

# 低频电磁场-准静态场

蔡承颖<sup>1</sup>

华中科技大学电气与电子工程学院



---

<sup>1</sup>jcytsai@hust.edu.cn

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# 准静态场 (quasi-static field)

一般情况下的电磁理论，有时间空间耦合、电场磁场耦合。前者可以通过时谐相量的复数表示解耦<sup>2</sup>，但是后者仍然耦合在一起不易求解<sup>3</sup>。

对于低频极限 (缓变)，可以通过遵循特定的求解程序 (如，先求电场再求磁场，或先求磁场再求电场)，使电磁系统部分 (单向) 解耦，集总参数电路理论便是奠基于此准静态场理论。对于高频极限，可以通过几何光学 (geometric optics, ray optics) 的概念处理。

一根载流的直导线可以具有多种面向。当电流频率很高时，它是发射电磁波的天线；当降低频率时，它具有电感、电容的特性；再降低频率，则仅具有电感的特性；通以直流电时，它就相当于一个电阻。

<sup>2</sup>时空耦合通过时谐 (time-harmonic) 解耦，但空间本身多个维度还存在耦合，可以靠 spatial harmonics 解耦，Ch9 讨论波导时将会介绍。

<sup>3</sup>一个方法是引入标量与矢量位函数。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线近似

例题 & 练习

作业

一对平行板，当外加高频电源时，它是一个传播电磁波的导波装置；当频率降低时，它将只具有电容的特性。

因此，电磁装置本身的特性除了依赖结构、材料以外，也依赖电磁场的频率变化。

准静态场分两类：

- **电准静态场**：电特性比磁特性明显  $\Rightarrow \partial\mathbf{B}/\partial t \approx 0$   
感应电场  $\ll$  库伦电场
- **磁准静态场**：磁特性比电特性明显  $\Rightarrow \partial\mathbf{D}/\partial t \approx 0$   
位移电流  $\ll$  传导电流

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# 电准静态场 (electro-quasi-statics, EQS)

## 定理：电准静态场基本方程

在时变场中，如果有  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx \mathbf{0}$ ，则麦克斯韦方程组、波动方程、动态位方程可以简化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} \approx \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \left( \frac{\rho}{\epsilon} \right) \\ \nabla^2 \mathbf{H} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_{\text{ext}} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \varphi \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$$

其中我们采用洛伦兹规范。

★ 试推导以上结果，并指出推导过程使用哪些假设 (§8.1.1)。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 电准静态场

概论

## 说明

- $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx \mathbf{0}$  但  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$
- 上页等式右边“源”项是含时的。
- 利用洛伦兹规范得到的动态位方程，其解仅具有  $f(r, t)$  形式，而不是  $f(r, t - r/v)$  形式。即，虽时变但忽略了推迟效应。
- 动态位方程的形式与静电/磁场一样 [教科书式 (3-3-25) 与 (5-2-10)]，但仅限洛伦兹规范下。与以下介绍的磁准静态场，虽然位函数方程形式一样，但属不同规范。

★ 试采库伦规范，推导电准静态场的位函数遵循的方程。

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 磁准静态场 (magneto-quasi-statics, MQS)

## 定理：磁准静态场基本方程

在时变场中，如果有  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \ll \gamma \mathbf{E}$  或  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx \mathbf{0}$ ，则麦克斯韦方程组、波动方程、动态位方程可以简化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} \approx \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J} \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \left( \frac{\rho}{\epsilon} \right) \\ \nabla^2 \mathbf{H} = \mathbf{0} \end{cases}, \begin{array}{l} \text{导体内} \\ \text{理想介质内} \end{array}$$

$$\stackrel{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}{\Rightarrow} \begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_{\text{ext}} \end{cases}$$

其中我们采用库伦规范。

★ 试推导以上结果，并指出推导过程使用哪些假设 (§8.1.2)。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# 磁准静态场

概论

## 说明

- $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx \mathbf{0}$  但  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$
- 上页等式右边“源”项是含时的。
- 利用库伦规范得到的动态位方程，其解仅具有  $f(r, t)$  形式，而不是  $f(r, t - r/v)$  形式。即，虽时变但忽略了推迟效应。
- 动态位方程的形式与静电/磁场一样 [教科书式 (3-3-25) 与 (5-2-10)]，但仅限库伦规范下。与以上介绍的电准静态场，虽然位函数方程形式一样，但属不同规范。

★ 试采洛伦兹规范，推导磁准静态场的位函数遵循的方程。

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 似静场

在时变场中，如果有  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx \mathbf{0}$  且  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx \mathbf{0}$ ，则麦克斯韦方程组可以进一步简化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} \approx \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{H} \approx \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

似静场与前面的电/磁准静态场的区别，在于此处完全忽略了时间导数项，电场与磁场完全解耦。电/磁准静态场则是部分解耦，选用电或磁准静态场视问题特性而定。

注意到以上“源”与“场”皆为时间的(缓变)函数。从级数展开的角度看，零阶场满足似静场，一阶场(电/磁准静态场)的求解则由零阶场的解作为已知量。继续逐步扩展到二阶、三阶和更高阶，最后将所有阶的项相加就是完整的解，有时候，解可以收敛为一简单函数。这种方法不用求解耦合的、复杂的时变方程组，得到的虽然是近似、逼近的解，但多半能满足工程实际的初步要求。

## 概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

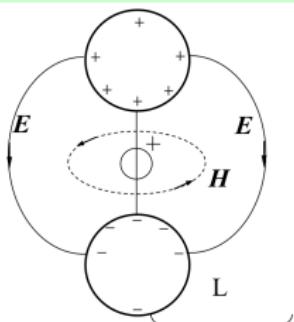
作业

# 低频电磁场近似

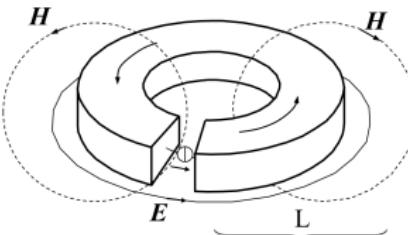
选用电或磁准静态场视问题特性而定，如：源的性质、材料性质、拓扑结构等。对理想导体 ( $\gamma = \infty$ ) 或理想介质 ( $\gamma = 0$ )，可用以下性质判断

## 性质

在满足  $\omega \ll \tau_{\text{em}}^{-1}$  或  $L \ll \lambda$  或  $\beta L \ll 1$  (其中  $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$  为相位常数) 下，降低激励源的频率，使得场变为恒定，如果此时磁场消失，则场是电准静态场；如果是电场消失，场就是磁准静态场。



电压源激励的理想导体球  
(电准静态场-电容器)



电流源激励的理想导体圆环  
(磁准静态场-电感器)

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

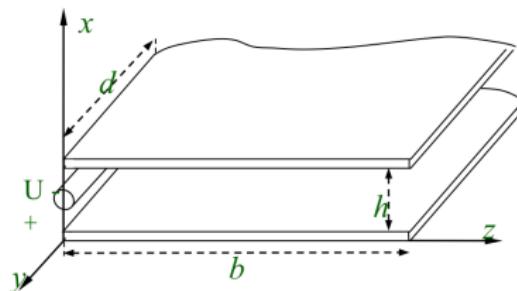
作业

# 例：电压激励的开路平行板传输线

以下针对具体的电磁装置进行分析，旨在说明传统意义上的平行板电容器不再只是单纯的电容器，其端口特性在低频情况下近似呈现电容特性，但在高频情况下则呈现出既有电容也有电感的（串联）特性。考虑如下图，假设  $b \gg h, d \gg h$ ，忽略边缘效应。要求解两板之间的场，先列举满足的方程与边界条件，

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

定义  $\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 。电压激励源  $U(t) = \sqrt{2} U_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ 。



概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 边界条件有

$$\begin{cases} E_x(x, y, z=0, t) = \frac{U(t)}{h} \\ E_z(x=h^-, y, z, t) = E_y(x=h^-, y, z, t) = 0 \\ E_z(x=0^+, y, z, t) = E_y(x=0^+, y, z, t) = 0 \\ \mathbf{S}|_{x,y,z=b} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \Rightarrow H_y(x, y, z=b) = 0 \end{cases}$$

假设右端口无辐射场

通过几何对称性<sup>4</sup>、电的高斯定律<sup>5</sup>、法拉第电磁感应定律<sup>6</sup>与全电流定律<sup>7</sup>，可以确定场具有如下形式

$$\begin{cases} \mathbf{E} = E_x(z, t)\mathbf{e}_x \\ \mathbf{H} = H_y(z, t)\mathbf{e}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathcal{E}}_x(z)\mathbf{e}_x \\ \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathcal{H}}_y(z)\mathbf{e}_y \end{cases}$$

则简化的波动方程及其解可以写为

$$\frac{d^2}{dz^2} \begin{Bmatrix} \dot{\mathcal{E}}_x \\ \dot{\mathcal{H}}_y \end{Bmatrix} + \beta^2 \begin{Bmatrix} \dot{\mathcal{E}}_x \\ \dot{\mathcal{H}}_y \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathcal{E}}_x = \frac{\dot{U}_0}{h} \frac{\cos \beta(z-b)}{\cos \beta b} \\ \dot{\mathcal{H}}_y = -j \frac{\dot{U}_0}{h} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\sin \beta(z-b)}{\cos \beta b} \end{cases}$$

<sup>4</sup>电场、磁场函数与  $y$  无关。

<sup>5</sup>由此给出约束条件:  $\partial E_x / \partial x = 0$ , 即  $E_x$  没有  $x$  依存关系。

<sup>6</sup>由此给出约束条件:  $H_z = \text{常数}$ , 为简单起见, 假设  $H_z = 0$ 。

<sup>7</sup>由此给出约束条件:  $H_y$  与  $x$  无关。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似  
辐射场

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

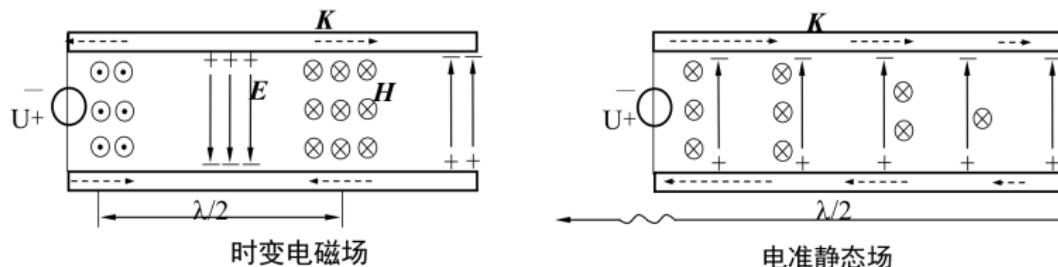
例题 & 练习

作业

# 完整的瞬时表达式有

$$\begin{cases} E_x = \frac{\sqrt{2} U_0}{h} \frac{\cos \beta(z - b)}{\cos \beta b} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ H_y = -\frac{\sqrt{2} U_0}{h} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\sin \beta(z - b)}{\cos \beta b} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

下图比较了当  $\omega t = \pi/4$  时，时变电磁场 ( $b \gg \lambda$ ) 与电准静态场 ( $b \ll \lambda$ ) 的场形<sup>8</sup>



<sup>8</sup>  $\beta(z - b) = \beta \Delta z \propto \Delta z / \lambda$

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# 一阶近似

为了研究准静态近似条件，先假设  $\beta(z - b) \ll 1$ ，利用

$$\sin(\beta\Delta z) = \frac{(\beta\Delta z)^1}{1!} - \frac{(\beta\Delta z)^3}{3!} + \frac{(\beta\Delta z)^5}{5!} - + \dots$$

$$\cos(\beta\Delta z) = 1 - \frac{(\beta\Delta z)^2}{2!} + \frac{(\beta\Delta z)^4}{4!} - + \dots$$

代入原式，近似计算保留到一阶，有

$$E_x = \frac{\sqrt{2} U_0}{h} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_y = -\frac{\sqrt{2} U_0}{h} \omega \epsilon(z - b) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 一阶近似

利用  $\hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{K}_f$ , 在上下极板的表面电流有

$$\begin{cases} K_z = H_y(0^+, y, 0, t) = \sqrt{2}\omega\epsilon \frac{U_0}{h} b \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ 下平板的上表面} \\ K_z = -H_y(h^-, y, z, t) = -\sqrt{2}\omega\epsilon \frac{U_0}{h} b \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ 上平板的下表面} \end{cases}$$

规定流进左端口下平板上表面的电流为正方向, 有

$$i = K_z d = \sqrt{2}\omega C_d U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = C_d \frac{dU}{dt}$$

定义  $C_d = \epsilon bd/h$ 。

电压激励源如果保留到一阶, 为电准静态场, 开路平行板为一电容。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交变静场

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 二阶近似

重复上面步骤，将  $E_x, H_y$  展开至第二阶，求下半平板上表面的电流。定义  $L_2 = \mu b h / 2d$ ，有

$$i = \frac{\omega C_d}{1 - \omega^2 L_2 C_d} \sqrt{2} U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow I = \underbrace{\frac{j\omega C_d}{1 - \omega^2 L_2 C_d}}_{\frac{1}{j\omega C_d} + j\omega L_2} \dot{U}$$

即，电压激励源如果保留到二阶，则开路平行板应等效为电容串联电感的等效电路模型。

★ 分析电流源激励的短路平行板，则电容与电感影响电路的“阶数”反过来。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

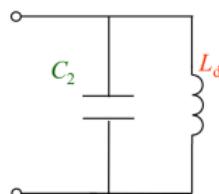
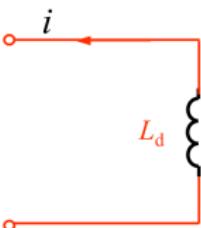
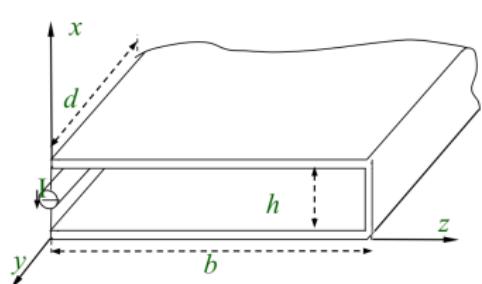
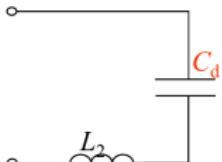
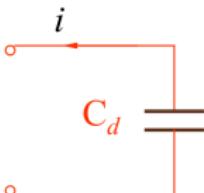
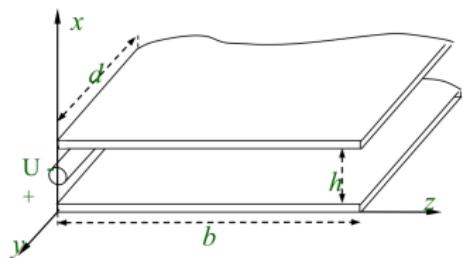
8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 例：电流激励的短路平行板传输线



概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 集总电路近似

集总化假设：认为电路元件非常小，电路中不考虑它们的几何尺寸、电场完全集中在电容中，磁场完全集中在电感中、能量完全消耗在电阻上。

在集总电路理论成为电磁场理论的低频近似之前，需要回答以下两个问题

1. 基本电路元件相互连接时的约束条件 (基尔霍夫定律, Kirchhoff current and voltage law, KCL, KVL) 如何由电磁场理论得到？其中用了哪些近似？
2. 基本电路元件 (电容、电感、电阻) 的端口特性 ( $i = C \frac{dU}{dt}$ 、 $U = L \frac{di}{dt}$ 、 $U = Ri$ ) 如何由电磁场理论得到？其中用了哪些近似？

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

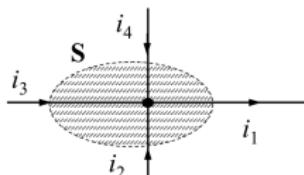
8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# Question 1: 如何由电磁场理论得 KCL?

利用全电流定律<sup>9</sup>, 考虑下图<sup>10</sup>



闭合面  $S$ (指向外为正) 包围的区域内, 导线外无电场<sup>11</sup>、无传导电流、无位移电流, 导线内传导电流  $\gg$  位移电流, 即  $\partial\mathbf{D}/\partial t \approx 0$ , 整个系统为磁准静态场。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \iint_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathcal{S} = 0 \Rightarrow \iint_{\text{导线内}} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathcal{S} \approx 0$$

$$\Rightarrow +i_1 - i_2 - i_3 - i_4 \approx 0 \Rightarrow \sum_k i_k = 0$$

<sup>9</sup>在第四章中, §4.1, 我们讨论过基尔霍夫电流定律, 当时是由电荷/流的连续方程获得, 当时也讨论了基尔霍夫电压定律, 由恒定电场为保守场的事实获得。

<sup>10</sup>图例取自叶齐政教授上课 ppt。

<sup>11</sup>仅聚集在电容与导线中。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

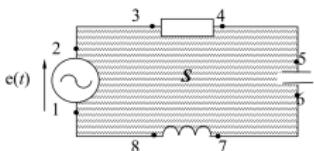
8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# Question 1: 如何由电磁场理论得 KVL?

利用法拉第电磁感应定律, 考虑下图<sup>12</sup>



闭合曲线  $C(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 1)$  所包围的平面  $S$  上无磁场<sup>13</sup>, 即  $\partial\mathbf{B}/\partial t \approx 0$ , 整个系统为**电准静态场**。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathcal{S} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell \approx 0$$

$$\Rightarrow e(t) = U_R + U_C + U_L \Rightarrow \sum_k U_k = 0$$

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

<sup>12</sup>图例取自叶齐政教授上课 ppt。

<sup>13</sup>仅聚集在电感与导线中。

## Question 2: 如何得元件端口特性?

参考下图(左), 利用似静场  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , 对于仅经过  $d\ell$  段载流导电媒质, 尺寸足够小时, 可以视  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{J}$  为常数, 有

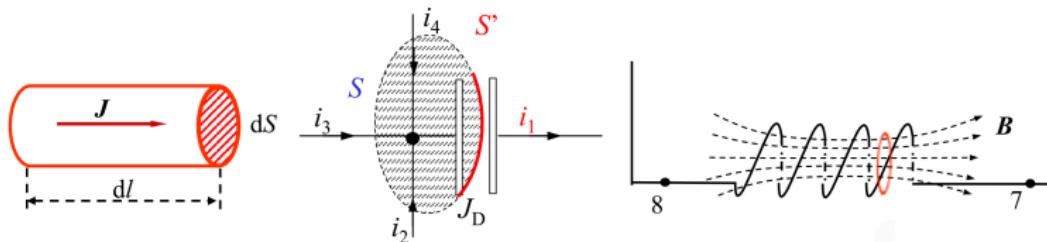
$$U = \mathbf{E} \cdot d\ell = \frac{\mathbf{J}}{\gamma} \cdot d\ell = \frac{i}{\gamma dS} \cdot d\ell = \left( \frac{d\ell}{\gamma dS} \right) i = Ri$$

参考下图(中), 利用全电流定律, 对于在电容器内曲面  $S'$

$$i \approx \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathcal{S}' = \epsilon S' \frac{\partial E}{\partial t} = \left( \frac{\epsilon S'}{h} \right) \frac{\partial Eh}{\partial t} = C \frac{dU}{dt}$$

参考下图(右), 利用电磁感应定律, 对于电感器内截面  $S'$

$$U = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathcal{S} \approx \iint_{S'} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathcal{S} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{dLi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

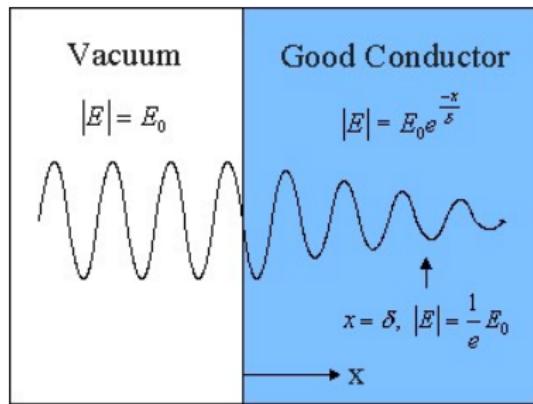
例题 &amp; 练习

作业

# 趋肤效应、集肤效应 (skin effect)

在时谐场中的良导体，不但内部无净电荷（但允许有电流），而且电流的分布还呈现集中在导体表面的趋势，即沿导体纵深方向逐渐衰减，该现象称为集肤效应<sup>14</sup>。它的物理根源在于电磁感应现象。具体近似求解时用到磁准场近似（即使到高频段： $\gamma/\omega\epsilon \gg 1$ ）<sup>15</sup>，但效应本身是时变场的固有性质。

考虑一个半无限大良导体 ( $x > 0$ )，如下图<sup>16</sup>



<sup>14</sup>理想导体无此效应。

<sup>15</sup>极高频自然不适用，如  $\gamma$ -射线看到的铜、铁如同理想介质 ( $\gamma = 0$ )。

<sup>16</sup><http://pulsedpower.net/Applets/Electromagnetics/SkinDepth/skindepth.html>

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# 趋肤效应、集肤效应

量化以上效应可以通过求解导体内磁准静态场方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} - \Gamma^2 \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} - \Gamma^2 \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

其中，

$\Gamma = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = \sqrt{\omega\mu\gamma} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \alpha + j\beta$ 。考虑  
一维情况，拉普拉斯算子可以简化为  $\nabla^2 \rightarrow d^2/dx^2$ 。

利用  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ ，有

$$\frac{d^2 \dot{J}_y}{dx^2} - \Gamma^2 \dot{J}_y = 0 \Rightarrow \dot{J}_y = J_0 e^{-(\alpha+j\beta)x}$$

$$\begin{cases} \dot{E}_y = \frac{J_0}{\gamma} e^{-(\alpha+j\beta)x} = E_0 e^{-(\alpha+j\beta)x} \\ \dot{H}_z = -\frac{j\Gamma}{\omega\mu} E_0 e^{-(\alpha+j\beta)x} \end{cases}$$

♠ 一个与趋肤效应类似（但不同）的效应：邻近效应 ▶ 例题 1。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# 趋肤效应、集肤效应

容易发现，时变电磁场与电流场沿  $x$  方向皆有  $e^{-\alpha x} \times e^{-j\beta x}$  因子。

08-skin-01

08-skin-02

## 定义：趋肤深度 (skin depth)

定义场振幅衰减  $e^{-1}$  时的深度  $d$ ，即  $e^{-\alpha d} = 1/e$ ，有

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \gamma}}$$

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 涡电流 (eddy current)

如下图，导体圆板在转动方向可以等效成一圈圈的闭合回路，所以在导板体的转动方向会产生感应电流，就像一圈圈的漩涡，被称为涡电流或傅科 (Foucault) 电流。导体的外周长越长或时变磁场的频率越高，涡流就越大。

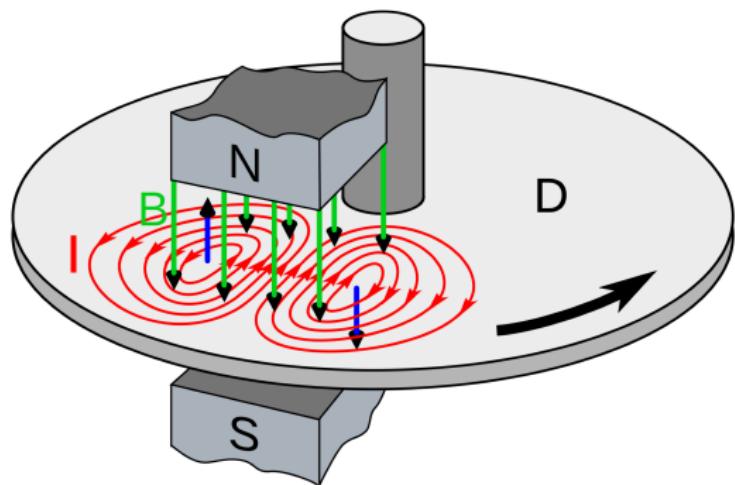


图: [https://en.wikipedia.org/wiki/Eddy\\_current](https://en.wikipedia.org/wiki/Eddy_current)

例: 变压器铁芯中的电磁场 ▶ 例题 2。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# 交流阻抗 (AC resistance, $Z$ )

恒定电(流)场中讨论过电阻，属于直流电阻，与电流通过媒质横截面有关系。对于时变电磁场，已知大部分电流集中在导体表面附近。为了减少高频电阻，在相同截面积情况下，可以增加导体的表面积 (例 8.4.2)。在高频电路中可用空心铜导线代替实心铜导线以节约铜材。架空输电线中心部分改用抗拉强度大的钢丝。虽然其电阻率大一些，但是并不影响输电性能，又可增大输电线的抗拉强度。

## 定义：交流阻抗 $Z$

交流阻抗为频率的函数，定义为

$$Z(\omega) = -\frac{\oint_A \dot{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{S}}{I^2} = -\frac{\oint_A (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S}}{I^2}$$

关于(复)坡印廷矢量，见 §7.5。例：▶ 例题 3。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

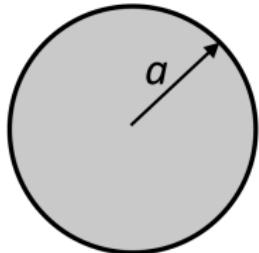
8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

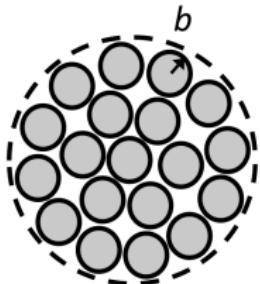
例题 &amp; 练习

作业

# 交流阻抗 (AC resistance, $Z$ )



$$R \approx \frac{1}{\gamma 2\pi ad}$$



$$R_N \approx \frac{1}{N} \frac{1}{\gamma 2\pi bd}$$

$$\boxed{\pi a^2 = N\pi b^2}$$

注意，以上电阻仅是估算。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# 三相输电线

工频，采用似静场近似，横向本就是似静场，纵向近似为似静场（无限长线电荷）。利用**相电压**计算电场，利用**相电流**计算磁场。本节仅对前者简单介绍。

输电线产生的横向似静场采用等效电荷和镜像电荷（考虑大地的影响）的方法：设置一组等效电荷，然后写出它们在输电线表面的电位表达式，再根据实际电位求得等效电荷的大小。

## 性质

无限长直线电荷  $\tau$  与其镜像线电荷在空间中某点形成的电位与电场分别为

$$\varphi = \frac{\tau_{\text{源}}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_{\text{像}}}{\rho_{\text{源}}}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\tau_{\text{源}} \mathbf{e}_{\rho_{\text{源}}}}{\rho_{\text{源}}} + \frac{-\tau_{\text{像}} \mathbf{e}_{\rho_{\text{像}}}}{\rho_{\text{像}}} \right)$$

其中， $\rho$  为源/像线电荷到场点的距离。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

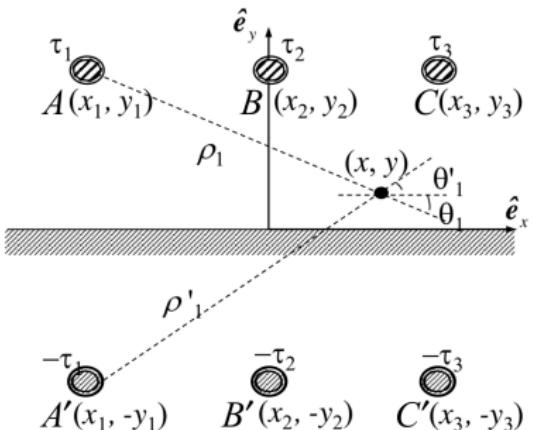
# 三相输电线

设每相电位差  $120^\circ$ , 电压相量可以写成

$$\begin{cases} \dot{U}_A = U_{AR} + jU_{AI} = U \\ \dot{U}_B = U_{BR} + jU_{BI} = U e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ \dot{U}_C = U_{CR} + jU_{CI} = U e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$$

如右图, 输电线产生的似静场采用等效电荷和镜像电荷(考虑大地的影响)的方法:

1. 设置一组等效电荷于  $A', B', C'$
2. 写出它们在输电线表面 ( $A, B, C$ ) 的电位表达式
3. 根据实际电位求得等效电荷的大小



概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

每根输电线表面电位由六根(包含自己)导线贡献, 可以写成以下矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_A \\ \dot{U}_B \\ \dot{U}_C \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \dot{\tau}_A \\ \dot{\tau}_B \\ \dot{\tau}_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \ln \frac{2h}{a} & \ln \frac{L_{A'B}}{L_{AB}} & \ln \frac{L_{A'C}}{L_{AC}} \\ \ln \frac{L_{B'A}}{L_{BA}} & \ln \frac{2h}{a} & \ln \frac{L_{B'C}}{L_{BC}} \\ \ln \frac{L_{C'A}}{L_{CA}} & \ln \frac{L_{C'B}}{L_{CB}} & \ln \frac{2h}{a} \end{pmatrix}$$

$\dot{\tau}_A, \dot{\tau}_B, \dot{\tau}_C$  为待解。

转换回瞬时表示式, 利用  $\dot{\tau}_{A,B,C} = \hat{\tau}_{A,B,C} e^{j\varphi_{A,B,C}}$ , 有

$$\tau_{A,B,C} = \text{Im} \left( \sqrt{2} \dot{\tau}_{A,B,C} e^{j\omega t} \right) = \sqrt{2} \hat{\tau}_{A,B,C} \sin(\omega t + \varphi_{A,B,C})$$

解得镜像线电荷后, 三相无限长输电线在空间中某一点形成的电场(横向似静场)为

★ 注意: 以下符号稍复杂, 涉及“时谐量与瞬时量”、“空间矢量的分量”、“三相输电线个别贡献”、“实部与虚部”。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

导线 A(及其镜像) 对空间中某点  $(x, y)$  在  $x$  方向的贡献为

$$\begin{aligned}\dot{E}_{xA} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\dot{\tau}_A}{\rho_1} \underbrace{\cos \theta_1}_{\frac{x-x_1}{\rho_1}} + \frac{-\dot{\tau}_A}{\rho'_1} \underbrace{\cos \theta'_1}_{\frac{x-x_1}{\rho'_1}} \right) = \frac{\hat{\tau}_A}{2\pi\epsilon_0} \left( e^{j\varphi_A} \frac{x-x_1}{\rho_1^2} - e^{j\varphi_A} \frac{x-x_1}{\rho'^2_1} \right) \\ &= \frac{\hat{\tau}_A}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{x-x_1}{\rho_1^2} - \frac{x-x_1}{\rho'^2_1} \right) \cos \varphi_A + j \frac{\hat{\tau}_A}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{x-x_1}{\rho_1^2} - \frac{x-x_1}{\rho'^2_1} \right) \sin \varphi_A \\ &= \operatorname{Re} \mathcal{E}_{xA} + j \operatorname{Im} \mathcal{E}_{xA}\end{aligned}$$

类似地,  $y$  方向有

$$\begin{aligned}\dot{E}_{yA} &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\dot{\tau}_A}{\rho_1} \sin \theta_1 + \frac{-\dot{\tau}_A}{\rho'_1} \sin \theta'_1 \right) \\ &= \frac{\hat{\tau}_A}{2\pi\epsilon_0} \left( -\frac{y-y_1}{\rho_1^2} + \frac{y-y_1}{\rho'^2_1} \right) \cos \varphi_A + j \frac{\hat{\tau}_A}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{y-y_1}{\rho_1^2} - \frac{y-y_1}{\rho'^2_1} \right) \sin \varphi_A \\ &= \operatorname{Re} \mathcal{E}_{yA} + j \operatorname{Im} \mathcal{E}_{yA}\end{aligned}$$

概论  
8.1 静电场方程  
8.2 低频电磁场近似  
8.3 集总电路近似  
8.4 换能效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场  
例题 & 练习  
作业

$x$  方向合成场有

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= \dot{E}_{xA} + \dot{E}_{xB} + \dot{E}_{xC} \\ &= \underbrace{(\text{Re } \mathcal{E}_{xA} + \text{Re } \mathcal{E}_{xB} + \text{Re } \mathcal{E}_{xC})}_{E_{xR}} + j \underbrace{(\text{Im } \mathcal{E}_{xA} + \text{Im } \mathcal{E}_{xB} + \text{Im } \mathcal{E}_{xC})}_{E_{xI}} \\ &= E_{xR} + jE_{xI}\end{aligned}$$

总合成场  $\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x \mathbf{e}_x + \dot{E}_y \mathbf{e}_y$ , 其中

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{xA} + \dot{E}_{xB} + \dot{E}_{xC} \\ \dot{E}_{yA} + \dot{E}_{yB} + \dot{E}_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{xR} + jE_{xI} \\ E_{yR} + jE_{yI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E_{xR}^2 + E_{xI}^2} e^{j\phi_x} \\ \sqrt{E_{yR}^2 + E_{yI}^2} e^{j\phi_y} \end{bmatrix}$$

其中,  $\phi_x = \tan^{-1} (\text{Re } \mathcal{E}_x / \text{Im } \mathcal{E}_x)$ 。瞬时表达式可以通过  $\mathbf{E}(t) = \text{Im} \left( \sqrt{2} \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right)$  求得。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 利萨如图形 (Lissajous figure)

在互相垂直的方向上的两个频率成简单整数比的简谐振动所合成的规则的、稳定的闭合曲线<sup>17</sup>。

$$\mathbf{E}(t) = \text{Im} \left( \sqrt{2} \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right) = \sqrt{2} E_x \sin(\omega t + \phi_x) \mathbf{e}_x + \sqrt{2} E_y \sin(\omega t + \phi_y) \mathbf{e}_y$$

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

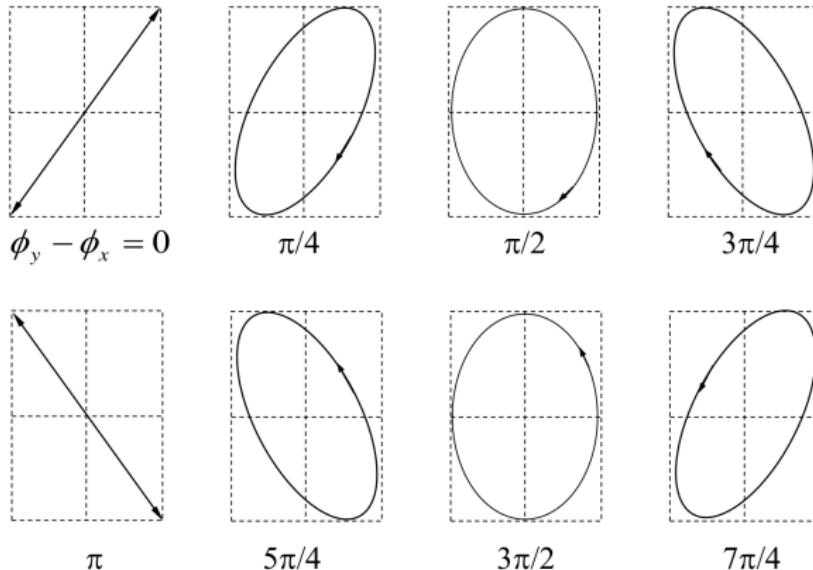
8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

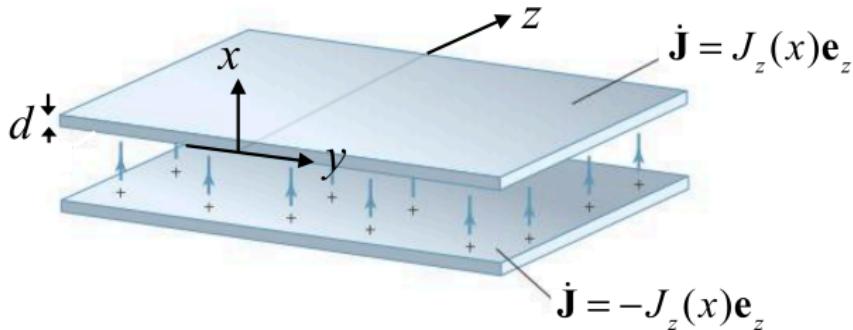


<sup>17</sup> 图例取自叶齐政教授上课 ppt。

# 例题 1: 邻近效应 (proximity effect) ♠

◀ 趋肤效应

当高频电流在两导线中彼此反向流动或在一组导体中往返流动时, 电流会集中于导体邻近侧流动的一种电磁现象。考虑如下图所示的无限大平行板, 通有大小相等方向相反的单频时谐体电流。分析导体板内部的电流分布。



▷ 考虑上导体板, 假设电流密度有如下形式

$$J_z(x) = J_- e^{\Gamma x} + J_+ e^{-\Gamma x}$$

其中,  $\Gamma = \alpha + j\beta$ ,  $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$ 。由于  $\mathbf{j} = \gamma \dot{\mathbf{E}}$ , 有  
 $\nabla \times \mathbf{j} = -j\omega\mu\gamma \dot{\mathbf{H}}$ 。(物理根源: 电磁感应现象)

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 例题 1: (续)

—维情况下， $\nabla \times \mathbf{j}$  方程可以化简为

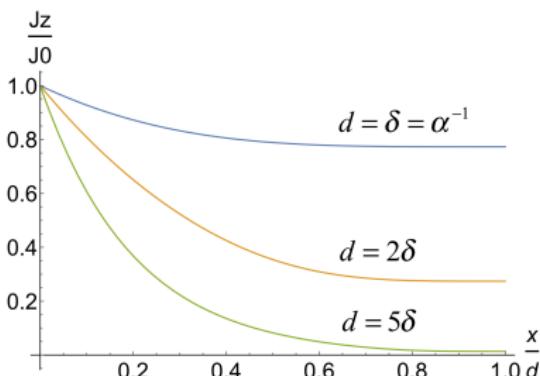
$$\frac{d\dot{J}_z}{dx} = j\omega\mu\gamma\dot{H}_y \Rightarrow \dot{H}_y(x) = \frac{\Gamma}{j\omega\mu\gamma} [J_- e^{\Gamma x} - J_+ e^{-\Gamma x}]$$

待定系数由边界条件决定

$$\begin{cases} \dot{H}_y(x=d) = 0 \Rightarrow J_+ = J_- e^{2\Gamma d} \\ \dot{J}_z(x=0) = J_0 \Rightarrow J_- = \frac{J_0}{e^{\Gamma d}(e^{\Gamma d} + e^{-\Gamma d})} \end{cases}$$

因此，电流密度沿  $x$  方向分布为

$$\dot{J}_z(x) = \frac{J_0}{e^{\Gamma d}} \frac{e^{\Gamma(x-d)} + e^{-\Gamma(x-d)}}{e^{\Gamma d} + e^{-\Gamma d}}$$



概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

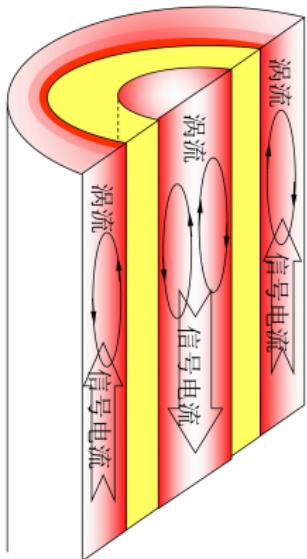
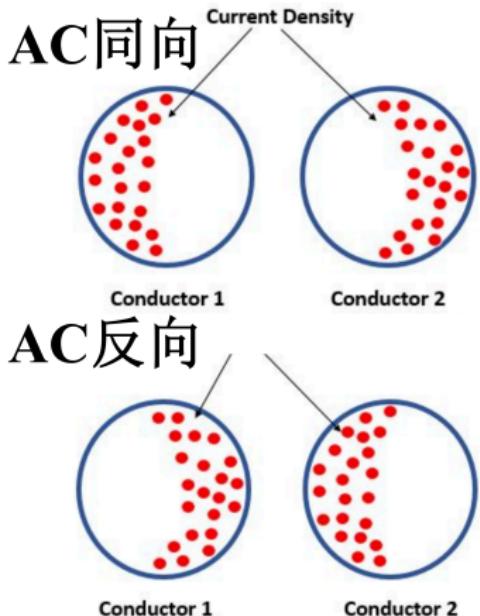
8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

例题 1: (续)<sup>18</sup>

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

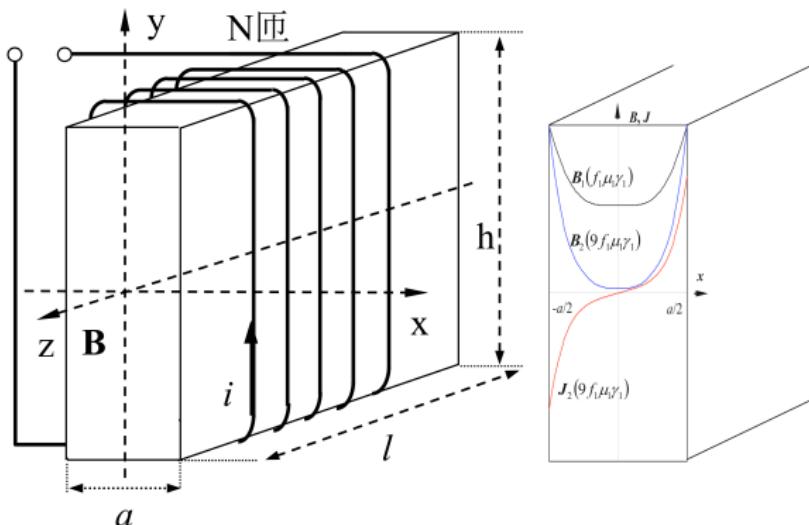
作业

<sup>18</sup> 左图例取自 <https://electricalvoice.com/proximity-effect-conductors/>，右图例取自叶齐政教授上课 ppt。

# 例题 2: 变压器铁芯中的电磁场 (例 8.4.1)

[返回](#)

如下图<sup>19</sup>, 外部激励源电流为  $i$ , 求铁芯中的电磁场与电流场沿  $x$  分布。



由问题对称性 ( $h, \ell \gg a$ ), 假定场仅与  $x$  相关, 即  
 $\nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , 磁场可由导体中  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - j\omega\mu\gamma\right) H_z(x) = 0$  解得。

<sup>19</sup> 图例取自叶齐政教授上课 ppt。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

## 例题 2: (续)

令  $\Gamma^2 = j\omega\mu\gamma$ , 通解可以写成

$$\dot{H}_z(x) = C_1 e^{-\Gamma x} + C_2 e^{\Gamma x} \stackrel{\dot{H}_z(x=\pm a/2)=N\dot{I}/\ell}{\Rightarrow} \dot{H}_z(x) = \frac{N\dot{I}}{\ell} \frac{\cosh \Gamma x}{\cosh \frac{\Gamma a}{2}}$$

磁感应强度有  $\dot{B}_z(x) = \mu \dot{H}_z(x)$ 。电流密度为

$$\mathbf{j} = \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = J_y \mathbf{e}_y = -\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \mathbf{e}_y = -\frac{N\dot{I}}{\ell} \frac{\Gamma \sinh \Gamma x}{\cosh \frac{\Gamma a}{2}} \mathbf{e}_y$$

铁芯中的电场有  $\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_y \mathbf{e}_y = \frac{\mathbf{j}}{\gamma}$ 。平均功率则有

$$P = \iiint_V \frac{|\mathbf{j}|^2}{\gamma} dV \propto \gamma A$$

由上可知, 线圈所通电流的频率越高, 感应电动势就越大, 涡流就越强, 损耗加大。因此每层铁芯片应做的薄 [图 8-4-2(a)]。当电流的频率再提高时, 叠片铁芯的涡流损耗也变得很大了, 这时必须使用电阻率较大的铁芯。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

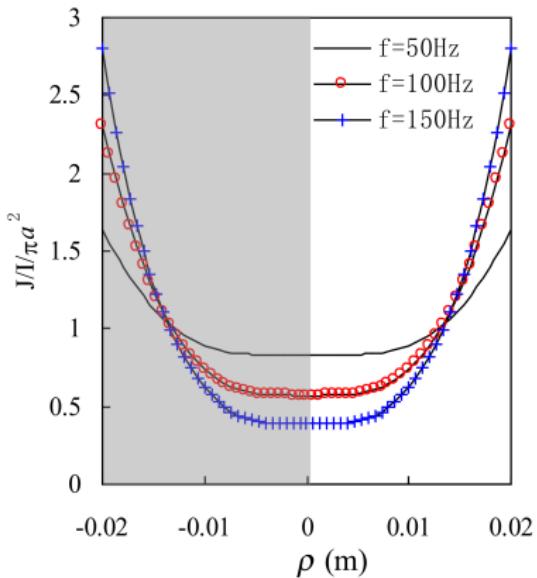
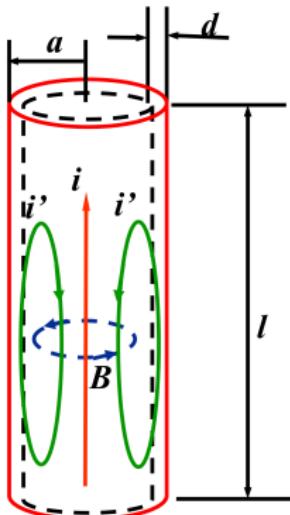
例题 &amp; 练习

作业

# 例题 3: 长直导线的交流阻抗

◀ 交流阻抗

如下左图<sup>20</sup>, 假设长直载流导线时谐电流  $\dot{I} = 100 \text{ A}$ , 半径  $a = 20 \text{ mm}$ , 磁导率  $\mu = \mu_0$ , 电导率  $\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ 。计算电流分布, 估算直流与交流电阻。



<sup>20</sup> 图例取自叶齐政教授上课 ppt。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

## 例题 3: (续)

由于导线为良导体，忽略位移电流（磁准静态场）。由问题的对称性，有  $\nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ 。传导电流场遵循下方程并有通解

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - j\omega \mu \gamma \right) J_z(\rho) = 0 \Rightarrow J_z(\rho) = \frac{k \dot{I}}{2\pi a} \frac{\mathcal{J}_0(k\rho)}{\mathcal{J}_1(ka)}$$

其中， $k = \sqrt{-j\omega \mu \gamma}$ 。电流密度分布如上页右图所示，可以看到随着频率越高，趋肤效应越明显。导体内的电场与磁场为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{j}}{\gamma} = \frac{k \dot{I}}{2\pi a \gamma} \frac{\mathcal{J}_0(k\rho)}{\mathcal{J}_1(ka)} \mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{H}} = -\frac{\nabla \times \dot{\mathbf{E}}}{j\omega \mu} = \frac{\dot{I}}{2\pi a} \frac{\mathcal{J}_1(k\rho)}{\mathcal{J}_1(ka)} \mathbf{e}_\phi \end{cases}$$

其中用了  $\mathcal{J}'_0 = -\mathcal{J}_1$  关系（贝索函数性质）。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

## 例题 3: (贝索方程、贝索函数)

柱坐标系下拉普拉斯方程经过分离变量的  $\rho$  分量的微分方程有 (定义  $x = k\rho$ )

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \pm \left( 1 \mp \frac{\nu^2}{x^2} \right) \right] \begin{cases} \mathcal{J}_\nu, \mathcal{N}_\nu \\ \mathcal{I}_\nu, \mathcal{K}_\nu \end{cases} = 0$$

其通解一般以符号  $\mathcal{J}_\nu$  (第一类贝索函数) 与  $\mathcal{N}_\nu$  (第二类贝索函数) 表示。对于上页方程, 有  $\nu = 0$ , 电流密度的通解可写成  $\dot{J}_z = A\mathcal{J}_0(k\rho) + B\mathcal{N}_0(k\rho) \rightarrow A\mathcal{J}_0(k\rho)$   
 $\because \mathcal{N}_\nu(0)$  发散, 故舍去

$$\begin{aligned} \iint \dot{J}_z dS &= \dot{I} \Rightarrow 2\pi \int_0^a \dot{J}_z \rho d\rho = \dot{I} \\ &\Rightarrow 2\pi A \frac{a}{k} \mathcal{J}_1(ka) = \dot{I} \\ &\Rightarrow A = \frac{k\dot{I}}{2\pi a} \frac{\mathcal{J}_0(ka)}{\mathcal{J}_1(ka)} \end{aligned}$$

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

# 例题 3: (续)

应用闭合区域等效阻抗的定义, 有

$$Z \equiv -\frac{\oint \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \cdot d\mathcal{S}}{j^2} = \frac{k\ell}{2\pi a\gamma} \frac{\mathcal{J}_0(ka)}{\mathcal{J}_1(ka)} \approx \frac{\ell}{2\pi a\gamma d} (1+j) \equiv R+jX$$

可以定义直流与交流阻抗分别为

$$\begin{cases} R_{DC} = \frac{\ell}{\gamma\pi a^2} \\ R_{AC} \approx \frac{\ell}{\gamma 2\pi ad} = \frac{\ell}{2\pi a} \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\gamma}} \end{cases}$$

比值有

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} \approx \frac{a\sqrt{\pi f\mu\gamma}}{2}$$

其中, 趋肤深度  $d = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\gamma}}$ 。一般来说, 频率越高, 比值  $\frac{R_{AC}}{R_{DC}}$  越大。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

作业

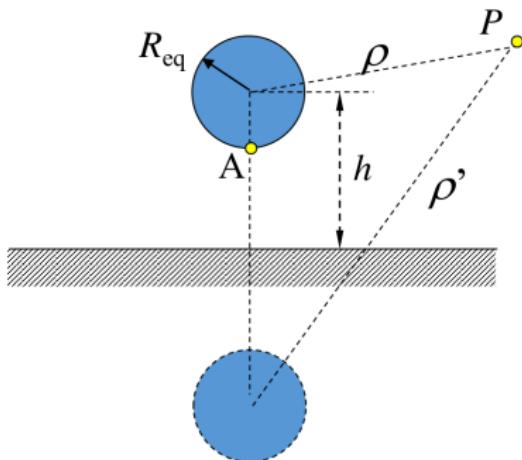
# 例题 4: 单根输电导线对地电容

如右图<sup>21</sup>, 求单根输电导线对地电容

$$\varphi_P = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho'}{\rho}$$

$$\varphi_A \approx \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R_{\text{eq}}}$$

$$C_{\text{eq}} \approx \frac{\tau}{\varphi_A} = 2\pi\epsilon_0 \left[ \ln \frac{2h}{R_{\text{eq}}} \right]^{-1}$$



概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 &amp; 练习

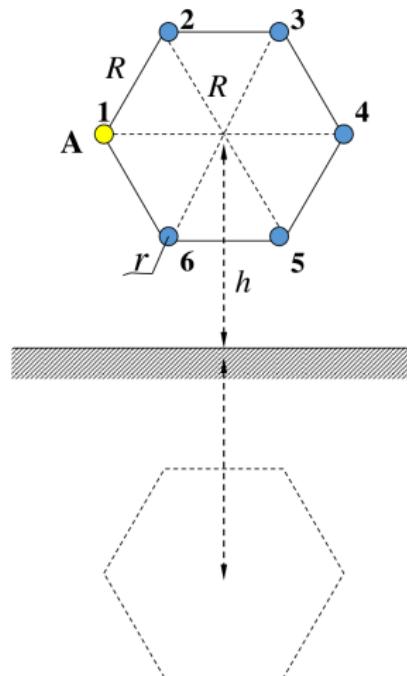
作业

<sup>21</sup>图例取自叶齐政教授 ppt。

# 例题 5: 分裂输电导线对地电容

如右图<sup>22</sup>, 求六分裂输电导线对地电容

$$\begin{aligned}\varphi_A &\approx \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{2h}{r} + \ln \frac{2h}{R} + \ln \frac{2h}{\sqrt{3}R} \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{2h}{2R} + \ln \frac{2h}{\sqrt{3}R} + \ln \frac{2h}{R} \right) \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(2h)^6}{6rR^5} \\ C_{eq} &= \frac{6\tau}{\varphi_A} = 12\pi\epsilon_0 \left[ \ln \frac{(2h)^6}{6rR^5} \right]^{-1}\end{aligned}$$



<sup>22</sup>图例取自叶齐政教授 ppt。

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业

# 作业

- 8.3, 8.4
- 8.5, 8.6

概论

8.1 准静态方程

8.2 低频电磁场近似

8.3 集总电路近似

8.4 趋肤效应与交流阻抗

8.5 三相输电线似静场

例题 & 练习

作业