

# 电磁辐射与加速器束流动力学导论

Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,  
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

## 特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

# 第九章 多粒子电磁辐射

## 内容提要

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> 束团形成因子：纵向、横向   | <input type="checkbox"/> 相干性：横向、纵向     |
| <input type="checkbox"/> 辐射屏蔽效应         | <input type="checkbox"/> 电子束发射度、光子束发射度 |
| <input type="checkbox"/> 辐射脉冲形成长度：横向、纵向 |  |

第7章、第8章分别介绍了单电子的横向与纵向动力学。虽然也介绍了如何描述多粒子形成的束团的动力学，但是并没有考虑束团内粒子彼此之间的关系。这一章及以下四章将介绍当考虑束团内粒子彼此间存在关联时，如何分析其横纵向动力学过程。这一章篇幅相对较短，仅介绍束团中的多粒子如何影响辐射特性的一般理论，仍忽略束团内粒子彼此之间的交互作用。

## 9.0 问答预览

1. 什么是束团形成因子？它在电磁辐射中有什么作用？

⇒ 束团形成因子描述了束团中不同电子发射辐射的相位关系，是分析束团辐射特性的  
重要参数。

2. 什么是相干辐射？与非相干辐射有什么区别？

⇒ 相干辐射是指束团中不同电子发射的辐射具有相位关联，导致辐射场在空间和时间  
上相干叠加，形成较强的辐射输出；非相干辐射则是指束团中不同电子发射的辐射  
相位无关联，导致辐射场在空间和时间上随机叠加。

3. 什么是辐射屏蔽效应？

⇒ 辐射屏蔽效应是指金属真空管壁对辐射场的吸收作用，导致某些波长的辐射场无法  
到达观察者，从而降低了辐射场的强度。

4. 什么是同步辐射脉冲形成长度？

⇒ 同步辐射脉冲形成长度是指单个电子发出同步辐射产生完整辐射脉冲过程需要的  
横纵向空间尺度。

## 9.1 线性叠加原理与形成因子

第一册第3章至第5章介绍的是单电子的电磁辐射，对于多粒子组成的电子束团，每个粒子的相对位置与相对散角不太一样，由束团发射度表征，即束团尺寸 $\sigma_{x,y}$ 、角散 $\sigma_{x',y'}$ 。因此，电子束团有发射度，辐射的光子束也能有对应的发射度。此外，电子束内不同粒子具有能量偏差（能散），将体现在束团整体的辐射谱与单电子的辐射谱的差异上。

对于多粒子组成的电子束团的辐射场，可以利用叠加原理得到。叠加原理成立的条件为这里分析假设麦克斯韦方程组为线性方程组。

### 9.1.1 纵向

将单电子产生的辐射场写为 $B(t)$ ，则 $N$ 个电子形成的束团辐射场有<sup>1</sup>

$$\mathcal{B}(t) = \sum_{i=1}^N B(t - t_i) \quad (9.1)$$

其中， $t_i = -z_i/c$  表征束团内第 $i$ 个电子的相对时间坐标， $z_i$ 为束团内第 $i$ 个电子的相对位置坐标。此讲义采用 $z = s - ct$  惯例。

对应的辐射频谱为

$$\tilde{\mathcal{B}}(\omega) = \int dt \mathcal{B} e^{i\omega t} = \sum_{i=1}^N \int dt B(t - t_i) e^{i\omega t} = \sum_{i=1}^N \tilde{B}(\omega) e^{i\omega t_i} \quad (9.2)$$

辐射强度（功率或能量）与 $|\tilde{\mathcal{B}}(\omega)|^2$ 成正比，有

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{B}}(\omega)|^2 &= \left| \sum_{i=1}^N \tilde{B}(\omega) e^{i\omega t_i} \right|^2 = |\tilde{B}(\omega)|^2 \left( N + \sum_{i \neq j} e^{i\omega(t_i - t_j)} \right) \\ &= N |\tilde{B}(\omega)|^2 + 2 |\tilde{B}(\omega)|^2 \sum_{i=1}^N \sum_{(i < j)}^N \cos \left( \omega \frac{z_i - z_j}{c} \right) \end{aligned} \quad (9.3)$$

上式等式右边第一项为非相干（incoherent）项，非相干辐射强度正比于 $N$ 。上式等式右边第二项为相干（coherent）项，相干辐射强度正比于 $N^2$ ，乘上的权重因子如下

$$2 \sum_{i=1}^N \sum_{(i < j)}^N \cos \left( \omega \frac{z_i - z_j}{c} \right) \approx N^2 \int dz' \int dz'' \lambda(z') \lambda(z'') \cos \left( \omega \frac{z' - z''}{c} \right) = N^2 F(\omega) \quad (9.4)$$

其中，纵向形成因子或群聚因子（bunching factor）写为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int dz' \int dz'' \lambda(z') \lambda(z'') \cos \left( \omega \frac{z' - z''}{c} \right) \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) e^{-i\omega z/c} \right|^2 \end{aligned} \quad (9.5)$$

其中，用到了 $\lambda(z) = \lambda^*(z)$ 为实数的特性与 $\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$ 。

<sup>1</sup>这里虽然写为 $B$ ，但是不局限于磁场，只是一个符号，也可以代表电场。

练习 9.1 试着推导以上结果。参考下图 9.1 ■

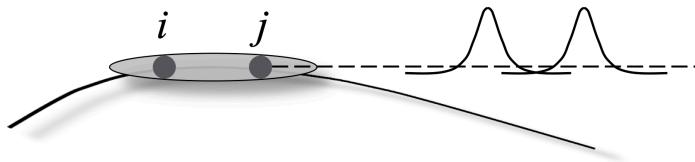


图 9.1: 沿束团前进方向, 由纵向不同位置电子产生的辐射脉冲。

对高斯分布的束团  $\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-z^2/2\sigma_z^2}$ , 有  $F(\omega) = e^{-(\omega\sigma_z/c)^2}$ 。可以看到, 当  $\sigma_z \geq c/\omega = \lambda/2\pi$  时, 相干性减弱。

### 定理 9.1. 束团辐射强度公式

已知束团形成因子  $F(\omega)$  与单电子辐射强度(功率或能量), 则

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\mathcal{W}}{d\omega d\Omega} \right|_{\text{束团}} &= \left. \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \right|_{\text{单电子}} [N + N^2 F(\omega)] \\ &= \underbrace{\left. \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \right|_{\text{单电子}}}_{N} + \underbrace{\left. \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \right|_{\text{单电子}}}_{N^2 F(\omega)} \\ &= \left. \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \right|_{\text{非相干}} + \left. \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \right|_{\text{相干}} \end{aligned} \quad (9.6)$$

其中,  $N$  为束团内粒子个数,  $F(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) e^{-i\omega z/c} \right|^2$ 。

**注** 这里的  $\mathcal{W}$  可以是  $P$  (辐射功率) 或  $U$  (辐射能量)。 □

由此定理, 我们就可以放心应用前面第 3 章至第 5 章介绍的单电子电磁辐射到电子束团整体产生的电磁辐射强度的计算。

练习 9.2 上面定理为针对单一束团给出的结果, 当束长短于感兴趣的辐射波长时, 辐射强度由相干项主导。对多个束团形成的束团串, 如果束团间距也短于感兴趣的辐射波长时, 此时相干增强除了源自单束团, 还源自束团间的建设性干涉。试推广以上定理结果到束团串情况。 ■

### 9.1.2 横向

上一小节的分析假设束团仅为一维纵向线电荷分布, 当考虑束团具有有限横向尺寸时, 则束团中不同位置的电子发出的辐射场抵达观察位置  $\mathbf{n}$  的时间差为

$$\Delta t = -\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{n}}{c} \quad (9.7)$$

则，束团辐射强度正比于

$$|\tilde{B}(\omega, \mathbf{n})|^2 = N|\tilde{B}(\omega, \mathbf{n})|^2 + 2|\tilde{B}(\omega, \mathbf{n})|^2 \sum_{i=1}^N \sum_{(i < j)} \sum_{j=1}^N \cos\left(\omega \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{c}\right) \quad (9.8)$$

其中，相干项与  $N^2$  仍然成正比，权重因子变为包含横向分布的三维形成因子

$$\begin{aligned} F(\omega, \mathbf{n}) &= \iiint d^3 r' \iiint d^3 r'' \lambda(\mathbf{r}') \lambda(\mathbf{r}'') \cos\left(\omega \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')}{c}\right) \\ &= \left| \iiint d^3 r \lambda(\mathbf{r}) e^{-i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c} \right|^2 \end{aligned} \quad (9.9)$$

 **练习 9.3** 试着推导以上结果。参考下图 9.2 ■

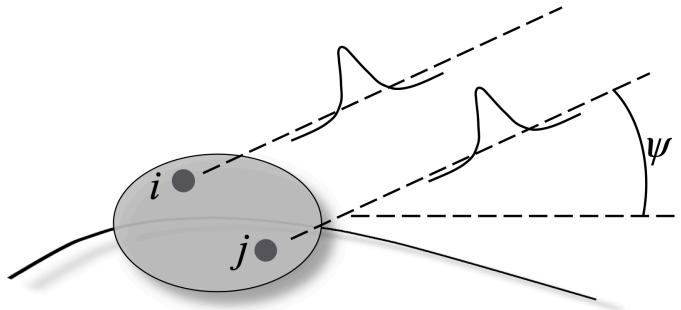


图 9.2: 相对于束团前进方向呈  $\psi$  角，由不同位置产生的辐射脉冲。

对横向高斯分布的束团，有

$$\lambda(\mathbf{r}) = \delta(z) \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_r^2} \quad (9.10)$$

考虑  $\mathbf{n} = (\sin \psi, 0, \cos \psi)$ ，则横向形成因子有

$$\begin{aligned} F &= \left| \int dx \int dy \int dz \frac{\delta(z)}{2\pi\sigma_r^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_r^2} e^{ik(x \sin \psi + z \cos \psi)} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2\sigma_r^2} e^{ikx \sin \psi} \right|^2 \\ &= e^{-(k^2\sigma_r^2/2) \sin^2 \psi} \end{aligned} \quad (9.11)$$

可以看到，当  $\sigma_r \geq \lambda/\psi$  时，相干性减弱。



**笔记** 化繁为简：如果系统整体的影响可以视为单个单元的贡献加上“干涉、叠加”的概念，则要求此为线性系统。傅里叶变换是线性系统化简的一种利器。群聚因子的思路在凝聚态物理 (condense matter physics) 或固体理论也有类似概念。

### 9.1.3 相干辐射谱

简化起见，仅考虑一维高斯分布线电荷束团。此时，非相干辐射功率角频谱与相干辐射功率角频谱可分别写成

$$\begin{aligned}\frac{d^2P_{\text{incoh}}}{d\Omega d\omega} &= N \frac{d^2P}{d\Omega d\omega} \\ \frac{d^2P_{\text{coh}}}{d\Omega d\omega} &= \frac{d^2P}{d\Omega d\omega} N^2 e^{-\omega^2 \sigma_t^2} = \frac{d^2P_{\text{incoh}}}{d\Omega d\omega} N e^{-\omega^2 \sigma_t^2}\end{aligned}\quad (9.12)$$

对立体角积分，由于一维线电荷，忽略横向形成因子，对单粒子辐射功率谱，有（参考§4.4.2）

$$\frac{dP}{d\omega} = \int \frac{d^2P}{d\Omega d\omega} d\Omega = \frac{P_s}{\omega_c} S_s \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (9.13)$$

其中，

$$\begin{aligned}P_s &= \frac{2r_e cm_e c^2 \gamma^4}{3\rho^2} \\ S_s \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) &= \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} \mathcal{K}_{5/3}(z') dz' \\ &= \frac{54}{16} \frac{\omega}{\omega_c} \left( -2 \frac{\text{Ai}'(z)}{z} - \frac{1}{3} + \int_0^z \text{Ai}(z') dz' \right)\end{aligned}\quad (9.14)$$

其中， $z = \left(\frac{3\omega}{2\omega_c}\right)^{2/3}$ 。

由前面讨论知，相干辐射发生在相对低频情况，考虑 $\omega \ll \omega_c$ ，其中， $\omega_c = 3c\gamma^3/(2\rho)$ ，有

$$S_s \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \approx \frac{27}{4} \left( \frac{2}{3} \right)^{2/3} \frac{3^{1/6} \Gamma(\frac{2}{3})}{2\pi} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/3} \approx 1.33 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/3} \quad (9.15)$$

则

$$\frac{dP_{\text{coh}}}{d\omega} \approx \frac{P_s}{\omega_c} \frac{27}{4} \left( \frac{2}{3} \right)^{2/3} \frac{3^{1/6} \Gamma(\frac{2}{3})}{2\pi} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/3} N^2 e^{-\omega^2 \sigma_t^2} \quad (9.16)$$

对频率积分，可得束团整体相干辐射功率

$$P_{\text{coh}} \approx N^2 P_s \frac{27}{8} \left( \frac{2}{3} \right)^{2/3} \frac{3^{1/6} [\Gamma(\frac{2}{3})]^2}{2\pi (\omega_c \sigma_t)^{4/3}} = N^2 \frac{r_e cm_e c^2}{\rho^2} \frac{3^{1/6} [\Gamma(\frac{2}{3})]^2}{2\pi \left( \frac{\sigma_z}{\rho} \right)^{4/3}} \quad (9.17)$$

可以看到，与粒子能量无明显关系。这是因为我们考虑低频渐进( $\omega \ll \omega_c$ )情况时，已经把辐射频率 $\omega_c$ 与粒子能量的依存关系舍去了。因此，以上相干辐射功率表示式仅在辐射低频分量情况下成立。将相干辐射功率 $P_{\text{coh}}$ 与非相干辐射功率 $P_{\text{incoh}} = NP_s$ 相比，有

$$\frac{P_{\text{coh}}}{P_{\text{incoh}}} = \frac{3 \cdot 3^{1/6} [\Gamma(\frac{2}{3})]^2}{4\pi\gamma^4} \frac{N}{\left( \frac{\sigma_z}{\rho} \right)^{4/3}} \approx 0.5257 \frac{N}{\gamma^4 \left( \frac{\sigma_z}{\rho} \right)^{4/3}} \quad (9.18)$$

由上可知，对长波长而言，会出现相干同步辐射，辐射输出得到增强。但是，对长波长来说，§4.5介绍过，还有一个效应，即金属管壁的屏蔽效应。辐射屏蔽效应仅对那些对应横向形成长度长于管壁尺寸的波长有效，对短波长辐射无效。辐射屏蔽总结如下：

### 定理 9.2. 辐射屏蔽因子

金属管壁的屏蔽效应仅对那些对应横向形成长度长于管壁尺寸的波长有效。假设金属管壁尺寸为  $a$ , 弯转半径  $\rho$ , 则将被有效屏蔽的辐射波长满足

$$\ell_{\perp} > a \Rightarrow \rho^{1/3} \lambda^{2/3} > a \Rightarrow \lambda > \sqrt{\frac{a^3}{\rho}} \quad (9.19)$$

其中,  $\lambda = \lambda/2\pi$ 。当辐射波长比  $2\pi a^{3/2}/\rho^{1/2}$  长时, 对应的辐射功率将指数衰减。换句话说, 如果将无金属管壁屏蔽的自由空间的辐射能量写成  $U_{\text{free}}$ , 将存在金属管壁屏蔽时的辐射能量写成  $U_{\text{shield}}$ , 则由于不是所有频率成分的辐射场都能辐射, 即  $U_{\text{shield}} < U_{\text{free}}$ , 其比值可以估算为

$$\frac{U_{\text{shield}}}{U_{\text{free}}} \approx 4.2 \left( \frac{n_{\text{th}}}{n_c} \right)^{5/6} e^{-\frac{2n_{\text{th}}}{n_c}}, \quad n_{\text{th}} > n_c \quad (9.20)$$

其中,

- $h$  为金属管壁的全高, 近似为  $h \approx 2a$

$$n_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{\pi \rho}{h} \right)^3} \quad (9.21)$$

- $n_c \approx \rho/\sigma_z$

**证明** 更多细节可参考 R. Li, C.L. Bohn, and J.J. Bisognano, Analysis on the steady-state coherent synchrotron radiation with strong shielding, Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference. <https://doi.org/10.1109/PAC.1997.750787>

由以上讨论, 是否出现相干同步辐射, 除了需要考虑辐射波长与束团长度的相对关系外, 还需要知道辐射波长与金属管壁尺寸的相对关系, 参考图 9.3。当辐射波长比束团长度长时, 开始出现相干增强; 但对更长的辐射波长, 由于金属屏蔽效应, 这些辐射场将被金属管壁吸收, 远处观察者不再能收集到辐射场。

练习 9.4 对包含非相干与相干辐射功率谱感兴趣的读者, 可试着利用 MATLAB 复现图 9.3。

**解** 考虑金属屏蔽时, 有  $n_c \approx \rho/\sigma_z \rightarrow \rho/\lambda$ 。因此, 包含金属屏蔽效应的总辐射功率谱为

$$\frac{dP}{d\omega} = \left( \frac{dP_{\text{incoh}}}{d\omega} + \frac{dP_{\text{coh}}}{d\omega} \right) \times \text{屏蔽因子}$$

其中,

$$\text{屏蔽因子} \approx 4.2 \left( \frac{n_{\text{th}}}{n_c} \right)^{5/6} e^{-\frac{2n_{\text{th}}}{n_c}}$$

复现时, 细心的读者将发现, 图 9.3 其实假设束团粒子个数甚少, 或者说, 在相干波长范围内的粒子数甚少。当  $N \gg 1$  时, 相干辐射功率  $\gg$  非相干辐射功率, 辐射功率谱将更像图 9.4。

练习 9.5 当考虑束团具有横向有限尺寸时, 重复以上分析, 计算相干辐射功率与非相干

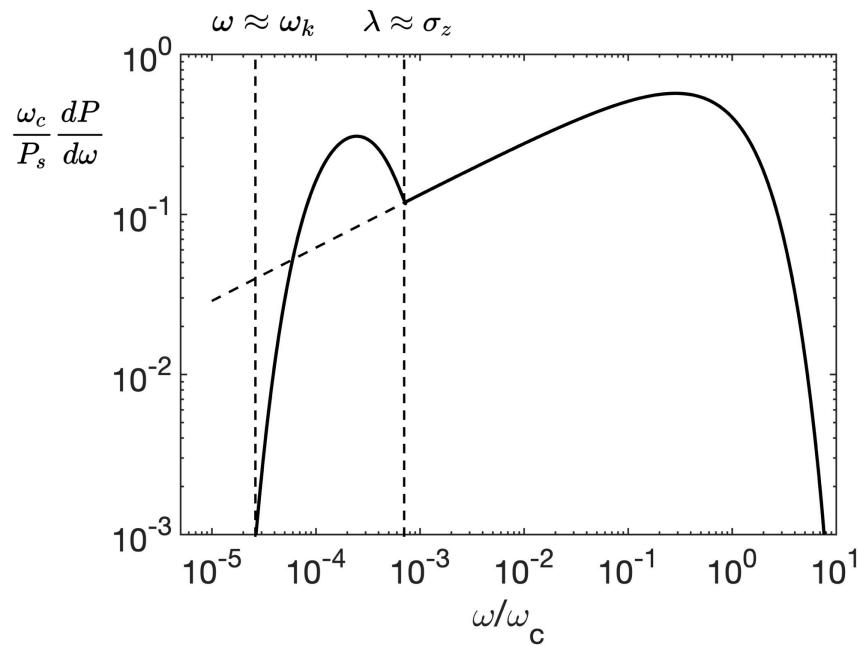


图 9.3: 包含非相干叠加与相干叠加的辐射谱, 其中,  $\omega_k \sim c/\lambda$ 。

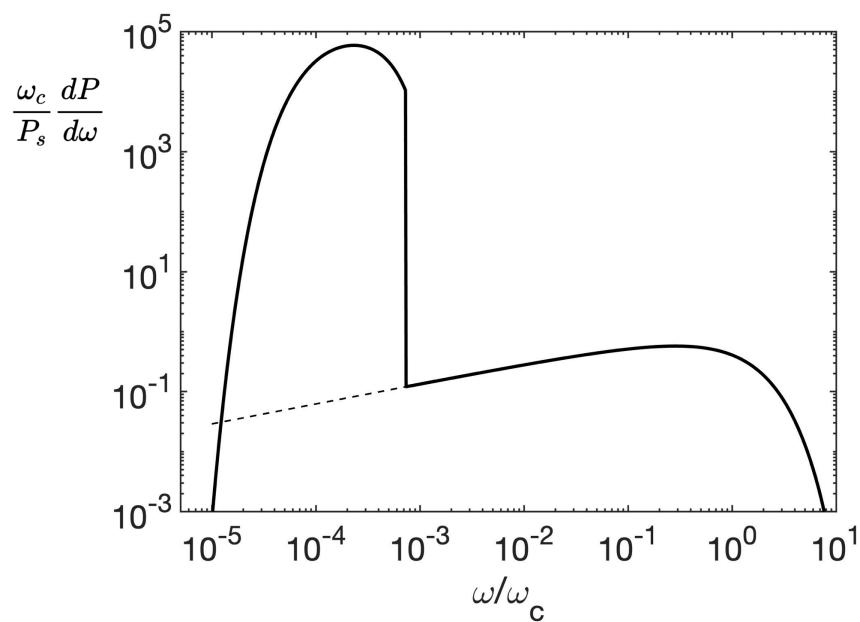


图 9.4:  $N \gg 1$  时的辐射功率谱。图中看似“截断”的地方是由于考虑了金属屏蔽效应的人为条件导致。

辐射功率。 ■

## 9.2 同步辐射脉冲形成长度

辐射脉冲形成长度的概念在 §4.5 曾介绍过，这里简要回顾一下。这里的同步辐射脉冲形成长度指的是单个电子发出同步辐射产生完整辐射脉冲过程需要的横纵向空间尺度。与束团中个别电子间的相互距离最终决定束团整体发出的同步辐射脉冲特性。

### 9.2.1 纵向

#### 定理 9.3. 纵向辐射脉冲形成长度

对于中心频率为  $\omega$  的电磁辐射，电子绕行弯转段需要走一段  $\ell_f$  的弯转距离，才能形成一个完整的辐射脉冲。这个距离称为纵向辐射脉冲形成长度 (longitudinal formation length)，可以估计为

$$\ell_f(\omega) \approx \frac{\rho}{\gamma} \sim \rho^{2/3} \lambda^{1/3} \quad \text{或} \quad \ell_f(\omega) \sim \frac{\lambda}{\Delta\psi^2} \quad (9.22)$$

其中， $\lambda = \lambda/2\pi = c/\omega$ ， $\rho$  为弯转半径， $\Delta\psi \sim (\lambda/\rho)^{1/3}$  为同步辐射场的横向散角。

纵向辐射脉冲形成时间则为  $\tau_f = \ell_f/c$ 。这里  $\ell_f \propto \frac{1}{\omega^{1/3}}$ 。

**证明** 辐射场横向尺寸为有限的根源为粒子走弧线，扫出有限横向尺寸。此外，电磁波存在衍射效应。通过简单的几何关系，辐射场的横向尺寸可以估算为

$$\Delta x \approx \rho \left(1 - \cos \frac{1}{\gamma}\right) \approx \frac{\rho}{2\gamma^2} = \left(\frac{\rho}{2}\right) \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \approx \rho(\Delta\psi)^2$$

此外，衍射关系有  $\Delta x \approx \lambda/\Delta\psi$ 。结合这两个关系，有  $\Delta\psi \sim (\lambda/\rho)^{1/3}$ 。 □

另一种理解纵向辐射脉冲形成长度的图像：经过  $\ell_f$  之后，场不再与其源粒子存在“联系”，而开始“自由”传播。

对于高频  $\omega \sim \omega_c$  (其中， $\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$  为临界辐射频率) 的电磁辐射，电子绕行弯转段需要走大约  $\ell_f \sim \frac{\rho}{\gamma}$  的弯转距离，才能形成一个完整的辐射脉冲。换句话说，绕行的电子需要在弯转段中花大约  $\tau_f \sim \frac{\rho}{c\gamma}$  时间，才能形成一个完整的辐射脉冲。此时，产生的完整辐射脉冲时间长度约为  $\frac{\rho}{c\gamma^3}$ 。

完整辐射脉冲时间  $\neq$  形成一个完整辐射脉冲所需要的时间。



**笔记** 如何理解  $\frac{\rho}{c\gamma}$  与  $\frac{\rho}{c\gamma^3}$  的联系？注意，相对论电子速率约  $v \approx c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)$ ，而光子速率  $c$ 。速率差约有  $\frac{c}{2\gamma^2}$ 。在辐射脉冲形成时间  $\tau_f \sim \frac{\rho}{c\gamma}$  内，正是这个速率差造成辐射脉冲时长  $\tau_f \times \frac{c}{2\gamma^2} \sim \frac{\rho}{2\gamma^3}$ 。

## 9.2.2 横向

### 定理 9.4. 横向辐射脉冲形成长度

除了电子沿纵向  $s$  需要走一段距离  $\ell_f$  (或花一段时间  $\tau_f$ )，沿横向  $x, y$  也需要有限空间  $\ell_{\perp}$  形成辐射脉冲，有横向辐射脉冲形成长度 (transverse formation length)

$$\ell_{\perp}(\omega) \sim \Delta x \frac{\lambda}{\Delta \psi} \sim \rho^{1/3} \lambda^{2/3} \quad (9.23)$$

这里  $\ell_{\perp} \propto \frac{1}{\omega^{3/2}}$ 。

**证明** 纵向波数  $k = \omega/c$ ，辐射张角约为  $\Delta\psi \sim (\lambda/\rho)^{1/3}$ ，则横向波数约为  $k_{\perp} \sim k \times \Delta\psi$ 。横向波数的倒数可以表征横向辐射脉冲形成尺寸，有  $\ell_{\perp} \sim k_{\perp}^{-1}$ 。  $\square$

如果二极铁长度不够辐射脉冲形成长度  $\frac{\rho}{\gamma}$ ，如： $\gamma = 10/0.511, \rho = 10 \text{ m}$ ，则  $\ell_f \sim 0.5 \text{ m}$ ，那么，形成的辐射脉冲就不是完整的辐射脉冲，此时辐射场又称边缘辐射 (edge radiation)。其对应的辐射频谱特性也就不是教科书常见的结果。如果要得到完整的同步辐射脉冲，一般二极铁长度要是形成长度的数倍，即， $L \gg \ell_f$ ，或者，二极铁弯转角度  $L/\rho \gg 1/\gamma$ 。

前面 §4.5 节提过，纵向辐射脉冲形成长度类似于高斯激光束的瑞利长度 (Rayleigh length)。横向辐射脉冲形成长度则类似于高斯激光束的束腰尺寸 (waist size)。

另一种理解横向辐射脉冲形成长度的图像： $\ell_{\perp}(\omega)$  给出辐射场脉冲能被聚焦或压缩的最小尺寸。或者， $\ell_{\perp}(\omega)$  表征辐射场的横向相干长度。



**笔记** “聚焦”或“压缩”的概念差不多，只是在横向情况，一般称“聚焦”；在纵向情况，一般称“压缩”。类似地，有“散焦”或“拉伸”的用词区别。

### 9.3 电子束与多粒子电磁辐射束的物理图像

电子束内的每个粒子有不同的横向位置坐标与散角坐标，发出的辐射场大抵分布在与该粒子瞬时动量(切线方向)呈 $\pm 1/\gamma$ 范围内。对极端相对论粒子，一般来说，束团产生的辐射场的发射度可与电子束发射度关联，有

电子束几何发射度与光子束发射度差不多，即 $\epsilon_x \sim \epsilon_{x\gamma}$

假设光子束发射度 $\epsilon_{x\gamma} \geq \lambda/4\pi$ ，其中， $\lambda$ 为辐射场波长。

#### 定理 9.5. 光束最小几何发射度为 $\lambda/4\pi$

辐射场或光子束的最小几何发射度为

$$\epsilon_{x\gamma,\min} = \frac{\lambda}{4\pi} \quad (9.24)$$

其中， $\lambda$ 为辐射场波长。对一特定波长，此为光子束的终极发射度。

**证明** 根据测不准原理， $\Delta x \Delta p_x \geq h/4\pi$ ，其中， $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} - \text{sec}$  为普朗克常数。光子束的最小几何发射度可写为

$$\epsilon_{x\gamma} = \Delta x \Delta x' = \Delta x \frac{\Delta p_x}{p_0} \geq \frac{h}{4\pi \hbar k} = \frac{\lambda}{4\pi} \quad (9.25)$$

其中，光子动量 $p_0 = \hbar k$ ， $\hbar \equiv h/2\pi$ 为约化普朗克常数。 □

参考图 9.5，如果电子束经历一段传输距离 $R$ 的真空漂移段，则可利用电子束在下游 $R$ 处的特性来描述辐射光束同样在 $R$ 处的特性。这是基于电子束的纯光学性质与光束的光学性质差不多的思路。由第7章知，电子束在 $R$ 处的 betatron 函数有

$$\beta_x(s=R) = \beta_x(0) - 2\alpha_x(0)R + \gamma_x(0)R^2 \quad (9.26)$$

则在该处的辐射光束的尺寸可以如下方式量化

$$\sigma_{x\gamma} \approx \sqrt{\epsilon_{x\gamma} \beta_{x\gamma}(R)} \quad (9.27)$$

其中，默认了辐射光束的 betatron 函数 $\beta_{x\gamma}(R) = \beta_x(R)$ ，角散也可以类似方式量化 $\sigma_{x'\gamma} \approx \sqrt{\epsilon_{x\gamma} / \beta_{x\gamma}(R)}$ ，参考图 9.5。其实，更准确的评估辐射光束的尺寸可采用

$$\begin{aligned} \Sigma_{x\gamma} &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_{x\gamma}^2} \\ \Sigma_{x'\gamma} &= \sqrt{\sigma_{x'}^2 + \sigma_{x'\gamma}^2} \end{aligned} \quad (9.28)$$

此表示式涉及电子束与辐射光束的卷积，此处不论。

以上估算同步辐射束尺寸的思路是基于“电子束几何发射度与光子束发射度差不多”的前提，即电子束与辐射光束大致匹配的前提下。现在，我们换一个方式估算同步辐射束尺寸，通过上面介绍的辐射形成长度，辐射束的 betatron 函数有

$$\beta_{x\gamma} \approx \frac{\sigma_{x\gamma}}{\sigma_{x'\gamma}} \approx \frac{\ell_\perp}{\Delta\psi} \approx \frac{\sqrt[3]{\lambda\rho^2}}{2} \approx \frac{\ell_f}{2} \quad (9.29)$$

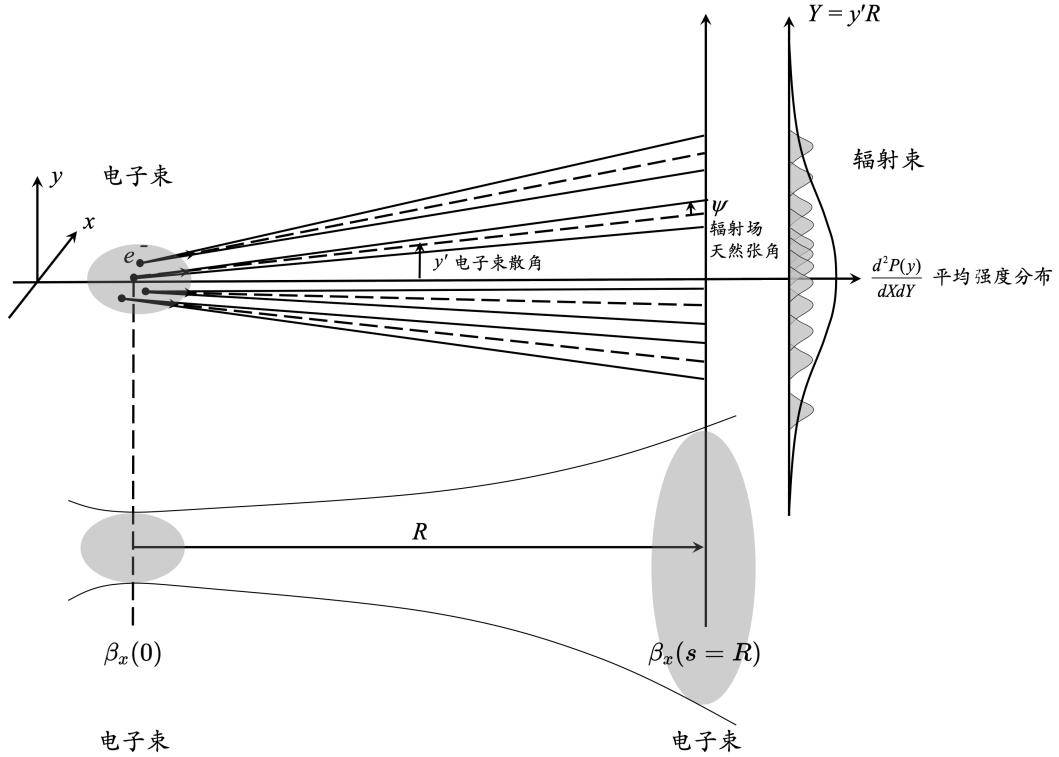


图 9.5: 电子束与多粒子电磁辐射束的物理图像。

其中，分母的 2 可视为一修正因子，细节此处不论。由此可见，如果希望匹配电子束与辐射光束，则要求电子束满足以上关系，即要求电子束的  $\beta_x \approx \beta_{x\gamma} \sim \rho/2\gamma$ 。对 GeV 量级电子束，此条件要求电子束  $\beta_x \sim \text{mm}$ ，一般难以达到。一般在储存环加速器中不太会特意为了得到更好的弯转段同步辐射输出而刻意匹配电子束与同步辐射场光束。

现在，接续以上论证过程，但我们改考虑波荡器辐射，则波荡器辐射场的形成长度  $\ell_f \sim L_u$  即为波荡器长度。则

$$\beta_{x\gamma} \approx \frac{\ell_f}{2} = \frac{L_u}{2} \quad (9.30)$$

一般来说， $L_u \sim \mathcal{O}(10 \text{ m})$ 。现在，针对波荡器辐射束，匹配电子束尺寸就变得容易地多。因此，为了得到更好的波荡器辐射输出，在波荡器中匹配电子束与波荡器辐射场光束是基本手段。

由于光子束的终极(几何)发射度为  $\lambda/4\pi$ ，因此，对一特定辐射波长而言，当电子束的发射度比光子束终极发射度还小时，此时电子束的尺寸、角散等不再影响辐射光子束，称这种情况的辐射场已经达到衍射极限 (diffraction limit)。或者，换一个视角看，如果有手段是采用衍射极限波长的辐射场对电子束进行束测时，在对应的辐射波长下，该束测手段已经达到分辨率极限，将无法分辨更小发射度的电子束。或者说，此时在该波长的辐射场已经达到横向空间相干 (spatial coherent)。

# 第十章 自由电子激光理论

## 内容提要

- |                      |                               |
|----------------------|-------------------------------|
| □ 激光的一般、基本原理         | □ 低增益 FEL 物理图像、Madey 定理       |
| □ 自由电子激光 (FEL) 的工作原理 | □ 高增益 FEL 物理图像、Bonifacio 集体变量 |
| □ FEL 的三种工作模式        | □ 几种常见的高次谐波产生机制               |
| □ 一维 FEL 模型          |                               |

这一章将介绍自由电子激光的基础理论。第 5 章介绍单粒子的波荡器辐射，第 9 章介绍多粒子的辐射。当经过波荡器的束团，其束长短于辐射波长时，束团产生的波荡器辐射为相干辐射，根本原理为波的线性叠加原理。不同于相干波荡器辐射，自由电子激光的工作原理除了叠加原理，还包含集体效应的体现。就是说，除了多粒子产生的辐射场之间的相位的相干叠加外，自由电子激光的工作原理还包含辐射场反过来对电子的影响。此影响在低增益自由电子激光的体现是迭代解要做到二阶，在高增益自由电子激光的体现则是三个耦合的一阶微分方程组或一个三阶微分方程式——不是二阶微分方程。由于此理论本身又与经典的集体效应理论框架有些许不同、也采用不同的符号惯例，因此，安排在这一章先行介绍。经典的集体效应理论框架则在后续第 11 章至第 13 章介绍。

**注** 这一章题为自由“电子”激光，按此讲义惯例，对电子而言， $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，即  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} > 0$ 。这一章以下凡出现电荷符号  $e$ ，均为正数，宜留意。

## 10.0 问答预览

1. 激光的产生机制是什么？自由电子激光与传统的激光有什么区别？

⇒ 激光的必要产生机制是受激辐射。不同于传统的激光，自由电子激光利用加速器产生的电子束与波荡器相互作用，产生可调谐的电磁辐射。

2. 自由电子激光有哪些工作模式？它们各自的特点是什么？

⇒ 自由电子激光 (FEL) 有三种工作模式：SASE FEL、FEL 放大器和 FEL 振荡器。SASE FEL 是基于电子束散粒噪声的自放大自发辐射，FEL 放大器需要外部种子激光，FEL 振荡器则利用自发辐射和腔体反射进行放大。

3. 什么是 Madey 定理？它对低增益 FEL 的物理图像有什么解释？

⇒ Madey 定理揭示了电子束能量损失与波荡器辐射能量增益之间的关系，以及电子能量损失与能散之间的关联。

4. 高增益 FEL 的物理图像是什么？什么是 Bonifacio 集体变量模型？

⇒ 高增益 FEL 的物理图像是电子束与辐射场之间形成正反馈，辐射场不断增强。Bonifacio 集体变量模型利用“归一化复辐射场”、“群聚因子”和“集体动量”来描述这种相互作用。

5. SASE FEL 的特点是什么? 为什么它能产生短波长激光?

⇒ SASE FEL 的特点是横向全相干, 纵向相干性较差。它能产生短波长激光是因为不需要外部种子激光, 利用电子束自身的散粒噪声作为种子。

6. 在 FEL 中, 什么是增益导引?

⇒ 增益导引是指高增益 FEL 中, 辐射场被电子束引导, 避免衍射效应, 使得基模成为主要辐射模式。

7. 电子束的发射度对 FEL 效能有什么影响?

⇒ 电子束的发射度会影响辐射场的横向尺寸和角散, 进而影响 FEL 的增益和效率。可以通过外部聚焦或选择合适的波荡器参数来优化电子束的发射度。

8. 在 FEL 中, 什么是谐波产生?

⇒ 在 FEL 中, 谐波产生是指利用外部种子激光对电子束进行调制, 然后在波荡器中产生目标波长的辐射。它可以提高 FEL 的纵向相干性, 因为种子激光提供了相干的光场。

9. 什么是自种子方案? 有哪些优缺点?

⇒ 自种子方案是指利用 SASE 产生的辐射场作为种子, 然后利用 FEL 放大器进行放大。它的优点是纵向相干性好, 缺点是对电子束中心能量抖动敏感。

## 10.1 激光原理

### 定义 10.1. 激光 (laser)、激光器

激光由激光器产生。激光器是一种电磁部件，使光 → 激光。在发出激光之前，光（即，电磁辐射）经历了受激发射 (stimulated emission) 过程。激光的英文是 LASER，即 light amplification by stimulated emission of radiation 的缩写。若电磁辐射要被称为激光，需要满足激光的一个特性：相干 (coherence)，包含空间相干 (spatial coherence) 与时间相干 (temporal coherence)。

**注** 受激发射概念是由爱因斯坦 (A. Einstein) 在 1917 年提出；大约 10 年后，才由英国物理学家狄拉克 (P.A.M. Dirac) 首次实验证明受激发射的存在。

**注** 空间相干又称横向相干 (transverse coherence)。足够好的空间相干能使发出的光较好地聚焦/散焦，或者说，空间相干性较好的光，横向不同位置具有相同相位。足够好的横向空间相干光能够用作激光切割 (laser cutting) 或光刻 (lithography) 等。

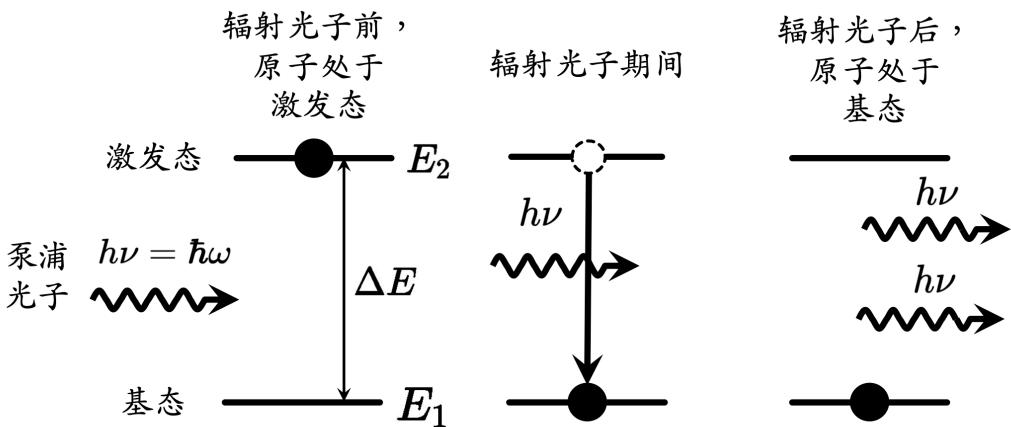
**注** 时间相干又称纵向相干 (longitudinal coherence)。足够好的时间相干光表征使发出的光的频谱为窄带，或者说，频谱中的不同频率成分的相位是相关联的，而非独立的。于是，足够好的时间相干光能够在脉冲时间长度上压缩到很短，常用作产生超短/超快激光 (ultrashort/ultrafast laser)。

此处不打算深入探讨受激发射过程，仅简单介绍。参考图 10.1，原子由原子核与电子组成。若有外来能量使电子与原子核的距离增大，则内能增加；反之减少。原子存在某些定态（即，能级的概念），在这些定态时不发出、也不吸收电磁辐射，原子定态能量只能采取某些分立值，如  $E_1$ 、 $E_2$  等，这些定态能量的取值称为能级 (energy level)。外来能量可能使电子自一能级提升/跃迁至另一能级。与跃迁对应的高能级能量  $E_2$  和低能级能量  $E_1$  满足关系式：

$$E_2 - E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (10.1)$$

其中， $\nu$  为外部“泵浦”源的频率， $\nu = c/\lambda$ ， $\lambda$  为外部“泵浦”源的波长。

正常情况下，在平衡态时大多数电子处于基态，要使这些粒子产生辐射作用，必须把处于基态的电子激发到高能级上去。由于原子内部结构不同，相同的外界条件使原子从基态被激发到各高能级的概率不同。通常把原子、分子或离子中的束缚电子激发到某一能级上的可能性称为这一能级的“激发概率”。理论研究表明，光的产生、发射过程分为两种，一种是在没有外来光子的情况下，处于高能级  $E_2$  的一个原子自发地向低能级  $E_1$  跃迁，并发射一个能量为  $E_2 - E_1$  的光子，这种过程称为“自发跃迁”或“自发辐射”(spontaneous emission)；由原子自发跃迁发出的光波称为自发发射。



$$E_2 - E_1 = \Delta E = h\nu$$

图 10.1: 传统激光工作原理示意图。

另一种发射过程是处于高能级  $E_2$  上的原子，在频率为  $\nu$  的外部辐射场作用下受激（而非自发），跃迁至低能级  $E_1$  并辐射一个能量为  $E_2 - E_1 = h\nu$ 、与激励光子完全相同的光子，这种过程称为“受激发射”(stimulated emission) 跃迁；受激发射跃迁发出的光波，称为受激辐射。

受激发射与自发发射最重要的区别在于产生的辐射场的相干性。自发发射是原子在不受外界辐射场控制情况下的自发过程，大量原子的自发辐射场的相位是不相干的，辐射场的传播方向和偏振态也是无规分布，而受激发射是在外界辐射场控制下的发光过程。因此，受激辐射场的频率、相位、传播方向和偏振态与外界辐射场完全相同。激光就是一种受激发射的相干光。

乍看之下，要能产生激光要经历受激发射，而似乎受激发射与能级有关，上述能级的概念又是基于量子力学过程。由此会想，“激光”是量子力学的产物，似乎与经典力学无关。我们暂且对上述对激光的定义称为“传统”定义，上述的激光称传统认知意义上的、基于量子力学过程的激光 (conventional lasers)。这类传统激光是基于束缚在原子中的电子的群体激发，到了激发态之后，一次性的经历受激发射跃迁而发出的激光。这种光具有时间、空间上良好的相干性。

### 定理 10.1. 激光产生的四要素

要产生激光，要求满足四个条件：增益介质、泵浦能源、腔体反射和输出耦合器。

1. 增益介质 (gain medium): 要产生激光，需要一种在所需波长上具有光源的增益介质，即一种针对特定波长的原子分子能级系统作为增益介质<sup>a</sup>。为了获得所需的光学、机械和热性能，主晶体和掺杂物都需要经过精心选择。增益介质中的原子或分子有适合于产生受激辐射的能级结构，能在外部泵浦情况下

把电子抽运到较高能级轨道，且存在一定时间，再通过受激辐射后，放出光子。

2. 泵浦能量 (pumping energy): 用来将较低能级的电子抽运到较高能级，使上下能级之间产生粒子数反转，即高能级粒子比低能级多，又称居量反转 (population inversion)。在研究如何制造激光时，通常需要一个次级光源。在早期的技术中，这可能是一种弧灯。在如今的激光器中，通常采用的二极管组合。增益介质可以通过两种方式之一吸收外部泵浦能量：侧向泵浦或端部泵浦。这种泵浦/吸收过程启动激光的整体放大循环。
3. 腔体反射 (cavity reflections): 一般情况下，为了形成足够场强的激光种子，需要在产生受激发射的部件环境添加反射器，以捕获、筛选受激光子并将它们导回增益介质以进一步形成正反馈产生额外的光子。
4. 输出耦合器 (output coupler): 经过反复腔体反射之后，激光信号增强，之后便需要输出耦合器用来取出放大的激光信号或后续进一步处理。输出耦合器允许一定比例的光反射回增益介质，同时一定比例的光从光学腔体中抽取出来。

**注** 以上腔体反射与输出耦合器有时合称激光谐振腔 (laser resonator)。

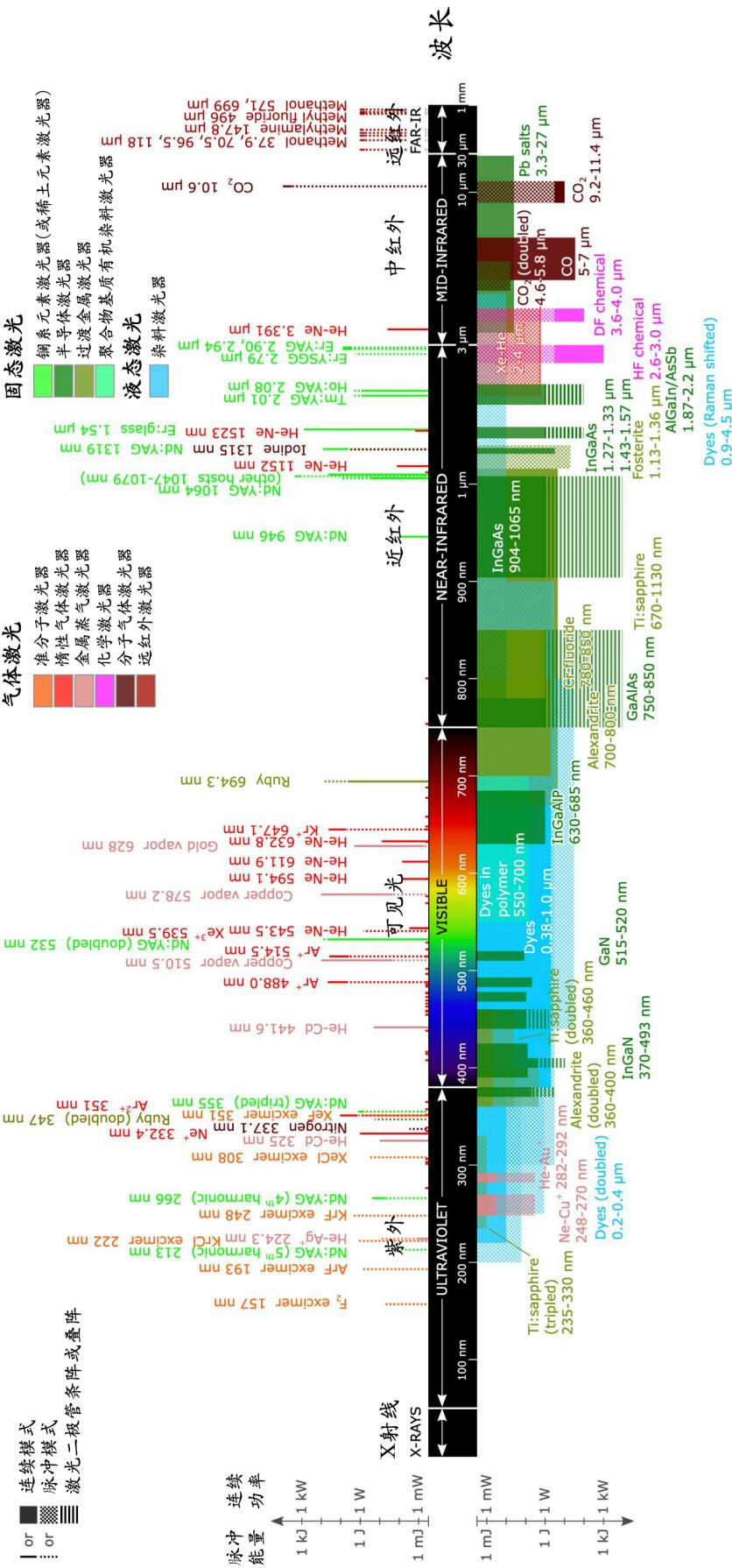
“例如，可以使用掺杂了相关材料以提供给定波长的晶体。钕 (Neodymium, 化学符号 Nd) 被用来替换主晶体中的一些钇 (Yttrium, 化学符号 Y) 离子，从而提供 1064 nm 的红外光，称 Nd:YAG (neodymium-doped yttrium aluminum garnet; Nd:Y<sub>3</sub>Al<sub>5</sub>O<sub>12</sub>) 激光器。”

按增益介质分类，则激光器大致有以下几种：

- 气体激光器：
  - CO<sub>2</sub> 激光器：使用二氧化碳气体作为增益介质，通常用于切割、焊接和标记等工业应用。
  - 氩离子激光器：使用氩气离子作为增益介质，主要用于医疗和科研领域。
  - He-Ne 激光器：使用氦和氖气体混合物，广泛应用于测量、光学实验和激光指示器等领域。
- 固体激光器：
  - Nd:YAG 激光器：使用钕 (Nd) 或钇 (Yb) 掺杂的钇铝石榴石 (YAG) 晶体作为增益介质，广泛用于医疗、军事和材料加工领域。此类激光器的发射波长约为 1.06 μm，可输出高脉冲、但平均功率较低、峰值功率可以到约平均功率的 15 倍，主要是脉冲激光器，无法做到持续出光。
  - Nd:glass 激光器：使用钕掺杂的玻璃作为增益介质，常用于科研和军事应用。
- 半导体激光器：增益介质为半导体 PN 结，半导体激光器的波长主要是在 976 nm。
  - 激光二极管 (laser diode)：利用半导体材料如砷化镓 (GaAs) 等，广泛应用于通信、激光打印和激光雷达等领域。
  - 固体激光器：利用半导体材料如 Nd:YAG 等作为增益介质，常用于医疗和材料加工。

- 光纤激光器：将激光产生的过程集成到光纤中，常用于通信、材料加工和医疗领域。
- 染料激光器：使用染料溶液作为增益介质，通常用于研究和科研实验室中。

图 10.2 给出了目前商业可得的各种各样的激光与其覆盖频谱。由图可看到，目前既有激光光源已经能够覆盖电磁频谱的大半范围。但是，在频谱的短波长段，特别是短于 100 nm 以下，目前仍没有合适的、商业可得的激光源。这个短波长范围对我们重要吗？想想物质世界中，原子原子间、原子电子间的距离范围，会发现就在这些短距离尺度内。在这些空间尺度范围内，如果能够拥有特性良好的电磁辐射，即激光，其重要性不言可喻！



**图例修改自 wikipedia 与 Marvin J. Weber, Handbook of laser wavelengths, CRC Press (1999)。**

想想是什么根本原因给出了低于 100 nm 以下没有 (基于能级跃迁产生的) 激光这个限制? 目前可得的、基于量子力学原理的激光光源很大程度上受限于原子间能级所表征的能量差。这些能量差是离散的, 并且大致是固定不变的, 表征了这些原子的固有特性。就是说, 这些不同的、离散的能量差对应的不同的、离散的频率体现在了图 10.2, 而基于量子力学原理的、低于 100 nm、基于天然物质原子产生的激光是不存在的。

有了上述的天然限制后, 如何人为地产生短波长激光<sup>1</sup>就成了人们追求的目标。人为产生短波长激光的方式远不止一种, 利用加速器产生相对论电子, 结合相对论多普勒效应, 从而产生短波长激光的方式是其中一种。1970 年代, 美国物理学家 J.M.J. Madey 发明并首先实现<sup>2</sup>了一种基于加速器产生自由电子的产生激光的机制, 称自由电子激光 (free electron laser, FEL)。这是一个空前的发明, 从此人们能够拥有 100 nm 以下、且频率可调的“激光”<sup>3</sup>!

在结束这一节正式进入自由电子激光理论之前, 回忆一下, 第 4 章、第 5 章介绍的同步辐射与波荡器辐射仅考虑辐射场特性, 当时假设电子轨迹是预先给定 (prescribed) 的, 产生的辐射场不会反过来影响电子。第 8 章则考虑辐射场效应对电子束的影响。这里的分析再推进一阶, 考虑受辐射场影响后的电子束如何与先前已发出的辐射场“共振”而形成正向反馈, 从而形成集体效应, 产生更强的电磁辐射。



**笔记** 激光是一种行为良好的电磁波。但是, 天下没有白吃的午餐, 要产生激光, 总要付出代价: 产生辐射场的电子束的特性将变差。

### 10.1.1 激光器的几个性能指标

衡量一个激光器的性能表现, 通常会用几个常见指标。这里总结几个传统激光器的性能指标如下:

- 输出功率 (output power) ⇒ 单位时间内激光场的能量, 以“瓦 (watt)”为单位, 再细分平均功率 (average power) 或峰值功率 (peak power)。
- 脉冲能量 (pulse energy) ⇒ 一般指单发脉冲能量, 以“焦耳 (joule)”为单位。低脉冲能量激光器一般能量范围在  $\mu\text{J}$  至  $\text{mJ}$  之间; 高脉冲能量激光器一般能量范围则在  $\text{mJ}$  至  $\text{J}$  之间或更高。
- 中心波长 (central frequency) ⇒ 辐射激光频谱中具有最高强度的波长, 通常以纳米 (nm) 为单位。激光的中心波长决定了其单个光子的中心能量, 又称光子能量 (photon

<sup>1</sup>注意, 这里的描述是, 如何产生短波长激光, 而不是如何产生短波长光。如果只是产生光, 而不是激光, 那么利用同步辐射就能做到了。带电粒子经过弯转产生的同步辐射是一种宽带的辐射, 覆盖了大范围的电磁频谱。只要电子能量足够, 产生包含 100 nm 以下波长成分的光并非难事。

<sup>2</sup>这里的“发明”在多数—但或许不是所有—文献这么写。约在 1979 年的十年之前, K.W. Robinson 已经给出了关于电子扭摆运动产生自由电子激光的可行性分析。遗憾的是, Robinson 本人在当时并没有及时发表他的结果。这是后人在 Robinson 过世之后整理其文献才意外发现的。

<sup>3</sup>有些人认为自由电子激光不是严格意义上的激光, 因为其辐射场的纵向相干性还不够好。这里我们暂不纠结于对“激光”名称严格定义的问题, 仅当自由电子激光 (FEL) 为一专有名词。

energy)。

- 光斑尺寸 (spot size) ⇒ 指的是激光束在某个特定位置上的横截面直径，可能是圆或椭圆斑点的直径。光斑直径的大小取决于激光束的散角、聚焦系统的焦距、目标表面与激光束的距离等。
- 光斑角散 (angular divergence) ⇒ 指的是激光束从光源或光学系统输出后，在传输过程中，光斑直径逐渐增大的角度，通常以 mrad ( $10^{-3}$  rad) 为单位。
- 脉冲宽度 (pulse duration) ⇒ 指激光脉冲的 (纵向) 时间长度，通常用纳秒 (ns,  $10^{-9}$  s)、皮秒 (ps,  $10^{-12}$  s)、飞秒 (fs,  $10^{-15}$  s) 和阿秒 (as,  $10^{-18}$  s) 等单位来描述。
- 重复频率 (repetition rate) ⇒ 指单位时间内激光器产生脉冲的次数 (或个数)，以“赫兹 (Hz)”为单位。低重频激光器一般重复频率范围在几 Hz 至 1 kHz 之间；高重频激光器一般重复频率范围则在 kHz 至 MHz 之间或更高。
- 线宽 (linewidth) ⇒ 又称 laser linewidth 或 spectral linewidth。量化方式为激光功率谱 (power spectrum)<sup>4</sup> 的半高半宽 (half width at half maximum, HWHM) 或半高全宽 (full width at half maximum, FWHM)。激光的线宽与相干性有密切关系。线宽越窄，激光的单色性越好。
- 自由光谱程 (free spectral range, FSR) ⇒ 在光学谐振腔中，只有满足相位匹配条件的辐射场才能存在于谐振腔形成稳定的驻波。满足条件的辐射场称为腔的模式 (mode) 或特征解。自由光谱范围指的是不同模式间的频率间隔。一般写成

$$\Delta\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{n(\lambda)L} \quad \text{或} \quad \Delta\lambda_{\text{FSR}} = \frac{\lambda^2}{n(\lambda)L} \quad (10.2)$$

其中， $L$  为光绕行谐振腔一周的距离 (round-trip length)， $n$  为谐振腔的折射率，如果填充其它气体，则可能为波长或频率的函数。

- 锐度 (finesse) ⇒ 定义为上述 FSR 除以光学谐振腔的 FWHM 线宽，即

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{\text{FSR}}}{\delta\nu} = \frac{\Delta\lambda_{\text{FSR}}}{\delta\lambda} \quad (10.3)$$

- 光束质量 (beam quality) ⇒ 表征光束的实际形状与理想高斯光束形状的差异程度，决定了光束与理想高斯束的匹配程度。通常以  $M^2$  衡量，计算通过测量激光束在不同位置处的光斑横向尺寸 (直径)。一般来说，激光器的  $M^2$  值越接近 1，表示其光束质量越高，激光束的发散性越小且聚焦性越好。
- 稳定性 (stability) ⇒ 可再细分指向稳定性、空间稳定性 (机械、光学元件、环境、温度、气流等)、时间稳定性、能量稳定性等。
- 偏振比 ⇒ 指的是激光束中某一特定偏振方向上的电场强度与垂直于该方向上的电场强度的比值。当偏振比在一方向上大于 1 时，表示电场在该方向上的强度大于垂直于其方向上的强度，即光束处于偏振状态。
- 亮度 (brightness) ⇒ 为单位面积内的光子通量，再细分峰值亮度与平均亮度。参考 §10.2。
- 相干性 (coherence) ⇒ 为激光场横向不同位置与纵向不同时间的相位的关联性，再细分横向相干性与纵向相干性。参考 §10.2。

<sup>4</sup>留意，“功率”与“场”有模平方关系。

## 10.2 自由电子辐射：不同波段可调谐辐射源

第5章介绍过，电子经过波荡器时，由建设性干涉条件，产生的电磁辐射波长满足共振关系。或者，换句话说，那些不满足共振关系的辐射波长成分因为不满足建设性干涉条件，无法很好地形成。波荡器辐射共振条件的结果节录如下：

### 定理 10.2. 波荡器辐射共振条件

电子经过波荡器时，辐射波长  $\lambda_\ell$ 、电子束参数  $\gamma$  与波荡器参数  $K$  满足以下条件时，则称电子满足共振条件

$$\lambda_\ell = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \quad (10.4)$$

其中，

- $\lambda_\ell$  为辐射场或外加激光场波长，
- $\lambda_u$  为波荡器周期，
- $\gamma$  为洛伦兹因子，
- $K$  为波荡器参数，有  $K = \frac{eB_0}{m_e ck_u} = 0.934\lambda_u[\text{cm}]B_0[\text{T}]$ ， $B_0$  为峰值磁场强度， $k_u = 2\pi/\lambda_u$ 。

此时，电子在不同波荡器周期间产生的辐射场将建设性干涉。或者，当外部激光场满足此共振关系时，电子与激光场能够有效交换能量。

**证明** 可由建设性干涉证明，也可以利用能量转移单向条件证明。

**注** 有些文献或教科书将波荡器参数写成  $a_u$ ，并定义成  $a_u = \frac{K}{\sqrt{2}}$ ，于是，共振条件写成

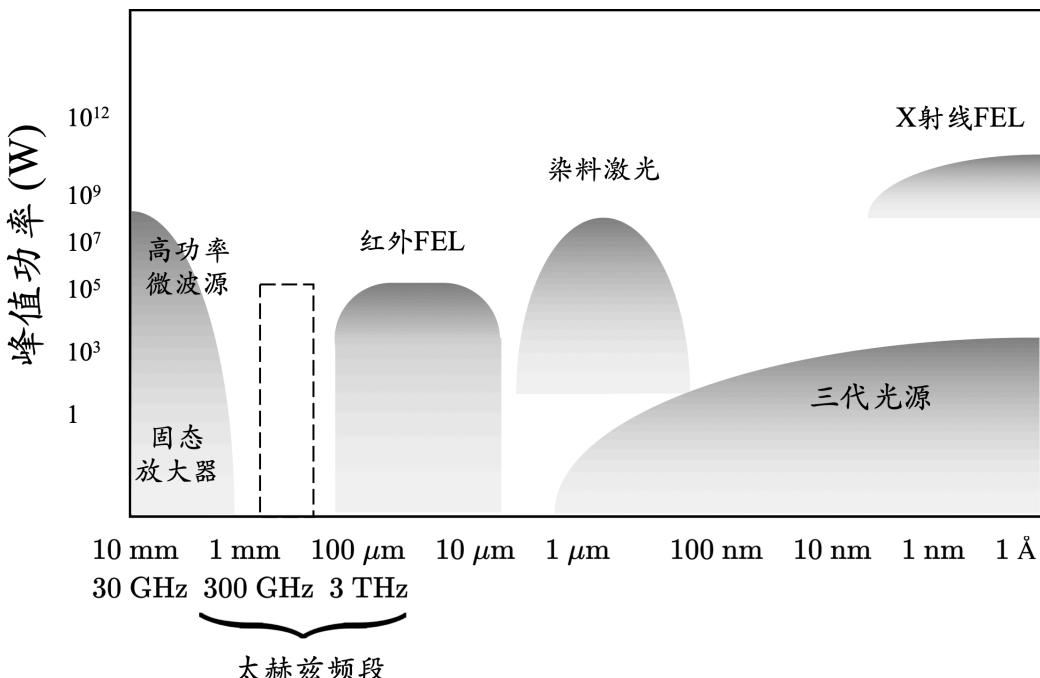
$$\lambda_\ell = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + a_u^2\right) \quad (10.5)$$

**注** 有时候波荡器辐射共振条件可理解成电子经过波荡器时，在给定目标辐射波长  $\lambda_\ell$  与波荡器参数  $K$  前提下，满足沿轴的电子共振能量为

$$\gamma_r = \sqrt{\frac{\lambda_u}{2\lambda_\ell} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)} \quad (10.6)$$

由上定理可知，对同一波荡器参数  $K, \lambda_u$ ，不同的电子参考能量  $\gamma$ ，产生的辐射特征频率（或共振频率） $\omega_\ell$  或特征波长（或共振波长） $\lambda_\ell$  就不同。于是，通过改变电子能量，就能改变辐射主频率，即形成频率可调的辐射源。相对于利用量子力学效应的束缚电子产生的束缚辐射，由于能级固定，其频率几乎不可调，这里基于经典力学的自由电子，由于电子能量由加速器射频腔（幅值或相位）决定，参考能量洛伦兹因子  $\gamma$  本身没有天然限制，产生的“频率可调”的光源其实是一大优势，是束缚电子无法企及的优势。因此，自由电子辐射是一种能够产生跨越不同波段且频率可调谐的电磁辐射源。

目前真空高功率微波器件、传统激光与基于粒子加速器的自由电子激光装置可产生的高功率电磁辐射源在电磁频谱中的分布情况大致如图 10.3 总结<sup>5</sup>。



**图 10.3：**“自由”电子即电子能量可调  $\Leftrightarrow$  辐射频率可调。可以看到，除染料激光器 (dye lasers) 外，基于电子加速器产生的光源，由于其频率可调的特性，覆盖的频率范围可从微波源延伸至 X 射线激光。还可以看到，短于 100 nm 的辐射源主要由电子同步加速器与自由电子激光产生。

### 定义 10.2. 亮度 (brightness)

光源的亮度定义为单位面积内的光子通量，有

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\equiv \frac{\text{辐射谱通量 (spectral flux)}}{\text{辐射场横向相空间面积 (transverse phase space area)}} \\ &= \frac{dN_{\text{ph}}}{\Delta A \Delta \Omega d\omega dt} \end{aligned} \quad (10.7)$$

其中，

- $\Delta A \propto \Sigma_x \Sigma_{x'} \Sigma_y \Sigma_{y'}$  为光子分布的横向相空间面积
- $\Omega$  为自源至观察位置的立体角
- $\omega$  为辐射光的频率
- $t$  为时间

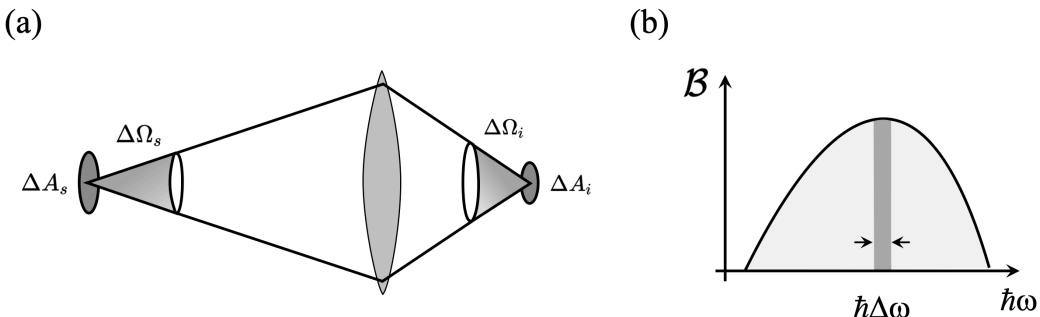
“亮度”是设计同步辐射或 FEL 一个很有用的量化光束品质的参数。参考图 10.4。

<sup>5</sup>从图中可以看到，有一个电磁频段缺少光源，称太赫兹 (THz) 频段。太赫兹辐射频率范围可定义为 300 GHz 至 3 THz。太赫兹辐射频段的低频区和毫米波带 (30-300 GHz) 的高频区有时称 sub-THz。太赫兹频段位于微波和红外区域之间，这两个区域分别由较成熟的微波电子学 (microwave electronics) 和光子学 (photonics) 所主导。几乎整个太赫兹频段在大气中都会受到强烈衰减，仅有少数窄带称为大气窗口 (atmospheric window)。此一特性使得太赫兹辐射在工业应用不占优势。由于太赫兹辐射频段处于这不利的位置，其物理特性无法完全通过微波电子学或光子学原理来理解，使得太赫兹器件的开发至今仍为热点问题。这个未被充分探索的太赫兹区域也被称为 THz gap。

许多情况下，使用单色仪选择局部频率的光谱，以分母  $d\omega$  或  $\Delta\omega$  表征。

**注** 此定义为峰值亮度 (peak brightness)。长时间内、多脉冲的情况可定义平均亮度 (average brightness)。

**注** 谱通量 (spectral flux) 的量纲为单位时间、单位中心频率、单位立体角的光子数。有时候，单位中心频率会采用单位中心 相对 频率，即  $d\omega \rightarrow d\omega/\omega_0$ 。



**图 10.4:** (a) 为一个效率为 100% 的理想光学系统，可传输所有收集到的光子，使得  $\Delta A_s \Delta \Omega_s = \Delta A_i \Delta \Omega_i$ ；(b) 亮度与光子能量关系示意图，其中，阴影区域代表某个典型实验中可能会选取的那些光子。



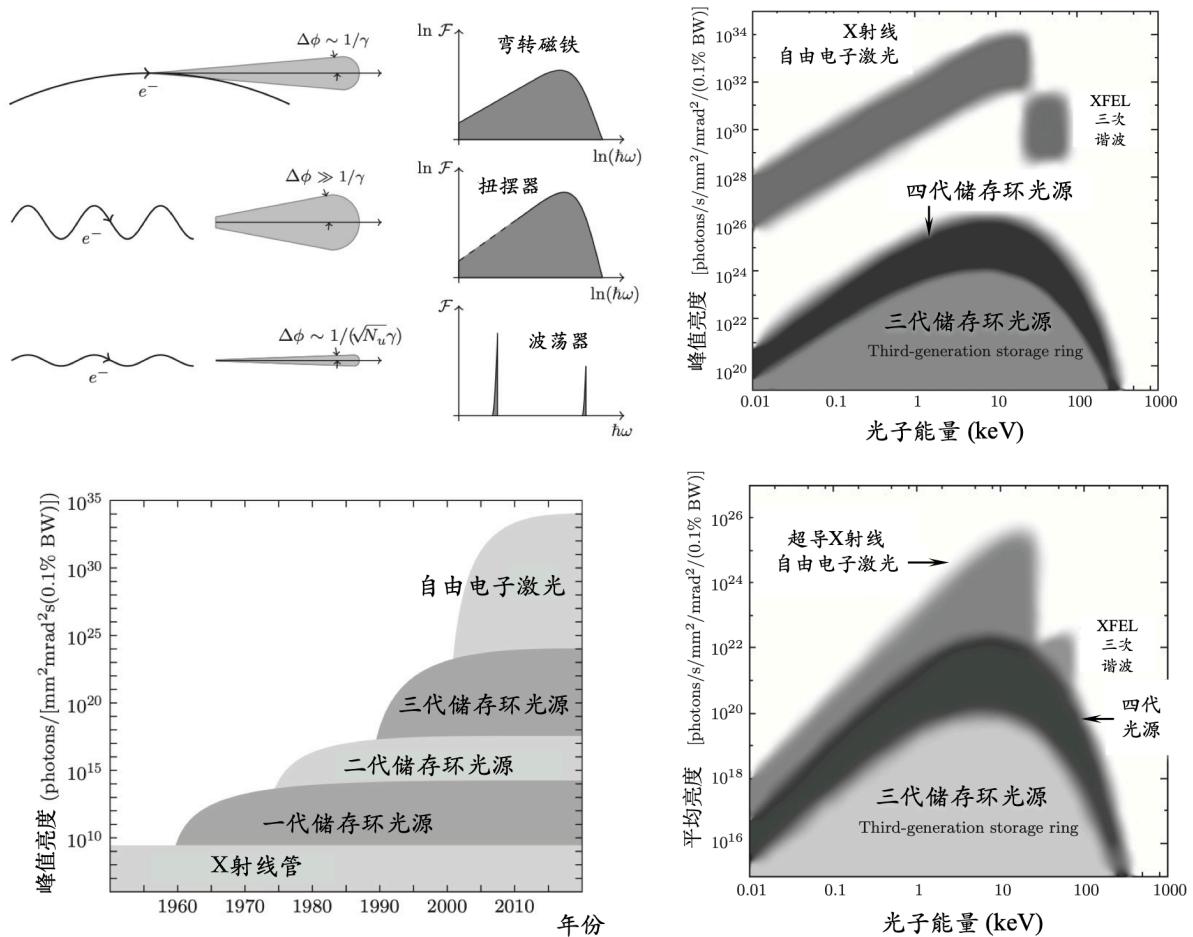
**笔记** 一般为了量化同步辐射加速器或自由电子激光装置的性能，常以“亮度”为指标参数，如图 10.5 所示。此时，亮度为一参数，视为常数。此外，在一些理论分析的文献中，会定义亮度“函数”(brightness function)  $B(\mathbf{r}, \phi; s)$ ，分析其随  $s$  的演化。细节此处不论，可参考 Kim, Huang, and Lindberg 一书 §1.2.3 讨论。

**注** 图 10.5 中左上的弯转磁铁与扭摆器的辐射谱通量 (或亮度) 为双对数图，波荡器的辐射谱通量 (或亮度) 则为线性图。如果将三者叠在同一张图，则看起来应该像图 10.6。

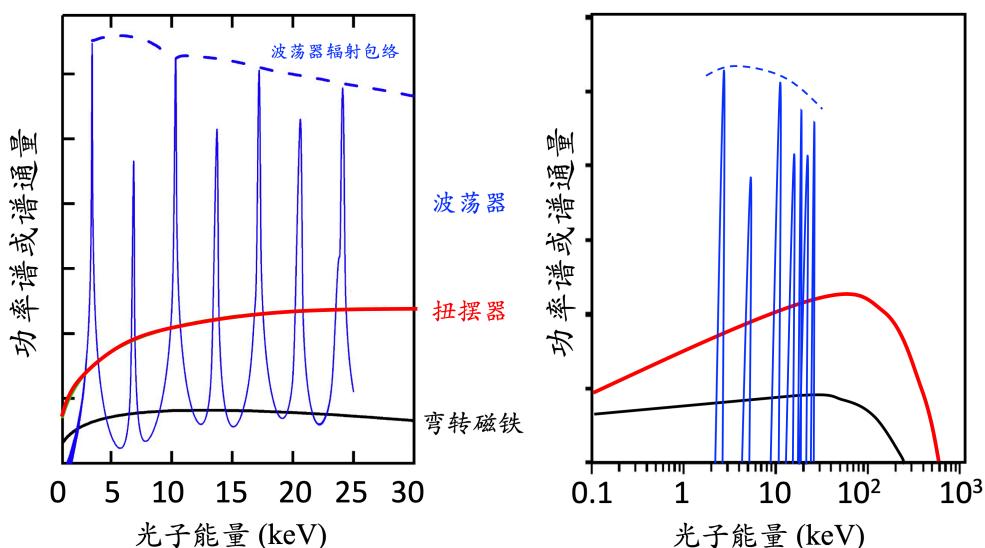
源产生电磁信号，如果源不止一个或源不止在时空中的一处产生辐射场，则观察到的电磁信号经过线性叠加后，除了用亮度来量化之外，还可利用相干性表征观察到的叠加后的电磁信号的特性。上面介绍了亮度，以下介绍相干性。对接收到的电磁信号，我们可能关心其振幅、相位或其它衍生的物理量。叠加后的电磁信号，其中各个频谱成分的频率与传输特性稍异，其叠加后的合成电场可能由于相位稍异，在传输一段距离或一段时间后，由于每个不同源之间的差异，最终导致每个不同源接近于统计学上的独立演化而丧失可预测性。性质越好的电磁信号能够在传输更久、更远之后仍然保持其振幅与相位的可预测性。衡量电磁信号的纵向传输特性称纵向相干性，衡量电磁信号的横向传输特性称横向相干性。



**笔记** 相干性是波所独有的特性，是对两个不同空间处或不同时间点的相位相关程度的量



**图 10.5:** (左上) 弯转磁铁、扭摆器和波荡器的辐射角分布和频谱特性示意图; (左下) 各种光源射线峰值亮度随发展时间增长示意图; (右上) 第三代和第四代光源的峰值亮度, 基于 MBA 结构的储存环有望将传统的第三代光源的亮度提高约 2 个量级, FEL 则可将亮度再提高 8 个量级; (右下) 第三代和第四代光源的平均亮度. 平均亮度与重复频率相关, 由常温射频直线加速器驱动的 FEL 的重复频率约为 100 Hz。在这里, 我们假设 FEL 平均亮度的上限由重复频率接近 1 MHz 的超导直线加速器给出。图例修改自 Kim, Huang, and Lindberg 一书。



**图 10.6:** 比较弯转磁铁、扭摆器、波荡器辐射谱通量的示意图。左图为线性图 (linear plot), 右图为双对数图 (log-log plot)。此讲义将 undulator 称波荡器, 将 wiggler 称扭摆器。有时候 undulator 又称聚频磁铁, wiggler 又称增频磁铁。通过此图体现两者在辐射频谱上的差异。

化。

以下定义纵向相干与横向相干。

### 定义 10.3. 纵向相干 (longitudinal coherence)

纵向相干时间定义为

$$\tau_{\text{coh}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau |\mathcal{C}(\tau)|^2 \quad (10.8)$$

其中， $\mathcal{C}(\tau)$  为无量纲归一化一阶自相关函数 (first-order correlation function) 或自相关函数 (autocorrelation function)

$$\mathcal{C}(\tau) \equiv \frac{\left\langle \epsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} dt E(t) E^*(t + \tau) \right\rangle}{\left\langle \epsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} dt |E(t)|^2 \right\rangle} = \frac{\frac{\epsilon_0 c}{2\pi} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |E(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} \right\rangle}{\frac{\epsilon_0 c}{2\pi} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |E(\omega)|^2 \right\rangle} \quad (10.9)$$

其中，尖括弧  $\langle \dots \rangle$  表示对脉冲串整体平均。对 rms 宽  $\sigma_{\omega}$  的高斯分布辐射谱，有  $\tau_{\text{coh}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_{\omega}}$ 。

对相干时间  $\tau_{\text{coh}}$  的辐射脉冲信号，在脉冲时间长度  $T$  的辐射场中，纵向模数目约有  $M_L$  个，其中，

$$M_L \approx \frac{T}{\tau_{\text{coh}}} \quad (10.10)$$

**注** 纵向相干时间越长，表示辐射场的纵向品质越好。

**注** 实验上，测纵向相干时间的一种方法为利用 Michelson 干涉仪，通过先将辐射脉冲以分束器 (beam splitter) 分离，改变两束辐射脉冲的光程差，再相聚测干涉条纹而推知。

**注** 上面的一阶相关函数  $\mathcal{C}(\tau)$  又称为振幅相关函数 (amplitude autocorrelation function) 或单光子相关函数 (one-photon autocorrelation function)，与电场函数乘积。许多实验量测的是辐射场强度，为电场平方函数的乘积，称二阶自相关函数  $\mathcal{C}_2(\tau)$  (second-order autocorrelation function) 或称强度相关函数 (intensity autocorrelation function) 或双光子相关函数 (two-photon autocorrelation function)

$$\mathcal{C}_2(\tau) \equiv \frac{\left\langle \epsilon_0^2 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt E^2(t) E^{*2}(t + \tau) \right\rangle}{\left\langle \epsilon_0^2 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt |E(t)|^4 \right\rangle} \quad (10.11)$$

一般二阶相关函数在线性辐射脉冲压缩、或非线性光学谐波产生分析出现，与辐射脉冲能量相关，细节此处不论。一阶相关函数取值可能为正可能为负，但二阶相关函数恒正。 □

**练习 10.1** 在时域上，考虑如下形式的电场

$$E_0(t) = e_0 \exp \left( -\frac{t^2}{4\sigma_{\tau}^2} - i\omega_1 t \right)$$

其中， $\sigma_{\tau}$  为  $|E_0(t)|^2$  的 rms 时间宽度。根据定义，证明其纵向相干时间为  $\tau_c = 2\sqrt{\pi}\sigma_{\tau}$ 。

再利用傅里叶变换定义，证明

$$E_\omega^0 = \int dt e^{i\omega t} E_0(t) = \frac{e_0 \sqrt{\pi}}{\sigma_\omega} \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_1)^2}{4\sigma_\omega^2} \right]$$

其中， $\sigma_\omega = 1/2\sigma_\tau$  为  $|E_\omega^0|^2$  的 rms 频谱宽度。证明满足  $c\sigma_\tau \cdot \frac{\sigma_\omega}{\omega_1} = \frac{\lambda_1}{4\pi}$ 。 ■



**笔记** 上面练习中，由于仅有一个电场函数，因此对脉冲串整体平均的尖括弧  $\langle \dots \rangle$  没有作用。如果考虑多个电场函数形成的脉冲集合，如

$$E(t) = \sum_{j=1}^{N_e} E_0(t - t_j) = e_0 \sum_{j=1}^{N_e} \exp \left[ -\frac{(t - t_j)^2}{4\sigma_\tau^2} - i\omega_1(t - t_j) \right] \quad (10.12)$$

则需要对  $N_e$  个电场函数计算后取平均。

#### 定义 10.4. 横向相干 (transverse coherence)

对两个不同位置源产生的电场  $E(\mathbf{r}_{1,2}, t)$ ，横向相干程度 (degree of transverse coherence) 定义为

$$\zeta \equiv \frac{\iint |\Gamma_{12}(0)|^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{\left( \int \Gamma_{11}(0) d\mathbf{r}_1 \right)^2} \quad (10.13)$$

其中，互相干函数 (mutual coherence function, MCF) 定义为

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E^*(\mathbf{r}_1, t) E(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle_T \quad (10.14)$$

下标  $T$  表示一段时间  $T$  内的平均。

**注** 横向相干程度越接近 1，则表示辐射场的横向品质越好。 □

图 10.7 为描述纵向相干性与横向相干性的“相干长度”(coherence length) 的示意图。纵向相干长度为纵向相干时间  $\times$  光速。对理想光源而言，其纵向与横向相干长度  $\rightarrow \infty$ 。但是，实际的光源由于不存在完美的单频，由上面介绍的定义，意味着当  $\tau > 0$  后，一阶自相关函数将不再保持 1， $\mathcal{C}(\tau > 0) < 1$  且随  $\tau$  增加而衰减，纵向相干时间 (或长度) 不再  $\rightarrow \infty$ 。实际的光源由于源的空间有限范围分布，横向相干程度  $\zeta$  将  $< 1$ ，横向相干长度不再  $\rightarrow \infty$ 。

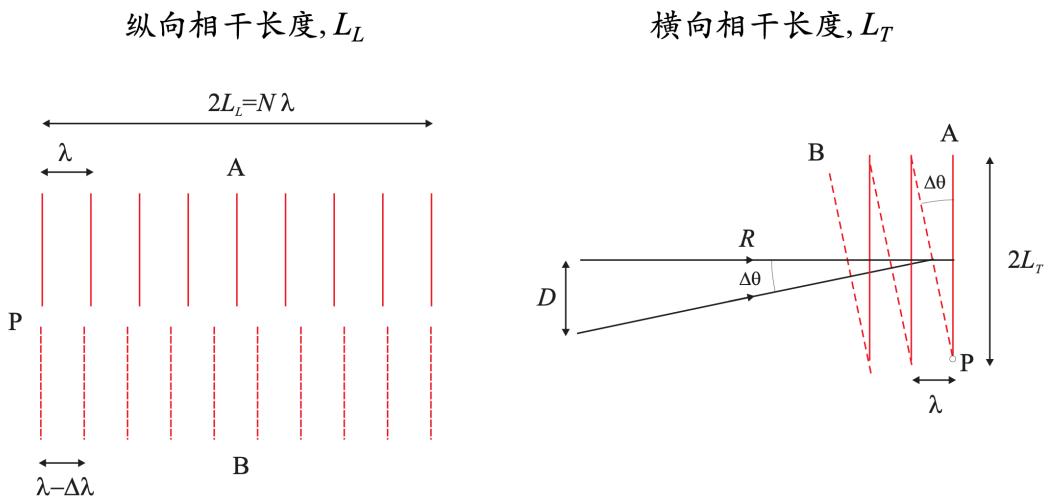
**练习 10.2** 利用  $2L_L = N\lambda = (N+1)(\lambda - \Delta\lambda)$ ，考虑  $|\Delta\lambda| \ll \lambda$ ，证明纵向相干长度可以化简为

$$L_L = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$



**练习 10.3** 利用  $2L_T \Delta\theta = \lambda$ ，考虑  $\Delta\theta = D/R$ ，证明横向相干长度可以化简为

$$L_T = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(D/R)} = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{R}{D} \right)$$



**图 10.7：**描述纵向相干性与横向相干性的“相干长度”。纵向相干长度  $L_L$  对应两频率稍异的辐射场在传输一段距离后相位相差  $\pi$  的长度；横向相干长度  $L_T$  对应两个（横向）相距  $D$  的源产生的辐射场传输一段距离后，在远处相位能维持关联的横向空间范围。图例修改自 Jens Als-Nielsen and Des McMorrow, Elements of Modern X-ray Physics, 2nd Ed., John Wiley & Sons (2011)。

留意， $L_L$  可能受单色仪影响。 ■

✍ **练习 10.4** 对三代同步辐射光源，假设光源尺寸为  $\sigma_y \approx 100 \mu\text{m}$ ，实验站在光束线下游 20 m 处，估算中心波长 1 Å 辐射场横向相干长度  $L_T$ 。对  $\Delta\lambda/\lambda \approx 10^{-5}$  的单色仪，估算中心波长 1 Å 辐射场纵向相干长度  $L_L$ 。 ■

解

$$L_T \approx 10 \mu\text{m}, \quad L_L \approx 5 \mu\text{m}$$

日常照明使用的发光二极管 (light emitting diode, LED)，或半导体照明，不具备空间与时间相干性，也就是说，这种光容易在空间散开，也传不远。基于量子力学原理的传统激光则具有良好的空间与时间相干性，这类激光既不容易在空间散开，传播距离也可以很远，有效纵向相干长度可能是 cm 或 m 或 km 量级。后面会介绍，对单次经过、基于自放大自发辐射机制的自由电子激光，具备良好的横向相干性 (full transverse coherence)，但是纵向时间相干性不好 (poor longitudinal coherence)。也就是说，基于这种机制产生的自由电子激光尽管不容易在空间散开，但由于纵向传播距离非常受限，比如，有效纵向相干长度<sup>6</sup>  $\sim 1 \mu\text{m}$ ，不利于开展部分要求良好纵向相干性的实验。

✍ **练习 10.5** 查找 A. Singer et al., Optics Express **20**, 17480-17495 (2012)，给出 FLASH 装置的测量结果。 ■

解 参考图 10.8。

<sup>6</sup>有效纵向相干长度  $\approx$  波荡器总周期数( $N_u$ )  $\times$  辐射共振波长( $\lambda_\ell$ )  $\sim 1000 \times 10^{-9} \text{ m}$

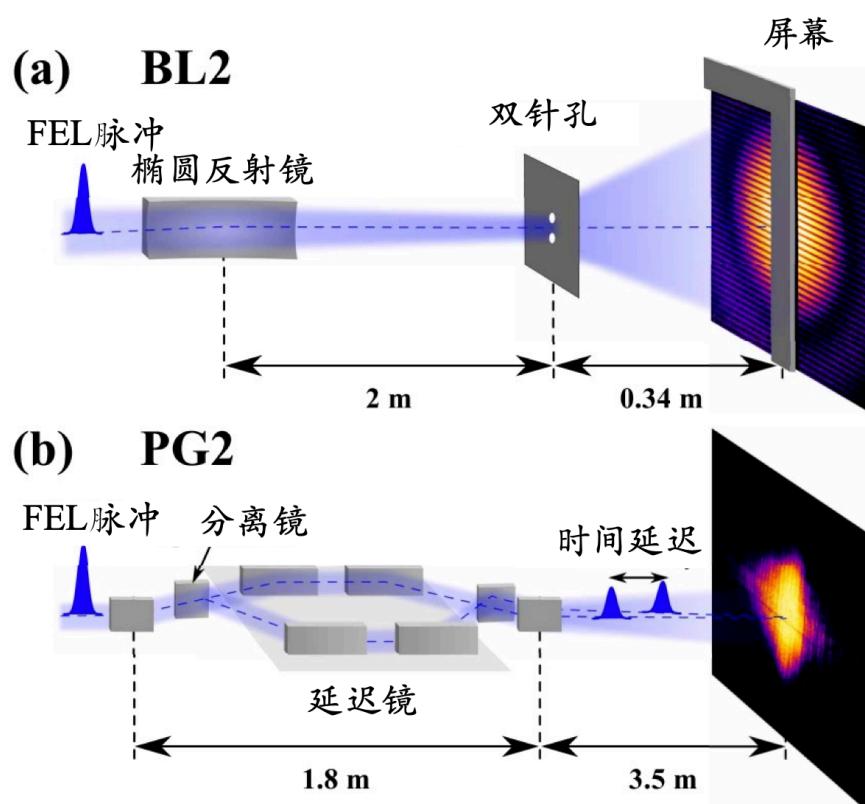


图 10.8: 此为德国汉堡自由电子激光 FLASH 装置测量: (a) 横向相干性测量与 (b) 纵向相干时间测量的示意图。图例修改自 A. Singer et al., Optics Express **20**, 17480-17495 (2012)。



**笔记** 有一种特殊的成像方式，称鬼成像 (ghost imaging)，或称双光子成像 (two-photon imaging)，是一种利用光场的二阶或高阶关联函数获得物体信息的成像方法。基本原理为通过结合两探测器的信息以生成样品图像的技术：其中一探测器为传统的多像素探测器，不查看物体，另一探测器为单像素探测器，查看物体。目前来说，鬼成像有两种实现（或诠释）方式：经典力学方法与量子力学方法。可以通过光子（电磁辐射），也可以通过电子。量子方法使用一对纠缠光子的源，每对光子在两个探测器之间共享，而经典方法使用一对相关的相干光束，而不利用纠缠。这两种方法都可以在单一理论框架内理解。对成像感兴趣的读者，可参考 Yanhua Shih, The physics of ghost imaging, arXiv <https://arxiv.org/abs/0805.1166> (经典力学方法)、Jeffrey H. Shapiro and Robert W. Boyd, The physics of ghost imaging, Quantum Inf Process 11, 949-993 (2012). <https://link.springer.com/article/10.1007/s11128-011-0356-5> (量子力学方法)、Miles J. Padgett and Robert W. Boyd, An introduction to ghost imaging: quantum and classical, Phil. Trans. R. Soc. A 375 (2016). <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2016.0233>。



**笔记** 这里区分一下相关 (correlation) 函数与卷积 (convolution) 定义的区别。对函数  $f(t), g(t)$ ，卷积按定义为

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (10.15)$$

暂时忽略归一化因子，一阶互相关 (cross-correlation) 函数定义为

$$\mathcal{C}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau - t)d\tau \quad (10.16)$$

一阶自相关 (autocorrelation) 函数定义为

$$\mathcal{C}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(\tau - t)d\tau \quad (10.17)$$

以上三个定义的示意图可参考图 10.9。

与卷积有关的定理有卷积定理 (convolution theorem)，写为

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \quad (10.18)$$

其中， $\mathcal{F}[f]$  表示  $f(t)$  的傅里叶变换， $\mathcal{F}[g]$  表示  $g(t)$  的傅里叶变换。与相关函数有关的定理有 Parseval 定理，参考 §0.2。

**练习 10.6** 利用傅里叶变换定义，将互相关函数写成频率积分表示式。 ■  
解

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - t)g(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega)\tilde{g}^*(\omega)e^{i\omega t} \quad (10.19)$$

注意此结果与卷积定理的差别。 ■

**注** 第一册 §3.2 介绍过带通滤波器，顾名思义，为选择频率区间  $\Delta\omega$  内的谱通量 (spectral fluence)  $\Delta\mathcal{F}$ ，即  $d\mathcal{F}/d\omega$ 。上面介绍的自相关函数，其概念其实可与带通滤波器“等价”。换

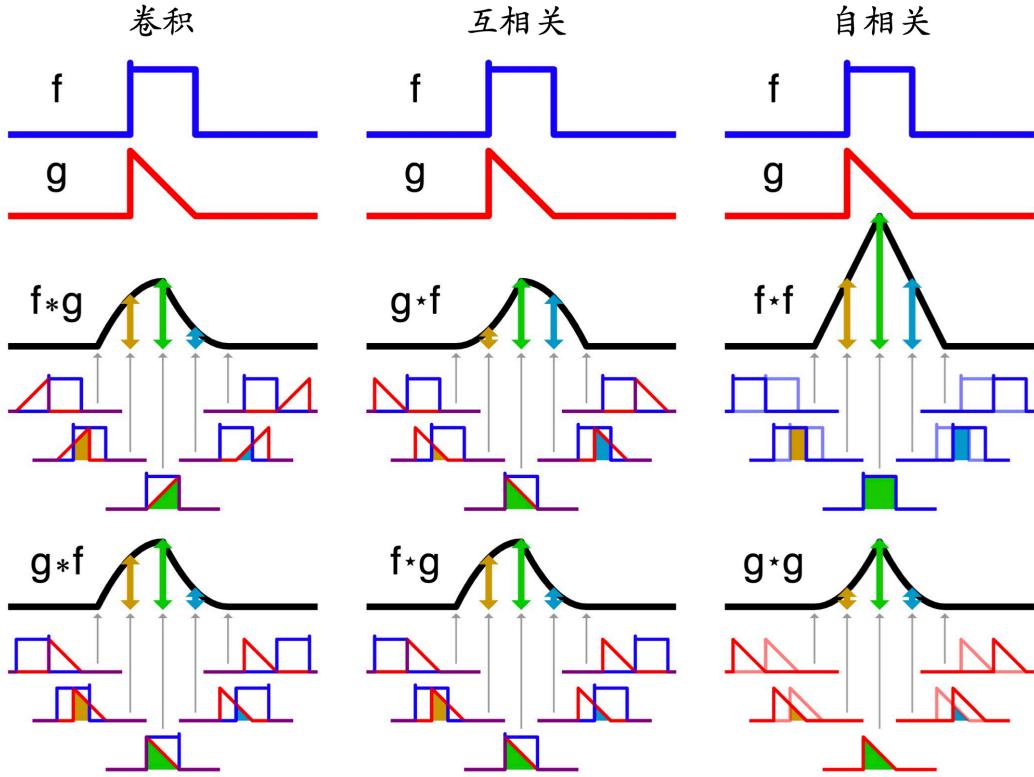


图 10.9: 卷积、互相关、自相关定义示意图。图例修改自 wikipedia。

一句话说，自相关函数可视为一种带通滤波器。两者可以相互关联，称 Wiener-Khinchin 定理 (Wiener-Khinchin theorem)。

### 定理 10.3. Wiener-Khinchin 定理

令归一化系数  $\mathcal{N}$  为

$$\mathcal{N} = \left\langle \epsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} dt |E(t)|^2 \right\rangle = \left\langle \frac{\epsilon_0 c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{E}(\omega)|^2 \right\rangle \quad (10.20)$$

Wiener-Khinchin 定理关联 §3.2 介绍的谱通量 (spectral fluence)  $\mathcal{F}(\omega)$

$$\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) dt = \epsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = \frac{\epsilon_0 c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\omega)|^2 d\omega \quad (10.21)$$

与上述定义的一阶自相关函数  $C(t)$

$$C(\tau) \equiv \frac{\left\langle \epsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} dt E(t) E^*(t + \tau) \right\rangle}{\left\langle \epsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} dt |E(t)|^2 \right\rangle} = \frac{\frac{\epsilon_0 c}{2\pi} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |E(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} \right\rangle}{\frac{\epsilon_0 c}{2\pi} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |E(\omega)|^2 \right\rangle} \quad (10.22)$$

定理可写成

$$C(\tau) = \frac{2}{\mathcal{N}} \int_0^{\infty} \left( \frac{d\mathcal{F}}{d\omega} \right) \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d\mathcal{F}}{d\omega} \right) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (10.23)$$

或等价写为

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\omega} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{N}}{2\pi} C(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \frac{\mathcal{N}}{\pi} \int_0^{\infty} C(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (10.24)$$

此定理在数学上可理解为一阶自相关函数  $C$  可分解为一系列谱通量  $d\mathcal{F}/d\omega$  叠加，或谱通量可视为自相关函数的逆傅里叶变换。

**注** 此定理又称 Wiener–Khinchin–Einstein 定理、Khinchin–Kolmogorov 定理。部分教科书或参考文献将 Wiener 误写为 Weiner，宜留意。



**笔记** 光栅 (grating) 可以视为一种滤波器，在邻近周期结构上反射后的辐射场叠加为可视为自相关过程。事实上，电磁波在材料表面附近的滤波、自相关、反射、吸收、折射率等概念并不是完全独立的，而在更深层次上可通过 Kramers-Kronig 关系 (即，因果律) 相互关联。

**注** 以上定理的结果仅对一阶自相关函数成立，且辐射脉冲不涉及压缩或拉伸过程。此外，对二阶自相关函数  $C_2$ ，无类似结果，即

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{d\omega^2} \neq \frac{\mathcal{N}}{\pi} \int_0^\infty C_2(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (10.25)$$

关于 Wiener–Khinchin 定理应用的更多讨论，可参考 C. Brau 一书的 §5.1.4、§5.1.5。□

介绍完量化辐射光场特性的物理量之后，以下先定性描述、再定量分析自由电子激光的基本工作原理，如图 10.10 所示。一束极端相对论、高亮度电子束经过特殊设计的波荡器，当波荡器参数  $K$ 、波荡器周期  $\lambda_u$ 、电子束参数  $\gamma$  与辐射主波长  $\lambda_\ell$  满足共振关系时，电子束将单向地将能量转移给辐射场，此处的辐射场可以是外部引入的辐射场也可以是电子自己产生的波荡器辐射场，总之，单向的能量转移使辐射场能量或功率增加，形成电磁场的放大过程，并且电磁场的特性随之演化至能部分满足激光束的特性，于是称自由电子激光。下面将介绍，电子束产生自由电子激光的过程即反复经历密度调制与能量调制的过程。此过程发生在电子束内，可视为一种电子束的集体效应。

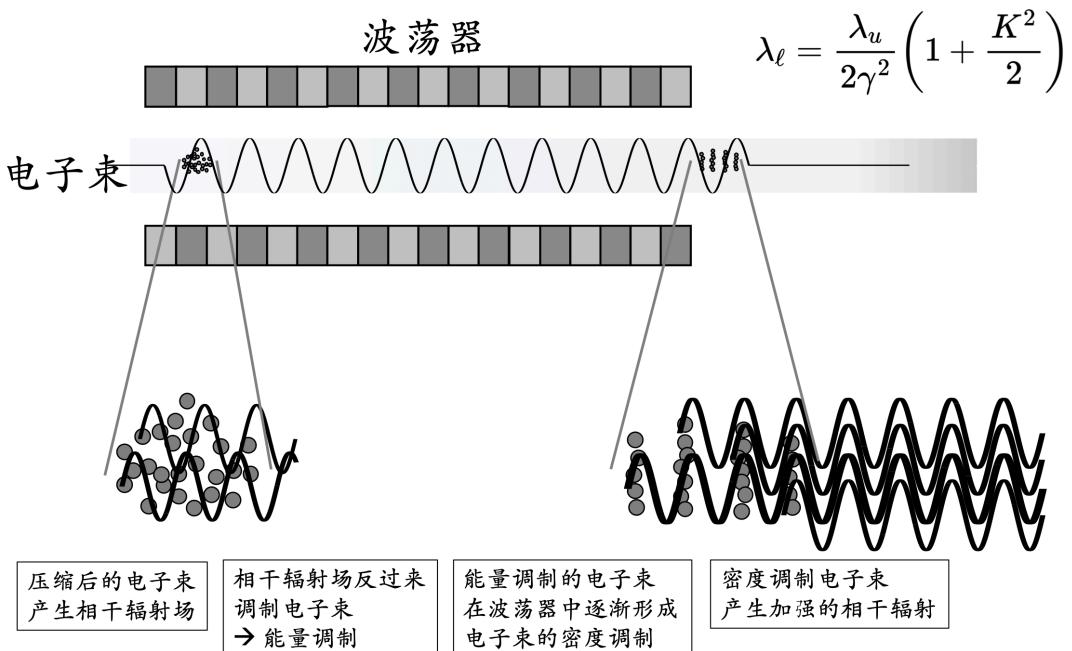
**练习 10.7** 对平面型波荡器，试估算能量偏差导致的路程差。按 §8.1 介绍的动量紧缩因子，考虑线性、一阶情况。■

**解** 假设波荡器长度  $L_u = N_u \lambda_u$ ，其中， $\lambda_u$  为周期长度， $N_u$  为周期数。将满足共振条件的能量写成  $\gamma_r$ ，具有能量偏差的电子能量写成  $\gamma = \gamma_r(1 + \delta)$ 。按 §8.1 介绍的路程差定义，有

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{L_u=N_u\lambda_u} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz \\ &\approx \int_0^{L_u} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{K_u}{\gamma} \sin k_u z \right)^2 \right] dz, \quad \text{其中, } \gamma = \gamma_r(1 + \delta) \\ &= \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{K_u^2}{\gamma_r^2 (1 + \delta)^2} \right] L_u \\ &\approx \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{K_u^2}{\gamma_r^2} \delta \right) L_u \end{aligned}$$

于是，波荡器动量紧缩因子  $r_{56}$  可写成

$$r_{56} = \frac{L_u - L(\delta)}{\delta} + \frac{L_u}{\gamma_r^2} = \frac{L_u}{\gamma_r^2} \left( 1 + \frac{K_u^2}{2} \right) = 2N_u \lambda_\ell > 0$$

图 10.10: 密度调制  $\Rightarrow$  辐射  $\Rightarrow$  能量调制  $\xrightarrow{r_{56}}$  密度调制  $\Rightarrow \dots$ 

其中，与扭摆运动无关的  $\frac{L_u}{\gamma_r^2}$  为真空漂移段本身的贡献。留意， $r_{56} > 0$ 。感兴趣的读者可以试着计算螺旋型波荡器的  $r_{56}$ 。

**笔记** 对自由电子激光而言，扮演增益介质的是电子束与波荡器；扮演泵浦能量的电子束；为提供合适的谐振环境，需要对应辐射波长的腔体反射镜与输出耦合器。

**笔记** 从形成激光要素之一的腔体反射（即振荡器）看，对 100 nm 以下的短波长激光，未必能找到合适的腔体反射镜。该怎么办？ $\Rightarrow$  如果没有反射镜作为腔体，那至少要设法营造一束团与辐射场的内部反馈机制，用这个抽象的“机制”取代实体的反射镜腔体。

此处定量讨论电子束与辐射场的能量转移，以及如何保持能量转移的单向性。先从单个电子开始，在某些有利条件下，辐射场与电子相互作用，由此导致的能量交换将放大电磁辐射场。这个过程类似于传统激光中的受激辐射。但是，现在由于粒子与场的相互作用属经典力学效应，并不受限于任何电子能级，因此，原则上可产生任何波长的辐射。先前学过，波荡器中的电子轨迹有  $v_x = \frac{Kc}{\gamma} \cos(k_u z)$ 。电子扭摆运动发出的辐射电场可以写成  $\mathbf{E}(z, t) = \hat{\mathbf{x}} E_0 \sin(kz - \omega t + \phi)$ 。或者，这里的  $\mathbf{E}(z, t)$  也可视为外部时变电磁场。波荡器辐射场与电子的能量转换随时间演化  $d\mathcal{E}/dt$  由下式给出<sup>7</sup>

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = (-e)\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = -\frac{eE_0 K c}{\gamma} \cos(k_u z) \sin(kz - \omega t + \phi) \quad (10.26)$$

其中， $\mathcal{E}$  为单个电子总能量， $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} < 0$  表示电子把能量给辐射场； $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} > 0$

<sup>7</sup> 此处  $q = -e$ ,  $e > 0$  为电子基本电荷量的大小（即，绝对值）。 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$  是做功  $W$ ,  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  表征单位时间能量转移  $dW/dt$ , 又可写成  $d\mathcal{E}/dt$ 。

表示电子从辐射场吸收能量(称逆 FEL, inverse FEL)<sup>8</sup>。若要保持能量转移的单向性，则上式  $\cos(k_u z) \sin(kz - \omega t + \phi)$  就要随着时间(或电子束传输过程)尽可能保持不变。由此也可以证明波荡器辐射共振条件。

**练习 10.8** 试利用单向能量转移条件推导波荡器辐射共振条件。 ■

**解** 接续上面讨论，写出能量改变式子，以洛伦兹因子  $\gamma = \mathcal{E}/mc^2$  表示，有

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{eE_0Kc}{mc^2\gamma} \cos(k_u z) \sin(kz - \omega t + \phi) \\ &= -\frac{eE_0Kc}{2mc^2\gamma} \left\{ \underbrace{\sin[(k+k_u)z - \omega t + \phi]}_{\sim \text{粒子相位}\theta} + \underbrace{\sin[(k-k_u)z - \omega t + \phi]}_{\text{快速振荡项, 忽略}} \right\}\end{aligned}$$

将粒子相位写成  $\theta \approx (k+k_u)z - \omega t + \phi$ ，则

$$\frac{d\theta}{dt} = (k+k_u)v_z - ck$$

对高能相对论粒子，将纵向速度近似写成

$$v_z \rightarrow \bar{v}_z = c \left( 1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2} \right)$$

代回上式，有

$$\frac{d\theta}{dt} = ck \left( \frac{k_u}{k} - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2} \right)$$

单向能量转移条件要求相位尽可能保持不变，即

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{k_u}{k} = \frac{\lambda}{\lambda_u} = \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}$$

由此得到波荡器辐射共振条件。 ■

**注** 这里忽略了快速振荡项。如果不能被说服，细节讨论可参考 Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, *Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers – Principles of Coherent X-Ray Generation*, Cambridge University Press (2017) 一书的 §3.2。

继续讨论前，这里介绍一个专用名词，称有质动力运动 (ponderomotive motion)。这个词不是加速器物理的专有词汇，但是基于有质动力运动的应用包含加速器里的自由电子激光、等离子体加速 (plasma acceleration) 等。

**定义 10.5. 有质动力运动**

考虑粒子处在外部支配的 非均匀、振荡 电磁场中进行振荡运动，假设运动的时间尺度可分解为慢运动与快运动。对快运动的时间周期平均后，慢运动部分将随时间沿着一特定方向漂移，称为有质动力运动 (ponderomotive motion)。

<sup>8</sup> 第3章介绍过，Lienard-Wiechert 场的第二项辐射场为时变场。结合以上讨论，从能量转移这层意义上说，一种辐射机制同时意味着一种粒子的加速机制。既然有 inverse FEL，根据 §3.4 介绍的几种不同辐射机制，那也就有 inverse Smith-Purcell radiation、inverse transition radiation、inverse Cherenkov radiation 等粒子加速机制。感兴趣的读者可根据关键词，自行参考相关文献。

**注** 在 FEL 中，外部支配的非均匀、振荡电磁场包含波荡器磁场与电子自发产生的辐射场或外部输入电磁波，其中，波荡器磁场对应慢运动，辐射场或电磁波对应快运动。对快运动的时间周期  $2\pi/\omega$  平均后，慢运动部分  $\theta$ ，即为有质动力运动。因此，有时候  $\theta$  又称有质动力相 (ponderomotive phase)。外部支配的非均匀、振荡电磁场形成的势能阱称有质动力势 (ponderomotive potential)。

**练习 10.9** 以单粒子在外部非均匀、振荡电磁场  $E(x, t) = g(x) \cos \omega t$  中进行一维振荡运动  $x(t) = x_{\text{慢}}(t) + x_{\text{快}}(t)$  为例，证明慢运动部分随时间演化可写成

$$\ddot{x}_{\text{慢}} = -\frac{1}{4\omega^2} \frac{d}{dx} [g^2(x)] \Big|_{x=x_{\text{慢}}}$$

其中，等式右边即为“等效”质量，故称有质运动。 ■

**解** 对非均匀场  $g(x)$ ，利用泰勒展开，有

$$\ddot{x} = g(x) \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}_{\text{慢}} + \ddot{x}_{\text{快}} = [g(x_{\text{慢}}) + x_{\text{快}} g'(x_{\text{慢}})] \cos(\omega t)$$

又  $\ddot{x}_{\text{慢}} \ll \ddot{x}_{\text{快}}$ ，则

$$\ddot{x}_{\text{快}} = g(x_{\text{慢}}) \cos(\omega t) \Rightarrow x_{\text{快}} = -\frac{g(x_{\text{慢}})}{\omega^2} \cos(\omega t)$$

代回原方程，有

$$\ddot{x}_{\text{慢}} = -\frac{g(x_{\text{慢}}) g'(x_{\text{慢}})}{2\omega^2} \Rightarrow \ddot{x}_{\text{慢}} = -\frac{1}{4\omega^2} \frac{d}{dx} [g^2(x)] \Big|_{x=x_{\text{慢}}}$$

有质动力运动的源头为外部场的非均匀性，即  $g(x)$  项；如果外部场为完美均匀场，则没有有质动力运动。有质动力运动图例参考图 10.11。 ■

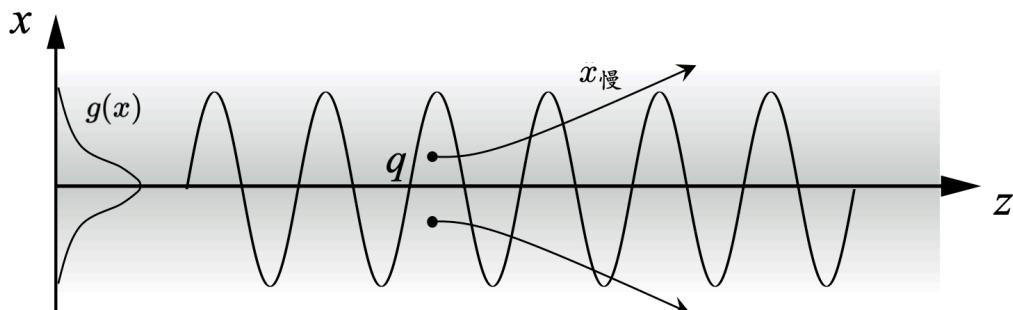


图 10.11：有质动力运动图例。图例修改自 Seryi and Seraia 一书。

已经知道电子运动速度比电磁辐射场 (光子) 慢一些些，并且电子走扭摆轨迹而电磁场 (光子) 沿轴走直线轨迹，将导致电子落后，并逐渐与光场产生“错位”。因此，要一直维持同一单个电子与同一局部辐射场不错位的交互作用是不可能的。但是，如果电子、波荡器与辐射场满足“共振条件”，则此电子可以在错位后仍保持相同相位，持续给电磁波传递能量。如图 10.12，当电子在波荡器中前进一个周期  $\lambda_u$  时，该电子将恰好落后于共振辐射场一个辐射波长  $\lambda_\ell$ 。

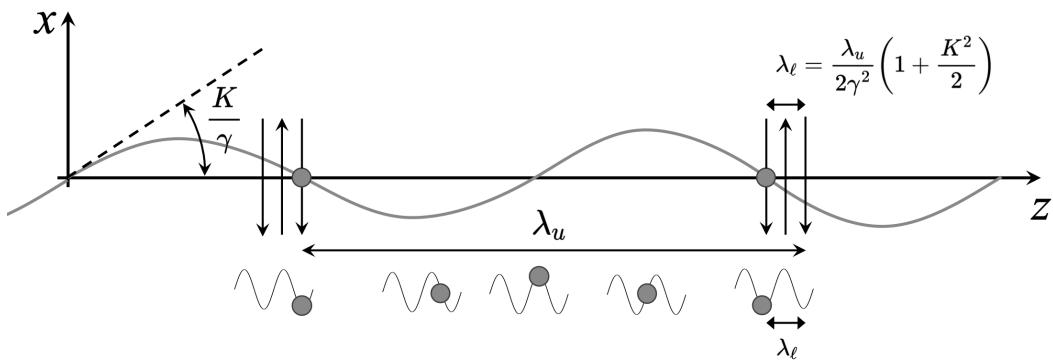


图 10.12: FEL 共振条件的物理图像。

**练习 10.10** 试推导、理解以上结论。 ■

由上面讨论知道，对于波荡器辐射共振条件与 FEL 共振条件，具有同样的共振条件数学形式，但是物理图像稍有区别。“波荡器辐射”着重辐射波长的决定，“FEL 共振条件”着重能量单向转移的波长。两者形式一样，概念相关、相似，但不全相同。

#### 定理 10.4. FEL 共振条件

在极端相对论情况下，FEL 共振条件有

$$\lambda_\ell = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (10.27)$$

在波荡器轴上，有  $\theta \equiv 0$ 。其中，

- $\lambda_\ell$  为辐射场波长，
- $\lambda_u$  为波荡器周期，
- $\gamma$  为洛伦兹因子，
- $K$  为波荡器参数，有  $K = \frac{eB_0}{m_e ck_u} = 0.934 \lambda_u [\text{cm}] B_0 [\text{T}]$ ， $B_0$  为峰值磁场强度， $k_u = 2\pi/\lambda_u$ 。

**注** 有时候 FEL 共振条件可理解成电子束经过波荡器时，在给定目标辐射波长  $\lambda_\ell$  与波荡器参数  $K$  前提下，满足沿轴 ( $\theta = 0$ ) 的电子共振能量为

$$\gamma_r = \sqrt{\frac{\lambda_u}{2\lambda_\ell} \left( 1 + \frac{K^2}{2} \right)} \quad (10.28)$$



**笔记** 实际情况下，电子不是单一粒子形成，而是电子束团。在一些特定情况下，同一局部辐射场可能在每次经过波荡器周期时，赶上适当相位的电子束切片，形成辐射放大。

**定理 10.5. 具有能量啁啾电子束的波荡器辐射共振条件**

上面定理给出的 FEL 共振条件假设电子束团的中心能量在束团中不同局域纵向位置  $s$  是恒定。如果束团存在能量啁啾，即 §8.1 介绍过对不同束团内  $s$  位置的能量存在关联，则共振波长或频率将不再为单一波长或频率，而将出现频散。此频散可写为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{\ell 0}} = \frac{4}{3} h \lambda_{\ell 0} N_u \quad (10.29)$$

其中，

- $\lambda_{\ell 0}, \omega_{\ell 0}$  为束团中心能量对应的共振波长与角频率，
- $N_u$  为波荡器周期总数，
- $h$  为电子能量啁啾 (chirp)。

**证明** 需要考虑波荡器的动量紧缩因子  $R_{56} = 2N_u \lambda_{\ell 0}$ 。此外，还要考虑辐射场群速度与电子纵向速度的差别导致的滑移的影响。细节可参考 J. Tang et al., Active Q-Switched X-Ray Regenerative Amplifier Free-Electron Laser, Phys. Rev. Lett. **131**, 055001 (2023). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.131.055001>。

 **笔记** 思考一下，此式是否适用于波荡器辐射？

§1.19.3 与 §5.2 介绍过一种特殊的波荡器，称激光波荡器 (laser undulator)。对 FEL 过程，也有相应的等效波荡器参数与共振条件，总结如下：

**定理 10.6. 激光波荡器共振条件**

假设激光强度为  $I_L$  [MW/cm<sup>2</sup>]、激光中心波长  $\lambda_L$ ，则有等效的波荡器参数  $K_L$

$$K_L \approx \sqrt{2.3 \times 10^{-5} \lambda_L^2 [\text{cm}^2] I_L [\text{MW}/\text{cm}^2]} \quad (10.30)$$

与共振辐射波长  $\lambda_r$

$$\lambda_r \cong \frac{\lambda_L}{4\gamma^2} \left( 1 + \frac{K_L^2}{2} \right) \quad (10.31)$$

其中， $\gamma$  表征电子能量，为在实验室静止坐标的洛伦兹因子。

由于激光的中心波长比起磁铁实体的尺寸小得多，因此，在同样电子能量情况下，共振辐射波长将大大减小。

**注** 共振条件中的分母为  $4\gamma^2$ ，不是  $2\gamma^2$ 。这是因为假设激光传播方向与电子束行进方向 (反) 平行。



**笔记** 比较这里介绍的激光波荡器与 §1.19 介绍的康普顿散射的物理图像。

### 10.2.1 自由电子激光 vs. 相干波荡器辐射

此处我们讨论一下自由电子激光与相干波荡器辐射 (coherent undulator radiation, CUR) 的区别。两者是不同的。先前在第 5 章介绍过单电子的波荡器辐射，根据 §9.1 介绍的纵向形成因子知道，当多个电子发出波荡器辐射时，如果这些电子形成的束团长度短于辐射波长，那么束团整体的辐射特性与单个电子的辐射特性由如下公式给出：

$$\frac{d^2\mathcal{W}}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{束团}} = \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{单电子}} [N + N^2 F(\omega)] \quad (10.32)$$

其中，纵向形成因子或群聚因子 (bunching factor) 定义为

$$F(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) e^{-i\omega z/c} \right|^2 \quad (10.33)$$

此即相干波荡器辐射。根据束长不同，辐射强度将不太一样，相干辐射使辐射场功率增加，但是，电磁辐射场的其它特性并没有随之演化。也就是说，此处相干辐射的计算虽然考虑了束长与辐射波长的相对关系，但仍假设电子束不受辐射场影响。既然电子束不受辐射场影响，辐射场特性也就没有随之演化，即没有动力学过程，系统不属于动态系统。

自由电子激光与相干波荡器辐射的差别在于前者有动力学过程。也就是说，自由电子激光过程包含除了电子束的相干辐射，还包含辐射场反过来对电子束的影响，受到辐射场影响的电子束进一步产生辐射，再增强辐射相干性，整个系统为动态系统，电子束与场形成正反馈 (positive feedback)。以上一节介绍的“受激发射”的概念说，即，相干波荡器辐射属于自发相干波荡器辐射，而自由电子激光则可视为一种受激相干波荡器辐射。

### 10.2.2 辐射产生的另一种视角：能量、动量守恒

产生辐射的一种物理图像在 §2.2 介绍过，带电粒子加速导致电场线扭曲，为了满足 Maxwell 方程组的分界面边界条件，电场线不能断，从而产生电磁辐射。同步辐射源于带电粒子经历圆周运动的横向/向心加速；波荡器辐射同样源于带电粒子经历波荡器的横向周期扭摆运动的横向/向心加速。此为经典力学图像。在 §4.1 还提到利用费曼图 (Feynman diagram) 表征电子经过弯转磁铁产生同步辐射的量子力学过程。现在，我们提供辐射产生的另一种物理图像，基于电子与辐射场 (光子) 的能量、动量守恒定律，可视为半经典、半量子图像。

在自由空间中，根据  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  定义，电子的洛伦兹因子满足<sup>9</sup>

$$\gamma = \sqrt{1 + (\beta\gamma)^2} \quad (10.34)$$

其中， $\beta = v/c$  为电子归一化速率。将电子吸收或发出辐射场/光子的能量以电子静止能量归一化，写为  $\gamma_p \equiv E_\gamma/m_e c^2$ ，其中， $E_\gamma = \hbar\omega$  为光子能量。下标  $p$  表示与“光子”相关的量。根据能量-动量关系，光子的动量  $p_p = E_\gamma/c$ ，可类似如上以电子静止动量  $m_e c$  归

<sup>9</sup> 对相对论运动学不熟悉的读者，可参考 §0.3。

一化，写成  $\beta_p \gamma_p = \hbar k_p / m_e c$ ，其中，光子的等价速率有

$$\beta_p = \frac{c_p}{c} = \frac{1}{n} \quad (10.35)$$

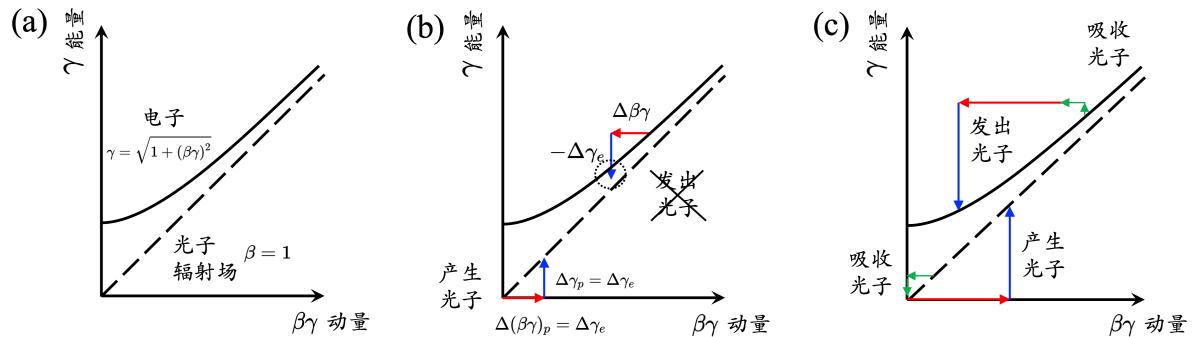
或<sup>10</sup>

$$\frac{d\gamma_p}{d(\beta\gamma)_p} = \frac{1}{n} \leq 1 \quad (10.36)$$

其中， $n$  为辐射场/光子存在环境的折射率。

一个辐射机制是否满足物理实际  $\Leftrightarrow$  电子、光子皆要求满足能量-动量关系。

现在，参考图 10.13(a)，为电子与光子的能量-动量关系，电子的能量-动量关系为双曲线的一支，光子的能量-动量关系则为直线，斜率为  $d\gamma/d(\beta\gamma) = 1/n$ 。考虑电子与辐射场都在自由空间 ( $n = 1$ ) 中，参考图 (b)，假设一辐射光子产生，伴随着  $\Delta\gamma_p$  (归一化) 能量改变，同时由于斜率  $1/n = 1$ ，有等量的归一化动量改变。根据能量-动量守恒关系，电子将无法满足其能量-动量曲线：电子无法在经历能量与动量改变后仍落在双曲线上，即电子在此机制下无法辐射。留意，图 10.13(b) 中的电子经历  $-\Delta\gamma_p$  后没有回到实线上。换句话说，只涉及单个电子、单个光子的能量交换并不满足物理实际。



**图 10.13：**能量-动量守恒关系。实线为自由电子，虚线为辐射场（光子）。(a) 色散曲线；(b) 在自由空间（真空折射率  $n = 1$ ），单个电子与单个光子间无法产生交互作用，需要额外机制介入；(c) 基于康普顿散射机制电子吸收一光子后产生辐射（另一个光子）。

但是，如果涉及单个电子、多个光子的交互作用，则能量-动量交换有机会满足物理实际，即存于此种电子辐射机制。考虑图 (c)，假设电子先吸收一个光子，电子与光子将获得能量，同时调整动量。此时电子处于暂态，不要求在色散曲线上。之后，电子辐射一光子，伴随着  $\Delta\gamma_p$  能量与  $\Delta(\beta\gamma)_p$  动量改变，根据能量-动量守恒关系，产生辐射后有机会满足电子的能量-动量曲线：电子能够在发出光子后仍落在双曲线上，即电子在此机制下能够辐射。换句话说，涉及单个电子、两个光子的能量交换能够满足物理实际。事实上，此辐射机制即为 §1.19 介绍的康普顿散射。

<sup>10</sup>

$$\frac{d\gamma_p}{d(\beta\gamma)_p} = \frac{d\gamma_p}{d\omega} \frac{d\omega}{dk_p} \frac{dk_p}{d(\beta\gamma)_p}, \quad \gamma_p = \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}, \quad k_p = \frac{\omega}{c_p} = n \frac{\omega}{c}, \quad \beta_p \gamma_p = \frac{\hbar k_p}{m_e c}$$

练习 10.11 参考图 10.14，论证契伦科夫 (Cherenkov) 辐射满足能量-动量守恒关系，因此，允许此辐射机制存在。 ■

解 基于契伦科夫机制的辐射场不在自由空间，而是在介质 ( $n > 1$ ) 中，因此斜率  $d\gamma/d(\beta\gamma) = 1/n < 1$ 。光场的色散曲线不那么斜之后，产生辐射后就仍有机会落在线上。 ■

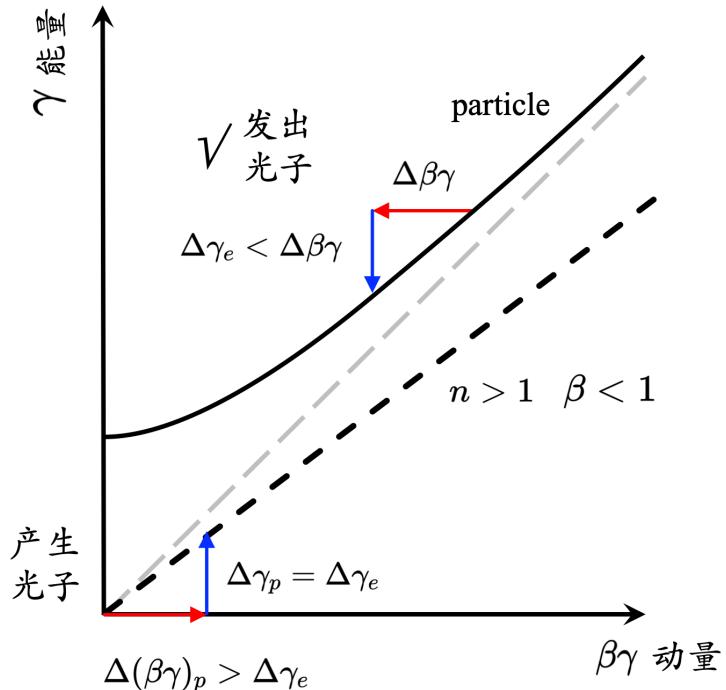


图 10.14:  $n > 1$  的能量-动量守恒关系：基于契伦科夫 (Cherenkov) 机制，单个电子与单个光子间能够在  $n > 1$  介质中产生交互作用。

结束这一节前，我们回顾一下，前半介绍了波荡器辐射共振条件，后半介绍了具有同样形式的 FEL 共振条件。这些共振条件告诉我们，满足此条件能够保证单个电子能量与电磁场能量的单向转移，但没有限制谁转移谁；至于是 FEL 或逆 FEL，由“相位”决定，即由作用在电子上的洛伦兹力向量  $\mathbf{F}$  与电子瞬时速度向量  $\mathbf{v}$  的点乘或内积决定：

- $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} < 0$  表示电子把能量给辐射场  $\Rightarrow$  FEL
- $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} > 0$  表示电子从辐射场吸收能量  $\Rightarrow$  逆 FEL

其中， $\mathcal{E}$  为电子能量。有些读者或许会想，共振条件指的是单个电子与电磁场的关系，上面的  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$  也是单个电子与电磁场的关系，电子束团包含众多粒子，如何保证束团能量的单向转移？如果束团内的粒子相对于辐射波长均匀覆盖了  $0 \sim 2\pi$  相位，那么，半数粒子得到能量，半数粒子失去能量，束团整体将没有净能量转移。最后，这一小节补充介绍了从能量、动量守恒视角看自由电子辐射过程。

事情就这样了？不，这远不是故事的结尾！事实上，有办法通过一些手段（物理机制），使电子束团能量单向转移给辐射场，且办法还不止一种<sup>11</sup>。故事不是结束，而才正

<sup>11</sup>先透露一些，一般两个办法：一、通过能量调谐 (detuning)，此即低增益 FEL 模式 (§10.4 介绍)；二、借助微

要开始。后面我们将更细致地讨论 FEL 的几种工作模式，在开始正式介绍前，下一节先明确几个重要输出指标，再分别介绍不同工作模式的细节。

---

群聚与相干辐射的正反馈机制，此即高增益 FEL 模式 (§10.5 介绍)。

## 10.3 三种工作模式与几个重要输出指标

先从标准微电子学教科书里介绍的放大器 (amplifier) 与振荡器 (oscillator) 模型开始。常见的电子学放大器模型如图 10.15 所示，包含一个输入信号、一个输出信号，放大以增益函数表示。放大器一般追求高增益的同时，也追求对不同振幅的输入信号能获得相同比例的放大，否则这种放大就是非线性的<sup>12</sup>。同时，也希望能够尽可能宽的频谱范围内有效放大。

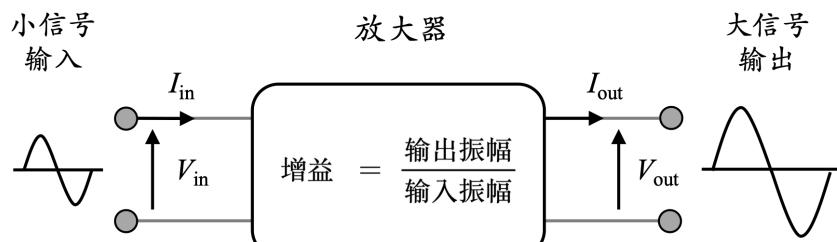


图 10.15：电子学放大器。

既然有电子学放大器，在光学波段也有光学放大器，如图 10.16。激光器里的增益介质就是一种光学放大器。当然，光学放大器与电子学放大器都需要外部提供泵浦能量来源，形成主动元件。

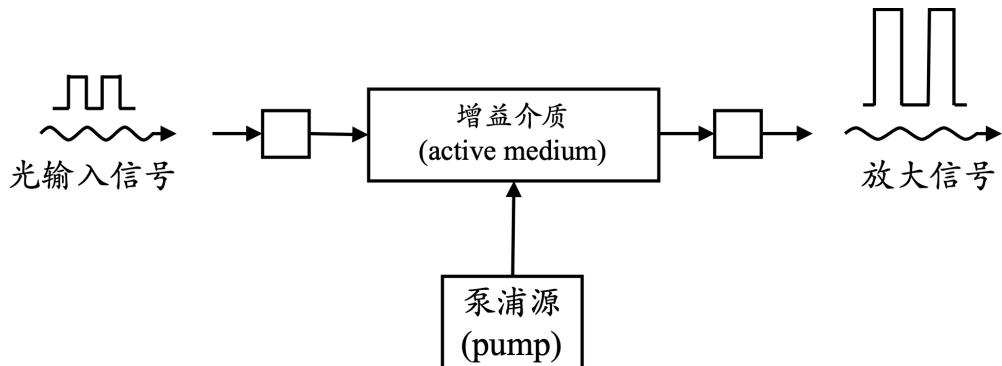


图 10.16：光学放大器。

### 性质 10.1. 放大器的几个输出指标

此处总结放大器模型的几个重要输出指标：

1. 增益 (gain)。
2. 频宽 (bandwidth)。
3. 效率 (efficiency)。
4. 线性区间 (linearity)、稳定性阈值 (低于起振条件)。

**注** 天下没有白吃的午餐，想冲上面这些指标的某几个，就要牺牲其它几个指标。

<sup>12</sup>当然，也有专门设计的非线性放大器，此处不论。

与放大器对应的一种模型为振荡器模型。同样分电子学振荡器与光学振荡器。振荡器是“无中生有”，由“噪声”来产生信号源，再经过一些机制从中选取希望放大的信号。理想振荡器希望能稳定、可靠地产生想要频率的信号，并尽量减少抖动，保持相位稳定。图 10.17 与 10.18 分别给出电子学振荡器与光学振荡器示意图。

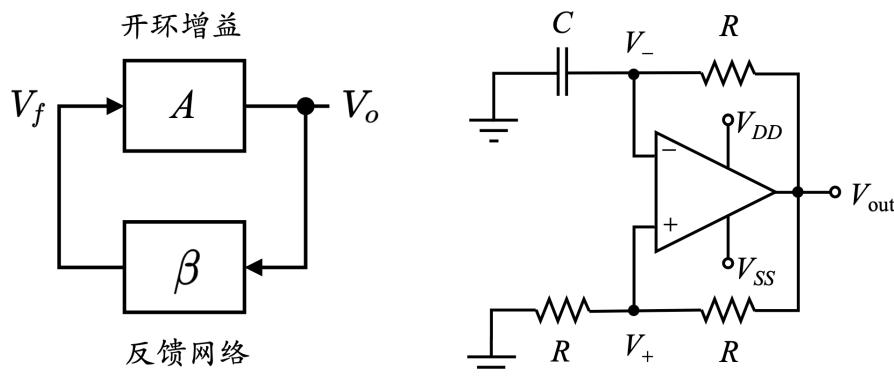


图 10.17：电子学振荡器。

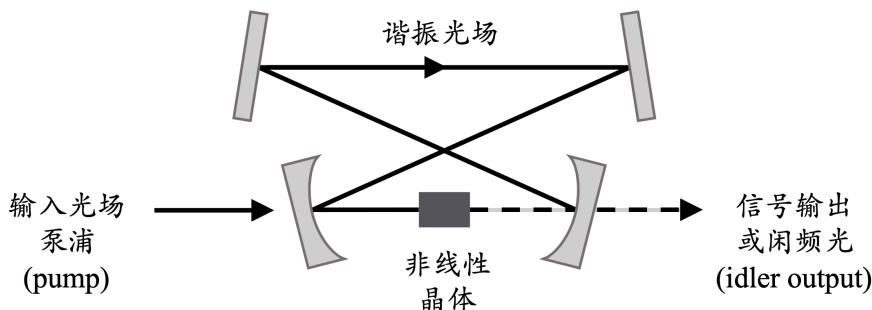


图 10.18：光学振荡器。

### 性质 10.2. 振荡器的几个输出指标

振荡器模型的几个重要输出指标：

1. 中心频率 (central frequency)。
2. 频率稳定性 (stability)。
3. 电压、电流、场强、输出特性等。
4. 抖动 (jitter)、噪声 (noise)、相位稳定。

**注** 天下没有白吃的午餐，想冲上面这些指标的某几个，就要牺牲其它几个指标。 □



**笔记** 振荡器要能成功运行，外部泵浦需要足够强，以使振荡器“起振”。相对于振荡器，放大器要能成功运行，外部信号需要控制在增益的线性区间，否则放大器进入非线性区间后，输出的放大信号特性将不再如理想预期，并且，过大的输入信号可能导致放大器“起振”，甚至变成振荡器。



**笔记** 理想放大器的频宽是无限大的，即线性区间无限大，稳定性阈值也是无限大。就是

说，对任何输入信号的振幅，无论多大，都不会使放大器“起振”。理想振荡器的频宽是无限小的，即能产生一完美的、单频电磁信号，起振阈值为零。此外，理想振荡器的输出信号不存在抖动、噪声等问题。在工程实际中，一个好的放大器或振荡器的设计要求输出指标尽量接近理想情况。

自由电子激光器作为混合电子与光学的电磁部件，也可分为放大器工作模式与振荡器工作模式，如图 10.19 总结。**FEL** 振荡器根据谐振腔、增益介质的参数，电子束提供“噪声”作为电磁信号种子开始，可用以起振、产生特定频率的窄带电磁信号。**FEL** 放大器将放大输入种子信号辐射场，此种子信号先“调制”电子束，在电子束上印记种子信号的信息，在适当相位下，电子束的能量单向转移给辐射场，使输出的辐射场信号被放大。对 FEL 来说，还存在一种特殊工作模式，即混合放大器与振荡器的工作模式。当波荡器足够长时，初始电子束里的“噪声”(shot noise) 在波荡器前半段产生。被视为种子信号辐射场后，如果波荡器设计得当，在波荡器后半段能得到有效放大。这种前半段像振荡器，后半段像放大器的操作模式称自放大自发辐射 (self-amplified spontaneous emission, SASE) 模式。SASE FEL 对产生短波长激光来说是非常重要的模式，因为低于 100 nm 之后很难找到匹配的光学反射镜，特别是在 X 射线波段。

结束本节前，以下整理常用的一维 FEL 模型。此讲义不打算推导此结果，感兴趣的读者可以参考专门介绍自由电子激光的教科书，如 Kim, Huang, and Lindberg 一书。

### 定理 10.7. 单次经过、一维、稳态 FEL 模型

单次经过的一维稳态 FEL 模型由下面  $(2N + 1)$  个关于各别  $N$  个电子  $(\theta_j, \eta_j)$  与归一化辐射场  $a$  运动方程描述：

$$\frac{d\theta_j}{d\hat{z}} = \eta_j \quad (10.37)$$

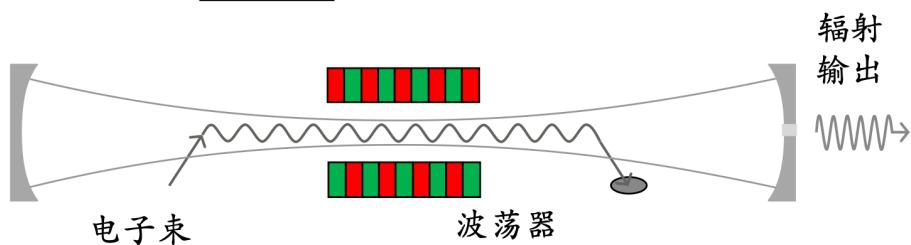
$$\frac{d\eta_j}{d\hat{z}} = ae^{i\theta_j} + a^*e^{-i\theta_j} \quad (10.38)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \hat{z}} = -\langle e^{-i\theta_j} \rangle \quad (10.39)$$

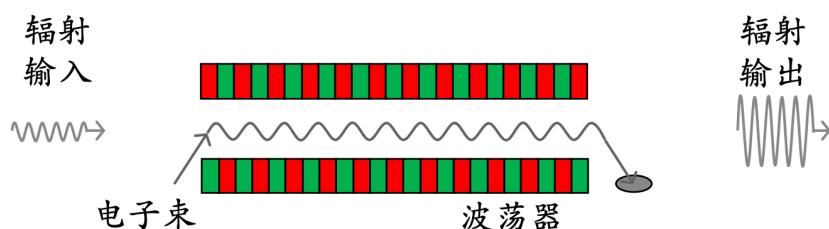
其中，

- $\hat{z} = 2k_u\rho z$ ,  $z$  为波荡器坐标， $\rho$  为无量纲 Pierce/FEL 参数，稍后定义
- $\theta$  为(有质势)相位，可写成  $\theta = (k_1 + k_u)z - \omega_1 \bar{t}$ ,  $k_u = 2\pi/\lambda_u$ ,  $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = \omega_1/c$ ,  $\bar{t}$  为参考电子到达波荡器  $z$  处的时刻
- $\eta$  为以  $\rho$  为单位的归一化能量偏差， $\eta \equiv (\gamma - \gamma_r)/\rho\gamma_r$
- $a = \frac{eK[\text{JJ}]}{8\gamma_r^2 m_e c^2 \rho^2 k_u} E$  为以共振频率为中心频率、归一化横向复辐射电场。其中， $E$  为复数，包含描述辐射电场包络的峰值幅值与相位， $K$  为波荡器参数  $K = \frac{eB_0}{m_e c k_u} = 0.934 \lambda_u [\text{cm}] B_0 [\text{T}]$ ,  $B_0$  为峰值磁场强度,  $k_u = 2\pi/\lambda_u$ ,  $[\text{JJ}] = \mathcal{J}_0 \left( \frac{K^2}{4+2K^2} \right) - \mathcal{J}_1 \left( \frac{K^2}{4+2K^2} \right)$ ,  $\gamma_r$  为共振能量，由共振关系  $\frac{\lambda_1}{\lambda_u} = \frac{1+K^2/2}{2\gamma_r^2}$  决定
- 尖括弧为  $\langle \dots \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\dots)$ 。对稳态情况，此处尖括弧对整个束团取平均；

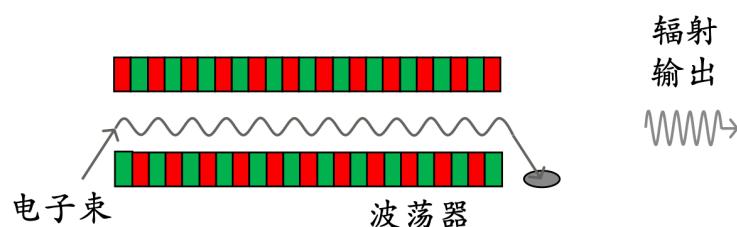
**振荡器**：需要反射镜



**放大器**：需要种子源



**自放大自发(SASE)模式**：不需要反射镜也不需要种子源



**图 10.19：**三种不同模式的 FEL 示意图：振荡器、放大器、自放大自发辐射 (SASE)。留意，波荡器为平面波荡器时，电子扭摆轨迹所在平面应与波荡器磁场方向正交。此图为了示意电子扭摆轨迹而画的正弦函数应落在进出纸面方向。

对时变情况，尖括弧对某一切片 (slice) 取平均

**注** 有些文献将归一化复辐射场定义为  $a = \frac{\sqrt{2}eK[\text{JJ}]}{8\gamma_r^2 m_e c^2 \rho^2 k_u} E$ ，此时  $E$  为以 rms 幅值的 (横向) 电场包络函数。

**注** 对于螺旋型 (helical) 波荡器， $K$  的定义里，磁场强度不用峰值强度，而是用均方根 (rms) 强度。其 Pierce 参数 (或 FEL 参数) 有类似上面的结果，只要做如下替代： $[\text{JJ}] \rightarrow 1$ ，且  $K \rightarrow \sqrt{2}K$ 。

**注** 上面  $[\text{JJ}]$  因子表征电子在平面型波荡器中的纵向振荡与辐射场之间的耦合。在螺旋型波荡器中， $[\text{JJ}] = 1$ 。

**证明** 参考 Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers – Principles of Coherent X-Ray Generation, Cambridge University Press (2017) 一书 §3.4.4。

**注** 此处的归一化能量偏差  $\eta$  符号与色散函数或滑相因子无关，不要混淆。 □



**笔记** 在上面总结的辐射场方程中，等式右边项  $\langle e^{-i\theta_j} \rangle$  具有重要物理意义，将在 §10.5 介绍。同样重要的参数还有 Pierce/FEL 参数，其定义先总结如下，将在 §10.5 介绍。

此讲义仅讨论稳态 FEL (steady-state FEL) 情况，即  $\hat{z}$  作为唯一的演化变量，或者说， $\theta_j(\hat{z}), \eta_j(\hat{z}), a(\hat{z})$ ，其中， $\theta_j \in [0, 2\pi]$ 。但是，实际上，电子束长比辐射场的共振波长长得多，即  $\sigma_z \gg \lambda_\ell$ 。因此，如果以共振波长  $\lambda_\ell$  为长度单位，将电子束以  $\lambda_\ell$  进行切片，则稳态 FEL 的图像意味着我们忽略电子束中不同切片之间的差异。就是说，假设在电子束里所有切片内都发生一样的物理图像，或者说，所有的动力学演化过程图像都按  $\lambda_\ell$  为长度单位一直重复着。在  $\theta_j \in [0, 2\pi]$  发生的物理图像与在  $\theta_j \in [2\pi, 4\pi]$ 、 $\theta_j \in [-2\pi, 0]$  都是一模一样的。

当考虑时变 FEL (time-dependent FEL) 情况时，即考虑电子束中不同切片间动力学过程的差异时，上面的  $(2N + 1)$  个方程形式几乎一样，差别为多出一项对局域时间  $\theta$  的偏微分，可总结为以下方程：

### 定理 10.8. 单次经过、一维、时变 FEL 模型

单次经过的一维时变 FEL 模型由下面  $(2N + 1)$  个关于各别  $N$  个电子  $(\theta_j, \eta_j)$  与归一化辐射场  $a$  运动方程描述：

$$\frac{d\theta_j}{d\hat{z}} = \eta_j \quad (10.40)$$

$$\frac{d\eta_j}{d\hat{z}} = ae^{i\theta_j} + a^*e^{-i\theta_j} \quad (10.41)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial a}{\partial \theta} = -\langle e^{-i\theta_j} \rangle \quad (10.42)$$

其中，尖括弧为  $\langle \dots \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\dots)$ 。对时变情况，尖括弧对某一切片 (slice) 取

平均。当稳态时，有  $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$ 。

**证明** 参考 Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers – Principles of Coherent X-Ray Generation, Cambridge University Press (2017) 一书 §3.4.3。 □

以上方程中出现的无量纲 Pierce 参数(或 FEL 参数)  $\rho$  定义如下：

#### 定义 10.6. 无量纲 Pierce 参数(或 FEL 参数)

对于平面型(planar)波荡器，一般 Pierce 参数(或 FEL 参数)写成  $\rho$ ，定义如下：(SI 单位制)

$$\rho = \left( \frac{e^2 K^2 [JJ]^2 n_e}{32 \epsilon_0 \gamma_r^3 m_e c^2 k_u^2} \right)^{1/3} = \left[ \frac{1}{8\pi} \frac{I_b}{I_A} \left( \frac{K [JJ]}{1 + \frac{K^2}{2}} \right)^2 \frac{\gamma_r \lambda_1^2}{2\pi \sigma_x^2} \right]^{1/3} \quad (10.43)$$

其中，

- $K$  为波荡器参数  $K = \frac{eB_0}{m_e ck_u} = 0.934 \lambda_u [\text{cm}] B_0 [\text{T}]$ ，其中， $B_0$  为峰值磁场强度， $k_u = 2\pi/\lambda_u$
- $[JJ] = \mathcal{J}_0 \left( \frac{K^2}{4+2K^2} \right) - \mathcal{J}_1 \left( \frac{K^2}{4+2K^2} \right)$ ，其中， $\mathcal{J}_{0,1}$  分别为第一类 0 阶、1 阶贝塞尔函数
- $n_e$  为电子数(体)密度
- $\gamma_r$  为共振能量，由共振关系  $\frac{\lambda_1}{\lambda_u} = \frac{1+K^2/2}{2\gamma_r^2}$  决定，其中， $\lambda_u$  为波荡器周期， $\lambda_1$  为共振辐射波长
- $I_b$  为束团电流，假设均匀平顶分布
- $I_A = ec/r_e = 4\pi\epsilon_0 m_e c^3/e \approx 17045 \text{ A}$ ，称 Alfvén 电流，为常数
- $\sigma_x$  为电子束团横向尺寸。假设束团横向分布为高斯分布，有效面积为  $2\pi\sigma_x^2$

**注** 无量纲 Pierce 参数表征的物理意义为

$$\rho = \frac{\text{产生的辐射场能量}}{\text{电子束能量}}$$

此 Pierce 参数是个重要参数，还表征 SASE FEL 输出辐射场的归一化带宽，即  $\Delta\omega/\omega \sim \rho$ ，将在 §10.5 介绍。

**注** 设计或评估 FEL 效能时，常需要对 Pierce 参数进行估算。将定义写成实用公式，有

$$\rho = 2.1 \left[ \frac{I_b [\text{A}] K^2 [JJ]^2 (\lambda_u [\text{cm}])^2}{\gamma_r^3 (\sigma_x [\mu\text{m}])^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (10.44)$$

**注** 对于螺旋型(helical)波荡器， $K$  的定义里，磁场强度不用峰值强度，而是用均方根(rms)强度。其 Pierce 参数(或 FEL 参数)有类似上面的结果，只要做如下替代： $[JJ] \rightarrow 1$ ，且  $K \rightarrow \sqrt{2}K$ 。

**注** 上面  $[JJ]$  因子表征电子在平面型波荡器中的纵向振荡与辐射场之间的耦合。在螺旋型波荡器中,  $[JJ] = 1$ 。

下面从以上总结的一维 FEL 模型出发, 将分别讨论两种情况: 低增益 FEL 与高增益 FEL。分开讨论是因为两者的物理图像不太一样。

结束此节前, 提醒一个在 FEL 社群与其它加速器社群关于符号使用的区别: 在 FEL 领域, 通常用  $z$  表示全域的纵向坐标或称波荡器纵向坐标, 一般是“米”量级; 通常用  $s$  表示束团内局域的纵向坐标或束团坐标, 一般是“毫米、微米、亚微米”等量级。此惯例与其它加速器社群采用的惯例恰好颠倒: 以  $z$  表示局域、束团内的纵向坐标; 以  $s$  表示全域、沿磁聚焦结构纵向传输位置坐标。阅读文献时应注意区别。

### 10.3.1 比较: 传统激光 vs. 自由电子激光

下表比较传统激光器与自由电子激光器的一些特性<sup>13</sup>。

	传统激光	自由电子激光
输出特性	窄带、单色、相干光	窄带、单色、相干光
操作模式	振荡器、放大器	振荡器、放大器、SASE
首次验证年份	1960	1977
增益介质	固态、液态、气态	电子束与波荡器磁场
能量转换	电子能级(位能)	相对论电子动能
外部能量源	泵浦光、电流	电子加速器
理论	量子力学	相对论运动学、电动力学
共振波长	增益介质的能级	电子洛伦兹因子 $\gamma$ 、波荡器参数 $K$ 、周期 $\lambda_u$

下表比较常温自由电子激光与低温超导自由电子激光的一些特性<sup>14</sup>。

特性	常温 FEL	低温超导 FEL
能量	$6 \sim 15 \text{ GeV}$	$2 \sim 4 \text{ GeV}$ 或 $8 \sim 14 \text{ GeV}$
加速腔频段	S, C, X band	L band
重复频率	$50 \sim 200 \text{ Hz}$	$\text{kHz} \sim \text{MHz}$
操作模式	脉冲	长脉冲或连续波
最短波长	$0.1 \text{ nm}$	$0.3 \sim 1 \text{ nm}$

<sup>13</sup>此表取自 A. Seryi and E. Seraia 一书。

<sup>14</sup>此表取自 A. Seryi and E. Seraia 一书。

### 10.3.2 浅谈：一维 FEL 基本方程组推导思路

这一小节简短介绍上面提到的  $(2N + 1)$  个一维 FEL 基本方程的推导思路。对细节感兴趣的读者，可参考专门介绍自由电子激光的教科书，如 Kim, Huang, and Lindberg 一书。

先从“ $2N$ ”个粒子方程开始。此  $2N$  个粒子方程其实就是 §10.2 介绍的忽略了快速振荡项、以纵向有质动力相位坐标  $\theta$  的运动方程  $d\theta/dt$  与能量改变方程  $d\mathcal{E}/dt = mc^2 d\gamma/dt$  写成有质动力相位与归一化能量偏差  $(\theta, \eta)$  的摆方程，又称 Colson 方程。下一节讨论低增益 FEL 时有更多介绍。

再来是“1”个场方程。有些文献称 FEL 基本方程组为  $(2N + 2)$  个方程，因为这里场方程的（电）场量为复数，包含了振幅与相位，即场方程可以拆解为振幅与相位方程或实部与虚部的“2”个方程。以下简短介绍场方程的推导思路。首先，场方程从 Maxwell 方程开始，根据 §1.4 末尾的讨论，能得到有源的电场方程

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}; t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}; t) = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho(\mathbf{r}; t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}; t) \quad (10.45)$$

将拉普拉斯算子展开写为  $\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ，同时等式两边乘  $e^{i\omega t}$  后对时间积分，可改写成如下形式

$$\left( \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_{\perp}; z) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( c^2 \nabla \rho + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) e^{i\omega t} dt \quad (10.46)$$

其中，等式左边写成时谐形式，等式右边的源物理量  $\rho, \mathbf{J}$  仍然保留时域形式。为了进一步化简，考虑傍轴近似，或者说，电场振幅包络沿着  $z$  方向缓变，此时可将电场写为<sup>15</sup>

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_{\perp}; z) \stackrel{!}{=} e^{ikz} \tilde{\mathbf{E}}_{\omega}(\mathbf{r}_{\perp}; z) = e^{ikz} \frac{1}{2\pi} \iint d\phi e^{ik\phi \cdot \mathbf{r}_{\perp}} \tilde{\mathbf{E}}_{\omega}(\phi; z) \quad (10.47)$$

其中， $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$ ， $\phi = (\phi_x, \phi_y)$  可视为  $\mathbf{r}_{\perp}$  的角度傅里叶变换对。留意这里  $\tilde{\mathbf{E}}_{\omega}$  与  $\tilde{\mathbf{E}}$  的差别。将以上表示式代回有源场方程，利用分部积分化简，有

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{ik}{2} \phi^2 \right) \tilde{\mathbf{E}}_{\omega}(\phi; z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c \lambda^2} \int dt \iint d\mathbf{r}_{\perp} e^{ik(ct-z-\phi \cdot \mathbf{r}_{\perp})} [\mathbf{J}(\mathbf{r}_{\perp}, t; z) - c\rho_e(\mathbf{r}_{\perp}, t; z)\phi] \quad (10.48)$$

考虑电子束的离散分布，对第  $j$  个电子，有

$$\rho = q\delta[z - z_j(t)] \delta[\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp,j}(t)], \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_j(t) \quad (10.49)$$

其中， $q = -e$ 。利用 Delta 函数恒等式

$$\delta[z - z_j(t)] = \frac{\delta[t - t_j(z)]}{|dz/dt_j|} \quad (10.50)$$

则场方程可以进一步化简为

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{ik}{2} \phi^2 \right) \tilde{\mathbf{E}}_{\omega}(\phi; z) = \frac{e [\beta_j(z) - \phi]}{4\pi\epsilon_0 \lambda^2 |dz/dt_j|} e^{ik[ct_j(z) - z - \phi \cdot \mathbf{r}_{\perp,j}(z)]} \quad (10.51)$$

这里的  $z$  为波荡器纵向全域坐标，不是束团内纵向局域坐标。

<sup>15</sup>留意，这里的电场主要分量为横向分量，不是纵向分量。

以上为单个电子形成运流电流的场方程，当电子束包含  $N$  个电子时，有

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{ik}{2} \phi^2 \right) \tilde{\mathcal{E}}_\omega(\phi; z) = \sum_{j=1}^N \frac{e [\beta_j(z) - \phi]}{4\pi\epsilon_0 c \lambda^2} e^{ik[ct_j(z)-z]} \iint d\mathbf{r}_\perp e^{-ik\phi \cdot \mathbf{r}_\perp} \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{\perp,j}) \quad (10.52)$$

其中，分母的  $|dz/dt_j| \rightarrow c$ 。

对一维模型而言，等式右边的二维 Delta 函数可以做如下化简：

$$\iint d\mathbf{r}_\perp e^{-ik\phi \cdot \mathbf{r}_\perp} \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{\perp,j}) \rightarrow \frac{1}{\mathcal{A}_\perp} \iint d\mathbf{r}_\perp e^{-ik\phi \cdot \mathbf{r}_\perp} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{A}_\perp} \delta(k\phi) = \frac{\lambda^2}{\mathcal{A}_{\text{tr}}} \delta(\phi) \quad (10.53)$$

这里用到了二维 Delta 函数的特性。这里可以看到，只有当  $\phi = \mathbf{0}$  时，有非零取值，即一维模型不考虑辐射场的横向角散。此时， $\tilde{\mathbf{E}}_\omega(\mathbf{r}_\perp; z) \rightarrow \tilde{E}_\omega(z)$ 。将波荡器中电子速度的一维解  $\beta_j(z) \rightarrow \beta_{x,j} = (K/\gamma_j) \cos(k_u z)$  代入，有

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{e K \cos(k_u z)}{4\epsilon_0 c \mathcal{A}_\perp \gamma_j} e^{ik[ct_j(z)-z]} \quad (10.54)$$

为了进一步化简，以共振频率  $\omega_1 = ck_1$  为中心频率，定义排除了快速振荡成分、包含相移的电场振幅包络 (phase-shifted electric field amplitude)<sup>16</sup>

$$E_\nu(z) \equiv ck_1 \tilde{E}_\omega(z) \quad (10.55)$$

共振频率或中心频率对应  $\nu = 1$ 。然后，通过引入无量纲 Pierce 参数 (或 FEL 参数)  $\rho$ ，最终可以得到前面介绍的一维、稳态 FEL 场方程。如果考虑时变情况，即考虑  $\Delta\nu = \nu - 1 \neq 0$ ，假设  $\Delta\nu \ll 1$ ，此时调整定义为  $E_\nu(z) \equiv ck_1 e^{-i\Delta\nu k_u z} \tilde{E}_\omega(z)$ 。基本思路一样，但分析较为复杂，细节此处不论。

注意 Delta 函数的量纲。

<sup>16</sup>留意， $E_\nu(z) \neq \tilde{E}_\omega(z)$ 。

## 10.4 低增益 FEL

增益 (gain) 的定义是电子束单次经过波荡器时，辐射场能量的相对改变。辐射场能量(体)密度  $u$  可写为

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (10.56)$$

由能量守恒，辐射场的(体)密度改变  $\Delta u$  意味着电子束能量(体)密度的改变，因此， $\Delta u$  有

$$\Delta u = mc^2 \langle \Delta \gamma \rangle \frac{N_e}{cT\mathcal{A}_\perp} = mc^2 \langle \Delta \gamma \rangle \frac{I}{ec} \frac{1}{\mathcal{A}_\perp} \quad (10.57)$$

其中， $N_e$  为束团内电子总个数，分母的  $cT\mathcal{A}_\perp$  为横纵向三维实空间体积， $\mathcal{A}_\perp$  是电子束与辐射场相互作用的有效截面积，一般写为  $\mathcal{A}_\perp \rightarrow 2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_r^2)$ ，其中， $\sigma_r^2 = \frac{\lambda_1}{4\pi} z_R$ ， $z_R$  为瑞利长度。

**定义 10.7. 增益函数**  $G \equiv -\frac{\Delta u}{u}$

定义增益函数为

$$G \equiv -\frac{\Delta u}{u} \quad (10.58)$$

当单次经过能量交换或改变很小时， $|\Delta u| \ll 1$ ，称低增益 (low gain)；当单次经过能量交换或改变很大时， $|\Delta u| \gg 1$ ，称高增益 (high gain)。

**注**  $u$  与  $\Delta u$  分别量化的对象是辐射场与电子束，因此其能量转移的量相差一个负号。

**注** 此定义与第 13 章定义的微束团不稳定性增益函数  $G(s) \equiv \left| \frac{b(k(s); s)}{b(k(0); 0)} \right|$  稍微不同，宜留意其区别。 □

按上一节最后给出的单次经过、一维 FEL 模型方程，忽略单次经过辐射场的改变，即  $\frac{da}{dz} \rightarrow 0$ ，则可以得到  $2N$  个低增益 FEL 的电子运动方程，有

$$\frac{d\theta}{dz} = 2k_u \eta, \quad \frac{d\eta}{dz} = -\frac{\epsilon}{2k_u L_u^2} \sin \theta \quad (10.59)$$

其中， $\eta \equiv \frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_r} \ll 1$ ， $\epsilon = \frac{eE_0 K[\text{JJ}]}{\gamma_r^2 mc^2} k_u L_u^2$ 。

**练习 10.12** 试着推导如上结果。推导时应注意，这里的  $\eta$  与前面单次经过、一维 FEL 模型定义的  $\eta$  差一个  $\rho$ 。此外，这里的  $\theta$  包含了复辐射场包络函数里的初始相位信息。 ■

从以上  $2N$  个单电子的运动方程，可以反推给出低增益 FEL 哈密顿量。有了哈密顿量，以后处理问题就有现成的工具，能更有系统地分析。

### 定理 10.9. 一维低增益 FEL 方程与哈密顿量

定义归一化能量偏差为  $\eta_j \equiv \frac{\gamma_j - \gamma_r}{\gamma_r} \ll 1$ , 定义缓变相位为  $\theta_j(z) \equiv (k_1 + k_u)z - ck_1\bar{t}_j(z)$ , 则有以下  $2N$  个一维低增益 FEL 方程

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_j}{dz} &= 2k_u\eta_j \\ \frac{d\eta_j}{dz} &= -\frac{\epsilon}{2k_uL_u^2} \sin\theta_j\end{aligned}\quad (10.60)$$

其中,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $z = 0$  为波荡器入口, 波荡器长度  $L_u = N_u\lambda_u$

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{eE_0K[\text{JJ}]}{\gamma_r^2mc^2}k_uL_u^2 = (\Omega_s L_u)^2 \\ [\text{JJ}] &\equiv \mathcal{J}_0\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right) - \mathcal{J}_1\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right)\end{aligned}\quad (10.61)$$

可由此方程构建哈密顿量  $\mathcal{H}(\theta, \eta)$

$$\mathcal{H} = k_u\eta^2 - \frac{\epsilon}{2k_uL_u^2}(\cos\theta - 1) \quad (10.62)$$

**注** 这里的  $\epsilon$  为无量纲归一化电场振幅, 不要与束团发射度符号混淆。 □

眼尖的读者应该已经看出来, 这组方程与单摆的运动方程 (pendulum equation) 无异。首次将低增益 FEL 方程与摆方程联系起来的是 W.B. Colson, 在 1977 年给出, 有时又称 Colson 方程<sup>17</sup>。将  $\frac{d\theta_j}{dz}$  与  $\frac{d\eta_j}{dz}$  合并, 有

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{\epsilon}{k_uL_u^2} \sin\theta = 0 \quad (10.63)$$

当相角很小时,  $\sin\theta \approx \theta$ , 就成了简谐振子。既然是单摆方程, 那么以前大学物理学过的内容就可以套到低增益 FEL 动力学中, 如: 不同初始条件的电子形成的相空间轨迹有图 10.20, 其中,  $(\theta = 0 \pm 2n\pi, \eta = 0)$  为稳定不动点 ( $n$  为整数),  $(\theta = \pm\pi + 2n\pi, \eta = 0)$  为不稳定不动点。进一步可以把 separatrix 的轨迹通过哈密顿量解出来, 有

$$\eta(\theta) = \pm \frac{\sqrt{\epsilon}}{k_uL_u} \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} = \pm \frac{\sqrt{\epsilon}}{k_uL_u} \cos\frac{\theta}{2} \quad (10.64)$$

其中,  $\pm$  分别表示上半与下半曲线。Phase space bucket 的“高”也可解出来, 有

$$\eta_{\max} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{k_uL_u} = \sqrt{\frac{eE_0K[\text{JJ}]}{k_u\gamma_r^2mc^2}} \quad (10.65)$$

前面学过, 电子在相空间中, 当初始条件给定之后, 就在相空间中沿着满足哈密顿量为定值的轨迹绕行, 不同初始条件的电子轨迹在相空间中彼此不会相碰。在 separatrix 内的电子稳定绕行, 受波荡器磁场与电磁辐射场共同形成的位能阱束缚; 在 separatrix 外的电子自由漂移不受拘束。第8章还介绍过同步振荡, 当时说是由 RF 谐振腔引起的纵向振荡造成。此处同样有类似的结果, 电子在相空间 separatrix 稳定区域内也有同步振荡, 其振荡波数由摆方程给出, 小振幅的振荡波数可写成

$$\Omega_s = \frac{\sqrt{\epsilon}}{L_u} = \sqrt{\frac{eE_0K[\text{JJ}]k_u}{\gamma_r^2mc^2}}, \quad z_s \equiv \frac{2\pi}{\Omega_s} \quad (10.66)$$

<sup>17</sup>W.B. Colson, One-body electron dynamics in a free electron laser, Phys. Lett. A **64**, 190-192 (1977). [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(77\)90712-5](https://doi.org/10.1016/0375-9601(77)90712-5).

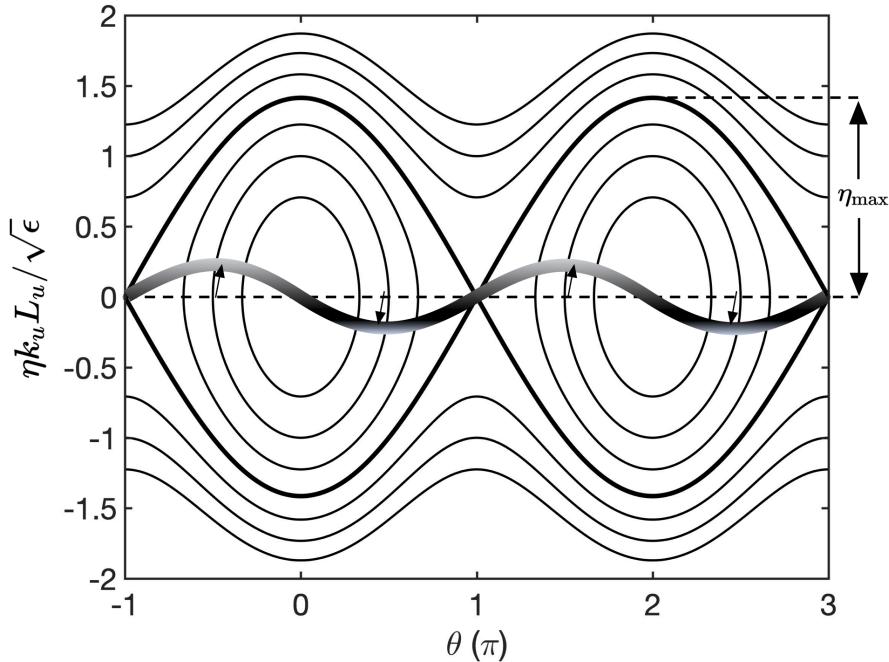


图 10.20: Phase space bucket height 有  $\eta_{\max} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{k_u L_u} = \sqrt{\frac{e E_0 K[\text{JJ}]}{k_u \gamma_r^2 m c^2}}$ 。小振幅同步振荡波数 (synchrotron oscillation wavenumber) 有  $\Omega_s = \frac{\sqrt{\epsilon}}{L_u} = \sqrt{\frac{e E_0 K[\text{JJ}] k_u}{\gamma_r^2 m c^2}}$ 。一次完整同步振荡长度为  $z_s \equiv \frac{2\pi}{\Omega_s}$ 。

其中,  $z_s$  表示电子在相空间中小振幅同步振荡一周对应的在波荡器中行进的距离。一般来说,  $z_s \gg \lambda_u$ 。

练习 10.13 若振荡振幅不再可以以  $\sin \theta \sim \theta$  近似, 推导大振幅的同步振荡波数。 ■

比起高增益 FEL, 低增益 FEL 过程可能相对简单些。摆方程的求解可以按微扰法从零阶开始逐阶求解, 再由解得的电子相空间坐标 — 特别是能量偏差坐标  $\eta$  — 反推得到增益函数  $G$ 。细节不论, 以下仅总结几个重要步骤。假设  $\epsilon \equiv (\Omega_s L_u)^2 \ll 1$ , 将解按如下形式展开

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0(z) + \epsilon \theta_1(z) + \epsilon^2 \theta_2(z) + \dots \\ \eta &= \eta_0(z) + \epsilon \eta_1(z) + \epsilon^2 \eta_2(z) + \dots\end{aligned}\tag{10.67}$$

由微扰法<sup>18</sup>, 给出电子初始条件  $(\theta_0, \eta_0)$ , 有零阶方程及其解

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_0}{dz} &= 0 \Rightarrow \eta_0 = \text{const} \\ \frac{d\theta_0}{dz} &= 2k_u \eta_0 \Rightarrow \theta_0(z) = 2k_u \eta_0 z + \phi_0\end{aligned}\tag{10.68}$$

其中, 先解能量方程, 再解相位方程。

<sup>18</sup>利用微扰法求解耦合微分方程组时, 一般需明确求解方程的顺序。对推导细节感兴趣的读者, 可参考 Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, *Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers – Principles of Coherent X-Ray Generation*, Cambridge University Press (2017) 一书的 §3.3.1。

一阶方程及其解有

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_1}{dz} &= -\frac{1}{2k_u L_u^2} \sin \theta_0 \Rightarrow \eta_1(z) = -\frac{1}{2k_u L_u^2} \int_0^z dz' \sin \theta_0(z') = \frac{\cos \theta_0(z) - \cos \phi_0}{4k_u^2 L_u^2 \eta_0} \\ \frac{d\theta_1}{dz} &= 2k_u \eta_1 \Rightarrow \theta_1(z) = \frac{\sin \theta_0(z) - \sin \phi_0}{(2k_u L_u \eta_0)^2} - \frac{z \cos \phi_0}{2k_u L_u^2 \eta_0}\end{aligned}\quad (10.69)$$

其中，先解能量方程，再解相位方程。

二阶方程及其解有

$$\begin{aligned}\frac{d\eta_2}{dz} &= -\frac{\theta_1(z)}{2k_u L_u^2} \cos \theta_0(z) \\ \Rightarrow \eta_2(L_u) &= -\int_0^{L_u} dz \left[ \frac{\cos \theta_0(\sin \theta_0 - \sin \phi_0)}{(2k_u L_u^2)(2k_u L_u \eta_0)^2} - \frac{z \cos \theta_0 \cos \phi_0}{(2k_u L_u^3)(2k_u L_u \eta_0)} \right]\end{aligned}\quad (10.70)$$

为什么没写出相位的二阶方程及其解？给出上面这些解能给我们什么物理图像？

首先，先看一下  $\eta_1(z)$  的解。如果将  $\eta_1(z)$  对相位  $\theta_0$  取平均，将得到  $\langle \eta_1(z) \rangle_{\phi_0} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta_1(z) d\theta_0 = 0$ ，意思是，如果现在有一电子束，束团中的许多电子均匀分布在  $[-\pi, \pi]$  范围内，则这些电子与辐射场交互作用后将没有净能量转移，因为  $\langle \eta_1(z) \rangle_{\phi_0} = 0$ ，即束团内恰好有一半的电子失去能量给辐射场，另一半的电子从辐射场得到能量，扯平。现在我们看一下，当把  $\theta_0(z)$  以零阶解代入之后，会发生什么情况？意思是，当电子在波荡器中行进一段距离  $z$  之后，相位从  $\theta_0$  变成  $\theta_0(z)$  之后， $\eta_1(z)$  就有上式形式，但是我们稍稍再化简一些，假设电子在波荡器中没有走太远  $k_u \eta_0 z \ll 1$ ，则

$$\begin{aligned}\epsilon \eta_1(z) &= -\frac{eE_0 K[\text{JJ}] k_u L_u^2}{\gamma_r^2 mc^2} \frac{\cos(2k_u \eta_0 z + \phi_0) - \cos \phi_0}{4k_u^2 L_u^2 \eta_0} \\ &\approx -\frac{eE_0 K[\text{JJ}]}{2\gamma_r^2 mc^2} \frac{\sin(2k_u \eta_0 z) \sin(\phi_0)}{2k_u \eta_0} \approx -\frac{eE_0 K[\text{JJ}]}{2\gamma_r^2 mc^2} z \sin \phi_0\end{aligned}\quad (10.71)$$

此式表明，在一阶近似下，尽管束团整体没有净能量转移，但是电子束已经受到辐射场“调制”，更准确说，受到辐射场的“能量调制”，即  $\eta_1 \propto \sin \theta_0$ ，不同初始相位的电子将按正弦函数形式  $\sin \theta_0$  得到能量调制。当能量调制进一步迭代，演变成“相位调制”<sup>19</sup>时，增益将体现在  $\epsilon$  的二阶项。将上面  $\eta_2(L_u)$  对相位  $\theta_0$  取平均，有

$$\begin{aligned}\langle \eta_2(L_u) \rangle_{\phi_0} &= -\frac{1}{2k_u L_u^2} \int_0^{L_u} dz \left[ \frac{\sin(2k_u \eta_0 z)}{(2k_u L_u \eta_0)^2} - \frac{z \cos(2k_u \eta_0 z)}{L_u (2k_u L_u \eta_0)} \right] \\ &= \frac{2x \sin x \cos x - 2 \sin^2 x}{8k_u L_u x^3} = \frac{1}{16k_u L_u} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2\end{aligned}\quad (10.72)$$

其中， $x = k_u \eta_0 L_u$ 。

#### 练习 10.14 试着推导以上结果。

<sup>19</sup>或称密度调制。

**解** 算相位平均时，将用到以下积分：

$$\langle \cos \theta_0 \sin \theta_0 \rangle_{\phi_0} = \frac{1}{2} \langle \sin 2\theta_0 \rangle_{\phi_0} = 0$$

$$\langle \cos \theta_0 \sin \phi_0 \rangle_{\phi_0} = \langle [\cos(2k_u \eta_0 z) \cos \phi_0 - \sin(2k_u \eta_0 z) \sin \phi_0] \sin \phi_0 \rangle_{\phi_0} = \frac{1}{2} \sin(2k_u \eta_0 z)$$

$$\langle \cos \theta_0 \cos \phi_0 \rangle_{\phi_0} = \frac{1}{2} \cos(2k_u \eta_0 z)$$

留意  $\theta_0$  与  $\phi_0$  的区别。

定义电子能量获得或辐射能量损失为  $\langle \Delta\eta \rangle = \langle \epsilon^2 \eta_2(L_u) \rangle$ ，则有

$$\langle \Delta\eta \rangle = \langle \epsilon^2 \eta_2(L_u) \rangle = -\frac{e^2 E_0^2 K^2 [JJ]^2}{4\gamma_r^4 (mc^2)^2} \frac{k_u L_u^3}{4} g(x) \quad (10.73)$$

其中，

$$g(x) = -\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2, \quad x = k_u \eta_0 L_u \quad (10.74)$$

有些读者或许纳闷，为什么推导中特别引入  $g(x)$ ，似乎写出 sinc 函数显得格外别扭。其实， $g(x)$  这一项正是表征波荡器辐射与 FEL 紧密关联的物理内涵的一项！数学上， $g(x)$  即波荡器辐射谱的一阶微分，形如图 10.21。

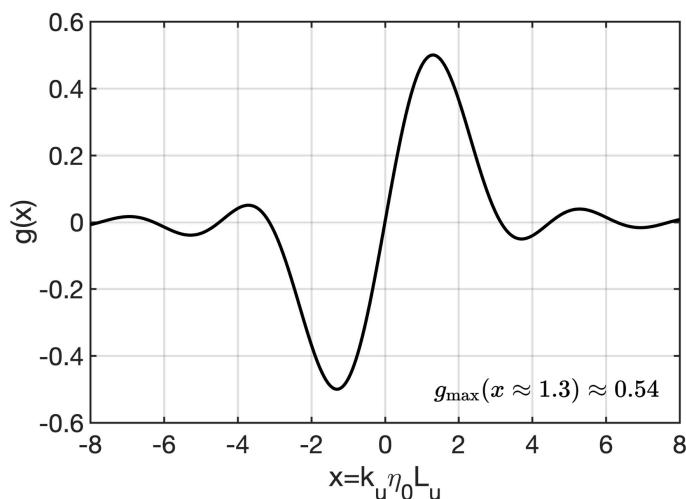


图 10.21：低增益 FEL 的归一化增益函数。 $g(x)$  为正表示辐射场振幅增加，电子束净能量损失。

图 10.21 告诉我们，单个电子转移给辐射场的能量大小  $\langle \Delta\eta \rangle$  取决于  $x = k_u \eta_0 L_u$ ，即电子的初始能量偏差  $\eta_0$ 。当电子的初始能量偏差比波荡器参数所对应的共振能量稍低时，即  $\eta_0 = \frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_r} < 0$  时，此种情况很可能无法将能量转移给辐射场，因为图 10.21 在  $x < 0$  的大多数区域<sup>20</sup> 中， $g(x) < 0$ 。反之，当电子的初始能量偏差比波荡器参数所对应的共振能量稍高时，即  $\eta_0 = \frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_r} > 0$  时，或者  $x \approx 1.3$  时，此种情况的电子能最大程度地将能量转移给辐射场，且此时的  $g(1.3) \approx 0.54$ 。

<sup>20</sup>除了在  $-4.5 < x < -3$  或  $x \approx -7$  等的少数区域存在小得多的正增益。

 **笔记** 回顾或复习第一册讲义 §5.3。

 **笔记** 以上推导给出了  $\langle \Delta\eta \rangle$ , 根据  $\Delta u = mc^2 \langle \Delta\gamma \rangle \frac{N_e}{cT\mathcal{A}_\perp} = mc^2 \langle \Delta\gamma \rangle \frac{I}{ec\mathcal{A}_\perp} \frac{1}{\lambda_u}$ , 也可以把增益函数  $G \equiv -\frac{\Delta u}{u}$  写出来。

$$\begin{aligned} G &= -\frac{2\pi\lambda_1^2}{mc^2\mathcal{A}_{\text{tr}}} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left. \frac{dP}{d\omega d\phi} \right|_{\phi=0} = \frac{I}{I_A} \frac{4\pi^2 K^2 [\text{JJ}]^2}{\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \frac{\gamma N_u^3 \lambda_1^2}{\mathcal{A}_{\text{tr}}} g(x) \\ &\leq 8\pi^2 \frac{I}{I_A} \frac{K^2 [\text{JJ}]^2}{\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \frac{\gamma N_u^2 \lambda_1}{\lambda_u} g(x) \end{aligned} \quad (10.75)$$

其中,  $I_A \equiv ec/r_e \equiv 4\pi\epsilon_0 mc^3/e \approx 17045 \text{ A}$  为 Alfvén 电流, 视为一物理常数。

以上  $\leq$  的等号成立为理想情况, 当满足以下几个条件时成立:

1. 电子束与辐射场横向分布为高斯分布, 其束腰 (waist) 尺寸分别为  $\sigma_x$  与  $\sigma_r$ , 即有  $\mathcal{A}_{\text{tr}} \rightarrow 2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_r^2)$ ,  $\sigma_r^2 = \frac{\lambda_1}{4\pi} Z_R$ ;
2. 瑞利长度  $Z_R$  选为  $Z_R = L_u/2$  时;
3. 电子束与辐射场为最优重叠时, 即  $\mathcal{A}_{\text{tr}} \approx 2 \times 2\pi\sigma_r^2 = \lambda_1 Z_R = \lambda_1 \lambda_u N_u/2$ 。

低增益 FEL 的电子或辐射场能量偏差与波荡器辐射谱的一阶微分紧密关联, 也与电子束能散相互有关。此一事实称 **Madey 定理 (Madey theorem)**, 已经由实验证实。

### 定理 10.10. Madey 定理

将上面函数  $g(x)$  与波荡器功率频谱角分布比较后, 发现电子能量损失与波荡器(自发)辐射能量增益可以关联起来。并且, 电子能量损失  $\langle \Delta\eta \rangle$  与能散  $\langle \eta^2 \rangle$  也可以互相关联。此定理称 **Madey 定理**, 其数学形式为

$$\langle \Delta\gamma \rangle = \frac{\pi\lambda^2 c T}{N_e} \frac{\epsilon_0 E_0^2}{(mc^2)^2} \left. \frac{\partial}{\partial\gamma} \frac{d^2 P_u}{d\omega d\phi} \right|_{\phi=0} \quad [\text{Madey 第一定理}] \quad (10.76)$$

$$\langle \Delta\eta \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\eta_0} \langle \eta^2 \rangle \quad [\text{Madey 第二定理}] \quad (10.77)$$

其中,

$$\langle \eta^2 \rangle \equiv \langle (\epsilon\eta_1)^2 \rangle = \frac{e^2 E_0^2 K^2 [\text{JJ}]^2}{4\gamma_r^4 (mc^2)^2} \frac{L_u^2}{2} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \quad (10.78)$$

其中,  $\eta \equiv \frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_r} \ll 1$ 。

**注** Madey 第一定理或者写成  $\langle \Delta\eta \rangle \propto g(\eta_0) \propto \frac{d}{d\eta_0} \mathcal{S}(\omega, \eta_0) \propto -\frac{d}{d\omega} \mathcal{S}(\omega, \eta_0)$ , 其中,  $\mathcal{S}$  为波荡器功率频谱角函数。

**注** Madey 第一定理体现为能量守恒, 同时揭示了自发辐射  $\frac{d^2 P_u}{d\omega d\phi}$  与受激辐射  $\langle \Delta\eta \rangle$  之间的深刻关联。

**注** Madey 定理为低增益 FEL 机制的重要结果。并且，其适用性不限于 FEL，对一般低增益的电子束与电磁场交互作用均成立，唯形式可能稍有不同。如果非 FEL 情况，则应从哈密顿量开始。



**笔记** 由于 Madey 定理具有一般性，其推导可以通过如下不同方式得到：

- 粒子动力学 (即此讲义介绍的)  $\Rightarrow$  将单摆方程按微扰法求解到二阶
- 辐射场动力学
- 量子力学方法  $\Rightarrow$  最初 Madey 的分析<sup>21</sup> 即基于此法<sup>22</sup>

甚至还能推广到包含三维效应 (目前介绍的方法仅考虑纵向一维)  $\Rightarrow$  在一个主题上多方琢磨，此即 Kwang-Je Kim 教授所谓的“variations on a theme.”



**笔记** 从应用角度看，Madey 定理不限于 FEL 辐射机制，对低增益的电子束与电磁场交互作用均成立。因此，对低增益情况，如果单电子的辐射功率频谱分布能算的很准，那么可以用此定理算电子能量损失或能散。

上面基于微扰法的分析是假设当外部辐射场很小时才成立，即  $\epsilon \ll 1$ ，称小信号低增益 FEL 区间 (small-signal low-gain FEL)。当  $\epsilon \sim \mathcal{O}(1)$  时，微扰法不再适用，称大信号低增益 FEL 区间 (large-signal low-gain FEL)，或称饱和区间。对接近增益“饱和”区间的完整讨论，将需要求解任意  $\epsilon$  大小的摆方程，一般没有解析解，通常通过数值求解。图 10.22 画出低增益 FEL 接近饱和时，单次经过在波荡器入口处、中间和出口处附近的电子相空间分布。可以看到，在波荡器入口处 (a)，辐射场在 separatrix 或称有质动力相 (ponderomotive phase) 稳定区内俘获了大部分电子，束流很快形成能量调制，从正弦形式开始，很快扭曲而偏离正弦分布。接着，随着束流在相空间中沿波荡器  $z$  的演化，其能量调制转化成了图 10.22(b) 所示的在  $\lambda_1$  上的相位或密度调制。此时，约经过了波荡器长度的一半，且电子束与辐射场之间的净能量交换相对较小 (一半电子束吸收能量，一半电子束释放能量)。在波荡器的出口处 (c)，束流在相空间中的旋转使得更多电子进入 separatrix 下半部分，意味着束团中多数电子将能量转移给辐射场。最大能量交换发生在电子绕行半个同步振荡周期时，即  $\Omega_s L_u = \sqrt{\epsilon} \approx \pi$ ，此时单个电子能量损失为

$$m_e c^2 \gamma \eta_{\max} = m_e c^2 \gamma \frac{\sqrt{\epsilon}}{k_u L_u} = m_e c^2 \gamma \frac{1}{2N_u} \quad (10.79)$$

此时，波荡器净功率有

$$P = \text{效率} \times P_{\text{beam}} \approx \frac{1}{2N_u} P_{\text{beam}} \quad (10.80)$$

其中， $P_{\text{beam}} = (I/e) \gamma m_e c^2$ 。

<sup>21</sup>根据当时的时空背景，在 FEL 刚被提出来时，加速器社群还不知道 FEL 应该用经典电动力学方法或者用量子力学方法描述。

<sup>22</sup>原始论文 J.M.J. Madey, Relationship between mean radiated energy, mean squared radiated energy and spontaneous power spectrum in a power series expansion of the equations of motion in a free-electron laser, Nuov Cim B **50**, 64-88 (1979). <https://doi.org/10.1007/BF02737622>、或参考 Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers – Principles of Coherent X-Ray Generation, Cambridge University Press (2017) 一书的附录 §C.3。

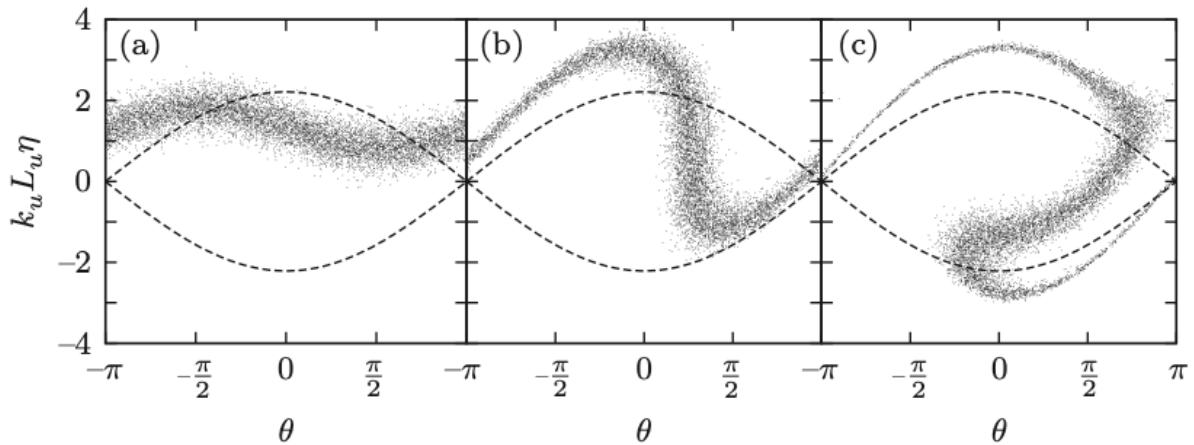


图 10.22: 低增益 FEL 振荡器接近饱和时, 电子束在波荡器 (a) 入口处、(b) 中间和 (c) 出口处的纵向相空间分布。虚线为相稳定区的分界线, 最初的束流中心能量由  $k_u L_u \eta \approx 1.3$  给出 (此能量对应最大增益)。此图取自 Kim, Huang and Lindberg 一书。

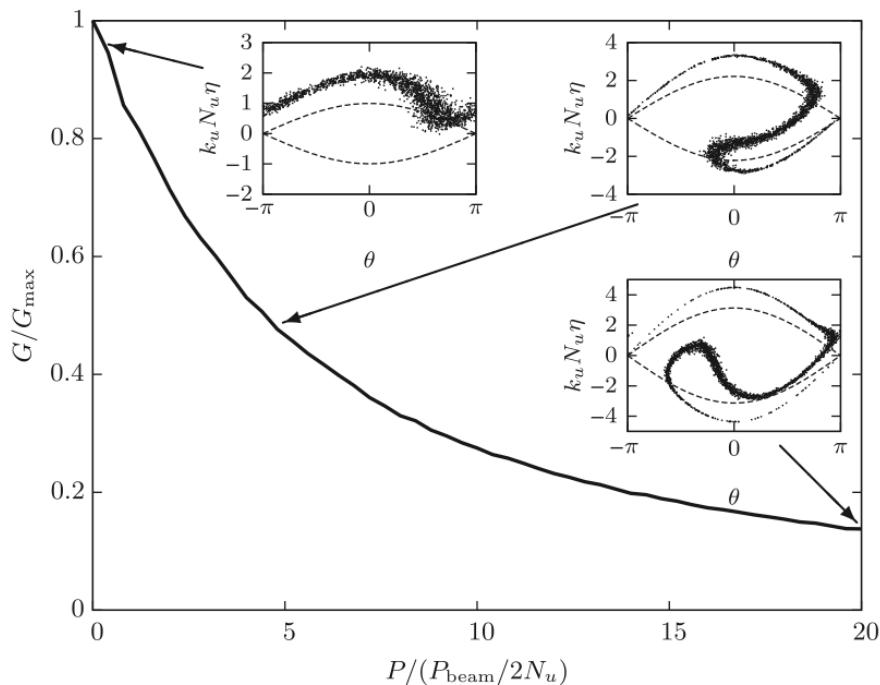


图 10.23: 增益降低随输入辐射功率  $P$ (对  $P_{beam}/2N_u$  归一化) 变化的模拟结果, 其中, 内插图分别为  $P/(P_{beam}/2N_u) = 0.2, 5$  和  $20$  时的粒子相空间分布(散点)和分界线(虚线, 根据波荡器末端处的辐射电场计算得到)。此图取自 Kim, Huang and Lindberg 一书。

### 性质 10.3. 低增益 FEL 的特性

由图 10.21, 可以得到如下特性:

- 对于  $N_u$  周期的波荡器, 最大增益发生在  $x = 2\pi N_u \eta_0 \approx 1.3$  时, 有  $\max g(x) \approx 0.54$ , 对应的初始能量偏差为  $\frac{\gamma_0 - \gamma_r}{\gamma_r} \Big|_{\text{最大增益}} = \frac{1.3}{2\pi N_u} \approx \frac{1}{5N_u}$
- 低增益 FEL 辐射场频宽约有  $\frac{\sigma_\omega}{\omega_r} \sim 2\Delta\eta \sim \frac{1}{3N_u}$

由图 10.22 与图 10.23, 当低增益 FEL 接近饱和时, 有如下特性:

- 最大能量交换发生在电子绕行半个同步振荡周期时, 即  $\Omega_s L_u = \sqrt{\epsilon} \approx \pi$ , 此时单个电子能量损失为

$$m_e c^2 \gamma \eta_{\max} = m_e c^2 \gamma \frac{\sqrt{\epsilon}}{k_u L_u} = m_e c^2 \gamma \frac{1}{2N_u} \quad (10.81)$$

振荡器理想功率有

$$P = \text{效率} \times P_{\text{beam}} \approx \frac{1}{2N_u} P_{\text{beam}} \quad (10.82)$$

其中,  $P_{\text{beam}} = (I/e) \gamma m_e c^2$  为电子束功率。

- 当输入的外部辐射功率超过  $\frac{1}{2N_u} P_{\text{beam}}$  时, 增益将随之减小。此时, 同步振荡更快, 开始存在一部分电子从辐射场吸收能量。



**练习 10.15** 试着写一段代码, 数值求解低增益 FEL 摆方程, 重复图 10.21、图 10.22、图 10.23 的结果。 ■

**练习 10.16** 对理论推导感兴趣的读者, 可试着推导图 10.23 中,  $G(P)$  的近似公式。 ■

回顾一下, 以上介绍低增益 FEL 的物理过程, 我们没有真的将辐射场的动力学纳入分析, 辐射场的能量仅通过能量守恒与电子束损失/获得的能量联系。目前的讨论不涉及辐射场与电子之间的相位。关于辐射场的更完整分析需要包含场方程。在继续讨论之前, 不妨想一下, 电子束辐射产生电磁场, 两者之间的相位差是否随着电子束在波荡器中前进一直保持恒定相位差? 先讲答案, 相位差随着电子束在波荡器中前进并不保持恒定: 在低增益阶段, 电子束与辐射场同相位; 在高增益的前 2/3 指数增益阶段, 电子束与辐射场相位差约  $\pi/3$ ; 接近饱和时与后饱和阶段, 电子束与辐射场的相位差关系较复杂, 电子束与辐射场的相位交错领先、滞后。更多讨论可参考 §10.5.1。

#### 10.4.1 浅谈: [JJ]

细心的读者可能留意到了上一节介绍单次经过、一维、稳态或时变 FEL 模型与无量纲 Pierce 参数  $\rho$  时, 包含这一节介绍的低增益 FEL, 偶尔会看到 [JJ] 因子。这里的 [JJ] 因子可以单纯将它看成定义, 对平面型波荡器有

$$[\text{JJ}] = \mathcal{J}_0 \left( \frac{K^2}{4 + 2K^2} \right) - \mathcal{J}_1 \left( \frac{K^2}{4 + 2K^2} \right) \quad (10.83)$$

其中,  $K$  为波荡器参数。有些好奇的读者或许会想知道这个量是怎么来的? 我们在 §10.2 含糊带过没有细说, 这里简短说明一下。

物理上, [JJ] 因子的存在是考虑了在波荡器中, 电子纵向运动速度受横向扭摆运动调制而导致的结果。

数学上, 从 §5.2 知,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{Kc}{\gamma} \sin(k_u z) \quad (10.84)$$

于是<sup>23</sup>,

$$\begin{aligned} v_z &= \sqrt{v^2 - v_x^2} \approx v \left( 1 - \frac{v_x^2}{2c^2} \right) \\ &= v \left[ 1 - \frac{K^2}{2\gamma^2} \sin^2(k_u z) \right] = v \left[ 1 - \frac{K^2}{4\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos(2k_u z) \right] \quad (10.85) \\ &\approx \bar{v}_z + \frac{cK^2}{4\gamma^2} \cos(2k_u z) \end{aligned}$$

电子经过波荡器对应的时间坐标有<sup>24</sup>

$$t = \bar{t} + \frac{K^2}{\bar{v}_z k (4 + 2K^2)} \sin(2k_u z) \approx \bar{t} + \frac{K^2}{\omega (4 + 2K^2)} \sin(2k_u z) \quad (10.86)$$

回顾 §10.2 的能量改变式子

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{eE_0 K c}{mc^2 \gamma} \cos(k_u z) \sin(kz - \omega t + \phi) \quad (10.87)$$

留意, 当时我们规定相位为  $\theta \approx (k + k_u)z - \omega t + \phi$ 。准确来说, 应该写为

$$\begin{aligned} \theta &\equiv (k + k_u)z - \omega \bar{t} + \phi \\ &= (k + k_u)z - \omega \left( t - \frac{K^2}{\omega (4 + 2K^2)} \sin(2k_u z) \right) + \phi \end{aligned} \quad (10.88)$$

其中,  $\bar{t}$  由上式给出。

现在, 能量改变式等式右边的  $\cos(k_u z) \sin(kz - \omega t + \phi)$  可以更细致处理。由  $kz - \omega t + \phi = \theta - k_u z - \omega(\dots)$ , 有

$$\begin{aligned} &\cos(k_u z) \sin(kz - \omega t + \phi) \\ &= \frac{e^{ik_u z} + e^{-ik_u z}}{2} \frac{1}{2i} \left[ e^{i(kz - \omega t + \phi)} - e^{-i(kz - \omega t + \phi)} \right] \\ &= \frac{e^{ik_u z} + e^{-ik_u z}}{2} \frac{1}{2i} \left[ e^{i(\theta - k_u z - \omega \cdot \frac{K^2 \sin 2k_u z}{\omega(4+K^2)})} - e^{-i(\theta - k_u z - \omega \cdot \frac{K^2 \sin 2k_u z}{\omega(4+K^2)})} \right] \quad (10.89) \\ &= \frac{e^{ik_u z} + e^{-ik_u z}}{2} \frac{1}{2i} \left\{ e^{i\theta} e^{-ik_u z} \exp \left[ -i \frac{K^2}{4 + 2K^2} \sin(2k_u z) \right] \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\theta} e^{ik_u z} \exp \left[ i \frac{K^2}{4 + 2K^2} \sin(2k_u z) \right] \right\} \end{aligned}$$

<sup>23</sup>有些教科书可能写成  $v_z = \bar{v}_z - \frac{cK^2}{4\gamma^2} \cos(2k_u z)$ 。这里的加减号是由于磁场定义成 sin 或 cos 导致, 由于  $\sin(2k_u z)$  或  $\cos(2k_u z)$  有相同振荡周期, 不影响结论。

<sup>24</sup>由 FEL 共振关系  $\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} \right)$ , 可以得到

$$\frac{k}{8\gamma^2 k_u} = \frac{1}{4 + 2K^2}$$

其中,  $k = 2\pi/\lambda$ 。

利用 Jacobi-Anger 恒等式  $e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}$ , 可以进一步化简写成

$$\begin{aligned} \cos(k_u z) \sin(kz - \omega t + \phi) &= \frac{e^{i\theta}}{4i} \sum_n J_n \left( \frac{K^2}{4+2K^2} \right) [e^{-2ink_u z} + e^{-2i(n+1)k_u z}] \\ &\quad - \frac{e^{-i\theta}}{4i} \sum_n J_n \left( \frac{K^2}{4+2K^2} \right) [e^{2ink_u z} + e^{2i(n+1)k_u z}] \end{aligned} \quad (10.90)$$

可以看到, 能够维持电子与场交互作用的前提是彼此相位在波荡器中不随  $z$  改变, 即  $\theta - 2nk_u z$  与  $\theta - 2(n+1)k_u z$  尽量不随  $z$  改变<sup>25</sup>, 即要求  $n = 0$  与  $n = -1$ , 因此求和为

$$\sum_n \rightarrow J_0(\dots) + J_{-1}(\dots) = J_0(\dots) - J_1(\dots) \equiv [\text{JJ}] \quad (10.91)$$

留意,  $[\text{JJ}] < 1$ 。

由于电子纵向运动速度受横向扭摆运动调制而有此  $[\text{JJ}]$  因子, 改变了电子与场的耦合; 更准确地说, 弱化了电子与场的耦合。以上分析是基于平面型波荡器, 对螺旋型波荡器,  $[\text{JJ}] = 1$ , 且这里介绍的背波荡器参数  $K$  应改为  $\sqrt{2}K$ 。

---

<sup>25</sup>共轭项里面的相位则要求  $-(\theta - 2nk_u z)$  与  $-[\theta - 2(n+1)k_u z]$  尽量不随  $z$  改变。

## 10.5 高增益 FEL：一维

前一节介绍了低增益 FEL，可再细分小信号  $\epsilon \ll 1$  或大信号  $\epsilon \sim \mathcal{O}(1)$ 。无论是小信号或大信号，低增益表征的是  $G \equiv -\frac{\Delta u}{u} \ll 1$ 。这一节与下一节将介绍高增益 FEL，即  $G \equiv -\frac{\Delta u}{u} \gg 1$  情况，也可细分小信号  $\epsilon \ll 1$  或大信号  $\epsilon \sim \mathcal{O}(1)$ 。但是，我们不再用  $\epsilon$  描述，而回到 §10.3 末尾的单次经过、一维 FEL 模型，改采用  $a$  归一化复辐射场。并且，当时引入的无量纲 Pierce 参数（或 FEL 参数）将在高增益 FEL 扮演关键角色。

小信号  $\neq$  低增益；大信号  $\neq$  高增益

上一节介绍低增益 FEL 时，忽略电子束单次经过波荡器时辐射场的动力学过程，即假设  $\frac{da}{dz} = 0$ 。一般专门介绍自由电子激光的教科书在讨论高增益 FEL 时，将从 Maxwell 方程开始，逐步推导得到简化的场方程  $\frac{da}{dz} = -\langle e^{-i\theta_j} \rangle$ 。前面我们已经略过了推导细节，有兴趣的读者可以参考 Kim, Huang, and Lindberg 一书的 §3.4.1。接着面临的挑战是需要求解一组  $(2N + 1)$  个耦合的一阶微分方程组，形式自然不再像是摆方程那么简单。较正式、完整的方法会将  $2N$  个电子运动方程以一个相空间分布函数需要遵循的动力学方程描述，并采用拉普拉斯变换，将电子束分布函数方程与场方程放在一起求解。

为避免分析过于复杂，此处我们介绍一种基于集体参数的方法求解此组方程，适用范围为当高增益 FEL 操作在“线性”或“指数增长”区间。此方法由 R. Bonifacio 等人在 1984 年提出，是一种非常漂亮、深具物理洞见的求解方法！



**笔记** 思考一下，电子进入波荡器时，它“知道”将经历低增益或高增益过程吗？高增益模型能完整包含低增益模型的物理图像吗？

在介绍 R. Bonifacio 的集体参数模型之前，这里先总结 §10.3 末尾给出的  $(2N + 1)$  单次经过、一维 FEL 模型方程如下：

$$\frac{d\theta_j}{d\hat{z}} = \eta_j \quad (10.92)$$

$$\frac{d\eta_j}{d\hat{z}} = ae^{i\theta_j} + a^*e^{-i\theta_j} \quad (10.93)$$

$$\frac{da}{d\hat{z}} = -\langle e^{-i\theta_j} \rangle \quad (10.94)$$

其中，下标  $j = 1, 2, \dots, N$  为个别电子的标注 (index)。现在，定义如下三个集体变量 (collective variable)：

$$\begin{aligned} a &\quad (\text{归一化复辐射场}) \\ b = \langle e^{-i\theta_j} \rangle &\quad (\text{群聚因子、密度调制}) \\ P = \langle \eta_j e^{-i\theta_j} \rangle &\quad (\text{集体动量、能量调制}) \end{aligned} \quad (10.95)$$

Bonifacio 正是利用这三个绝妙的集体变量，将上面  $(2N + 1)$  个方程化简为三个方程，分别表征辐射场、群聚因子、集体动量的演化方程。下面将发现，仅用这三个方程竟然就能很好地描述高增益 FEL 操作在“线性”或“指数增长”区间的许多动力学过程。不

仅大大减少了计算量，还可以给出基于集体变量的解析解，同时挖掘出高增益 FEL 背后的物理图像！

**注** 这里所谓的“线性”或“指数增长”区间指的是三个集体变量处于  $|a|, |b|, |P| \ll 1$ 。

利用以上三个集体变量中群聚因子的定义，辐射场方程可以很快写成

$$\frac{da}{d\hat{z}} = -b \quad (10.96)$$

接着，将群聚因子的定义式两边同时对  $\hat{z}$  微分，利用以上三个集体变量中集体动量的定义，则有

$$\frac{db}{d\hat{z}} = -iP \quad (10.97)$$

最后，将集体动量的定义式两边同时对  $\hat{z}$  微分，得

$$\frac{dP}{d\hat{z}} = \left\langle \frac{d\eta_j}{d\hat{z}} e^{-i\theta_j} \right\rangle - i \left\langle \eta_j^2 e^{-i\theta_j} \right\rangle = a + a^* \left\langle e^{-2i\theta_j} \right\rangle - i \left\langle \eta_j^2 e^{-i\theta_j} \right\rangle \rightarrow a \quad (10.98)$$

其中，等式最后一步是将非线性项  $\langle e^{-2i\theta_j} \rangle$  与高阶小项  $\langle \eta_j^2 e^{-i\theta_j} \rangle$  舍去，在“线性”或“指数增长”区间是成立<sup>26</sup>的。这么做之后，就得到一维 FEL 集体参数模型，总结为如下定理。

### 定理 10.11. 一维 FEL 集体参数模型

利用 Bonifacio 集体变量，可以将一维 FEL 模型的  $(2N + 1)$  个方程化简为以下三个方程

$$\frac{da}{d\hat{z}} = -b \quad (10.99)$$

$$\frac{db}{d\hat{z}} = -iP \quad (10.100)$$

$$\frac{dP}{d\hat{z}} = a \quad (10.101)$$

其中， $\hat{z} = 2k_u \rho z$ ， $z$  为波荡器坐标， $\rho$  为 Pierce/FEL 参数。上面三式由上至下的物理含义分别为：群聚产生相干辐射 ( $b \rightarrow a$ )、能量调制变为密度调制 ( $P \rightarrow b$ )、相干辐射驱动能量调制 ( $a \rightarrow P$ )。

**证明** 自行练习。 □

上面提到，这三个方程将体现高增益 FEL 操作在线性区间的许多动力学过程。现在考虑将这三个一阶微分方程写成一个三阶微分方程，有

$$\frac{d^3a}{d\hat{z}^3} = ia \quad (10.102)$$

此时，假设解有  $a \sim e^{-i\mu\hat{z}}$  形式<sup>27</sup>，则微分方程转化为代数方程形式，有

$$\mu^3 = 1 \quad (10.103)$$

<sup>26</sup>“线性”项指的是保留这些集体变量至一阶，合理。但是，这里读者可能会有疑惑：为什么还称“指数增长”？下面很快会发现，这里的小量  $a, b, P$  将会随着  $\hat{z}$  线性增长。也就是说， $a, b, P$  是小量，因此在 Bonifacio 集体变量方程中只存在一阶/线性项，但是这些量的演化是指数增长的，因此称“线性”或“指数增长”都不为过。

<sup>27</sup>这个形式是猜的，事后验证这么猜是正确的。

此式又称一维高增益 FEL 的色散方程，其中，三个“根”为

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad \mu_3 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad (10.104)$$

此三个根又称方程的特征值。高等数学学过，微分方程的特征值表征的是此微分动力系统的稳定性。

**练习 10.17** 证明这三个根满足以下特性：

$$\sum_{\ell=1}^3 \mu_\ell = 0, \quad \sum_{\ell=1}^3 \frac{1}{\mu_\ell} = \sum_{\ell=1}^3 \mu_\ell^* = \sum_{\ell=1}^3 \mu_\ell^2 = 0 \quad (10.105)$$

■

有了这三个特征值，完整的解可以写成

$$a(\hat{z}) = \sum_{\ell=1}^3 C_\ell e^{-i\mu_\ell \hat{z}} \quad (10.106)$$

其中， $C_\ell$  由初始条件  $a(z=0), b(z=0), P(z=0)$  决定。写成初始条件形式，有

$$a(\hat{z}) = \frac{1}{3} \sum_{\ell=1}^3 \left[ a(0) - i \frac{b(0)}{\mu_\ell} - i \mu_\ell P(0) \right] e^{-i\mu_\ell \hat{z}} \quad (10.107)$$

现在，回头审视一下  $\mu_{1,2,3}$ ，会发现，辐射场是否增长，取决于  $\mu$  的虚部。当  $\mu$  的虚部为负时，解呈现指数增长。由此，当波荡器足够长时， $\hat{z} \gg 1$ ，上面的解可以近似写为

$$a(\hat{z}) \approx \frac{1}{3} \left[ a(0) - i \frac{b(0)}{\mu_3} - i \mu_3 P(0) \right] e^{-i\mu_3 \hat{z}} \quad (10.108)$$

括号中的第一项  $a(0)$  代表外部辐射信号的相干放大，第二项  $b(0)$  和第三项  $P(0)$  则反映电子束的密度调制和能量调制导致的 FEL 输出。当这些  $b(0), P(0)$  调制是源自于电子束自身的散粒噪声 (shot noise) 时，高增益指数增长被称为自放大自发辐射 (self-amplified spontaneous emission, SASE)，前面图 10.19 已定性介绍过的机制。

注意到，当初引入集体变量时，有一个假设是  $|a|, |b|, |P| \ll 1$ 。换句话说，当  $|a|, |b|, |P|$  指数增长至幅值接近于 1 时，模型将失效。此时也表征“线性”或“指数增长”区间结束，系统将进入“饱和”(saturation)。饱和动力学更为复杂，下面我们先讨论一些高增益 FEL 在线性区间的特性。

高增益 FEL 接近饱和时，有  $|a| \sim 1$ 。此时，可以认为电子束能量已经尽可能转移给辐射场。退而论之，就是同步振荡进行了半周，即  $\Omega_s z_{\text{sat}} \approx \pi$ 。现在如何通过以上分析给出接近饱和时的特性？先将同步振荡波数改写

$$\Omega_s \equiv \sqrt{\frac{e E_0 k_u K[\text{JJ}]}{\gamma^2 m c^2}} = 2 \rho k_u |2a_0|^{1/2} \quad (10.109)$$

根据饱和时有  $|a| \sim 1$  与  $\Omega_s z_{\text{sat}} \approx \pi$ ，可以推知饱和长度  $z_{\text{sat}} \sim \frac{\lambda_u}{\rho}$ 。再来，由 Pierce 参数

的物理含义，可知辐射场饱和功率约有

$$P \sim \rho P_{\text{beam}} \Leftrightarrow \Omega_s \sim 2\rho k_u. \quad (10.110)$$

时常我们关心一个物理量，称功率增益长度 (power gain length)，定义为当辐射功率增长一指数  $e$  倍时所经历的波荡器长度。由前面  $a(z)$  表示式，忽略  $a(0), P(0)$ ，仅考虑  $b(0)$  的影响<sup>28</sup>，辐射功率正比于场振幅平方，于是有

$$\langle |a(\hat{z})|^2 \rangle \approx \frac{1}{9} \langle |b(0)|^2 \rangle e^{\sqrt{3}\hat{z}} \quad (10.111)$$

其中，

$$\sqrt{3}\hat{z} = \sqrt{3}(2k_u z \rho) \equiv \frac{z}{L_{G0}} \Rightarrow L_{G0} \equiv \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho} \quad (10.112)$$

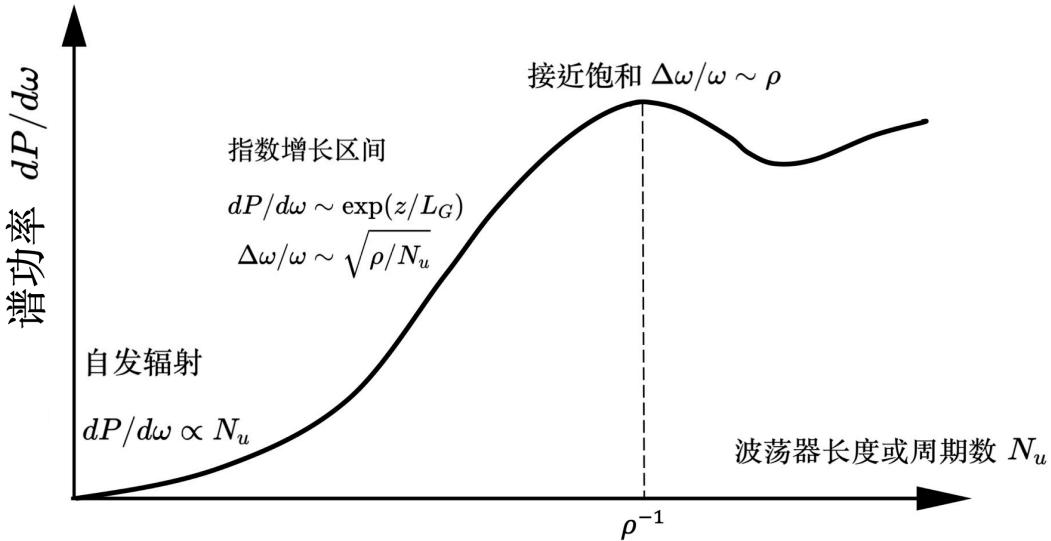


图 10.24: 基于 SASE 过程的一维 FEL 特性示意图。

到目前为止，基于 Bonifacio 集体变量的一维 FEL 模型，我们已经讨论了几个高增益 FEL 的特性。还有许多其它特性在 Bonifacio 模型或一维 FEL 模型未必能体现，细节不论，总结如下：

#### 性质 10.4. 一维高增益 FEL 特性

总结如下：(参考图 10.24)

1. 一维<sup>a</sup>功率增益长度  $L_{G0} = \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho}$ ，一维场增益长度为  $2L_{G0}$ ，由于功率  $\propto |\text{场}|^2$
2. 饱和长度  $L_{\text{sat}} \sim \frac{\lambda_u}{\rho}$ ，大约 15 个功率增益长度 (或约 8 个场增益长度)
3. 输出功率  $P_{\text{out}} \sim \rho P_{\text{beam}}$
4. 辐射几何发射度  $\epsilon_r = \frac{\lambda_1}{4\pi}$ ，若要辐射场的横向呈现相干性，电子束横向发射度应与之匹配，即  $\epsilon_{\text{电子束}} \sim \epsilon_r$
5. 辐射场的横向模式尺寸  $\sigma_r \sim \sqrt{\epsilon_r L_{G0}}$
6. 对于 SASE FEL 频带宽度  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \sqrt{0.83 \frac{\rho \lambda_u}{z}} \sim \rho$

<sup>28</sup>即使考虑  $a(0), P(0)$ ，也不影响结论。此处仅为简单起见。

7. 对于 SASE，指数增长辐射功率  $P(z) \approx \frac{P_{\text{in}}}{9} e^{z/L_G}$ ，指数增长辐射场  $E_{\perp}(z) \approx \frac{E_{\perp,\text{in}}}{3} e^{z/2L_G}$
8. 对于 SASE，有效噪声  $P_{\text{in}} \sim \frac{\rho P_{\text{beam}}}{N_{\ell_{\text{coh}}}}$ ，其中， $N_{\ell_{\text{coh}}} \sim \frac{I}{ec} \frac{\lambda_1}{\rho}$
9. 对于 SASE，饱和时的相干长度约  $\ell_{\text{coh}} \approx \frac{\lambda_{\ell}}{2\sqrt{\pi\rho}}$
10. 对于 SASE，当电子束团长度为  $L_b > \ell_{\text{coh}}$  时，束团内约有  $M \approx \frac{L_b}{\ell_{\text{coh}}}$  个尖峰 (spikes)；同时，在频谱上也有  $M \approx \frac{L_b}{\ell_{\text{coh}}}$  个尖峰。
11. 对于 SASE，辐射能量抖动  $u = \frac{U_{\text{rad}}}{\langle U_{\text{rad}} \rangle}$  与尖峰数满足  $\Gamma$  分布 (gamma distribution)，有

$$p_M(u) = \frac{M^M u^{M-1}}{\Gamma(M)} e^{-Mu}, \quad \sigma_u^2 = 1/M$$

12. 对于 SASE，辐射场的相速度有

$$v_p = \frac{c}{1 + \rho \Delta \beta} \approx c(1 - \rho \Delta \beta)$$

其中， $\Delta \beta \equiv 1 - \bar{\beta}_z = (1 + K^2/2)/2\gamma^2$ 。此结论对波荡器辐射同样成立

13. 对于 SASE，辐射包络的群速度有

$$v_g = \frac{c}{1 + \frac{2}{3} \Delta \beta} \approx c \left(1 - \frac{2}{3} \Delta \beta\right)$$

此结论对波荡器辐射同样成立

**注** 以上结论适用于 SASE 的指数增长区间 (又称线性区间)。

<sup>a</sup>关于三维修正，参考谢明 (Ming Xie) 公式。



上面性质 6 与性质 9 互为傅里叶变换的结果。此处不详细介绍，这里从 6 推论至 9。对 SASE，接近饱和时的辐射频谱的全域包络宽度的逆傅里叶变换表征在时域的辐射脉冲的局部脉冲长度。此局部辐射脉冲长度即是辐射场在电子束滑移过程的局部长度，也就对应辐射场的相干长度，因为在这个局部距离内，辐射场的相位存在明确关联性。因此，利用傅里叶变换的特性，相干长度  $L_{\text{coh}} \approx \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{2\pi c/\omega}{\Delta\omega/\omega} \approx \frac{\lambda_{\ell}}{\rho}$ 。上面 9 中的分母  $2\sqrt{\pi} \approx 3.5$  为更准确分析后的修正因子，此处不论。



**笔记** 一般来说，当 SASE FEL 操作在短波长段时，电子束长度约  $\sim 10 \mu\text{m}$ ，比起共振的辐射波长——约  $10 \text{ nm}$  或更短——相对长地多。因此，辐射场就好比在很长的电子束——激光增益介质——上滑行，即使波荡器长度有百米之长 ( $N_u \sim 10^3$ )，也只滑了电子束长的很小一部分而已。对一些此讲义中没有提到的以上性质，感兴趣的读者可参考 Kim, Huang and Lindberg 一书的 Chapter 4。



**笔记** 对长波长自由电子激光来说，如 THz FEL，辐射波长相对较长，可能与电子束长在同一个数量级，辐射场可能在波荡器中一下子就滑出电子束之外。这种情况的分析应特别小心理论模型是否做了长电子束 (coasting beam) 的假设。此时，coasting beam 模型不再成立。

结束这一节前，回忆一下，上一小节介绍低增益 FEL 时，讨论了增益函数曲线，即

电子束损失能量  $\langle \Delta\eta \rangle$  与初始能量偏差  $\eta_0$  的影响。通过调谐 (detune), 即改变初始能量偏差, 能够得到最佳的低增益 FEL 输出。这里介绍了高增益 FEL, 通过一维集体参数模型, 得到高增益 FEL 的色散方程, 对应的根为 FEL 指数增长率。这里我们没有讨论通过调谐改变增益, 但其实可以将调谐纳入色散方程。感兴趣的读者可以参考补充习题, 细节此处不论, 这里仅给出从低增益的反对称  $\text{sinc}^2$  函数一阶导数曲线演变到高增益的近高斯曲线的数值结果, 参考下图 10.25。

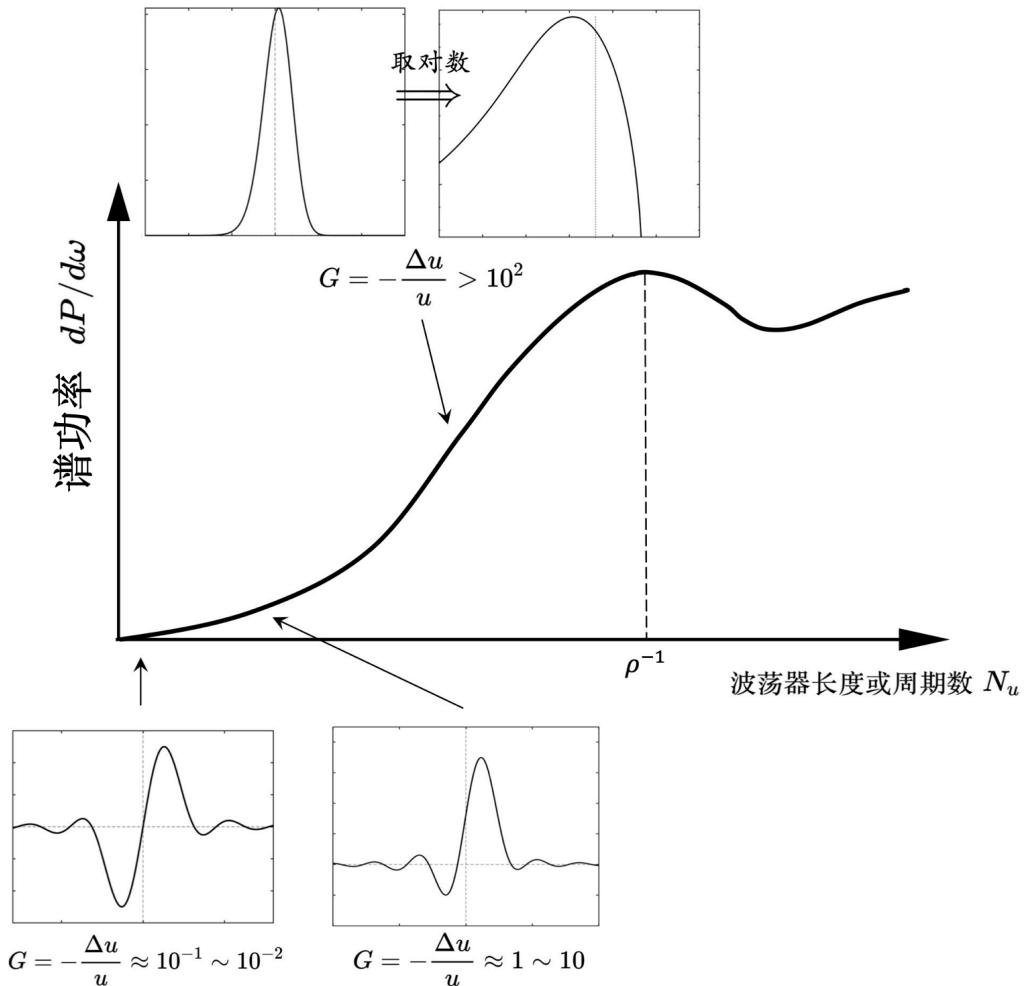


图 10.25: 从反对称的低增益曲线到接近对称的高增益曲线演变过程。



**笔记** 上面讨论的 Bonifacio 集体变量为一维、稳态 FEL 模型, 如果不采用 coasting beam 模型, 而考虑有限束长的暂态效应, 可通过格林函数法分析。感兴趣的读者可参考 Jiunn-Ming Wang and Li-Hua Yu, A transient analysis of a bunched beam free electron laser, Nucl. Instru. Methods A **250**, 484-489 (1986). [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(86\)90928-9](https://doi.org/10.1016/0168-9002(86)90928-9)。



**笔记** 还有一种基于映射, 应用 Z 变换推导 FEL 色散方程的分析方式, 同样可以得到三阶方程。感兴趣的读者可参考 C.-Y. Tsai, Theoretical formulation of multiturn collective dynamics in a laser cavity modulator with comparison to Robinson and high-gain free-electron

laser instability, Phys. Rev. Accel. Beams **25**, 064401 (2022). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.064401>。

### 10.5.1 浅谈：增益过程电子束与辐射场的相位差

前面介绍的辐射场解可以写成

$$a(\hat{z}) = \sum_{\ell=1}^3 C_\ell e^{-i\mu_\ell \hat{z}} \quad (10.113)$$

为一复数，包含相位信息，写成  $\varphi_{\text{场}}(\hat{z})$ 。电子束的相位可以通过电子束的解得到，即群聚因子，有

$$b = -\frac{da}{d\hat{z}} \quad (10.114)$$

也是一复数，包含相位信息，写成  $\varphi_{\text{电子束}}(\hat{z})$ 。将两者相减，则有相位差  $\Delta\varphi = \varphi_{\text{场}}(\hat{z}) - \varphi_{\text{电子束}}(\hat{z})$ ，沿着波荡器的演化如图 10.26 给出。可以看到，在最初低增益阶段，电子束与辐射场同相位  $\Delta\varphi = 0$ ；在高增益的前  $2/3$  指数增益阶段，电子束与辐射场相位差约  $\pi/3$ ；接近饱和时与后饱和 (post-saturation) 阶段，电子束与辐射场的相位差关系较复杂，电子束与辐射场的相位交错领先、滞后。关于饱和之后的动力学过程，此处不论，感兴趣的读者请参考相关专著。

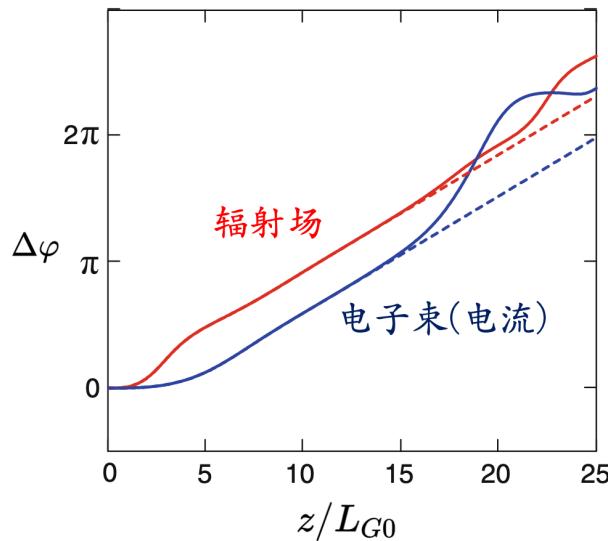


图 10.26：辐射场与电子束的相位随波荡器坐标的演化。这里的电子束相位指的是群聚因子的相位，也是电子束电流的交流成分的相位。图例修改自 P. Schmuser 等人一书。

换个角度看，辐射场与电子束的相位差随着波荡器长度  $z$  改变的特性可以视为低增益 FEL 与高增益 FEL 的差别。除了辐射场与电子束的相位差，对于低增益 FEL 与高增益 FEL，还有一个有趣的现象。对低增益 FEL，由图 10.22 可以看到，为了使电子束把能量给辐射场，可通过在波荡器入口处适当调整电子束参考能量与共振能量差达到。对低增益 FEL，能量调谐是必须的：如果电子束参考能量与共振能量一样时，恰好电子束中有一半的电子损失能量，另一半则获得能量，无整体净能量转移，做白工。不同的是，对高增益 FEL，不太需要通过能量调谐，电子束通过高增益 FEL 过程本身，就能够“自然而

然”与辐射场协调相位而将能量转移给辐射场。细节此处不论，这里仅定性描述，通过对 $(2N + 1)$ 方程的分析，能够给出辐射场——即对应 phase space bucket 中心——与电子束团质心相位随着波荡器长度  $z$  的演化，如图 10.27 给出。可以看到，电子束团质心(即微群聚部分的电子束)的相位在指数高增益阶段落在比 phase space bucket 中心相位大的位置。此阶段的相空间图像大致如图 10.22(b) 所示。

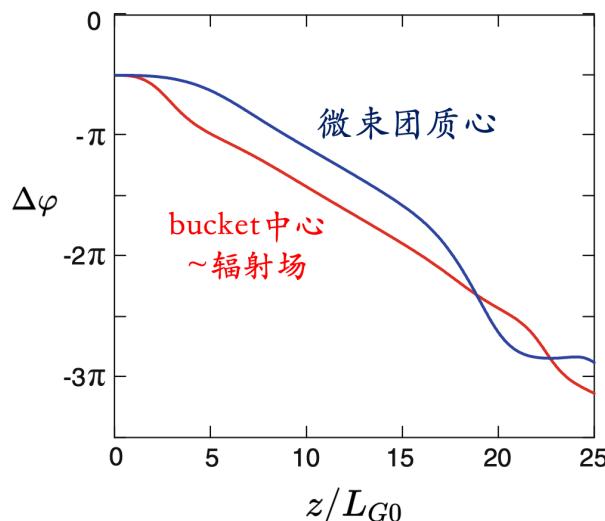


图 10.27: Phase space bucket 中心与电子束团质心或微群聚部分的电子束的相位随波荡器坐标的演化。这里的 phase space bucket 中心差不多对应辐射场的相位。在指数增长阶段，微群聚部分的电子束总是在 bucket 的“右方”，即电子将能量转移给辐射场的相位，因此辐射场振幅将指数增加。图例修改自 P. Schmuser 等人一书。初始相位设定在  $-\pi/2$  仅为惯例，不同教科书定义可能不同。



**笔记** 关于 FEL 增益过程电子束与辐射场的更多讨论，可参考 Peter Schmuser, Martin Dohlus, Jorg Rossbach, and Christopher Behrens, Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime, 2nd ed., Springer (2014) 一书。

## 10.6 回顾：三种工作模式

### 10.6.1 SASE

前面 §10.3 定性讨论了放大器、振荡器、与对应的几个输出指标，也介绍了一种特殊工作模式：自放大自发辐射机制 (SASE)。在 §10.4、§10.5 稍微深入介绍了低增益与高增益 FEL 理论之后，这里值得对 SASE FEL 做稍微再深入些的定性介绍。前面提过，对 FEL 来说，存在一种特殊工作模式，即混合放大器与振荡器的工作模式。当波荡器足够长时，初始电子束里的散粒噪声在波荡器前半段产生。散粒噪声被视为种子 (seed) 信号辐射场后，如果波荡器足够长并且参数设计得当，在波荡器后半段能得到有效放大。这种前半段像振荡器，后半段像放大器的操作模式称 SASE 模式。SASE FEL 对产生短波长激光来说是非常重要的模式，因为低于 100 nm 之后很难找到匹配的光学反射镜，特别是在 X 射线波段。对电子束里的散粒噪声，其等效的群聚因子或密度调制因子可以写为

$$\langle |b(0)|^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{N_{\ell_{coh}}^2} \left| \sum_{j \in \ell_{coh}} e^{-i\theta_j} \right|^2 \right\rangle \approx \frac{1}{N_{\ell_{coh}}} \quad (10.115)$$

其中， $N_{\ell_{coh}}$  为相干长度  $\ell_{coh} \sim \frac{\lambda_e}{\rho}$  内的电子数。

对 SASE FEL 来说，初始阶段就像振荡器，严格来说，真正能够产生起振的电流强度应该量化为在相干长度  $\ell_{coh}$  内具有足够多的电子数  $N_{\ell_{coh}}$ ，即

$$I_{th} \sim \frac{eN_{\ell_{coh}}}{\ell_{coh}/c} \quad (10.116)$$

✍ 练习 10.18 利用前面学到的一维高增益 FEL 特性解释图 10.28 的结果。 ■

以上一维高增益 FEL 理论我们仅介绍了“线性”或“指数增长”区间，接近饱和时的特性有些许讨论，但不完整。此外，此讲义上面的介绍仅分析“稳态”(或非时变，time-independent) 动力学，对于高增益 FEL 的时变 (time-dependent) 过程的分析稍微复杂，对 SASE FEL 情况则需要具备随机统计过程的基础知识，此处不论。

对饱和之后的动力学过程，有点像低增益 FEL 过程，但不完全一样。此外，为进一步提高辐射功率输出，在后饱和 (post-saturation) 段，波荡器会采用渐变磁场，称 undulator tapering。思路是电子束在“线性”或“指数增长”区间产生波荡器辐射场，造成能量损耗，由共振条件

$$\lambda_\ell = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K_u^2}{2} \right) \quad (10.117)$$

当束团整体平均能量  $\gamma$  改变时，如果其它参数不变，则辐射的共振波长将跟着改变。如果还要维持使电子与先前同样波长的辐射场共振，则一般通过改变波荡器  $K_u$  值达到。实际操作中，改变波荡器  $K_u$  值可以通过改变波荡器磁极间的间隙高度达到，细节此处不论。

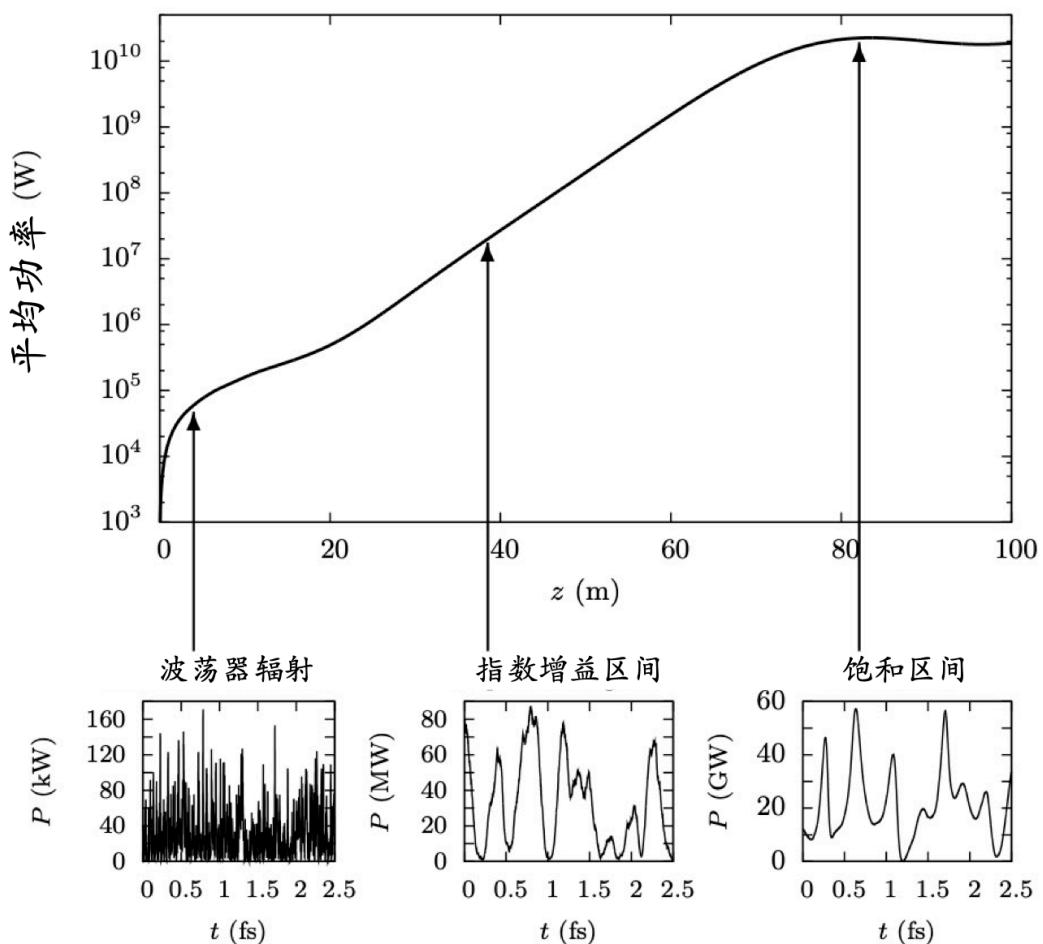


图 10.28：高增益 SASE FEL 辐射功率与辐射场时间结构的演化。图例修改自 Kim, Huang and Lindberg 一书 Fig. 4.5。



**笔记** 以上我们仅介绍了基于 Bonifacio 的一维集体变量高增益 FEL 模型，此模型对具有外部输入辐射场的 FEL 放大器来说，是非常实用的理论模型。对 SASE FEL 机制，Bonifacio 集体变量模型需要赋予散粒噪声导致的等效群聚因子，SASE FEL 的更完整分析一般采用 Maxwell-Klimontovich 理论，该理论也将低增益与高增益过程统一在同一框架。如果对自放大自发辐射机制 SASE FEL 更深入的定量分析感兴趣的话，建议读者参考 Kim, Huang, and Lindberg 一书的 Chapter 4、5 或者 Saldin, Schneidmiller, and Yurkov 一书的 Chapter 6。



**笔记** FEL 的后饱和动力学至今仍是活跃的研究课题，包含但不限于边带不稳定性 (side-band instability) 的物理机制、辐射衍射动力学、面向更高功率的渐变磁场多目标优化、超辐射 (superradiance) 过程<sup>29</sup>等。对此课题感兴趣的读者，可参考 N. Kroll, P. Morton, and M. Rosenbluth, Free-electron lasers with variable parameter wigglers, IEEE JQE **17**, 1436-1468 (1981). <https://doi.org/10.1109/JQE.1981.1071285>

**讨论：电子束散粒噪声 (shot noise)** 又称泊松噪声 (Poisson noise)。在经典电动力学图景中，每个电子就像是颗粒，以离散的粒子图像存在。已知即使是束团中离散粒子分布的极限情况 — 均匀分布 — 仍不可避免存在一种噪声，此即散粒噪声。散粒噪声恒存在的事实意味着在实际的电子学世界中，不可能存在完美的、均匀的、无涨落的电子束分布。散粒噪声不同于粒子数值跟踪模拟程序由于模拟粒子个数远少于真实粒子个数导致的数值噪声 (numerical noise)，其可以通过增加模拟粒子个数抑制。散粒噪声是随机粒子分布遵循数学上泊松统计 (Poisson statistics)<sup>30</sup>的直接结果，被视为粒子集合 (束团) 所能达到均匀性的基本限制 (fundamental limit)。

对射频 (RF) 直线加速器的运行情况，即忽略同步辐射量子激发效应，通常假设在加速和传输过程中束团内粒子间的库仑交互作用 (inter-particle interaction) 可忽略，局部电荷涨落 (local charge fluctuation) 可通过泊松统计所定义的散粒噪声来测量。近年随着电子枪/腔的技术提升，对更高亮度的强流电子束，忽略电子传输中束团内粒子间的集体交互作用的影响可能不再合理。加速器电子束作为一种非中性等离子体 (non-neutral plasma)，束团内库仑力使束团有倾向于扩展的趋势，使初始冷电子束等离子体的电荷分布趋向均匀化。近年，在比射频更高频的光学频率下观察到电子束散粒噪声能够得到进一步抑制的现象，即在光学频率下，能够产生更均匀的电子束。换句话说，库仑集体相互作用的存在可能使得这一限制得以超越。经过适当调整，在光学频率下实现散粒噪声

<sup>29</sup>注意，此处的超辐射不是相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR)，尽管有些文献讨论的超辐射本质为相干同步辐射。

<sup>30</sup>为什么电子束整体的散粒噪声是统计学上的泊松分布？此分布源于二项分布 (binomial distribution 或 binomial statistics) 之和。粗略地说，二项分布就是“是-否”的过程 (yes-no question) 或是投掷硬币的“正-反面”(head-tail) 的随机过程。电子束里的每个电子在时空中某特定位置以离散的粒子图像呈现时是否存在，就满足二项分布。而电子束分布作为逐个电子的整体之和，其随机散粒噪声自然遵循二项分布之和，即泊松分布。对如何从二项分布过渡到泊松分布的数学推导细节感兴趣的读者，请自行查阅相关书籍。

抑制效果能够比之前在射频波段下实现的抑制效果高出了四个数量级。细节此处不论，详情可参考 A. Gover et al., Beating the shot-noise limit, Nature Physics **8**, 877-880 (2012). <https://www.nature.com/articles/nphys2443>。



**笔记** 对辐射场而言，是否存在散粒噪声？在经典电磁场图景中，辐射场是电磁波，没有离散的粒子图像。但是，在量子力学图景，辐射场被视为光子，就浮现离散的粒子（光子）图像了。因此，在量子力学图景，光子同样存在散粒噪声，也满足泊松统计。



**笔记** 电子学世界中不同情境，有不同类型的噪声，散粒噪声只是其中一种。如：电子热运动造成的热噪声 (thermal noise)，体现在光阴极电子枪产生电子束时的热发射度。热噪声非常接近白噪声 (white noise)，白噪声的特点是其在所有频率成分都具有差不多的强度。噪声类型非常多，感兴趣的读者请自行查阅相关文献。

### 定理 10.12. 忽略散粒噪声的密度调制因子

当忽略散粒噪声的密度调制因子时，有

$$\frac{1}{N_e} \sum_j e^{i\omega t_j} = 0, \quad \frac{1}{N_e} \sum_{j,k} e^{i\omega(t_j - t_k)} = 1 \quad (10.118)$$

其中， $N_e$  为束团中的电子数。 □

## 10.6.2 FEL 放大器

高增益 FEL 常见的操作模式为放大器。从上面介绍的一维 Bonifacio 集体变量理论可以看到，典型的输入信号为  $a(0)$ ，如果电子束本身受到密度或能量调制，则存在非零的  $b(0), P(0)$ 。同一电子束内的切片反复经历以下过程：

1. 一开始是外部辐射种子（随后是被放大后的辐射场）的能量调制；
2. 通过波荡器  $r_{56}$  导致的密度调制，又称束团微群聚 (microbunching) 过程；
3. 电子微束团产生相干辐射场。

比起 SASE 或下面即将介绍的 FEL 振荡器，FEL 放大器的物理图像相对简单。

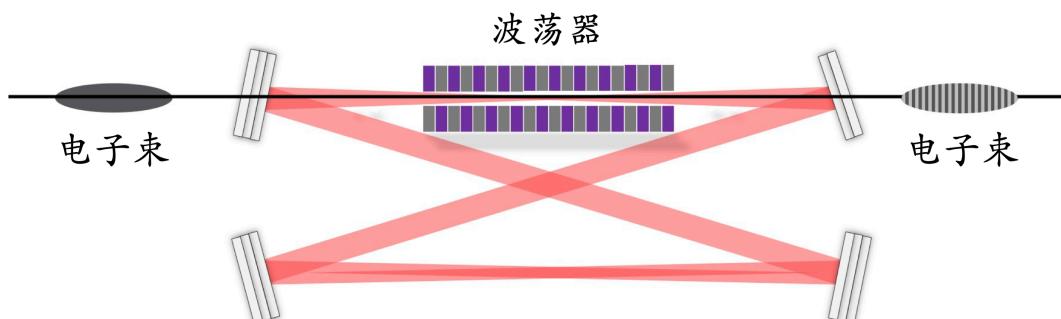
## 10.6.3 FEL 振荡器

低增益 FEL 常见的操作模式为 FEL 振荡器，又称 FELO (FEL oscillator)。这一章一开始介绍过激光产生的四要素：增益介质、泵浦能量、腔体反射、输出耦合器。对 FEL 振荡器来说，扮演增益介质的是电子束与波荡器；扮演泵浦能量的电子束；为提供合适的谐振环境，需要对应辐射波长的腔体反射镜与输出耦合器，有时候，在某一面反射镜开孔可作为一种输出耦合机制。

不同于放大器，一般在振荡器模式反复经历的是以下过程：

1. 一开始进入振荡器的电子束产生自发辐射 (spontaneous radiation), 即第 5 章介绍的波荡器辐射;
2. 操作在振荡器模式的波荡器长度不比放大器模式的波荡器长度长, 因此, 电子束团原则上不经历微群聚 (microbunching) 过程;
3. 在电子束离开振荡器后, 波荡器辐射场被局限在振荡器的腔体反射镜内完整往返一次 (或多次), 经历部分能量衰减后, 与后续进入波荡器内“新鲜”的电子束 (fresh bunch)<sup>31</sup>碰头;
4. 一般要求辐射场路程差与电子束在波荡器入口处满足相位同步 (phase synchronization), 且波荡器辐射场受腔体反射镜的能量衰减至少必须得到来自电子束的能量补偿;
5. 在前些圈积累的辐射场在腔体反射镜内往返一次 (或多次) 后, 调制新鲜电子束, 然后电子束在波荡器内继续产生波荡器辐射;
6. 重复以上 3,4,5, 直到电子束产生的 (额外的) 辐射场能量与共振腔总体损耗抵消, 整体达平衡或饱和。

FEL 振荡器的基本原理示意图如图 10.29, 来自射频加速器的电子束注入低损耗光腔内的波荡器。第一个电子束团在通过波荡器时产生自发波荡器辐射, 此自发辐射在电子离开之后往返振荡器随后被腔镜反射回波荡器中。第二个注入的电子束团进入波荡器时, 自发辐射脉冲与其相位匹配, 同时到达波荡器入口并重合。辐射场与电子束团在波荡器中相互作用, 在波荡器出口处的辐射场由电子束团的自发辐射和 FEL 增益所导致的放大信号组成。此过程不断重复, 当 FEL 增益大于腔内的往返损耗时, 放大的辐射信号将最终在输出中占据主导地位。



**图 10.29:** 低增益 FEL 振荡器示意图。电子束由上游的射频直线加速器产生, 使用后的电子束一般回收至垃圾靶 (beam dump)。此处画的四面反射镜不是形成光腔的唯一方式, 也可以用两面或三面反射镜形成。

假设  $P_n$  为辐射场与电子束团第  $n$  次作用 (即辐射第  $n$  次在光腔内绕行) 后, 在波荡

<sup>31</sup>后续进入波荡器内的电子束还能不能是旧的、用过的、二手的电子束? 如果这种用过的电子束品质仍不是太差, 那就还能用。这种操作模式有时候称基于能量循环加速器的 FEL 振荡器 (recirculating FEL oscillator)。前面第 8 章介绍过同步辐射阻尼能够“冷却”电子束, 使能散与发射度降低, 如果用过的电子束在同步加速器储存环中经过辐射阻尼一段时间后, “恢复”到较好的品质后再使用, 这种操作模拟称储存环 FEL 振荡器 (storage-ring FEL oscillator, SR-FELO)。

器出口处的辐射脉冲功率。再假设  $P_s$  为自发辐射功率，则它们之间的关系有

$$\begin{aligned} P_1 &= P_s \\ P_n &= R(1+G)P_{n-1} + P_s \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (10.119)$$

其中， $G \equiv -\Delta u/u$  为前面介绍的 FEL 相对增益函数， $R \leq 1$  为光腔的反射率<sup>32</sup>。单次通过（即辐射在光腔内往返一次）的功率净放大为  $R(1+G)$ 。如果单次通过的增益超过损耗，即  $R(1+G) > 1$ ，则该圈功率增长。这是 FEL 振荡器的“受激辐射”要求条件。第  $n$  次通过之后的功率由上式决定，可写成

$$P_n = \frac{[R(1+G)]^n - 1}{R(1+G) - 1} P_s \quad (10.120)$$

假设  $R(1+G) > 1$ ，可以看出，在经过足够多次的放大之后，辐射的功率随  $n$  指数增长。腔内辐射功率的指数增长并不会无限期地持续下去。当辐射功率变得足够大时，电子将被俘获在相空间有质动力势中并旋转至吸收相位，此时电子束将从辐射场中得到能量。如此一来，将使增益  $G$  逐渐下降。当增益降低至由  $R(1+G_{\text{sat}}) = 1$  条件所给出的饱和增益  $G_{\text{sat}}$  值时，系统达到稳态或者“饱和”。饱和时，电子束单次通过产生的辐射功率  $\Delta P$  等于总损耗，因此，如果腔内的功率为  $P_{\text{sat}}$ ，则有  $\Delta P = (1-R)P_{\text{sat}}$ 。前面介绍了低增益 FEL 的单次经过理想输出功率  $\Delta P \approx P_{\text{beam}}/2N_u$ ，这就意味着，在 FEL 振荡器中，饱和时腔内的辐射功率为

$$P_{\text{sat}} \approx \frac{1}{2N_u(1-R)} P_{\text{beam}} \quad (10.121)$$

为了使振荡器能稳定地工作，腔内的光学元件，特别是反射镜，必须能够承受功率  $P_{\text{sat}}$ 。在 FEL 振荡器达饱和时，辐射功率在一完整的往返周期中降低  $\Delta P$ 。这一能量损耗可归因于许多不同的机制，包含：反射镜材料中的辐射吸收、光学元件边缘的衍射以及通过开孔或透射引到腔外的辐射。如果有一个除反射率  $R < 1$  外无其它损耗的理想光腔<sup>33</sup>，则其透射率等于  $1-R$ 。由此，可从振荡器中耦合出的最大功率为  $(1-R)P_{\text{sat}} \approx P_{\text{beam}}/2N_u$ 。

要想从 FEL 振荡器中输出有用的辐射，就必须要求 FEL 振荡器可在饱和状态下维持一定的时间。因此，只有在每个宏脉冲内的束团数目多于达到饱和所需的束团数目时，FEL 振荡器才能由脉冲加速器驱动。当采用连续波加速器时，FEL 振荡器可以无限地维持在稳定的状态。这是理想的工作模式，此时 FEL 可提供高平均通量的稳定光子输出。

<sup>32</sup> 此处的  $R$  一般情况为复数，体现反射镜的振幅衰减与相位偏移等效应。简单起见，这里不妨先视为实数就好。

<sup>33</sup>  $R = 1$  不是振荡器意义上的理想光腔，因为如果  $R = 1$ ，那么产生的光就无法输出到光腔外。

下表给出 FEL 振荡器模式与 FEL 放大器/SASE 模式的比较：

	振荡器模式	放大器/SASE 模式
单通增益	低	高
波荡器	短	长
初始条件	自发辐射，之后被局限于光腔中	外部种子场注入(放大器)/自发辐射(SASE)
物理机制	光腔中的光场与注入的电子束相互作用 能量转移 $\Rightarrow$ 微聚束和相干辐射	光与电子相互作用形成微聚束 正反馈 $\Rightarrow$ 更强的微聚束和更强的辐射
输出特性	多次通过	单次通过



**笔记** 关于 FEL 振荡器的理论还有许多面向没有介绍，包含但不限于电子束能量调谐、电子束在波荡器滑移效应与辐射场光程差调谐、波荡器渐变磁场、光腔的纵向模式与横向模式、光腔稳定性、反射镜热形变的影响等。关于 FEL 振荡器更深入的介绍，可参考 Kim, Huang, and Lindberg 一书的 Chapter 7 或 Saldin, Schneidmiller, and Yurkov 一书的 Chapter 3。

## 10.7 高增益 FEL: 三维

开始讨论三维 FEL 效应前，先复习一下横向有限尺寸的激光场的一般特性。

### 定义 10.8. 瑞利长度 (Rayleigh length, Rayleigh range)、光束横向尺寸

如图 10.30，光学中，定义光场的瑞利长度定义为

$$z_R = \frac{k_L w_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_L} \quad (10.122)$$

其中， $k_L = 2\pi/\lambda_L$  为辐射波数， $w_0$  称为辐射场束腰 (waist)，为光束横向尺寸最小处。光束横向尺寸为

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (10.123)$$

当  $z = z_R$  时，横向半径增加  $\sqrt{2}$  倍，有  $w(z_R) = \sqrt{2}w_0$ ；横向面积增加 2 倍。

此外，在  $z$  处波前的局域曲率半径  $R(z)$  有

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right) \quad (10.124)$$

**注** 两倍瑞利长度称共焦参数 (confocal parameter)  $b = 2z_R$ 。

**注** 辐射光学中的瑞利长度对应电子光学的 betatron 函数，在自由空间中有

$$\sigma_x(s) = \sigma_x(0) \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\beta_{x0}}\right)^2} \quad (10.125)$$

其中，在  $s = 0$  处的 betatron 函数写为  $\beta_{x0}$ ，束团尺寸写为  $\sigma_x(0)$ 。

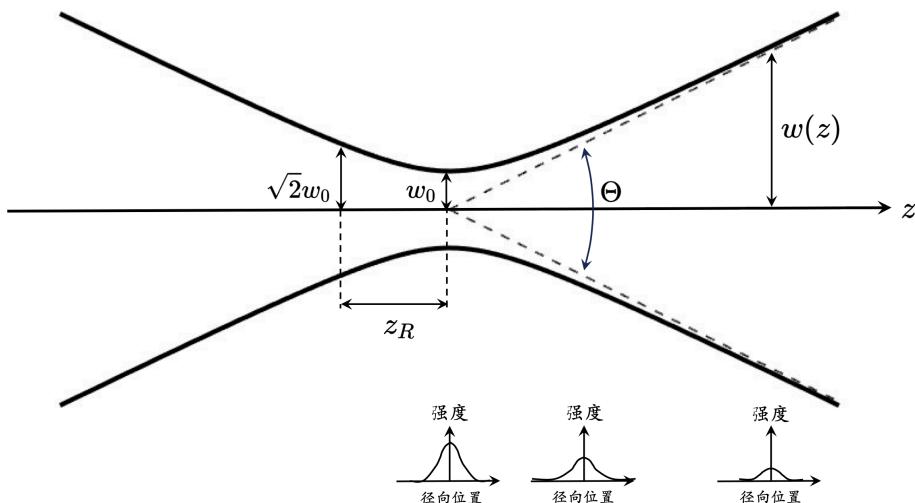


图 10.30: 高斯光束。下排为激光束的横向强度分布图，左边为束腰处  $z = 0$ ，中间为  $z = z_R$  处，右边为甚远处，强度依序衰减。



**笔记** 假设圆束团 (round beam)，则一般约定电子束尺寸  $\sigma_{x,y}$  与激光束尺寸  $w_0$  有如下关

系：

$$\sigma_{x,y} = \frac{w_0}{\sqrt{2}} \quad (10.126)$$

一般来说，激光装置产生的光束随传播距离其波前、强度都会改变，其样貌大致如图 10.31 所示。

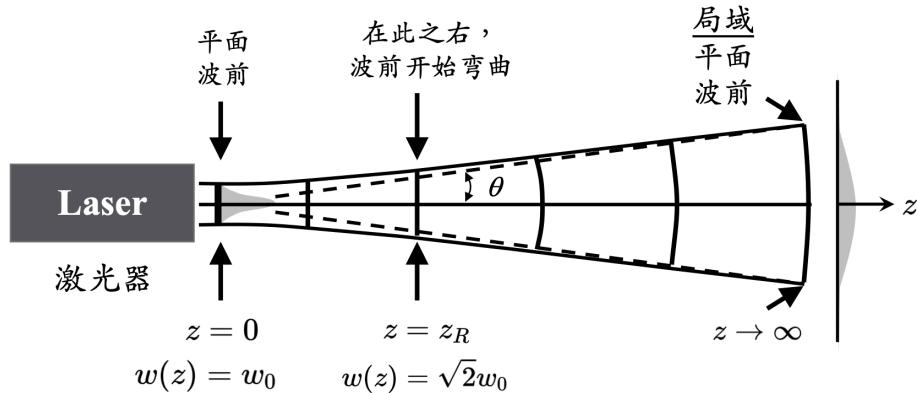


图 10.31：激光器产生的光束随传播距离其波前、强度都会改变。在束腰处  $z = 0$ ，光束横向范围内波前不弯曲，在甚远处，光束横向局部范围内波前不弯曲。

尽管 FEL 主要的物理图像是“纵向”的<sup>34</sup>，完整的 FEL 分析，无论是低增益或高增益，将需要考虑束团与辐射场的六维相空间特性与影响，分析也将变得复杂。§10.4、§10.5 介绍了低增益与高增益的一维模型与物理内涵。此处避开复杂的分析，仅简短、定性讨论几个典型的三维 FEL 效应，包含辐射场的横向衍射 (diffraction) 效应、辐射场与电子束交叠过程的光导 (optical guiding) 效应、电子束有限发射度 (emittance) 或有限角散 (angular divergence) 的效应、电子的 betatron 振荡对 FEL 效能的影响。

### 10.7.1 衍射效应、增益引导效应

前面介绍的 FEL 放大器，其辐射场的特性部分由外部种子激光的特性决定，部分由电子束特性决定。为简单起见，以下讨论 SASE 情况，即无外部种子激光，单纯从电子束自身产生的散粒噪声开始。通过 SASE FEL 产生的激光在接近饱和时的一个特征是其横向全相干 (full transverse coherence)。在 SASE FEL 一开始阶段，自发波荡器辐射场的横向相空间面积由电子束发射度 ( $2\pi\epsilon_x$ ) ( $2\pi\epsilon_y$ ) 决定。此一面积通常远远大于辐射场衍射极限的相空间面积 ( $\lambda/2$ )<sup>2</sup>，特别是在 X 射线波段。因此，自发辐射的初始横向相空间也是由许多空间模式的非相干叠加组成。由于 FEL 相互作用，一些模被限制在电子束中心峰值电荷密度较高的区域。因此，存在一个“主导”机制，这些模 (辐射场) 的横向尺寸  $\sigma_r$  由电子束团横向面积决定，辐射场的固有散角则在要求满足  $\sigma_r \sigma_{r'} = \lambda/4\pi$  关系后可以得到。一般来说，最适合存活的模为基模 (fundamental mode)。辐射场的高阶空间模式要么衍射更强，要么横向空间分布范围更大；前者导致更多的辐射损失，后者使得与电子束

<sup>34</sup> 回忆一下，前面最初介绍 FEL 时，提到电子与辐射场交互作用的  $\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ，其中， $W = \gamma mc^2$  为电子的总能量。能量坐标在六维相空间中被安排在“纵向”维度，虽然  $\mathbf{F}, \mathbf{v}$  的主要贡献为波荡器的横向磁场分量与电子横向速度分量。

耦合的效率降低。由此，辐射场的基模具有最高的有效增益，最终成为 SASE 机制下胜出的模。在波荡器中经过足够长的距离之后，这一仅存的基模看起来就像被导引着一样，此一现象被称为“增益导引”(gain guiding)或“光导”(optical guiding)。

### 定义 10.9. 增益导引 (gain guiding)、光导 (optical guiding)

高增益自由电子激光过程中，电子束作为增益媒质 (gain medium)，多数成分的辐射场自电子束中心轴上产生，提供辐射光束一个“抵抗”辐射衍射的机制，称增益导引。因为这个效应，短波长、高增益自由电子激光才得以在  $\sim 100$  米长的波荡器中产生。

图 10.32 给出增益导引的物理图像。由于增益仅在束团的中心区域内起作用，一个“匹配”的横向模式——基模——从所有其他模式中被选择出来。随后，由于增益的作用，这个模式经历多个瑞利长度后看起来就像是被导引着一样。

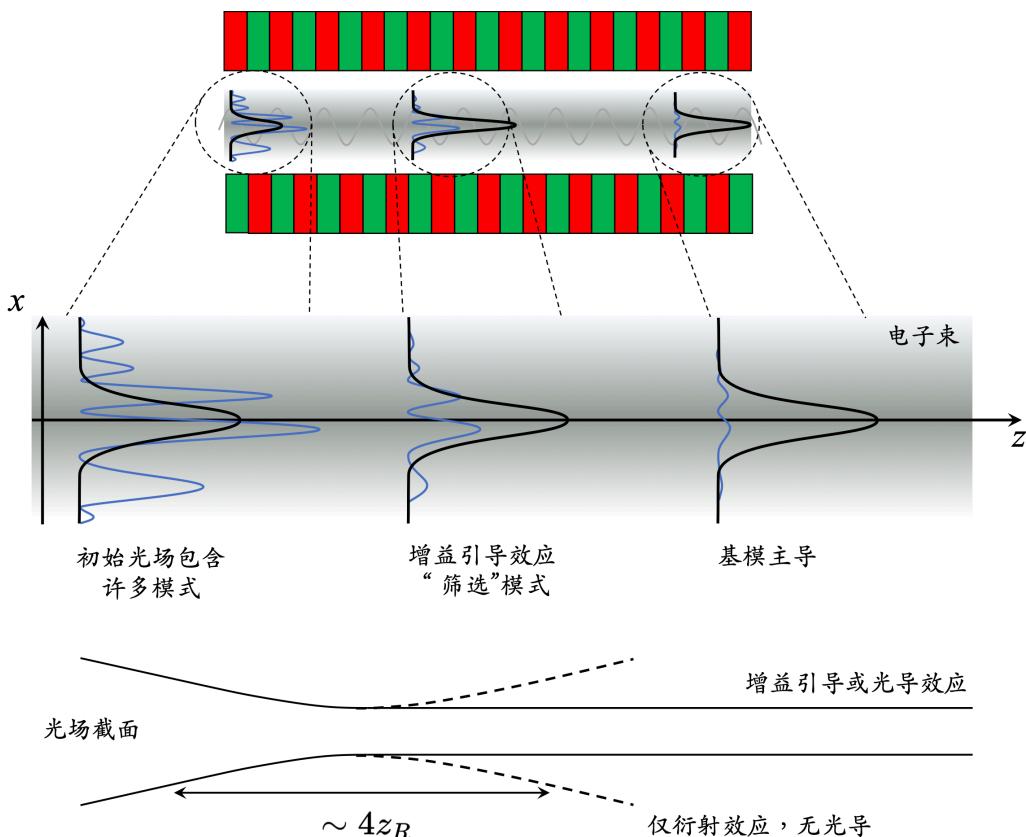


图 10.32：增益导引示意图。上排与中间图黑线为优先导引的模式，一般为基模；蓝色线为高阶模式。随着波荡器  $z$  演化，基模增益较高，逐渐占整体辐射输出功率的主贡献，高阶模增长较慢而逐渐被抑制。下排图虚线为激光场横向分布在自由空间的衍射，实线为受到光导而避免/缓解了辐射衍射效应。这里的  $z_R$  为辐射场的瑞利长度，约为几个增益长度  $L_{G0}$ 。

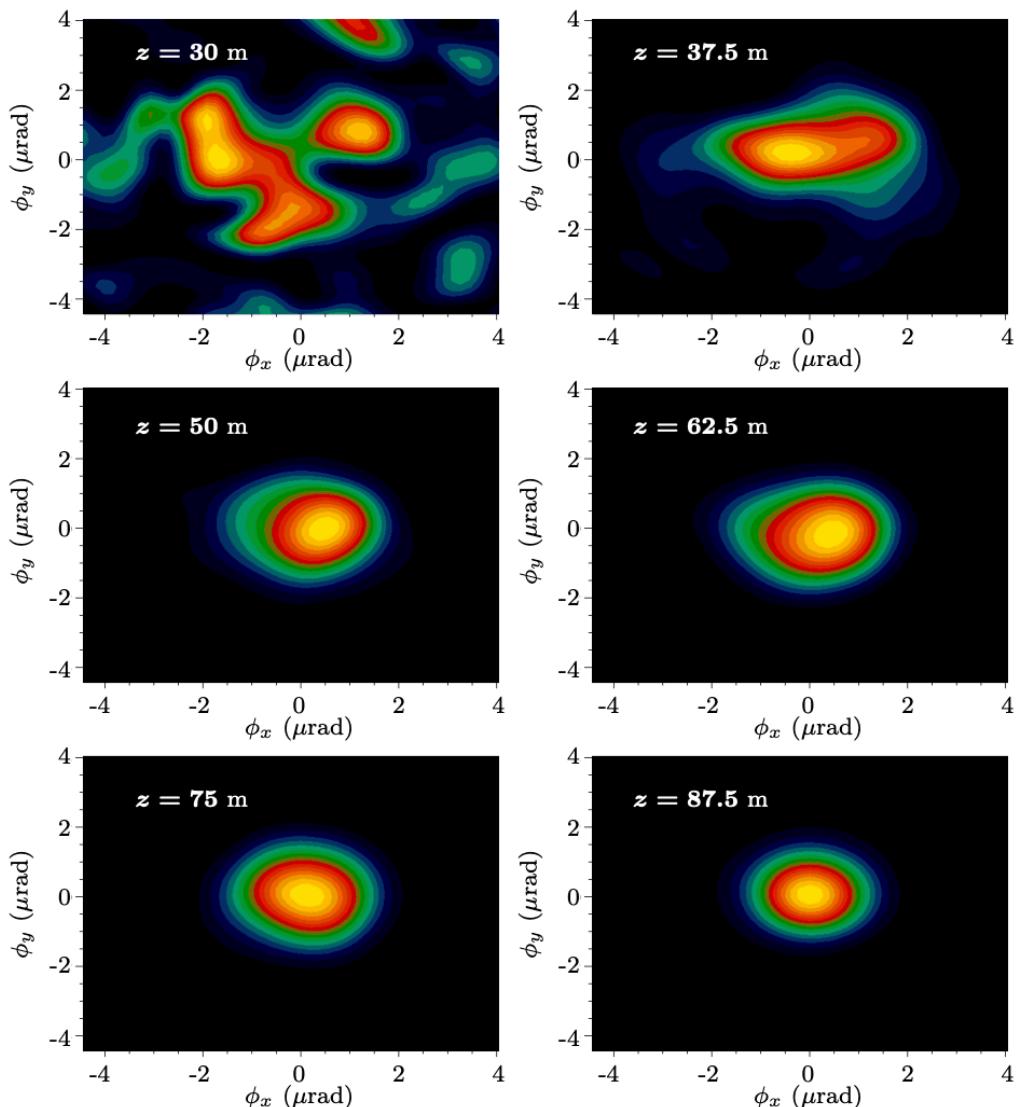


**笔记** 由于波荡器为平面波荡器，当磁场方向为  $y$  方向时，电子扭摆运动应在  $xz$  水平面上。因此，图 10.32 (上排) 画了正弦函数用来描述电子的扭摆运动，其实对应进出纸面方向，宜留意。这里我们假设电子扭摆运动的振幅  $K/\gamma k_u \ll \sigma_x$ ，一般情况下成立。此外，

横向束流包络(尺寸与电荷密度)的变化尺度涉及的长度  $\gg$  电子扭摆运动变化的长度尺度。

**注** FEL 的增益导引效应有时又称 Moore 导引效应, 由 G.T. Moore 于 1985 年提出。原始论文可参考 G.T. Moore, The high-gain regime of the free electron laser, Nucl. Instru. Methods A 239, 19-28 (1985).[https://doi.org/10.1016/0168-9002\(85\)90693-X](https://doi.org/10.1016/0168-9002(85)90693-X)

横向模式选择是一个动态过程, 在图 10.33 形象化给出。起初, 辐射功率场随机分布在横向平面内, 在波荡器中经过足够长的传播距离之后, 只剩一个局域的相干模式存在, 此横向模式的强度分布为高斯分布或 TEM<sub>00</sub> 模。



**图 10.33:** 随着波荡器  $z$  演化的辐射场横向二维角度分布。此图取自 Kim, Huang, and Lindberg 一书 Fig. 5.2, 参数按 SLAC 的 LCLS 波荡器与电子束参数计算, 结果由目前普遍使用的 SASE FEL 的三维数值模拟程序 GENESIS 得到。

前面 §10.3 与 §10.5 一维分析中引入了重要的 FEL 比例参数 (Pierce 参数)  $\rho$ 。眼尖的

读者在当时或许看出  $\rho$  里面已经包含了三维效应

$$\rho = \left( \frac{e^2 K^2 [JJ]^2 n_e}{32\epsilon_0 \gamma_r^3 m c^2 k_u^2} \right)^{1/3} = \left[ \frac{1}{8\pi} \frac{I}{I_A} \left( \frac{K [JJ]}{1 + \frac{K^2}{2}} \right)^2 \frac{\gamma_r \lambda_1^2}{2\pi \sigma_x^2} \right]^{1/3} \quad (10.127)$$

其中,  $I_A = ec/r_e \approx 17045$  A 为 Alfvén 电流, 视为一物理常数。FEL 的许多重要特性均与  $\rho$  成比例关系, 如: 一维增益长度  $L_{G0} = \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho}$ 、饱和长度  $L_{\text{sat}} \sim \frac{\lambda_u}{\rho}$  与  $\rho$  成反比、SASE 接近饱和时的频谱相对带宽  $\Delta\omega/\omega \sim \rho$  则正比于  $\rho$ 。

当包含三维效应时, 可以由一个不同于 Pierce 参数的无量纲参数来修正三维效应的 FEL 增益特性。为此, 考虑衍射效应很严重的极端情形, 这种情形意味着辐射场的横向尺寸明显大于电子束横向尺寸。为了更好地描述在此三维极限情形下电子与辐射之间的相互作用, 我们将 Pierce 参数中的束流面积  $2\pi\sigma_x^2$  尝试替换成辐射场的衍射极限横截面, 即

$$2\pi\sigma_x^2 \rightarrow 2\pi \frac{\lambda_1}{4\pi} z_R \quad (10.128)$$

其中,  $z_R$  为辐射场的瑞利长度。从我们对上面刚刚介绍的增益导引的讨论可知,  $z_R$  应为几个增益长度  $L_{G0}$ , 比如:  $z_R \rightarrow 2L_G$ , 其中, 2 只是个数量级, 先不琢磨其准确数值。将  $2\pi\sigma_x^2 \rightarrow \lambda_1 L_G$  代回 Pierce 参数, 并将由此得到的  $\rho$  的表达式代入增益长度, “求解”增益长度, 可以得到修正后的增益长度(的倒数)

$$L_G^{-1} = \frac{4\pi}{\lambda_u} \frac{3^{3/4}}{2} \sqrt{\frac{I}{\gamma I_A} \frac{K^2 [JJ]^2}{(1 + K^2/2)}} \quad (10.129)$$

上式给出了辐射场横向衍射效应占主导、光模大于电子束横截面积时的增长率近似公式。



**笔记** 注意到, 这里给出在考虑衍射效应下修正后的增益长度  $L_G \propto I^{-1/2}$ , 与电子束横向尺寸无明显依存关系。与一维情形(电子束尺寸大于光模尺寸)的  $L_G \propto I^{-1/3} \sigma_x^{2/3}$  有不同的定标关系。

### 10.7.2 有限发射度、有限角散效应

一维模型假设电子束横向尺寸远大于辐射场, 或者说, 辐射场不存在有限的横向尺寸, 又或者说, 只考虑辐射场沿着波荡器的在轴 (on-axis) 物理量。从上面讨论知, 当考虑电子束或辐射场的有限横向尺寸后, 最优的辐射场增益长度应该是发生在电子束横向尺寸与辐射束横向尺寸相匹配时, 即

$$\sigma_x \sim \sigma_r = \sqrt{\epsilon_r z_R} \sim \sqrt{\epsilon_r L_G}, \quad (10.130)$$

其中,  $\epsilon_r = \lambda_1/4\pi$  是辐射场的几何发射度。此定性讨论对于理解辐射衍射的影响和估算某些运行在红外及可见光波段、光模尺寸大于电子束尺寸的高增益 FEL 的增益长度很有用。然而, 基于以下原因, 对短波长 X 射线 FEL (x-ray FEL, XFEL), 我们仍继续采用无量纲 Pierce 参数  $\rho$  来对一些物理量进行归一化, 而没有采取上面讨论的修正方案:

1.  $\rho$  与 XFEL 更为相关, 这是因为 XFEL 的典型光模尺寸小于电子的横向束团尺寸;

2.  $\rho$  不需要引入瑞利长度的概念, 仅依赖于电子束的横截面积  $2\pi\sigma_x^2$ 。

现在我们讨论电子束横向有限(几何)发射度对 FEL 效能的影响。前面第7章学过, 对有限发射度  $\epsilon_x$  的电子束, 其 rms 角散 (angular divergence) 为  $\sigma_{x'} = \epsilon_x/\sigma_x$ , 其 rms 束团尺寸有  $\sigma_x = \sqrt{\epsilon_x \beta_x(z)}$ : 在束腰之前, 束团尺寸变小; 过了束腰之后, 在自由空间中将会扩大<sup>35</sup>。因此, 为了保持近似不变的电子束横向尺寸, 并让长波荡器中的 FEL 相互作用最大化, 需要对电子束进行适当的聚焦。事实上, 波荡器本身的磁场就可以提供一种天然的聚焦, 但是, 这种天然聚焦的强度一般都很弱, 从现在角度看, 已经不足以用来聚集强流电子束。因此, 通常需要由外部提供聚焦源。第7章学过, 四极铁 (quadrupole) 能够提供有效的外部聚焦, 参考图 10.34。

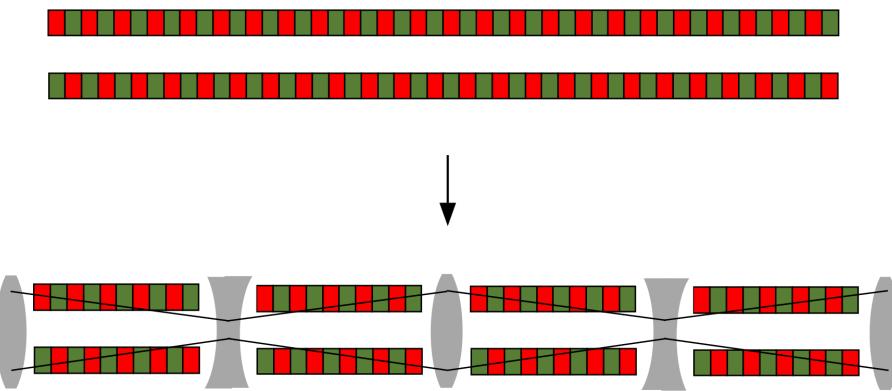


图 10.34: 在波荡器段间加外部 FODO 磁聚焦结构。

采用外部聚焦可以有效控制束流尺寸, 从而增大 Pierce  $\rho$  参数并减小增益长度。但是, 如果将束流尺寸减小到光模尺寸以下, 实际上会降低 FEL 的性能, 这是因为增大的电子束角散会使共振波长发散。这可以通过考虑以下的 FEL 共振条件来理解

$$\lambda_1(\psi) = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \psi^2 \right) \quad (10.131)$$

其中,  $\psi$  是粒子轨迹与波荡器  $z$  轴的夹角。将电子束的角散视为一种  $\Delta\psi$ , 即  $\Delta\psi \approx \sqrt{2}\sigma_{x'}$ , 则所引起的共振波长的改变有

$$\lambda_1(\psi) = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \sigma_{x'}^2 \right) \quad (10.132)$$

为了避免对 FEL 增益产生不利的影响, 通常要求由角散引起的波长变化要小于 SASE FEL 带宽 ( $\sim \rho$ ), 即

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \sigma_{x'}^2 \frac{\lambda_u}{\lambda_1} \leq \rho \approx \frac{\lambda_u}{4\pi L_G} \quad (10.133)$$

由于光导作用, 辐射场的瑞利长度约等于几个增益长度, 即  $z_R \sim L_G$ 。因此, 上式意味着电子束的角散不应超过辐射的角散, 即

$$\sigma_{x'} = \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\beta_x}} \leq \sqrt{\frac{\epsilon_r}{L_G}} \sim \sigma_{r'} \quad (10.134)$$

<sup>35</sup>此处扩大不是因为束团内的空间电荷效应, 而是束团本身相空间不可压缩的特性 (Liouville 定理)。

将对电子束的横向尺寸与角散的要求  $\sigma_x \sim \sigma_r$  与  $\sigma_{x'} \leq \sigma_{r'}$  合在一起，则形成对电子束发射度的要求

$$\epsilon_{x,y} \leq \epsilon_r = \frac{\lambda_1}{4\pi} \quad (10.135)$$

当给定电子束的发射度后，则有最优的电子束  $\beta_x$  函数  $\beta_x \sim L_G \frac{\epsilon_x}{\epsilon_r}$ 。更低的束流发射度可允许更小的聚焦束团尺寸，由此可能导致更短的增益长度，但全面优化还需要考虑其它可能相互影响的因素。

### 10.7.3 电子横向 betatron 振荡效应

前面分别讨论了辐射衍射效应，分析该效应对 FEL 增益长度的影响，给出了与一维模型不同的定标关系。然后，讨论了电子束横向有限发射度或有限角散效应对 FEL 共振波长展宽的影响，为了满足在特定波长 SASE FEL 能工作前提下，给出了电子束发射度应满足的条件。现在，我们考虑另一个三维效应，即电子束的横向 betatron 振荡对有质动力相位  $\theta$  的影响。简化起见，这里考虑的内容定性为主。

§5.2 介绍过，简化的波荡器磁场  $B(z) = B_y(z) = B_0 \sin(k_u z)$  仅考虑在轴 (on-axis) 情况，当考虑电子横向 betatron 振荡时，有必要写出完整的波荡器磁场的表示式。对平面磁极的平面型波荡器，有

$$\mathbf{B}(x, y, z) = B_0 \cosh(k_u y) \sin(k_u z) \hat{\mathbf{y}} + B_0 \sinh(k_u y) \cos(k_u z) \hat{\mathbf{z}} \quad (10.136)$$

当写成较复杂的形式时，怎么影响电子在波荡器中的运动轨迹呢？从洛伦兹力方程开始

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma m \frac{dx}{dt} \\ \gamma m \frac{dy}{dt} \\ \gamma m \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e \begin{pmatrix} B_z \frac{dy}{dt} - B_y \frac{dz}{dt} \\ -B_z \frac{dx}{dt} \\ B_y \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} \quad (10.137)$$

当  $B_z$  分量不再能忽略时， $x, y$  的运动方程耦合在一起，求解以上方程将变得稍复杂： $x$  的运动方程不再是之前学过的

$$x' = \frac{dx}{dz} \propto \cos(k_u z) \quad (10.138)$$

而会出现一个与  $y$  方向运动有关的额外项

$$x' \propto \cosh(k_u y) \cos(k_u z) \quad (10.139)$$

同时， $y$  也有对应的运动方程。略去推导细节，将  $x$  运动方程代入洛伦兹力方程的  $y$  分量，对波荡器周期取平均后，可以得到

$$\begin{aligned} y'' &\approx -\frac{K^2 k_u}{\gamma_r^2} \cos^2(k_u z) \sinh(k_u y) \cosh(k_u y) \\ &\approx -\left(\frac{K k_u}{\gamma_r}\right)^2 \cos^2(k_u z) y \equiv -k_{n0}^2 y \end{aligned} \quad (10.140)$$

其中， $k_{n0} = \frac{K k_u}{\sqrt{2\gamma}} \propto \gamma^{-1}$ ，意味着，考虑完整的波荡器磁场后，平面波荡器将导致电子束在横向  $y$  方向有天然(弱)聚焦的 betatron 振荡。

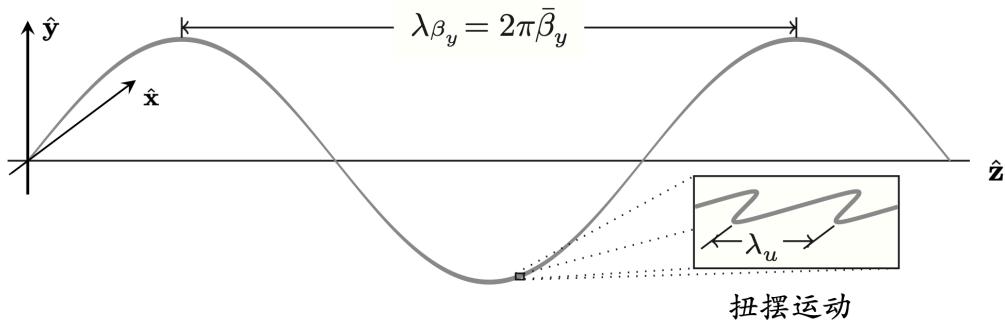
定性来说, 电子束的横向  $x, y$  的运动轨迹可以写成

$$\begin{aligned} x &= x_w + x_\beta \\ y &= y_\beta \end{aligned} \quad (10.141)$$

其中, 下标  $w$  表示在波荡器中的扭摆运动, 下标  $\beta$  则是 betatron 振荡

$$\begin{aligned} x_\beta &= x_0 \cos(k_{nx}z) + \frac{x'_0}{k_{nx}} \sin(k_{nx}z) \\ y_\beta &= y_0 \cos(k_{ny}z) + \frac{y'_0}{k_{ny}} \sin(k_{ny}z) \end{aligned} \quad (10.142)$$

其中,  $k_{nx}^2 + k_{ny}^2 = k_{n0}^2$ 。由此可知,  $x, y$  两个方向都将存在 betatron 振荡,  $x$  方向还多了扭摆振荡运动。从空间尺度上看, betatron 振荡发生在横向  $x, y$  方向, 振荡的空间尺度  $\lambda_{\beta_{x,y}} \gg$  在横向  $x$  方向的扭摆运动  $\lambda_u$ , 参考图 10.35。



**图 10.35:** 平面波荡器的扭摆运动 (发生在  $x$  方向) 与 betatron 振荡 (发生在  $y$  方向)。图例修改自 Kim, Huang, and Lindberg 一书。这里  $\bar{\beta}_y = \lambda_{\beta_y}/2\pi = k_{n0}^{-1}$ 。当平面波荡器磁极不是完美平面时, 在  $x$  方向也会有 betatron 振荡。

知道了三维波荡器磁场导致横向 betatron 振荡后, 回到正题, 这个效应如何影响 FEL? 略去分析细节, 这里仅定性介绍。尽管 FEL 动力学过程为纵向动力学主导, 并且横向运动很大程度上独立于纵向运动, 但是由于能量-动量守恒, 对横向动量不同的两个粒子, 它们将具有不同的纵向速度, 也就有稍微不同的有质动力相位  $\theta$ , 从而导致不同粒子间共振条件改变, 影响 FEL 动力学。分析发现, 在波荡器中, 具有发射度  $\epsilon_x$  的电子束, 横向尺寸大约有

$$\sigma_x = \sqrt{\epsilon_x \beta_x} \approx \sqrt{\epsilon_x \frac{\lambda_{\beta_x}}{2\pi}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_x}{k_{n0}}} \sim \sqrt{\frac{\epsilon_x \gamma_r \lambda_u}{2\pi K}} \quad (10.143)$$

参考图 10.36。

与前面讨论的有限发射度电子束的匹配要求

$$\sigma_{x,\text{opt}} \sim \sigma_r \sim \sqrt{\frac{\lambda_1 L_G}{4\pi}} \quad (10.144)$$

将发现, 即使当电子束的发射度能控制到与辐射场发射度  $\epsilon_x = \lambda_1/4\pi$  一样小时, 两项比例

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,\text{opt}}} \approx \sqrt{\frac{2\gamma\rho}{K}} \gg 1 \quad (10.145)$$

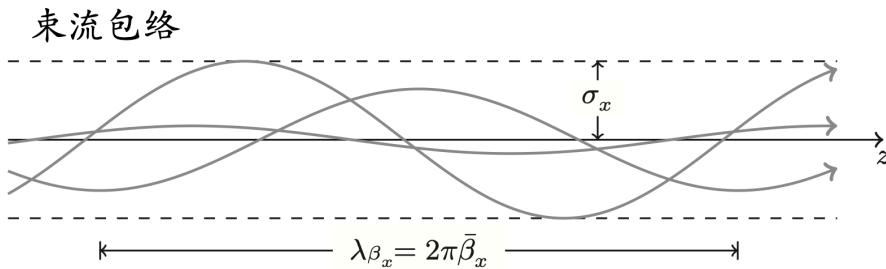


图 10.36: 平面波荡器的匹配束流包络。图例修改自 Kim, Huang, and Lindberg 一书。这里有  $\bar{\beta}_x \approx k_{n0}^{-1} \approx \frac{\gamma_r \lambda_u}{2\pi K}$ 。

意味着, 对短波长自由电子激光器, 如果只仰赖波荡器磁极的天然弱聚焦, 将很难达到匹配大小, 即在 XFEL 中较难产生有效的电子束与辐射场交互作用。解决的办法是: 在波荡器单元节中添加外部强聚焦, 比如第 7 章介绍过的 FODO 磁聚焦结构。



**笔记** 上面仅给出关于三维效应的定性讨论。对于定量研究辐射衍射、光导效应、电子束团有限发射度和束团 betatron 振荡对 FEL 增益的影响等详细的讨论, 此处不论。这里给出的是半调子的讨论, 关于三维效应的更完整分析, 需要从三维的 Vlasov-Maxwell 方程开始, 感兴趣的读者可以参考相关文献或专著。

#### 10.7.4 谢明公式

在设计高增益 FEL 时, 增益长度时常是最重要的指标参数之一, 因为它决定了 FEL 过程达到饱和所需要的波荡器长度, 也就决定了设计建造波荡器成本。完整考虑三维效应之后的增益长度相对于理想一维情形的偏离反映出电子束团发射度和能散度等效应在动力学中的作用程度。此处不深究细节, 给出一个非常方便使用的半解析半数值的拟合公式, 称谢明公式 (Ming Xie fitting formula)<sup>36</sup>。此公式将先前介绍的一维增益长度推广为如下的三维增益长度形式:

$$L_G = L_{G0}(1 + \Lambda) \quad (10.146)$$

其中, 因子  $\Lambda$  包含了一维模型所忽略的几种常见效应。以下总结谢明公式:

##### 定理 10.13. 谢明 (Ming Xie) 公式

基于一维 FEL 模型的分析得到的结果为理想情况, 忽略了辐射场横向衍射 (diffraction “ $d$ ”) 效应、束团有限角散 (angular divergence “ $\varepsilon$ ”)、束团有限能散 (energy spread “ $\gamma$ ”) 效应。谢明公式可以用来快速评估包含这些三维 FEL 效应对一维增益长度的

<sup>36</sup> 谢明在 1982 年从武汉大学获得物理学学士学位, 1984 年和 1989 年分别在斯坦福大学获得物理学硕士和博士学位。他的博士论文是关于自由电子激光的光学导引理论, 指导老师为 John Madey。在劳伦斯伯克利国家实验室 (LBL) 博士后期间, 主要与 Kwang-Je Kim 合作, 研究主题为 FEL 振荡器中孔耦合谐振腔的性能和优化, 开发了一种准确的数值方法。后来利用该方法成功解决了高增益 FEL 的巨大积分微分方程, 考虑了不完美的电子束品质的影响。其结果正是现在以他为名的多参数拟合公式, 现在已成为全世界 FEL 社群广泛使用、应用于高增益 FEL 性能的快速估算公式。

修正，有

$$L_G = L_{G0}(1 + \Lambda) \quad (10.147)$$

其中， $L_{G0} = \frac{\lambda_u}{4\sqrt{3}\pi\rho}$  为一维功率增益长度 (power gain length)， $\lambda_u$  为波荡器周期， $\rho$  为 Pierce/FEL 参数， $\Lambda$  为谢明修正因子

$$\begin{aligned} \Lambda = & a_1 \eta_d^{a_2} + a_3 \eta_\varepsilon^{a_4} + a_5 \eta_\gamma^{a_6} \\ & + a_7 \eta_\varepsilon^{a_8} \eta_\gamma^{a_9} + a_{10} \eta_d^{a_{11}} \eta_\gamma^{a_{12}} + a_{13} \eta_d^{a_{14}} \eta_\varepsilon^{a_{15}} + a_{16} \eta_d^{a_{17}} \eta_\varepsilon^{a_{18}} \eta_\gamma^{a_{19}} \end{aligned} \quad (10.148)$$

$$\eta_d = \frac{L_{G0}}{2k_1\sigma_x^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}\hat{\sigma}_x^2} \quad (10.149)$$

$$\eta_\varepsilon = 2 \frac{L_{G0}}{\bar{\beta}} k_1 \epsilon_x = \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{k}_\beta^2 \hat{\sigma}_x^2 \quad (10.150)$$

$$\eta_\gamma = 4\pi \frac{L_{G0}}{\lambda_u} \sigma_\delta = \frac{\hat{\sigma}_\eta}{\sqrt{3}} \quad (10.151)$$

其中， $\sigma_x$  为束团横向尺寸， $\epsilon_x$  为束团横向几何发射度， $\bar{\beta}$  为波荡器中平均 beta 函数， $\sigma_\delta$  为相对能散。19 个拟合系数为

$$a_1 = 0.45, \quad a_2 = 0.57, \quad a_3 = 0.55, \quad a_4 = 1.6, \quad a_5 = 3$$

$$a_6 = 2, \quad a_7 = 0.35, \quad a_8 = 2.9, \quad a_9 = 2.4, \quad a_{10} = 51$$

$$a_{11} = 0.95, \quad a_{12} = 3, \quad a_{13} = 5.4, \quad a_{14} = 0.7, \quad a_{15} = 1.9$$

$$a_{16} = 1140, \quad a_{17} = 2.2, \quad a_{18} = 2.9, \quad a_{19} = 3.2$$

初次饱和输出功率为

$$P_{\text{sat}} \approx 1.6 \left( \frac{L_{G0}}{L_G} \right)^2 \rho P_{\text{beam}} = \frac{1.6}{(1 + \Lambda)^2} \rho P_{\text{beam}} \quad (10.152)$$

其中， $P_{\text{beam}}[\text{TW}] = \gamma_r m c^2 [\text{GeV}] I [\text{kA}]$ 。

**证明** 参考 M. Xie, Design optimization for an X-ray free-electron laser driven by SLAC linac, in Proceedings of the 1995 Particle Accelerator Conference. Piscataway, NJ: IEEE, p. 183, 1995. <https://accelconf.web.cern.ch/p95/ARTICLES/TPG/TPG10.PDF>



**笔记** 关于谢明的介绍，可参考<https://pubs.aip.org/physicstoday/article/58/6/81/908982/Ming-Xie>

#### 定理 10.14. 优化 beta 函数情况下的功率增益长度公式

当波荡器中的平均 beta 函数经过优化后，对应的功率增益长度有如下公式：

$$L_G \approx 1.2 \left( \frac{I_A}{I_b} \right)^{1/2} \left( \frac{\epsilon_n^5 \lambda_u^5}{\lambda_1^4} \right)^{1/6} \frac{\left( 1 + \frac{K^2}{2} \right)^{1/3}}{K[\text{JJ}]} \propto \frac{1}{B_\perp^{1/2}} \frac{1}{\epsilon_n^{1/6}} \quad (10.153)$$

其中，

- $I_A \approx 17045 \text{ A}$  为 Alfvén 电流

- $I_b$  为束团电流，假设均匀平顶分布
- $\epsilon_n$  为束团归一化发射度
- $K$  为波荡器参数  $K = \frac{eB_0}{m_e c k_u} = 0.934 \lambda_u [\text{cm}] B_0 [\text{T}]$ ,  $B_0$  为峰值磁场强度,  $k_u = 2\pi/\lambda_u$
- $[\text{JJ}] = \mathcal{J}_0\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right) - \mathcal{J}_1\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right)$
- $\mathcal{B}_\perp = \frac{I/ec}{4\pi^2\epsilon_n^2}$  为束团五维亮度(除第六维能量差异坐标  $\delta$  外), 为不变量

**证明** 参考 E.L. Saldin, E.A. Schneidmiller, and M.V. Yurkov, Design formulas for short-wavelength FELs, Optics Comm. 235, 415, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2004.02.071> □

这一章到目前为止已经介绍了 FEL 中几个空间尺寸截然不同的物理量, 结束这一节前, 此处整理它们之间的数量级关系。明白此数量级关系或许有助于对分析 FEL 中不同问题的理解。

### 定律 10.1. 自由电子激光的几个空间尺度

分低增益与高增益两种情况。对低增益自由电子激光, 有

$$L_G \gg L_u \sim \frac{2\pi}{\Omega_s} \gg (\sigma_z, \lambda_u) \gg \lambda_r \quad (10.154)$$

其中,  $L_G$  为增益长度,  $L_u = N_u \lambda_u$  为波荡器长度,  $\Omega_s$  为同步振荡波数,  $\sigma_z$  为束团纵向长度,  $\lambda_u$  为波荡器周期,  $\lambda_r$  为辐射波长。

对高增益自由电子激光, 有

$$L_u \geq 10L_G \gg \lambda_u \gg \sigma_z \geq \ell_{coh} \gg \lambda_r \quad (10.155)$$

其中,  $\ell_{coh} = N_u \lambda_r$  为纵向相干长度,  $N_u$  为波荡器周期数。 □

## 10.8 低增益 FEL：三维与其它效应考虑

上一节介绍了高增益 FEL 的三维效应，这一节简短讨论低增益 FEL 的三维与其它效应。对高增益 FEL 来说，一直到饱和之前的指数增长区间，虽然接近饱和时的辐射功率可能已经很可观了，其分析仍基于小信号的线性、微扰过程<sup>37</sup>。由于低增益 FEL 操作在振荡器模式，电子束逐圈经过光学谐振腔时，虽然总为低增益 (low-gain) 过程，但未必是小信号 (small-signal) 过程；当接近饱和时，虽然辐射功率未必如高增益 FEL 的辐射功率可观，但应归为低增益大信号过程。以下将特别针对低增益 FEL，分别讨论振荡器的平衡或饱和过程、光学谐振腔稳定性条件、设计思路、定标定律与一种称为 laser lethargy 的滑移效应。

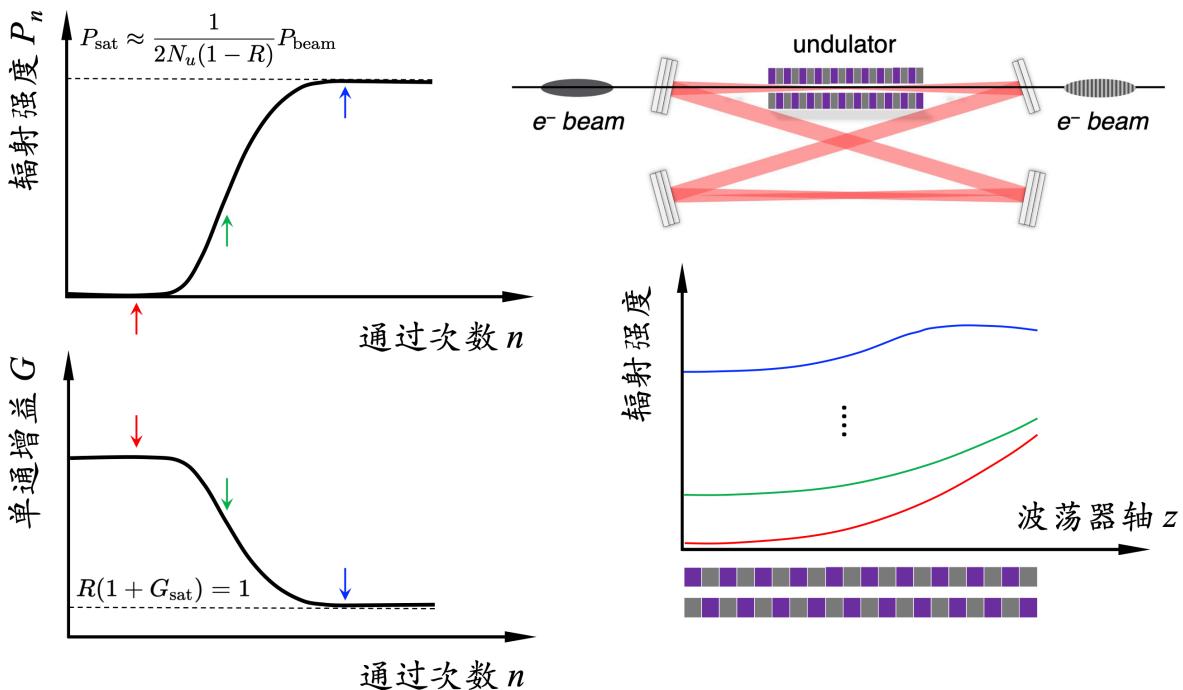
### 10.8.1 平衡或饱和过程

前面 §10.3、§10.6 定性介绍过自由电子激光振荡器的基本工作原理。这里简短回顾一下，着重介绍接近饱和时的动力学过程。假设每次通过的电子束为新鲜、未经调制、未被“加热”的电子束<sup>38</sup>：

- 在初始阶段 — 图 10.37 中的红色箭头/曲线 — 谐振腔内存在辐射场，新鲜电子束每次经过谐振腔的波荡器时，受到辐射场的小幅、线性能量调制，转变成密度调制，进一步产生辐射场，用来克服反射镜的辐射损耗后，仍逐渐积累。由于此时谐振腔中的能量较少，辐射增量占比相对较高，这个阶段的增益  $G = |\Delta u/u|$  是最大的（分母的  $u$  小）。此阶段，电子束在波荡器前进的过程中，束团中的大多数粒子均处于减速相位，粒子将能量转移给辐射场。
- 在中间阶段 — 图 10.37 中的绿色箭头/曲线 — 由于谐振腔内已经积累一定程度的辐射场能量，新鲜电子束每次经过谐振腔的波荡器时，受到辐射场的能量调制越来越明显，转变为明显的密度调制，产生增强的辐射场。此时谐振腔中的能量已经开始增加，在反射镜的辐射损耗也同样增加，辐射增量占比就变得相对较小，增益  $G = |\Delta u/u|$  中的分母  $u$  比初始阶段。此阶段，电子束在波荡器前进的过程中，束团中的大多数粒子均处于减速相位，粒子将能量转移给辐射场。
- 在饱和阶段 — 图 10.37 中的蓝色箭头/曲线 — 谐振腔内已经积累足够多的辐射场能量，逐圈由于反射镜导致的损耗能量也很可观。新鲜电子束每次经过谐振腔的波荡器时，受到过大辐射场的能量调制，导致密度过度调制，束团内一定比例的粒子不再将能量转移给辐射场，而是从辐射场吸收能量。束团整体仍然产生辐射场，但都被用来克服反射镜导致的辐射损耗。此时谐振腔中的辐射能量不再增加，单次通过增益与总损耗一样大。谐振腔中的辐射场能量不再积累，系统达平衡，进入饱和状态。

<sup>37</sup>因此，在一些讨论高增益 FEL 的文献中，如果遇到“指数增长”、“线性增长”等字眼混用时，也就不足为奇了。

<sup>38</sup>如果是储存环自由电子激光振荡器 (storage-ring FEL oscillator, SR-FELO)，那么每次通过的电子束就是旧的、经过前面 FEL 交互作用而加热的、循环使用的电子束。



**图 10.37:** 自由电子激光振荡器光学谐振腔内辐射强度  $P_n$  与单次通过增益  $G$  随新鲜电子束通过次数的演化。右下图随意选取演化过程三个阶段，初始阶段以红色箭头/曲线表示，中间阶段以绿色箭头/曲线表示，饱和阶段以蓝色箭头/曲线表示)，辐射强度在波荡器内的变化过程。在初始阶段增益最大，中间阶段逐渐减小，平衡达饱和阶段降至补偿谐振腔损耗。



**笔记** 数值模拟完整的、时变、三维自由电子激光振荡器的动力学过程需要耗费大量计算时间。一维、稳态的自由电子激光振荡器的动力学过程模拟相对容易，对此感兴趣的读者，可参考 B.W.J. McNeil, A simple model of the free-electron-laser oscillator from low into high gain, Nucl. Instru. Methods A **296**, 388-393 (1990). [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(90\)91237-6](https://doi.org/10.1016/0168-9002(90)91237-6)

## 10.8.2 光学谐振腔稳定性条件

由于 FEL 振荡器要求反射镜约束光路，使辐射场返回与后面注入的电子束继续交互作用。第一章介绍过，均匀平面电磁波是自由空间的一个解。反射镜的存在意味着系统不再是无边无际的自由空间，光学谐振腔的本征模 (eigenmode) 不再是均匀平面电磁波，本征模的波前需要与反射镜的曲率半径  $R_j$  匹配 ( $j = 1, 2, \dots$  为反射镜变号)。

以两个反射镜组成的线性谐振腔为例，参考图 10.38，理想情况下，同步条件要求辐射光束往返一趟  $L_c = 2D$  的时间与后面注入电子束在波荡器入口时刻对齐，有

$$\frac{2D}{c} = \frac{n}{f} \quad (10.156)$$

其中， $f$  为电子束注入重复频率， $n$  为正整数。当  $n = 1$  时，表示每个电子束均参与作用； $n > 1$  则是每  $n$  个电子束参与作用。略去证明，考虑一个特殊情况  $\bar{R} = R_1 = R_2$ ，在光

腔束腰处，辐射光束的横向尺寸有

$$w^2(0) = w_0^2 = \frac{\lambda_\ell}{2\pi} \sqrt{D(2R - D)} \quad (10.157)$$

一般将波荡器的中心与光腔束腰处重合。远离束腰处的辐射光束横向尺寸可写成

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \quad (10.158)$$

其中， $z_R = \pi w_0^2 / \lambda_\ell$ 。

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad g_1 = 1 - \frac{D}{R_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{D}{R_2}$$

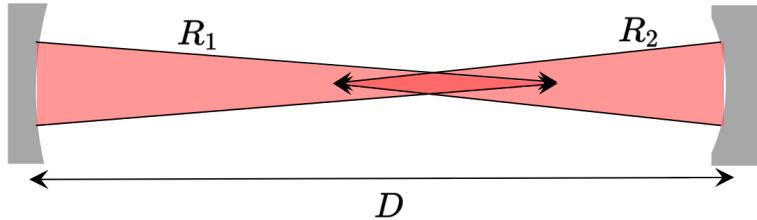


图 10.38：由两面反射镜组成的光学谐振腔示意图。稳定性条件有  $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$ 。

因此，对感兴趣的谐振波长  $\lambda_\ell$  与参与作用的电子束重复频率  $f/n$ ，可以适当选取谐振腔长度  $D$  与反射镜曲率半径  $R_j$ 。光在谐振腔里受反射镜约束并传输，如 §8.7.1 介绍，可以通过传输矩阵描述。不难想象， $D$  与  $R_j$  的选择还需要满足“光学谐振腔稳定区间”，类似于 §7.8 介绍的粒子传输矩阵的稳定性条件。

### 定理 10.15. 光学谐振腔稳定性条件

对一般形式的谐振腔，按几何光学，以向量  $[x \ \Theta]^T$  描述束线轨迹，单圈传输矩阵可写为如下 ABCD 矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (10.159)$$

稳定性条件要求

$$0 \leq \frac{A + D + 2}{4} \leq 1 \quad (10.160)$$

或写成

$$|\text{Trace}(\mathbf{T})| \leq 2 \quad (10.161)$$

**注** 此与粒子束在一般磁聚焦结构的稳定性条件一样，可参考 §7.8。

### 定理 10.16. 双面镜线性谐振腔稳定性条件

参考图 10.38，对由两面反射镜组成的线性谐振腔，假设反射镜的曲率半径分别为  $R_1, R_2$ ，腔长  $D$ ，定义  $g_1 = 1 - D/R_1, g_2 = 1 - D/R_2$ ，则稳定性条件有

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (10.162)$$

**证明** 利用传输矩阵，光束绕行一周的单圈传输矩阵有

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{D}{f_2} & D \left(2 - \frac{D}{f_2}\right) \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{D}{f_1 f_2} & \left(1 - \frac{D}{f_1}\right)\left(1 - \frac{D}{f_2}\right) - \frac{D}{f_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.163)$$

其中， $f_1 = R_1/2, f_2 = R_2/2$ 。根据上面定理，稳定性条件可进一步写为

$$0 \leq \frac{A + D + 2}{4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1 \quad (10.164)$$

或

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (10.165)$$

当  $g_1 g_2 = 1$  时，为两条双曲线 (hyperbola)，如图 10.39，其中，阴影区域为稳定区域。图中标示了  $(g_1, g_2)$  几个特殊情况对应的光学谐振腔构型。

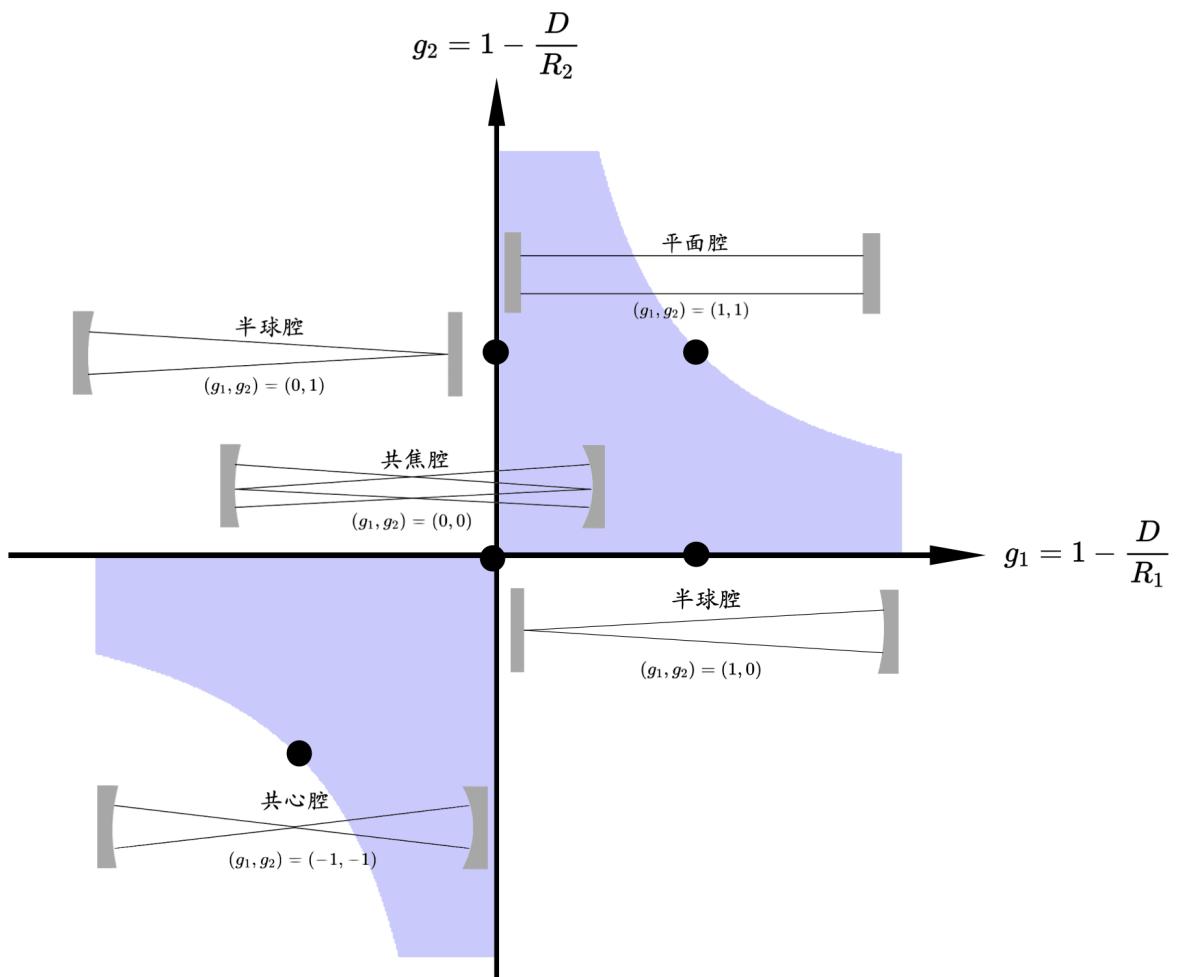


图 10.39：光学谐振腔稳定区间。图中满足  $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$  的区间为蓝色区域。图中画出了几个特殊情况的谐振腔构型。

练习 10.19 根据以上介绍，画出  $g_1 = 2, g_2 = 1/3$  的谐振腔构型。 ■

解 参考图 10.40。

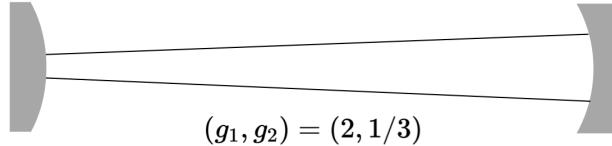
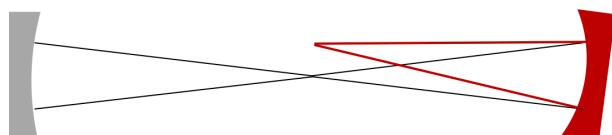


图 10.40:  $g_1 = 2, g_2 = 1/3$  的谐振腔构型。

前面给出了光学谐振腔的稳定性条件，用来决定腔长  $D$  与反射镜的曲率半径  $R_j$ 。但稳定性条件只是限定的一个范围，并不是唯一决定  $D$  与  $R_j$ 。 $D$  与  $R_j$  的选择不止一组，即仍允许许多光学谐振腔构型。工程实际还需要考虑许多因素，这里简短介绍反射镜没有摆正而导致失谐的情况。参考图 10.41，可分为共心失谐或共焦失谐。可以看到，由于光束尺寸在中心处较小，对失谐更敏感。选择共心腔或共焦腔各有优缺点：

- 共心 (concentric) 腔  $\Rightarrow$  两焦点距离较近，对反射镜失谐较敏感；反射镜上的光斑较大，衍射效应较大，但积累的辐射功率密度/能量密度较小；谐振腔中心束腰较小，场强较高。
- 共焦 (confocal) 腔  $\Rightarrow$  两焦点距离较远，对反射镜失谐较不敏感；反射镜上的光斑较小，衍射效应较小，但积累的辐射功率密度/能量密度较大；谐振腔中心束腰较大，场强较低。

### 共心失调 (concentric misalignment)



### 共焦失调 (confocal misalignment)

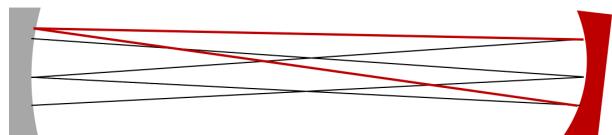


图 10.41：光学谐振腔反射镜失谐情况。上图为共心失谐，下图为共焦失谐。由于光束尺寸在中心处较小，对失谐更敏感。

光学谐振腔除了约束/局限辐射光束在腔内来回反弹、传输，与后面注入的电子束继续

作用之外，反射镜的另一个功能是在适当时候将辐射光场引出，称输出耦合 (outcoupling)。一般来说，有几种引出方案，各有优缺：

- 在引出的反射镜上打孔  $\Rightarrow$  允许部分辐射光场通过。优点：结构简单、宽带；缺点：影响谐振腔本征模的稳定性，孔的存在可能贡献额外的损耗，输出耦合效果与共振波长有关。
- 对引出的反射镜增加部分透射  $\Rightarrow$  使用部分透射的反射镜来作为输出耦合镜。此种反射镜通常具有特定的透射率，可以控制辐射光场在谐振腔内的往返次数和输出功率。优点：比较灵活，不影响谐振腔本征模形态；缺点：窄带，仅适用于某些特定波长。
- 布儒斯特板 (Brewster plate)  $\Rightarrow$  当光束线以布儒斯特角入射时，可以减少反射损失。将布儒斯特板放置在谐振腔的一个侧面角度，让某一特殊偏振状态几乎无反射地通过，实现辐射光场输出。优点：输出耦合大小可调，不影响谐振腔本征模形态；缺点：结构复杂，仅限于某些特定的偏振状态。
- 刮片镜 (scraper mirror)  $\Rightarrow$  为一种特殊的反射镜，镜面上有一刮片区域，能部分地反射/透射辐射光场。优点：输出耦合大小可调；缺点：结构复杂，可能影响谐振腔本征模的稳定性。

### 10.8.3 振荡器设计思路与定标定律

要使自由电子激光振荡器“起振”，必要条件是 **增益 > 损耗**。要达到此目标就要求适当选择电子束、波荡器与光学谐振腔参数，更具体地说：

- 电子束参数  $\Rightarrow$  参考能量  $\gamma_r$ 、峰值电流  $I_b$ 、发射度  $\epsilon_x$ 、束团尺寸  $\sigma_x$ 、能散  $\sigma_\delta$  等；
- 波荡器参数  $\Rightarrow$  波荡器参数  $K$ 、周期数  $N_u$ 、周期长度  $\lambda_u$  等；
- 谐振腔参数  $\Rightarrow$  光路长度  $L_c$ 、反射系数  $R$ 、反射镜曲率半径  $R_j$  等。

总体思路：第一步，先找到能满足 **增益 > 损耗** 的一组参数，对应上面带文字框的物理量。第二步，再优化其它参数，目标是使可能导致增益减小的因素最小化。假设起振波长  $\lambda_\ell$  为已知，辐射输出特性可以作为优化目标。

**第一步** 首先，FEL 共振关系  $\lambda_\ell = \frac{\lambda_u}{2\gamma_r^2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)$  联系/约束了  $\lambda_u$ 、 $\gamma_r$ 、 $K$  几个基本参数。此外，由前面定义的增益  $G = -\Delta u/u$ ，其中，

$$G \equiv -\frac{\Delta u}{u} = \frac{mc^2 \langle \Delta \gamma \rangle I_b / ec \mathcal{A}_\perp}{\epsilon_0 E_0^2 / 2} \leq 8\pi^2 \frac{I_b}{I_A} \frac{K^2 [JJ]^2}{\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \frac{N_u^2 \lambda_\ell}{\lambda_u} g(x) \quad (10.166)$$

其中， $\mathcal{A}_\perp = 2\pi (\sigma_x^2 + \sigma_r^2)$  与  $\sigma_r^2 = \frac{\lambda_1}{4\pi} z_R$ 。可以得到几个定标定律 (scaling law)

- $G \propto I_b$
- $G \propto 1/\mathcal{A}_\perp$
- $G \propto \gamma \lambda_\ell \propto 1/\gamma$

可以看到，电子束电流越高、电子束或辐射光束横向尺寸越小、参考能量不要过高，能有效提高单通增益。由于谐振腔中的能量转移过程是沿着波荡器积累的，因此，波荡器越长或  $N_u$  越大，对提高增益也有助益。但波荡器长度需要适当选择，不能太短，否则电子束与辐射场交互作用长度不够，单次经过无法积累足够辐射能量；不宜过长，否则容易太快使振荡器进入饱和状态。

以上的  $G \propto 1/\mathcal{A}_\perp$  表明，电子束或辐射光束横向尺寸越小对提高增益有帮助。但不宜过小。这是因为电子束或辐射光束都具有有限大小的发射度；如果在一处位置过小，则在该处的横向角散将变得很大，在波荡器长度范围内的尺寸变化就很大。参考图 10.42，若要在波荡器中维持有效的交互作用长度，应尽量保持前进的电子束团被包围在向前传播的辐射光束内。留意， $\mathcal{A}_\perp = 2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_r^2)$  包含了电子束尺寸与辐射光束尺寸；较小的电子束能提供更大的电流密度，较小的光束尺寸则能提供更大的电场强度。

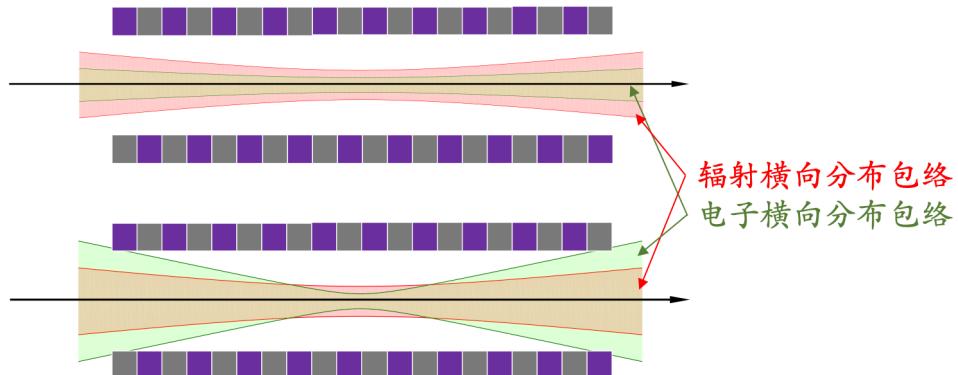


图 10.42：在波荡器中，尽量保持前进的电子束团被包围在向前传播的辐射光束内。上图是较好的设计，电子束发射度相对较小；下图是不好的设计，电子束发射度相对较大。

结合单次通过增益  $G$  与谐振腔反射系数  $R$ ，如果要波荡器产生的辐射场能够逐圈积累，则要求  $R(1+G) > 1$ 。辐射场（光子）在谐振腔中的行进轨迹由反射镜决定，以光速  $c$  传播<sup>39</sup>，光路长度需要与后面到达波荡器入口的电子束同步，则对光路长度  $L_c$  给出约束条件。此约束条件因不同谐振腔结构而异。常见的光学谐振腔结构有如：两面反射镜组成的线性谐振腔 (linear resonator)、三面反射镜组成的环形谐振腔 (ring resonator)、四面反射镜组成的蝴蝶型谐振腔 (bow-tie resonator)。

**第二步** 可能造成增益恶化 (gain degradation) 的三个物理量：能散、束团尺寸与发射度。先讨论能散。如果电子束能散太大，根据图 10.21 增益曲线，可以看到，束团中的不同粒子的增益不一样，能共振产生有效交互作用的粒子数减少，最终将导致增益减小。在不影响增益的前提下，可以通过共振关系估算振荡器对电子束能散的限制。首先，通过共振关系对能量与辐射波长取变分，有

$$\left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda_\ell} \right| = 2 \frac{\Delta\gamma}{\gamma_r} \quad (10.167)$$

<sup>39</sup>下一节将介绍，FEL 延滞效应将使此同步条件偏移，导致增益下降。

由 §10.4 知，低增益 FEL 曲线频宽约为  $1/2N_u$ ，因此，如果希望增益不明显降低，则要求

$$\left| \frac{\Delta\gamma}{\gamma_r} \right| \approx \sigma_\delta < \frac{1}{4N_u} \quad (10.168)$$

由此还可以看到，波荡器周期数不宜太多，否则对电子束能散的要求将越严苛。

**注** 比较一下，高增益 FEL 对能散的要求是  $\sigma_\delta < \rho$ 。一般来说， $\rho \approx 10^{-4} \sim 10^{-3}$ ，因此高增益 FEL 的波荡器周期数比低增益 FEL 的波荡器周期数多得多，波荡器长度也比较长。

再讨论发射度。发射度由束团的横向尺寸 (size) 与角散 (divergence) 组成，表征的是束团在多大程度上能够被有效聚焦；发射度越小越能够有效聚焦。第 7 章、第 9 章介绍过，电子束的横向 betatron 函数  $\beta_x$  与辐射光束的瑞利长度  $z_R = \pi w_0^2 / \lambda_\ell$  类似，于是，对电子束，有

$$\sigma_x = \sqrt{\beta_x \epsilon_x} \Rightarrow \beta_x = \frac{\sigma_x^2}{\epsilon_x} \quad (10.169)$$

参考图 10.42，如果要满足在波荡器中，尽量保持电子束团被包围在辐射光束内，即  $\sigma_x < \sigma_{x,\gamma}$ ，则有约束条件  $\beta_x > z_R$ ，于是有

$$\epsilon_x < \frac{\lambda_\ell}{\pi} \left( \frac{\sigma_x}{w_0} \right)^2 \quad (10.170)$$

给出了对电子束几何发射度的要求。

除了在波荡器中，尽量保持电子束团被包围在辐射光束内的条件外，对发射度为  $\epsilon_x$  的束团，根据图 10.35 的讨论知，要求匹配的电子束横向尺寸有

$$\sigma_x = \sqrt{\epsilon_x \beta_x} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_x \gamma_r \lambda_u}{2\pi K}} \quad (10.171)$$

较大发射度的束团除了表征束团尺寸  $\sigma_x$  较大，也表征束团角散  $\sigma_{x'}$  较大。束团内不同散角的粒子在波荡器中的运动轨迹不太一样，因此受波荡器磁场的影响也就不太一样，于是对应的共振波长也就不太一样。此效应类似于上述的能散导致的增益下降。如果希望增益不明显降低，能评估角散效应约束的束团发射度。由 FEL 共振关系，令  $\psi \rightarrow \sigma_{x'}$

$$\lambda_\ell(\psi) = \frac{\lambda_u}{2\gamma_r^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma_r^2 \psi^2 \right) \rightarrow \frac{\lambda_u}{2\gamma_r^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma_r^2 \sigma_{x'}^2 \right) \quad (10.172)$$

有

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_\ell} = \sigma_{x'}^2 \frac{\lambda_u}{\lambda_\ell} = \left( \frac{\epsilon_x}{\sigma_x} \right)^2 \frac{\lambda_u}{\lambda_\ell} \quad (10.173)$$

其中，第二个等号用了  $\epsilon_x \approx \sigma_x \sigma_{x'}$  近似。要求  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_\ell} \leq \frac{1}{2N_u}$ ，于是有

$$\epsilon_x < \frac{\gamma_r \lambda_\ell}{4\pi N_u K} \quad (10.174)$$

给出了对电子束几何发射度的另一个要求。

#### 10.8.4 FEL 延滞：一种滑移效应

前面 §10.5 与 §10.7 介绍高增益 FEL 时，我们只讨论稳态，即假设电子束长度  $\gg$  滑移长度， $\sigma_z \gg N_u \lambda_r$ 。我们还没有讨论暂态。稳态假设成立的条件是电子束长很长或辐射波长很短时。滑移效应在短波长或长波长同样发生，但是由于低增益 FEL 多半操作在长波长段，因此对同样电子束长来说，滑移效应在低增益 FEL 就显得格外重要。

##### 定义 10.10. FEL 延滞 (FEL lethargy)

对长波长 FEL 振荡器，图 10.43 给出长电子束与短电子束单次经过波荡器时，电子束与辐射场相对滑移的物理图像。可以看到，由于滑移效应，无论束长长短，辐射场前端滑移长度约为  $N_u \lambda_r$ ，称滑移长度或相干长度。对图中下排的短束团情况，滑移效应导致辐射场在波荡器中与电子束交互作用的距离短于波荡器长度，能获得的增益受限，且辐射脉冲尾部能量比头部高（前面滑走了）<sup>a</sup>。经历在持续指数增长阶段的辐射场与接近饱和时的辐射场，其辐射包络（波包）的群速度不同。辐射脉冲尾部的场比头部的场先饱和。由此，尾部辐射能量脉冲（波包）的群速  $< c$ ，头部未饱和时的辐射能量脉冲（波包）的群速  $\approx c$ ，将导致同步条件偏离全脉冲辐射场以光速  $c$  传播的理想情况。当辐射脉冲尾部与头部均饱和时，则整体辐射脉冲的传播速度将恢复  $c$ 。由于滑移效应导致的增益减小与动态过程同步条件偏离的现象，通称 FEL 延滞 (lethargy)。

<sup>a</sup> 辐射脉冲最末端附近会有一些新产生的波荡器辐射，但强度比前端辐射强度小很多。

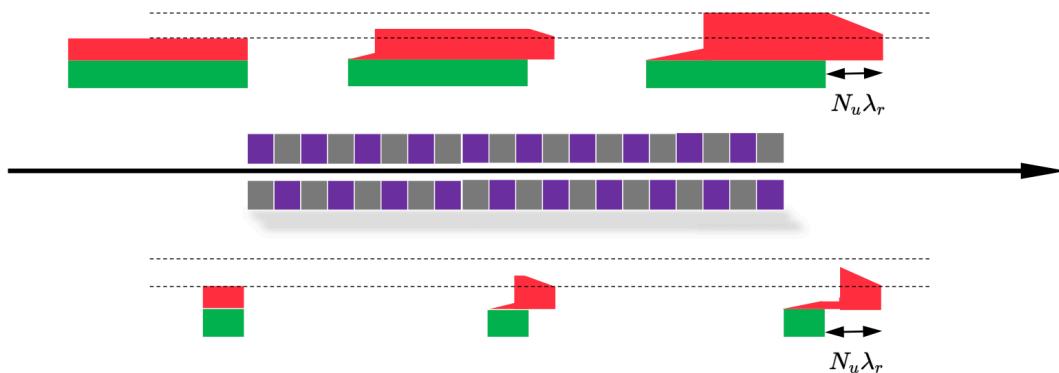


图 10.43：由于滑移效应导致的 FEL 延滞 (lethargy) 现象。辐射场前端滑移长度约为  $N_u \lambda_r$ ，称滑移长度。对短束团或长波长段而言，此效应导致辐射场在波荡器中能获得的增益受限，且辐射脉冲尾部能量比头部高。此外，辐射脉冲。

FEL 延滞导致的增益下降可以通过适当调整光腔长度来修正，称腔长调谐 (cavity length detuning)。通过扫描些微不同长度变化的总光腔长度，可以得到一系列的单次通过增益与辐射强度。适当选择腔长调谐，能够优化增益或辐射强度。



笔记 关于 FEL 延滞效应的更多讨论，可参考 G. Dattoli et al., Lethargy of laser oscillations and supermodes in free-electron lasers, Phys. Rev. A 37, 4326, 4334 (1988). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.37.4326>

### 10.8.5 饱和输出特性估算

**饱和功率、输出功率** 根据前面 §10.4介绍，波荡器的腔内饱和功率约有

$$P_{\text{sat}} \approx \frac{1}{2N_u(1-R)} P_{\text{beam}} \quad (10.175)$$

其中， $P_{\text{beam}}$  为电子束功率。从振荡器中耦合出的功率有  $P_{\text{out}} = \alpha P_{\text{sat}}$ ，其中， $\alpha$  为输出耦合系数 (outcoupling coefficient)。

**输出脉冲长度、频宽** 原则上，与电子束长差不多。辐射场为横向、纵向全相干，辐射频谱相对宽度约为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_\ell} \approx \frac{\lambda_\ell}{2\pi\sigma_z} \quad (10.176)$$

**辐射亮度** 可按下式估算

$$\mathcal{B} \sim \frac{4\dot{N}}{\lambda_\ell^2}, \quad \text{其中} \quad \dot{N} = \frac{P_{\text{out}}}{hc/\lambda_\ell} \quad (10.177)$$

一般来说，输出功率越高，亮度越大。

## 10.9 高增益 FEL 谐波产生与全相干方案

本章已经讨论了低增益 FEL 与高增益 FEL 的基础理论，介绍了作为低增益操作的 FEL 振荡器模式与高增益操作的 FEL 放大器或自放大自发辐射 SASE 模式。对高增益 FEL 来说，放大器模式需要外种子激光，因此受限于目前可得的外种子激光。由于 SASE 模式源于电子束的散粒噪声，不需要外部种子，因此弥补了短波长外种子激光源的缺口，仍然能够产生短于 10 nm 的“激光”，特别是 X 射线激光(x-ray laser)。但是，基于 SASE 模式产生的激光只有横向分布全相干而像激光，纵向分布由于受限于电子束的散粒噪声，激光的时间/纵向分布就像混沌型的光源，在时间分布上如图 10.28，接近饱和时每个 spike 的宽度大约是相干长度  $\ell_{coh} \approx \frac{\lambda_e}{2\sqrt{\pi\rho}} \sim N_u \lambda_r$  或 SASE FEL 频带宽度的倒数(根据傅里叶变换)。每个 spike 之间，由于辐射场放大演化过程没有关联，其相位彼此独立。总之，基于 SASE 产生的辐射场中包含了许多纵向模，且彼此间相位没有明确联系。

为了改善短波长、高增益 FEL 的纵向相干性，就需要“种子”(seed)。一般而言，如果存在一个相干辐射场作为“种子”，那么电子束与辐射场交换能量时，具有该“种子”的波长就具有比其它波长更高的增长率。先利用一束具有目标波长的激光将电子束团进行调制(即，将一目标波长的相干信号加载在电子束上)，使受携带目标波长而调制的电子束具有比随机散粒噪声大得多的信噪比，则当这种调制后的电子束进入波荡器时，经历自由电子激光高增益放大过程产生的辐射场就有较好的纵向相干性。这个思路的前提为需要已经具有目标波长、且调制功率足够的强激光。

 **练习 10.20** 上述种子激光调制波长 = 目标辐射波长的前提为电子束没有能量啁啾，且调制激光束也没有频率啁啾。考虑当电子束或激光束之一存在啁啾时，如何修改 FEL 共振条件？ ■

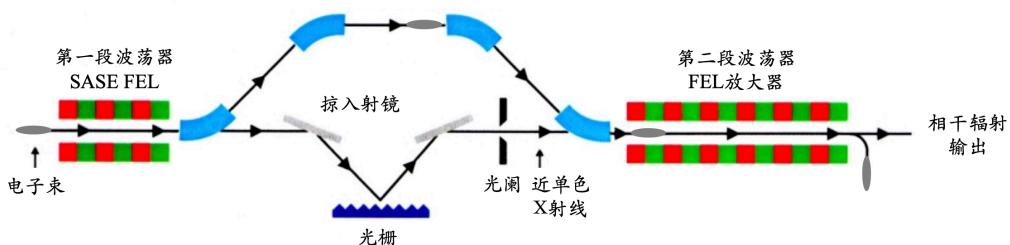
对于短波长自由电子激光，如 X 射线自由电子激光，外部 X 射线激光“种子”并不存在。目前 X 射线 FEL 产生辐射场的方法大多基于 SASE 方案，其产生的横向辐射场在接近饱和时为完全相干(full transverse coherence)，但是纵向相干性很差(poor longitudinal coherence)。纵向相干性由束团纵向分布决定，即纵向线电荷分布，包含散粒噪声或其它上游积累的噪声等，纵向相干性很差。如何提高纵向相干性成为近年研究热点。

一种思路是，先让电子束产生一长波长 FEL 激光，然后根据共振条件，其谐波波长也将存在。适当选择对应的高次谐波，则有机会在 X 射线波段得到良好纵向相干性的激光。在正式进入谐波产生机制介绍之前，这里介绍一个与高次谐波产生无关、但属于产生短波长高增益 FEL 全相干方案的机制，称自种子方案(self-seeding scheme)。

### 定义 10.11. 自种子产生纵向相干 FEL (self-seeding FEL)

最早在 DESY 提出，参考图 10.44，利用两段波荡器，电子束经历第一段波荡器，利用 SASE 机制产生需要波长的高强度信号，但由于是 SASE 机制产生，辐射场纵向分布的频谱不够干净。接着，利用放置在两段波荡器之间的单色仪 (monochromator) 过滤第一段产生的辐射信号、净化成为种子。由于是电子束自身产生的，称自种子 (self-seed)。净化后的辐射信号作为电子束进入第二段波荡器的种子，第二段波荡器操作在 FEL 放大器模式，将纵向净化的信号指数放大直到饱和。相对于 SASE，自种子 FEL 纵向相干、有更窄的输出频宽、更高的辐射谱亮度。但是，由于单色仪频宽窄，自种子方案对电子束中心能量抖动非常敏感。即，自种子方案具有好的 wavelength stability，但是 intensity stability 较差。此外，对高重频操作模式，需要注意单色仪热负载 (thermal loading) 效应。

**注** 电子束经过 bypass 段产生的延迟约 1-10 ps。辐射场经过单色仪形成的种子约有 100 fs 的延迟。



**图 10.44:** 自种子方案产生横纵向全相干 FEL。一般对软 X 射线波段，采用光栅 (grating monochromator)；对硬 X 射线波段，一般采用钻石晶体 (crystal monochromator)。图例取自 J. Feldhaus et al., Possible application of X-ray optical elements for reducing the spectral bandwidth of an X-ray SASE FEL, Opt. Comm. **140**, 341 (1997). [https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(97\)00163-6](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(97)00163-6)。



**笔记** 虽然图 10.44 画的是光栅，波荡器辐射场经过光栅后，利用反射过滤得到纯净的种子源。还有一种过滤方案利用晶体的透射过滤，同样可以得到纯净的种子源。利用反射式过滤，光的延迟相对较大，因此 seeding 传输段就较难达到紧凑的设计。

此外，上图画的自种子方案仅采用单次过滤。当上述提到的热负载效应将影响自种子方案的输出辐射特性时，一种缓解热效应的思路可采用多次过滤，称级联自种子方案 (cascaded self-seeding scheme)。级联的思路是，分两次滤波，缓解每次波荡器辐射场在每个晶体上积累的热负载。这些热负载主要来自上游 SASE 谱中那些频率成分落在 Darwin width<sup>40</sup>外的辐射能量。除了采用级联，也可以通过直接对晶体进行外部冷却达到。

<sup>40</sup>达尔文宽度 (Darwin width) 与摇摆曲线 (rocking curve) 为 X 射线衍射中的术语。摇摆曲线指当 X 射线辐射场入射在某一晶体上时，其衍射辐射强度随入射角变化的曲线图。摇摆曲线表征衍射过程对辐射线束与晶体晶格夹角间的敏感程度。假设有一完美排列的晶体和完全单色 X 射线辐射束。根据布拉格定律 (Bragg's

除自种子纵向相干方案外，还有一种不需要外部滤波部件仍能净化辐射场的创新方案，称改进型自放大自发辐射。

### 定义 10.12. 改进型自放大自发辐射 (iSASE)

为 improved SASE。参考图 10.45，此方案不需要外部调制激光，仅利用 SASE 本身的物理机制来“净化”自身产生辐射场。除电子束后方产生的辐射场的滑移效应外，通过相位移器 (phase shifter) 对电子束传输过程适当调整并加快其与辐射场的推迟相位，利用在上游段波荡器中产生的相干辐射场逐步调制电子束，建立电子束整体的相位关联性，从而提高中下游波荡器产生的辐射场的相干性。相干性的改进体现在较窄的频谱宽度或相干 (波包) 长度增加。

**注** iSASE 方案由美国 SLAC 国家实验室的吴颶昊 (Juhao Wu) 提出。原始论文可参考 J. Wu et al., Generation of Longitudinally Coherent Ultra High Power X-Ray FEL Pulses by Phase and Amplitude Mixing, FEL 2012 (TUPD07). <https://accelconf.web.cern.ch/FEL2012/papers/tupd07.pdf> 或 J. Wu et al., X-ray Spectra and Peak Power Control with iSASE, IPAC 2013 (WEODB101). <https://accelconf.web.cern.ch/IPAC2013/papers/weodb101.pdf>。

稍微偏离主题介绍完自种子方案后，现在我们回到谐波产生方案的思路。利用外种子产生高次谐波，从而产生纵向全相干 FEL 激光方案，大致的思路是：利用外种子激光对电子束进行 (能量) 调制，然后在下游操控电子束相空间分布使产生密度调制，通常是适当地压缩电子束，使“挤压”在电子束上的调制波长满足预期的波长，从而产生预期的高次谐波辐射。当这种调制后再经过有意操控的电子束进入波荡器时，经历自由电子激光高增益放大过程产生的高次谐波辐射场 — 即目标频率 — 就有较好的纵向相干性，也能有效减小辐射脉冲能量抖动。为此，我们需要知道如何描述外种子激光对电子束的 (能量) 调制。忽略推导细节，以下两定理总结激光调制电子的数学模型。

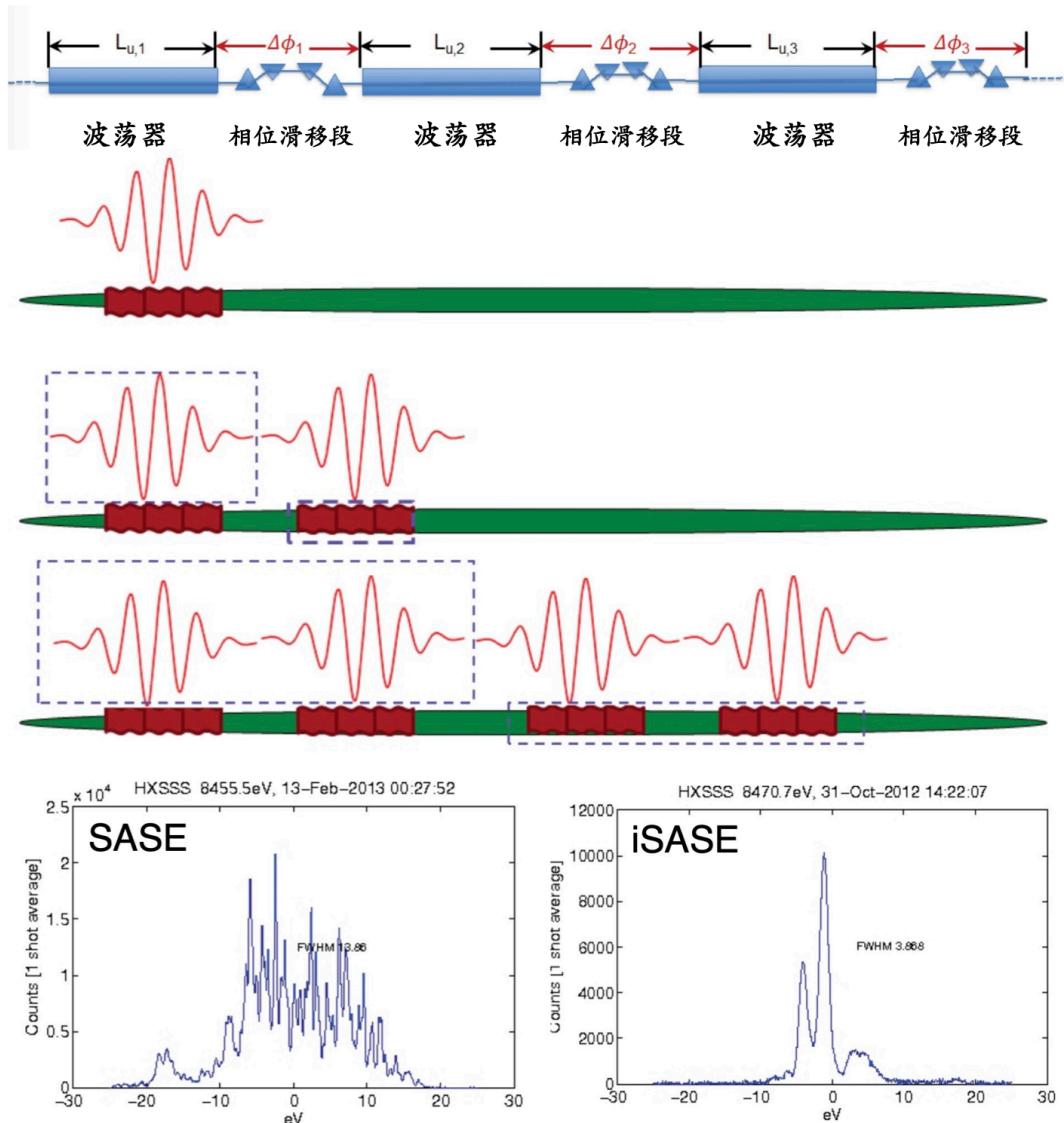
### 定理 10.17. 激光调制电子的数学模型：平面波

基于如下假设：

- 调制激光场的衍射效应在波荡器中不占主导  $z_R = \frac{k_L w_0^2}{2} \gg L_u = N_u \lambda_u$
- 调制激光纵向脉冲长度远大于电子与辐射场的滑移长度  $c\sigma_t \gg N_u \lambda_r$
- 调制激光横向尺寸比电子束团横向尺寸大  $w_0 \gg \sigma_{x,y}$

law)，存在特定角度 — 称布拉格角 (Bragg angle) — 由于干涉效应，衍射束的强度将达到最大值。摇摆曲线即表征布拉格角附近仍能产生显著衍射强度的角度范围，代表晶体对有效衍射的角容限。

达尔文宽度是摇摆曲线宽度的一种特定测量值，通常取其半高全宽 (full width half maximum, FWHM) 表示，对应布拉格角附近衍射强度衰减至一半峰值时的角度范围。更窄的达尔文宽度表征更接近完美的晶体：即晶格结构定义良好，对排列方式更敏感。更宽的达尔文宽度则表征晶体存在结构或错位缺陷 (defect)，X 射线入射后的衍射辐射到散到更大角度范围。



**图 10.45:** 改进型自放大自发辐射。通过在波荡器段之间安置相位移器 (phase shifter)，用来调整电子束与辐射场的推迟相位，建立电子束整体的相位关联性，从而改进波荡器辐射场的相干性。最下排两图比较了寻常 SASE 与 iSASE 的辐射频谱，可以看到，iSASE 明显具有较窄的频谱宽度。图例取自 J. Wu et al., X-ray Spectra and Peak Power Control with iSASE, IPAC 2013 (WEODB101). <https://accelconf.web.cern.ch/IPAC2013/papers/weodb101.pdf>。

则可以将调制激光场视为平面波，其电场分量可以写为

$$E_x(s, t) = E_0 \sin [k_L(s - ct)] \quad (10.178)$$

由洛伦兹方程，可以得到激光对电子束的能量调制为

$$\Delta\gamma(s) = \sqrt{\frac{P_L}{P_0}} \frac{2KL_u[\text{JJ}]}{\gamma w_0} \cos(k_L s) \quad (10.179)$$

其中，

- $s$  为束团内部坐标
- $P_L = \frac{cE_0^2}{8\pi} \frac{\pi w_0^2}{2}$  为激光功率
- $P_0 = \frac{I_A m_e c^2}{e} \approx 8.7 \text{ GW}$ ,  $I_A = \frac{m_e c^3}{e} \approx 17045 \text{ A}$  为 Alfvén 电流
- $K = \frac{eB_0}{m_e ck_u} = 0.934 \lambda_u [\text{cm}] B_0 [\text{T}]$  为波荡器参数，其中， $B_0$  为峰值磁场强度， $k_u = 2\pi/\lambda_u$
- $L_u = N_u \lambda_u$  为波荡器长度
- $[\text{JJ}] = \mathcal{J}_0\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right) - \mathcal{J}_1\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right)$ , 其中， $\mathcal{J}_{0,1}$  分别为第一类 0 阶、1 阶贝塞尔函数
- $k_L = 2\pi/\lambda_L$  激光中心波长/波数
- $w_0$  为激光束腰，一般设置在波荡器中央对称位置
- $\gamma$  为束团参考能量

**证明** 参考 E. Hemsing et al., Beam by design: Laser manipulation of electrons in modern accelerators, Rev. Mod. Phys. **86**, 897 (2014). <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.86.897>



**笔记** 由上可以看出，能量调制振幅要增加两倍的话，在其余参数不变前提下，则激光功率需要增加四倍。此外，粒子能量提高两倍后，在其余参数不变前提下，调制激光功率需要提高四倍。

### 定理 10.18. 激光调制电子的数学模型：脉冲波

考虑调制激光束横向衍射 (diffraction) 效应，但仍基于如下假设：

- 调制激光纵向脉冲长度远大于电子与辐射场的滑移长度  $c\sigma_t \gg N_u \lambda_r$
- 调制激光横向尺寸比电子束团横向尺寸大  $w_0 \gg \sigma_{x,y}$

由上第二个假设，仍可以忽略电场横向  $r$  依存关系，有

$$E_x(s, t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{z_R}\right)^2}} \sin [k_L(s - ct) + \psi] e^{-\frac{(s-ct)^2}{4(c\sigma_t)^2}} \quad (10.180)$$

其中， $\psi = \psi_0 - \tan^{-1} \frac{s}{z_R}$ 。

由洛伦兹方程，可以得到激光对电子束的能量调制为

$$\Delta\gamma(q, \nu, \tau, s) = \frac{2}{m_e c^2} [\text{JJ}] \sqrt{A_L \alpha_f \hbar \omega_L \xi} f(q, \nu, \tau, s) \cos(k_L s + \psi_0) \quad (10.181)$$

其中，

- $[\text{JJ}] = \mathcal{J}_0\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right) - \mathcal{J}_1\left(\frac{K^2}{4+2K^2}\right)$ , 其中,  $\mathcal{J}_{0,1}$  分别为第一类 0 阶、1 阶贝塞尔函数
- $\omega_L = k_L c = 2\pi c / \lambda_L$
- $A_L = P_L \sqrt{2\pi} \sigma_t$
- $f(q, \nu, \tau, z)$  为

$$f(q, \nu, \tau, s) = \sqrt{\frac{2q}{\sqrt{2\pi}\tau}} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos[2\pi\nu\hat{z} - \tan^{-1}(q\hat{z})]}{\sqrt{1 + (q\hat{z})^2}} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\hat{z}}{\tau} - \frac{s}{c\sigma_t}\right)^2} d\hat{z} \quad (10.182)$$

- $\alpha_f = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  为精细结构常数
- $\xi = \frac{K^2}{2+K^2}$ , 其中,  $K = \frac{eB_0}{m_e c k_u} = 0.934 \lambda_u [\text{cm}] B_0 [\text{T}]$  为波荡器参数,  $B_0$  为峰值磁场强度,  $k_u = 2\pi/\lambda_u$
- $\nu = \frac{2N_u(\gamma - \gamma_r)}{\gamma_r}, q = \frac{L_u}{z_R}, \tau = \frac{c\sigma_t}{N_u \lambda_L}$

**证明** 参考 E. Hemsing et al., Beam by design: Laser manipulation of electrons in modern accelerators, Rev. Mod. Phys. **86**, 897 (2014). <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.86.897>



**笔记** 如果要进一步将“调制激光横向尺寸比电子束团横向尺寸大  $w_0 \gg \sigma_{x,y}$ ”此假设拿掉，该怎么做？

由于调制激光接近单频平面波，能量调制基本上为正弦函数形式。当受到能量调制的电子束经历  $R_{56}$  转变成密度调制后，计算高次谐波群聚因子或密度调制函数时，需要如下的 Jacobi-Anger 恒等式。此处不证明，仅给出结果。

### 定理 10.19. Jacobi-Anger identity

又称 Jacobi-Anger 展开，适用于信号分析。有如下几种常见形式

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \mathcal{J}_n(z) e^{in\theta} \quad (10.183)$$

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(z) e^{in\theta} \quad (10.184)$$

其中， $\mathcal{J}_n(z)$  为第一类  $n$  阶贝塞尔函数。利用  $\mathcal{J}_{-n}(z) = (-1)^n \mathcal{J}_n(z)$  性质，还可以写为  $\sin$  或  $\cos$  形式，如

$$e^{iz \cos \theta} = \mathcal{J}_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \mathcal{J}_n(z) \cos(n\theta) \quad (10.185)$$

一个相关的、实用恒等式，有

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_q(x) \mathcal{J}_{n-q}(y) = \mathcal{J}_n(x+y) \quad (10.186)$$

一个实用的渐进关系，当  $m > 4$  时，有

$$\max \mathcal{J}_m(z) \sim \frac{0.67}{m^{1/3}}, \quad \text{在 } z \sim m + 0.81m^{1/3} \quad (10.187)$$

**证明** 参考高等数学教科书。 □

目前既有的几种基于外种子 FEL 模式提高纵向相干性的短波长高增益 FEL 方案有：

- 高增益谐波产生 (HGHG)
- 回声型谐波产生 (EEHG)
- 相位汇聚型谐波产生 (PEHG)
- 角色散引致微束团方案 (ADM)

还有其它创新方案，如：直接放大谐波产生 (DEHG) 等。各种方案各有优缺。以下仅定性介绍几种高次谐波产生方案的物理机制，定量分析可参考相关文献。

### 定义 10.13. 高增益谐波产生 (HGHG)

如图 10.46 所示，在调制段 (modulator)，外部激光与电子束交互作用，产生波长  $\lambda_1$  的能量调制。此能量调制在调制段出口的色散段 (dispersive section 或 chicane) 转变为密度调制。此经过有意操控后的密度调制电子束携带多个谐波成分。调制后的电子束进入设计在  $h$  次谐波共振的波荡器中 (即， $\lambda_h = \lambda_1/h$ )，能够产生纵向相干性较好的目标波长  $\lambda_h$  辐射。第二个波荡器又称辐射段 (radiator)。

**注** HGHG 方案由美国 Brookhaven 国家实验室的余理华 (Li Hua Yu) 提出，经实验验证，被认为是相对成熟的技术。参考 L.-H. Yu, Generation of intense UV radiation by subharmonically seeded single-pass free-electron lasers, Phys. Rev. A **44**, 5178 (1991). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevA.44.5178> 与 L.-H. Yu et al., High-Gain Harmonic-Generation Free-Electron Laser, Science **289**, 932-934 (2000). <https://www.science.org/doi/10.1126/science.289.5481.932> □

### 性质 10.5. 基于 HGHG 相干辐射的特性、优缺点

对于 HGHG 方案， $h$  次谐波的群聚因子有

$$b_h = \mathcal{J}_h(hk_1 R_{56} \Delta \delta) e^{-\frac{1}{2} h^2 k_1^2 R_{56}^2 \sigma_\delta^2} \quad (10.188)$$

其中，

- $h$  为谐波数

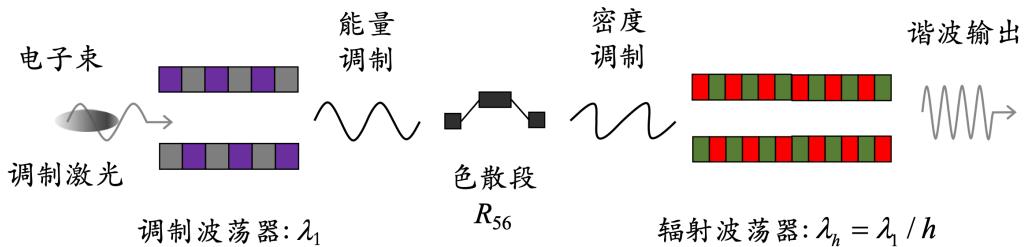
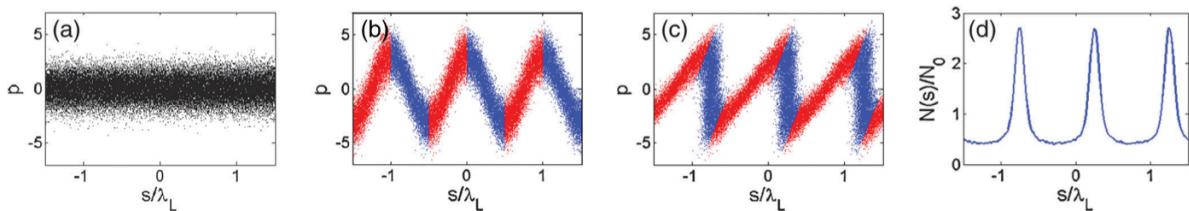


图 10.46: 高增益谐波产生 (HGHG) 方案示意图。

图 10.47: 高增益谐波产生 (HGHG) 方案各阶段相空间分布函数。由左至右的相空间分布分别为在: Modulator 入口处、Modulator 出口处、Dispersion section 出口处。最右边图为 Dispersion section 出口处相空间分布在水平轴  $z$  的投影。

- $k_1 = 2\pi/\lambda_1$  为调制段波数
- $R_{56}$  为色散段的纵向色散函数或动量紧缩因子
- $\Delta\delta$  为能量调制振幅
- $\sigma_\delta$  为束团能散

由上可知,  $h$  次谐波的最大群聚因子约为

$$b_h \approx \mathcal{J}_h(1.2h)e^{-0.72\left(\frac{h\sigma_\delta}{\Delta\delta}\right)^2} \quad \text{当} \quad k_1 R_{56}|_{\text{最优}} \approx \frac{1.2}{\Delta\delta} \quad (10.189)$$

HGHG 是短波长自由电子激光领域目前用来产生高次谐波的成熟方法, 因为整体结构简单, 仅需要一个调制段与色散段。谐波上限由 FEL/Pierce 参数限制, 约为  $\leq \rho/\sigma_\delta$ 。单级 HGHG 约  $\leq 10$ , 可以到 EUV 波段。这个限制源于能量调制振幅应大于束团切片能散, 但是调制振幅又不能太大, 否则等效能散大于  $\rho$  时将导致 FEL 增益衰减, 即, 为了达到最优化群聚因子, 要求  $\Delta\delta \sim h\sigma_\delta \sim \rho$ 。群聚因子随谐波数  $h$  呈  $e^{-h^2}$  指数衰减。

#### 定义 10.14. 回声型谐波产生 (EEHG)

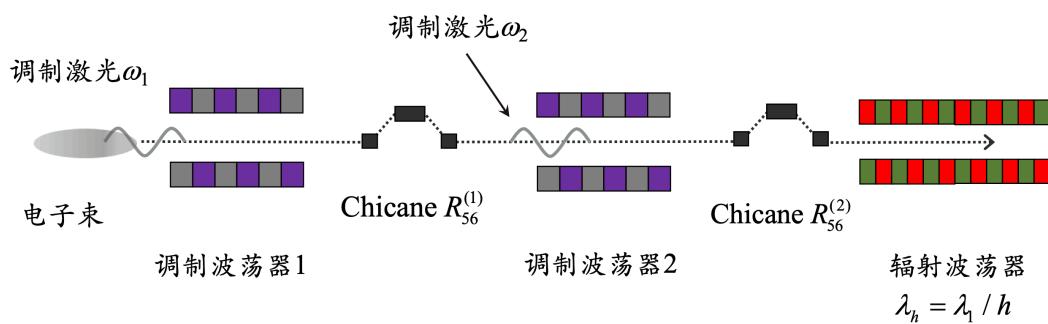
如图 10.48 所示, 与 HGHG 相比, EEHG 需要至少两组调制段与色散段, 结构相对复杂。在第一个调制段, 外部激光与电子束交互作用, 产生波长  $\lambda_1 = 2\pi c/\omega_1$  的能量调制。此能量调制在第一个调制段出口较大的色散段切变为许多分裂的“子束团”。

接着, 这些切变子束团经过第二个调制段, 所有子束团经历激光波长  $\lambda_2 = 2\pi c/\omega_2$  的能量调制, 过程类似于 HGHG。这个能量调制在第二个色散段转变为密度调制,

包含了丰富、大量的谐波成分。

两次调制后的电子束进入设计在  $h$  次谐波共振的波荡器中（即， $\lambda_h = \lambda_1/h$ ），能够产生纵向相干性较好的目标波长  $\lambda_h$  辐射，其中， $h = m\kappa + n$ ， $\kappa = k_2/k_1 = \lambda_1/\lambda_2$ ， $n$  为整数。第三个波荡器又称辐射段 (radiator)。

**注** EEHG 方案由美国 SLAC 国家实验室的 Gennady Stupakov 提出，经实验验证，被认为是相对成熟的技术。参考 G. Stupakov, Using the Beam-Echo Effect for Generation of Short-Wavelength Radiation, Phys. Rev. Lett. **102**, 074801 (2009). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.102.074801>, Dao Xiang (向导) and Gennady Stupakov, Echo-enabled harmonic generation free electron laser, Phys. Rev. ST Accel. Beams **12**, 030702 (2009) <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.12.030702>



**图 10.48:** 回声型谐波产生 (EEHG) 方案示意图。留意，这里的波荡器为平面波荡器，电子扭摆轨迹所在平面应与波荡器磁场方向正交。此图为了示意电子扭摆轨迹而画的正弦函数应落在进出纸面方向。

#### 性质 10.6. 基于 EEHG 相干辐射的特性、优缺点

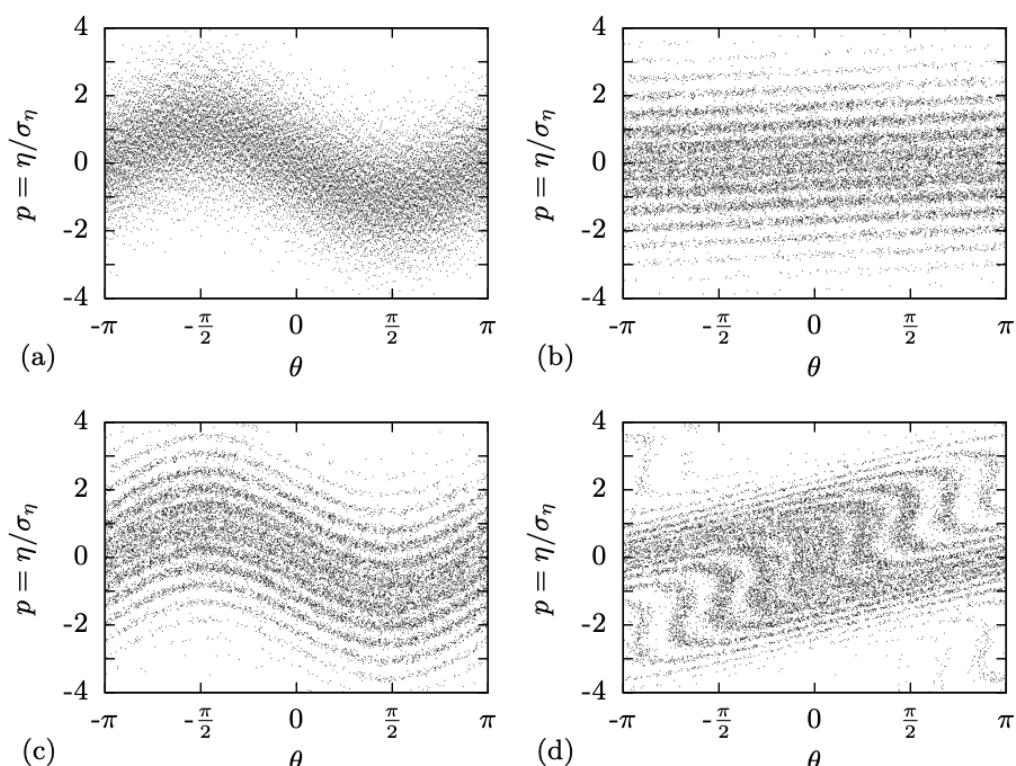
对于 EEHG 方案， $h$  次谐波的群聚因子有

$$b_{n,m} = \mathcal{J}_m [-(m\kappa + n)A_2B_2] \mathcal{J}_n \{-A_1[nB_1 + (m\kappa + n)B_2]\} e^{im\psi} e^{-\frac{[(m\kappa + n)B_2 + nB_1]^2}{2}} \quad (10.190)$$

其中，

- $m, n \in \mathbb{Z}$
- $\kappa = k_2/k_1 = \lambda_1/\lambda_2$
- $A_1 = \frac{\Delta\delta_1}{\sigma_\delta}$ ,  $A_2 = \frac{\Delta\delta_2}{\sigma_\delta}$  为调制振幅与束团能散比值
- $B_1 = k_1 R_{56}^{(1)} \sigma_\delta$ ,  $B_2 = k_2 R_{56}^{(2)} \sigma_\delta$  为归一化色散强度
- $\psi$  为两束激光的相对相位，不影响群聚因子的大小

进一步分析表明，当  $n = \pm 1$  时，群聚因子最大，且随着  $|n|$  增加迅速减小。取



**图 10.49:** 回声型谐波产生 (EEHG) 方案各阶段相空间分布函数。左上图为 Modulator 1 出口的相空间分布；右上图为 Chicane 1 出口的相空间分布；左下图为 Modulator 2 出口的相空间分布；右下图为 Chicane 2 出口的相空间分布。当右下图的相空间分布投影至水平  $\theta$  轴，即  $z$ ，将出现丰富的、包含高次谐波的密度调制。

$n = -1, m > 0$ , 则在  $h = m\kappa - 1$  次谐波的最大群聚因子有

$$|b_{-1,m}| = |\mathcal{J}_m [(m\kappa - 1)A_2B_2] \mathcal{J}_1 (A_1\bar{\omega})| e^{-\bar{\omega}^2/2} \quad (10.191)$$

其中,  $\bar{\omega} = B_1 - (m\kappa - 1)B_2$ 。

利用贝塞尔函数的渐进关系, 可以得到优化后最大的群聚因子

$$|b_{h=\kappa m-1}| \approx \frac{0.3}{m^{1/3}} \quad (10.192)$$

不同于 HGHG, 对于 EEHG 方案, 由于调制后的电子束携带更多谐波, 产生更短波长的辐射场。根据目前理论、实验分析显示, 谐波上限约  $\leq 75$ , 可以到软 X 射线波段。并且, 随谐波数  $h$  呈  $h^{-1/3}$  缓慢衰减。导致高次谐波群聚因子衰减的因素主要为电子束噪声。相较于 HGHG, 现在装置变得比较复杂, 需要两个调制段与两个色散段。此外, 不同频率的激光同步问题也需要考虑。 □

在不存在耗散, 或者耗散效应还不明显时的阶段, 可以观察到回声效应 (echo effect) 或称回波振荡。回波振荡会由于振子的频率展宽, 导致相位混合 (phase mixing) 或退相干 (decoherence) 而逐渐衰减。产生回声的方法: 先设法激励 (或称调制) 一频率  $\omega_1$ , 等待振荡衰减, 然后再激发另一频率  $\omega_2$ 。在完成两次调制之后的一段时间后, 可以观察到频率为  $n\omega_2 \pm m\omega_1$  的回波振荡信号。回波现象表征相位混合是一个“可逆”的热力学过程。

“回声”(echo) 此一物理机制具有普适性, 不仅在激光调制电子束中观察到, 在许多其它领域也存在, 比如:

- 固体核磁自旋回声 (spin echo) — 1950 年发现
- 固体和气体中的光子回声 (photon echo) — 1964 年发现
- 等离子体回声 (plasma echo) — 1967 年发现
- 含有气泡的液体中的回声 — 1983 年发现
- 加速器中的粒子横向、纵向运动回声现象 — 1991 年发现
- 带状电子注 (diocotron) 回声 — 2005 年发现
- 加速器中的自旋回声 — 2007 年发现
- 自由电子激光中的激光-电子束调制回声增强谐波产生 (EEHG) — 2009 年发现
- 在分子中的取向、排列回声 (orientation echo, alignment echo) — 2015 年发现



**笔记** 对“回声”效应感兴趣的读者, 应自行查找相关文献。光为电磁波, 经过多个不同周期  $\Lambda_1, \Lambda_2$  的狭缝结构, 在后方适当位置处也能观察到的阴影回声 (shadow echo), 如图 10.50。

以上 HGHG 与 EEHG 方案对束团的相空间操控仅考虑在纵向维度。考虑横向束团相空间特性, 应用横-纵向耦合机制的思路, 一些研究团队近期提出了改进方案, 如: 相位汇聚型谐波产生、角色散引致微束团方案、直接放大谐波产生等。提出这些方案的动机在于希望有效缓解对调制激光的要求。

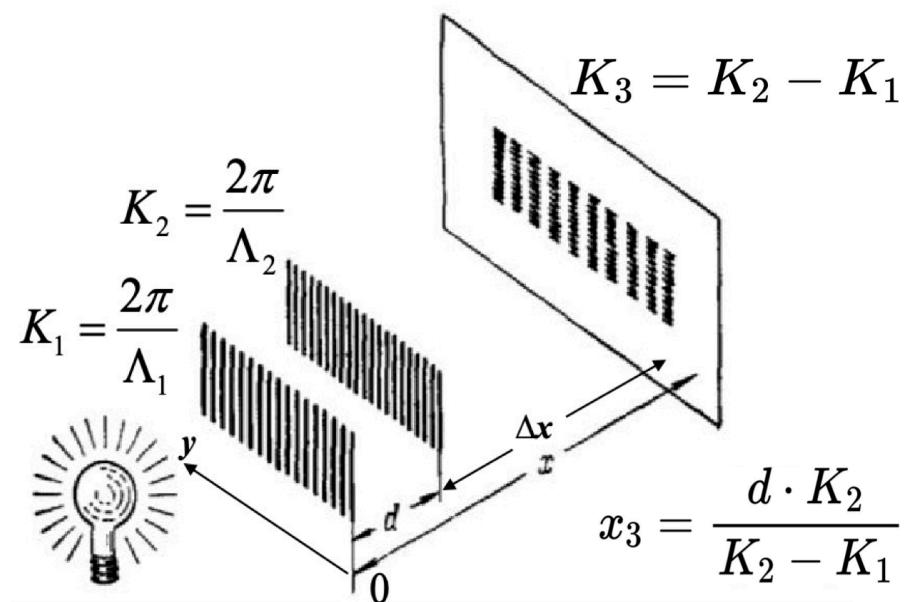


图 10.50: 阴影回声。

**注** 一般而言，产生自由电子激光要求低增益模式的电子束能散  $\sigma_\delta \ll 1/N_u$ ，高增益模式则要求  $\sigma_\delta \ll \rho$ 。横向梯度波荡器 (transverse gradient undulator, TGU) 概念的提出在于希望降低对束团能散的要求。如果进入波荡器时，束团内能量不尽相同的个别电子能够看到各自满足的 FEL 共振条件，即不同  $\gamma$  的电子在 (尽可能) 满足共振条件下感受到不同的  $K$ ，那么，原则上这些电子就都能辐射在同一个共振频率上。一般情况下，利用横向梯度波荡器时，波荡器入口处存在一定色散  $D$ ，使得进入波荡器时，电子已经经历色散段而具有横向偏移  $\bar{x} = x_\beta + D\delta$ ，其中， $x_\beta$  表示由于横向 betatron 振荡相对于参考轨道的偏移。

横向梯度波荡器示意图参考图 10.51。此时，波荡器参数  $K$  携带  $\bar{x}$  的依存关系，写成  $K(\bar{x})$ 。由共振关系不难看出，当  $K$  满足如下关系时

$$\frac{1 + \frac{K^2(\bar{x})}{2}}{(1 + \frac{\bar{x}}{D})^2} \doteq 1 + \frac{K_0^2}{2} \quad (10.193)$$

在波荡器中不同  $\bar{x}$  位置的电子都能满足共振条件。横向梯度波荡器已经被应用在自由电子激光振荡器或束团能散较大的情况 (如激光-等离子体加速器产生的束团)。



**笔记** 关于横向梯度波荡器更详细的讨论，可以参考 Zhirong Huang, Yuantao Ding, and Carl B. Schroeder, Compact X-ray Free-Electron Laser from a Laser-Plasma Accelerator Using a Transverse-Gradient Undulator, Phys. Rev. Lett. **109**, 204801 (2012). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.109.204801> 或 K.-J. Kim, Z. Huang, and R. Lindberg, Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers – Principles of Coherent X-Ray Generation, Cambridge University Press (2017) 一书的附录 D。

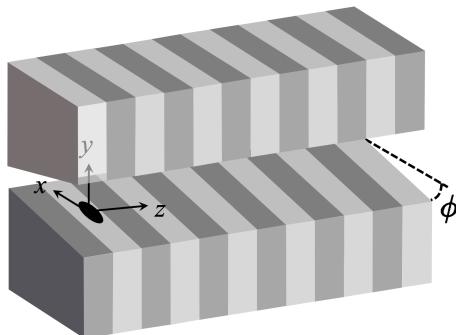


图 10.51：横向梯度波荡器。通过调整磁极倾角  $\phi$ , 且巧妙将束团中高于参考能量的电子往波荡器中磁场较大的区域推 ( $+x$ ), 将束团中低于参考能量的电子往波荡器中磁场较小的区域推 ( $-x$ ), 尽可能使束团整体满足共振条件, 则束团内的电子仍能辐射在同一个共振频率。

#### 定义 10.15. 相位汇聚型谐波产生 (PEHG)

为 Phase-merging Enhanced Harmonic Generation. 由图 10.52, 类似于 HGHG, 但是这里的调制波荡器采用横向梯度波荡器 (transverse gradient undulator, TGU)。经过适当设计, TGU 能够将横向不同位置的电子, 在经过激光调制后, 汇聚到同样的纵向位置上。这个特性预期能够产生纵向相干性较好的目标波长  $\lambda_h$  辐射。

**注** PEHG 方案由邓海啸 (Haixiao Deng) 与冯超 (Chao Feng) 提出。参考 H. Deng and C. Feng, Using Off-Resonance Laser Modulation for Beam-Energy-Spread Cooling in Generation of Short-Wavelength Radiation, Phys. Rev. Lett. **111**, 084801 (2013). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.111.084801> 与 Chao Feng et al., Phase-merging enhanced harmonic generation free-electron laser, New Journal of Physics **16**, 043021 (2014). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/16/4/043021>

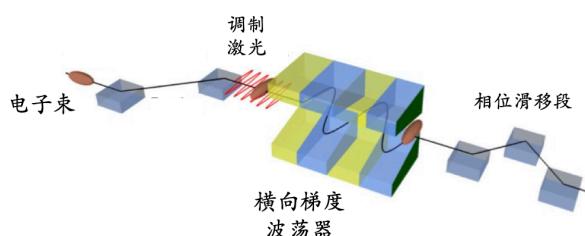


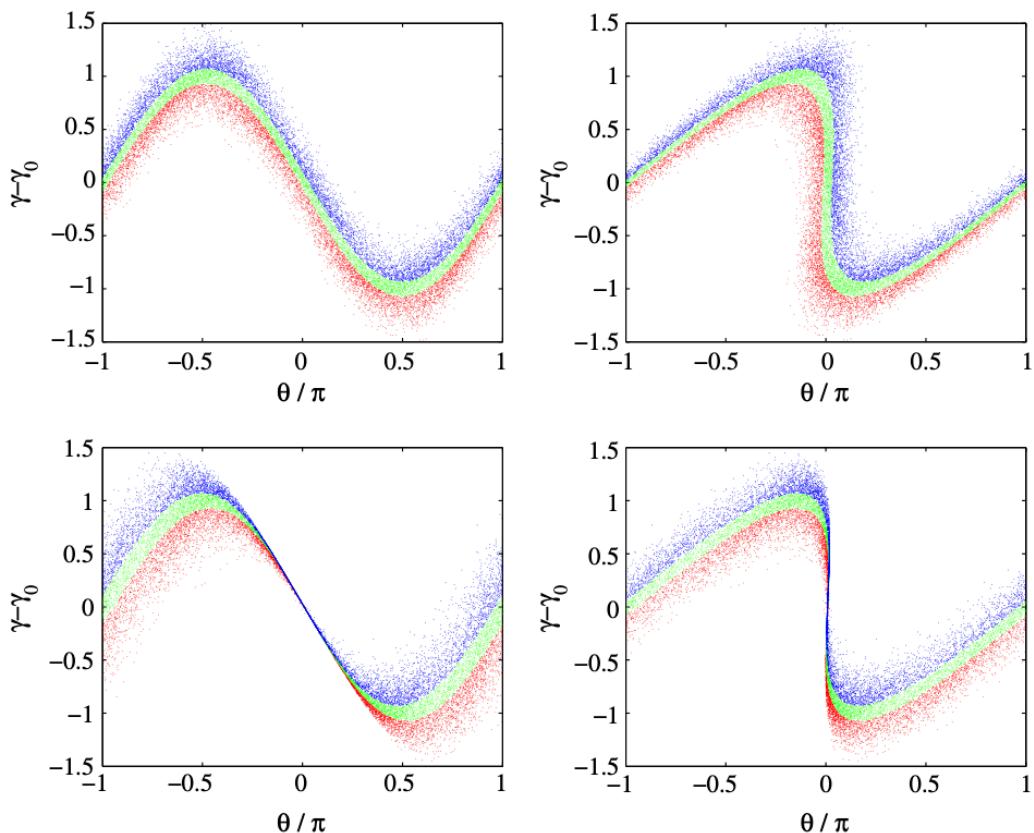
图 10.52：相位汇聚型谐波产生 (PEHG) 方案示意图。图例修改自 H. Deng and C. Feng, Using Off-Resonance Laser Modulation for Beam-Energy-Spread Cooling in Generation of Short-Wavelength Radiation, Phys. Rev. Lett. **111**, 084801 (2013). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.111.084801>。

#### 性质 10.7. 基于 PEHG 相干辐射的特性、优缺点

对于 PEHG 方案,  $h$  次谐波的群聚因子有

$$b_h = e^{-\frac{h^2 D^2}{2} \frac{\gamma^2 \sigma_x^2}{\eta^2}} \mathcal{J}_h(h D \Delta \gamma) \quad (10.194)$$

其中,



**图 10.53:** 相位汇聚型谐波产生 (PEHG) 方案各阶段与 HGHG 方案的相空间分布函数比较。上排为 HGHG 方案; 下排为 PEHG 方案。左边为在调制段出口, 右边为色散段出口。注意到, PEHG 方案的调制波荡器为横向梯度波荡器。红、绿、蓝分别为相对参考粒子能量低、中、高的电子。图例取自 H. Deng and C. Feng, Using Off-Resonance Laser Modulation for Beam-Energy-Spread Cooling in Generation of Short-Wavelength Radiation, Phys. Rev. Lett. **111**, 084801 (2013). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.111.084801>。

- $D = \frac{2\pi R_{56}}{\gamma \lambda_s}$ ,  $R_{56}$  为波荡器出口后方色散段动量紧缩因子
- $\eta$  为波荡器入口前方的色散函数
- $\sigma_x^2 \approx \beta \epsilon_{x,G} \approx \frac{N \lambda_u}{2} \frac{\epsilon_{x,N}}{\gamma}$

类似于 HGHG，结构简单，但是调制段波荡器需要具有横向梯度，并且在调制段入口处需要引入 dogleg 使电子束具有横向分布。谐波上限  $\leq 50$ ，可以到软 X 射线波段。随谐波数  $h$  呈  $e^{-h^2}$  指数衰减。横向束团尺寸（或发射度）导致一个等效的衰减因子。调制波荡器前方的非零色散在 chicane 后方很难归零，因为调制激光引起了额外能散。在 chicane 出口处一般允许余留  $\sim 1$  m 的色散。□

高重频激光是个挑战。目前普遍使用的种子激光波长大概在 800 nm (Ti:sapphire laser) 至 1030 nm 间 (Yb-based fiber laser)。一般种子激光要求  $\sim 100$  MW peak power、 $10 \sim 100$  fs pulse duration。如果要达到 100 MHz 重复频率，则需要  $\sim 10$  W 的平均功率，距离目前现有技术还有二至三个数量级。以下几种调制方案是为了缓解对调制激光的要求而提出的几种概念方案。

由于同步辐射的量子激发效应，在储存环中的束团能散大约比直线加速器的束团能散大一个数量级。

#### 定义 10.16. 角色散引致微束团方案 (ADM)

为 Angular Dispersion induced Microbunching. 如图 10.54 所示，角色散引致微束团方案适用于电子储存环，充分利用了电子储存环横向  $y$  方向发射度  $\epsilon_y$  很小的特点，因此， $\sigma_{y'}$  也很小，类似于 HGHG 对  $\sigma_\delta$  的要求。电子束在经历第一个波荡器（调制段）之前先经过二极铁 B，获得横向  $y$  方向角度的色散。接着，进入第一个波荡器 M，激光调制产生能量调制。中间 dogleg D 将能量调制转变为密度调制。受到密度调制后的电子束进入第二个设计为高次谐波共振的波荡器（辐射段）R，产生特定的高次谐波辐射。最后，电子经过第二个补偿横向  $y$  色散的 dogleg D\*。

**注** ADM 方案由提出冯超 (Chao Feng) 与赵振堂 (Zhentang Zhao) 提出。参考 Chao Feng and Zhentang Zhao, A Storage Ring Based Free-Electron Laser for Generating Ultrashort Coherent EUV and X-ray Radiation, Scientific Reports 7, 4724 (2017). <https://www.nature.com/articles/s41598-017-04962-5> □

#### 性质 10.8. 基于 ADM 相干辐射的特性、优缺点

基于 ADM 方案，在  $h$  谐波的群聚因子可以写成

$$b_h = \mathcal{J}_h \left( n k_s \xi_D \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \right) e^{-\frac{1}{2}(h k_s \eta \sigma_{y'})^2} \quad (10.195)$$

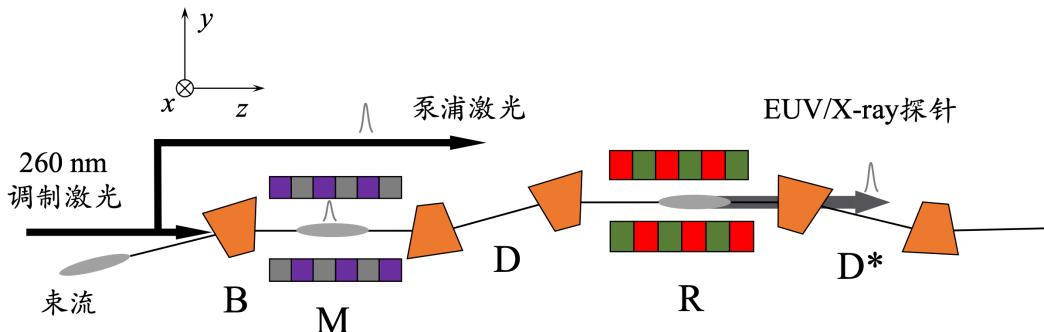


图 10.54: 角度散致微束团方案 (ADM) 方案示意图。

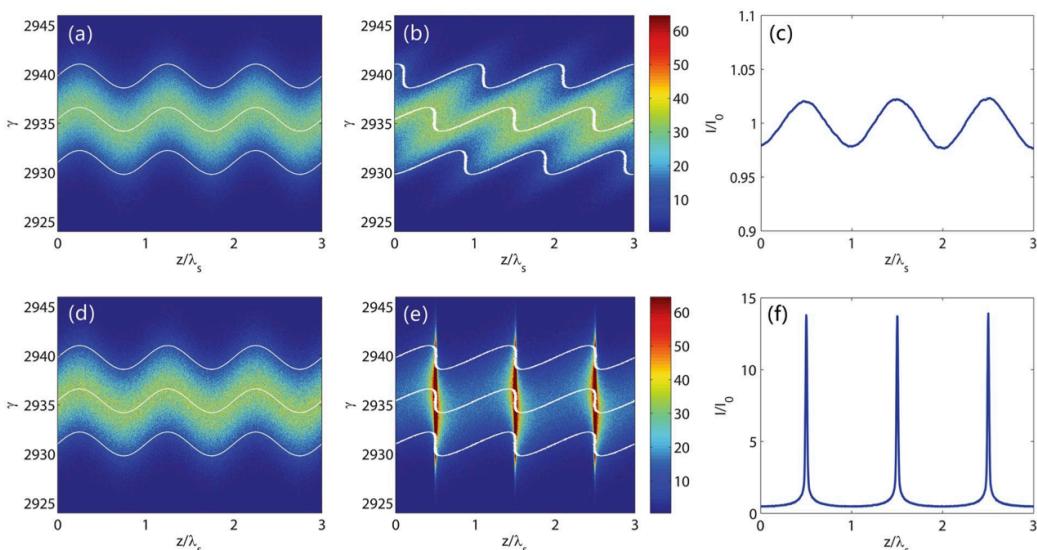


图 10.55: 角度散致微束团方案 (ADM) 方案与传统 HGHG 方案的相空间分布函数比较。在调制段出口: (a) 传统 HGHG 方案; (d) ADM 方案。在 dogleg 出口: (b) 传统 HGHG 方案; (e) ADM 方案。(c,f) 分别为 dogleg 出口的纵向电流密度分布。由 (d) 到 (e), 可以看到, 尽管能量调制振幅很小, 但是经过 dogleg 之后, 横纵向耦合形成明显的纵向密度调制。图例取自 C. Feng and Z. Zhao, A Storage Ring Based Free-Electron Laser for Generating Ultrashort Coherent EUV and X-ray Radiation, Scientific Reports 7, 4724 (2017). <https://www.nature.com/articles/s41598-017-04962-5>。

其中，

- $k_s = 2\pi/\lambda_s$  为调制激光波数
- $\xi_D$  为在 dogleg 段的  $R_{56}$
- $\eta$  为在 dogleg 段的色散函数  $R_{16}$
- $\sigma_{y'}$  为束团横向  $y$  方向方均根散角 (rms angular divergence)
- $\Delta\gamma$  为能量调制振幅，可以通过增加调制段入口的 betatron 函数以减小  $\sigma_{y'}$  或增加调制段入口的二极铁强度以减小 dogleg 的  $\eta$

相对于 HGHG 而言，ADM 结构较为复杂，需要一个调制段与两个 dogleg 色散段。根据分析，谐波上限  $\leq 40$ 。可以到 EUV 至软 X 射线 1 nm 波长左右。随谐波数  $h$  呈  $e^{-h^2}$  指数衰减。优点是能量调制振幅可以小于束团能散。利用束团横向  $y$  方向较小的发射度的特点。因此，减小对能量调制振幅的要求。移除能量调制振幅与束团能散的关联。对激光峰值功率要求小一个数量级左右，适用于高重频模式。

#### 定义 10.17. 直接放大谐波产生 (DEHG)

为 Direct-amplification Enabled Harmonic Generation. 如图 10.56 所示，这个方案独立于前面几种激光调制方案。基于前面几个方案的思路，将第一个波荡器（调制段）加长，除了外部激光调制电子束外，同时利用线性区间的高增益自由电子激光过程，电子经过波荡器时共振产生的辐射也加入调制电子束的行列。这个加长调制波荡器的思路可以结合 HGHG 或 EEHG。方案动机是减缓对调制激光的要求，或者，提高调制激光的重复频率。适用于高重频自由电子激光。

**注** 关于 DEHG 方案的更多讨论，可参考王晓凡 (X. Wang), 冯超 (C. Feng), B. Faatz, W. Zhang, 赵振堂 (Z. Zhao), High-repetition-rate seeded free-electron laser with direct-amplification of an external coherent laser, New J. Phys. **24** 033013 (2022). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/ac5492>

#### 性质 10.9. 基于 DEHG 相干辐射的特性、优缺点

DEHG 用了更长的波荡器，可能会导致群聚因子的变化；沿着波荡器轴的群聚因子不再是由外部激光调制形成，还包含了电子束-辐射场交互作用的自由电子激光过程。优点是缓解对调制激光功率的要求。此外，方案的其它优缺点承接了 HGHG 与 EEHG 等。

#### 定义 10.18. 平面波荡器的非线性谐波产生 (nonlinear harmonic generation)

除了上述几种外部激光调制电子束产生谐波辐射方案之外，一种基于自由电子激光本身的“自然而然”生成谐波的方案，称非线性谐波产生。即，当自由电子激光接近饱和时，由于对电子束的强烈密度调制而携带大量的、丰富的谐波成分。这些谐

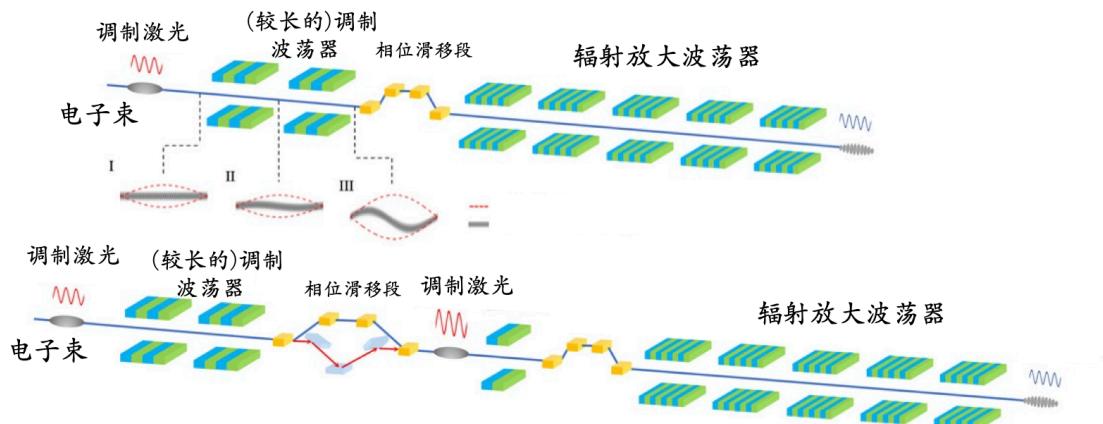


图 10.56: 直接放大谐波产生 (DEHG) 方案示意图。上图为 DEHG 应用到 HGHG 方案; 下图为 DEHG 应用到 EEEHG 方案。可以看到, 调制段长度比原本标准的 HGHG、EEHG 来得长。图例取自 X. Wang et al., High-repetition-rate seeded free-electron laser with direct-amplification of an external coherent laser, New J. Phys. 24 033013 (2022). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/ac5492>。

波成分与基波不同的地方在于, 当基波接近饱和时, 谐波还没饱和, 并且, 由分析知,  $h$  次谐波的场增益为基波场增益的  $h$  倍(即, 谐波增长率大  $h$  倍, 增益长度短  $h$  倍)。由此, 可以得到可观的谐波辐射场。

#### 性质 10.10. 基于平面波荡器的非线性谐波产生的特性、优缺点

类似于基波, 谐波场为横向相干场, 且谐波横向场分布被基波横向场分布覆盖。对于纵向相干性, 谐波比基波更差些, 谐波场的时间脉冲包含比基波更多尖峰(spike), 因此, 谐波场的统计功率起伏比基波更大。谐波输出功率, 以三次谐波 ( $h = 3$ ) 为例, 有

$$\frac{P_3}{\rho P_{\text{beam}}} \approx 0.003 \frac{[\text{JJ}]_3^2}{[\text{JJ}]_1^2} \left( \frac{P_1}{\rho P_{\text{beam}}} \right)^3 \propto e^{\frac{3z}{L_G}} \quad (10.196)$$

$$P_h \propto (P_{h-1})^h \propto e^{\frac{hz}{L_G}} \quad (10.197)$$

其中,

- $[\text{JJ}]_h = (-1)^{\frac{h-1}{2}} \left[ \mathcal{J}_{\frac{h-1}{2}} \left( h \frac{K^2}{4+2K^2} \right) - \mathcal{J}_{\frac{h+1}{2}} \left( h \frac{K^2}{4+2K^2} \right) \right]$ , 其中,  $\mathcal{J}_{\frac{h-1}{2}, \frac{h+1}{2}}$  分别为  $\frac{h-1}{2}$  阶、 $\frac{h+1}{2}$  阶第一类贝塞尔函数
  - $P_{1,3}$  分别为沿波荡器轴上位置  $z$  处的基波、三次谐波辐射功率
  - $L_G = \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho}$  为基波的功率增益长度
  - $P_{\text{beam}}$  为电子束功率, 为  $P_{\text{beam}}[\text{W}] = I_b[\text{A}] \frac{E[\text{eV}]}{e}$
- 一般而言, 有  $\frac{P_3}{P_1} \approx 10^{-3} \sim 10^{-2}$ 。

**证明** 推导可参考 K.-J. Kim, Z. Huang, and R. Lindberg, Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers – Principles of Coherent X-Ray Generation, Cambridge University Press (2017) 一书的 §6.1。



**笔记** 如何设计一个自由电子激光波荡器，其设计目的为抑制基波，助力三次谐波增长？

一种思路为在波荡器段之间加漂移段，使电子束与光场滑移  $n\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{3}$ ，其中， $n \in \mathbb{Z}$ 。

## 第十章 补充习题

1. 推导自由电子激光波荡器小振幅纵向同步运动的振荡频率  $k_{s0}$ , 忽略电子辐射影响, 仅考虑外部激光调制。
2. 当电子束平均能量与波荡器共振能量不同时, 称彼此存在调谐 (detune)。关于包含 detune 的一维自由电子激光模型, 其  $(2N + 1)$  个运动方程可写为

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_j}{d\hat{z}} &= \eta_j \\ \frac{d\eta_j}{d\hat{z}} &= ae^{i\theta_j} + a^*e^{-i\theta_j} \\ \frac{da}{d\hat{z}} &= -\langle e^{-i\theta_j} \rangle + i\delta a\end{aligned}$$

其中, 调谐因子定义为

$$\delta = \frac{1}{\rho} \frac{\langle \gamma \rangle_0 - \gamma_R}{\langle \gamma \rangle_0}$$

- a) 利用 Bonifacio 集体变量定义, 化简  $(2N + 1)$  个方程为 3 个方程, 说明用了哪些假设。
- b) 利用 3 个方程解出 FEL 系统本征值对 detune 的函数依存关系。
- c) 根据  $(2N + 1)$  个方程与密度调制、能量调制的定义, 证明以下两个恒等式

$$\begin{aligned}\langle \eta_j \rangle + |a|^2 &= |a|_0^2 \\ \frac{\langle \eta_j^2 \rangle}{2} - i(a^*b - ab^*) - \delta|a|^2 &= \frac{\langle \eta_j^2 \rangle_0}{2} - i(a^*b - ab^*)_0 - \delta|a|_0^2\end{aligned}$$

其中, 下标 0 表示对应物理量的初始值。

3. Bonifacio 集体变量模型为“线性”理论, 其  $a(z), b(z), P(z)$  可以由三个特征值  $C_\ell$  表征, 而特征值又可写成初始条件  $a(0), b(0), P(0)$  形式。也就是说, 以此三个集体变量为一状态向量 (state vector), 则其演化过程可以写成

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ P \end{pmatrix}_z = \mathcal{M}_{\text{FEL}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ P \end{pmatrix}_0$$

试着推导 FEL 放大器的  $3 \times 3$  等效传输矩阵  $\mathcal{M}_{\text{FEL}}$ 。

**解** 可参考 C.-Y. Tsai et al., Analytical study of higher harmonic bunching and matrix formalism in linear high-gain free-electron laser model, Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A **1048** (2023) 167974. <https://doi.org/10.1016/j.nima.2022.167974>

4. 前面介绍的 Bonifacio 集体变量模型假设在线性或指数增长区间, 其实此模型还能

推广到包含 FEL 饱和时的情况，此时有

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\hat{z}} &= -b + i\delta a \\ \frac{db}{d\hat{z}} &= -iP \\ \frac{dP}{d\hat{z}} &= a + a^* \langle e^{-2i\theta_j} \rangle - i \langle \eta_j^2 e^{-i\theta_j} \rangle \\ &= a - 2b(ab^* - a^*b) + 2i(|a|^2 - |a|_0^2) \times \\ &\quad [P + (|a|^2 - |a|_0^2 - \delta)] b + b [2(ab^* - a^*b)_0 - i \langle P^2 \rangle_0]\end{aligned}$$

- a) 试推导此方程。提示：假设此因子  $\langle (\eta - \langle \eta \rangle)^2 e^{-i\theta} \rangle = \langle (\eta - \langle \eta \rangle)^2 \rangle \langle e^{-i\theta} \rangle$  可分解。
- b) 利用 MATLAB 求解以上方程，验证以上计算与  $(2N + 1)$  粒子模拟结果一致。
- c) 能不能用推广的矩阵描述以上包含 FEL 饱和情况？

**解** 参考 R. Bonifacio, F. Casagrande, and L. De Salvo Souza, Collective variable description of a free-electron laser, Phys. Rev. A **33**, 2836 (1986). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevA.33.2836>

5. SASE FEL 的尖峰辐射频谱特性可以通过电子束与辐射场间的相对滑移推知。对一电子束长  $\sigma_z$ ，经过  $N_u$  波荡器周期，假设辐射中心波长为  $\lambda_r$ ，估算电子束经过波荡器后，电子束电荷密度时域分布会出现几个尖峰、尖峰脉冲时间宽度大概多少、波荡器辐射频谱在中心波长附近大概有多少个尖峰、整体频谱宽度为何？
6. 前面介绍过通过粒子动力学推导 Madey 定理，试通过辐射场动力学推导 Madey 定理。提示：此题稍难。
7. §10.6.3 介绍过 FEL 振荡器工作原理。如果把两个 FEL 振荡器“串接”起来，参考图 10.29，那么下游第二个振荡器的特性就不再是 §10.6.3 介绍的结果，试着分析串接 FEL 振荡器的辐射与电子束特性。

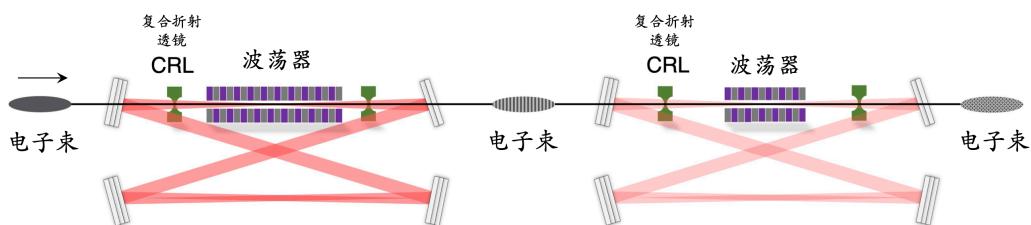


图 10.57: 两个 FEL 振荡器“串接”示意图。

**解** 参考 C.-Y. Tsai and Y. Zhang, Multi-FELOs Driven by a Common Electron Beam, FLS Workshop (2023). <http://jacow.org/fls2023/papers/we3a3.pdf>。以上分析还可推广至  $N$  个 FEL 振荡器“串接”。

## 总结：第二部分

到目前为止，我们已经完成了第二部分关于单粒子横向与纵向动力学的讨论。相较于第一部分的电磁场理论，这一册介绍的内容包含较多经典力学。在第6章简短介绍了分析力学与相空间的概念之后，为了更方便、有系统地描述粒子束—而不是单一个粒子—的传输特性，我们从洛伦兹力方程退一步回到带电粒子在外部电磁场的哈密顿量，经过化简，横向动力学得到 Hill 方程。然后，在此基础上，第7章介绍了一种目前普遍使用的参量化描述 (formalism)，称 Courant-Snyder 参数或 Twiss 参数。接着，以束团中的几个特定非参考粒子为分析对象，介绍了传输矩阵、闭轨畸变、共振、色散、色品等概念。由于目前加速器的纵向同步振荡频率远低于横向 betatron 振荡频率，纵向动力学有着与横向动力学截然不同的特性，因此其描述方式也稍异。第8章开头介绍了纵向动力学的描述方式、RF 腔与纵向相空间及同步加速器稳相原理。与其它不同种类的粒子相比，相对论电子的特点是同步辐射效应，该章介绍了同步辐射效应反过来对电子束的影响，包含经典的辐射阻尼效应与量子激发效应。

第二部分的前半段介绍了单粒子效应，后面两章开始涉及多粒子。忽略束团内不同粒子间的相互作用，第9章介绍了利用叠加原理描述多粒子电磁辐射的理论。接着，作为这部分最后一章，讨论了自由电子激光。严格来说，自由电子激光的工作原理涉及多粒子集体效应，应该放在第三部分介绍。我们选择安排在第二部分最后一章是由于此理论描述与经典的集体效应理论框架不太一样、也采用不同的符号惯例。

