSR) 尾场函数为

$$w_{ss}(z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3^{4/3} R^{2/3} z^{4/3}} = -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{2}{3^{4/3} R^{2/3} z^{4/3}} \quad (15.64)$$

对应束团分布形式的尾场有

$$\mathcal{W}_{ss}(z) = \frac{1}{2 \times 3^{1/3} R^{2/3} \pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^z \frac{1}{(z-z')^{1/3}} \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \quad (15.65)$$

其余则归类为暂态 CSR 尾场 (transient CSR)。

除了以“稳态、暂态”分类，还可以按 CSR 场作用在磁铁内正经历弯转段的粒子或按 CSR 场作用在磁铁外下游传输段的粒子。可分别写成

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{E}_{CSR}}{ds} \right|_{\text{弯转段}} &= -e^2 (\mathcal{W}_A + \mathcal{W}_B) \\ &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{4}{R\phi} [\lambda(z-z_B) - \lambda(z-z_A)] + \frac{2}{(3R^2)^{1/3}} \int_{z-z_B}^z \frac{1}{(z-z')^{1/3}} \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \right\} \\ \left. \frac{d\mathcal{E}_{CSR}}{ds} \right|_{\text{漂移段}} &= -e^2 (\mathcal{W}_C + \mathcal{W}_D) \\ &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{4}{R\phi_m + 2x} [\lambda(z-z_D) - \lambda(z-z_C)] + \int_{z-z_D}^z \frac{4}{R\psi + 2x} \frac{\partial \lambda(z')}{\partial z'} dz' \right\} \end{aligned} \quad (15.66)$$

其中， $\phi_m > 0$ 为弯铁总张角， $\phi > 0, \psi > 0, x > 0, z_A, z_B, z_C, z_D$ 分别对应 Case A 至

Case D 的四个滑移长度 (slippage distance)，在极端相对论近似下，有

$$\begin{aligned} z_A &= \frac{R\phi^3}{6} \\ z_B &= \frac{R\phi^3}{24} \\ z_C &= \frac{\phi_m^2}{6}(R\phi_m + 3x) \\ z_D &= \frac{R\phi_m^3}{24} \left(\frac{R\phi_m + 4x}{R\phi_m + x} \right) \end{aligned} \quad (15.67)$$

留意，以上当 $\frac{d\mathcal{E}_{CSR}}{ds} < 0$ 时，表示束团失去能量。上式中，包含 $\lambda(z - z_i), i = A, B, C, D$ 的项视为暂态项，其余为稳态项。

性质 15.1. 经过单一弯铁 CSR 场的几个特性

由上可知，

- 不同的滑移长度项表征 CSR 场在不同阶段 (Case A-Case D) 对束团的效应不一样。
- 当束团刚进入弯铁且尚未积累弯转过程时， $\phi \sim 0$ ，此时 Case A 与 Case B 效应差不多抵消，对束团影响可忽略。
- 当束团刚进入弯铁阶段不久，特别是当 $0 < \phi < (6\sigma_z/R)^{1/3}$ ，此时 Case A 对束团影响相对较大，Case A 中的暂态 $\lambda(z - z_A)$ 项的影响开始体现。
- 当 $(6\sigma_z/R)^{1/3} < \phi < (24\sigma_z/R)^{1/3}$ 时，Case A 的暂态 CSR 场差不多已经滑移到束团前方，此时 Case B 中的暂态 $\lambda(z - z_B)$ 项的影响开始体现。由于 $\lambda(z - z_A)$ 与 $\lambda(z - z_B)$ 项符号相反，为抵消效应。
- 当 $\phi > (24\sigma_z/R)^{1/3}$ 时，此时 Case B 中的暂态项滑移到束团前方，剩下显著的影响为 Case B 中的稳态项 (积分项)。
- 在 Derbenev 理论中，稳态情况假设 $z_B \rightarrow \infty$ ，因此， \mathcal{W}_{ss} 的积分下限有 $z - z_B \rightarrow -\infty$ 。更细致的分析^a建议，当从 Case A 进入 Case B 过程，以上滑移长度可加一经验参数 $P_{SS} \approx 1.6$ 。即 $z_A \rightarrow P_{SS}z_A, z_B \rightarrow P_{SS}z_B$ 。
- 当束团离开弯铁不久时，特别是离下游出口不远时，即 $3x \ll R\phi_m = L_B$ ，漂移段中的 $\lambda(z - z_C)$ 暂态项主导，但很快 $3x \ll R\phi_m = L_B$ 不再成立，即 Case C 的暂态 CSR 场差不多已经滑移到束团前方，此时 $z_C \propto x$ 。
- 相较于 Case C， z_D 相对于 x 的函数依存关系较弱，即 z_D 随着 x 增加，其变化幅度没有改变太多，因此 Case D 的暂态影响将相对显著些。留意，尽管离开弯铁后，距离下游 x 处越远，Case C 与 Case D 的 CSR 场振幅都衰减。但是，这里指的影响是，Case D 的暂态 CSR 场不像 Case C 的暂态 CSR 场那么快就滑移到束团前方。因此，Case D 的暂态场对束团的影响持续更长时间 (或持续到下游更远处)。由于 $\lambda(z - z_C)$ 与 $\lambda(z - z_D)$ 项符号相反，为抵消效应。
- 对 Case D 的影响，较短弯铁长度而言 (即 $R\phi_m$ 较小)， z_D 更快达到稳态

$z_D \rightarrow \frac{R\phi_m^3}{6}$ ；较长弯铁长度(即 $R\phi_m$ 较大), z_D 需要更长时间(或持续到下游更远处), Case D 的 CSR 场才进入“稳态”(即积分项)。留意, 这里的稳态并不是指振幅的稳态, 而是场与粒子追赶关系的稳态。此时, 场振幅平方(即 CSR 能量)大致呈 $1/x$ 减小。

- 稳态情况假设 $z_D \rightarrow \infty$, 因此, $\left. \frac{dE_{CSR}}{ds} \right|_{\text{漂移段}}$ 积分项的下限可近似写成 $z - z_D \rightarrow -\infty$ 。类似的, 更细致的分析可以通过系列数值模拟引入经验参数。细节此处不论, 可参考 D.Z. Khan 与 T.O. Raubenheimer 工作。

^aD.Z. Khan and T.O. Raubenheimer, Approximated expressions for the coherent synchrotron radiation effect in various accelerator scenarios, Phys. Rev. Accel. Beams **24**, 080701 (2021). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.080701>

这一章介绍的都是一维 CSR 模型, 忽略束团横向尺寸的影响, 其适用条件称 Derbenev 条件, 定义如下:

定义 15.2. Derbenev 条件

一维 CSR 模型成立的前提条件为

$$\frac{\sigma_x}{(R\sigma_z^2)^{1/3}} \ll 1 \quad (15.68)$$

其中,

- σ_x 分别为束团横向特征长度, 如横向尺寸,
- σ_z 分别为束团纵向特征长度, 可以是束长或纵向调制波长,
- R 为弯转半径。

以上介绍的都是无边界的自由空间模型 (free space model), 不考虑金属边界的屏蔽 (shielding) 效应。第 4 章末尾介绍过, 当考虑金属管壁的屏蔽效应时, 长波长成分将被屏蔽。换句话说, 以下定理给出自由空间模型的适用范围。

定理 15.1. 辐射屏蔽因子

金属管壁的屏蔽效应仅对那些对应横向形成长度长于管壁尺寸的波长有效。假设金属管壁尺寸为 a , 弯转半径 R , 则有

$$\ell_\perp > a \Rightarrow R^{1/3}\lambda^{2/3} > a \Rightarrow \lambda > \sqrt{\frac{a^3}{R}} \quad (15.69)$$

其中, $\lambda = \lambda/2\pi$ 。当辐射波长比 $a^{3/2}/R^{1/2}$ 长时, 对应的辐射功率将指数衰减。换句话说, 如果将无金属管壁屏蔽的自由空间的辐射能量写成 U_{free} , 将存在金属管壁屏蔽时的辐射能量写成 U_{shield} , 则由于不是所有频率成分的辐射场都能辐射, 即 $U_{\text{shield}} < U_{\text{free}}$, 其比值可以估算为

$$\frac{U_{\text{shield}}}{U_{\text{free}}} \approx 4.2 \left(\frac{n_{\text{th}}}{n_c} \right)^{5/6} e^{-\frac{2n_{\text{th}}}{n_c}}, \quad n_{\text{th}} > n_c \quad (15.70)$$

其中,

- h 为金属管壁的全高，近似为 $h \approx 2a$

$$n_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\pi \rho}{h} \right)^3} \quad (15.71)$$

- $n_c \approx \rho/\sigma_z$

证明 更多细节可参考 R. Li, C.L. Bohn, and J.J. Bisognano, Analysis on the steady-state coherent synchrotron radiation with strong shielding, Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference. <https://doi.org/10.1109/PAC.1997.750787>



15.3 数值算例

选择一维纵向高斯分布电子束经历两种不同长度单一弯铁时作为数值算例，假设束长维持不变，通过数值计算上面得到的 CSR 尾场，给出在途径弯铁不同位置时的 CSR 场及其对束团的影响。电子束与弯铁参数如表 15.1 给出，其中，这里先定义追赶长度。

定义 15.3. 单一弯铁、一维 CSR 图像的追赶长度 (overtaking distance)

定义从一维暂态 CSR 进入稳态 CSR 时，束团需要在弯转段经历的长度

$$L_0 \equiv 2(3\sigma_z R^2)^{1/3} \quad (15.72)$$

其中，

- σ_z 为束团纵向特征长度，可以是束长或纵向调制波长
- R 为弯转半径。

注 当束长在弯铁里改变时，比如压缩 (σ_z 减小)、拉伸 (σ_z 增大)，则束团可能在弯铁里从暂态进入稳态，或者从稳态进入暂态。 □

表 15.1: 用来计算一维 CSR 尾场的电子束与弯铁参数。

名称	数值	单位
束团线电荷分布	高斯	
方均根束长, σ_z	50	μm
束团电荷, $N e $	1	nC
弯转磁铁长度, L_d	50 (长束团)/10 (短束团)	cm
弯转半径, R	1.5	m
追赶长度, L_0	14	cm

以下分别考虑两个不同长度的弯转段，50-cm 的弯铁长度长于追赶长度，因此预期束团整体 CSR 尾场在弯铁内应该达到稳态；10-cm 的弯铁长度短于追赶长度，预期束团整体 CSR 尾场在弯铁内一直都处在暂态而不存在稳态情况。

✎ 练习 15.5 感兴趣的读者，建议自行编程，根据表 15.1 给定参数，重复以上结果。 ■

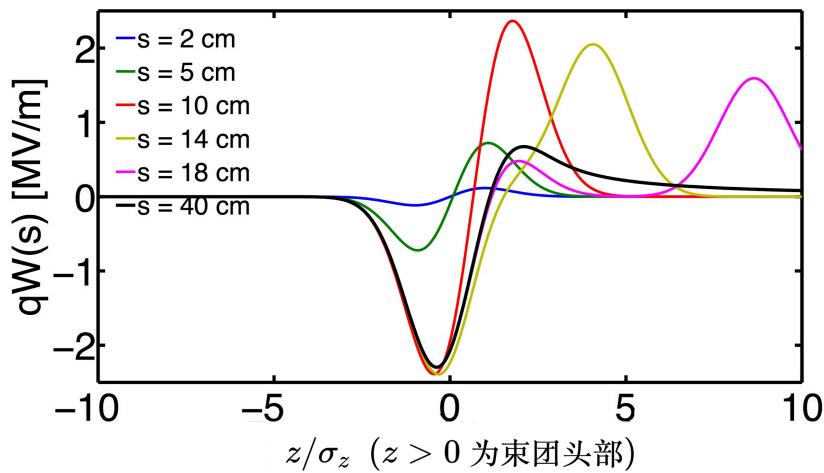


图 15.6: 一维高斯束团进入并在 50-cm 弯铁内时, 束团 CSR 尾场随不同位置 s 的演化。此处 $s = 0$ 表示在弯铁入口处。

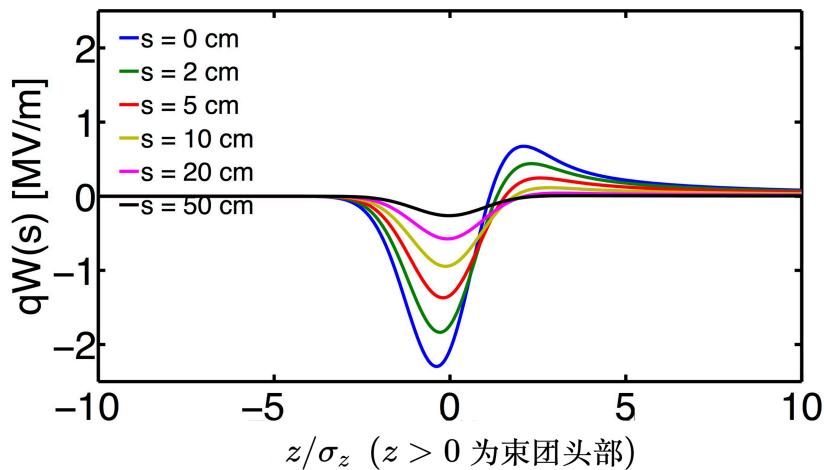


图 15.7: 一维高斯束团离开 50-cm 弯铁进入下游直线段时, 束团 CSR 尾场随不同位置 s 的演化。此处 $s = 0$ 表示在弯铁出口处, 即图 15.6 的黑线。

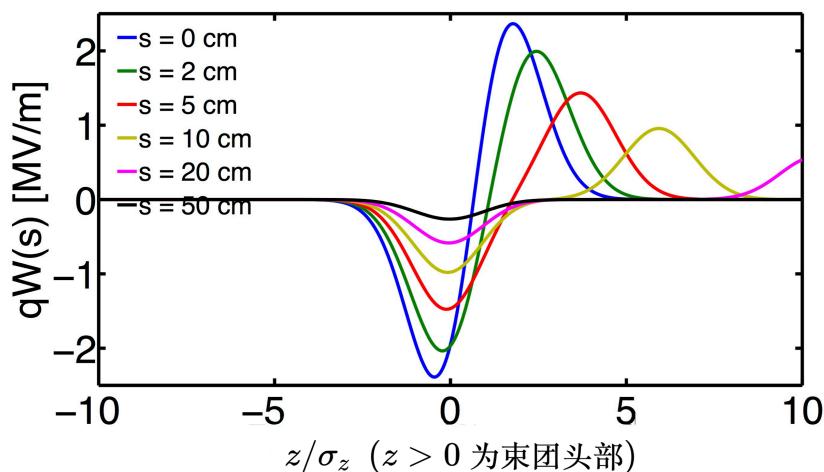


图 15.8: 一维高斯束团进入与离开 10-cm 弯铁过程, 束团 CSR 尾场随不同位置 s 的演化。此处 $s = 0$ 表示在弯铁入口处。可以看到, 不存在稳态情况。

15.4 一维模型的几个结果

第11章介绍过，阻抗函数与尾场函数互为傅里叶变换。对时域分析，使用尾场函数；对频域分析，使用阻抗函数。忽略推导细节，此处给出稳态 CSR 的阻抗函数。

定理 15.2. 一维、自由空间、单个二极铁稳态相干同步辐射阻抗

基于一维线电荷模型，考虑在自由空间中单个二极铁（弯转半径 R ，总弯转角度 ϕ_m ），对于极端相对论情况 ($\gamma \rightarrow \infty$)，有以下单位长度稳态相干同步辐射阻抗 (impedance)：

$$Z_{\text{CSR}}^{\text{s.s.UR}}(k(s); s) = -\frac{iZ_0 k^{1/3}(s) A}{4\pi |R(s)|^{2/3}} \quad (15.73)$$

其中，

- $A = -2\pi \left[\frac{\text{Bi}'(0)}{3} + i\text{Ai}'(0) \right] = 3^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{3}i - 1 \approx -0.94 + 1.63i$
- Ai 与 Bi 为 Airy 函数
- k 为波数
- $R(s)$ 为 s 处的瞬时弯转半径

上式成立条件为 $\frac{\sigma_x}{(R\sigma_z^2)^{1/3}} \ll 1$ 。

证明 根据前面介绍的 CSR 稳态尾场函数，利用傅里叶变换。 □

练习 15.6 作为练习，现在情况反过来，考虑给定 CSR 阻抗函数时，利用逆傅里叶变换求时域尾场函数，留意积分路径不能违反第11章介绍的因果律。 ■

解 参考 T. Agoh 博士论文 pp.36-38。 ■

定理 15.3. 一维、自由空间、单个二极铁暂态相干同步辐射阻抗

基于一维线电荷模型，假设极端相对论情况 ($\gamma \rightarrow \infty$)，考虑在自由空间中单个二极铁（弯转半径 R ，总弯转角度 ϕ_m ），暂态阻抗分三部分：

- 对 Case A、Case B，有以下单位长度暂态相干同步辐射阻抗：

$$Z_{\text{CSR}}^{\text{ent}}(k(s); s) = -\frac{Z_0}{\pi s^*} e^{-4i\mu(s)} + \frac{Z_0}{3\pi s^*} [i\mu(s)]^{1/3} \Gamma\left(-\frac{1}{3}, i\mu(s)\right) \quad (15.74)$$

其中，

- s^* 为束团自弯铁入口处经历的路径长
- $\mu(s) = k(s)z_L(s)$, $z_L(s) = (s^*)^3 / 24|R(s)|^2$, $R(s)$ 为弯转半径
- $\Gamma(a, z)$ 称 (上) 不完全伽马函数 (upper incomplete Gamma function)，定义为

$$\Gamma(a, z) \equiv \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

成立条件为：束团进入弯铁后经历长度未达追赶长度时，即 $s^* < (24\sigma_{zi}R^2)^{1/3}$ 。

证明 参考 C. Mitchell and J. Qiang, Effects of Transient CSR Wakefields on Microbunching in a bunch compressor, Proceedings of IPAC2013 (TUPWA057). <https://accelconf.web.cern.ch/ipac2013/papers/tupwa057.pdf>。

- 对 Case C，有以下单位长度暂态相干同步辐射阻抗：

$$Z_{CSR}^{\text{exit}}(k(s); s) = -\frac{Z_0}{\pi(L_b + 2s^*)} e^{-\frac{ik(s)L_b^2}{6|R(s)|^2}(L_b + 3s^*)} \quad (15.75)$$

其中，

- s^* 为束团自弯铁出口处经历下游漂移段的路径长
- L_b 为弯铁长度、 $R(s)$ 为弯转半径

证明 参考 C.-Y. Tsai et al., Linear microbunching analysis for recirculation machines, Phys. Rev. Accel. Beams **19**, 114401 (2016). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.114401>。

- 对 Case D，有以下单位长度暂态相干同步辐射阻抗：

$$Z_{CSR}^{\text{drif}}(k(s); s) \approx \frac{Z_0}{4\pi} \begin{cases} 0, & \text{if } s^* < R^{2/3}\lambda^{1/3} \\ \frac{2}{s^*}, & \text{if } R^{2/3}\lambda^{1/3} \leq s^* \leq \lambda\gamma^2/2\pi \\ \frac{2k(s)}{\gamma^2}, & \text{if } s^* \geq \lambda\gamma^2/2\pi \end{cases} \quad (15.76)$$

其中，

- s^* 为束团自弯铁出口处经历下游漂移段的路径长
- L_b 为弯铁长度、 R 为弯转半径

证明 参考 C.-Y. Tsai et al., Linear microbunching analysis for recirculation machines, Phys. Rev. Accel. Beams **19**, 114401 (2016). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.114401> 与 R. A. Bosch, Longitudinal wake of a bunch of suddenly accelerated electrons within the radiation formation zone, Phys. Rev. ST Accel. Beams **10**, 050701 (2007). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.10.050701>。

- 以上 Case D 的暂态相干同步辐射阻抗模型相对粗糙，更准确的阻抗模型可写为

$$Z_{CSR}^{\text{drif}}(k(s); s) = \frac{Z_0}{\pi R} \int_0^{\phi_m} d\vartheta \frac{\partial f(s^*, \vartheta)}{\partial \vartheta} e^{-ik(s)\Delta z(s^*, \vartheta)} \quad (15.77)$$

其中，

- s^* 为束团自弯铁出口处经历下游漂移段的路径长
- L_b 为弯铁长度、 R 为弯转半径
- 函数 $f(s^*, \vartheta)$ 定义为

$$f(s^*, \vartheta) = \frac{\frac{2}{\gamma^2} \left(\frac{s^*}{R} + \vartheta \right) + \vartheta^2 \left(\frac{2s^*}{R} + \vartheta \right)}{\frac{4}{\gamma^2} \left(\frac{s^*}{R} + \vartheta \right)^2 + \vartheta^2 \left(\frac{2s^*}{R} + \vartheta \right)^2} \quad (15.78)$$

- 指数部分 Δz 有

$$\Delta z(s^*, \vartheta) = \frac{s^* + R\vartheta}{2\gamma^2} + \beta \frac{R\vartheta^3}{24} \frac{4s^* + R\vartheta}{s^* + R\vartheta} \quad (15.79)$$

证明 参考 R. Li and C.-Y. Tsai, Entrance and Exit CSR Impedance for Non-ultrarelativistic Beams, Proceedings of IPAC2017 (WEPIK113), <https://accelconf.web.cern.ch/ipac2017/papers/weplik113.pdf>。 □

定理 15.4. 一维、金属平行板、单个二极铁稳态相干同步辐射阻抗

基于一维线电荷模型，以金属平行板 (parallel-plate) 近似金属真空管壁，考虑金属屏蔽效应后，单个二极铁 (弯转半径 R ，总弯转角度 ϕ_m)，对于极端相对论情况 ($\gamma \rightarrow \infty$)，有以下单位长度稳态相干同步辐射阻抗 (impedance):

$$Z_{\text{CSR}}^{\text{s.s.UR,pp}}(k) = \frac{2\pi}{h} \left(\frac{2}{kR} \right)^{1/3} Z_0 \sum_{p=0}^{\infty} F_0(\beta_p) \quad (15.80)$$

其中，

$$F_0(\beta) \equiv \text{Ai}'(\beta^2) [\text{Ai}'(\beta^2) - i\text{Bi}'(\beta^2)] + \beta^2 \text{Ai}(\beta^2) [\text{Ai}(\beta^2) - i\text{Bi}(\beta^2)] \quad (15.81)$$

$$\beta_p \equiv (2p+1) \frac{\pi}{h} \left(\frac{R}{2k^2} \right)^{1/3} \quad (15.82)$$

其中，

- Ai 与 Bi 为 Airy 函数， Ai' 与 Bi' 则为 Airy 函数的一阶导数后取值
- k 为波数
- R 为 s 处的瞬时弯转半径
- h 为金属平行板的全高
- $Z_0 \approx 377 \Omega$ 为自由空间阻抗

考虑两种极端情况，当 $k \rightarrow 0$ ，即长波长极限时，有

$$Z_{\text{CSR}}^{\text{s.s.UR,pp}}(k \rightarrow 0) = \frac{\pi Z_0}{kh^2} \left[e^{-2\pi^3 R / 3k^2 h^3} - \frac{3i}{2} C_5 \left(\frac{k^2 h^3}{\pi^3 R} \right)^2 \right] \quad (15.83)$$

其中， $C_5 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^5} = 1.004524$ 。当 $k \rightarrow \infty$ ，即短波长极限时，有

$$Z_{\text{CSR}}^{\text{s.s.UR,pp}}(k \rightarrow \infty) = \frac{Z_0}{4\pi} \frac{2\Gamma(2/3)}{3^{1/3}} \frac{(ik+0)^{1/3}}{R^{2/3}} = Z_{\text{CSR}}^{\text{s.s.UR}}(k) \quad (15.84)$$

此结果即为自由空间的 CSR 阻抗，如预期。

证明 可参考 T. Agoh and K. Yokoya, Calculation of coherent synchrotron radiation using mesh, Phys. Rev. ST Accel. Beams 7, 054403 (2004). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.7.054403> 或 R. Warnock, Fields Excited by a Beam in a Smooth Toroidal Chamber Part I: Longitudinal Coupling Impedance, SLAC-PUB-4562 (1990). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/4500/slac-pub-4562.pdf>。 □

定理 15.5. 稳态 CSR 对一维高斯束团经历弯转段的纵向效应

束长 σ_z 的一维高斯束团经历半径为 R 、角度 ϕ_m 的弯转段，自由空间稳态 CSR 产生的相干辐射功率：

$$P_{\text{CSR}}^{\text{FS}}[\text{W}] = 2.42 \times 10^{-20} \frac{N^2}{R^{2/3}[\text{m}] \sigma_z^{4/3}[\text{m}]} \frac{\phi_m}{2\pi} \quad (15.85)$$

对束团的影响：

- 经历 $L_b = R\phi_m$ 弯转磁铁后，束团整体质心能量偏移 (energy offset) 为

$$\begin{aligned} \Delta \langle \delta_{\text{CSR}} \rangle &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\langle \Delta E \rangle_{\text{CSR}}}{E} \times L_b = \frac{\partial \langle \delta_{\text{CSR}} \rangle}{\partial s} \times L_b \\ &\cong -0.3505 \frac{r_e Q L_b}{|e| \gamma (R^2 \sigma_z^4)^{1/3}} = -0.3505 \times r_e \frac{N \phi_m R^{1/3}}{\gamma \sigma_z^{4/3}} \end{aligned} \quad (15.86)$$

其中， N 为束团内粒子个数， $Q = N|e|$ ， $L_b = R\phi_m$ ， $r_e \approx 2.818 \times 10^{-15} \text{ m}$ 为经典电子半径，为一物理常数。

- 经历 $L_b = R\phi_m$ 弯转磁铁后，束团投影能散增加量 (energy spread increase) 为^a

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{\delta, \text{CSR}} &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\sigma_{\Delta E, \text{CSR}}}{E} \times L_b \\ &\cong 0.2459 \frac{r_e Q L_b}{|e| \gamma (R^2 \sigma_z^4)^{1/3}} \approx 0.7 \times \left| \frac{\partial \langle \delta_{\text{CSR}} \rangle}{\partial s} \right| \end{aligned} \quad (15.87)$$

- 由于弯转段同时为纵向色散段，存在非零 R_{56} 可能引起群聚因子改变，从而导致微束团不稳定性 (microbunching instability)，将在第 16 章讨论

证明 针对前两个物理量的理论估算如下：

单位长度束团整体质心能量偏移有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \langle \Delta E \rangle_{\text{CSR}} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \lambda(\zeta) \frac{d\mathcal{E}_{\text{CSR}, \text{B}}(\zeta)}{cdt} \\ &= \frac{2Ne^2}{\sqrt{2\pi} 3^{1/3} R^{2/3} \sigma_z^{4/3}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta F_0 \left(\frac{\zeta}{\sigma_z} \right) \frac{e^{-\zeta^2/2\sigma_z^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \\ &\approx -0.350472 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ne^2}{R^{2/3} \sigma_z^{4/3}} \end{aligned} \quad (15.88)$$

单位长度束团投影能散增加量有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} \sigma_{\Delta E, \text{CSR}} &= \frac{2Ne^2}{\sqrt{2\pi}3^{1/3}R^{2/3}\sigma_z^{4/3}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left|\langle F_0^2 \rangle - \langle F_0 \rangle^2\right|} \\ &\approx 0.245987 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ne^2}{R^{2/3}\sigma_z^{4/3}}\end{aligned}\quad (15.89)$$

其中，

$$\begin{aligned}\langle F_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} F_0(x) dx \approx 0.63351 \\ \sigma_{F_0}^2 &= \left| \langle F_0^2 \rangle - \langle F_0 \rangle^2 \right| \approx 0.19771\end{aligned}\quad (15.90)$$

注 对一般 FEL 直线加速器，chicane 导致的 $\langle \delta_{\text{CSR}} \rangle \approx 10^{-4} \sim 10^{-3}$ 。根据第 10 章介绍的 FEL 基础，可以知道，束团切片中过大的 $\langle \delta_{\text{CSR}} \rangle$ 将导致束团内仅剩部分切片能发光在波荡器设计的共振波长，其它切片产生的辐射将偏离波荡器设计的共振波长。

^a最初出现在 Ya. S. Derbenev 等人的原始论文中，该式系数 0.22 显然不够准确。 □

以上总结的是基于 Case B 中的稳态 CSR 场的贡献，可作为初步估算的实用公式。一般考虑暂态 CSR 场对束团的影响采用粒子跟踪模拟数值方法。近年有些文献尝试通过结合解析与数值方法，总结包含稳态与暂态 CSR 对一维高斯束团经历弯转段的纵向效应，整理如下：

定理 15.6. 包含稳态与暂态 CSR 对一维高斯束团经历弯转段的纵向效应

束长 σ_z 的一维高斯束团经历半径为 R 、角度 ϕ_m 的弯转段时，稳态与暂态 CSR 对束团的纵向效应分两部分：在弯铁内的 Case A & B 与在弯铁外的 Case C & D。对 Case A & B，能量偏差有

$$\langle \Delta E \rangle_{\text{CSR,A}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\theta_T} z \frac{\phi^2}{2\sigma_{zi}^2} \lambda_i(z) R d\phi = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} z \frac{R\theta_T^3}{6\sigma_{zi}^2} \lambda_i(z) \quad (15.91)$$

其中， $\lambda_i(z)$ 为束团在弯铁入口处的纵向（线）密度分布。对一维高斯束团，能散增加有

$$\Delta\sigma_{\delta, \text{CSR,A}} = \frac{\Delta\sigma_{\Delta E, \text{CSR,A}}}{E} = 0.029 \frac{Nr_e L_B \theta_T^2}{\gamma\sigma_{zi}^2} \quad (15.92)$$

其中， $L_B = R\phi_m$ 为弯铁长度， σ_{zi} 为在弯铁入口位置的束长， θ_T 为从 Case A 暂态至 Case B 稳态的经历的角度，取值可通过求解以下方程得到

$$\sigma_z(\theta_T) = P_{\text{SS}} \frac{R\theta_T^3}{24} \approx 1.6 \frac{R\theta_T^3}{24} \quad (15.93)$$

其中， $\sigma_z(\theta_T)$ 为束长在过渡段内的改变，视为已知函数关系。当考虑线性束团压缩时，即 $\sigma_z(\phi) = \sigma_{zi} + \left(\frac{\sigma_{zf} - \sigma_{zi}}{\phi_m} \right) \phi$ ，其中， σ_{zf} 为弯铁出口处的束长，则上面结

果可简化为如下公式

$$\Delta\sigma_{\delta,\text{CSR, 弯转段}} = \frac{\Delta\sigma_{\Delta E,\text{CSR, 弯转段}}}{E} \approx \begin{cases} 0.029 \frac{Nr_e L_B (2\sigma_{zi} - \sigma_{zf})^2 \theta_T^2}{\gamma \sigma_{zi}^4}, & \text{if } \theta_T > \phi_m \\ \frac{Nr_e L_B}{\gamma} \left[0.029 \frac{(2\sigma_{zi} - \sigma_{zf})^2 \theta_T^2}{\sigma_{zi}^4} + \frac{0.738}{R^{2/3} (\sigma_{zi} - \sigma_{zf})} \left(\frac{1}{\sigma_{zf}^{1/3}} - \frac{1}{(\sigma_{zi} - (\frac{\sigma_{zi} - \sigma_{zf}}{\phi_m}) \theta_T)^{1/3}} \right) \right], & \text{if } \theta_T < \phi_m \end{cases} \quad (15.94)$$

对 Case D 的暂态贡献，忽略滑移长度，单位长度能量偏差有

$$\frac{\partial \langle \Delta E \rangle}{\partial s} \Big|_{\text{CSR,D, 暂态}} \approx -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{R\phi_m + 2x} \lambda(z - z_D) \approx -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{R\phi_m + 2x} \lambda(z) \quad (15.95)$$

对下游一段漂移段距离 d 积分，则能量偏差有

$$\langle \Delta E \rangle_{\text{CSR,D, 暂态}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^d \frac{4}{R\phi_m + 2x} \lambda(z) dx \quad (15.96)$$

以上能量偏差估算忽略了 Case C 的贡献，但其对能散增加量的贡献将通过数值模拟结果分析引入经验参数。

对 Case D 的稳态贡献，滑移长度不能忽略，单位长度能量偏差有

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial s} \Big|_{\text{CSR,D, 稳态}} \approx -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\frac{2x}{L_B}} \frac{4\lambda(z)}{(R\phi_m + 2x)} \quad (15.97)$$

对下游一段漂移段距离 d 积分，则能量偏差有

$$\langle \Delta E \rangle_{\text{CSR,D, 稳态}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^d \frac{1}{\frac{2x}{L_B}} \frac{4\lambda(z)}{(R\phi_m + 2x)} dx \quad (15.98)$$

结合 Case D 的暂态与稳态贡献后，能散增加有

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{\delta,\text{CSR,D}} &= \frac{\Delta\sigma_{\Delta E,\text{CSR,D}}}{E} \\ &= \left(1 - e^{\xi(d,\sigma_z) R\phi_m^3}\right) \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3\pi}} \frac{Nr_e}{\gamma\sigma_z} \ln \left(1 + \chi(\sigma_z, R, \phi_m) \frac{2d}{L_B}\right) \quad (15.99) \\ &\approx 0.22 \left(1 - e^{\xi(d,\sigma_z) R\phi_m^3}\right) \frac{Nr_e}{\gamma\sigma_z} \ln \left(1 + \chi(\sigma_z, R, \phi_m) \frac{2d}{L_B}\right) \end{aligned}$$

其中，

- $\xi(d, \sigma_z) \approx 0.132 d^{1/2} \sigma_z^{-3/2}$, 此项表征 Case C 的效应
- $\chi(\sigma_z, R, \phi_m) \approx 0.525 \left(\frac{R\phi_m^3}{\sigma_z}\right)^{1/3}$, 此项表征 Case D 的稳态效应
- N 为束团内粒子个数
- $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.818 \times 10^{-15} \text{ m}$ 为经典电子半径
- $L_B = R\phi_m$
- d 为下游距离弯铁出口处的距离

证明 参考 D.Z. Khan and T.O. Raubenheimer, Approximated expressions for the coherent synchrotron radiation effect in various accelerator scenarios, Phys. Rev. Accel. Beams

24, 080701 (2021). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.080701>.

 **练习 15.7** 以上给出的结果为基于无边界的自由空间模型。当考虑金属屏蔽效应时，不考虑从头分析，试着在目前基础上修正以上结果，给出 $\langle \delta_{CSR} \rangle, \sigma_{\delta, CSR}$ 的粗略估算。然后，再以前面给出的金属平行板近似的 CSR 模型验证结果是否一致。

解 提示：金属屏蔽对辐射功率的影响为指数衰减。

作为参考，图 15.9 与 15.10 给出根据前一小节数值算例的电子束与两种长度弯铁参数，其经历弯铁过程的束团整体质心能量偏移与束团投影能散增加量随 s 的演化。

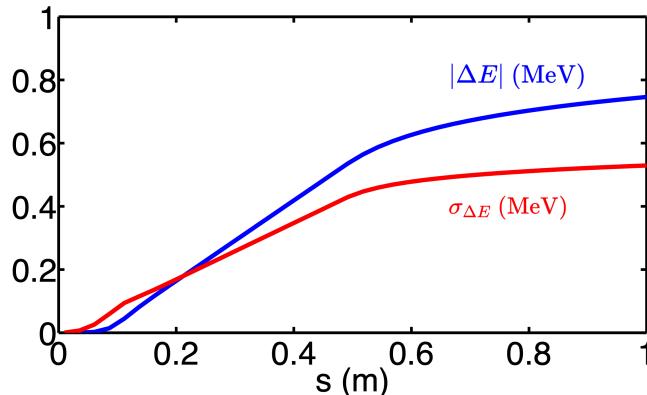


图 15.9：一维高斯束团经历进入与离开 50-cm 弯铁进入下游直线段过程，束团整体质心能量偏移 $|\Delta E| = -\langle \Delta E \rangle$ (蓝线) 与束团投影能散增加量 $\sigma_{\Delta E} = \langle (\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ (红线) 随 s 的演化。CSR 场采用一维、自由空间模型。

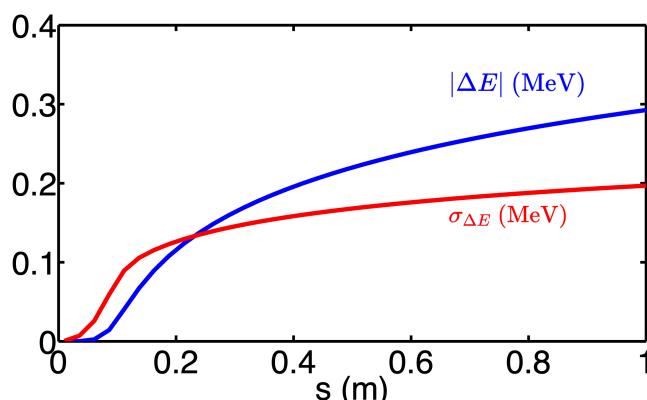


图 15.10：一维高斯束团经历进入与离开 10-cm 弯铁进入下游直线段过程，束团整体质心能量偏移 $|\Delta E| = -\langle \Delta E \rangle$ (蓝线) 与束团投影能散增加量 $\sigma_{\Delta E} = \langle (\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ (红线) 随 s 的演化。CSR 场采用一维、自由空间模型。

 **练习 15.8** 图 15.9 与 15.10 是根据 §15.2 介绍的四种情况，通过数值积分得到的结果。试着比较利用此小节给出的解析公式验证并比较结果的差异。

定理 15.7. 稳态 CSR 对一维高斯束团经历弯转段的横向效应

相干同步辐射场可能导致束团横向相空间质心偏移 $\Delta \mathbf{X}_k = [\Delta x_k \ \Delta x'_k]^T$, 此效应可以 点力模型 (point-kick model) 近似描述。在单个弯转段, 由稳态 CSR 场导致的偏移可写成

$$\Delta \mathbf{X}_k = \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta x'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{4/3} k \left(\theta \cos \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ (2\delta + R^{1/3} k \theta) \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (15.100)$$

其中, θ 为弯转角度, R 为弯转半径, k 为归一化 CSR kick 强度。对一维高斯束团分布, 有

$$k = 0.2459 \frac{N_b r_e}{\gamma \sigma_z^{4/3}} \quad (15.101)$$

由此引起束团横向投影发射度 (projected emittance)^a 增加。以上为单块弯铁的 CSR 效应。将点力模型应用到多块弯铁组成的磁聚焦结构时, 可以结合传输矩阵, 则 CSR 导致的投影发射度增加量可以通过发射度与 $\Delta x_k, \Delta x'_k$ 的关系描述。对不同的磁聚焦结构单元节, 其公式各异, 细节此处不论。

注 这里引用的 CSR 点力模型由焦毅 (Yi Jiao) 等人在 2014 年提出, 可参考 Y. Jiao et al., Generic conditions for suppressing the coherent synchrotron radiation induced emittance growth in a two-dipole achromat, Phys. Rev. ST Accel. Beams **17**, 060701 (2014). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.17.060701>。

另一种描述方式称 积分法 (integration method)。由 CSR 引起的单位长度束团投影能散增加量 $\frac{\partial \sigma_{\delta, \text{CSR}}}{\partial s}$, 当束团经过弯铁时, 由于弯铁为色散元件 ($R_{16}, R_{26} \neq 0$), 将引起横向 x, x' 的相干偏移, 可写成

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^2 \rangle_{\text{coh}} &= \left(\int_0^s R_{16}(\tau \rightarrow s) \frac{\partial \sigma_{\delta, \text{CSR}}}{\partial \tau} d\tau \right)^2 \\ \langle \Delta x'^2 \rangle_{\text{coh}} &= \left(\int_0^s R_{26}(\tau \rightarrow s) \frac{\partial \sigma_{\delta, \text{CSR}}}{\partial \tau} d\tau \right)^2 \end{aligned} \quad (15.102)$$

将进一步导致束团投影发射度增加, 有

$$\begin{aligned} \epsilon_x^2(s) &= \epsilon_{x0}^2 + \epsilon_{x0} \left[\beta_x \langle \Delta x'^2 \rangle_{\text{coh}} + 2\alpha_x \langle \Delta x \Delta x' \rangle_{\text{coh}} + \gamma_x \langle \Delta x^2 \rangle_{\text{coh}} \right] \\ &\quad + \langle \Delta x^2 \rangle_{\text{coh}} \langle \Delta x'^2 \rangle_{\text{coh}} - \langle \Delta x \Delta x' \rangle_{\text{coh}}^2 \\ &\approx \epsilon_{x0}^2 + \epsilon_{x0} \frac{1}{\beta_x} \left[\langle \Delta x^2 \rangle_{\text{coh}} + \left(\alpha_x \langle \Delta x^2 \rangle_{\text{coh}}^{1/2} + \beta_x \langle \Delta x'^2 \rangle_{\text{coh}}^{1/2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (15.103)$$

其中, ϵ_{x0} 为束团经历弯转段前的发射度, 并假设 $\langle \Delta x \Delta x' \rangle_{\text{coh}}^2 = \langle \Delta x^2 \rangle_{\text{coh}} \langle \Delta x'^2 \rangle_{\text{coh}}$ 。这里的 Courant-Snyder 参数 $\beta_x, \alpha_x = -\frac{\beta'_x}{2}, \gamma_x = \frac{1+\alpha_x^2}{\beta_x}$ 在弯转段 (一般为出口) s 处取值。

束团投影发射度增加量可写成 $\boxed{\Delta \epsilon_x = \epsilon_x(s) - \epsilon_{x0}}$ 或 $\boxed{\frac{\Delta \epsilon_x}{\epsilon_{x0}} = \frac{\epsilon_x(s)}{\epsilon_{x0}} - 1}$ 。

注 此公式存在一隐性假设：束团内粒子间的相对纵向坐标不变。

注 更多讨论可参考 P. Emma and R. Brinkmann, Emittance dilution through coherent energy spread generation in bending systems, PAC (1997), SLAC-PUB-7554. <https://accelconf.web.cern.ch/pac97/papers/pdf/5V030.PDF>。

^a此处讨论的是投影发射度，非切片发射度。切片发射度增加一般由于非相干效应造成，如束内散射 (IBS) 等。

✎ 练习 15.9 对 CSR 点力模型感兴趣的读者，可试着推导以上单个弯铁结果。 ■

✎ 练习 15.10 经典 CSR 点力模型假设在弯转磁铁中的束长固定，考虑一磁压缩器结构，试着推广以上模型。 ■

✎ 练习 15.11 承上，推广以上点力模型以包含暂态 CSR 效应。 ■

定理 15.8. 单块弯铁、一维稳态 CSR 对高斯束团导致的发射度增加公式

考虑单块弯铁、一维稳态 CSR 情况，忽略弯铁色散 (D, D') 可能的贡献，对高斯分布的束团，发射度增加量可估算为

$$\Delta\epsilon_{xN} \approx 7.5 \times 10^{-3} \times \frac{\tilde{\beta}_x}{\gamma} \left(\frac{r_e N L_b^2}{R^{5/3} \sigma_z^{4/3}} \right)^2 \quad (15.104)$$

其中，

- $\tilde{\beta}_x$ 为弯铁出口处的 β_x 函数
- γ 为粒子参考能量的洛伦兹因子
- $L_b = R\theta$ 为弯转磁铁长度
- $N = Q/|e|$, Q 为束团总电荷量, N 为束团粒子数
- σ_z 为束团长度
- $r_e \approx 2.818 \times 10^{-15}$ m 为电子经典半径

✎ **笔记** 如果考虑二维或三维 CSR 场，则不仅纵向一维场，横向分量场也可能导致发射度增加。更多讨论可参考 §15.6。 ■

上面介绍了稳态 CSR 对一维高斯束团经历弯转段的横向效应，如果对多块弯铁情况，给出的结果还不是立即可用的公式，需要给定具体的磁聚焦结构才能使用。对一种常用的 C 型磁压缩器 (bunch compressor)，又称 chicane，如果只是希望得到快速、粗糙的估算，则稳态 CSR 对此磁聚焦结构的横向发射度增加量能写成一简单、实用的近似公式，总结如下：

定理 15.9. 稳态 CSR 对一维线束团经历对称 C 型磁压缩器的横向发射度增加

对对称 C 型磁压缩器 (chicane)，假设弯转磁铁的长度 L_b ，弯转角度为 θ ，忽略暂态 CSR，当束腰发生在 chicane 后半段时，稳态 CSR 对一维线束团经历此传输段后，在出口处引起的横向发射度增加可写成

$$\epsilon_{xf} = \epsilon_{x0} \sqrt{1 + \frac{\mathcal{H}_x}{\epsilon_{x0}} \sigma_{\delta,CSR}^2} \approx \epsilon_{x0} \left(1 + \frac{\beta_x^* \theta^2 \Delta \sigma_{\delta,CSR}^2}{2 \epsilon_{x0}} \right) \quad (15.105)$$

或束团投影发射度增加量可写成

$$\Delta \epsilon_x = \epsilon_{xf} - \epsilon_{x0} \approx \frac{\beta_x^* \theta^2 \Delta \sigma_{\delta,CSR}^2}{2} \approx 0.123 \frac{\beta_x^* \theta^2 r_e Q L_b}{|e| \gamma (R^2 \sigma_z^4)^{1/3}} \quad (15.106)$$

其中，

- ϵ_{x0} 为束团在磁压缩器入口处的几何发射度
- $\Delta \sigma_{\delta,CSR}$ 为 CSR 引起的束团能散增加 (前面定理给出)
- σ_z 为压缩后束长
- $Q = N|e|$ 为束团总电荷量
- γ 为参考能量的洛伦兹因子
- β_x^* 为束腰处的横向 Courant-Snyder betatron 参量
- θ 为单个弯转磁铁弯转角度， R 为弯转磁铁弯转半径
- $L_b = R\theta$ 为弯转磁铁长度
- $r_e \approx 2.818 \times 10^{-15}$ m 为电子经典半径

证明 留意，此公式仅考虑对称 C 型磁压缩器末尾弯转磁铁的效应，对一般传输段未必成立。对一般消色散传输段的分析，可参考 M. Venturini, CSR-induced emittance growth in achromats: Linear formalism revisited, Nucl. Instru. Methods A **794**, 109-112 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.nima.2015.05.019>。

15.4.1 讨论：辐射阻抗函数的一种计算方法

第11章介绍的几种计算尾场函数与阻抗函数的思路为标准做法。对于辐射导致的尾场函数或阻抗函数，如同步辐射、波荡器辐射或其它类型辐射，如果已经知道单粒子产生的辐射特性，则可通过已经得到的辐射特性反推尾场函数或阻抗函数，至少能够得到其部分信息。此处简短说明如下。首先，由 §11.7 知，单粒子经过尾场结构后导致的能量损失有

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q^2 |\tilde{\lambda}(\omega)|^2 \operatorname{Re} Z_{||}(\omega) d\omega \quad (15.107)$$

这里我们舍去负号，因此 $\Delta \mathcal{E} > 0$ 表示损耗的量值。上式可以等价写成

$$\operatorname{Re} Z_{||}(\omega) = \frac{2\pi}{q^2} \frac{d\Delta \mathcal{E}}{d\omega} \quad (15.108)$$

于是，只要能将 $\frac{d\Delta \mathcal{E}}{d\omega}$ 与辐射特性关联，则有机会能得到辐射场对应的阻抗函数。以弯转磁铁的同步辐射为例，假设弯转半径 ρ 、经历的角度 ϕ_m ，则可与 §4.4.2 介绍的同步辐射

频谱关联，有

$$\frac{d\Delta\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{dP}{d\omega} \times \frac{\rho\phi_m}{c} \quad (15.109)$$

将 $\frac{dP}{d\omega} = \frac{P_s}{\omega_c} S_s \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)$ ，其中，

$$P_s = \frac{2cr_e m_e c^2 \beta^4 \gamma^4}{3\rho^2}, \quad S_s \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} \mathcal{K}_{5/3}(z') dz', \quad \omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho} \quad (15.110)$$

并通过第二类修正贝塞尔函数的渐进关系 $\mathcal{K}_\alpha(z) \sim 2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) z^{-\alpha}$ ($z \ll 1$)，可以得到

$$\operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega = kc) = (\rho\phi_m) \frac{Z_0 k^{\frac{1}{3}}}{4\pi\rho^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{3^{\frac{5}{3}} \Gamma(\frac{5}{3})}{2\sqrt{3}} \right) \quad (15.111)$$

其中， $\left(\frac{3^{\frac{5}{3}} \Gamma(\frac{5}{3})}{2\sqrt{3}} \right) \approx 1.626$ 。除去单位长度 $\rho\phi_m$ 后，此即前面介绍的一维、自由空间、单个二极铁稳态相干同步辐射阻抗的实部。得到阻抗函数的实部之后，可以根据尾场函数的定义

$$W_{\parallel}(z) = \frac{c}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} Z_{\parallel}(k) \cos kz dk \quad (15.112)$$

求得对应的尾场函数，细节此处不论。

 **练习 15.12** 按类似思路，可以利用第 5 章介绍的波荡器辐射特性反推得到波荡器阻抗函数的实部与对应的尾场函数。 ■

 **练习 15.13** 既然同步辐射阻抗与波荡器阻抗的部分信息可以通过辐射谱推知，也可以试着将自由电子激光的辐射过程以阻抗函数等效。 ■

解 可参考 Alexander Wu Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020) 一书的 §7.5.3。 ■



笔记 留意，这里提供的辐射阻抗函数的一种计算思路仅能给出阻抗实部，无法给出阻抗虚部。有些读者或许认为阻抗虚部可以通过 Hilbert 变换或 Kramers-Kronig 色散关系给出。但是，这里的辐射阻抗并不严格满足因果律。不满足因果律不是指“尾”场变“头”场 $W_{\parallel}(z < 0) \rightarrow W_{\parallel}(z > 0)$ ，而是指辐射场不仅仅存在于束团头部，而是头部、尾部都有，虽然主要集中在头部，参考 §3.3.3。因此，即使利用 Hilbert 变换或 Kramers-Kronig 色散关系得到的阻抗虚部仍不完全正确或不完整。



笔记 如何求出完整的辐射阻抗表示式？

15.4.2 讨论：非相干同步辐射的切片发射度与切片能散增加

尽管这一章主要讨论的是相干同步辐射 (CSR) 造成的效果，但有时候我们还需要衡量非相干同步辐射 (incoherent synchrotron radiation, ISR) 效应对束团的影响。顾名思义，由于考虑的同步辐射为非相干 (极短波长、极高频) 成分，因此其对束团的影响即为对各

别粒子独立、彼此无关的影响，包含切片发射度 (slice emittance) 增加与切片能散 (slice energy spread) 增加。有时又称无关联发射度 (uncorrelated emittance) 增加或无关联能散 (uncorrelated energy spread) 增加。

对非相干同步辐射导致的横向 x, x' 的非相干偏移，按前述积分法的思路，对束团的影响应写成

$$\begin{aligned}\langle \Delta x^2 \rangle_{\text{inc}} &= \int_0^s R_{16}^2(\tau \rightarrow s) \frac{\partial \sigma_{\delta, \text{ISR}}^2}{\partial \tau} d\tau \\ \langle \Delta x'^2 \rangle_{\text{inc}} &= \int_0^s R_{26}^2(\tau \rightarrow s) \frac{\partial \sigma_{\delta, \text{ISR}}^2}{\partial \tau} d\tau\end{aligned}\quad (15.113)$$

留意 CSR 与 ISR 对束团效应的差别。

其中， $\frac{\partial \sigma_{\delta, \text{ISR}}^2}{\partial s} = \frac{1}{(\gamma m c^2)^2} \frac{\partial \sigma_{\Delta E, \text{ISR}}^2}{\partial s}$ 。由同步辐射理论知，

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle \Delta E \rangle_{\text{ISR}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \Delta E \rangle_{\text{ISR}} \stackrel{!}{=} -\frac{P}{c}, \quad \frac{\partial}{\partial s} \sigma_{\Delta E, \text{ISR}}^2 \stackrel{!}{=} 2D \quad (15.114)$$

其中， P 为同步辐射功率， D 定义为同步辐射扩散系数 (diffusion coefficient)，两者可与同步辐射频谱互相关联，分别有

$$\begin{aligned}P &= \int_0^\infty \frac{dP}{d\omega} d\omega = \frac{2}{3} \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \gamma^4 \\ D &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \hbar\omega \frac{dP}{d\omega} d\omega = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar e^2}{R^3} \gamma^7\end{aligned}\quad (15.115)$$

以上假设粒子不经历加速过程，且 $R_{6j} = 0$ ，即粒子不在 RF 腔中。

注 扩散系数 D 的概念源于 Fokker-Planck 方程。更多讨论可参考 N. Yampolsky and B.E. Carlsten, Beam debunching due to ISR-induced energy diffusion, Nucl. Instru. Methods A **870**, 156-162 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.nima.2017.06.023>。

利用以上结果，可以推导给出用来估算 ISR 对束团的效应的近似实用公式，总结如下：

定理 15.10. 非相干同步辐射的切片发射度与切片能散增加

对束团能量 E ，弯转磁铁长度 L_B ，弯转角度 θ ，弯转半径 $\rho = L_B / \sin \theta$ ，束团单次经过单个磁铁，非相干同步辐射导致的非相干能散增加有

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_{\delta, \text{ISR}} &= \sqrt{\frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{r_e \hbar c}{(mc^2)^6} \frac{E^5 L_B}{|\rho^3|}} \\ &\approx \frac{1}{L_B} \sqrt{(4.13 \times 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{GeV}^{-5}) E^5 |\theta^3|}\end{aligned}\quad (15.116)$$

由于此增加量为非相干物理量，多次效应叠加的量化效果应采用统计学中的“平方和再开平方根”(adds in quadrature) 方法^a。比如，当经过由四块弯铁组成的 chicane 时，束团经过每块弯铁增加 $\Delta \sigma_{\delta, \text{ISR}}$ ，则经过 chicane 之后，非相干能散增加量应为

$$\Delta \sigma_{\delta, \text{ISR, chicane}} = \sqrt{\sigma_{\delta 0}^2 + 4 \times \Delta \sigma_{\delta, \text{ISR}}^2} \quad (15.117)$$

除切片能散增加外，束团单次经过单个磁铁，非相干同步辐射导致的非相干发射

度增加有

$$\Delta\gamma\epsilon_x \approx (8 \times 10^{-8} \cdot \text{GeV}^{-6}) \cdot E^6 \left(\Delta L + L_B + \frac{\beta_{x,\max} + \beta_{x,\min}}{3} \right) \quad (15.118)$$

其中， $\beta_{x,\max}, \beta_{x,\min}$ 为 chicane 传输段中最大与最小的横向 betatron 参量， ΔL 为前两块弯转磁铁或后两块弯转磁铁之间的漂移段长度。

注 更多讨论可参考 Handbook §4.4.1。

^a在统计学中，面对估算或量化测量和分析结果时，比如：物理实验数据分析、测量误差合成等，常采用此思路将多个独立、不相干的数值或误差相加，使用平方和再开平方根的方法。这种方法可以更准确地计算多个独立、不相干的误差源产生的总体偏差范围。



15.5 研究现状总论

到目前为止，介绍了着重“粒子”观点的相干同步辐射理论，特别关注相干同步辐射场作为一种“特殊”尾场函数的形式。众所周知，空间电荷效应对高亮度粒子束动力学的影响一直以来是个经典问题，因为它无所不在。相干同步辐射效应对高亮度粒子束的影响尽管不像空间电荷场那么无所不在，但凡束团进入弯转段后，相干同步辐射引起的束动力学就并不总是能被忽略。当束团亮度越高时，比如：束团长度越短、能散越小、发射度越小等，相干同步辐射将越明显。此外，不同于空间电荷场，其纵向分量 $\propto \gamma^{-2}$ 、横向分量 $\propto \gamma^{-4}$ ，相干同步辐射场为“几何”场，其场分量与电子能量无明显关系。就是说，即使高能电子束可能避开空间电荷效应，却逃不过相干同步辐射效应！

当前世界上许多已经运行或正在开展、建设中的高亮度电子加速器大科学装置，包含直线加速器自由电子激光或对撞机、能量循环加速器、环形同步加速器或第四代储存环先进光源等，莫不以进一步推进电子束亮度为目标。因此，在以目前相干同步辐射理论作为既有分析基础的前提下，妥善设计并优化加速器中弯转段的磁聚焦结构是热点问题中的热点，具有实际与应用意义，这部分研究现状可总结如下：

如何设计能够有效地抑制多弯铁磁聚焦结构的相干同步辐射效应。

要达此目标，需要对磁聚焦结构设计有一定基础与经验（如第7章、第8章介绍，包含横向与纵向动力学）外，也要对相干同步辐射场如何影响电子束有一定了解。近年对“抑制多弯铁磁聚焦结构的相干同步辐射效应”课题，研究面向包含：

1. 如何抑制多弯铁磁聚焦结构中 CSR 导致的横向发射度增加？或更激进的：如何消灭多弯铁磁聚焦结构的 CSR 导致的横向发射度增加？
 - 磁压缩结构 (chicane): C-shape chicane、S-shape chicane、wiggler-shape chicane 等
 - 不涉及束团压缩的等时弯转弧 (isochronous arc)
 - 涉及束团压缩的弯转压缩弧 (compressor arc)
 - 储存环 (storage ring) 或同步加速器 (synchrotron booster)
2. 在多弯铁磁聚焦结构中，添加部分电磁部件（如四极铁、六极铁、RF腔、激光）对抑制效果的影响 ⇒ 进一步给出改善的抑制条件。
3. 能不能通过粒子反跟踪模拟 (particle back-tracking simulation)，调整初始束团分布，以期在多弯铁磁聚焦结构中更好地抑制 CSR 导致的横向发射度增加？
4. 是否存在完美消灭多弯铁磁聚焦结构中 CSR 导致的横向发射度？如果不存在，那么最有效的抑制、最简单的设置或抑制的极限条件分别是什么？
5. 如何抑制多弯铁磁聚焦结构中 CSR 导致的纵向微束团不稳定性？微束团不稳定性将在下一章介绍。

表 15.2 整理了目前几种被提出用来抑制或缓解 CSR 导致横向发射度增加的方案。

表 15.2: 几种用来抑制或缓解 CSR 导致的横向发射度增加的方案。

维度	抑制方案	备注
横向	A) 单元节间相位匹配 (Douglas, Di Mitri <i>et al.</i>)	调变磁聚焦结构光学设计
	B) 束流包络匹配 (Hajima)	
	综合以上方法	
	C1) DBA/TBA, 点力模型 (Jiao <i>et al.</i>) C2) 磁压缩结构 (Jing <i>et al.</i>) D) 纵向束团整形 (Mitchell <i>et al.</i>)	

几种方案对应的代表性文献整理如下：

- A) D. Douglas, Suppression and enhancement of CSR-driven emittance degradation in the IR-FEL Driver, JLAB-TN-98-012, 1998
- A) S. Di Mitri, M. Cornacchia, and S. Spampinati, Cancellation of Coherent Synchrotron Radiation Kicks with Optics Balance, Phys. Rev. Lett. **110**, 014801 (2013). <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.110.014801>
- B) R. Hajima, A First-Order Matrix Approach to the Analysis of Electron Beam Emittance Growth Caused by Coherent Synchrotron Radiation, Japanese Journal of Applied Physics, **42** (2003). <https://iopscience.iop.org/article/10.1143/JJAP.42.L974/pdf>
- C1) Y. Jiao, X. Cui, X. Huang, and G. Xu, Generic conditions for suppressing the coherent synchrotron radiation induced emittance growth in a two-dipole achromat, Phys. Rev. ST Accel. Beams **17**, 060701 (2014). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.17.060701>
- C1) C. Zhang, Y. Jiao, and C.-Y. Tsai, Isochronous and CSR-immune triple-bend achromat with periodic stable optics, Phys. Rev. Accel. Beams **24**, 060701 (2021). <https://link.aps.org/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.060701>
- C1) C. Zhang, Y. Jiao, W. Liu, and C.-Y. Tsai, Suppression of the coherent synchrotron radiation induced emittance growth in a double-bend achromat with bunch compression, Phys. Rev. Accel. Beam **26**, 050701 (2023). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.26.050701>
- C2) Y. Jing, Y. Hao, and V. N. Litvinenko, Compensating effect of the coherent synchrotron radiation in bunch compressors, Phys. Rev. ST Accel. Beams **16**, 060704 (2013). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.16.060704>
- D) C. Mitchell, J. Qiang, and P. Emma, Longitudinal pulse shaping for the suppression of coherent synchrotron radiation induced emittance growth, Phys. Rev. ST Accel. Beams **16**, 060703 (2013). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTA.B.16.060703>

以上属于对工程问题的探索。对相干同步辐射物理机制的探索本身可视为一物理问

题。目前使用的相干同步辐射模型仍非常简化，比如：

- 极端相对论近似 (ultrarelativistic approximation)
- 一维线电荷模型 (1-D line-charge model)
- 自由空间模型 (free-space model)
- 仅考虑束团沿弯转轨迹的纵向切线方向的分量，忽略横向分量
- 单个弯铁、单一平面、圆弧轨迹

任何对以上单一项或合并项的推广研究都将有助于对同步辐射物理机制的全面理解，具有理论意义，这部分研究现状可总结如下：

如何全面理解更接近真实情况的相干同步辐射场的物理图像。

目前研究面向包含但不限于：

1. 如何分析中低能电子的相干同步辐射场，特别是 $\sim \text{MeV}$ 量级的高亮度电子束，这在能量回收直线加速器 (ERL) 的 merger 段特别重要。
2. 如何分析并解析中低能电子的相干同步辐射场与空间电荷场。当严肃考虑 $\gamma < \infty$ 时，Lienard-Wiechert 场中同时包含速度场与加速度场，如何合理分开讨论空间电荷场与相干同步辐射场对束团造成的影响，也许一个有趣的问题。
3. 一维线电荷模型存在奇异点问题，如何通过引入束团有限横向尺寸解决奇异点问题。
4. 电子束经历磁压缩器 (chicane) 时，目前分析 CSR 效应对其产生的影响采用准稳态近似 (quasi-steady-state approximation)，即以束团每一时刻 s 的束长 $\sigma_z(s)$ 作为参数，计算 CSR 尾场或阻抗，但是忽略了束长压缩的动态过程。如何正确分析、计算束长压缩动态过程的 CSR 尾场或阻抗，既是重要，也是实用的问题。
5. 上面讨论的 CSR 模型都假设在无边无界的自由空间。实际上，电子束在传输过程中存在金属真空管壁，当金属管壁半径 (半高) 尺寸 h 与束长 σ_z 大致满足以下条件时²⁰

$$\sigma_z \geq \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{h^3}{R} \quad (15.119)$$

其中， R 为弯转半径。此时，便需要分析金属屏蔽效应的 CSR 场对束团的影响。金属管壁屏蔽的简化模型可用上下平行板替代。一般可用第 1 章介绍过的镜像电荷法求解。更接近实际情况是，金属真空管道包含上下左右侧面封闭结构，从而对储存环加速器，管壁中的 CSR 场可能形成“回音壁模式”(whispering gallery mode)。如何正确分析存在有限边界的相干同步辐射场是一个极具挑战的课题。

6. 如何正确、有效分析、求解金属真空波导管道的 CSR 场，包含矩形截面、圆形截面或甚至一般截面。一般采用时域有限差分法 (finite difference time domain, FDTD) 求解傍轴波方程效率并不高，因为束团非常短，对数值色散 (numerical dispersion) 与稳定性的要求使得在时域、空间中的分割网格要求非常严苛，对计算资源的要求极

²⁰比较第 4 章最后介绍的辐射屏蔽因子。

高。如何正确、有效分析、求解金属真空波导管道的 CSR 场也是一个具挑战的课题。

7. 目前 CSR 尾场或阻抗仅包含纵向、切线分量，如何正确考虑 CSR 的横向分量是一个重要同时困难的课题。
8. 承上，合理认为，CSR 纵向分量与横向分量应满足 Panofsky-Wenzel 定理。但是，目前教科书上介绍的 Panofsky-Wenzel 定理假设源粒子与测试粒子的运动轨迹为直线，如何在 Frenet-Serret 坐标系中正确列写 Panofsky-Wenzel 定理，并验证二维/三维 CSR 尾场或阻抗的正确性，是一个困难且重要的课题。
9. 上面介绍的 SSY 模型仅考虑单个弯铁，且粒子轨迹为在单一 xs 平面上的圆弧。仅此已考虑了四种不同 case。在紧凑型磁聚焦结构中(如：ERL 的弯转段)，有时候当两个弯铁靠得很近，则上述分析中假设磁铁上游直线段无穷长的假设将不再成立。如何正确分析多块弯铁的 CSR 尾场或阻抗，是一个创新的探索。此处的多块弯铁包含同一弯转平面或不同弯转平面。不同弯转平面一般发生在 ERL 的多圈回路的磁聚焦结构弯转弧 (return arc)。
10. 对平面上一般轨迹，如二极-四极组合磁铁、存在横纵向梯度的弯铁等，如何计算 CSR 尾场或阻抗。

以上我们分别给出了一从“粒子”观点—基于工程应用与物理机制探索的几个研究面向。最后，想提醒的是，这两种探索其实相辅相成，从工程应用可能得到研究物理机制的动机，对物理机制的进一步理解也可能帮助给出改善的多弯铁磁聚焦结构加速器设计方案或新思路。

15.6 二维 CSR 模型研究动机与现况

由前面介绍知，相对论速度的束团在弯转磁铁中沿曲线轨迹运动时，它会通过相干辐射 (CSR) 效应失去能量。该效应对束流动力学的影响由所定义的单位长度相干同步辐射纵向尾场函数 w 描述 (参考定义 15.1)

$$w \equiv -\frac{1}{q^2} \frac{d\mathcal{E}_{\text{CSR}}}{cdt} = -\frac{1}{q} \beta \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}(P) - \mathbf{E}_{\text{SC}}] \quad (15.120)$$

在不同的 CSR 尾场模型中，目前最简单、实用的是一维模型，假设束团为无横向尺寸的线电荷 (line-charge model)。然而，此一维模型仅考虑 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ 在测试粒子位置 P 沿运动轨迹切线方向分量，束团在曲线轨迹上的自场其实还有一个力的横向 (向心) 分量 — 尽管这个分量不与辐射场直接相关²¹。于是，开始有些关于如何将此横向场分量纳入理论模型的尝试。目前来说，许多文献对于在一维模型中是否能纳入横向分量场仍众说纷纭，还没有定论。但是，即使能够自治地将横向分量场纳入一维模型中，这种模型也无法成功应用到相对论束团通过单个弯转段的经典问题，因为在一维模型中无法确切定义初始条件中的标量位函数。因此，如果要考虑横向分量场的效应，我们必须从一维模型推广到二维或三维模型。这是二维 CSR 模型研究动机。

Ya. Derbenev 等人首次尝试从一维稳态模型中纳入横向分量场。随后，G. Geloni 等人尝试推广到一维暂态模型，但是似乎并不成功，同时引起一系列对相对论速度的束团经历弯转段时的基本物理过程的争议，包含洛伦兹力电磁场贡献的抵消等。对 (相干) 同步辐射场反过来施加在粒子上的效应 — 即束流动力学 — 感兴趣的读者可参考：

- R. Li, Cancellation effects in CSR induced bunch transverse dynamics in bends, EPAC 2002, p. 1365. <https://accelconf.web.cern.ch/e02/PAPERS/WEPR1031.pdf>
- G. Geloni, E. Saldin, E. Schneidmiller, and M. Yurkov, Misconceptions regarding the cancellation of self-forces in the transverse equation of motion for an electron in a bunch. <https://arxiv.org/pdf/physics/0310133.pdf>
- R. Li and Y. Derbenev, Canonical formulations and cancellation effect in electrodynamics of relativistic beams on a curved trajectory, JLAB Technical Report No. JLAB-TN-02-054 (2002)
- R. Li and Y. S. Derbenev, Discussions on the Cancellation Effect on a Circular Orbit, Particle accelerator, PAC 2005, p. 1631 (2005). <https://accelconf.web.cern.ch/p05/PAPERS/TPAT019.PDF>
- E.L. Saldin, Relativity and Synchrotron Radiation: Critical Reexamination of Existing Theory. <https://arxiv.org/pdf/1808.07808.pdf>

总之，即使能够在一维模型下引入横向分量场 (场动力学)，也无法成功将此模型应用到相对论束团通过单个弯转段的粒子动力学问题。换句话说，如果要构建一个能够适

²¹R. Talman, Novel Relativistic Effect Important in Accelerators, Phys. Rev. Lett. **56**, 1429 (1986). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.56.1429>

用于分析束流动力学问题的 CSR 模型，则必须将一维模型推广到二维或三维，别无选择。

关于二维 CSR 模型的更多讨论，此处将不深入介绍。感兴趣的读者可参考：

- Ya. Derbenev and V.D. Shiltsev, Transverse effects of microbunch radiative interaction, SLAC-PUB-7181/FERMILAB-TM-1974 (1996). <https://cds.cern.ch/record/334006/files/SCAN-9709062.pdf>
- G. Geloni et al., Transverse self-fields within an electron bunch moving in an arc of a circle, Nucl. Instru. Methods A **522**, 230 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.nima.2003.12.010>
- G. Geloni et al., Transverse self-interactions within an electron bunch moving in an arc of a circle (generalized). <https://arxiv.org/abs/physics/0304033>
- R. Li, Curvature-induced bunch self-interaction for an energy-chirped bunch in magnetic bends, Phys. Rev. ST Accel. Beams **11**, 024401 (2008). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.11.024401>
- D. Sagan et al., Extended one-dimensional method for coherent synchrotron radiation including shielding, Phys. Rev. ST Accel. Beams **12**, 040703 (2009). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.12.040703>
- C. Mayes and G. Hoffstaetter, Exact 1D model for coherent synchrotron radiation with shielding and bunch compression, Phys. Rev. ST Accel. Beams **12**, 024401 (2009). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.12.024401>
- C. Huang et al., Two dimensional model for coherent synchrotron radiation, Phys. Rev. ST Accel. Beams **16**, 010701 (2013). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.16.010701>
- Y. Cai, Coherent synchrotron radiation by electrons moving on circular orbits, Phys. Rev. Accel. Beams **20**, 064402 (2017). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.064402>
- Y. Cai and Y. Ding, Three-dimensional effects of coherent synchrotron radiation by electrons in a bunch compressor, Phys. Rev. Accel. Beams **23**, 014402 (2020). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.014402>
- Y. Cai, Two-dimensional theory of coherent synchrotron radiation with transient effects, Phys. Rev. Accel. Beams **24**, 064402 (2021). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.064402>
- A.D. Brynes et al., Beyond the limits of 1D coherent synchrotron radiation, New J. Phys. **20**, 073035 (2018). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/aad21d>
- G. Stupakov, Centripetal Transverse Wakefield in Relativistic Beam. <https://arxiv.org/abs/1901.10745>
- G. Stupakov and J. Tang, Calculation of the wake due to radiation and space charge

- forces in relativistic beams, Phys. Rev. Accel. Beams **24**, 020701 (2021). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.020701>
- G. Stupakov, Transverse force in a relativistic beam moving along a curved trajectory, Phys. Rev. Accel. Beams **25**, 014401 (2022). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.014401>

以上文献中, Y. Cai 基于 Lienard-Wiechert 场公式, 不考虑重整化情况, 直接略去速度场, 仅保留辐射场, 写出二维 CSR 尾场 (wakefield) 表示式, 总结如下:

定理 15.11. 二维稳态 CSR 尾场

在满足右手定则的 Frenet-Serret 坐标系中, 当测试粒子运动方程写成如下形式时,

$$\delta' = \frac{4\pi\epsilon_0 r_e N}{\gamma} W_s(z, \chi), \quad x'' = \frac{4\pi\epsilon_0 r_e N}{\gamma} \hat{W}_x(z, \chi) \quad (15.121)$$

其中, W_s 为单位长度纵向尾场, $\hat{W}_x = x \text{源} W_x$, W_x 为单位长度横向尾场, $\chi = x/\rho$, ρ 为弯转半径。考虑 Lienard-Wiechert 场公式的第二项, 即加速场或辐射场

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]] c r (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 \Big|_{\text{ret}} \quad (15.122)$$

其中, 推迟关系有 $t' = t - r/c$ 。假设弯转过程在 xs 平面, 在 Case B 情况下, 单位长度二维稳态 CSR 尾场可写成

$$\begin{aligned} W_s(z, \chi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Y}_s \left(\frac{z-z'}{2\rho}, \chi - \chi' \right) \frac{\partial \lambda(z', \chi')}{\partial z'} dz' d\chi' \\ \hat{W}_x(z, \chi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{Y}}_x \left(\frac{z-z'}{2\rho}, \chi - \chi' \right) \frac{\partial \lambda(z', \chi')}{\partial z'} dz' d\chi' \end{aligned} \quad (15.123)$$

其中,

$$\mathcal{Y}_s = \frac{2\rho\psi_s}{|e|\beta^2}, \quad \hat{\mathcal{Y}}_x = \frac{2\rho\psi_x}{|e|\beta^2} \quad (15.124)$$

其中,

$$\psi_s(\xi, \chi) = \frac{|e|\beta^2 \left(\cos 2\alpha - \frac{1}{1+\chi} \right)}{2\rho^2 [\kappa - \beta(1+\chi) \sin 2\alpha]} \quad (15.125)$$

$$\begin{aligned} \psi_x(\xi, \chi) &= \frac{|e|^2 \beta^2}{2\rho^2} \times \\ &\left\{ \frac{1}{|\chi|(1+\chi)} \left[(2+2\chi+\chi^2) F \left(\alpha, \frac{-4(1+\chi)}{\chi^2} \right) - \chi^2 E \left(\alpha, \frac{-4(1+\chi)}{\chi^2} \right) \right] \right. \\ &+ \frac{\kappa^2 - 2\beta^2(1+\chi)^2 + \beta^2(1+\chi)(2+2\chi+\chi^2) \cos 2\alpha}{\beta(1+\chi) [\kappa^2 - \beta^2(1+\chi)^2 \sin^2 2\alpha]} \\ &- \left. \frac{\kappa [1 - \beta^2(1+\chi) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha}{[\kappa^2 - \beta^2(1+\chi)^2 \sin^2 2\alpha]} \right\} \end{aligned} \quad (15.126)$$

以上公式中,

- z 为纵向局域坐标, $z > 0$ 表示束团前方

- ρ 为弯转半径
- $\chi = x/\rho$, x 为水平横向局域坐标, $x > 0$ 表示弯转外侧
- $\lambda(z, x)$ 为二维实空间束团分布函数, 满足归一化条件 $\iint \lambda dz dx = 1$
- $\beta = v/c$ 为洛伦兹相对论因子
- $\alpha = \theta/2$, θ 为 xs 平面上, 稍早时刻源粒子位置与现在时刻辐射场位置(或测试粒子位置)的张角
- $\kappa = r/\rho = \sqrt{\chi^2 + 4(1 + \chi) \sin^2 \alpha}$
- $F(\alpha, k)$ 为不完整第一类椭圆积分
- $E(\alpha, k)$ 为不完整第二类椭圆积分

证明 参考 Y. Cai, Coherent synchrotron radiation by electrons moving on circular orbits, Phys. Rev. Accel. Beams **20**, 064402 (2017). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.064402>。 □

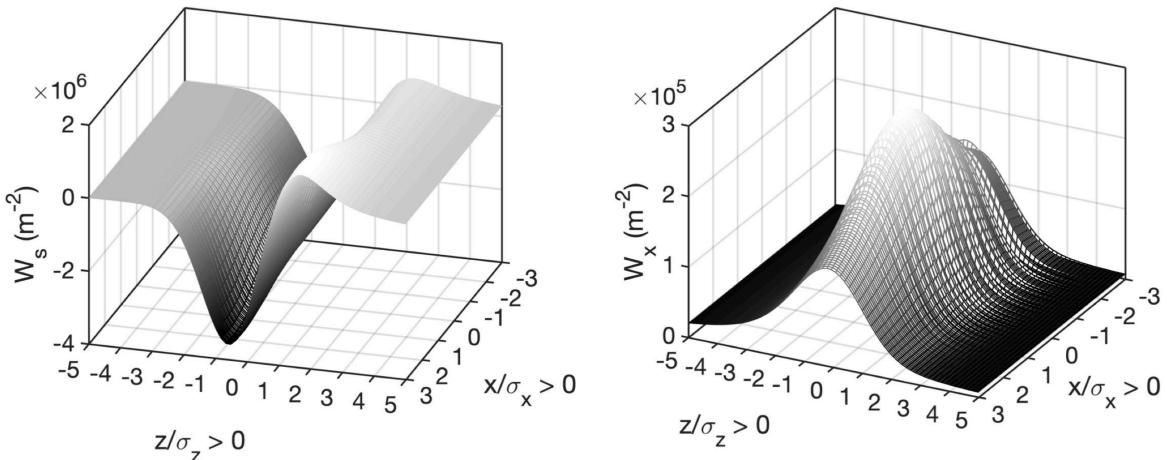


图 15.11: 单位长度二维稳态 CSR 尾场: 左图为纵向尾场 $W_s(x, z)$, 右图为横向尾场 $\hat{W}_x(x, z)$ 。假设 $\rho = 1$ m, $\gamma = 500$, $\sigma_x = \sigma_z = 10$ μm 。此处 $z > 0$ 为束团头部粒子, $x > 0$ 为束团横向外侧粒子。这里的单位采用 CGS 单位制, 留意 $\hat{W}_x(x, z)$ 量纲。

进一步对比二维稳态纵向分量的 CSR 尾场与一维稳态纵向 CSR 尾场会发现, 不同横向位置 x 的 $W_s(z)$ 彼此间的差异很小。在图 15.11 中还可以看到, 横向分量 CSR 尾场接近高斯函数, 可近似写成

$$\hat{W}_x(q) \approx \frac{\Lambda}{\sqrt{2\pi}\rho\sigma_z} e^{-\frac{q^2}{2}}, \quad \Lambda = \ln \left[\frac{(\rho\sigma_z^2)^{2/3}}{\sigma_x^2} \left(1 + \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \right) \right] \quad (15.127)$$

其中, $q = z/\sigma_z$ 。

以上为二维稳态 CSR 的结果, 还可以进一步推广, 得到三维稳态 CSR 场。细节此处不论, 感兴趣的读者可参考 Y. Cai and Y. Ding, Three-dimensional effects of coherent synchrotron radiation by electrons in a bunch compressor, Phys. Rev. Accel. Beams **23**, 014402

(2020). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.014402>。

前面介绍过，对高斯分布束团，在单块弯铁内，一维纵向 CSR 场导致的发射度增加量。束团发射度增加也可能源自 CSR 的横向分量场。此处总结如下：

定理 15.12. 单块弯铁、稳态 CSR 对高斯束团导致的发射度增加公式

考虑 xs 平面单块弯铁、稳态 CSR 情况，忽略直接来自束团能散通过弯铁非零色散函数 (D, D') 可能的贡献，对高斯分布的束团，发射度增加量源自纵向与横向分量，其中，纵向分量场贡献有

$$\Delta\epsilon_{xN}^{(s)} \approx 7.5 \times 10^{-3} \times \frac{\tilde{\beta}_x}{\gamma} \left(\frac{r_e N L_b^2}{R^{5/3} \sigma_z^{4/3}} \right)^2 \quad (15.128)$$

横向 x 分量场贡献有

$$\Delta\epsilon_{xN}^{(x)} \approx \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{24\pi} \times \frac{\tilde{\beta}_x}{\gamma} \left(\frac{\Lambda r_e N L_b}{R \sigma_z} \right)^2 \quad (15.129)$$

横向 y 分量场贡献有

$$\Delta\epsilon_{xN}^{(y)} \approx \frac{\tilde{\beta}_y}{32\gamma} \left(\frac{r_e N \sigma_y L_b}{R^{4/3} \sigma_z^{5/3}} \right)^2 \quad (15.130)$$

其中，

- $\tilde{\beta}_{x,y}$ 为弯铁出口处的 $\beta_{x,y}$ 函数
- γ 为粒子参考能量的洛伦兹因子
- $L_b = R\theta$ 为弯转磁铁长度
- $N = Q/|e|$, Q 为束团总电荷量, N 为束团粒子数
- σ_z 为束团长度
- $r_e \approx 2.818 \times 10^{-15}$ m 为电子经典半径
- $\Lambda = \ln \left[\frac{(\rho \sigma_z^2)^{2/3}}{\sigma_x^2} \left(1 + \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \right) \right]$

注 对 xs 平面单块弯铁，一般来说，有 $\Delta\epsilon_{xN}^{(s)} > \Delta\epsilon_{xN}^{(x)} \gg \Delta\epsilon_{xN}^{(y)}$ 。

练习 15.14 以 LCLS BC2 为例，考虑当 $\gamma = 10^4$, $\epsilon_{xN} = 0.5 \mu\text{m}$, $\sigma_z = 10 \mu\text{m}$, $N = 10^9$, $\tilde{\beta}_x = 5 \text{ m}$, $\rho = 5 \text{ m}$, $L_b = 0.5 \text{ m}$ ，试估算发射度增加量。 ■

以上介绍的二维、三维 CSR 场都是稳态场。当束团刚进入或离开弯铁后，存在暂态效应。对单块弯铁来说，同样可以分成 Case A, Case B, Case C, Case D。对二维暂态 CSR 尾场分析感兴趣的读者，可参考 Y. Cai, Two-dimensional theory of coherent synchrotron radiation with transient effects, Phys. Rev. Accel. Beams **24**, 064402 (2021). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.064402>。

✍ 练习 15.15 试写出包含稳态与暂态的二维 CSR 尾场与尾场函数表示式。 ■

✍ 练习 15.16 试推导包含稳态与暂态的二维 CSR 阻抗函数表示式。 ■

✍ 练习 15.17 尝试用 MATLAB 重复以上数值结果，并验证尾场函数是否满足 §11.6.3 介绍的 Panofsky-Wenzel 定理（二维或三维）。 ■

解 留意 $\hat{W}_x(x, z)$ 与 $W_x(x, z)$ 区别。 ■

定理 15.13. 实用单位变换关系

很多时候，尾场单位以 SI 或 CGS 单位制表示，有如下变换关系

$$1 \text{ V/pC} = 10^{12} \text{ V/C} = 10^{12} \Omega/\text{sec} = 1 \text{ k}\Omega\text{-GHz} = 1.11 \text{ cm}^{-1}$$

其中，最后一个等号采用 CGS 单位制。 □

 第十五章 补充习题

1. 定性说明相干同步辐射 (CSR) 为何及其对束团的影响。
2. 单粒子的辐射场的公式不止一种，试分别写出：
 - Lienard-Wiechert 公式
 - Jefimenko 公式
 - Heaviside-Feynman 公式
3. 试证明或说明相干同步辐射尾场或阻抗不严格满足因果律。

