

电磁辐射与加速器束流动力学导论

Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第十七章 加速器束测基础原理

内容提要

□ 束团时频信号特性

□ 各种束测方案的基本原理

尽管在 §14.3.5介绍过一些束测元件，但当时仅提及法拉第杯、光阑、荧光屏等相对简单的束测元件。在工程实际中，一台加速器的性能有多好，不是数值模拟结果说了算，而是由实验上实际量测后所能够达到的指标决定。

An accelerator is just as good as its diagnostics.

安装在加速器装置上的束测元件监督加速器的健康状况，就好比医师给病患“把脉”、“量血压”、“抽血”等一样，借此人体的健康情况有所了解。这个检测可能是实时的，也可能是定期/偶尔为之；可能需要拦截或破坏部分束团（即破坏性束测），也可能是几乎无损的（即非破坏性束测）；可能需要对束团施加扰动，也可能无须扰动束团。一些我们关心的加速器物理量可能是通过直接测量得到，也可能先通过测量其它量进而间接、反推得到。这一章将介绍几种加速器束测基础原理，特别关注其物理原理。对工程实际或技术实现部分，包含信号处理电子学、数据采集等，可参考其它相关专著、综述或论文文献。

这一章部分内容参考自赵籍九、尹兆升主编的“粒子加速器技术”一书的第七章。此外，还参考了 A. Hofmann, Dynamics of beam diagnostics, CAS - CERN Accelerator School: Course on Beam Diagnostics (CERN-2009-005). <https://cds.cern.ch/record/1213274/files/p65.pdf> 与 H. Koziol, Beam diagnostics for accelerators, CERN-PS-92-56-BD (1992). <https://cds.cern.ch/record/2844462/files/CERN-PS-92-56-BD.pdf>。

17.0 问答预览

1. 加速器束测的目的是什么？

⇒ 监测加速器性能，了解束团特性，为束流控制提供数据。

2. 束团时频信号有哪些特点？

⇒ 一般为准周期性 (quasi-periodic) 电脉冲信号，包含束团强度、位置、到达时间等信息。

3. 束流频谱是什么？如何利用它进行束流诊断？

⇒ 束流频谱是时域信号的傅里叶变换，可以反映束团的多种特性，比如：纵向位置、横向位置、能散等。

4. 在加速器束测中，什么是零阶矩信号？常用的零阶矩测量元件有哪些？

⇒ 零阶矩信号指束团的电流和电荷，常用测量元件包括束流变压器、直流流强变压器、壁电流探头、法拉第杯等。

5. 什么是束流位置探头 (BPM)? 常用的 BPM 类型有哪些?

⇒ 束流位置探头用于测量束团的横向位置, 常用类型包括: 钮扣型、条型、三角形、腔型等。

6. 如何测量束团的到达时间?

⇒ 可利用示波器测量 BPM 信号, 或利用激光光学方法测量飞秒量级的电子束脉冲到达时间。

7. 如何测量束团的发射度?

⇒ 可采用狭缝法、变聚焦强度法、三截面法等直接测量方法, 或利用同步辐射束流截面探测器间接测量。

8. 如何测量束长?

⇒ 束长指束团在纵向的长度, 测量方法包括: 宽带束流探头、光电管、条纹相机法、光学自相关法等。

9. 什么是阻抗函数? 如何测量阻抗函数?

⇒ 阻抗函数描述加速器部件对束团的影响, 测量方法包括台架测量和机器测量。

17.1 束团时频信号

17.1.1 时域：库仑场、辐射场

带电粒子经过金属管壁时，如果没有弯转，则在粒子附近携带一同前行的库仑场，又称近场 (near field)，如图 17.1 上排所示。§11.2 介绍过，当粒子运动达相对论速度时，库仑场收缩，呈现如“松饼”状分布。电场线终止于金属管壁上的感应电荷。随着粒子运动，感应电荷也跟着运动，形成感应电流 I_w ，有效部分只有交流分量，即

$$I_w(t) = -(I(t) - \langle I \rangle) \quad (17.1)$$

其中，扣去的直流分量写为 $\langle I \rangle$ 。对圆柱金属管道，实际上能够测到的交流分量的频率范围约有 $0 < \omega < \omega_{\text{cut-off}} \approx \frac{2.405c}{a}$ ，其中， a 为金属管壁半径。许多束测方案的基本思路为提取近场，通过分析其场特性，反推束团特性。取出这些电磁信号的方式大致分两类：利用电容耦合探头取电场，利用电感耦合探头取磁场。

第 4 章介绍过，带电粒子经过金属管壁时，如果经历弯转过程，将产生同步辐射。同步辐射场为远场 (far field)，其特性为场能够传播到距辐射源很远的位置，因此也可作为束流诊断的重要手段。一般为了提取辐射场，思路为通过一系列光学部件，使辐射场成像，形成带电粒子束流横截面的像，如图 17.1 下排所示。从而反推出束流在辐射源处的一些特性，如：中心位置变化、横向尺寸、纵向束团长度等。

探测器采集到的库仑场或辐射场一般为时域信号，为准周期性电脉冲信号。很多时候，这些电磁信号反映的束团特性从其傅里叶变换的频域信号可能更容易体现。

17.1.2 频域：束流频谱

先总结 Poisson 求和公式。

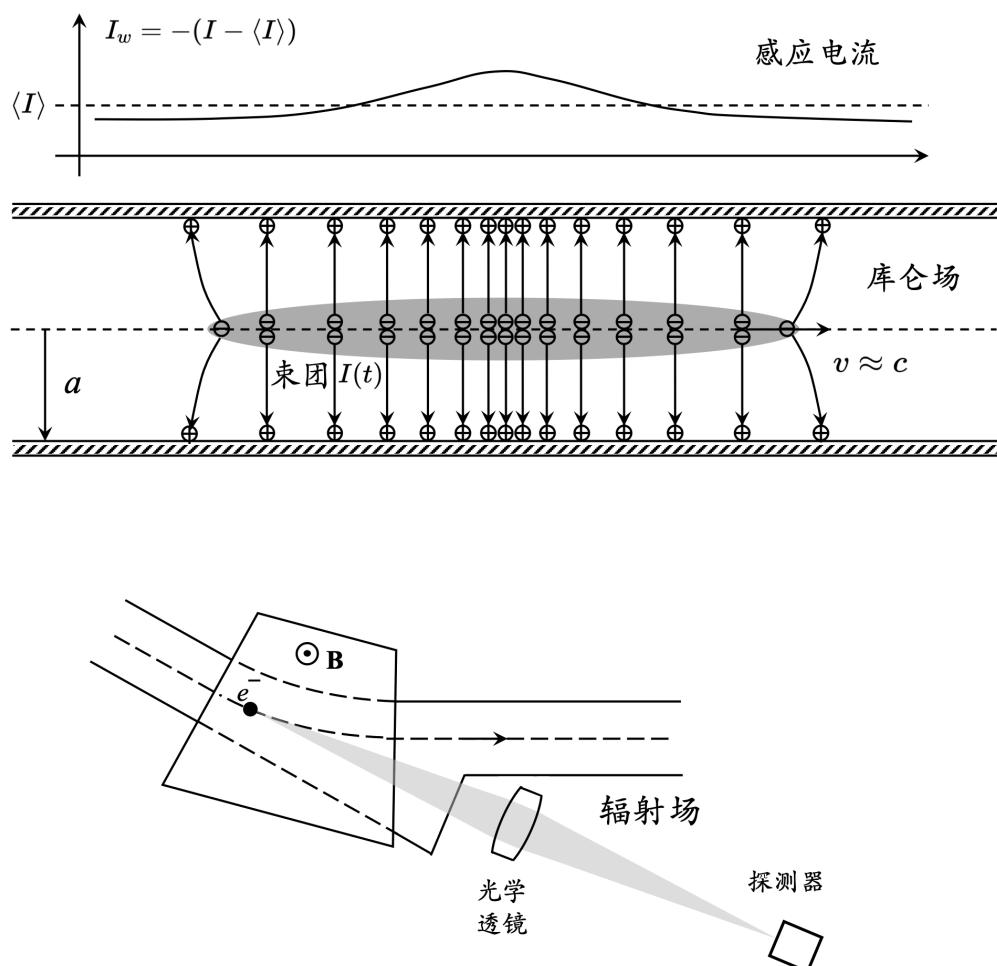
定理 17.1. Poisson 求和公式 (Poisson sum formula)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx} = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi p) \quad (17.2)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\Omega)T_0 k} = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \Omega - \frac{2\pi}{T_0} p\right) \quad (17.3)$$

证明 利用傅里叶变换定义。 □

考虑一参考粒子，电荷 q 以恒定速度 $v = c\beta$ 沿理想环形轨道运动，无纵向同步振荡，也无横向 betatron 振荡，则位于环上的某个固定位置处的具有无限带宽的束流探头来看，



测到的质点粒子线电荷密度在时域中的表达式为

$$\text{beam signal} \propto \lambda(t) = \frac{q}{v} \delta_T(t) = \frac{q}{v} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (17.4)$$

其中, $T_0 = L/v$ 为参考粒子的绕行周期, L 为环周长。在时域中, 线电荷密度 $\lambda(t)$ 为一周期为 T_0 的离散 δ 函数串, 只有在 $t = kT_0$ 时, 即每当粒子通过束流探头的瞬时, λ 才有意义。对其取傅里叶变换, 有单粒子频谱

$$\text{spectrum} \propto \int dt e^{i\omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k T_0} = \omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0) \quad (17.5)$$

其中, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ 为粒子的绕行角频率。

参考图 17.2, 可以看到, 单粒子频谱为离散的周期性线谱, 谱线的间距等于 ω_0 。只有当 $\omega = n\omega_0$ 时, $\tilde{\lambda}(\omega)$ 才有非零值。谱线中存在一条 $n = 0$ 的谱线, 为信号的直流分量, 表示单位电荷量 q 均匀分布在整个储存环的周长上, 其它谱线则对应于信号的各次谐波 (harmonics)。留意, n 和 $-n$ 的两项之和才组成一个谐波分量, 而单独的一个并不是完整的谐波分量。谐波的幅值为 $2q/L$, 为直流分量的两倍。

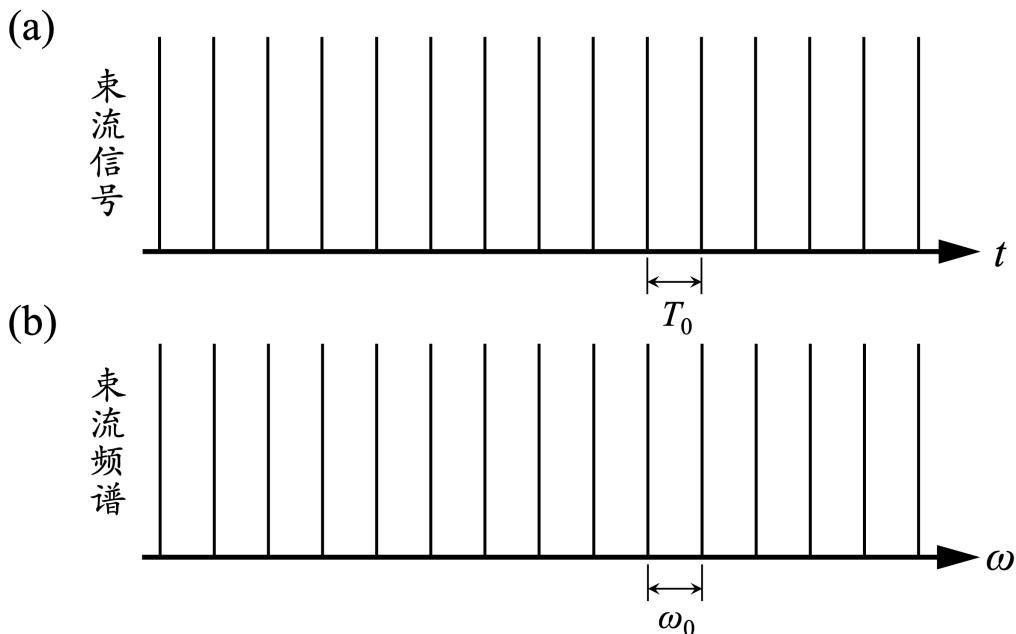


图 17.2: (a) 收集到的点电荷粒子在储存环中的逐圈时域信号; (b) 为对应的频谱。

练习 17.1 以上分析为单质点粒子的时频信号。考虑多个粒子形成有限尺寸的束团分布时, δ 函数可改写为分布函数 ρ , 有

$$\text{beam signal} \propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(-ct + ckT_0) \quad (17.6)$$

可以证明, 其频谱有

$$\text{spectrum} \propto \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(p\omega_0) \delta(\omega - p\omega_0) \quad (17.7)$$

解 参考图 17.3。

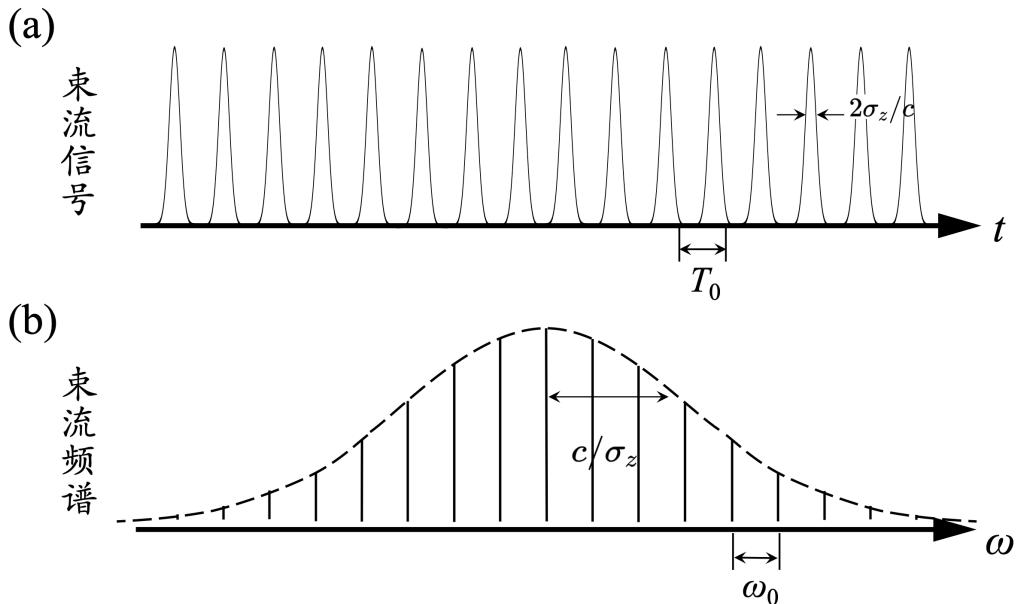


图 17.3: (a) 收集到的高斯分布束团在储存环中的逐圈时域信号; (b) 为对应的频谱。

以上为纵向信号，现在考虑横向信号。横向信号同时包含束流强度信息与位置信息，此时粒子的运动轨迹可以表示为

$$x(t) = x_{\text{COD}} + \hat{x}(t) \cos \omega_\beta t \quad (17.8)$$

其中， x_{COD} 表示粒子相对于理想平衡轨道的位置偏移，即 §7.9 介绍的闭轨畸变 (closed orbit distortion, COD)，通常是我们不期望或尽量减小的量。 \hat{x} 是自由 betatron 振荡的振幅，它是束流纵向位置的函数。 ω_β 为自由 betatron 振荡角频率。简化起见，这里假定 betatron 振荡的初始相位为零。将 betatron tune 写为

$$\omega_\beta = \nu_\beta \omega_0 = (k + \iota) \omega_0 \quad (17.9)$$

通常我们更关心的是 tune 中的小数部分 ι ，因此将其从整数部分 k 中分离出来。为了探测束流的横向位置偏移，需要采用对位置灵敏度高的探头，绝大部分的位置灵敏探头对束流强度 $\propto q$ 同样也是敏感的。上面提到，横向信号既含有束流位置的信息，又含有束流强度的信息，即输出信号正比于线偶极密度 $d = \lambda x$ ，对于单粒子的情况，有

$$\begin{aligned} \text{beam signal } d(t) &= \lambda(t)x(t) = \frac{qx_{\text{COD}}}{v}\delta_T(t) + \frac{q\hat{x}}{v} \cos \omega_\beta t \cdot \delta_T(t) \\ &\propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \hat{x} e^{-i\omega_\beta t} \end{aligned} \quad (17.10)$$

利用傅里叶变换，可以得到在频域中对应的表达式

$$\begin{aligned} \text{spectrum } \tilde{d}(\omega) &= \frac{qx_{\text{COD}}}{L} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0) + \frac{q\hat{x}}{L} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta[\omega - (p + \nu_{\beta})\omega_0] \\ &\propto \hat{x}\omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0 - \omega_{\beta}) \end{aligned} \quad (17.11)$$

上式中等号右边第一项表示谐波，反映出束流的纵向信息；第二项则表明在各谐波处出现的 betatron 振荡边带 (betatron sidebands)。参考图 17.4，其中虚线所示的是负频率边带相对于零点的镜像。在工程实际中，能测到的只有正频率，因此通过频谱仪可以测量到各正谐波的上下自由 betatron 振荡边带频率，如同通信系统中幅度调制的载波信号一样，在载波频率处有两个对称的边带。留意，这里的负频率只是为了数学处理方便。

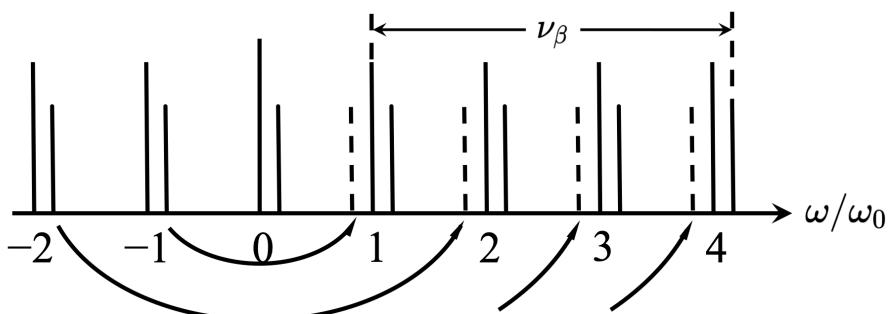


图 17.4: $\tilde{d}(\omega)$ 的频谱样貌。此图例为当 $\nu_{\beta} = 4 + \iota$ 时。上下自由 betatron 振荡边带有时分别称为快波 (fast wave) 和慢波 (slow wave)。图例修改自 R. Littauer, Beam instrumentation, AIP Conf. Proc. 105, 869-953 (1983). <https://doi.org/10.1063/1.34244>。



笔记 思考一下，会发现图 17.4 的快波与慢波其实与 ι 的大小有关。当 $\iota < 0.5$ 时，快波位于各谐波的高频率端，慢波位于低频率端；但当 $\iota > 0.5$ 时，快、慢波在频谱中的位置正好相反。

目前为止，我们已经讨论了单粒子质点电荷的纵向与横向时域信号与对应的频谱，其中，横向信号包含了 betatron 振荡，但是纵向信号还未考虑同步振荡。粒子的同步振荡使得每次到达储存环中某个特定位置处的束流探头所经过的时刻呈周期变化，这种相位的变化类似于通信系统中对高频正弦载波信号的频率调制。

假设 τ 为非同步粒子相对于同步粒子到达探头位置的时间差，则 τ 可以表示为

$$\tau = \hat{\tau} \cos(\omega_s t + \psi) \quad (17.12)$$

其中， $\omega_s = \nu_s \omega_0$ 为同步振荡角频率， ν_s 为同步振荡波数 (synchrotron tune)， $\hat{\tau}$ 和 ψ 分别为同步振荡的振幅和相位常数。此时粒子的线电荷密度可以写为

$$\text{beam signal} \propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[t - kT_0 + \hat{\tau} \cos(\omega_s kT_0)] \quad (17.13)$$

对应的频谱有

$$\text{spectrum} \propto \sum_k e^{i\omega[kT_0 - \hat{\tau} \cos(\omega_s k T_0)]} \quad (17.14)$$

当同步振荡的振幅很小时，频谱函数可化简为

$$\text{spectrum} \propto \sum_k e^{i\omega[kT_0 - \hat{\tau} \cos(\omega_s k T_0)]} \approx \sum_k e^{i\omega k T_0} [1 - i\omega \hat{\tau} \cos(\omega_s k T_0)] \quad (17.15)$$

其中，展开后的第二项与同步振荡有关，可进一步写为

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{\tau} \sum_k e^{i\omega k T_0} \cos(\omega_s k T_0) &= -\frac{i}{2} \omega \hat{\tau} \sum_k [e^{ik T_0 (\omega + \omega_s)} + e^{ik T_0 (\omega - \omega_s)}] \\ &= -\frac{i}{2} \hat{\tau} \omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} [(p\omega_0 - \omega_s) \delta(\omega - p\omega_0 + \omega_s) + (p\omega_0 + \omega_s) \delta(\omega - p\omega_0 - \omega_s)] \end{aligned} \quad (17.16)$$

可以看到，在 $\omega = p\omega_0$ 附近出现一对同步振荡边带，为 $\omega = p\omega_0 \pm \omega_s$ 。

有些读者读到这里可能觉得分析已经足够复杂，其实以上的横向 betatron 振荡与纵向同步振荡仍假设小振幅振荡，因此，对束团中的所有粒子的振荡频率均一视同仁。真实情况是，不同振荡振幅的粒子，其横向 betatron 振荡频率与纵向同步振荡频率应随振幅不同而各异。当同步振荡的振幅不再很小时，对应的频谱函数稍微复杂，有

$$\text{spectrum} \propto \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^{-\ell} J_{\ell}[(p\omega_0 + \ell\omega_s) \hat{\tau}] \delta(\omega - p\omega_0 - \ell\omega_s) \quad (17.17)$$

感兴趣的读者可试着证明此结果。

其中， p 表示绕行频率的谐波数。此式说明每个绕行频率谐波都出现了无限多个上、下边带 $\pm \omega_s, \pm 2\omega_s, \dots, \pm \ell\omega_s$ ，这里 ℓ 表示同步振荡频率边带的谐波阶数， J_{ℓ} 为第一类 ℓ 阶贝塞尔函数。图 17.5 画出每个绕行频率谐波的二个上下同步振荡边带 ($\ell = \pm 2$)，这些边带又称同步伴线 (synchrotron satellites)。相邻两伴线的间隔为同步振荡频率 ω_s 。 $\ell = 0$ 的谱线其实就是绕行频率的谐波频率 $p\omega_0$ 。各阶伴线的幅值强度分别被对应阶数的贝塞尔函数 J_{ℓ} 调制，有 $J_{\ell}[(p\omega_0 + \ell\omega_s) \hat{\tau}]$ ，表示在 p 次绕行谐波频率上粒子的最大相位偏移。

简化起见，这里不打算讨论更复杂的横向信号，其包含了以上同步振荡信号与 betatron 振荡信号。此外，以上仅考虑单粒子，考虑多粒子频谱时，由于束团内不同粒子间存在一定能量偏差，将造成绕行频率偏差，因此，束团整体的绕行频率不再是一个数，而会一定程度展宽。其高阶谐波分量的展宽也将随着 p 而增加。

此外，以上讨论仅针对单束团的频谱信号。对多束团情况，其展现的频谱更加丰富。此处举双束团在储存环中沿对角线绕行为例，简化起见，暂时忽略纵向同步振荡，考虑其时域信号，有

$$\text{beam signal } x(t) \propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) e^{i\omega_{\beta} t} + r \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - kT_0 - \frac{T_0}{2}\right) e^{i(\omega_{\beta} t + \phi)} \quad (17.18)$$

其中， r 为相对信号振幅。以上可视为从储存环一固定位置处的横向内外侧分别提取此

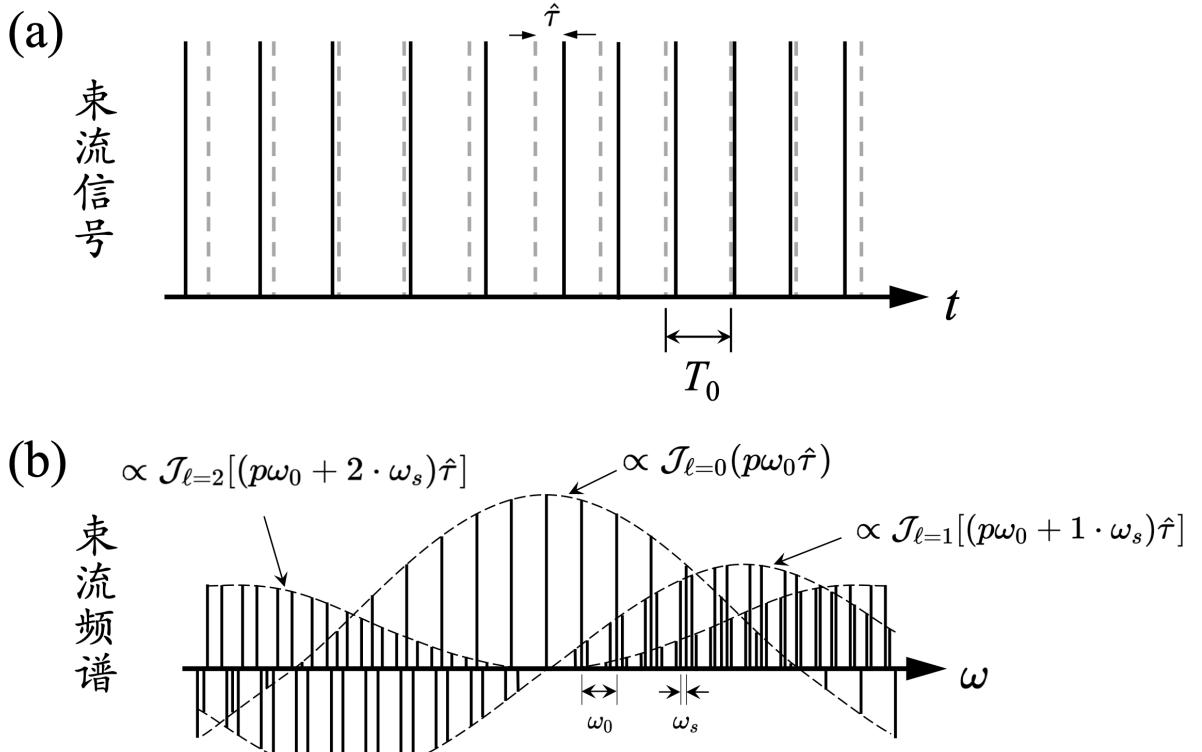


图 17.5: 存在同步振荡时, 单粒子质点电荷的频谱样貌。可以看到, 在每个 $p\omega_0$ 附近出现一系列的同步振荡边带, 每个边带以脚标 ℓ 描述, 强度正比于 $\mathcal{J}_\ell [(p\omega_0 + \ell\omega_s) \hat{\tau}]$ 。

信号后, 通过求其差和比后叠加。利用傅里叶变换, 可以得到在频域中对应的表达式

$$\text{spectrum } \tilde{x}(\omega) \propto \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_\beta - p\omega_0) \left(1 + r e^{i(p\pi + \phi)} \right) \quad (17.19)$$

其中,

- 当 $r = 1, \phi = 0$ 时, 称 0 模或 σ 模。此时, 所有绕行频率的偶次谐波附近的 betatron 边带可能被激发。
- 当 $r = 1, \phi = \pi/2$ 时, 称 π 模。此时, 所有绕行频率的奇次谐波附近的 betatron 边带可能被激发。
- 双束团对应两个振荡模。对 M 个束团, 将对应 M 个振荡模, 记为 $\mu = 0, 1, 2, \dots, (M-1)$, 其时域、频域信号分别有

$$\begin{aligned} \text{beam signal} &\propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} x_n^{(\mu)}(t) \delta \left(t - kT_0 + \frac{nT_0}{M} \right) \\ &\propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-i\omega_\beta t} e^{i2\pi\mu n/M} \delta \left(t - kT_0 + \frac{nT_0}{M} \right) \end{aligned} \quad (17.20)$$

与

$$\begin{aligned}
 \text{spectrum} &\propto \int dt e^{i\omega t} \text{ (beam signal)} \\
 &\propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} e^{i2\pi\mu n/M} \exp \left[i(\omega - \omega_\beta) \left(kT_0 - \frac{nT_0}{M} \right) \right] \\
 &= M\omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_\beta - pM\omega_0 - \mu\omega_0)
 \end{aligned} \tag{17.21}$$

可以看到，第 μ 模提取/采样的频率为 $(pM + \mu)\omega_0$ ，其中， p 为整数。

为什么介绍束流频谱？如果将第11章介绍的阻抗函数 $Z_{\parallel}(\omega), Z_{\perp}(\omega)$ 视为在储存环中一固定位置部件对束团的影响，那么，当束团逐圈绕行时，在频域中，集体效应的阻抗对束团的影响便可视为阻抗函数在一些特定频率的取值/采样。当考虑（单）束团横纵向振荡时，束流频谱不再与忽略其振荡时的频谱一样而变得更丰富多彩，对阻抗函数取值时也就有所不同。当考虑多束团振荡时，除了各别束团可能的横纵向振荡差异外，多束团束流频谱包含的多个振荡模也为束流频谱与阻抗取值添加复杂。因此，完整的束动力学分析，除了要求理解第11章介绍的阻抗函数的频率内涵，掌握束流频谱的频率内涵信息也同样重要。



笔记 对加速器探测束流信号理论感兴趣的读者，可参考 R. Siemann, Bunched beam diagnostics, AIP Conf. Proc. 184, 430-471 (1989). <https://doi.org/10.1063/1.38043>。

对电磁信号处理和数字信号采样时，涉及一个重要定理，称 Nyquist 定理 (Nyquist theorem)，其描述了采样频率与信号带宽之间的关系，总结如下：

定理 17.2. Nyquist 定理

参考图 17.6，描述采样频率与信号带宽之间的关系，概括如下：

- 采样频率 (sampling rate) 必须大于或等于信号带宽 (bandwidth) 的两倍。
- 若采样频率低于两倍信号带宽，将发生频率混叠 (aliasing) 现象，即高频信号会被误识别为低频信号，将会造成信号失真。
- 在满足采样频率的条件下，可通过合适的滤波器完全重构出原始的连续时间信号。



Nyquist频率与采样频率的关系

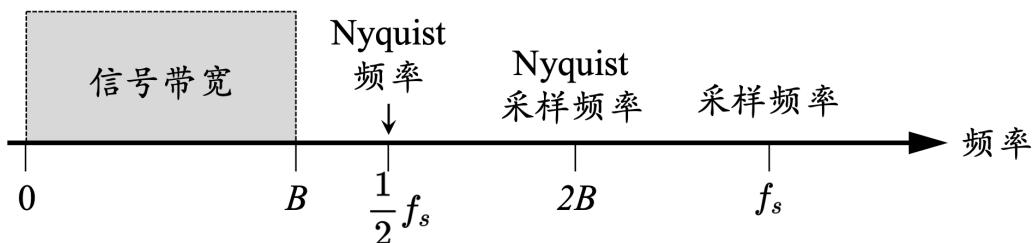


图 17.6: Nyquist 定理: 采样频率 f_s 必须大于或等于信号带宽 B 的两倍。定义 $f_s/2$ 为 Nyquist 频率, 两倍带宽 $2B$ 为 Nyquist rate。图例取自 wikipedia。

17.2 零阶矩：电流、电荷

以下简短介绍几个测量束团“零阶矩”参数元件的工作原理。对各别束测的更多讨论，请自行参考其它相关专著，细节此处不论。

17.2.1 电流

束流变压器 (beam current transformer, BCT) 参考图 17.7，原理类似变压器，带电粒子束团经过绕匝线圈电感元件，利用电磁感应，束团经过前后在线圈产生感应电信号，由 $V = L \frac{dI_b}{dt}$ ，可反推 I_b 。

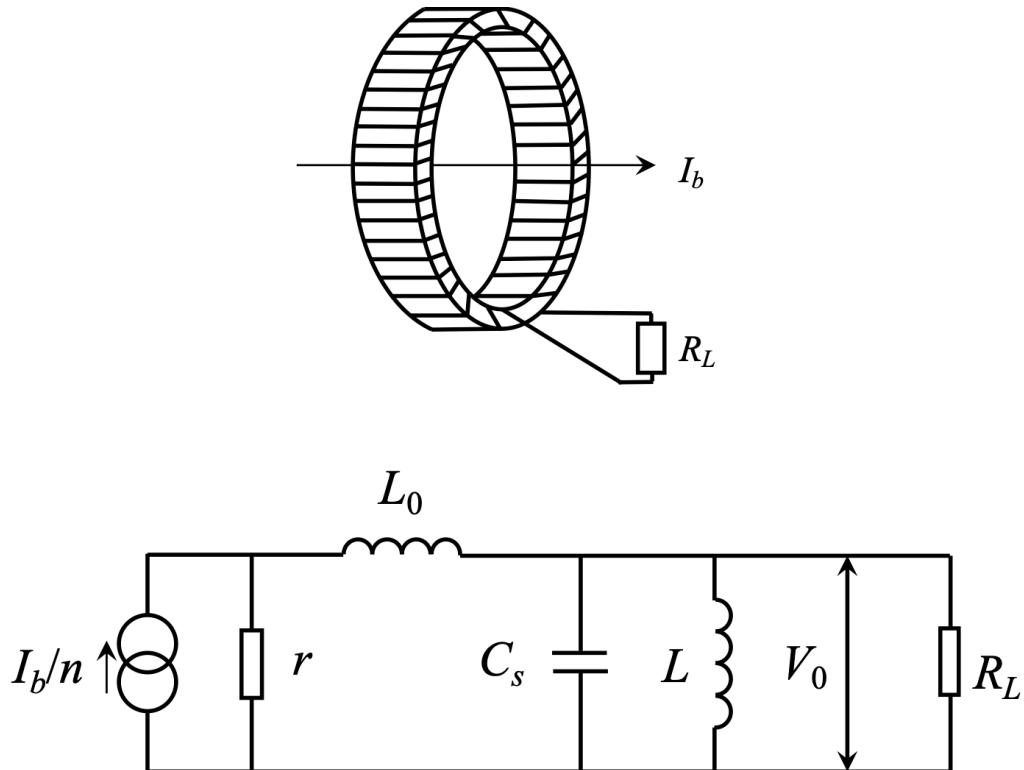


图 17.7: 束流变压器 (BCT) 及其等效电路。

直流流强变压器 (direct-current current transformers, DCCT) 参考图 17.8，顾名思义，此束测元件测量束团的平均电流。DCCT 除了可以对束团的平均电流进行测量外，还可用来确定束流的寿命、标定单束团流强测量以及用于机器连锁保护等。一般由探测器和信号电子学组成，探测器套装在一段特制的陶瓷真空管道上，与其它部分的金属管道断开，主要是为了阻断镜像电流穿过探测器内环。陶瓷环内壁通常镀一层薄金属膜，避免高频电磁场对系统造成干扰，同时减小由于管道不连续性而引起的耦合阻抗。由于探测器对磁场的变化很敏感，应屏蔽和远离磁场干扰源。此外，还要防止探测器受撞击和过热。DCCT 为是一种积分电路，对束流分布形状并不敏感，即无论是单束团或多束团，皆仅测量平均电流。

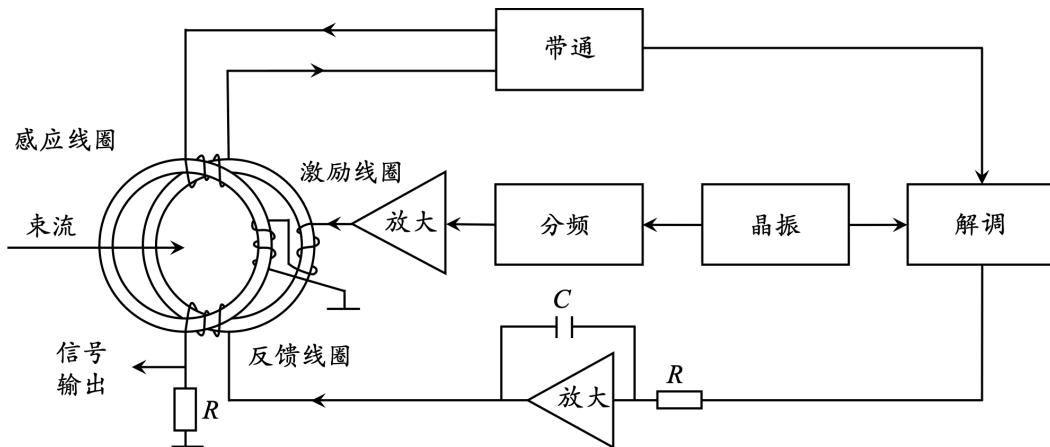


图 17.8: 直流流强变压器 (DCCT) 及信号处理电子学。

壁电流探头 (wall-current monitor, WCM) 参考图 17.9，运动的带电粒子束在金属真空管壁感应电流，称壁电流 (wall current)。通过在金属真空管道上加一段陶瓷管道，然后在陶瓷管道两端跨接一无感电阻 R ，则感应壁电流会在电阻两侧产生一个电位差，该压降正比于束流流强 I_b 。上一节提到，壁电流中不包括直流分量。束流中的直流分量对应于静止电荷，而不是壁电流。

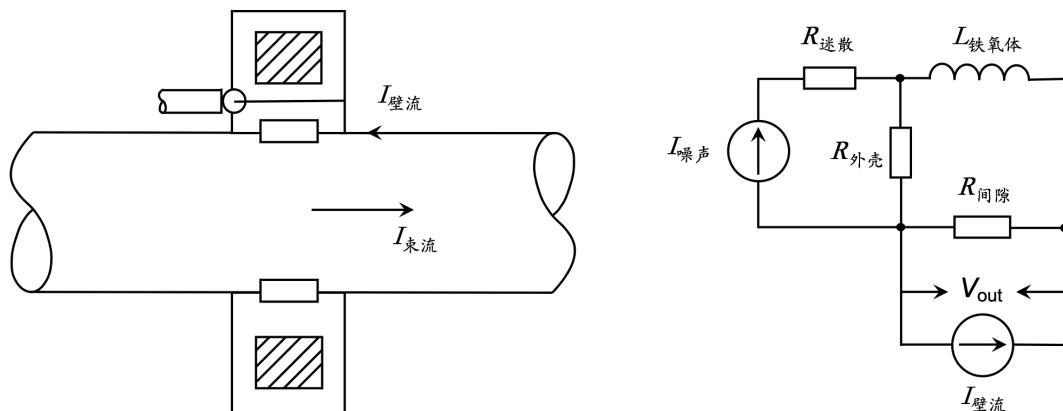


图 17.9: 壁电流探头 (WCM) 及其等效电路。

法拉第杯 (Faraday cup) 参考图 17.10，用金属做成杯状或同轴喇叭状，将束流全部阻挡，收集粒子束，同时通过其积累的电荷/电流可用作测量带电粒子束特性的装置，是一种简单、有效的束测元件。利用电流计可测到直流束流强度或脉冲束流的平均电流值。为降低轫致辐射对测量结果的影响，接收器的金属材料一般选原子序数较低的材料，如：铝、铜等。此外，为减小二次电子对信号的干扰，常常加负高压来吸收二次电子。

17.2.2 电荷

法拉第杯 (Faraday cup) 参考如上描述。

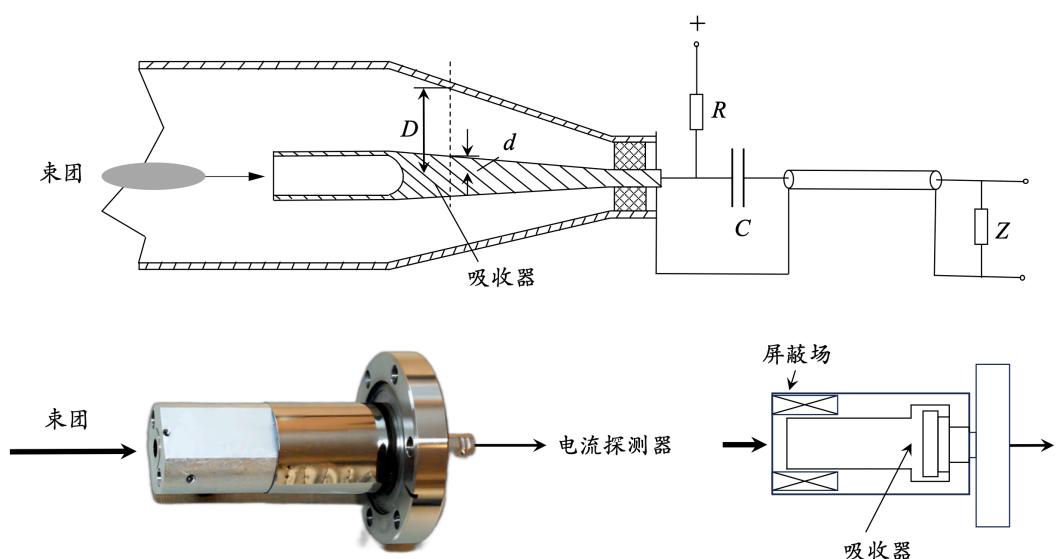


图 17.10: 同轴结构法拉第杯示意图。

17.3 一阶矩：位置、到达时间

17.3.1 位置

束流位置探头 (beam position monitor, BPM) 为最基本、最重要的束测元件，束流位置测量和校正¹是任何一台加速器束测和控制系统最基本的功能之一。分钮扣型 (button BPM)、条型 (stripline BPM)、三角形 (shaped BPM)、腔型 (cavity BPM) 等。

- 钮扣型 \Rightarrow 参考图 17.11，四钮扣型电极是最常采用的一种静电感应式 BPM。因为这种 BPM 有较小的耦合阻抗，占用较小的几何空间，且结构简单、造价低。此类型 BPM 一般在短束团的情况下使用。

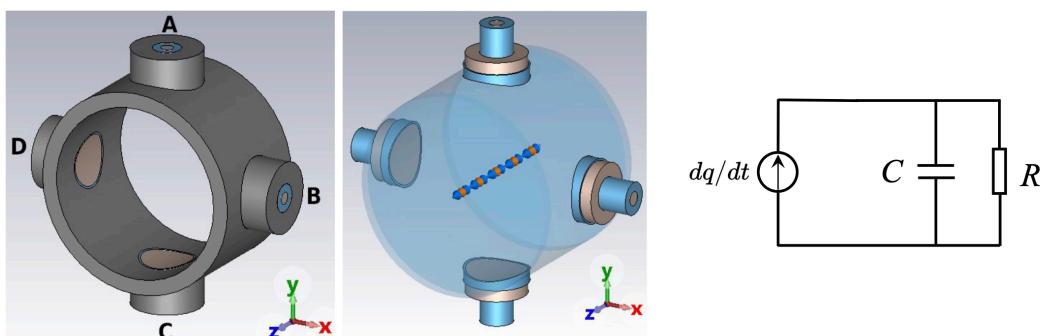


图 17.11: 钮扣型 BPM 及其等效电路。图例取自 <https://www.mdpi.com/1424-8220/24/9/2726>。

- 条型 \Rightarrow 参考图 17.12，束流经过前后，其磁场在环路中产生感应电压。如果形成环路的金属条带具有一定宽度，束流同时也会在条带的表面感应出电荷形成壁电流。即当条带很窄时，此 BPM 对束流主要是电感性耦合的；当条带很宽时，则主要是电容性耦合的。条形电极的条带长度 L 通常大于两倍的束团长度。此外，为了阻抗匹配，要求条形电极的特性阻抗为 $Z_c = 50 \Omega$ 。条形电极与真空管壁之间将形成特性阻抗为 Z_0 的传输线 (transmission line)。

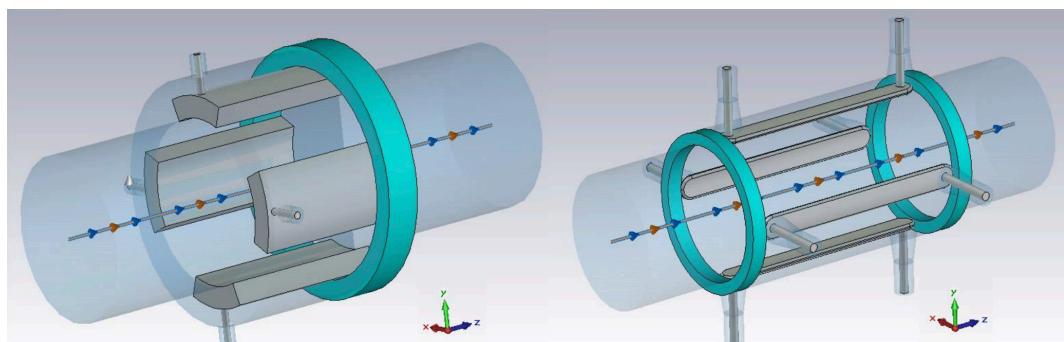


图 17.12: 条型 BPM。图例取自 A.B. Morell, Commissioning of the prototype stripline BPM system for the CLIC drive beam, oPAC Conference (2015)。

- 三角形 \Rightarrow 参考图 17.13，又称 linear-cut BPM 或 shoebox BPM，属于静电感应型束流

¹一般来说，先有测量，找到轨道错误 (orbit error)，再有校正 (orbit correction)。校正元件一般称 (轨道) 校正子 (orbit corrector 或简称 corrector)，提供相对较弱的二极磁场，可以单独存在或者绑在主磁铁上的调谐线圈。校正子给粒子“踢”一下改变/修正粒子轨迹。

探头，由两个斜三角形电极组成。通过两电极测量得到的信号反推束团横向位置。由于三角形 BPM 有较大的感应面积，因此灵敏度较高。此外，它的电极沿对角线线性切开，因此信号与束流位置的线性度较好。通常用来测量长束团，在质子加速器中有广泛的应用。

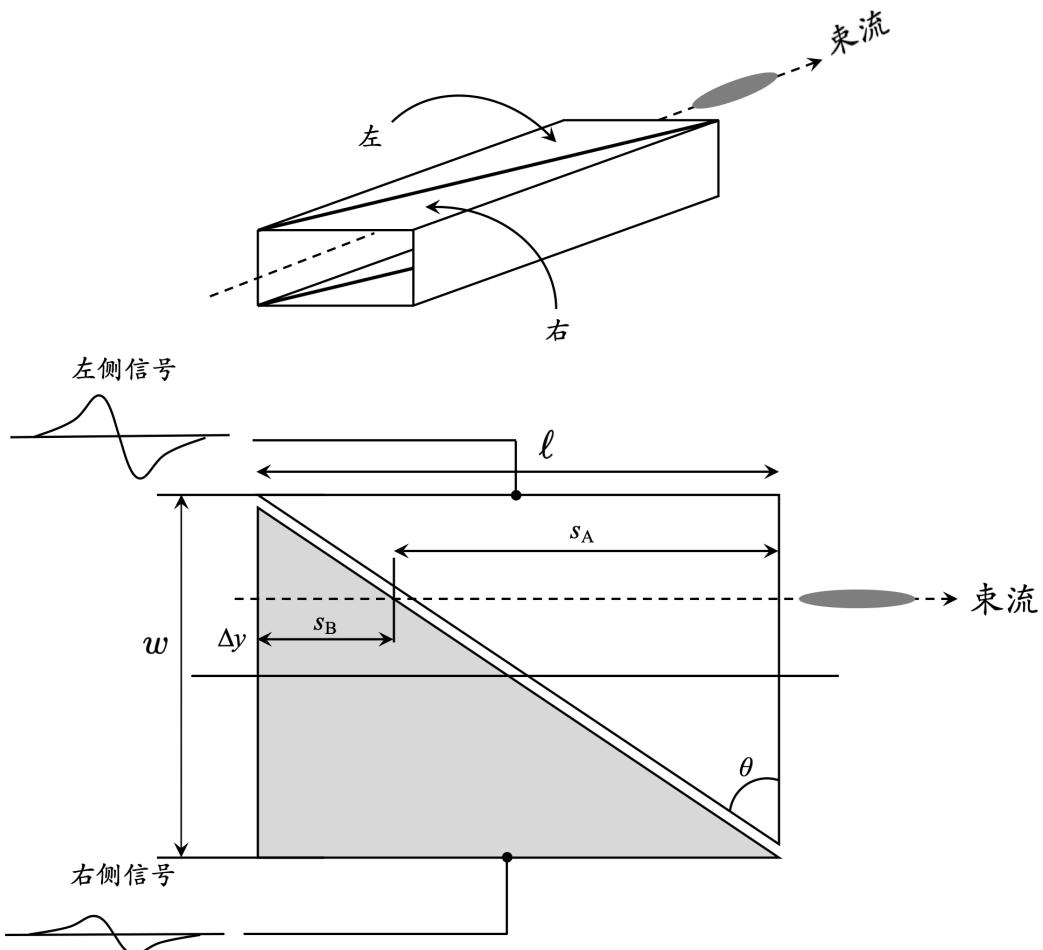


图 17.13: 三角形 BPM。

- 腔型 \Rightarrow 参考图 17.14，束流通过腔型结构时，会激发起各种模式的振荡，其中， $m = 0$ 模式为单极场 (monopole)， $m = 1$ 模式为二极场 (dipole)，对束团的横向位置探测是灵敏的，因此可以用来测量束流的位置。腔型 BPM 的最大优点是具有较高的测量灵敏度。

关于束团位置测量信号的处理，可从系统的带宽分类，分为宽带和窄带两种。宽带信号的处理时间较短，但输出噪声较高，测量分辨率不易做得太高。窄带信号的处理时间相对较长，但有较高的信噪比。对于如何从 BPM 原始电极信号中获取束流位置信息，一般有三种常用的信号处理电子学：差比和 (difference over sum) Δ/Σ 、对数比 (Log-ratio)、调幅/调相 (AM/PM)。每一种信号处理方法都有自己的优点，在选择采用哪种信号处理方法时，要综合考虑电路的复杂程度、预算、参数动态范围、线性度、带宽等因素。

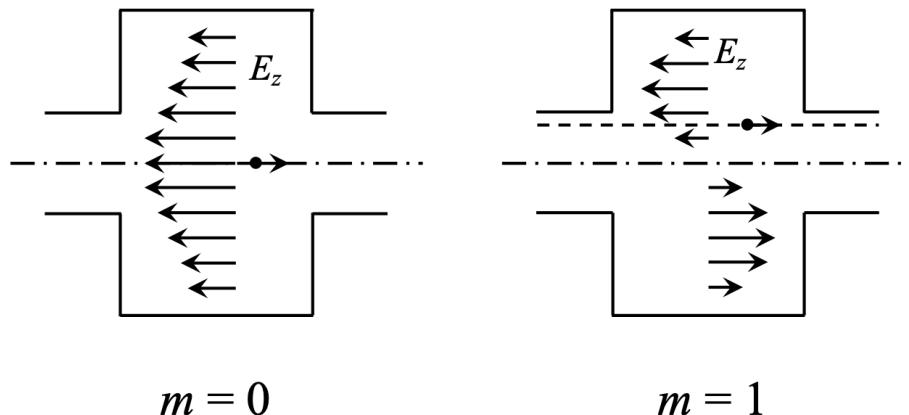


图 17.14: 腔型 BPM。

除了信号处理外,为提高 BPM 位置测量的可信度,可以采用“自洽检验”(self-consistency check)。为提高位置测量的绝对精度,可以采用基于束流的准直技术来确定 BPM 的几何中心相对于邻近四极铁磁中心的偏移。细节此处不论,感兴趣的读者可参考相关专著或 CERN CAS 课件,如 P. Forck, P. Kowina, and D. Liakin, Beam position monitors. <https://cds.cern.ch/record/1213277/files/p187.pdf>。

17.3.2 到达时间

观察束流位置探头的信号,并利用具有 GHz 带宽的示波器,可以测定纳秒量级内的束团到达时间。然而,近几年来,由于自由电子激光器的时间要求变得苛刻许多,要求达到飞秒范围。对此,需要采用激光光学方法。此束测必要性也体现在超快同步,以实现自由电子激光脉冲与外部激光器的泵浦-探测实验。

一种将同步电子束与外部激光器的方法为利用光栅拉长超短(飞秒)激光脉冲,先得到较长(皮秒)的激光脉冲,并在其内部产生波长随时间变化的色散,即啁啾(chirp)。在光栅谱仪上,此种激光脉冲将表现为非常宽的谱,短波长在一侧,长波长在另一侧。接着,将一个双折射晶体(bi-refringent crytsal)置于交叉的偏振器和分析器之间,使电子束穿过时,其电场改变了(同时通过的)激光脉冲的偏振,使得只有拉长激光脉冲的那一小部分通过第二个偏振器。每次脉冲上,电子束与激光器的相对到达时间都编码在光谱仪的一部分光谱中。由此反推电子束的到达时间。



笔记 更多讨论可参考 B. Steffen et al., Electro-optic time profile monitors for femtosecond electron bunches at the soft x-ray free-electron laser FLASH, Phys. Rev. ST Accel. Beams **12**, 032802 (2009). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.12.032802>。

17.3.3 能量

储存环中的束团为极化束团时，可采用共振去极化 (resonant depolarization) 技术，以极高的精度测量粒子的参考能量。电子的自旋调谐因子 (spin tune)²由以下公式给出

$$\nu_{\text{spin}} = a\gamma = \frac{E [\text{MeV}]}{440.6486 [\text{MeV}]} \quad (17.22)$$

其中， $a \equiv \frac{g-2}{2} = 0.00115965218073(28)$ 为电子反常磁矩 (anomalous magnetic moment)³。

若一时变磁场的频率与自旋调谐因子的小数部分共振，则随着自旋粒子多次通过而磁场导致的去极化效应不断叠加，垂直方向的自旋向量将进动而偏转到水平方向。通过测自旋调谐因子，可利用上式精确反推粒子的参考能量。再利用此一方法，可以精确测量由射频频率变化引起的能量变化，参考图 17.15，或者通过测量的斜率给出了动量紧缩因子。

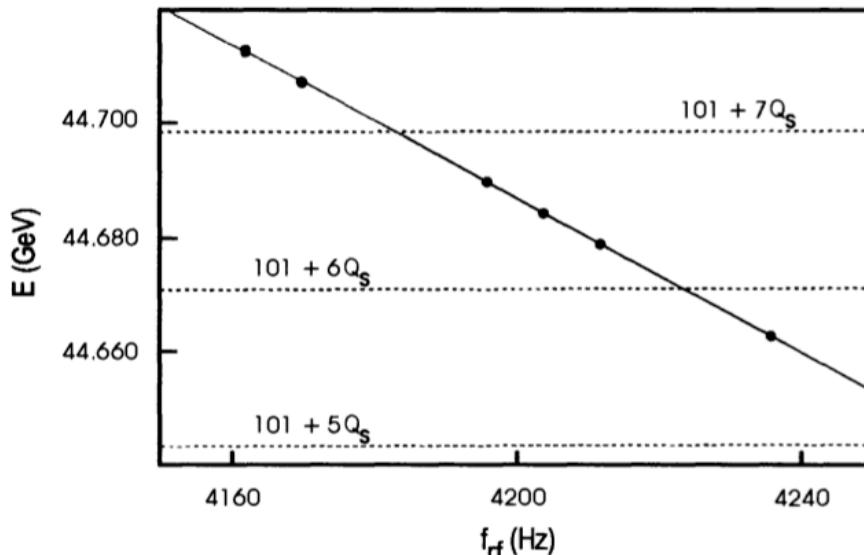


图 17.15：在 LEP 储存环，通过扫描射频频率，经过多个自旋共振去极化 (点线)，间接测量粒子参考能量。图例取自 Minty and Zimmermann 一书。

²粒子的“自旋”可视为一个内禀参数 (intrinsic parameter)，就好像粒子的电荷、质量、位置坐标、速度坐标一样。当粒子沿着磁聚焦结构传输时，“自旋”随着磁场会产生进动 (precession)，沿着磁力线呈螺旋振荡，也有类似 betatron 振荡或同步振荡一样。既然有 betatron tune ν_β ，有 synchrotron tune ν_s ，那么也有 spin tune ν_{spin} 。自旋调谐因子为粒子绕行储存环一周或一个磁聚焦结构单元长度内的完整振荡次数。当磁聚焦结构中的磁场部件存在可能的磁场频率误差情况下，本来如果是自旋极化的束团，可能因此极化度 (polarization) 降低，称去极化 (depolarization)。当磁场误差不幸导致某种专属于自旋进动的共振时，称共振去极化 (resonant depolarization)。粒子自旋满足以下运动方程

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{e}{\gamma m} \left[(1 + a\gamma) \mathbf{B}_\perp + (1 + a) \mathbf{B}_\parallel + \left(a\gamma + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{v}}{c^2} \right] \times \mathbf{S}$$

其中， \mathbf{S} 为在粒子自身坐标系的归一化自旋向量 $|\mathbf{S}| = 1$ ， a 为粒子的反常磁矩。此方程由 L.H. Thomas、V. Bargman、L. Michel、V.L. Telegdi 等人最早在 1927 年给出，称 Thomas-BMT 方程。

³一个粒子的反常磁矩为除去该粒子按经典电磁理论预期的磁偶极矩之后，由于量子力学而来的额外影响。按经典电磁理论，带电粒子在磁场环境中，其磁矩有 $\mu = g|e|s/2m$ ，其中， s 为自旋角动量， g 为旋磁比 (gyromagnetic ratio)。对电子而言，有 $g = 2$ 。实验测量发现，电子的磁矩比此经典公式预测的值要大约 1.00115965218073(28) 倍。扣除 1 之后的额外贡献被称为电子的反常磁矩。电子反常磁矩的存在是量子力学效应的体现，反映了电子的内部结构和相对论效应。准确测量和计算电子反常磁矩是验证量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 理论的重要手段之一。



笔记 此讲义没有介绍粒子的自旋动力学。对此课题感兴趣的读者，可参考 S.Y. Lee, Spin Dynamics and Snakes in Synchrotrons, World Scientific (1997) 或 A.W. Chao, Special Topics in Accelerator Physics, World Scientific (2022) 一书的 Chapter 5, 6。

17.4 二阶矩：发射度、能散、束长

17.4.1 横向尺寸：束流截面测量

荧光靶 (phosphor view screen 或 fluorescent screen) 如图 17.16，荧光靶为最常用来观察束流位置和截面形状的探头。这种探头配上计算机视频信号处理系统后，可以用来获取束流截面的密度分布，从而可以间接测量出束团的能散度和发射度。荧光靶是一种阻挡型探头，平时靶片不挡住束流，只有在工作时，靶片通过步进电机或气动执行器伸向束流轨道。靶片平面横截面与束团前进方向呈 45° ，高能电子轰击荧光靶片产生可见光。用摄像机把光斑在靶片上的位置和形状转化为视频信号后，传到控制室分析显示。荧光靶片的材料可以是硫化锌、硫酸钇铕、碘化铯、三氧化二铝等荧光材料。理想的荧光靶材料应具有很好的真空特性(低的出气率)、高发光效率和很强的抗辐射能力。

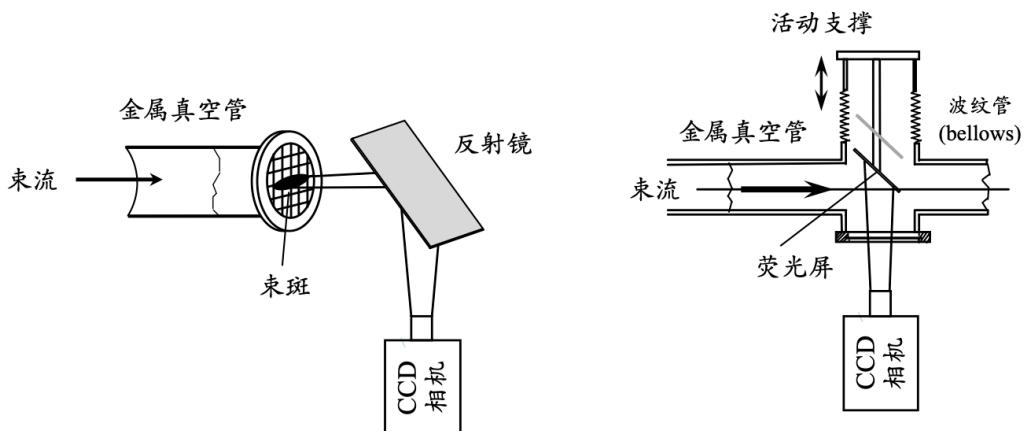


图 17.16: 荧光屏示意图。图例修改自 K. Wille。

丝靶 (flying wire)、丝扫描仪 (wire scanner) 属于二次电子发射型探头 (secondary emission monitor, SEM) 的一种。二次电子发射是当电子轰击到物质上时，从中打出低能电子的现象。丝靶的丝一般采用镀金包丝，直径 $10 \sim 50\mu\text{m}$ 。如果束团中有 N 个电子打在一根丝上，假设每个电子能打出 η 倍的次级电子，并对一电容器充电，则电容器上的输出电压为

$$V = \eta \frac{N|e|}{C} \quad (17.23)$$

其中， $|e|$ 为电子的单位电荷量， C 为电容器的电容值。当单根丝靶横扫过束团截面时，从输出信号的变化可以反推得到束流横截面的密度分布。多丝靶不采用扫描方式，而是像荧光靶一样直接插入真空室，参考图 17.17。类似的采用扫描方式的束测元件则称丝扫描仪。

束流切割器 (scraper) 用来测量束团横向尺寸，为破坏性测量。以水平方向为例，束团的 rms 尺寸 σ_x 、束流切割器水平挡块距束团中心的距离 X_{SC} ，以及束团的量子寿命 τ_q 有

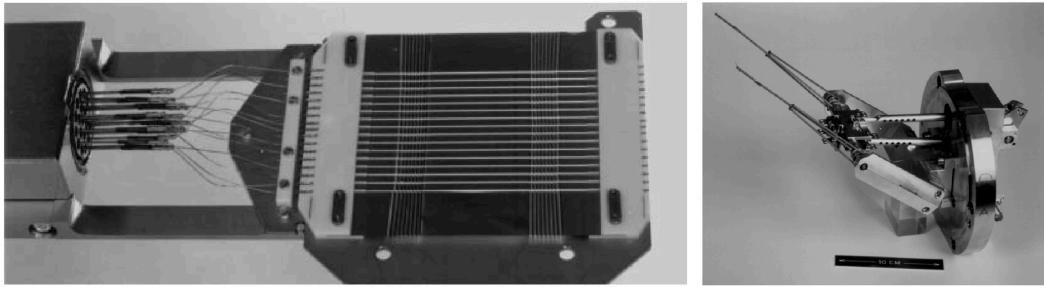


图 17.17: 多丝靶(左)、丝扫描仪(右)。图例取自 H. Koziol。

如下的关系

$$\tau_x^{(q)} = \frac{\tau_x}{\xi^2} e^{\xi^2/2} \quad (17.24)$$

其中, $\xi = X_{SC}/\sigma_x$, τ_x 为水平方向辐射阻尼时间。

同步辐射束流截面测量 (synchrotron radiation profile monitor) 参考图 17.18, 将束团产生的同步辐射光, 经过光路传输后成像, 可以得到电子束团在发光位置处的像, 从而反推得到束团的横向尺寸。常用的同步辐射束流截面探头有两种: CCD 相机 (charge-coupled device, CCD)、光二极管阵列 (photodiode array)。

- CCD 相机 \Rightarrow 一种集成电路, 上有许多排列整齐的电容, 能感应辐射光, 并将影像转变成数字信号。经由外部电路的控制, 每个小电容能将其所带的电荷转给它相邻的电容。
- 光二极管阵列 \Rightarrow 分为线阵和面阵两种, 相邻两二极管之间的距离约 $10 \mu\text{m}$, 阵列总长度约 10 mm 。当同步辐射光照射到光二极管时, 将产生光电流。每个光二极管各接有一个电容器, 用来对光电流信号积分, 多路开关将各个电容器与读出电子学相连, 得到波形信号。信号由许多小台阶组成, 每个小台阶对应于相邻两个光二极管之间的间距。光二极管输出电压的幅度正比于照射在该光二极管上的辐射光强度和对光电流的积分时间。

激光干涉仪 又称 Shintake monitor, 此一设想是 Tsumoru Shintake 教授在 1990 年提出, 一种能够非常精确测量束团横向尺寸的方案。采用上面传统的基于同步辐射光的束流截面探头, 最多只能测量 μm 量级的横向束团尺寸。如果利用两束激光形成的干涉条纹, 则可以测量尺寸更小的束团。1993 年, 基于此方案的激光干涉仪测量装置研制出来后, 安装到 SLAC 的 FFTB (final focus test beam) 上, 1994 年 FFTB 首次束流实验时就得到了平均横向束团尺寸为 $\sigma_y \approx 70 \text{ nm}$ 的束斑, 利用该探测器成功地测量出了这一尺寸。由于电子束团的尺寸是通过激光干涉条纹的物理尺寸来确定的, 不再需要任何绝对标定, 仅需要使用一个简单的公式就能从观测到的数据中得到束团尺寸。

图 17.19 是激光干涉仪束团尺寸测量装置原理图。大致工作原理为:

- 激光束先被半镜分成两束, 然后聚焦到共同焦点, 产生干涉条纹。
- 电子束从垂直于激光方向入射到聚焦的激光束位置上。

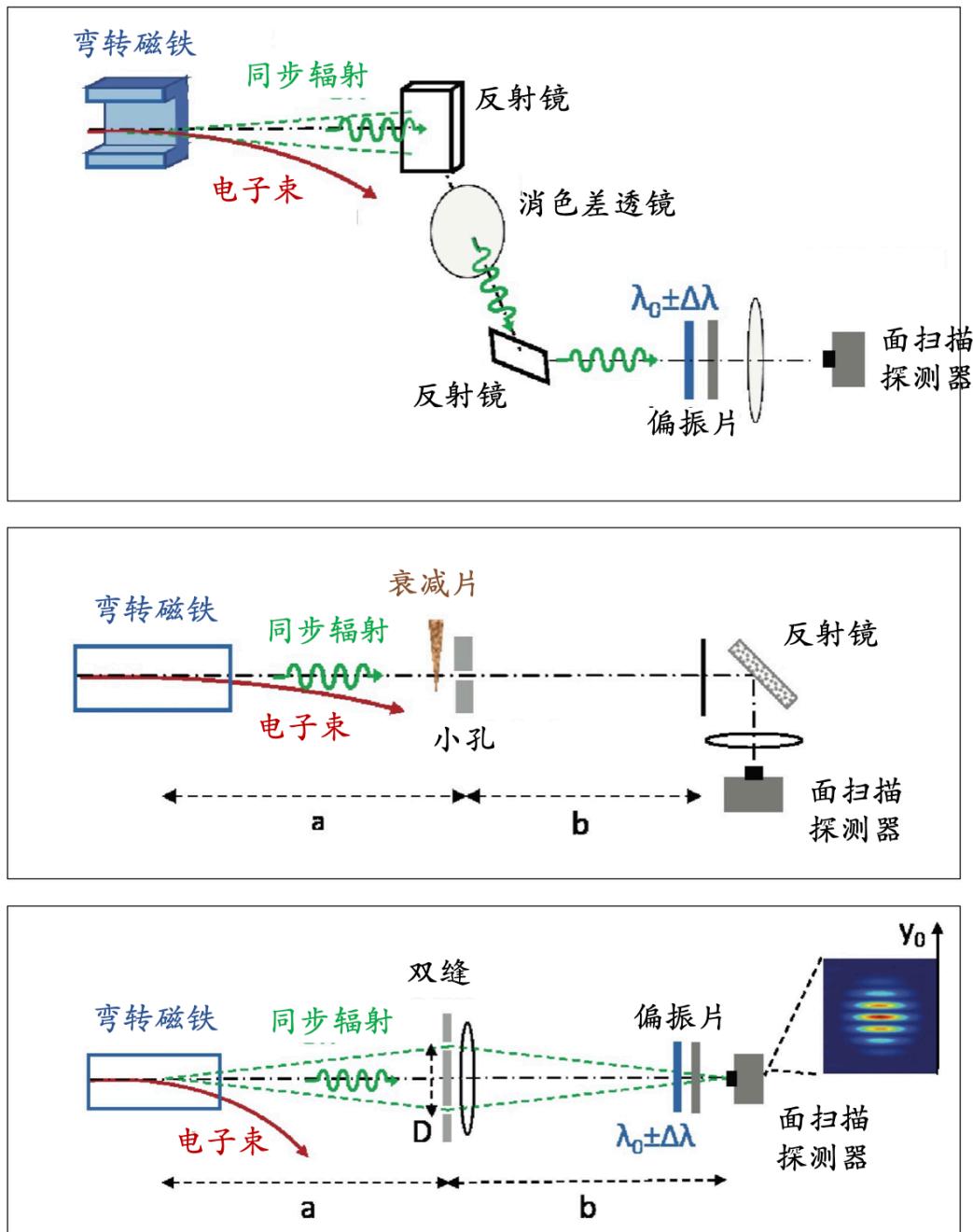


图 17.18: 几种不同的同步辐射束流截面测量方案形态: (上) 加偏振片提高分辨率、(中) 光路无须透镜加小孔放大成像、(下) 加双狭缝干涉改进分辨率。图例修改自 Handbook §7.4.3.6。

- 在聚焦位置，电子受到激光合成干涉场影响，在横向产生加速度，产生伽马射线。伽马射线光子数 N_γ 与激光场 B_0 平方呈正比，有

$$N_\gamma \propto B_0^2 (1 + \cos \theta \cos 2k_y y) \quad (17.25)$$

其中， θ 为两道激光夹角， $k_y = \pi/b$ 为激光波数， $b = \frac{\lambda_0}{2 \sin \theta/2}$ 为干涉条纹间距， λ_0 为激光波长。

- 下游的弯转磁铁将电子偏转至束流靶室，测量传输到下游的高能伽马射线。
- 利用上游的一个微弱的偏转磁铁，缓慢扫描电子束，并测量伽马射线通量的调制深度 M_0 ，有

$$M_0 = |\cos \theta| \exp \left[-\frac{1}{2} (2k_y \sigma_y^*)^2 \right] \quad (17.26)$$

以确定电子束斑大小 σ_y^* 。

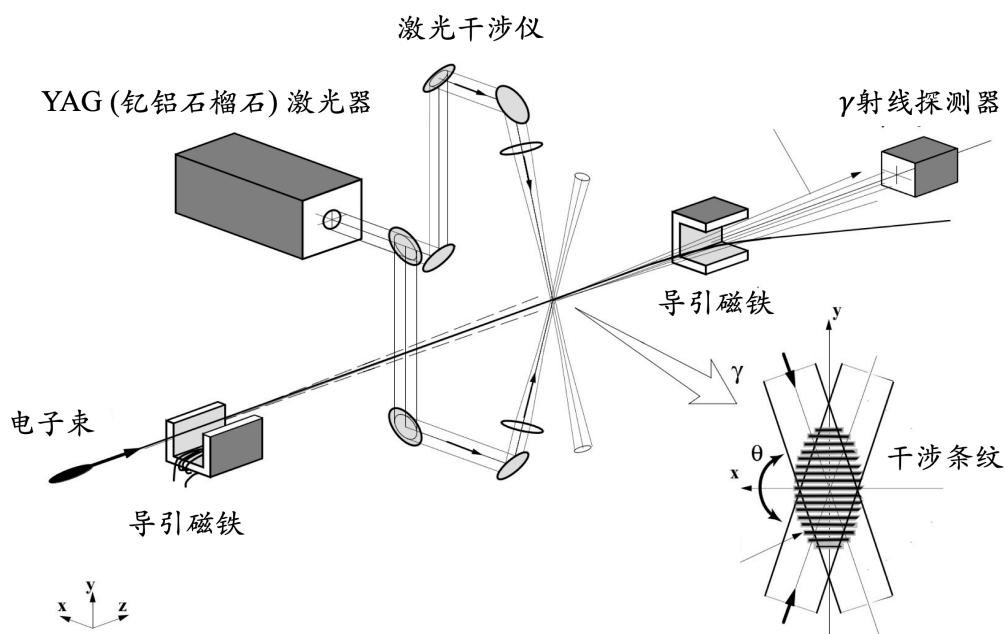


图 17.19: 激光干涉仪，此装置用来测束团横向尺寸。图例修改自 T. Shintake et al., Design of Laser-Compton Spot Size Monitor, KEK Preprint 92-65 (1992). <https://lss.fnal.gov/archive/other/kek-preprint-92-65.pdf>。



笔记 关于 Shintake monitor 的更多讨论，可参考 T. Shintake, Laser interference methods, Handbook §7.4.3.8。

17.4.2 发射度

束团发射度同时包含在位置坐标与速度(或散角)坐标信息，即相空间信息(非实空间)，可通过测量束矩阵(beam matrix) Σ 后，再利用 rms 束宽和 Courant-Snyder 参数，反推得到其发射度。同步辐射束流截面探测器通常用于电子束。近年来，束团横向尺寸越来越小，激光(比如，激光丝扫描仪)可被用于测量电子束在 $\text{sub-}\mu\text{m}$ 范围内的尺寸。对质子和离子来说，几乎不产生同步辐射，其发射度可通过上述的丝扫描仪或电离截面探

测器测量其光束轮廓(束流截面)而进行测量。

一般来说，发射度测量对象分两类，一类是测单次经过加速器(如：直线加速器)的束团发射度，为直接测量。另一类则是测储存环加速器在同步辐射阻尼与量子激发效应达平衡时的发射度，为导出量，通过测其它物理量之后推导得到。

考虑单次经过加速器，有三种方法：狭缝法、变聚焦强度法、三截面法。

狭缝法 又称(单)狭缝扫描法 (slit-scan method)。狭缝扫描法是一种直接测量发射度的方法，能直接测量束团在相空间占据的面积。测量原理图 17.20 给出。以水平 x 方向为例，当光阑 A 狹缝很窄(narrow) 时，可认为只有横坐标为 x_i 的粒子才能通过狭缝；当光阑 A 很薄(thin) 时，可认为在位置 x_i 的所有散角 x'_i 的粒子都能通过狭缝。散角漂移一段距离后，将转化成坐标位置偏差，假设下游多丝靶测量到距离中心的范围分别是 a_i 和 $-b_i$ ，可反推在狭缝坐标 x_i 处束团的散角 x'_i 为

$$-\frac{b_i}{\ell} \leq x'_i \leq \frac{a_i}{\ell} \quad (17.27)$$

其中， ℓ 为狭缝与多丝靶的距离。因此，我们测到了束团相空间分布在 x_i 附近的局部相空间。对整个束团横向相空间，让狭缝沿 x 轴扫过束团横截面，并测量出不同束团 x 位置的散角边界，便可得到束团发射度的边界形状，从而反推束团整体发射度。如果在光阑上沿 x 轴有多条平行等间距的狭缝排列，则可一次获取截面探头上从不同狭缝通过的粒子束的散角，称多狭缝扫描测量方法 (multislit-scan method)。

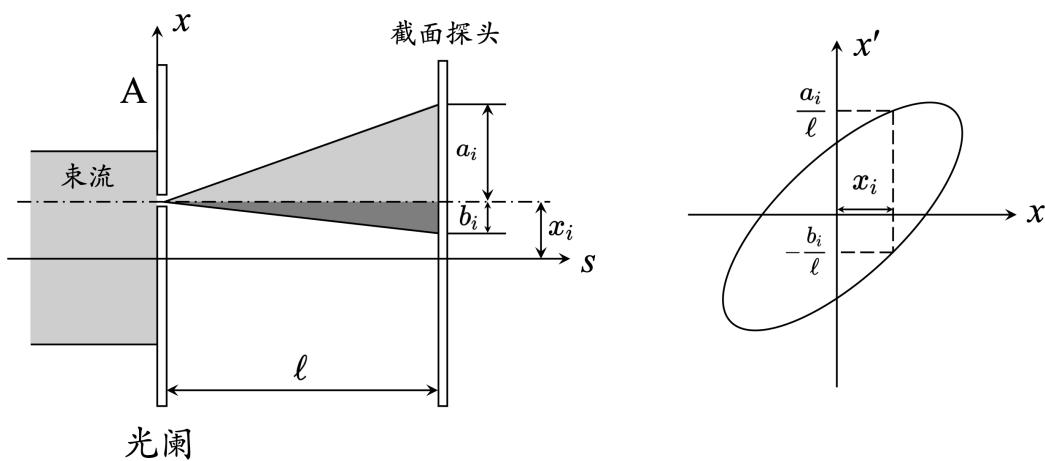


图 17.20: 狹缝扫描法。

笔记 如果将多狭缝的每一个狭缝用等间距的小孔替换，则称为胡椒瓶法(pepper-pot method)。

上述的直接测量方法通常只能用于中低能量的束团发射度测量，因为在高能量情况下，粒子轰击在狭缝上会产生次级粒子，造成测量误差。可以采用以下将介绍的间接测

量方法。

变聚焦强度法 又称四极铁扫描法 (quadrupole scan method) 或单线测量 (single wire measurement)。参考图 17.21，将利用扫描上游的四极铁强度，测量下游截面探测器的束团横向尺寸，反推束团发射度。首先，束团横向分布可以用 §7.5 介绍的 Σ 矩阵来描述，有

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xx'} \\ \sigma_{xx'} & \sigma_{x'}^2 \end{pmatrix} \quad (17.28)$$

其中，几何束团发射度为其行列式值，有 $\epsilon_x = \sqrt{\det \Sigma} = \sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22} - \Sigma_{12}^2}$ 。

图 17.21 中的 A 位置与 B 位置处的束矩阵按如下方式传输

$$\Sigma_B = \mathbf{M}(A \rightarrow B)\Sigma_A\mathbf{M}^T(A \rightarrow B) \quad (17.29)$$

其中， $\mathbf{M}(A \rightarrow B)$ 为线性传输矩阵。假设 A,B 间为真空漂移段，距离 L，则在 B 处的横向尺寸有

$$\sigma_x^2(B) = \Sigma_{B,11} = \Sigma_{A,11} \left(1 + \frac{\Sigma_{A,12}L}{\Sigma_{A,11}} - \frac{L}{f} \right)^2 + \frac{\epsilon_x^2}{\Sigma_{A,11}}L^2 \quad (17.30)$$

其中， $f = 1/K_1\ell$ 为四极铁焦距，与聚焦梯度 K_1 及四极铁长度有关 (参考 §7.1)。上式有三个变量 $\Sigma_{A,11}, \Sigma_{A,12} = \Sigma_{A,21}, \Sigma_{A,22}$ ，因此，通过扫描至少三个不同四极铁强度，可以决定 A 位置的束矩阵，从而反推得到束团发射度 ϵ_x 。

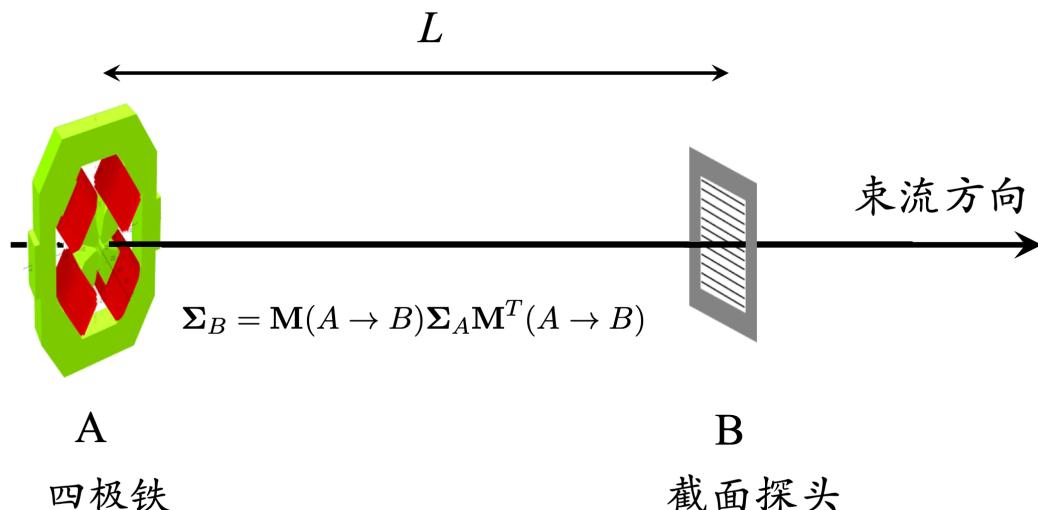


图 17.21：变聚焦强度法或四极铁扫描法。



笔记 变聚焦强度法方案中，中间通常为漂移段，但不限于漂移段。

三截面法 又称移动屏幕法 (moving screen method) 或多线测量 (multiple wire measurement)。三点截面法没有四极铁，而是采用三个截面探头，分别位于同一个直线漂移段中

的 A, B, C 三个位置，参考图 17.22。将束团在 A 位置的束矩阵写成 Σ_A ，则束团在 B 和 C 位置的 rms 宽度可以用 A 处的 Σ_A 矩阵元表示，有

$$\begin{aligned}\Sigma_{B,11} &= \Sigma_{A,11} + 2L_1\Sigma_{A,12} + L_1^2\Sigma_{A,22} \\ \Sigma_{C,11} &= \Sigma_{A,11} + 2(L_1 + L_2)\Sigma_{A,12} + (L_1 + L_2)^2\Sigma_{A,22}\end{aligned}\quad (17.31)$$

其中， $L_{1,2}$ 为 AB 与 BC 间的距离。上面方程中，下标 11 的量已由截面探头测得。求解上述联立方程组，可得 $\Sigma_{A,12}$ 与 $\Sigma_{A,22}$ 。由于 $\Sigma_{A,11}$ 已经得到，因此可反推得到 A 位置的束团发射度。

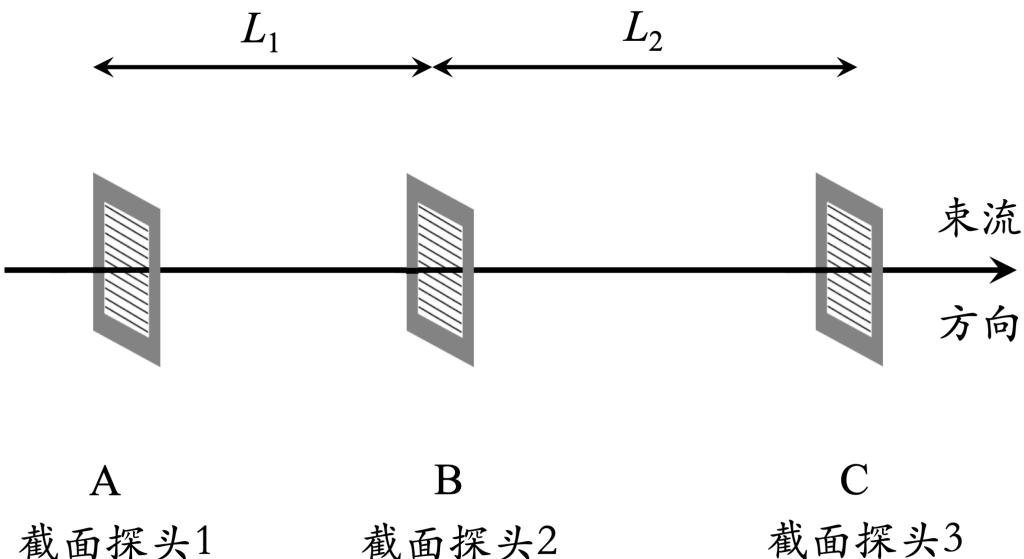


图 17.22: 三截面法或移动屏幕法。

练习 17.2 通过适当调整屏幕位置，可以证明，只需要两个截面探头就能测得束团发射度。 ■

解 将第二个截面探头放在束团束腰处，即在 B 处 $d\Sigma_{B,11}/ds|_{s=B} = 0$ ，则不需要第三个截面探头，在 A 处的束团发射度有 $\epsilon_x^2 = (\Sigma_{A,11}\Sigma_{B,11} - \Sigma_{B,11}^2)/L_1^2$ 。 ■

以上介绍的三种测量束团发射度的方案原则上为单次经过测量方法。对储存环，束团发射度 ϵ_x 为导出量，可由测量点处的束团尺寸和 betatron 函数反推得到，即

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x^2}{\beta_x} \quad (17.32)$$

如果测量点处的色散函数不为零，将需考虑束团能散对横向束团尺寸的影响，有

$$\epsilon_x = \frac{1}{\beta_x} [\sigma_x^2 - (D_x\sigma_\delta)^2] \quad (17.33)$$

其中， D_x 为测量点处的色散。

测量束团横向发射度大致可以分为两类，总结如下：

- 胡椒瓶 (pepper pot) 或狭缝法 (multi-slit mask) \Rightarrow 单发，测得的是离散的子束团，需

要理论模型重建或反推完整的束团相空间分布，无法得知束晕 (beam halo) 分布。

- 层析 (tomographic) 成像 \Rightarrow 多发，能得到完整的束团相空间分布，但测量过程慢，且只能得到多发平均的结果，可以观测到束晕。



笔记 目前几种常见的束团发射度量测方案，如：胡椒瓶法或是利用四极铁或螺线管的焦点扫描法，大概只能达到归一化发射度 0.1 mm-mrad 的分辨率。如果要进一步提高分辨率，可考虑基于两道交错干涉的激光束 (interfering laser beams)，形成类似激光光栅的结构。当束团经过时，交错激光束的非均匀性导致的有质力 (ponderomotive force) 对电子束的横向相空间产生调制，从而能够对束腰 (beam waist) 与发射度进行单发 (single-shot) 量测，此种方案的分辨率能够提高一个数量级，达到归一化发射度 0.01 至 0.1 mm-mrad 范围。

以上测量方案假设束团的 Courant-Snyder 参数与磁聚焦结构 Courant-Snyder 参数匹配。第 7 章介绍发射度时曾提到，发射度可以视为束团的物理量 (beam emittance)，也可以视为磁聚焦结构的物理量 (lattice emittance)。当束团的 Courant-Snyder 参数与 lattice 的 Courant-Snyder 参数匹配时，束团发射度与 lattice 发射度可视为相等⁴。当束团的 Courant-Snyder 参数与 lattice 的 Courant-Snyder 参数不匹配或失配 (mismatched) 时，束团发射度将增加 (而不会减小)。更准确地说，束团的相空间分布将随着传输而逐渐成丝，最终趋近于由 lattice 初始设计时就确定的平衡发射度。此处两种发射度间的度量可以通过引入“失配参数”(mismatch parameter) B_{mag} 得到。

定义 17.1. 失配参数 B_{mag}

定义如下：

$$B_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{\left[\gamma \langle x^2 \rangle_0 + 2\alpha \langle xx' \rangle_0 + \beta \langle x'^2 \rangle_0 \right]}{\sqrt{\langle x^2 \rangle_0 \langle x'^2 \rangle_0 - \langle xx' \rangle_0^2}} \quad (17.34)$$

其中， β, α, γ 为平衡时 (lattice) 的 Courant-Snyder 参数。另一种等价形式有

$$B_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} + \alpha^2 \frac{\hat{\beta}}{\beta} - 2\alpha \hat{\alpha} + \beta \hat{\gamma} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} + \frac{\beta}{\hat{\beta}} \right) + \beta \hat{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \right)^2 \right] \quad (17.35)$$

其中， $\hat{\beta}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}$ 为失配的 Courant-Snyder 参数， β, α, γ 为 lattice 的 Courant-Snyder 参数。

对周期性磁聚焦结构，束团经过传输后的发射度 ϵ_f 与初始发射度 $\epsilon_i = \sqrt{\langle x^2 \rangle_0 \langle x'^2 \rangle_0 - \langle xx' \rangle_0^2}$ 的比值可写成

$$\frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} = B_{\text{mag}} + \sqrt{B_{\text{mag}}^2 - 1} \cos(2\psi - \varphi) \quad (17.36)$$

⁴这里忽略发射度统计定义采用不同惯例间的差异。

其中， ψ 为 betatron 相位超前， φ 为一常数相位，有 $\tan \varphi = \frac{2b}{a-c}$ ，其中

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\beta}}{\beta} \\ \alpha \frac{\hat{\beta}}{\beta} - \hat{\alpha} \\ \alpha^2 \frac{\hat{\beta}}{\beta} - 2\alpha \hat{\alpha} + \beta \hat{\gamma} \end{pmatrix} \quad (17.37)$$

由上可以看到，失配发射度随传输过程将振荡，振荡比值的“振幅”为 $\sqrt{B_{\text{mag}}^2 - 1}$ ，振荡比值的“频率”对应两倍 betatron 相位超前。当传输足够久而成丝时，有 $\epsilon_f = B_{\text{mag}} \epsilon_i$ 。

证明 可参考 Minty and Zimmermann 一书的 §4.1.4 或 V. Ziemann 一书的 §8.2.2。 □

17.4.3 束长

由于不同类型加速器，其束长差异可能遍及数个数量级，因此，束长测量方案也五花八门，各不相同，参考图 17.23。对越短的束长，给实时束长测量带来巨大挑战。前面 §14.3.5 已经介绍过关于飞秒量级电子束脉冲的测量方案，可通过微波电子学的偏转腔或基于激光激发亚波长结构的光学方法。此处介绍其它几种方法，有宽带束流探头、光电管、条纹相机法、光学自相关法等。

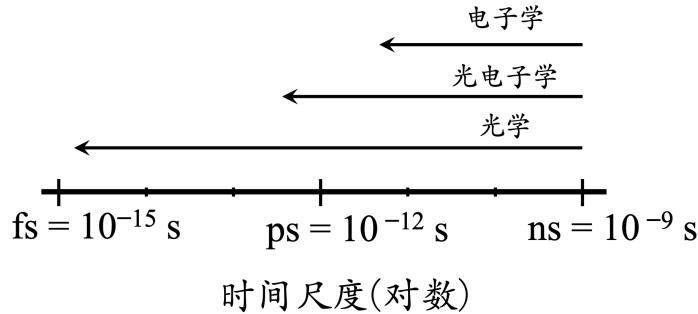


图 17.23：根据束长的不同数量级差异，测量方案可能采用电子学或光学。

宽带束流探头 比如：壁电流探测器 (wall current monitor, WCM)，可用来测量束长大于几百 ps 的情况。束团的脉冲波形可以直接送采样示波器进行测量。此方案的缺点为，由于信号传输电缆的色散，脉冲将展宽，无法用此方案测量更短的束团。

光电管 参考图 17.24，采用光电倍增管 (photomultiplier tube, PMT)，将电子束发出的同步辐射光脉冲信号转换为电脉冲信号。然后，由采样示波器测量电脉冲信号长度。PMT 的转换时间一般从几十 ps 到几百 ps 不等，采样示波器的上升时间可达到小于 20ps。因此，用此种方法得到的实际束团长度 σ_z 可估算为

$$\sigma_z \approx \sqrt{\sigma_{\text{示波器测到的束长}}^2 - t_{\text{示波器上升时间}}^2} \quad (17.38)$$

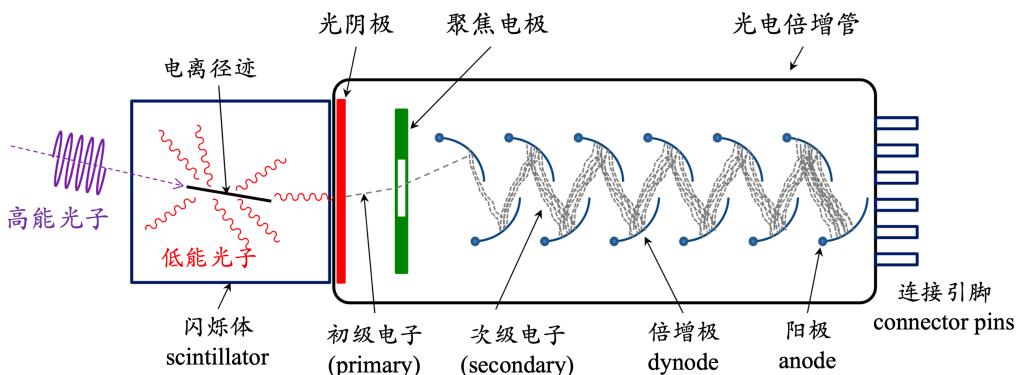


图 17.24: 光电倍增管。图例修改自 wikipedia。

条纹相机法 条纹相机 (streak camera, SC) 是一种电光探测器，用于在 ps 时间尺度上测量辐射光脉冲的时间分布。在加速器应用中，通常用于测量由电子发出的中心波长在可见光或近可见波长辐射脉冲时对应的电子束长。辐射形式包括不限于同步辐射，可以是边缘辐射 (edge radiation)、波荡器辐射、契伦科夫辐射、渡越辐射等。条纹相机法还用于测量光束脉冲间的相对时间。

图 17.25 显示条纹相机法原理图。来自电子束的辐射光脉冲通过入射狭缝后，聚焦并入射到光阴极，产生光电子。这里假设光电子以与前面入射的辐射光脉冲相同的时间分布发射出来，并尽快加速，通常是通过直流电压。光电子穿过时间依赖的垂直偏转 — 称条纹电压，将偏转电子脉冲的头部和尾部粒子，然后漂移到下游成像屏幕上。通常是一个多通道板 (multichannel plate, MCP) 跟随一个荧光屏。磷光屏图像被 CCD 相机捕捉并进行数字处理。总而言之，条纹相机方法可将强度在时间上变化的入射辐射光信号转换成空间荧光屏上不同亮度分布的图像信号，这样就将光脉冲长度的测量问题变成对空间尺寸的测量问题。

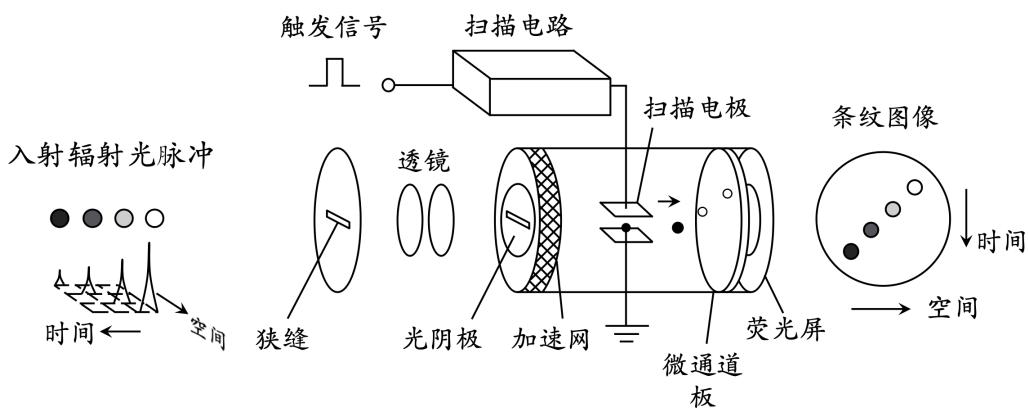


图 17.25: 条纹相机法原理图。



笔记 条纹相机的时间分辨率可达到几个 ps。

光学自相关法 当束长更短，在 sub-ps 量级时，用光电器件已几乎无法直接测量。图 17.26 为基于光学自相关技术的 sub-ps 束长测量装置，通过迈克耳孙干涉仪对波长等于和大于电子束团长度的相干跃迁辐射光的测量，得到了 50 fs rms 的测量结果。当电子束以 45° 穿过一铝膜后，产生远红外相干渡越辐射 (transition radiation)，通过高密度的聚乙烯窗引出管道后，经过抛物面反射镜将发散的渡越辐射光汇聚成平行光后，入射到迈克耳孙干涉仪 (Michelson interferometer, MI)。MI 包含一透射系数为 50% 的分束器 (beam splitter)、一固定反射镜、一活动平面反射镜，以及在室温下工作的热电型热辐射计。改变活动反射镜的位置，即改变干涉仪两臂的光程差，可得到不同的光信号延迟。由热辐射计测得的自相关信号中即包含了束长信息。对于纵向为高斯分布的束团，热辐射计输出信号中主峰的 FWHM 宽度与均方根束长 σ_z 有

$$\sigma_z \approx 1.5 \frac{\text{FWHM} [\text{m}]}{\sqrt{2\pi}} \quad (17.39)$$

其中， c 为真空中光速。

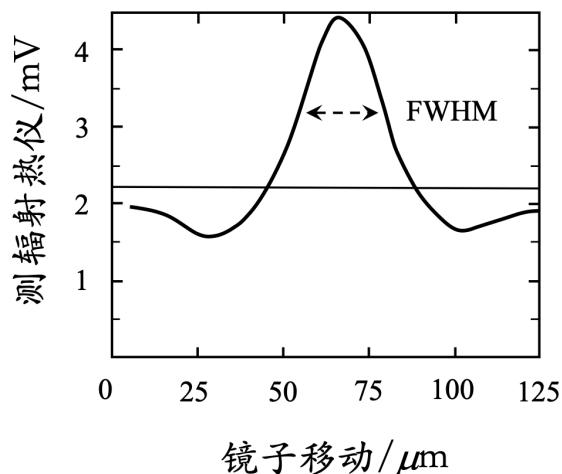
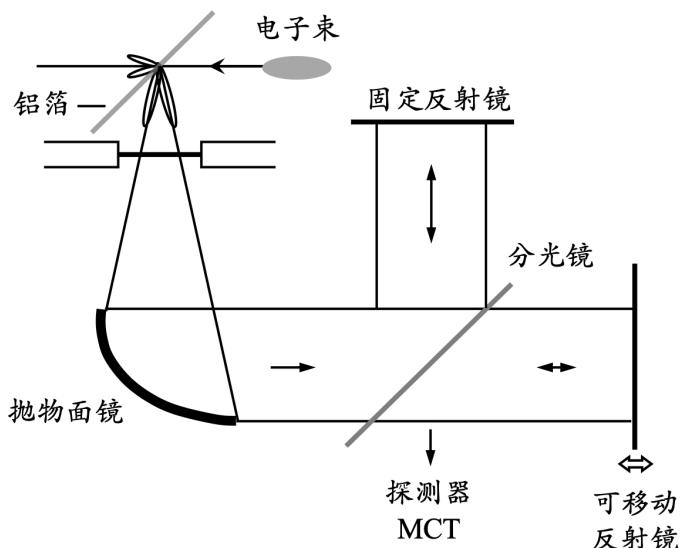


图 17.26：基于光学自相关法的迈克耳孙干涉仪及其束长测量结果。

17.4.4 能散

一个思路与上述介绍的测量储存环横向束团横向尺寸类似，通过降低高频加速电压 V_{RF} ，使当量子寿命 $\tau_z^{(q)}$ 占主导地位时，通过测量束团的寿命来反推能散 σ_E ，即

$$\tau_q = \frac{1}{2} \tau_\epsilon \frac{e^\xi}{\xi} \quad (17.40)$$

其中， $\xi = \epsilon_{\max}^2 / 2\sigma_E^2$ ， τ_ϵ 为纵向阻尼时间。这里的能量孔径 ϵ_{\max}^2 由下式决定

$$\left(\frac{\epsilon_{\max}}{E_0} \right)^2 = \frac{U_0}{\pi |\eta| h E_0} F(q) \quad (17.41)$$

其中， $F(q) = 2 \left(\sqrt{q^2 - 1} - \cos^{-1} \frac{1}{q} \right)$ ， $q = \hat{V}_{\text{RF}} / U_0$ ， U_0 为每圈同步辐射损失能量， η 为滑相因子。

另一种思路为将丝扫描仪置于色散段，当束团经过色散段时，束团内粒子能量差异转换到横向维度，假设在屏幕上显示 σ_w 。扣除束团由于 betatron 振荡贡献的横向尺寸 $\sigma_\beta = \sqrt{\epsilon_x \beta_x}$ ，则有

$$\sigma_\delta = \sqrt{\sigma_w^2 - \sigma_\beta^2} \quad (17.42)$$

17.5 其它物理量

17.5.1 横向 betatron 振荡频率

横向 betatron 振荡频率 ω_β 或 betatron tune ν_β 表示粒子沿储存环绕行一周所做的自由振荡的次数，通常为大于 1 的非整数，包含整数部分与小数部分，即 $\nu_\beta = N + \iota$ ，其中 N 为整数部分， ι 为小数部分。整数部分可以通过对闭轨 (COD) 测量得到。一般来说，所谓 ν_β 的测量主要是测小数部分，即 ι 。当束团作 betatron 振荡时， ν_β 的小数部分使得束团每次通过储存环中某一固定位置处的探测器时，其横向位置是不同的。由于探测器每圈只能采样一次，在探测器看来，测到的束团横向位置信号频率为

$$\omega_n = \omega_0(n \pm \nu_\beta) = \omega_0(n' \pm \iota) \quad (17.43)$$

其中， $n' = n + N$ 。由图 17.27 或图 17.4 可以看到，束团的连续振荡信号经采样后，在频域上为周期 ω_0 的离散重复信号。在每一周期内，信号频谱相对于 $\omega_0/2$ 是对称的，此对称频率即前面介绍的 Nyquist 频率。由于束流脉冲信号有一定的宽度，并非理想采样信号，且信号传输电缆也有一定带宽。因此，实际测量到的探头感应信号的各次谐波分量并不是在无限宽的频域范围内都是等幅值的。

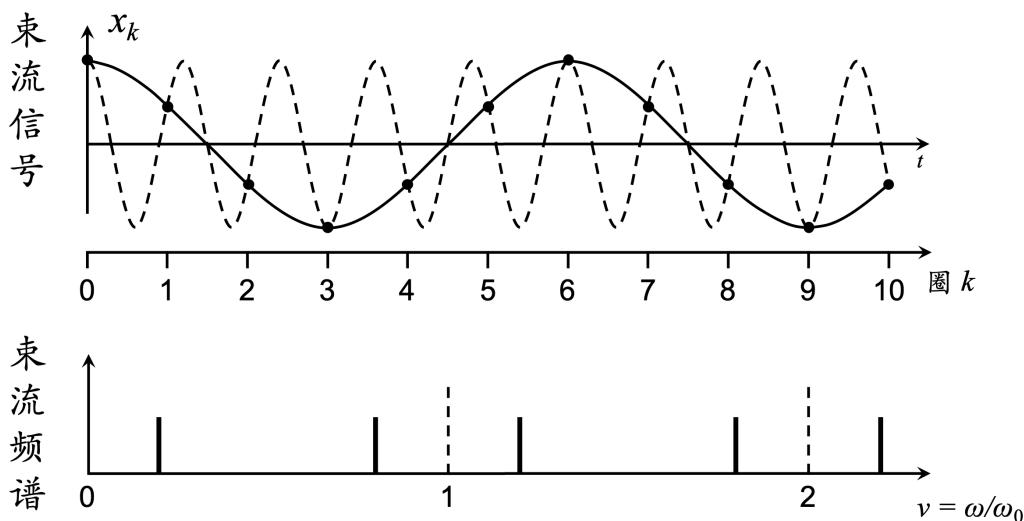


图 17.27: 利用 BPM 测到的包含横向 betatron 振荡的频谱。

17.5.2 纵向同步振荡频率

类似于测量横向 betatron 振荡频率，纵向同步振荡频率也可通过类似方式从 BPM 测到的包含纵向同步振荡的频谱得到，参考图 17.5。

17.5.3 动量紧缩因子

当一储存环的纵向同步振荡频率标定之后，可用下式

$$\nu_s = \frac{\omega_s}{\omega_0} = \sqrt{-\frac{qh\hat{V}_{RF}\eta \cos \phi_s}{2\pi\beta^2 E_0}} \quad (17.44)$$

通过改变射频腔压 (同时考虑 ϕ_s)，记录对应的纵向同步振荡频率，反推动量紧缩因子 $\alpha_c = \eta + \gamma^{-2}$ 。但是，当储存环包含多个射频谐振腔时，射频腔压未必能准确标定，因此，此思路未必能给出准确的动量紧缩因子。

17.5.4 束流损失

束流损失探头 (beam loss monitor, BLM) 要定性测量出在一定时间间隔内束团中损失的粒子数，而且要测量出造成损失发生在加速器中的位置。束流损失探头通常是探测损失的粒子与真空管道相互作用后产生的辐射剂量。探头的输出信号应该正比于损失的粒子数，同时与其它一些因素有关，比如：探头位置、损失粒子的类型、与其相互作用的材料、损失粒子的能量等。BLM 大致可分三类：电离室型、闪烁体 - 光电管型、PIN 光二极管型。

17.5.5 Courant-Snyder 函数

思路是将利用 §7.9 介绍的四极铁误差场导致的频移反推得到。现在让“误差场”变成故意为之的调变场量。改变某块四极铁的磁场强度，使其有一个增量 ΔK 时，束团在储存环的 betatron tune 也会有一个变化 $\Delta\nu_\beta$ ，其的大小与该四极铁处的 β 函数有关，可写成

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^C \beta(s) \Delta K ds \approx \pm \frac{1}{4\pi} \bar{\beta} \Delta K \ell \quad (17.45)$$

其中， $\bar{\beta}$ 为在该四极铁位置的 beta 函数， ℓ 为四极铁有效长度。由于 ΔK 正比于四极铁激励电流的变化量， ΔI ，因此有 $\Delta K = K \cdot \Delta I / I$ 于是

$$\bar{\beta} = \pm \frac{4\pi\Delta\nu}{K\ell} \frac{I}{\Delta I} \quad (17.46)$$



笔记 在对撞机中，一般有低 β 插入节 (low- β insertion)，目的使对撞点处的 beta 函数 β^* 尽可能小。由于 β^* 对对撞亮度影响极大，因此必须进行准确测量。 β^* 可通过先测量距对撞点最近的四极铁位置的 β 函数，然后利用如下关系

$$\beta(s_0) = \beta^* \left[1 + \left(\frac{s_0}{\beta^*} \right)^2 \right] \quad (17.47)$$

推算得到在对撞点位置的 beta 函数，其中， s_0 为四极铁位置与对撞点的距离。参考图 17.28。

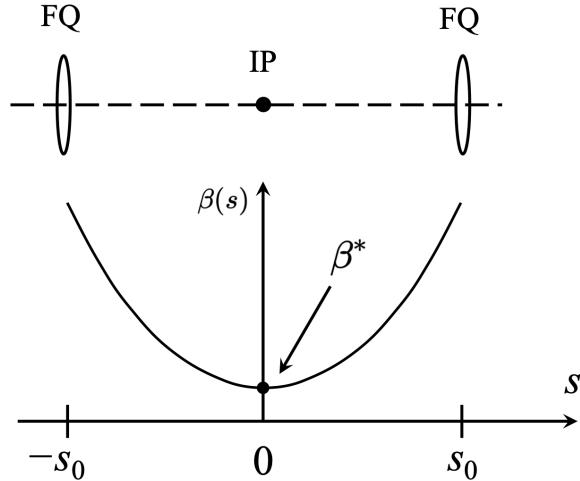


图 17.28: 对撞机对撞点附近的四极铁位置与 β 函数的大致样貌。

17.5.6 色散函数

由 §8.1 介绍的

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{\Delta C}{C_0} + \frac{\Delta v}{v_0} = -\left(\alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\Delta p}{p_0} \quad (17.48)$$

有

$$\delta = -\frac{1}{\alpha_c - 1/\gamma^2} \frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{1}{\alpha_c - 1/\gamma^2} \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} \approx -\frac{1}{\alpha_c} \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} \quad (17.49)$$

结合 $\Delta x(s) = D(s)\delta$, 有⁵

$$D(s) = \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha_c\right) \frac{\Delta x(s)}{\Delta f_{RF}/f_{RF}} \quad (17.50)$$

基本思路可总结为通过微幅调变射频频率, 测量束团由于能量偏差导致的横向轨迹改变的贡献, 由此反推色散函数 $D(s)$ 。



笔记 以上为测量线性色散或一阶色散。类似思路也可应用于高阶色散函数的测量

$$\begin{aligned} \Delta x(s) &= R_{16}(s)\delta + T_{166}(s)\delta^2 + U_{1666}(s)\delta^3 \\ \Delta x'(s) &= R_{26}(s)\delta + T_{266}(s)\delta^2 + U_{2666}(s)\delta^3 \end{aligned} \quad (17.51)$$

细节此处不论。

17.5.7 色品函数

由 §7.10 介绍的色品函数定义 $\xi \equiv \Delta\nu/\delta$ 知, 配合 §8.1 介绍的

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{\Delta C}{C_0} + \frac{\Delta v}{v_0} = -\left(\alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\Delta p}{p_0} \quad (17.52)$$

有

$$\xi = \frac{\Delta\nu}{\Delta p/p_0} = -\left(\alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\Delta\nu}{\Delta f/f_0} = -\left(\alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\Delta\nu}{\Delta f_{RF}/f_{RF}} \quad (17.53)$$

⁵留意, 这里的测量已排除闭轨 x_{COD} 与 betatron 振荡轨迹 x_β 贡献。

图 17.29 为 LEP 储存环的色品函数测量结果。

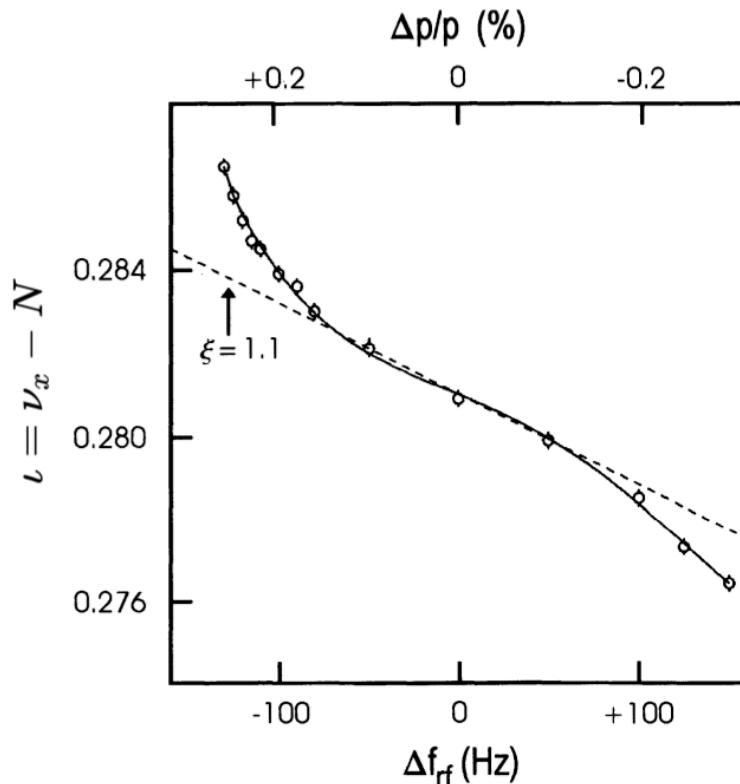


图 17.29: LEP 储存环的色品函数测量。图例取自 Minty and Zimmermann 一书。

对于电子储存环来说，动量偏差 $\Delta p/p$ 还可写为⁶

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{\alpha_c} \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta B}{B} = -\frac{1}{\alpha_c} \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} + \frac{\Delta B}{B} \quad (17.54)$$

可以通过改变储存环主弯转磁铁的场强，保持射频频率不变，得到自然色品或未校正色品。可以通过改变储存环射频频率，保持储存环主弯转磁铁的场强不变，得到校正色品。

17.5.8 动力学孔径

关于动力学孔径 (dynamic aperture, DA) 的测量，可在储存环运行过程中通过“踢”(kick)一下束团，改变不同振幅，观察粒子损失反推动力学孔径。给束团的 kick 可以通过短脉冲激励或共振驱动实现。如果储存环采用离轴注入方案，则可以通过直接改变入射束团相对于已经在环中绕行的储存束团的位置估计动力学孔径。

此外，通过改变射频频率也可以测量具有动量偏差时的动力学孔径。但此种方案不容易区分粒子轨迹受动力学孔径效应或实际物理孔径 (physical aperture) 效应的影响。使用可调整的准直器 (collimator) 用来测量动力学孔径或许还可以提供更多其它信息，细节此处不论。

⁶ 此处应区分动量差与能量差的区别，对能量差，有 $\Delta E/E = \Delta B/B$ 。

17.5.9 阻抗函数

除了通过理论与数值模拟得到加速器部件的阻抗函数，工程实际上对真实部件的阻抗量测也同样重要。阻抗量测分两类：台架测量或实验室测量 (bench measurement) 和机器测量或现场测量 (machine measurement)，两种方式互补长短：

- 台架测量 \Rightarrow 在测试实验室中，通过施加外部电磁激励 (而非带电粒子束)，对阻抗部件进行模拟真实的测量。由于是在受控的环境中进行，可以更精确地测量各个参数。
- 机器测量 \Rightarrow 在现有的加速器或储存环中，对应真实情况的测量。

此外，有些加速器实验室有尾场阻抗的测试设备，一般由小型直线加速器组成，可以产生明确参数的带电粒子束，使穿过待测试的部件，直接测量其对粒子束的影响，从而反推阻抗函数。

台架测量 部件阻抗或尾场特性的测量可在频域或时域进行，方法是通过耦合天线施加射频激励信号，或通过发送短脉冲信号，通常是在部件结构的中心位置的导线上发送短脉冲。第一种方法主要用于测量空腔或类似空腔结构的高阶模 (high order modes, HOM)。常见的台架测量方式包含：

- 微扰法 \Rightarrow 通过“调谐”(detuning)，特别针对谐振腔结构高阶模量测，通过局部塞入微扰元件，微幅调变频率，看响应。此方法相对成熟，称 bead-pull measurement。对微扰法台架测量感兴趣的读者，可参考 E. Ginzton, Microwave Measurements, McGraw-Hill (1957)。
- 同轴线法 \Rightarrow 适合用来测量结构部件的宽带阻抗或损耗因子 (loss factor) κ_{\parallel} 。对待测结构通过发送短脉冲信号，记录响应。与已标定的参考结构部件，通常为同轴传输线，发送同样的短脉冲，记录响应并相比较，通过其差别反推损耗因子。对应的宽带阻抗可以通过记录并比较 S 参数得到。此方法同样相对成熟，称 bead-pull measurement。F. Caspers, Beam Impedance Measurement by the Wire Method Using a Synthetic Pulse Technique, IEEE Trans. Nucl. Sci. **32**, 1914 (1985). <https://doi.org/10.1109/TNS.1985.4333765>。

机器测量 一旦在加速器或储存环中安装了部件结构，其对束团的影响原则上可通过测量适当的束团参数而获得。主要困难在于加速器装置中还有大量其它部件也将影响束团参数，因此有时要区分感兴趣的部件造成的影响未必容易。此外，测量中的一些参数可能已经达到特定机器上束测设备灵敏度的上限。对完整的阻抗函数或短程尾场函数，一般能在加速器运行一段时间后在实验上被更全面地了解。对窄带阻抗或长程尾场函数，对环境温度、气压或结构准直等特定工作条件相对较敏感，因此这些量容易会随时间变化，一般只能测量到它们的平均行为。

- 纵向阻抗测量 \Rightarrow 通过对束团损耗因子 κ_{\parallel} 测量，反推纵向阻抗函数。或通过测量不

稳定性阈值，结合理论模型，反推纵向阻抗函数。也有通过扫描不同束团电流，测量频移，反推纵向阻抗函数。

- 横向阻抗测量 \Rightarrow 可利用 Panofksy-Wenzel 定理，从不同横向位置偏差的纵向阻抗测量结果反推横向阻抗。控制束团横向偏移的方式可采用一组磁铁产生 bump，或是利用横向电场踢一下。然后，通过扫描不同束团电流，测量对应频移，反推横向阻抗函数 $Z_{\perp} \propto \Delta\omega_{\beta}/\Delta I_b$ 。

转移函数法 如上所述，机器测量思路的困难在于加速器装置中包含大量其它部件会同时影响束团，因此要区分感兴趣的部件贡献的阻抗未必容易。但是，如果思路一转，如果要测加速器装置整体的阻抗函数，那么“机器测量”就是最天然、直接的方案。测量装置整体阻抗的方法的思路为基于“转移函数”法 (transfer function method)。注意，这里的束转移函数 (beam transfer function, BTF) \neq 传输矩阵 (transfer matrix)。



笔记 转移函数又称响应函数 (response function)。这里转移函数的概念与控制理论中的转移函数概念一致。

转移函数法可用来测量横向与纵向阻抗，对横向阻抗函数的测量尤其方便。基本思路为给一参数已知的束团 (作为“系统”的一部分)，给予此束团一已知参数的扰动 (作为输入信号)，使其在加速器中传输一段距离后，测束团中粒子的振荡相位与振幅 (作为输出信号)。这里的输入信号可以是时间上连续分布形式的单频信号，也可以是时间上短脉冲形式的多频信号。对应在控制理论中，输出信号则是输入信号对粒子束与加速器环境总体“系统”的响应 (response)。

以横向阻抗测量为例。在没有尾场、阻抗等集体效应情况下，束团粒子仅有纯光学 betatron 振荡，其振荡频率为 ω_{β} ，

$$\ddot{y}(t) + \omega_{\beta}^2 y(t) = \hat{G} e^{-i\omega t} \quad (17.55)$$

其中，粒子振荡由磁聚焦结构传输段的四极磁场驱动⁷。将驱动源写为 $G = \hat{G} \exp(-i\omega t)$ ，其中， \hat{G}, ω 与四极铁场强有关。留意，这里的 ω 应视为固定值，而 ω_{β} 随束团中的不同粒子， ω_{β} 可能有些差异，不妨视为变量。将通解写成 $y(t) \propto \exp(-i\omega t)$ ，表征粒子受驱动源而有 (相干) 振荡，输出信号体现在粒子的横向振荡，有

$$y(\omega) = \operatorname{Re} [\hat{y} e^{-i\omega t}] = \hat{y} e^{-i\omega t} = \frac{\hat{G} e^{-i\omega t}}{\omega_{\beta}^2 - \omega^2} \quad (17.56)$$

再次提醒，这里的 ω 为驱动源的频率。束团中的每个粒子的 betatron 振荡频率不尽相同，假设振荡频率形成归一化分布函数 $f(\omega_{\beta})$ ，满足 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega_{\beta}) d\omega_{\beta} = 1$ 。因此，束团整体的

⁷这里等式右边应写为 $\operatorname{Re} G$ ，以下略去 Re ，默认取实部。

横向偏差为

$$\begin{aligned}\langle y(\omega) \rangle &\approx \frac{G}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega_\beta)}{\omega_\beta - \omega} d\omega_\beta \\ &\approx \frac{G}{2\omega_\beta} \left[i\pi f(\omega) + \text{P.V.} \int \frac{f(\omega_\beta)}{\omega_\beta - \omega} d\omega_\beta \right]\end{aligned}\quad (17.57)$$

其中，第二个等式用到了留数定理。这里的 $\omega \rightarrow \omega_\beta$ 假设束团内不同粒子的不同振荡频率分布的带宽 (bandwidth) 很窄。简化起见，这里仅考虑 $\omega_\beta = \omega$ 一极点。对另一极点 $\omega_\beta = -\omega$ 的分析一样。以下即将讨论的转移函数或响应函数定义如下：

定义 17.2. 转移函数、响应函数

定义为

$$\text{BTF} \equiv \mathcal{R}(\omega) \equiv S \left[i\pi f(\omega_\beta) + \text{P.V.} \int \frac{f(\omega_\beta)}{\omega_\beta - \omega} d\omega_\beta \right] \quad (17.58)$$

其中， $S = \Delta\omega_\beta$ 为振荡频率分布的带宽。转移函数随频率的关系可参考图 17.30。□

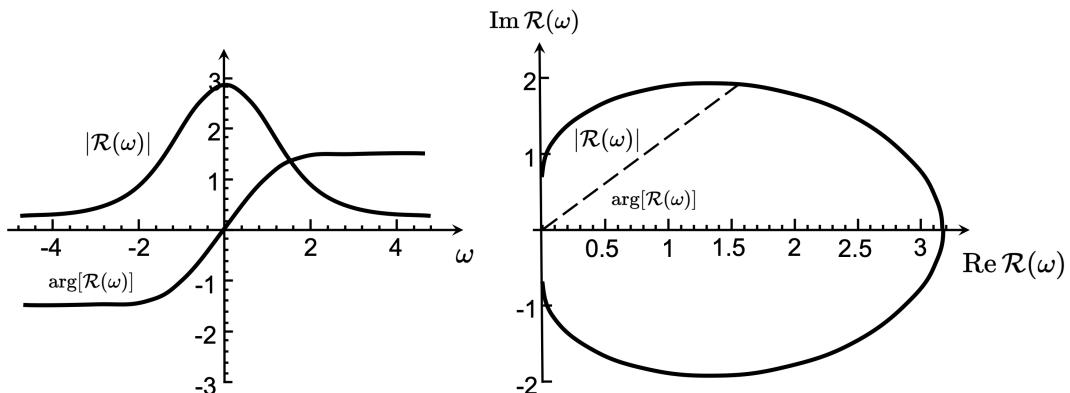


图 17.30：转移函数随频率的关系。这里假设束团振荡频率函数 $f(\omega_\beta)$ 为高斯分布，左图为转移函数振幅与相角对频率的关系，右图以极坐标呈现，当频率改变时扫描的封闭轨迹。图例修改自 Zotter and Kheifets 一书。

以上不考虑尾场、阻抗等集体效应，其中， G 为外部驱动束团振荡的“源”。当考虑束团被自己产生的场驱动时， G 除了外部驱动源外，还有尾场、阻抗。于是，转移函数法的思路即是通过测响应函数 \mathcal{R} ，通过从已知束团的频散分布 $f(\omega_\beta)$ ，反推藏在 G 中的阻抗函数。一般来说，实验量测到的量为转移函数，但分析时更常用到的是其倒数，以稳定边界图谱 (stability boundary diagram 或 stability diagram) 呈现。

定义 17.3. 稳定边界图谱

定义为

$$\mathcal{D}(\omega) \equiv \frac{1}{\mathcal{R}(\omega)} \quad (17.59)$$

呈现的方式为一般画成 x 轴为 $\text{Re}[\mathcal{D}(\omega)]$ ， y 轴为 $\text{Im}[\mathcal{D}(\omega)]$ 。□

实际测量时，往往需要改变、扫描束团的不同电流值，同时改变、扫描不同的外部扰

动激励源频率，观察记录稳定边界图谱随不同电流时的改变。以上说明的是横向阻抗函数测量，对纵向阻抗函数，思路类似，只是粒子的振荡频率由 betatron 振荡改为同步振荡。



笔记 关于转移函数的更多讨论，可参考 Chao (1993) 一书的 §5.2。

17.5.10 电子束纵向分布

前面 §17.4.3 介绍束长测量时，重点关注束团的二阶矩（集总）特性。有些时候，除了束长，我们还希望更细致知道电子束的纵向分布。大致来说，测量纵向束团分布的思路为间接测其产生的相干辐射频谱。这里要求必须是相干辐射，并不是因为其辐射场较强，而是反推束团分布时要求束团内不同位置的相位互相关联。

基本原理为 §9.1 介绍的定理，总结如下。通过量测束团辐射频谱 $\frac{d^2\mathcal{W}}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{束团}}$ ，得到 $F(\omega)$ ，反推束团纵向分布函数 $\lambda(z)$ 。

定理 17.3. 束团辐射强度公式

已知束团形成因子 $F(\omega)$ 与单电子辐射强度（功率或能量），则

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathcal{W}}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{束团}} &= \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{单电子}} [N + N^2 F(\omega)] \\ &= \underbrace{\frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{单电子}} N}_{\text{非相干}} + \underbrace{\frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{单电子}} N^2 F(\omega)}_{\text{相干}} \quad (17.60) \\ &= \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{非相干}} + \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{相干}} \end{aligned}$$

其中， N 为束团内粒子个数，形成因子（form factor）有

$$F(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) e^{-i\omega z/c} \right|^2 \quad (17.61)$$

注 这里的 \mathcal{W} 可以是 P （辐射功率）或 U （辐射能量）。

随着亚皮秒电子束的可用性和广泛使用，观察这些电子束在太赫兹 (THz) 和红外波段 (infrared, IR) — 根据傅里叶变换，亚皮秒电子束信号大致对应的中心波长范围 — 产生的相干辐射成为了测量束长和纵向分布有力工具。采取频域的间接测量还有一个原因是这个波段内的时域测量存在困难且成本昂贵。这里的辐射频谱不限于特定机制，可利用多种辐射过程作为相干辐射源，有些方案为破坏性测量，有些则为非破坏性。常用的辐射方案有相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR)、相干渡越辐射 (coherent transition radiation, CTR) 和相干衍射辐射 (coherent diffraction radiation, CDR)。通过辐射频谱反推束团纵向分布的方案通常会结合其它方案对比，如射频偏转腔 (transverse deflecting system, TDS)，以给出更可靠的束团测量结果。图 17.31 为 European XFEL 基于此方案测量一例。

这一章简短介绍了加速器束测基础原理，从束团时频信号开始，接着针对束团的零

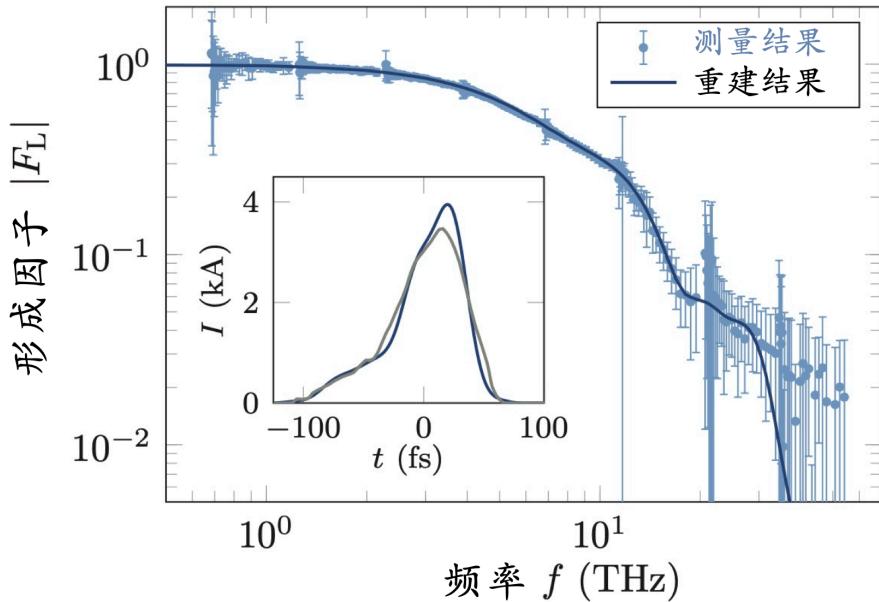


图 17.31: 形成因子 (form factor) 与束团纵向分布测量。蓝色曲线基于辐射频谱反推结果。灰色曲线为基于射频偏转腔 (TDS) 的测量后的反推结果。图例取自 Handbook §7.4.6.1。

阶矩参数、一阶矩参数、二阶矩参数，分别介绍了几种常见的束测方案。加速器束测与电子学 (electronics)、光电子学 (photonics) 等紧密结合，为货真价实的跨学科、多学科领域。事实上，完整的加速器装置的束测系统不仅被动地“测”而已，也积极、主动地与加速器工程中的反馈系统设计密切联系，从“测”到“校正”加速器中的参数，并“抑制”集体不稳定性。以下简短介绍粒子加速器的反馈系统。

17.6 加速器反馈系统

近代加速器为追求高亮度，越来越多地采用高流强、多束团运行方式。然而，在高流强、多束团运行模式下，集体效应不可避免地会展现，比如：耦合束团不稳定性 (coupled bunch instability, CBI)。耦合束团不稳定性的主要来源是高频腔的高次模 (higher order modes, HOM) 和电阻壁阻抗等驱动。一般来说，仅利用同步辐射阻尼仍不足以抑制这种不稳定性，因此，需要采用其它人为方法使束团在加速器中能稳定运行。

加速器反馈系统分两类：

- 逐模式束流反馈系统 (mode-by-mode) \Rightarrow 对已知的不稳定模式分别进行抑制。对流强低、总束团个数少的加速器，一般采用逐模式的反馈系统。
- 逐束团束流反馈系统 (bunch-by-bunch) \Rightarrow 将拾取到的每一个束团的振荡信号，经处理后，反馈作用到各个相应的束团。对大流强、总束团个数比较多的加速器，逐模式反馈系统会遇到很多增长模式 (模式数量最多对应于束团的个数)，且较难判断哪些模式是稳定的，哪些模式是不稳定的。因此，大流强、总束团个数比较多的加速器一般采用逐束团的束流反馈系统。

当束团在环形加速器中运动时，反馈系统提供给束团一个天然同步辐射阻尼以外的阻尼，是维持束团稳定运动的一个辅助手段。此反馈系统可抑制由于射频腔的高次模和真空管道电阻壁阻抗引起的耦合束团不稳定性，或抑制束团注入暂态过程中的瞬时大幅度振荡。此外，逐束团束流反馈系统还是进行机器研究和束流诊断、分析的重要手段。在进行束流诊断时，利用该系统可以方便地测量到束流振荡的增长时间或阻尼时间，并可以通过束流运动研究储存环的实时阻抗。

总结：第四部分

在第一部分电磁场理论 — 包含时变电磁场与电磁辐射 — 与第二部分单粒子动力学及第三部分多粒子集体动力学的基础上，第四部分我们选择性地介绍了三个专题，包含：相对低能量 (MeV 量级) 的超快电子束动力学 (第14章)，电子束在弯转过程的相对长波长、相干同步辐射场成分的特性 (第15章，主要为场动力学)，与其对电子束横向、纵向的影响。然后，针对短程尾场引起的单束团集体效应 — 高亮度电子微束团动力学 — 我们给出了几种分析思路，特别针对单次经过加速器与储存环 (第16章，主要为电子动力学)。此外，讨论了一种崭新的电子储存环作为产生高平均功率、相干辐射源的方案。最后一章则简短讨论了加速器束测的基本原理 (第17章)。

这里想强调的是，这些题材选择是非常局限的；加速器束流动力学的课题五花八门、多姿多彩，涉及的内容远不止于此。

在此讲义结束之前，回顾一下这三册近 1100 页篇幅探索了粒子加速器中的各式各样的电磁现象，从时变电磁场、电磁辐射分析，到粒子受电磁场影响，到一系列束团内部与环境交互作用导致的集体动力学。将这些现象追溯到根源时，会发现主要为经典电磁场与经典力学，加上一点点统计力学、量子力学基础概念即足够

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \\ E_\gamma &= \hbar\omega\end{aligned}$$

分析用到最多的数学概念则为傅里叶变换。不免令人赞叹、欣赏，原来其背后的基本方程竟如此简洁，只需要半页纸就能总结！

