1000 PROBLEMAS de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría

Adaptados a

B.U.P., C.O.U. y Selectividad

N. Antonov

M. Vygodsky

V. Nikitin

A. Sankin

PARANINFO S.A.

N. Antonov
M. Vygodsky
V. Nikitin
A. Sankin

M. Angélica Maturana O.

1000 PROBLEMAS DE Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría

Revisión de traducción por
RAFAEL PORTAENCASA BAEZA
Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación. Universidad Politécnica de Madrid.

1977
PARANINFO S.A.
MADRID

Traducido por:
EMILIO ROMERO ROS
Doctor Ingeniero Industrial. Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid

Título original:

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

ISBN 84-283-0866-7
Depósito Legal M. 38.413 - 1976

PARANINFO SA Magallanes, 25. MADRID - 15

Impreso en Gráf. LORMO — Isabel Méndez, 15 Madrid (5.2478)

INDICE DE MATERIAS

FORMULAS DE REFERENCIA

I. ARITMETICA Y ALGEBRA

Proporciones

1. En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, a y d son los extremos, b y c son los medios. La propiedad principal de la proporción es:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

2. Intercambio de términos:

$$\text{(a)}\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ \text{(b)}\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\ \text{(c)}\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\ \text{(d)}\ \frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

3. Proporciones derivadas: si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces se cumplen las proporciones siguientes:

$$\text{(a)}\ \frac{a \pm b}{a}=\frac{c \pm d}{c};\ \text{(b)}\ \frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Involución

1. $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$, es decir $a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, es decir $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$; 3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

4. $a^m : a^n = a^{m-n}$; 5. $1 : a^n = a^0 : a^n = a^{-n}$

6. $(a^m)^n = a^{mn}$

Evolución *

1. $\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$, es decir $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{a \cdot b \cdot c}$

2. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, es decir $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

3. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, es decir $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

4. $(\sqrt[m]{a^n})^p = \sqrt[m]{a^{np}}$

5. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$, es decir $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$

---

* Se supone que las raíces son aritméticas, véase pág. 99.

Ecuaciones cuadráticas

1. La ecuación de la forma $x^2 + px + q = 0$ se resuelve utilizando la fórmula

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

2. La ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se resuelve utilizando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. La ecuación de la forma $ax^2 + 2kx + c = 0$ se resuelve utilizando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

4. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, entonces $x_1 + x_2 = -p$ y $x_1 x_2 = q$.

5. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x = x_2)$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x_2 + px + q = 0$.

6. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Progresiones (véase pág. 36)

*Logaritmos **

1. Simbólicamente, $\log_a N = x$ equivale a $a^x = N$, luego de aquí obtenemos la identidad $a^{\log_a N} = N$.

2. $\log_a a = 1$; 3. $\log_a 1 = 0$; 4. $\log_a (N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$

5. $\log_a \dfrac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$; 6. $\log_a (N^m) = m \log_a N$

7. $\log_a \sqrt[m]{N} = \dfrac{1}{m} \log_a N$

8. Para el módulo que hace posible la conversión de un sistema de logaritmos en base b a otro de base a véase la página 159.

Combinatoria

1. $A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$; 2. $P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m = m!$

3. $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{P_n} = \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$; 4. $C_m^n = C_m^{m-n}$

* Los números a (base logarítmica) y N se suponen positivos, y a no puede ser igual a la unidad.

Binomio de Newton

1. $(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \dots + C_m^{m-2} a^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m$

2. Término general del desarrollo:

$$T_{k+1} = C_m^k a^k x^{m-k}$$

3. $1 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-2} + C_m^{m-1} + 1 = 2^m$

4. $1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \dots \pm 1 = 0$

II. GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA

La circunferencia de un círculo y la longitud de su arco

$C = 2\pi R$; $l = \dfrac{\pi R a}{180} = R\alpha$ (a es la medida del arco en grados y α su medida en radianes).

Areas

Triángulo: $S = \dfrac{ah}{2}$ (a es la base y h la altura); $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p es el semiperímetro y a, b y c los lados); $S = \dfrac{ab \sin C}{2}$

En un triángulo equilátero: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a es el lado).

Paralelogramo: $S = bh$ (b es la base y h la altura).

Rombo: $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$ (d_1 y d_2 son las diagonales).

Trapecio: $S = \dfrac{a+b}{2} h$ (a y b son las bases y h la altura); $S = mh$ (m es la base media).

Polígono regular: $S = \dfrac{Pa}{2}$ (P es el perímetro y a la apotema).

Círculo: $S = \pi R^2$.

Sector circular $S = \dfrac{Rl}{2} = \dfrac{R^2\alpha}{2} = \dfrac{\pi R^2 a}{360}$ (a es la medida del arco del sector en grados; α en radianes y l la longitud del arco).

Superficies

Prisma: $S_{lat} = Pl$ (P es el perímetro de la sección recta y l la arista lateral).

Pirámide regular: $S_{lat} = \dfrac{Pa}{2}$ (P es el perímetro de la base y a la altura lateral).

Tronco de pirámide regular: $S_{lat} = \dfrac{P_1 + P_2}{2} a$ (P_1 y P_2 son los perímetros de las bases y a la altura lateral).

Cilindro: $S_{lat} = 2\pi RH$.
Cono: $S_{lat} = \pi Rl$ (l es la generatriz).
Tronco de cono: $S_{lat} = \pi (R_1 + R_2)\, l$.
Esfera: $S = 4\pi R^2$.

Volúmenes

Prisma: $V = SH$ (S es el área de la base y H la altura).

Pirámide: $V = \frac{SH}{3}$

Tronco de pirámide: $V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

Cilindro: $V = \pi R^2 H$.

Cono: $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$

Tronco de cono: $V = \frac{\pi H}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$.

Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Conversión de la medida de un ángulo en grados a su medida en radianes y viceversa

$\alpha = \frac{\pi \cdot a^\circ}{180^\circ}$; $a^\circ = \alpha \frac{180^\circ}{\pi}$ (α es la medida en radianes de un ángulo y a en grados).

Fórmulas de suma

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$
3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$

Fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

3. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$; 4. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$

5. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$; 6. $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$

7. $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$; 8. $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

Reducción de fórmulas trigonométricas a formas convenientes para tomar logaritmos

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
5. $\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
6. $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 7. $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Algunas relaciones importantes

1. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$
2. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$
3. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo rectángulo

(a y b son los catetos, c la hipotenusa; A y B los ángulos agudos y C el ángulo recto.)

1. $a=c\sin A=c\cos B$; 2. $b=c\sin B=c\cos A$
3. $a=b\tan A=b\cot B$; 4. $b=a\tan B=a\cot A$

Relaciones fundamentales entre los elementos de un triángulo cualquiera

(a, b y c son los lados, A, B y C los ángulos.)

1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ (teorema de los senos)
2. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (teorema del coseno)
3. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$ (teorema de las tangentes)

Relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas inversas

($\arcsin x$, $\arccos x$ y $\arctan x$ son los valores principales de las funciones trigonométricas inversas correspondientes.)

1. $\mathrm{Arcsin}\, x=\pi k+(-1)^k\arcsin x$
2. $\mathrm{Arccos}\, x=2\pi k\pm\arccos x$
3. $\mathrm{Arctan}\, x=\pi k+\arctan x$; k es un entero cualquiera (positivo o negativo)

Parte Primera

ARITMETICA Y ALGEBRA

Capítulo 1 CALCULOS ARITMETICOS

1. $\dfrac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2}$; 2. $\dfrac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}$

3. $\dfrac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{0{,}0001:0{,}005}$; 4. $\left(\dfrac{0{,}012}{5}+\dfrac{0{,}04104}{5{,}4}\right)\cdot 4560-42\frac{1}{3}$

5. $\dfrac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0{,}04}$; 6. $\dfrac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0{,}002}$

7. $\dfrac{\left(95\frac{7}{30}-93\frac{5}{18}\right)\cdot 2\frac{1}{4}+0{,}373}{0{,}2}$; 8. $\dfrac{\left(49\frac{5}{24}-46\frac{7}{20}\right)\cdot 2\frac{1}{3}+0{,}6}{0{,}2}$

9. $\dfrac{\left(12\frac{1}{6}-6\frac{1}{27}-5\frac{1}{4}\right)\cdot 13{,}5+0{,}111}{0{,}02}$; 10. $\dfrac{\left(1\frac{1}{12}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24}\right)\cdot 9\frac{3}{5}+2{,}13}{0{,}4}$

11. $\dfrac{\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1{,}25):2{,}5}$; 12. $\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}$

13. $\dfrac{0{,}134+0{,}05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}$; 14. $\dfrac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0{,}8+2\frac{1}{9}\cdot 0{,}225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}$

15. $\dfrac{\left(68\frac{7}{30}-66\frac{5}{18}\right):6\frac{1}{9}+\left(\frac{7}{40}+\frac{3}{32}\right)\cdot 4{,}5}{0{,}04}$

16. $\dfrac{(2.1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\dfrac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}$

17. $\dfrac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10{,}9+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right)\cdot 1\frac{9}{11}\right]\cdot 4{,}2}{0.008}$

18. $\left[\dfrac{\left(2{,}4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}-\dfrac{\left(2{,}75-1\frac{5}{6}\right)\cdot 21}{8\frac{3}{20}-0{,}45}\right]:\dfrac{67}{200}$

19. $\left[\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0,03}{\left(3\frac{1}{20}-2,65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\dfrac{\left(0,3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right]:2\frac{1}{20}$

20. $26:\left[\dfrac{3:(0,2-0,1)}{2,5\cdot(0,8+1,2)}+\dfrac{(34,06-33,81)\cdot 4}{6,84:(28,57-25,15)}\right]+\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{21}$

21. $\dfrac{3:\frac{2}{5}-0,09:\left(0,15:2\frac{1}{2}\right)}{0,32\cdot 6+0,03-(5,3-3,88)+0,67}$

22. $1\frac{7}{20}:2,7+2,7:1,35+\left(0,4:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4,2-1\frac{3}{40}\right)$

23. $\left(10:2\frac{2}{3}+7,5:10\right)\cdot\left(\frac{3}{40}-\frac{7}{30}\cdot 0,25+\frac{157}{360}\right)$

24. $\left(\dfrac{0,216}{0,15}+\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{15}\right)+\left(\dfrac{196}{225}-\dfrac{7,7}{24\frac{3}{4}}\right)+0,695:1,39$

25. $1.7:\dfrac{\left(4,5\cdot 1\frac{2}{3}+3,75\right)\cdot\frac{7}{135}}{\frac{5}{9}}-\left(0,5+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\right)$

26. $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}+0,228:\left[\left(1,5291-\frac{14,53662}{3-0,095}\cdot 0,305\right):0,12\right]$

27. $\left\{\dfrac{8,8077}{20-[28,2:(13,333\cdot 0,3+0,0001)]\cdot 2,004}+4,9\right\}\cdot\dfrac{5}{32}$

28. $\dfrac{\left[\left(6,2:0,31-\frac{5}{6}\cdot 0,9\right)\cdot 0,2+0,15\right]:0,02}{\left(2+1\frac{4}{11}\cdot 0,22:0,1\right)\cdot\frac{1}{33}}$

29. $6:\dfrac{1}{3}-0,8:\dfrac{1,5}{\frac{3}{2}\cdot 0,4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0,25}}{6-\frac{46}{1+2,2\cdot 10}}$

30. $\dfrac{\left(1,75:\frac{2}{3}-1,75\cdot 1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80}-0,0325\right):400}:(6,79:0,7+0,3)$

31. $\dfrac{4,5:\left[47,375-\left(26\frac{1}{3}-18\cdot 0,75\right)\cdot 2,4:0,88\right]}{17,81:1,37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}$

32. Hallar el número cuyo 3,6 por ciento vale

$$\frac{3+4,2:0,1}{\left(1:0,3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0,3125}$$

33. Calcular

$$\left(46\frac{2}{25}:12+41\frac{23}{35}:260\frac{5}{14}+800:12\frac{28}{31}\right)\cdot\frac{0,8\cdot 7,2\cdot 4,5\cdot 1,3}{6,5\cdot 2,7\cdot 1,92}$$

34. Calcular

$$\left[15:\frac{(0,6+0,425-0,005):0,01}{30\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}}\right]\left(0,645:0,3-1\frac{107}{180}\right)\times$$
$$\times\left(4:6,25-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\cdot 1,96\right)$$

35. Calcular

$$\left[\left(7\frac{2}{3}-6\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{14}\right):\left(8\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}-1\frac{1}{6}\right)+\frac{7}{18}:\frac{14}{27}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{5}{6}-0,75\right)\cdot\frac{20,4\cdot 4,8\cdot 6,5}{22,1\cdot 1,2}$$

36. Calcular

$$\frac{2,045\cdot 0,033+10,518395-0,464774:0,0562}{0,003092:0,0001-5,188}$$

37. Calcular

$$\left(7\frac{1}{9}-2\frac{14}{15}\right):\left(2\frac{2}{3}+1\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{20}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{14}\right)$$

38. Calcular

$$\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)\left\{\left[4-3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]:0,16\right\}$$

39. Calcular

$$\frac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\right):4-\frac{3}{4}}:31$$

40. Calcular

$$\frac{0,8:\left(\frac{4}{5}\cdot 1.25\right)}{0,64-\frac{1}{25}}+\frac{\left(1,08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}}+(1,2\cdot 0,5):\frac{4}{5}$$

41. Calcular

$$\left[41\frac{29}{72}-\left(18\frac{7}{8}-5\frac{1}{4}\right)\left(10\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}\right)\right]:22\frac{7}{18}$$

42. Calcular

$$\left[\frac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}003}{\left[\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)4\right]:\frac{1}{5}}-\frac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right]:62\frac{1}{20}+17{,}81:0{,}0137$$

43. Calcular x, si

$$5\frac{4}{7}:\left\{x:1{,}3+8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left[6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right]\right\}=1\frac{1}{14}$$

44. Calcular x, si

$$\frac{\left[\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):x+(2{,}5:1{,}25):6{,}75\right]:1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}=\frac{17}{27}$$

45. Hallar x, si

$$\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{7}}+x+8\frac{9}{11}-\frac{(1{,}6+154{,}66:70{,}3):1{,}9}{\left(2\frac{2}{5}-1{,}3\right):4{,}3}=2{,}625$$

Capítulo 2 TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS

Simplificar las expresiones siguientes:

46. $(a^2-b^2-c^2+2bc):\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$

Evaluar el resultado para $a=8{,}6$; $b=\sqrt{3}$; $c=3\frac{1}{3}$.

47. $\dfrac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}-1\right)\cdot\dfrac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}$

48. $\dfrac{x}{ax-2a^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$

49. $\dfrac{2a}{a^2-4x^2}+\dfrac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\dfrac{3x-6}{x-2}\right)$

50. $\left(\dfrac{2a+10}{3a-1}+\dfrac{130-a}{1-3a}+\dfrac{30}{a}-3\right)\cdot\dfrac{3a^3+8a^2-3a}{1-\dfrac{1}{4}a^2}$

51. $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$; 52. $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$

53. $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$

54. $\left[\dfrac{a-1}{a^2-2a+1}+\dfrac{2(a-1)}{a^2-4}-\dfrac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\dfrac{a}{a^2-3a+2}\right]\times$

$\times\dfrac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}$

55. $\left[\dfrac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\dfrac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right]:$

$:\left[\dfrac{5}{x^2+1}+\dfrac{3}{2(x+1)}-\dfrac{3}{2(x-1)}\right]$

56. $\left(\dfrac{x-y}{2y-x}-\dfrac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\dfrac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$

57. $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]$

58. $\dfrac{2a^2(b+c)^{2n}-\dfrac{1}{2}}{an^2-a^3-2a^2-a}:\dfrac{2a(b+c)^n-1}{a^2c-a(nc-c)}$

59. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$

60. $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$

Evaluar el resultado para $x=\frac{1}{a-1}$.

61. $\left[\frac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}\right]:\left(2a^nb+3a^{n+1}-\frac{6a^{n+2}}{2a-b}\right)^{-1}$

62*. $\frac{\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right]a^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}$

63. $\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$

64. $\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$

65. $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}$

66. $\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}$

67. $ab\sqrt[n]{a^{1-n}b^{-n}-a^{-n}b^{1-n}}\sqrt[n]{(a-b)^{-1}}$

68. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11)$

69. $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)$

70. $\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}}+\frac{1}{b+\sqrt{a}}\right):\frac{\sqrt[-2]{\frac{1}{9}a^{-2}b^{-1}}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}}$

71. $\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}-\frac{1}{a}$

72. Evaluar la expresión

$$\frac{xy-\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}$$

at $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),\ y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\ (a\geqslant 1,\ b\geqslant 1)$.

---

* Antes de resolver los problemas siguientes, leer las notas de las págs.

73. Evaluar la expresión

$$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$$

para $x=\frac{2am}{b(1+m^2)}$, $|m|<1$.

Simplificar las expresiones siguientes:

74. $\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$

si $x=\frac{2mn}{n^2+1}$ y $m>0,\ 0<n<1$.

75. $\left[\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

si $x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$ y $k>1$.

76. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{2^{-2}}{a}\right)\left[(a-1)\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}-\dfrac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2-1)(a-1)}}\right]$

77. $\left(2\sqrt{x^4-a^2x^2}-\dfrac{2a^2}{\sqrt{1-a^2x^{-2}}}\right)\cdot\dfrac{(x^2a^{-2}-4+4a^2x^{-2})^{-\frac{1}{2}}}{2ax\,(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}$

78. $\dfrac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$

79. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}$.

80. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right)+\frac{a}{2}\cdot\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$

81. $2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

82. Calcular

$$\left[a^{-\frac{3}{2}}b\,(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}\,(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3$$

para $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

83. Evaluar la expresión

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$$

para $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ y $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

Simplificar las expresiones siguientes:

84. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$

85. $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$

86. $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$

87. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$; 88. $(2^{\frac{3}{2}}+27y^{\frac{3}{5}}):\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}\right]$

89. Comprobar la identidad

$$a^{\frac{1}{2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=0$$

90. Calcular

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$$

para $a=1{,}2$ y $b=\frac{3}{5}$.

Simplificar las expresiones siguientes:

91. $[(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}})-(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}})]:(2a+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})$

Evaluar el resultado para $a = 54$ y $b = 6$.

92. $$\frac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}$$

93. $$a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1+\left[a(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2}\cdot\frac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}+a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-a^2}$$

94. $$\frac{x^{\frac{5}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)(x^2+1)}-\left(x-\frac{x^3}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2\sqrt{(1+x^2)^{-1}}-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

95. $$(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}+R^2\frac{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(R^2-x^2)\left[1+\left(\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)^{-2}\right]}$$

96. $$(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})^{-2}(p^{-1}+q^{-1})+\frac{2}{(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})^3}(p^{-\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}})$$

97. $$\left[\frac{(a+\sqrt[3]{a^2x}):(x+\sqrt[3]{ax^2})-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^6$$

98. $$\left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2-\frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-3}$$; 99. $$\left[\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$$

100. $$\left[(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+a-b\right]\left[(a-b)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right)\right]$$

101. $$\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$$

102. $$(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a})^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

103. $$\left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^2+8x+16}$$

104. $$x^3\left[\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2+(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{x+\sqrt{xy}}\right]^5\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$$

105. $$\left(\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}$$

106. $\dfrac{(a-b^2)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}$

107. $\left\{\sqrt{1+\left[(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right]^2}\right\}^{-6}-\dfrac{1}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}$

108. $[(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a})^{-1}+(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a})^{-1}]^{-2} : \dfrac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}$

109. $\left[\dfrac{\sqrt[6]{a^2x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[6]{x}\right]^3+4(x+1)+(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+1)^2$

110. $\left[\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$

111. $\sqrt[-\frac{1}{2}]{\sqrt{a}}\left[\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right]^2$

112. $\left[\dfrac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3+2x+a}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3-x-2a}\right]^3+\sqrt{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)^{\frac{2}{3}} : a}$

113. $\left[\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-1}\right] : \dfrac{(4b)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$

114. $\left(\dfrac{a-4b}{a+(ab)^{\frac{1}{2}}-6b}-\dfrac{a-9b}{a+6(ab)^{\frac{1}{2}}+9b}\right)\cdot\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}}$

115. $\dfrac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$

116. $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2 : \sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$

117. $\left[\dfrac{1}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right](ab)^{-\frac{1}{2}}$

118. $\left[\dfrac{\dfrac{1}{a}-a}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}+1\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}-1\right)}+\sqrt[3]{a}\right]^{-3}$

119. $\left[\dfrac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{x}\right]\left[(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^2+3(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x})^2\right]$

120. $\left[\left(\dfrac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):\left(a+\sqrt[6]{a^3b^2}\right)-\sqrt[3]{b}\right]^2$

121. $\left[\dfrac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4$

122. $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3$

123. $\sqrt{a}\left[\dfrac{a+\sqrt[4]{a^3b^2}+b\sqrt[4]{ab^2}+b^2}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^2}-b\right]^{-1}+\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-1}$

124. $\dfrac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}$

125. $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\dfrac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+2}$

126. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}$

127. $\dfrac{\sqrt{a^3b}\,\sqrt[3]{a^4}+\sqrt{a^4b^3}:\sqrt[6]{a}}{(b^2-ab-2a^2)\sqrt{ab}}-$

$$-a^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3a^2}{3b-6a+2ab-b^2}:\frac{a+b}{3a-ab}-\frac{ab}{a+b}\right)$$

128. $\left[\dfrac{10x^2+3ax}{4x^2-a^2}+\dfrac{bx-x^2-ax+ab}{2x+a}:(b-x)-2\right]\times$

$$\times\left[\frac{(a+2x)^{-\frac{1}{2}}+(2x-a)^{\frac{1}{2}}}{(4x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}+1}\right]^2$$

129. $\left[\dfrac{x+4}{2x^2-2x-4}+\dfrac{x+2}{2(x^2+3x+2)}\right]\sqrt{2}\,x-$

$$-\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}-\frac{x+6}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right):\left(x^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

130. $\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{(1+x)^{-\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}}:\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-2}+$

$$+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x^2-4x}-\frac{5}{x^2-3x-4}\right)$$

131. $$\frac{a^2\sqrt{ab^{-1}}\sqrt[3]{b^2\sqrt{ab}}-2\sqrt{a^3b}\sqrt[6]{ab^5}}{(a^2-ab-2b^2)\sqrt[3]{a^5b}}-$$
$$-\frac{a-3}{a+2b}\left[\frac{a+2b}{a^2+ab-3a-3b}-(a-1)(a^2-4a+3)^{-1}\right]$$

132. $$\frac{\sqrt{a\sqrt{ab}}-(ab)^{\frac{3}{4}}:\sqrt{a}}{(a^2-b^2)\,a^{-1}}\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)+$$
$$+\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{2a+2b}{a-4b}+\frac{a+3b}{2a+2b}-\frac{a^2+21ab}{2a^2-6ab-8b^2}\right)$$

133. $$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab}\sqrt{a}\right)^2}{ab\sqrt[6]{ab}}+4\right]:\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+$$
$$+\frac{b^2-4a^2}{4a}\cdot\left(\frac{1}{b^2+3ab+2a^2}-\frac{3}{2a^2+ab-b^2}\right)$$

134. $$\frac{4\,(2ab)^{\frac{3}{4}}(a+2b)^{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}:\frac{\sqrt{2b\sqrt{2ab}}+\sqrt[4]{2a^3b}}{\sqrt{2ab}}-$$
$$-6\left(\frac{a}{6a-48b}-\frac{2b}{3a-6b}-\frac{8b^2}{a^2-10ab+16b^2}\right)$$

Capítulo 3 ECUACIONES ALGEBRAICAS

Resolver las ecuaciones siguientes:

135. $\frac{6b+7a}{6b}-\frac{3ay}{2b^2}=1-\frac{ay}{b^2-ab}$; **136.** $\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

137. $\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$

138. $\frac{c+3z}{4c^2+6cd}-\frac{c-2z}{9d^2-6cd}=\frac{2c+z}{4c^2-9d^2}$

139. $\frac{x-1}{n-1}+\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n}$

140. $\frac{3ab+1}{a}x=\frac{3ab}{a+1}+\frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}+\frac{a^2}{(a+1)^3}$

141. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$

142. $\frac{x+m}{a+b}-\frac{ax}{(a+b)^2}=\frac{am}{a^2-b^2}-\frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}$

143. $\frac{m}{z}+\frac{z}{m}+\frac{m(z-m)}{z(z+m)}-\frac{z(z+m)}{m(z-m)}=\frac{mz}{m^2-z^2}-2$

144. $\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$

145. $\frac{an}{a-x}+\frac{(a+n)(anx+nx^2+x^3)}{x^3+nx^2-a^2x-a^2n}=\frac{ax}{n+x}+\frac{nx^2}{x^2-a^2}$

146. $\left(\frac{a+1}{ax+1}+\frac{x+1}{x+a^{-1}}-1\right):\left[\frac{a+1}{(x+a^{-1})a}-\frac{a(x+1)}{ax+1}+1\right]=\frac{x}{2}$

147. $\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}-\frac{a-x}{ax-x^2-a^2}=\frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$

148. $a(\sqrt{x}-a)-b(\sqrt{x}-b)+a+b=\sqrt{x}$

149. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$; **150.** $\frac{2x}{x+b}-\frac{x}{b-x}=\frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$

151. $1-\frac{2a}{x-a}=\frac{b^2-a^2}{a^2+x^2-2ax}$; **152.** $\frac{x^2}{ab-2b^2}=\frac{a-b}{ac^2-2bc^2}+\frac{x}{bc}$

153. $\frac{x}{x+a}+\frac{2x}{x-a}=\frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$; **154.** $\frac{x^2+1}{n^2x-2n}-\frac{1}{2-nx}=\frac{x}{n}$

155. $\frac{a-x^2}{(a-x)^2}-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a^3-ax(2a-x)}$; **156.** $1-\frac{2b}{x-a}=\frac{a^2-b^2}{a^2+x^2-2ax}$

157. $\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}$; **158.** $\frac{a+x-2n}{2a-n}-\frac{a-2n}{x}=1$

159. $\frac{a}{nx-x}-\frac{a-1}{x^2-2nx^2+n^2x^2}=1$; **160.** $\frac{\left(\frac{a-x}{x}\right)^2-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2}{x^2+a^2-2ax}=\frac{5}{9x^2}$

161. $\frac{x+x^2}{1-x^2}:\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}=\frac{ab}{(b-a)^2}$

162. Descomponer en factores lineales la expresión:

$$11x-3x^2+70$$

163. Descomponer la expresión $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ en dos factores cuya suma sea

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

164. Descomponer en factores la expresión:

$$15x^3+x^2-2x$$

165. Descomponer en factores la expresión:

$$x^3+2x^4+4x^2+2+x$$

165a. Resolver la ecuación

$$(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$$

166. Escribir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{b}{a}$$

167. Construir una ecuación cuadrática cuyas raíces sean

$$\frac{1}{10-\sqrt{72}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{10+6\sqrt{2}}$$

168. Escribir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:

$$\frac{a}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-b}}$$

169. Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática

$$x^2+px+12=0$$

poseen la propiedad siguiente: $x_1-x_2=1$. Hallar el coeficiente p.

170. Determinar en la ecuación

$$5x^2-kx+1=0$$

el valor de k para que la diferencia de sus raíces valga la unidad.

171. Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

son tales que $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$. Determinar a.

172. Determinar en la ecuación de segundo grado

$$x^2 + px + q = 0$$

los coeficientes para que las raíces sean iguales a p y q.

173. Las raíces de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son x_1 y x_2. Construir una nueva ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $\frac{x_1}{x_2}$ y $\frac{x_2}{x_1}$.

174. Dada una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

construir una nueva ecuación de segundo grado, cuyas raíces sean:
(1) el doble de las raíces de la ecuación dada;
(2) recíprocas de las raíces de la ecuación dada.

175. Construir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean iguales a los cubos de las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

176. Construir una ecuación bicuadrada en la que la suma de los cuadrados de sus raíces es 50 y el producto vale 144.

177. Hallar todas las raíces de la ecuación

$$4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45 = 0$$

sabiendo que una de ellas es $3 + i\sqrt{6}$.

178. Determinar el término constante de la ecuación

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0$$

si se sabe que una de sus raíces es igual a 2. Hallar las otras dos raíces.

179. Sabiendo que 2 y 3 son raíces de la ecuación

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$$

determinar m y n y hallar la tercera raíz de la ecuación.

180. ¿Para qué valores de a tiene la ecuación

$$x^2 + 2ax\sqrt{a^2 - 3} + 4 = 0$$

raíces iguales?

180a. ¿En qué intervalo tiene que variar el número m para que las dos raíces de la ecuación

$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

estén comprendidas entre -2 y 4?

Resolver las ecuaciones siguientes:

181. $\sqrt{y+2} - \sqrt{y-6} = 2$; **182.** $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$

183. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$; **184.** $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$

185. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$; **186.** $\sqrt{3x-2} = 2\sqrt{x+2} - 2$

187. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$; **188.** $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x+1$

189. $\dfrac{3+x}{3x} = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{x^2}}}$

190. $\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}} = \dfrac{7}{x+2}\sqrt{\dfrac{x+2}{x+}}$

191. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3} = \dfrac{7}{\sqrt{x-3}}$

192. $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x}$

193. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} - \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{1}{x}$

194. $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}} - \sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}} = \sqrt[4]{28}$

195. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$

196. $\dfrac{\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}}{\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}} = \dfrac{27}{x}$; **197.** $x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2+a^2}}$

198. $\dfrac{\sqrt{1+a^{-2}x^2} - xa^{-1}}{\sqrt{1+a^{-2}x^2} + xa^{-1}} = \dfrac{1}{4}$; **199.** $\dfrac{\sqrt{1+a^2x^2} - ax}{\sqrt{1+a^2x^2} + ax} = \dfrac{1}{c^2}$

200. $\dfrac{x+c+\sqrt{x^2-c^2}}{x+c-\sqrt{x^2-c^2}} = \dfrac{9(x+c)}{8c}$

201. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

202. $2\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}$

203. $\sqrt{a^2-x} + \sqrt{b^2-x} = a+b$

204. $\sqrt{a-x} + \sqrt{b+x} = \sqrt{a+b}$

205. $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$; 206. $\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}$

207. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$; 208. $(x-1)^{\frac{1}{2}}+6(x-1)^{\frac{1}{4}}=16$

209. $\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}}=-\sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9}$

210. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

211. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$

212. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$; 213. $2\sqrt[3]{z^2}-3\sqrt[3]{z}=20$

214. $\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0$; 215. $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}$

216. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$; 217. $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$

218. $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$; 219. $\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b$

220. $\frac{2-x}{2-\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{2-x}{2}}$; 221. $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}$

222. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$

223. $\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$

224. $\sqrt{y^2+4y+8}+\sqrt{y^2+4y+4}=\sqrt{2(y^2+4y+6)}$

Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:

225. $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$ 226. $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$

227. $\begin{cases} x+y^2=7 \\ xy^2=12 \end{cases}$ 228. $\begin{cases} x^2-y=23 \\ x^2y=50 \end{cases}$

229. $\begin{cases} (x^2-y^2)xy=180 \\ x^2-xy-y^2=-11 \end{cases}$ 230. $\begin{cases} 3x^2-2xy+5y^2-35=0 \\ 5x^2-10y^2-5=0 \end{cases}$

231. $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5}{2}xy \\ x-y=\frac{1}{4}xy \end{cases}$ 232. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x+y=4 \end{cases}$

233. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ 234. $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12} \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$

235. $\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^n = c \\ \left(\frac{x}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{y}{a}\right)^m = d \end{cases}$

Dar sólo las soluciones positivas, suponiendo que $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ y $m \neq n$.

236. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$ 237. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ xy(x+y) = -2 \end{cases}$

Dar sólo las soluciones reales.

238. $\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$ 239. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 5\frac{1}{5} \\ xy = 6 \end{cases}$

240. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ 241. $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 30 \\ 2x - 3y + 5z - 2u = 3 \\ 3x + 4y - 2z - u = 1 \\ 4x - y + 6z - 3u = 8 \end{cases}$

242. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$ 243. $\begin{cases} \sqrt{4x + y - 3z + 7} = 2 \\ \sqrt[3]{2y + 5x + z + 25.5} = 3 \\ \sqrt{y+z} - \sqrt{6x} = 0 \end{cases}$

244. $\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61 \\ xy + xz = 2yz \end{cases}$ 245. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xy + yz + zx = 47 \\ (z-x)(z-y) = 2 \end{cases}$

246. $\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0 \\ b^3 + b^2x + by + z = 0 \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0 \end{cases}$ 247. $\begin{cases} \frac{12}{\sqrt{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 5 \\ \frac{8}{\sqrt{x-1}} + \frac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = 6 \end{cases}$

248. $\begin{cases} x + y - 2\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$

249. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{x+y}} - 2 + \sqrt{\frac{x+y}{3x}} = 0 \\ xy - 54 = x + y \end{cases}$

250. $\begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{17} = 0 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 6 \end{cases}$

251. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\sqrt{a} \\ \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=(\sqrt{41}-3)\,a \end{cases}$

252. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases}$ 253. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=84 \\ x+\sqrt{xy}+y=14 \end{cases}$

253a. Hallar todos los valores de m para los que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-y=m(1+xy) \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases}$$

tiene soluciones reales.

Capítulo **4** ECUACIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES

Determinar x *sin usar tablas logarítmicas:*

254*. $x+10\cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9-\log 2}$; **255.** $x=100^{\frac{1}{2}-\log\sqrt[4]{4}}$

256. $x=\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$; **257.** $x=49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$

Resolver las ecuaciones siguientes:

258. $\log_4\log_3\log_2 x=0$

259. $\log_a\{1+\log_b[1+\log_c(1+\log_p x)]\}=0$

260. $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]\}=\frac{1}{2}$

261. $\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6$

262. $\log_a y+\log_a(y+5)+\log_a 0.02=0$

263. $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3$

264. $1+\log x=\frac{1}{3}\log\left[b-\frac{(3a-b)(a^2+ab)^{-1}}{b^{-2}}\right]-$
$-\frac{4}{3}\log b+\frac{1}{3}\log(a^3-ab^2)$

265. $\log\left[x-a(1-a)^{-\frac{1}{2}}\right]-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-$
$-\log\sqrt{\frac{a^3+a}{a+1}-a^2}=0$

266. $\log_x\sqrt{5}+\log_x(5x)-2{,}25=(\log_x\sqrt{5})^2$

267. $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$

268. $\log_a x-\log_{a^2}x+\log_{a^4}x=\frac{3}{4}$; **269.** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

270. $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$; **271.** $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

* En todo el libro el símbolo log se refiere siempre al logaritmo de base 10.

272. $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$; **273.** $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

274. $\left(\frac{4}{9}\right)^x\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\log 4}{\log 8}$; **275.** $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$

276. $2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{2^{-1}x^{-\frac{1}{2}}}-\sqrt[\sqrt{x}-1]{4^2}=0$

277. $\sqrt[x^2-1]{a^3}\,\sqrt[2x-2]{a}\,\sqrt[4]{a^{-1}}=1$; **278.** $3\log_{xa^2}x+\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x=2$

279. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$; **280.** $\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1$

281. $1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{x-1}+a^x=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$

282. $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot\ldots\cdot 5^{2x}=0.04^{-28}$; **283.** $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0$

284. $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+8=0$; **285.** $3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0$

286. $x^{\frac{\log x+7}{4}}=10^{\log x+1}$

287. $\log\left(4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1\right)-1=\log\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2\right)-2\log 2$

288. $2(\log 2-1)+\log\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=\log\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right)$

289. $5^{\log x}-3^{\log x-1}=3^{\log x+1}-5^{\log x-1}$

290. $x^{2\log^3 x-1{,}5\log x}=\sqrt{10}$; **291.** $\log\left(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right)=0$

292. $\log_2(9-2^x)=3-x$

293. $\log 2+\log\left(4^{x-2}+9\right)=1+\log\left(2^{x-2}+1\right)$

294. $2\log 2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\log 3-\log\left(\sqrt[x]{3}+27\right)=0$

295. $\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\frac{1}{4}\log 16-\sqrt{x+0.25}\log 4$

296. $\dfrac{2\log 2+\log(x-3)}{\log(7x+1)+\log(x-6)+\log 3}=\dfrac{1}{2}$

297. $\log_5 120+(x-3)-2\log_5\left(1-5^{x-3}\right)=-\log_5\left(0{,}2-5^{x-4}\right)$

Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:

298. $\begin{cases}8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1}\\ 5\cdot 5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}\end{cases}$ **299.** $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=0\\ x+y=3.(3)\end{cases}$

300. $\begin{cases}\log_a x+\log_a y=2\\ \log_b x-\log_b y=4\end{cases}$ **301.** $\begin{cases}\log(x^2+y^2)-1=\log 13\\ \log(x+y)-\log(x-y)=3\log 2\end{cases}$

302. $\begin{cases} \log_{xy}(x-y)=1 \\ \log_{xy}(x+y)=0 \end{cases}$ **303.** $\begin{cases} \log_a\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=2-\log_a y \\ \log_b x+\log_b y=4 \end{cases}$

304. $\begin{cases} \log_a x+\log_a y+\log_a 4=2+\log_a 9 \\ x+y-5a=0 \end{cases}$

305. $\begin{cases} xy=a^2 \\ \log^2 x+\log^2 y=2{,}5\log^2(a^2) \end{cases}$ **306.** $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4 \end{cases}$

307. $\begin{cases} \log x+\log y=\log a \\ 2(\log x-\log y)=\log b \end{cases}$ **308.** $\begin{cases} \log_a x+\log_{a^2}y=\dfrac{3}{2} \\ \log_{b^2}x+\log_b y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

309. $\begin{cases} \log_a x+\log_{a^2}y=\dfrac{3}{2} \\ \log_{b^2}x-\log_{b^2}y=1 \end{cases}$ **310.** $\begin{cases} \log_v u+\log_u v=2 \\ u^2+v=12 \end{cases}$

311. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2 \\ \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}\sqrt{a}+\log_{\frac{y}{\sqrt{b}}}\sqrt{b}=\dfrac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}$

312. $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0 \\ x^2-5y^2+4=0 \end{cases}$ **313.** $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2 \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2 \\ \log_4 z+\log_{16}x+\log_{16}y=2 \end{cases}$

314. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3} \\ (x+y)\,2^{y-x}=3 \end{cases}$

315. $\begin{cases} \sqrt[10]{2^x}\sqrt{\sqrt[5]{2^y}}=\sqrt[x]{128} \\ \log(x+y)=\log 40-\log(x-y) \end{cases}$

316. $\begin{cases} \sqrt[y]{4^x}=32\sqrt[x]{8^y} \\ \sqrt[y]{3^x}=3\sqrt[y]{9^{1-y}} \end{cases}$ **317.** $\begin{cases} 9^{-1}\sqrt[y]{9^x}-27\sqrt[x]{27^y}=0 \\ \log(x-1)-\log(1-y)=0 \end{cases}$

318. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log x+\dfrac{1}{2}\log y-\log\left(4-\sqrt{x}\right)=0 \\ \left(25^{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{y}}-125\cdot 5^{\sqrt{y}}=0 \end{cases}$ **319.** $\begin{cases} \log_x ay=p \\ \log_y bx=q \end{cases}$

Capítulo **5** PROGRESIONES

Notación y fórmulas

a_1 = primer término de una progresión aritmética;
a_n = n-ésimo término de una progresión aritmética;
d = razón de una progresión aritmética;
u_1 = primer término de una progresión geométrica;
u_n = n-ésimo término de una progresión geométrica;
q = razón de una progresión geométrica;
S_n = suma de los n primeros términos de una progresión;
S = suma de una progresión geométrica decreciente indefinidamente.

Fórmulas para progresiones aritméticas

$$a_n = a_1 + d(n-1) \tag{1}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} \tag{2}$$

$$S_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]\,n}{2} \tag{3}$$

Fórmulas para progresiones geométricas

$$u_n = u_1 q^{n-1} \tag{4}$$

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q-1} \ (q > 1) \ \text{ó} \ S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1-q} \ (q < 1) \tag{5}$$

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1} \ (q > 1) \ \text{ó} \ S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \ (q < 1) \tag{6}$$

$$S = \frac{u_1}{1-q} \tag{7}$$

PROGRESION ARITMETICA

320. ¿Cuántos términos hay que tomar de la progresión aritmética

5; 9; 13; 17; . . .

para que la suma valga 10.877?

321. Hallar una progresión aritmética sabiendo que la suma de sus primeros cuatro términos es igual a 26 y el producto de esos mismos términos vale 880.

322. En una progresión aritmética $a_p = q$; $a_q = p$. Expresar a_n en función de n, p y q.

323. Hallar la suma de todos los números naturales de dos cifras.

324. Hallar cuatro números impares sucesivos sabiendo que la suma de sus cuadrados excede en 48 a la suma de los cuadrados de los números pares contenidos entre ellos.

325. Una progresión aritmética tiene 20 términos. La suma de los términos que ocupan lugares pares vale 250 y la de los términos que ocupan lugares impares vale 220. Hallar los dos términos centrales de la progresión.

326. Dada una sucesión de expresiones: $(a + x)^2$; $(a^2 + x^2)$; $(a - x)^2$, ... demostrar que forman una progresión aritmética y hallar la suma de sus n primeros términos.

327. Si se representan las sumas de los n_1 primeros, n_2 primeros y n_3 primeros términos de una progresión aritmética mediante S_1, S_2 y S_3, respectivamente, demostrar que

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0$$

328. Escribir una progresión aritmética cuyo primer término sea 1 y la suma de los cinco primeros términos sea igual a $\frac{1}{4}$ de la de los cinco términos siguientes.

329. Hallar una progresión aritmética en la que la suma de un número cualquiera de términos sea siempre el triple del número de términos elevado al cuadrado.

330. Hallar la suma de todos los números de dos cifras que, al dividirlos por 4, den como resto la unidad.

PROGRESION GEOMETRICA

331. Intercalar tres números medios geométricos entre los números 1 y 256.

332. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que la suma del primero y el tercero es igual a 52 y que el cuadrado del segundo es 100.

333. Escribir los primeros términos de una progresión geométrica en la que la diferencia entre el tercer y el primer términos sea igual a 9 y la diferencia entre el quinto y el tercero sea igual a 36.

334. Hallar cuatro números en progresión geométrica tales que la suma de los extremos valga 27 y el producto de los medios sea igual a 72.

335. Hallar cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los extremos es igual a 35 y la suma de los medios es igual a 30.

336. Determinar una progresión geométrica en la que

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31$$

y

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62$$

337. Una progresión geométrica consta de cinco términos, su suma menos el primer término vale $19\frac{1}{2}$ y este valor menos el último término vale 13. Calcular los extremos de la progresión.

338. Hallar el primer término y la razón de una progresión geométrica que consta de nueve términos, tales que el producto de sus extremos sea igual a 2.304 y la suma de los términos cuarto y sexto sea igual a 120.

339. Tres números forman una progresión geométrica. Su suma vale 126 y su producto 13.824. Hallarlos.

340. Una progresión geométrica consta de un número par de términos. La suma de todos ellos es igual al triple de la suma de los términos impares. Determinar la razón de la progresión.

PROGRESION GEOMETRICA DECRECIENTE INDEFINIDAMENTE

341. Demostrar que los números

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1};\quad \frac{1}{2-\sqrt{2}};\quad \frac{1}{2};\ \ldots$$

constituyen una progresión geométrica decreciente indefinidamente y hallar el límite de la suma de sus términos.

342. Calcular la expresión

$$(4\sqrt{3}+8)\left[\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-2)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right]$$

después de demostrar que los sumandos entre corchetes son los términos de una progresión geométrica decreciente.

343. Hallar la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente indefinidamente en la que todos los términos son positivos, el primero vale 4 y la diferencia entre el tercero y el quinto vale $\frac{32}{81}$.

344. Determinar la suma de una progresión geométrica decreciente indefinidamente si se sabe que la suma de los términos primero y cuarto vale 54 y la suma del segundo y el tercero vale 36.

345. En una progresión geométrica decreciente indefinidamente la suma de todos los términos que ocupan lugares impares es igual a 36 y la de los términos que ocupan lugares pares es igual a 12. Hallar la progresión.

346. La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente indefinidamente vale 56 y la suma de los cuadrados de sus términos vale 448. Hallar el primer término y la razón.

347. La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente indefinidamente es igual a 3 y la suma de los cubos de todos sus términos es igual a $\frac{108}{13}$. Escribir la progresión.

348. Determinar una progresión geométrica decreciente indefinidamente cuyo segundo término sea 6 y la suma de los términos sea igual a $\frac{1}{8}$ de la suma de los cuadrados de los términos.

PROGRESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS

349. El segundo término de una progresión aritmética es 14 y el tercero es 16. Se pide construir una progresión geométrica tal que su razón sea igual a la de la progresión aritmética y la suma de los tres primeros términos sea igual en ambas progresiones.

350. Los términos primero y tercero de una progresión aritmética y otra geométrica son, respectivamente, iguales, siendo los primeros términos de ambas iguales a 3. Escribirlas sabiendo que el segundo término de la progresión aritmética sobrepasa en 6 al segundo término de la progresión geométrica.

351. En una progresión geométrica se puede considerar que los términos primero, tercero y quinto equivalen a los términos primero, cuarto y decimosexto de una progresión aritmética. Determinar el

cuarto término de esta progresión aritmética sabiendo que su primer término es 5.

352. Tres números, cuya suma es igual a 93, constituyen una progresión geométrica. También se pueden considerar como el primero, el segundo y el séptimo términos de una progresión aritmética. Hallar estos tres números.

353. En una progresión aritmética el primer término es 1 y la suma de los siete primeros es igual a 2.555. Hallar el término central de una progresión geométrica que consta de siete términos si el primero y el último coinciden con los términos respectivos de la progresión aritmética indicada.

354. La suma de los tres números que forman una progresión aritmética es igual a 15. Si 1, 4 y 19 se suman, respectivamente a ellos, se obtendrán tres números que forman una progresión geométrica. Hallar estos tres números.

355. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es igual a 26 y que si se suman respectivamente a ellos los números 1, 6 y 3 se obtienen tres números que están en progresión aritmética.

356. Tres números forman una progresión geométrica. Si se disminuye el tercero en 64, entonces los tres números que quedan están en progresión aritmética. Si a continuación se disminuye en 8 el segundo término de esta progresión aritmética se vuelve a obtener una progresión geométrica. Determinar los tres números iniciales.

357. ¿Existen tres números que forman al mismo tiempo una progresión geométrica y una aritmética?

Capítulo 6 COMBINATORIA Y TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON

358. El número de permutaciones de n letras es al número de permutaciones de $n+2$ letras como 0,1 es a 3. Hallar n.

359. El número de combinaciones de n elementos tomados de tres en tres es cinco veces menor que el número de combinaciones de $n+2$ elementos tomados de cuatro en cuatro. Hallar n.

360. Hallar el término central del desarrollo del binomio $\left(\frac{a}{x}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{16}$.

361. Determinar el lugar que ocupa el término en a^7 del desarrollo del binomio $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$

362. Hallar el lugar que ocupa el término del desarrollo del binomio $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, que contiene a y b elevados a la misma potencia.

363. Simplificar la expresión $\left(\frac{a+1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{a-1}{a-a^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$ y determinar el término del desarrollo que no contiene a.

364. El exponente de un binomio excede en 3 al de otro. Determinar estos exponentes sabiendo que la suma de los coeficientes de ambos binomios es 144.

365. Hallar el término decimotercero del desarrollo de $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^m$, sabiendo que el coeficiente del tercer término del desarrollo es 105.

366. En el desarrollo de $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^m$ los coeficientes de los términos cuarto y decimotercero son iguales. Hallar el término que no contiene x.

367. Hallar el término central del desarrollo de $\left(a\sqrt[-2]{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^m$, sabiendo que el coeficiente del quinto término es al coeficiente del tercero como 14 es a 3.

368. La suma de los coeficientes de los términos primero, segundo y tercero del desarrollo de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^m$ es igual a 46. Hallar el término que no contiene x.

369. Hallar el término del desarrollo del binomio $(x\sqrt{x}+\sqrt[-3]{x})^m$ que contiene x^5, sabiendo que la suma de todos los coeficientes es igual a 128.

370. Hallar el sexto término de una progresión geométrica, cuyo primer término es $\frac{1}{i}$ y la razón es el número complejo $(1+i)$.

371. Hallar el séptimo término de una progresión geométrica cuya razón es $\left(1+\frac{1}{i}\right)$ y el primer término i.

372. ¿Para qué valor de n los coeficientes de los términos segundo, tercero y cuarto del desarrollo del binomio $(1+x)^n$ forman una progresión aritmética?

373. Los coeficientes de los términos quinto, sexto y séptimo del desarrollo del binomio $(1+x)^n$ forman una progresión aritmética. Hallar n.

374. En la expresión $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}+a\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^5$ determinar x para que el cuarto término del desarrollo del binomio valga $56a^{5,5}$.

375. En la expresión $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ determinar x para que el tercer término del desarrollo del binomio valga 240.

376. Determinar x en la expresión $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$, sabiendo que en el desarrollo del binomio la relación entre el séptimo término contado desde el principio y el séptimo término contado desde el final vale $\frac{1}{6}$.

377. Hallar el valor de x en la expresión $(x+x^{\log x})^5$, cuyo tercer término vale 1.000.000.

378. Hallar el valor de x en la expresión $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}}+\sqrt[12]{x}\right]^6$, sabiendo que el cuarto término es 200.

379. En la expresión $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+x^{\log\sqrt{x}}\right)^9$ determinar x para que el tercer término del desarrollo del binomio valga 36.000.

380. El sexto término del desarrollo del binomio $\left(\dfrac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}+x^{2\log x}\right)^8$ es 5.600. Hallar x.

381. El noveno término del desarrollo del binomio

$$\left[\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{x})^{5\log x}}+x^{2\log x}\sqrt{x}\right]^{10}$$

es 450. Hallar x.

382. Determinar x, sabiendo que el cuarto término del desarrollo del binomio $\left(10^{\log\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[\log x]{10}}\right)^7$ es 3.500.000.

383. Determinar para que valor de x, en el desarrollo del binomio $\left(\sqrt[6]{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, el término que contiene x elevado a una potencia doble de la del término siguiente es menor en 30 unidades que el último mencionado.

384. Determinar para que valor de x, el cuarto término del desarrollo del binomio $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$, es 20 veces mayor que el exponente del binomio, sabiendo que el coeficiente binómico del cuarto término es cinco veces mayor que el del segundo término.

385. Hallar para que valores de x, la diferencia entre los términos cuarto y sexto en el desarrollo del binomio $\left(\dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^m$ es igual a 56, sabiendo que el exponente del binomio m es menor que el coeficiente binómico del tercer término del desarrollo en 20 unidades.

386. Hallar para que valores de x, la suma de los términos tercero y quinto en el desarrollo de $\left(\sqrt{2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$, es igual a 135, sabiendo que la suma de los coeficientes binómicos de los tres últimos términos es igual a 22.

387. Determinar para que x, el sexto término del desarrollo del binomio $\left[\sqrt{2^{\log(10-3x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\cdot\log 3}}\right]^m$, es igual a 21, sabiendo que los coeficientes binómicos de los términos segundo, tercero y cuarto del desarrollo representan, respectivamente, los términos primero, tercero y quinto de una progresión aritmética.

388. Determinar para que valor de x, el cuarto término del desarrollo del binomio

$$\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-\frac{1}{2}\log\left(6-\sqrt{8x}\right)}+\sqrt[6]{\frac{5^{\log(x-1)}}{25^{\log 5}}}\right]^{m}$$

es igual a 16,8, sabiendo que los $\frac{14}{9}$ del coeficiente del tercer término y los coeficientes de los términos cuarto y quinto del desarrollo forman una progresión geométrica.

389. Determinar para que x, la diferencia entre nueve veces el tercer término y el quinto término del desarrollo del binomio

$$\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}\cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)^{m}$$

es igual a 240, sabiendo que la diferencia entre el logaritmo del triple del coeficiente del cuarto término y el logaritmo del coeficiente del segundo término del desarrollo es igual a 1.

Capítulo 7 PROBLEMAS ALGEBRAICOS Y ARITMETICOS*

390. Hallar el peso de una munición de artillería, sabiendo que la carga pesa 0,8 kg, el proyectil pesa $\frac{2}{3}$ del peso total de la munición y la vaina pesa $\frac{1}{4}$ del total de la munición.

391. En una cierta fábrica las mujeres representan el 35 por 100 del total de trabajadores, siendo el resto hombres. El número de hombres excede en 252 al de mujeres. Determinar el total de trabajadores.

392. Un conjunto de mercancías fue vendido en 1.386 rublos con un beneficio del 10 por 100. Determinar el precio de coste de las mercancías.

393. Una fábrica vendió mercancías en 3.348 rublos con una pérdida del 4 por 100. ¿Cuál era el precio de coste de las mercancías?

394. Si se obtienen 34,2 kg de cobre de 225 kg de mineral, ¿cuál es el tanto por ciento de cobre que contiene el mineral?

395. Antes de una reducción de precio, un paquete de cigarrillos costaba 29 kopeks. Después de la reducción, cuesta 26 kopeks. ¿Cuál ha sido la reducción en tanto por ciento?

396. Un kilo de un artículo costaba 6 rublos y 40 kopeks**. Ahora se ha reducido a 5 rublos y 70 kop. ¿Cuál ha sido la reducción en tanto por ciento?

397. Las pasas obtenidas al secar una cierta cantidad de uvas pesan el 32 por 100 del peso total de las uvas. ¿Qué cantidad de uvas tenemos que tomar para obtener 2 kg de pasas?

398. Un grupo de turistas tiene que hacer una colecta para pagar una excursión. Si cada uno paga 75 kopeks habrá un déficit de 4,4 rublos; si cada uno paga 80 kopeks habrá un exceso de 4,4 rublos. ¿Cuántas personas toman parte en la excursión?

---

* No dividimos los problemas en algebraicos y aritméticos, ya que los problemas que se pueden resolver por aritmética siempre se pueden resolver por álgebra y viceversa; los problemas que se resuelven con ayuda de ecuaciones pueden tener, con frecuencia, una solución aritmética más sencilla. En "Respuestas y Soluciones" damos unas veces la solución aritmética y otras, la solución algebraica, pero esto no quiere decir en modo alguno que ése deba ser el método de solución que tiene que seguir forzosamente el estudiante.

** (*N. del T.*) Un rublo tiene 100 Kopecks.

399. Un cierto número de personas tiene que pagar a partes iguales un total de 72 rublos. Si hubiera tres personas menos, entonces cada una tendría que contribuir con 4 rublos más. ¿Cuántas personas son?

400. Sesenta ejemplares del primer volumen de un libro y 75 ejemplares del segundo volumen cuestan un total de 405 rublos. Sin embargo, un descuento del 15 por 100 en el primer volumen y del 10 por 100 en el segundo reduciría el precio total a 355 rublos y 50 kopeks. Determinar el precio de cada volumen.

401. Una tienda de antigüedades compró dos artículos en 225 rublos y después los vendió y obtuvo un beneficio del 40 por 100. ¿Cuánto pagó por cada artículo si el primero dejó un beneficio del 25 por 100 y el segundo un beneficio del 50 por 100?

402. El agua de mar contiene el 5 por 100 (en peso) de sal. ¿Cuántos kilos de agua dulce se han de añadir a 40 kg de agua de mar para que sólo tenga un 2 por 100 de sal?

403. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $3\sqrt{5}$ metros. Determinar los catetos sabiendo que cuando se aumente uno en un $133\frac{1}{3}$ por 100 y el otro en un $16\frac{2}{3}$ por 100 la suma de sus longitudes vale 14 metros.

404. Dos sacos contienen 140 kg de harina. Si sacamos el 12,5 por 100 de la harina del primer saco y la echamos en el segundo ambos tendrán la misma cantidad. ¿Cuántos kilos de harina tiene cada saco?

405. Dos fábricas, A y B, se comprometen a servir un pedido en 12 días. Después de dos días, la fábrica A cierra para efectuar unas reparaciones, mientras que la fábrica B sigue funcionando normalmente. Sabiendo que B tiene un rendimiento del $66\frac{2}{3}$ por 100 del de A, determinar en cuántos días se servirá el pedido.

406. En una prueba matemática, el 12 por 100 de los estudiantes de una clase no resolvió un problema, el 32 por 100 lo resolvió con algunos errores y los 14 estudiantes restantes obtuvieron la solución correcta. ¿Cuántos estudiantes había en la clase?

407. Se corta un trozo de un raíl que constituye el 72 por 100 de la longitud total del raíl. El trozo que queda pesa 45,2 kg. Determinar el peso del trozo cortado.

408. Un lingote de aleación de plata-cobre pesa 2 kg. El peso de la plata representa el $14\frac{2}{7}$ por 100 del peso del cobre. ¿Cuánta plata hay en el lingote?

409. Tres obreros reciben un total de 4.080 rublos por un trabajo. Las sumas percibidas por el primero y el segundo están en la relación de $7\frac{1}{2}$ a $1\frac{3}{4}$. El dinero recibido por el tercero es el $43\frac{1}{3}$ por 100 de lo que recibió el primero. ¿Cuál fue la paga de cada obrero?

410. Tres cajas contienen 64,2 kg de azúcar. La segunda contiene $\frac{4}{5}$ de lo que contiene la primera y la tercera el $42\frac{1}{2}$ por 100 de lo que tiene la segunda. ¿Qué cantidad de azúcar hay en cada caja?

411. Hay chatarra de dos tipos de acero que contienen el 5 por 100 y 40 por 100 de níquel. ¿Qué cantidad de cada tipo se necesita para obtener 140 Tm de acero conteniendo el 30 por 100 de níquel?

412. Un trozo de aleación cobre-estaño y peso 12 kg contiene el 45 por 100 de cobre. ¿Qué cantidad de estaño puro hay que añadir a este trozo para obtener una nueva aleación que contenga el 40 por 100 de cobre?

413. ¿Qué cantidad de alcohol puro hay que añadir a 735 gramos de una disolución de iodo en alcohol al 16 por 100 para obtener una disolución al 10 por 100?

414. Un lingote de aleación de cobre-cinc que pesa 24 kg se sumerge en agua y pierde $2\frac{8}{9}$ kg en peso. Determinar la cantidad de cobre y cinc en la aleación, sabiendo que en agua el cobre pierde $11\frac{1}{9}$ por 100 y el cinc $14\frac{2}{7}$ por 100 de su peso.

415. Se han de colocar raíles en un tramo de 20 km de longitud de una línea de ferrocarril. Se dispone de raíles de 25 m y de 12,5 m de longitud. Si se emplean todos los de 25 m, entonces habrá que añadir el 50 por 100 de los de 12,5 m para completar el tendido. Si se colocan todos los de 12,5 m entonces habrá que añadir el $66\frac{2}{3}$ por 100 de los de 25 m. Determinar el número de raíles disponibles de cada longitud.

416. Después de los exámenes finales en una escuela, los estudiantes intercambiaron fotografías. ¿Cuántos estudiantes había si se sabe que se intercambiaron un total de 870 fotografías?

417. La media geométrica de dos números supera en 12 al número más pequeño y la media aritmética de ambos es inferior en 24 al número mayor. Hallar los dos números.

418. Hallar tres números sabiendo que el segundo es mayor que el primero en la misma cantidad que el tercero es mayor que el segundo, que el producto de los dos más pequeños vale 85 y que el producto de los dos mayores vale 115.

419. El número a es la media artimética de tres números, y b es la media aritmética de sus cuadrados. Expresar la media aritmética de sus productos dos a dos en función de a y b.

420. Una chapa rectangular de estaño de perímetro 96 cm se usa para hacer una caja sin tapa. Para ello se corta un cuadrado de 4 cm de lado en cada esquina y se sueldan los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones de la chapa usada si el volumen de la caja es 768 cm^3?

421. Hallar un número de dos cifras sabiendo que el cociente que se obtiene al dividirle por el producto de sus dígitos es igual a $2\frac{2}{3}$ y, además, que la diferencia entre el número buscado y el número que se obtiene al invertir el orden de los dos dígitos que lo forman es 18.

422. Hallar un número de dos cifras sabiendo que el número de unidades excede en dos al número de decenas y que el producto del número deseado por la suma de sus dígitos es 144.

423. Determinar un entero positivo con los datos siguientes: si se añade un 5 a la derecha el número resultante es divisible exactamente por un número que sobrepasa en 3 al buscado, siendo el cociente igual al divisor menos 16.

424. Hallar dos números de dos cifras que tengan la propiedad siguiente: si se añade un 0 seguido del número más pequeño a la derecha del mayor y se añade el mayor seguido de un 0 a la derecha del menor, entonces los dos números de cinco cifras así obtenidos la división del primero por el segundo da un cociente de 2 y un resto de 590. Se sabe también que la suma del doble del mayor y el triple del menor vale 72.

425. Se pide a un estudiante que multiplique 78 por un número de dos cifras en el que la cifra de las decenas es tres veces mayor que la de las unidades, por error intercambia los dígitos en el segundo factor y obtiene un número que es inferior en 2.808 al producto buscado. ¿Cuál era este producto buscado?

426. Dos estaciones de ferrocarril están separadas 96 km. Un tren recorre la distancia en 40 minutos menos que otro. La velocidad del primero es 12 km/h mayor que la del segundo. Determinar las velocidades de ambos trenes.

427. Dos personas salen simultáneamente de dos ciudades A y B y van una en dirección de la otra. La primera persona anda 2 km/h más deprisa que la segunda y llega a B una hora antes de que la segunda llegue a A. A y B distan 24 km. ¿Cuántos kilómetros recorre cada una de las personas en una hora?

428. La distancia entre A y B por ferrocarril es 66 km y por agua 80,5 km. Un tren sale de A cuatro horas después de la salida de un barco y llega a B 15 minutos antes que el barco. Determinar las velocidades medias del tren y del barco sabiendo que el primero va a 30 km/h más deprisa que el segundo.

429. Una sastrería tiene un encargo de 810 trajes y otra de 900 trajes en el mismo período de tiempo. La primera ha completado el pedido 3 días antes del plazo previsto y la segunda 6 días antes. ¿Cuántos trajes produce al día cada sastrería, sabiendo que la segunda hace por día 4 trajes más que la primera?

430. Dos barcos se encuentran, uno va hacia el Sur y el otro hacia el Oeste. Dos horas después del encuentro están separados 60 km. Hallar la velocidad de cada barco, sabiendo que la de uno de ellos es 6 km/h mayor que la del otro.

431. Un perro situado en el punto A sale en persecución de un zorro que está a una distancia de 30 metros. Cada tranco del perro es de 2 m, mientras que el del zorro es de 1 m. Si el perro da dos trancos en lo que el zorro da tres, ¿a qué distancia de A capturará el perro al zorro?

432. Suponiendo que las manecillas de un reloj se mueven sin saltos, ¿cuánto tardará la aguja de minutos en alcanzar a la horaria si el punto de partida fue las 4 en punto?

433. Un tren sale de la estación A en dirección a C vía B. La velocidad del tren entre A y B fue la requerida, pero bajó en un 25 por 100 entre B y C. En el viaje de regreso, la velocidad fue la correcta entre C y B, pero entre B y A bajó en un 25 por 100. ¿Cuánto tardará el tren en recorrer la distancia de A a C, sabiendo que se perdió el mismo tiempo en el tramo A-B que en el tramo B-C y que en el tramo A-C el tren perdió $\frac{5}{12}$ de hora menos que en el viaje de regreso (de C a A)?

434. Un ciclista tiene que hacer un viaje de 30 km. Sale 3 minutos tarde, pero viaja a 1 km/h más deprisa y llega a tiempo. Determinar la velocidad del ciclista.

435. Un tren rápido obligado a detenerse 16 minutos en un disco rojo y para recuperar este tiempo, viajó en un tramo de 80 km a 10 km/h más rápido que lo normal. ¿Cuál es la velocidad normal del tren?

436. Un tren tiene que recorrer 840 km en un tiempo determinado. En el punto medio tuvo que detenerse durante media hora y en el resto del recorrido aumentó su velocidad en 2 km/h. ¿Cuánto tiempo empleó el tren en el viaje?

437. Dos trenes salen uno hacia el otro de dos puntos separados 650 km. Si salen al mismo tiempo, se encontrarán al cabo de 10 horas, pero si uno de ellos sale 4 horas y 20 minutos antes que el otro, se encontrarán 8 horas después de la salida del segundo. Determinar la velocidad media de cada tren.

438. Dos trenes salen al mismo tiempo de las estaciones A y B separadas 600 km y viajan uno al encuentro del otro. El primer tren llega a B tres horas antes de que el segundo llegue a A. El primer tren recorre 250 km en el mismo tiempo en que el segundo recorre 200 km. Hallar la velocidad de cada tren.

439. Un viajero que va a tomar su tren ha cubierto 3,5 km en una hora y se da cuenta que a esa velocidad llegará una hora tarde. Entonces recorre el resto de la distancia a la velocidad de 5 km/h y llega 30 minutos antes de que salga el tren. Determinar la distancia que tenía que recorrer.

440. La distancia entre A y B por autopista es 19 km. Un ciclista sale de A en dirección a B a velocidad constante. Un coche sale de A 15 minutos después en la misma dirección. Al cabo de 10 minutos alcanza al ciclista y continúa hasta B, donde da la vuelta y al cabo de 50 minutos después de haber abandonado A encuentra por segunda vez al ciclista. Determinar las velocidades del ciclista y del coche.

441. Un tren correo sale de la estación A a las cinco de la madrugada en dirección de la estación B a 1.080 km de distancia. A las 8 de la mañana sale de B un tren rápido en dirección a A y viaja 15 km/h más deprisa que el tren correo. ¿Cuándo se encontrarán, sabiendo que el punto de encuentro es el punto medio entre A y B?

442. A dista 78 km de B. Un ciclista sale de A en dirección de B. Una hora después, otro ciclista sale de B en dirección de A y va 4 km/h más rápido que el primero. Se encuentran a 36 km de B. ¿Cuánto hace que ha salido cada uno y cuáles son sus velocidades?

443. Dos caminantes parten, uno en dirección del otro, al mismo tiempo y se encuentran al cabo de 3 horas y 20 minutos. ¿Cuánto tardaría cada uno de ellos en recorrer la distancia completa, sabiendo que el primero llega al punto de partida del segundo 5 horas después que el segundo llega al punto de partida del primero?

444. Dos andarines salen uno al encuentro del otro, el primero de A y el segundo de B. El primero sale de A seis horas después que el segundo sale de B y cuando se encuentren resulta que ha recorrido 12 km menos que el segundo. Después de encontrarse continúan andando a la misma velocidad que antes y el primero de ellos llega a B ocho horas más tarde, mientras que el segundo tarda en llegar a A nueve horas. Determinar la distancia entre A y B y la velocidad de ambos.

445. Un dirigible y un avión vuelan uno al encuentro del otro, habiendo abandonado sus bases al mismo tiempo. Cuando se encuentran, el dirigible ha recorrido 100 km menos que el avión y llega al punto de partida del avión tres horas más tarde del encuentro. El avión llega al aeropuerto del dirigible 1 hora y 20 minutos después del encuentro. Hallar las velocidades del avión y del dirigible y la distancia entre los aeropuertos.

446. Dos caminantes salen de A y B, respectivamente, al mismo tiempo, uno al encuentro del otro. Cuando se encuentran, el primero ha recorrido a km más que el segundo. Si continúan sus caminos a la misma velocidad que antes, el primero llegará a B m horas después del encuentro y el segundo llegará a A n horas después del encuentro. Hallar la velocidad de cada uno de ellos.

447. Dos cuerpos se mueven a lo largo de una circunferencia. El primero recorre la circunferencia completa 5 segundos más deprisa que el segundo. Si giran en el mismo sentido coincidirán cada 100 segundos. ¿Qué porción de circunferencia (en grados) recorre cada cuerpo en un segundo?

448. Dos cuerpos que recorren una circunferencia en el mismo sentido coinciden cada 56 minutos. Si se mueven con la misma velocidad pero en sentidos opuestos coincidirán cada 8 minutos. Además, cuando se mueven en sentidos opuestos, la distancia (medida sobre la circunferencia) entre los cuerpos que se están aproximando disminuye de 40 metros a 26 metros en 24 segundos. ¿Cuál es la velocidad de cada cuerpo en metros por minuto y qué longitud tiene la circunferencia?

449. Dos puntos se desplazan uniformemente moviéndose en el mismo sentido a lo largo de una circunferencia de longitud c y coinciden cada t segundos. Hallar la velocidad de cada punto, sabiendo que uno de ellos recorre el círculo completo n segundos más deprisa que el otro.

450. La distancia entre dos ciudades a lo largo de un río es 80 km. Un barco tarda en hacer un viaje de ida y vuelta entre las ciudades 8 horas y 20 minutos. Hallar la velocidad del barco en agua en reposo, sabiendo que la velocidad del agua es 4 km/h.

451. Una motora recorre 28 km aguas abajo y regresa inmediatamente. Tarda 7 horas entre ida y vuelta. Hallar la velocidad de la motora respecto del agua si la velocidad de ésta es 3 km/h.

452. Una persona va remando desde la ciudad A a la ciudad B y vuelve en 10 horas. Las ciudades distan 20 km una de otra. Hallar la velocidad de la corriente del agua, sabiendo que rema 2 km aguas arriba en el mismo tiempo que rema 3 km aguas abajo.

453. Un barco recorre la distancia entre A y B en dos días. En el viaje de regreso tarda 3 días. Determinar el tiempo que tardará una balsa que flota en el río en llegar de A a B.

454. Dos cuerpos, M_1 y M_2 se mueven uniformemente uno hacia el otro desde A y B, que están a 60 m de distancia. M_1 sale de A 15 segundos antes que M_2 salga de B. Al llegar a sus puntos de destino, los dos cuerpos dan la vuelta e inmediatamente regresan a las mismas velocidades que antes. Su primer encuentro tiene lugar 21 segundos después de la salida de M_1 y el segundo 45 segundos después de la salida de M_1. Hallar la velocidad de cada cuerpo.

455. Una carretera que une la ciudad A con la ciudad B tiene un primer tramo de 3 km cuesta arriba, después 5 km en llano y por último 6 km cuesta abajo. Un recadero sale de A en dirección de B y, una vez cubierta la mitad del recorrido, se da cuenta que ha olvidado unos paquetes y tiene que volver por ellos. Al cabo de 3 horas y 36 minutos después de salir llega a A. Sale de A por segunda vez y tarda 3 horas y 27 minutos en llegar a B y hace el viaje de regreso a A en 3 horas y 51 minutos. ¿Cuál es la velocidad del recadero cuando va cuesta arriba, cuando va en llano y cuando va cuesta abajo, suponiendo que en cada uno de estos tres tramos la velocidad permanece constante?

456. Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente completará el trabajo a realizar tres días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas de más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

457. Un obrero hace un cierto número de piezas idénticas en un tiempo determinado. Si hubiera hecho 10 piezas más cada día, habría terminado el trabajo completo $4\frac{1}{2}$ días antes de lo previsto, y si hubiera hecho 5 piezas menos cada día habría tardado 3 días más de lo previsto. ¿Cuántas piezas hizo y en cuánto tiempo?

458. Una mecanógrafa tenía que realizar un trabajo en un tiempo determinado escribiendo un cierto número de páginas cada día. Calculó que si escribiera 2 páginas más cada día, completaría el trabajo 2 días antes de lo previsto, pero si hubiera hecho el 60 por 100 más de su cuota de trabajo, habría terminado el trabajo 4 días antes de lo previsto y habría escrito 8 páginas más de las precisas. ¿Cuál era la cuota de trabajo diaria y en cuánto tiempo tenía que completar el trabajo?

459. Dos obreros juntos completan una cierta tarea en 8 horas. Trabajando individualmente, el primer obrero podía hacer el trabajo 12 horas más deprisa que lo podría hacer el segundo. ¿Cuántas horas tardaría cada obrero en hacer individualmente el trabajo?

460. Dos tuberías tardan 6 horas en llenar una piscina. Una sola la llenaría 5 horas más deprisa que la otra sola. ¿Cuánto tardará cada tubería sola en llenar la piscina?

461. Dos obreros tienen que hacer un trabajo consistente en mecanizar un lote de piezas idénticas. Después que el primero ha trabajado durante 7 horas y el segundo durante 4 horas, han completado $^5/_9$ del total del trabajo. Si siguieran trabajando los dos a la vez durante 4 horas más, les quedaría por hacer $^1/_{18}$ del trabajo. ¿Cuánto tardaría cada uno en hacer el trabajo completo individualmente?

462. Cuatro grúas de puerto idénticas se usan para cargar un barco. Cuando llevan 2 horas trabajando, se ponen a trabajar con ellas dos grúas más de menor capacidad, con lo que se completa la carga en tres horas. Si hubieran empezado a trabajar todas juntas, se habría completado la carga en 4,5 horas. Determinar el tiempo (en horas) necesario para que realice el trabajo completo una grúa sola de las más potentes y una grúa sola de las de menor potencia.

463. Un trabajo consiste en servir material de construcción desde una estación de ferrocarril a una obra en 8 horas. El material se tiene que servir con 30 camiones de tres toneladas. Estos camiones trabajan durante dos horas y después se unieron 9 camiones de cinco toneladas para ayudar. El trabajo se completó en el tiempo previsto. Si los camiones de cinco toneladas hubieran empezado la operación y los camiones de tres toneladas hubieran entrado a trabajar dos horas más tarde, sólo se hubiera servido $^{13}/_{15}$ del material en el tiempo previsto. Determinar cuántas horas tardaría un camión de tres toneladas solo, uno de cinco toneladas solo y 30 de cinco toneladas en servir todo el material.

464. Dos mecanógrafas realizan un trabajo. La segunda empieza a trabajar una hora después que la primera. Tres horas después que la primera mecanógrafa ha empezado el trabajo queda aún por hacer $^9/_{20}$ del trabajo. Cuando terminan observan que cada una ha realizado la mitad del trabajo. ¿Cuántas horas tardaría cada una en hacer el trabajo individualmente?

465. Dos trenes salen de las estaciones A y B uno hacia el otro y el segundo sale media hora después que el primero. Dos horas después de salir el primer tren la distancia entre los trenes es $^{19}/_{30}$ de la distancia total entre A y B. Los trenes se encuentran a mitad de camino entre A y B. ¿Cuánto tardará cada tren en recorrer la distancia entre A y B?

466. Una bandeja rectangular de 20 cm x 90 cm x 25 cm (paralelepípedo rectangular) se usar para hacer negativos fotográficos. El agua llega a través de un tubo de goma y sale a través de otro para mantener el agua en agitación. Se necesitan 5 minutos menos para vaciar la bandeja a través del segundo tubo que en llenarla mediante el primero, con el segundo cerrado. Si se abren ambos tubos, la bandeja completa se vaciará en una hora. Hallar la cantidad de agua que deja pasar cada tubo en un minuto.

467. Una obra de construcción requiere el vaciado de 8.000 m^3 de tierra en un tiempo especificado. La operación se completará 8 días antes de tiempo debido a que el equipo de excavación sobrepasó su plan de trabajo en 50 m^3 diarios. Determinar el límite de tiempo original y lo que se hizo de más diariamente en tanto por ciento.

468. Una línea de ferrocarril fue reparada por dos equipos de obreros. Cada equipo reparó 10 km a pesar de que el segundo trabajó un día menos que el primero. ¿Cuántos kilómetros reparó cada equipo por día si ambos juntos reparaban 4,5 km diariamente?

469. Dos obreros juntos hicieron un trabajo en 12 horas. Si al principio hubiera hecho el primer obrero la mitad del trabajo y después el segundo hubiera completado la otra mitad, se habrían necesitado 25 horas. ¿Cuánto tardaría cada obrero en hacer individualmente el trabajo completo?

470. Dos tractores de características distintas, trabajando juntos, aran una finca en t días. Si empieza uno de ellos solo y ara la mitad de la finca, y a continuación, el otro ara la otra mitad de la finca, se completa la operación en k días. ¿Cuántos días tardará cada tractor en arar individualmente la finca entera?

471. Tres dragas distintas están dragando el canal de entrada a un puerto. La primera draga, trabajando sola, tardaría 10 días más, la segunda, trabajando sola, necesitaría 20 días más, y la tercera, trabajando sola, necesitaría seis veces más de tiempo que las tres trabajando simultáneamente. ¿Cuánto tardaría cada draga en hacer el trabajo individualmente?

472. Dos trabajadores, uno de los cuales empieza a trabajar $1\frac{1}{2}$ días después que el otro, pueden completar un trabajo en 7 días. Si cada uno de ellos hiciera el trabajo individualmente, el primero habría necesitado 3 días más que el segundo que empezó después. ¿Cuántos días tardará cada obrero en realizar el trabajo individualmente?

473. Dos tractores distintos, trabajan juntos, aran una finca en 8 horas. Si hubiera empezado un tractor arando la mitad de la finca y hubieran continuado los dos juntos arando la mitad restante, se hubiera hecho el trabajo completo en 10 días. ¿Cuántos días tardaría cada tractor en arar la finca entera individualmente?

474. Un cierto número de hombres tiene que cavar un hoyo y podían terminar el trabajo en 6 horas si empezaran todos a la vez, pero empiezan uno después de otro, siendo iguales los intervalos entre los tiempos de comienzo. Después que el último ha comenzado a trabajar transcurre un intervalo de la misma duración hasta que el trabajo se termina, teniendo en cuenta que cada uno de ellos no deja de trabajar hasta que se ha terminado el trabajo. ¿Cuánto tiempo trabajaron, sabiendo que el primero en empezar trabajó 5 veces más que el último en empezar?

475. Tres obreros juntos pueden realizar una obra en t horas. El primero de ellos, trabajando solo, puede hacer el trabajo dos veces más deprisa que el tercero y una hora más rápido que el segundo. ¿Cuánto tardaría cada uno por separado en hacer la obra completa?

476. Dos grifos llenan de agua un depósito. Al principio se abre el primer grifo durante un tercio del tiempo que hubiera necesitado el segundo grifo solo para llenar el depósito. Después se abre el segundo durante un tercio del tiempo que necesitaría el primer grifo solo para llenar el depósito. En estas condiciones se han llenado $^{13}/_{18}$ del depósito. Calcular el tiempo que necesitan cada uno de los grifos por separado para llenar el depósito sabiendo que los dos juntos tardan 3 horas y 36 minutos?

477. En la construcción de una planta de potencia eléctrica un equipo de albañiles tiene que colocar 120.000 ladrillos en un tiempo determinado. El equipo completó el trabajo 4 días antes de lo previsto. Determinar el número previsto de ladrillos a colocar diariamente y el número real de ladrillos colocados, sabiendo que en tres días el equipo colocó 5.000 ladrillos más que los previstos a colocar en 4 días.

478. Tres vasijas contienen agua. Si se vierte $^{1}/_{3}$ del contenido de la primera en la segunda y después $^{1}/_{4}$ del agua que hay ahora en la segunda, en la tercera y, por último, $^{1}/_{10}$ del agua que hay ahora en la tercera se vierte en la primera, entonces cada vasija contendrá 9 litros. ¿Qué cantidad de agua había inicialmente en cada vasija?

479. Se llena un tanque con alcohol puro. Se extrae una cierta cantidad de alcohol y se sustituye por agua; a continuación se extrae la misma cantidad de mezcla alcohol-agua, con lo que quedan 49 litros de alcohol puro en el tanque. Este tiene una capacidad de 64 litros. ¿Qué cantidad de alcohol se extrajo la primera vez y la segunda? (Se supone que el volumen de la mezcla es igual a la suma de los volúmenes de agua y alcohol; en realidad es algo menor.)

480. Se llena con alcohol una vasija de 20 litros. Parte del alcohol se vierte en otra vasija de igual capacidad, que se llena a continuación con agua. La mezca así obtenida se vierte en la primera vasija hasta llenarla. A continuación se vierten $6\frac{2}{3}$ litros de la primera vasija en la segunda. Ahora ambas vasijas contienen la misma cantidad de alcohol. ¿Qué cantidad de alcohol se pasó en primer lugar de la primera vasija a la segunda?

481. Se llena una vasija de 8 litros con aire que contiene el 16 por 100 de oxígeno. Se deja escapar parte de él y se sustituye por una cantidad igual de nitrógeno; a continuación se deja escapar la misma cantidad que antes de la mezcla actual y se vuelve a sustituir por nitrógeno. Ahora queda en la mezcla un 9 por 100 de oxígeno. Determinar la cantidad de mezcla de gases que se dejó escapar cada vez de la vasija.

482. Dos granjeras llevan al mercado entre las dos 100 huevos. Habiendo vendido cada una a precios distintos, ambas obtienen la misma cantidad de dinero. Si la primera hubiera vendido tantos huevos como la segunda habría recibido 72 rublos; si la segunda hubiera vendido tantos huevos como la primera habría recibido 32 rublos. ¿Cuántos huevos llevó al mercado cada una?

483. Dos granjeros reúnen un total de a litros de leche y al venderlos consiguen igual cantidad de dinero cada uno, aunque venden a precios distintos. Si el primero vendiera la misma cantidad de leche que el segundo recibiría m rublos y si el segundo vendiera igual cantidad de leche que el primero recibiría n rublos $(m > n)$. ¿Cuántos litros de leche tenía cada uno?

484. Dos motores de combustión interna de la misma potencia se sometieron a un ensayo de rendimiento y se encontró que uno de ellos consumía 600 gramos de combustible mientras que el otro, que había funcionado 2 horas menos, consumió 384 gramos. Si el primer motor consumiera la misma cantidad de combustible por hora que el segundo y el segundo la misma que el primero, entonces ambos motores consumirían la misma cantidad de combustible durante el mismo período de funcionamiento que antes. ¿Cuánto combustible consume cada motor por hora?

485. Hay dos grados de aleación oro-plata. En uno de ellos los metales están en relación 2:3 y en el otro en la relación 3:7. ¿Qué cantidad de cada aleación se debe tomar para obtener 8 kg de una nueva aleación en la que la relación oro-plata sea 5:11?

486. Un barril contiene una mezcla de alcohol y agua en una proporción de 2 a 3, otro barril, en una proporción de 3 a 7. ¿Cuántos cazos tenemos que sacar de cada barril para obtener 12 cazos de una mezcla en la que la proporción alcohol-agua sea de 3 a 5?

487. Una cierta aleación consta de dos metales que están en la relación 1 a 2, otra aleación contiene los mismos metales en una relación 2 a 3. ¿Qué cantidad de cada aleación hay que tomar para producir una tercera aleación que contenga los metales en la relación 17 a 27?

488. Dos ruedas están girando accionadas por una correa sin fin, la más pequeña da 400 revoluciones por minuto más que la grande. Esta da 5 revoluciones en un intervalo de tiempo que es un segundo mayor que el necesario para que la más pequeña dé 5 revoluciones. ¿Cuántas revoluciones por minuto da cada una?

489. En una distancia de 18 metros, cada rueda delantera de un vehículo gira 10 revoluciones más que cada rueda trasera. Si se aumenta en 6 decímetros la circunferencia de la rueda delantera y se reduce en 6 decímetros la circunferencia de la rueda trasera, entonces sobre la misma distancia cada rueda delantera completará 4 revoluciones más que la rueda trasera. Hallar las circunferencias de ambas ruedas.

490. Un carguero con 600 toneladas de mercancía se descarga en tres días, descargando $^2/_3$ del total en los días primero y tercero. La cantidad de mercancía descargada durante el segundo día es menor que la descargada el primer día y la cantidad descargada el tercer día es menor que la descargada el segundo día. La diferencia entre la reducción en tanto por ciento de la cantidad descargada el tercer día respecto de la descargada el segundo día y la reducción en tanto por ciento de la cantidad descargada el segundo día respecto de la cantidad descargada el primer día es 5. Determinar lo que se descarga cada día.

491. Dos soluciones, la primera conteniendo 800 gramos y la segunda 600 gramos de ácido sulfúrico anhidro, se mezclan para producir 10 kg de una nueva solución de ácido sulfúrico. Determinar los pesos de las soluciones primera y segunda en la mezcla, sabiendo que el contenido de ácido sulfúrico anhidro en la primera solución es un 10 por 100 mayor que en la segunda.

492. Se tienen dos aleaciones diferentes de cobre, la primera con un 40 por 100 menos de cobre que la segunda. Cuando se mezclan, la aleación resultante contiene un 36 por 100 de cobre. Determinar el tanto por ciento de cobre en ambas aleaciones, sabiendo que había 6 kg de cobre en la primera y 12 kg de cobre en la segunda.

493. Dos trenes –uno de mercancías de 490 metros de largo y otro de pasajeros de 210 metros de largo– viajan uno en dirección de otro por vías paralelas. El conductor del tren de pasajeros ve al tren de mercancías cuando éste está a 700 metros de distancia, 28 segundos después se cruzan. Determinar la velocidad de cada tren, sabiendo que el tren de mercancías tarda 35 segundos más en pasar los semáforos que el de pasajeros.

494. Un tren de mercancías consta de vagones cisterna, de cuatro y ocho ruedas que transportan aceite. El tren pesa 940 toneladas. Se pide determinar el número de vagones cisterna de cuatro y ocho ruedas, también su peso, sabiendo que el número de vagones de cuatro ruedas es 5 veces mayor que el de vagones de ocho ruedas; cada vagón de ocho ruedas pesa tres veces lo que un vagón de cuatro ruedas y el peso neto de aceite (es decir, menos el peso de los vagones) en todos los vagones de ocho ruedas es de 100 toneladas más que el peso de todos los vagones de cuatro ruedas cargados. Los vagones de ocho ruedas transportan 40 toneladas de aceite y el peso del aceite en el vagón de cuatro ruedas es 0,3 del peso del aceite en el vagón de ocho ruedas.

495. Dos máquinas perforadoras de túneles trabajando en los dos extremos de un túnel tienen que completar la perforación en 60 días. Si la primera máquina hace el 30 por 100 del trabajo asignado, y la segunda el $26\frac{2}{3}$ por 100, entonces ambas perforarán 60 metros de túnel. Si la primera máquina ha realizado $^2/_3$ del trabajo asignado a la segunda, y la segunda, 0,3 del trabajo asignado a la primera, entonces la primera máquina necesitaría 6 días más que la segunda. Determinar cuántos metros de túnel perfora cada máquina por día.

496. Dos cuadrillas de ferroviarios trabajando conjuntamente terminan una reparación en una sección de la vía en 6 días. Para hacer el 40 por 100 del trabajo, la primera cuadrilla sola necesitaría dos días más de lo que la segunda cuadrilla sola necesitaría para realizar $13\frac{1}{3}$ por 100 del trabajo completo. Determinar cuántos días tardaría cada cuadrilla en reparar la sección completa por separado.

497. Se han de transportar seiscientas noventa toneladas de mercancías desde un muelle a una estación de ferrocarril mediante cinco camiones de 3 toneladas y diez de $1\frac{1}{2}$-toneladas. En pocas horas, los camiones han transportado $^{25}/_{46}$ de las mercancías. Para completar el transporte a tiempo, se han de transportar las mercancías restantes en un intervalo de tiempo 2 horas menor que el ya transcurrido. Se completó el transporte gracias a que los conductores de los camiones comenzaron a hacer un viaje por hora más que antes. Determinar cuántas horas tardaron en transportar todas las mercancías y también el número de viajes por hora que se hacían al principio, sabiendo que los camiones de $1\frac{1}{2}$-toneladas hacen un viaje por hora más que los camiones de tres toneladas.

Nota. Se supone que todos los camiones iban completamente cargados en cada viaje.

498. Un terreno deportivo tiene la forma de un rectángulo de lados a y b metros. Está rodeado de una pista cuyo borde exterior también es un rectángulo de lados paralelos a los del terreno deportivo y separados de él la misma distancia. El área de la pista es igual a la del terreno. Hallar el ancho de la pista.

499. Un auditorium tiene a sillas dispuestas en filas, siendo el mismo el número de sillas en cada fila. Si se añaden b sillas a cada fila y se reduce en c el número de filas, el número total de localidades aumentará un décimo del número original. ¿Cuántas sillas hay en cada fila?

500. Dos móviles separados d metros se mueven uno hacia el otro y se encuentran en a segundos. Si se mueven a las mismas velocidades que antes, pero en el mismo sentido, se encontrarán despues de b segundos. Determinar la velocidad de cada móvil.

501. Un motorista y un ciclista parten simultáneamente uno hacia el otro de los puntos A y B separados d kilómetros. Al cabo de dos horas se cruzan y continúan sus caminos respectivos. El motorista llega a B t horas antes de que el ciclista llegue a A. Hallar la velocidad de los dos vehículos.

502. Un caminante sale del punto A en dirección de B; a horas después, un ciclista sale de B al encuentro del caminante y le encuentra b horas después. ¿Cuánto tardarán el caminante y el ciclista en recorrer la distancia completa entre A y B , sabiendo que el ciclista necesita c horas menos que el caminante?

503. El tren A, de velocidad v km/h, sale después que el tren B de velocidad v_1 km/h. La diferencia entre los instantes de salida (retraso del tren A) se calcula de manera que ambos trenes lleguen al mismo tiempo al punto de destino. El tren B recorre $^2/_3$ de la distancia y entonces tiene que reducir su velocidad a la mitad. Como consecuencia, el tren A alcanza al tren B a a km del destino. Determinar la distancia a la estación de destino.

504. Un hombre coloca dinero en una caja de ahorros y un año después recibe un interés de 15 rublos. Añade otros 85 rublos y deposita el dinero durante otro año. Transcurrido este nuevo año la suma del capital más intereses es 420 rublos. ¿Qué suma de dinero depositó inicialmente y qué interés pagaba la caja de ahorros?

505. La producción de la máquina-herramienta A es el m por 100 de la suma de las producciones de las máquinas B y C, y la producción de B es el n por 100 de la suma de las producciones de A y C. ¿Cuál es el tanto por ciento del total producido por A y B que produce C?

506. El aumento en la producción de una fábrica comparada con la del año anterior es del p por 100 durante el primer año y del q por 100 durante el segundo. ¿Cuál será este porcentaje de aumento en el tercer año para que el aumento medio anual de la producción durante tres años sea igual al r por 100?

507. El a por 100 de una cierta cantidad de mercancías se vende con un beneficio del p por 100 y el b por 100 del resto de las mercancías se vende con un beneficio del q por 100. ¿Con qué beneficio se han de vender las mercancías restantes si el beneficio total ha de ser del r por 100?

508. De dos lingotes de aleaciones con contenido en cobre distinto se cortan piezas iguales (en peso); los lingotes pesaban m kg y n kg. Se funde cada pieza cortada con el resto del otro lingote y, de esta manera, el contenido en cobre de las dos nuevas aleaciones es el mismo. Hallar el peso de cada una de las piezas cortadas.

509. Se coloca en n montones una cierta cantidad de dinero. Del primer montón se quita una n-ésima parte del dinero que tenía y se pone en el segundo. A continuación se quita de este segundo montón aumentado, una n-ésima parte que se coloca en el tercero. La misma operación se realiza con el tercero y el cuarto y así sucesivamente. Por último, se quita una n-ésima parte del n-ésimo montón y se coloca en el primero. Una vez concluidas las operaciones cada montón tiene A rublos. ¿Cuánto dinero había inicialmente en cada montón? (Se puede reducir al caso $n = 5$.)

Parte Segunda

GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA

Capítulo 8 GEOMETRIA PLANA

510. El perímetro de un triángulo rectángulo vale 132 y la suma de los cuadrados de los lados 6.050. Hallar los lados.

511. En un paralelogramo se dan: el ángulo agudo α y las distancias m y p entre el punto de intersección de las diagonales y los lados desiguales. Determinar las diagonales y el área del paralelogramo.

512. La base de un triángulo isósceles es igual a 30 cm y la altura a 20 cm. Determinar la altura sobre uno de los lados.

513. La base de un triángulo mide 60 cm, la altura 12 cm y la mediana sobre la base 13 cm. Determinar los lados.

514. Sobre los lados de un triángulo rectángulo isósceles de cateto b se construyen, hacia el exterior, tres cuadrados. Se unen los centros de estos tres cuadrados con líneas rectas. Hallar el área del triángulo así obtenido.

515. Los lados de un cuadrado están divididos en la relación m a n, y adyacentes a cada vértice, quedan un segmento grande y uno pequeño. Los puntos sucesivos de división se unen mediante líneas rectas. Hallar el área del cuadrilátero obtenido, sabiendo que el lado del cuadrado dado es igual a a.

516. En un cuadrado se inscribe otro cuyos vértices caen en los lados del primero y los lados forman 30 grados con los del primero. ¿A qué fracción del área del cuadrado dado es igual el área del cuadrado inscrito?

517. En un cuadrado de lado a se inscribe otro cuyos vértices están sobre los lados del primero. Determinar los segmentos en que los vértices del segundo cuadrado dividen a los lados del primero, sabiendo que el área de segundo vale $\frac{25}{49}$ del área del primero.

518. En un rectángulo de lados 3 m y 4 m está inscrito otro rectángulo cuyos lados están en la relación 1 : 3. Hallar los lados de este rectángulo.

519. En un triángulo equilátero ABC de lado a está inscrito otro triángulo equilátero LMN, cuyos vértices dividen cada lado del triángulo ABC en la relación 1 : 2. Hallar el área del triángulo LMN.

520. Hallar los lados de un triángulo rectángulo, dados su perímetro $2p$ y altura h.

521. En los lados CA y CB de un triángulo isósceles ABC se señalan dos segmentos iguales CM y CN. Determinar la longitud de estos segmentos conocidos el perímetro $2P$ del triángulo ABC, su base $AB = 2a$ y el perímetro $2p$ del rectángulo AMNB definido por la recta MN.

522. Dado un trapecio rectángulo con bases a y b y lado más corto c, determinar la distancia entre el punto de intersección de las diagonales del trapecio y la base a y entre el punto de intersección y el lado más corto.

523. Hallar el área de un triángulo isósceles sabiendo que su base mide 12 cm y que la altura es igual al segmento que une los puntos medios de la base y de uno de los lados.

524. El perímetro de un rombo es igual a $2p$ cm y la suma de sus diagonales vale m cm. Hallar el área del rombo.

525. La base mayor de un trapecio mide a, y la menor, b; los ángulos en la base menor son $30°$ y $45°$. Hallar el área del trapecio.

526. Calcular el área de un trapecio cuyos lados paralelos miden 16 cm y 44 cm y los no paralelos 17 cm y 25 cm.

527. Hallar el área de un cuadrado inscrito en un triángulo equilátero de lado a.

528. La altura de un triángulo divide a la base en dos partes que miden 36 cm y 14 cm. Una recta perpendicular a la base divide al triángulo en dos partes de áreas iguales. ¿Cuánto miden los segmentos en que esta perpendicular divide a la base?

529. La altura de un triángulo es igual a 4, divide a la base en dos partes que están en la relación 1 : 8. Hallar la longitud de un segmento paralelo a la altura y que divida al triángulo en dos partes de áreas iguales.

530. Un triángulo ABC está dividido en tres figuras de áreas iguales mediante rectas paralelas al lado AC. Calcular las partes en que el lado AB, igual a a, es dividido por las líneas paralelas.

531. Una recta paralela a la base de un triángulo, de área S, separa en él un triángulo de área q. Determinar el área de un cuadrilátero, cuyos tres vértices coinciden con los del triángulo menor y el cuarto esté en la base del triángulo mayor.

532. Los lados paralelos de un trapecio son iguales a a y b. Hallar la longitud del segmento paralelo a ellos y que divide al área del trapecio en dos partes de áreas iguales.

533. Se trazan perpendiculares desde el vértice del ángulo obtuso de un rombo a sus lados. La longitud de cada perpendicular es igual a a, siendo la distancia entre sus pies b. Determinar el área del rombo.

534. Hallar el área de un triángulo, sabiendo que dos de sus lados son iguales a 27 cm y 29 cm, respectivamente, y la mediana trazada al tercer lado es igual a 26 cm.

535. Dados dos lados b y c de un triángulo y su área $S = \frac{2}{5} bc$. Hallar el tercer lado a del triángulo.

536. Dadas las bases a y b y los lados c y d de un trapecio, determinar sus diagonales m y n.

537. Se da un paralelogramo, cuyo ángulo agudo vale 60° determinar la relación de las longitudes de sus lados, sabiendo que la relación de los cuadrados de sus diagonales vale $\frac{19}{7}$.

538. Desde un punto arbitrario tomado en el interior de un triángulo isósceles se trazan perpendiculares a todos los lados. Demostrar que la suma de las tres perpendiculares es igual a la altura del triángulo.

539. Desde un punto exterior a un círculo se trazan dos secantes. El segmento interno (cuerda) de la primera secante mide 47 m y el externo 9 m; la cuerda de la segunda secante sobrepasa al segmento externo en 72 m. Determinar la longitud de la segunda secante.

540. Desde un punto que dista m cm del centro de un círculo se trazan dos tangentes al círculo. La distancia entre los puntos de tangencia es a. Determinar el radio del círculo.

541. En el interior de un círculo de radio 13 cm se dan un punto M que dista 5 cm del centro del círculo. Por M se traza una cuerda $AB = 25$ cm. Hallar la longitud de los segmentos en que el punto M divide a la cuerda AB.

542. En un triángulo isósceles el ángulo del vértice es igual a α. Determinar la relación de los radios de los círculos inscrito y circunscrito.

543. Los lados de un triángulo son: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Dos de ellos (a y b) son tangentes a un círculo cuyo centro está sobre el tercer lado. Determinar el radio del círculo.

544. Un triángulo isósceles c ángulo desigual 120° está circunscrito a un círculo de radio R. Hallar sus lados.

545. Con el cateto mayor de un triángulo rectángulo como diámetro se traza un semicírculo. Hallar la semicircunferencia, sabiendo que el

otro cateto mide 30 cm y la cuerda que une el vértice del ángulo recto con el punto de intersección de la hipotenusa y el semicírculo mide 24 cm.

546. En un triángulo rectángulo se inscribe un semicírculo de manera que su diámetro caiga sobre la hipotenusa y su centro divida a ésta en dos segmentos de dimensiones 15 cm y 20 cm. Determinar la longitud del arco de la semicircunferencia comprendida entre los puntos en que los catetos tocan al semicírculo.

547. En un triángulo isósceles de base 4 cm y altura 6 cm se construye un semicírculo con uno de los lados como diámetro. Los puntos en que la semicircunferencia corta a la base y al otro lado se unen mediante una recta. Determinar el área del cuadrilátero así obtenido, que está inscrito en el semicírculo.

548. Dado un triángulo isósceles de base $2a$ y altura h, se inscribe en él un círculo y se traza una tangente al círculo paralela a la base del triángulo. Hallar el radio del círculo y la longitud del segmento de tangente comprendido entre los dos lados del triángulo.

549. Desde un punto exterior a un círculo se trazan dos secantes cuyas porciones externas miden 2 m. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de las secantes y el círculo, sabiendo que las longitudes de sus dos lados opuestos son 6 m y 2,4 m.

550. Los lados de un triángulo miden 6, 7 y 9 cm. Tomando como centros sus vértices se trazan tres círculos mutuamente tangentes: el círculo cuyo centro es el vértice del ángulo menor del triángulo es tangente internamente a los otros dos, mientras que éstos son entre sí tangentes exteriormente. Hallar los radios de los círculos.

551. Una tangente exterior a dos círculos de radios 5 cm y 2 cm es 1,5 veces mayor que su tangente interior. Determinar la distancia entre los centros de los círculos.

552. La distancia entre los centros de dos círculos cuyos radios son iguales a 17 cm y 10 cm es 21 cm. Determinar las distancias entre los centros y el punto en que la línea que une los centros corta a una tangente común a los círculos.

553. Se trazan la tangente interior y las dos tangentes exteriores a dos círculos, tangentes exteriores, de radios R y r. Determinar la longitud del segmento de la tangente interior contenido entre las tangentes exteriores.

554. Se trazan las tangentes exteriores comunes a dos círculos, tangentes exteriormente, de radios R y r. Hallar el área del trapecio limitado por las tangentes y las cuerdas que unen los puntos de tangencia.

555. Dos círculos de radios R y r son tangentes exteriormente. Se traza una tangente exterior común a ambos con lo que se obtiene un triángulo curvilíneo. Hallar el radio del círculo inscrito en este triángulo.

556. Se trazan por un punto de un círculo dos cuerdas (iguales a a y b). El área del triángulo formado al unir sus extremos es S. Determinar el radio del círculo.

557. En un triángulo de radio R se trazan tres cuerdas paralelas, a un lado del centro, cuyas longitudes respectivas son iguales a los lados del exágono regular, cuadrilátero regular y triángulo regular inscritos en el círculo. Determinar la relación entre el área de la porción de círculo comprendida entre las cuerdas segunda y tercera y la contenida entre las cuerdas primera y segunda.

558. Determinar el área de un círculo inscrito en un triángulo rectángulo, sabiendo que la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de longitudes 25,6 cm y 14,4 cm.

559. Se inscribe un círculo en un rombo de lado a y ángulo agudo 60°. Determinar el área de un rectángulo cuyos vértices caen en los puntos de tangencia del círculo y los lados del rombo.

560. A un círculo de radio R se trazan cuatro tangentes que forman un rombo, cuya diagonal mayor es igual a 4 R. Determinar el área de cada una de las figuras limitada por dos tangentes trazadas desde un punto común y el arco menor del círculo contenido entre los puntos de tangencia.

561. El área de un trapecio isósceles circunscrito a un círculo es igual a S. Determinar la longitud del lado del trapecio, sabiendo que el ángulo de la base es igual a $\frac{\pi}{6}$.

562. Se circunscribe un trapecio isósceles de área 20 cm^2 a un círculo de radio 2 cm. Hallar los lados del trapecio.

563. Se circunscribe un trapecio a un círculo y sus lados no paralelos forman ángulos agudos α y β con el mayor de los lados paralelos. Determinar el radio del círculo, sabiendo que el área del trapecio es igual a Q.

564. A un círculo de radio r se circunscribe un trapecio rectángulo cuyo lado menor mide $3r/2$. Hallar el área del trapecio.

565. El centro de un círculo inscrito en un trapecio rectángulo dista 2 cm y 4 cm de los extremos del mayor de los lados no paralelos. Hallar el área del trapecio.

566. Se inscribe un círculo en un triángulo equilátero de lado a. A continuación se inscriben tres triángulos más en el mismo triángulo de manera que sean tangentes al primero y a los lados del triángulo, a continuación otros tres círculos tangentes a los tres anteriores y a los lados del triángulo y así sucesivamente. Hallar el área total de todos los círculos inscritos (es decir, el límite de la suma de las áreas de los círculos inscritos).

567. Se inscribe un triángulo ABC en un círculo; por el vértice A se traza una tangente que corta a la prolongación del lado BC en el punto D. Por los vértices B y C se trazan perpendiculares a la tangente, midiendo 6 cm la menor de estas perpendiculares. Determinar el área del trapecio formado por las perpendiculares, el lado BC y el segmento de la tangente, sabiendo que $BC = 5$ cm, $AD = 5\sqrt{6}$ cm.

568. En un triángulo equilátero de lado a se inscriben tres círculos iguales tangentes uno a otro. Cada uno de los círculos está en contacto con dos lados del triángulo dado. Determinar los radios de los círculos.

569. En el interior de un triángulo equilátero de lado a hay tres círculos iguales a los lados del triángulo y mutuamente tangentes entre sí. Hallar el área del triángulo curvilíneo formado por los arcos de los círculos mutuamente tangentes (siendo sus vértices los puntos de tangencia).

570. En el interior de un cuadrado de lado a hay cuatro círculos iguales, cada uno de los cuales toca a dos lados adyacentes del cuadrado y a dos círculos (de los tres restantes). Hallar el área del cuadrángulo curvilíneo formado por los arcos de los círculos tangentes (sus vértices son los puntos de tangencia de los círculos).

571. Hallar el área de un segmento circular, sabiendo que su perímetro es igual a p y el arco mide $120°$.

572. Un círculo de radio 4 cm está inscrito en un triángulo. Uno de sus lados está dividido por el punto de tangencia en dos partes que miden 6 y 8 cm. Hallar las longitudes de los otros dos lados.

573. En un triángulo isósceles se traza una perpendicular desde el vértice de un ángulo de la base al lado opuesto, divide a este último en la relación $m : n$. Hallar los ángulos del triángulo.

574. Una cuerda perpendicular al diámetro le divide en la relación $m : n$. Determinar cada uno de los arcos (su medida) en que el círculo queda dividido por la cuerda y el diámetro.

575. Determinar el ángulo de un paralelogramo dadas sus alturas h_1 y h_2 y el perímetro $2p$.

576. Hallar en un triángulo rectángulo la relación de los catetos, sabiendo que la altura y la mediana que parten del vértice del ángulo recto están en la relación 40 : 41.

577. En un triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a c y uno de los ángulos agudo es α. Determinar el radio del círculo inscrito.

578. Los lados de un triángulo son iguales a 25, 24 y 7 cm. Determinar los radios de los círculos inscrito y circunscrito.

579. Determinar los radios de dos círculos tangentes exteriormente, sabiendo que la distancia entre sus centros vale d y el ángulo que forman las tangentes externas comunes vale φ.

580. Determinar el ángulo de un rombo dada su área Q y el área del círculo inscrito S.

581. Se inscribe un $2n$-ágono regular en un círculo y se circunscribe un n-ágono regular al mismo círculo. La diferencia entre las áreas de los polígonos es P. Determinar el radio del círculo.

582. Los puntos medios de los lados de un n-ágono regular se unen mediante rectas para formar un nuevo n-ágono inscrito en el dado. Hallar la relación entre sus áreas.

583. Se circunscribe un círculo a un n-ágono regular de lado a, y también se inscribe un círculo. Determinar el área del anillo circular limitado por los dos círculos, así como su anchura.

584. Se inscribe un círculo en un sector de radio R de ángulo central α. Determinar el radio del círculo.

585. Desde un punto se trazan dos tangentes a un círculo de radio R. El ángulo que forman las tangentes es 2α. Determinar el área limitada por las tangentes y el arco de círculo.

586. Un rombo de ángulo agudo α y lado a se divide en tres partes iguales mediante rectas que parten del vértice de cada ángulo. Determinar la longitud de los segmentos.

587. Un punto está situado en el interior de un ángulo de 60° a distancia a y b de un lado. Hallar la distancia entre este punto y el vértice del ángulo dado.

588. Determinar el área de un triángulo dadas las longitudes de sus lados a y b y la longitud t de la bisectriz del ángulo que forman estos lados.

589. En un triángulo isósceles la longitud del lado es a y la del segmento trazado desde el vértice del triángulo a su base y que divide al ángulo en la relación 1 : 2 es t. Hallar el área del triángulo.

590. Dados los ángulos de un triángulo, determinar el ángulo que forman la mediana y la altura trazada desde el vértice de cualquier ángulo.

591. El lado de un triángulo regular es a. Con centro el del triángulo se traza un círculo de radio $\frac{a}{3}$. Determinar el área de la parte de triángulo que queda fuera del círculo.

592. En un trapecio rectangular de altura h, tomando como diámetro el lado que no es perpendicular a la base, se traza un círculo tangente al lado opuesto del trapecio. Hallar el área del triángulo rectángulo cuyos catetos son las bases del trapecio.

593. Demostrar que en un triángulo la bisectriz del ángulo recto biseca el ángulo que forman la altura y la mediana que van a la hipotenusa.

594. Demostrar que en un triángulo rectángulo la suma de los catetos es igual a la suma de los diámetros de los círculos inscrito y circunscrito.

595. Determinar los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que la relación entre los radios de los círculos circunscrito e inscrito es 5 : 2.

596. Demostrar que las rectas que unen sucesivamente los centros de los cuadrados construidos hacia el exterior sobre los lados de un paralelogramo también forman un cuadrado.

Capítulo 9 POLIEDROS

597. Los lados de la base de un paralelepípedo rectangular son a y b. La diagonal del paralelepípedo está inclinada un ángulo α respecto del plano de la base. Determinar el área lateral del paralelepípedo.

598. En un prisma exagonal regular la diagonal mayor de longitud d forma un ángulo α con la arista lateral del prisma. Determinar el volumen del prisma.

599. En una pirámide cuadrangular regular la arista lateral de longitud m está inclinada un ángulo α respecto del plano de la base. Hallar el volumen de la pirámide.

600. El volumen de una pirámide cuadrangular regular es igual a V. El ángulo que forma la arista lateral con el plano de la base es α. Hallar la arista lateral.

601. El área lateral de una pirámide regular cuadrangular es igual a S cm^2, su altura H cm. Hallar el lado de la base.

602. Hallar el volumen y el área lateral de una pirámide exagonal regular dada la arista lateral l y el diámetro d del círculo inscrito en la base de la pirámide.

603. Hallar la altura de un tetraedro regular de volumen V.

604. En un paralelepípedo recto los lados de la base son iguales a a y b y el ángulo agudo de la base α. La diagonal mayor de la base es igual a la diagonal menor del paralelepípedo. Hallar el volumen del paralelepípedo.

605. Las diagonales de un paralelepípedo recto son iguales a 9 cm y $\sqrt{33}$ cm. El perímetro de su base es igual a 18 cm. La arista lateral mide 4 cm. Determinar el área total y el volumen del paralelepípedo.

606. La arista lateral de una pirámide triangular regular es igual a l y su altura vale h. Determinar el ángulo diedro en la base.

607. Determinar el volumen de una pirámide cuadrangular regular, dado el ángulo α que forman su arista lateral y el plano de la base, y el área S de su sección diagonal. Hallar también el ángulo que forman la cara lateral y el plano que contiene la base.

608. La base de una pirámide regular es un polígono, la suma de cuyos ángulos interiores es igual a 540°. Determinar el volumen de la pirámide, sabiendo que su arista lateral, de longitud l, está inclinada un ángulo α respecto del plano de la base.

609. Determinar los ángulos que forman la base y la arista lateral y la base y la cara lateral en una pirámide pentagonal regular cuyas caras laterales son triángulos equiláteros.

610. Dado el volumen V de una pirámide n-agonal regular en la que el lado de base vale a, determinar el ángulo que forman la arista lateral de la pirámide con el plano de la base.

611. La base de una pirámide cuadrangular es un rectángulo de diagonal igual a b y ángulo que forman las diagonales igual a α. Cada arista lateral forma un ángulo β con la base. Hallar el volumen de la pirámide.

612. La base de una pirámide es un triángulo isósceles cuyos lados iguales forman un ángulo α y miden a. Todas las aristas laterales están inclinadas un ángulo β respecto de la base. Determinar el volumen de la pirámide.

613. La base de un paralelepípedo rectangular es un rectángulo inscrito en un círculo de radio R; el lado menor de este rectángulo subtiende un arco circular igual a $(2\,\alpha)^\circ$. Hallar el volumen del paralelepípedo dada su área lateral S.

614. La base de un prisma recto es un triángulo isósceles, cuya base mide a y el ángulo en ésta vale α. Determinar el volumen del prisma, sabiendo que su área lateral es igual a la suma de las áreas de sus bases.

615. La altura de la cara de una pirámide exagonal regular es igual a m. El ángulo diedro en la base es α. Hallar el área total de la pirámide.

616. Por la hipotenusa de un triángulo isósceles rectangular se traza un plano P que forma un ángulo α con el plano del triángulo. Determinar el perímetro y el área de la figura obtenida al proyectar el triángulo sobre el plano P. La hipotenusa del triángulo mide c.

617. En una pirámide n-agonal regular, el área de la base es igual a Q y la altura forma un ángulo φ con cada una de las caras laterales. Determinar el área lateral y el área total de la pirámide.

618. El lado de la base de una pirámide triangular regular vale a, la cara lateral está inclinada respecto del plano de la base un ángulo φ. Hallar el volumen y el área total de la pirámide.

619. El área total de una pirámide triangular regular es igual a S. Hallar el lado de su base, sabiendo que el ángulo que forman la cara lateral y la base de la pirámide es α.

620. La base de una pirámide es un rombo de ángulo agudo α. Las caras laterales están inclinadas respecto del plano de la base un ángulo β.

Determinar el volumen y el área total de la pirámide, sabiendo que el radio del círculo inscrito en el rombo es igual a r.

621. Determinar el ángulo de inclinación de la cara lateral de una pirámide pentagonal regular respecto del plano de la base, sabiendo que el área de la base de la pirámide es S y el área lateral es igual a σ.

622. La base de un paralelepípedo recto es un rombo. Un plano que pasa por un lado de la base inferior y el lado opuesto de la base superior forma un ángulo β con el plano que contiene la base. El área de la sección así obtenida es igual a Q. Determinar el área lateral del paralelepípedo.

623. La base de una pirámide es un triángulo isósceles de ángulo en la base α. Cada uno de los ángulos diedros en la base es igual a φ. La distancia entre el centro del círculo inscrito en la base de la pirámide y el punto medio de la altura de la cara lateral es igual a d. Determinar el área total de la pirámide.

624. La base de una pirámide es un polígono circunscrito a un círculo de radio r; el perímetro del polígono es $2p$ y las caras laterales de la pirámide están inclinadas un ángulo φ respecto de la base. Hallar el volumen de la pirámide.

625. Las aristas laterales de un tronco de pirámide triangular regular están inclinadas respecto de la base un ángulo α. El lado de la base inferior mide a y el de la superior b $(a > b)$. Hallar el volumen del tronco.

626. Las bases de un tronco de pirámide regular son cuadrados de lados a y b $(a > b)$. Las aristas laterales están inclinadas un ángulo α respecto de la base. Determinar el volumen del tronco y los ángulos diedros en los lados de las bases.

627. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide c y un ángulo agudo es igual a α. Todas las aristas están inclinadas respecto de la base un ángulo β. Hallar el volumen de la pirámide y los ángulos de las caras en su vértice.

628. La base de un prisma oblicuo es un triángulo rectángulo ABC cuya suma de los catetos es igual a m y el ángulo en el vértice A es α. La cara lateral del prima que pasa por el lado AC está inclinada un ángulo β respecto de la base. Se traza un plano que pase por la hipotenusa AB y el vértice C_1 del ángulo triedro opuesto. Determinar el volumen de la pirámide triangular obtenida, sabiendo que sus aristas son iguales.

629. La base de una pirámide es un triángulo isósceles de ángulo de la base α. Todas las aristas laterales están inclinadas un ángulo $\varphi = 90° - \alpha$ respecto del plano que contiene la base. El área de la sección que pasa por la altura de la pirámide y el vértice de la base (triángulo isósceles) es igual a Q. Determinar el volumen de la pirámide.

630. La base de una pirámide es un rectángulo. Dos de las caras laterales son perpendiculares a la base, formando las otras dos los ángulos α y β. La altura de la pirámide es H. Determinar el volumen de la pirámide.

631. La base de una pirámide es un cuadrado. De las dos aristas opuestas una es perpendicular a la base y la otra, de longitud l, forma un ángulo β con la base. Determinar las longitudes de las aristas laterales restantes y los ángulos que forman con la base de la pirámide.

632. La base de una pirámide es un triángulo de lado a. Una de las aristas laterales es perpendicular a la base, las otras dos están inclinadas ángulos iguales β respecto de la base. Hallar el área lateral de la cara lateral mayor de la pirámide y su inclinación respecto de la base.

633. La base de una pirámide es un triángulo isósceles; los lados iguales de la base miden a y forman un ángulo de 120°. La arista lateral de la pirámide, que pasa por el vértice del ángulo obtuso, es perpendicular al plano de la base, estando las otras dos inclinadas un ángulo α respecto de ella. Determinar el área de la sección de la pirámide obtenida mediante un plano que pasa por el lado mayor de la base de la pirámide y biseca a la arista perpendicular a la base.

634. Una pirámide triangular regular se corta por un plano perpendicular a la base y que biseca dos lados de la base. Determinar el volumen de la pirámide cortada, dado el lado a de la base de la pirámide original y el ángulo diedro α en la base.

635. Por el vértice de una pirámide cuadrangular regular se traza un plano de corte paralelo a un lado de la base y formando un ángulo φ con la base de la pirámide. El lado de la base de la pirámide mide a y el ángulo de las caras en el vértice de la pirámide es igual a α. Hallar el área de la sección.

636. Se traza un plano por el vértice de una pirámide triangular regular y los puntos medios de dos lados de la base. Determinar el área de la sección de corte y los volúmenes de las partes en que la pirámide dada queda dividida por el plano de corte, dado el lado a de la base y el ángulo α formado por el plano de corte con la base.

637. Un tetraedro regular, de arista a, es cortado por un plano que contiene una de sus aristas y divide la arista opuesta en la relación 2 : 1. Determinar el área de la sección de corte y sus ángulos.

638. Determinar el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular, sabiendo que el lado de la base mayor vale a, el de la base menor b y el ángulo agudo de la cara lateral es igual a α.

639. Determinar el volumen de un prisma cuadrangular regular, sabiendo que sus diagonales forman un ángulo α con la cara lateral y el lado de la base es igual a b.

640. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo con hipotenusa c y ángulo agudo α. Por la hipotenusa de la base inferior y el vértice del ángulo recto de la base superior se traza un plano que forma un ángulo β con la base. Determinar el volumen de la pirámide triangular cortada del prisma por este plano.

641. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo en el que la suma de un cateto y la hipotenusa es igual a m y el ángulo que forman es α. Por el otro cateto y el vértice del triedro opuesto del prisma se traza un plano que forma un ángulo β con la base. Determinar el volumen de las partes en que el plano de corte divide al prisma.

642. La base de una pirámide es un triángulo isósceles con ángulo en la base α. Cada diedro en la base vale $\varphi = 90° - \alpha$. El área lateral de la pirámide es S. Determinar el volumen de la pirámide y su área total.

643. La base de una pirámide es un triángulo isósceles de lado a y ángulo en la base α ($\alpha > 45°$). Las aristas laterales están inclinadas un ángulo β con respecto de la base. Se traza un plano de corte por la altura de la pirámide y el vértice de uno de los ángulos α. Hallar el área de la sección de corte.

644. La base de un prisma recto es un cuadrilátero en el que dos ángulos opuestos son rectos. La diagonal que une los vértices de los ángulos oblicuángulos tiene una longitud l y divide uno de ellos en partes α y β. El área de la sección de corte contenida en un plano de corte que pasa por la otra diagonal de la base y es perpendicular a ella es igual a S. Hallar el volumen del prisma.

645. La base de una pirámide es un cuadrado. Dos caras opuestas son triángulos isósceles; una de ellas forma un ángulo interior β con la base, la otra un ángulo agudo exterior α. La altura de la pirámide es H. Hallar el volumen de la pirámide y los ángulos que forman las otras dos caras laterales con el plano que contiene la base.

646. La base de una pirámide es un rectángulo. Una de las caras laterales está inclinada respecto de la base un ángulo $\beta = 90° - \alpha$ y la cara opuesta es perpendicular a la base y representa un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice de la pirámide y un ángulo agudo igual a α. La suma de las alturas de estas dos caras es igual a m. Determinar el volumen de la pirámide y la suma de las áreas de las otras dos caras laterales.

647. La base de una pirámide es un rectángulo. Una de las caras laterales es un triángulo isósceles perpendicular a la base; en la otra cara, opuesta a la primera, las aristas laterales iguales a b, forman un ángulo 2α y están inclinadas respecto de la primera cara un ángulo α. Determi-

nar el volumen de la pirámide y el ángulo que forman las dos caras superiores.

648. En una pirámide triangular, regular de lado de la base a, los ángulos entre las aristas en su vértice son iguales uno a otro, siendo cada uno igual a $\alpha\,(\alpha \leqslant 90^\circ)$. Determinar los ángulos que forman las caras laterales de la pirámide y el área de una sección trazada por uno de los lados de la base y perpendicular a la arista lateral opuesta.

649. Determinar el volumen de un octaedro regular con arista a y también los ángulos diedros en sus aristas.

650. El ángulo diedro en una arista lateral de una pirámide exagonal regular es igual a φ. Determinar el ángulo de la cara en el vértice de la pirámide.

651. La base de una pirámide es un exágono regular $ABCDEF$. La arista lateral MA es perpendicular a la base y la arista opuesta MD está inclinada un ángulo α respecto de la base. Determinar el ángulo de inclinación de las caras laterales respecto de la base.

652. La base de una pirámide es un triángulo isósceles ABC en el que $AB = AC$. La altura de la pirámide SO pasa por el punto medio de la altura AD de la base. Por el lado BC se traza un plano perpendicular a la arista lateral AS y forma un ángulo α con la base. Determinar el volumen de la pirámide cortada de la primera y que tenga el vértice común S, sabiendo que el volumen de la otra parte es V.

653. El lado de la base de una pirámide triangular regular vale a. Una sección que biseca un ángulo formado por las caras laterales representa un triángulo rectángulo. Determinar el volumen de la pirámide y el ángulo que forma su cara lateral con el plano que contiene la base.

654. Por un lado de la base de una pirámide triangular regular se traza un plano perpendicular a la arista lateral opuesta. Determinar el área total de la pirámide, sabiendo que el plano divide a la arista lateral en la relación $m : n$ y el lado de la base mide q.

655. La diagonal de un paralelepípedo rectangular es igual a d y forma ángulos iguales α con dos caras laterales adyacentes. Determinar el volumen del paralelepípedo y el ángulo que forman la base y el plano que pasa por los extremos de las tres aristas que salen de un vértice.

656. En un paralelepípedo rectangular el punto de intersección de las diagonales de la base inferior se une con el punto medio de una de las aristas laterales mediante una recta de longitud m. Esta línea forma un ángulo α con la base y un ángulo $\beta = 2\alpha$ con una de las caras laterales. Tomando la otra cara lateral adyacente como base del paralelepípedo, hallar su área lateral y su volumen. (Demostrar que $\alpha < 30^\circ$).

657. La base de un prisma recto es un trapecio inscrito en un semicírculo de radio R de manera que su base mayor coincida con el diámetro, y el menor subtiende un arco igual a 2α. Determinar el volumen del prisma, sabiendo que la diagonal de una cara que pasa por uno de los lados no paralelos de la base está inclinada respecto a ésta un ángulo α.

658. La diagonal de un paralelepípedo rectangular, igual a d, forma un ángulo $\beta = 90° - \alpha$ con la cara lateral. El plano que pasa por esta diagonal y la arista que la corta forma un ángulo α con la misma cara lateral (demostrar que $\alpha > 45°$). Determinar el volumen del paralelepípedo.

659. En un prisma triangular regular se unen dos vértices de la base superior con los puntos medios de los lados opuestos de la base inferior mediante líneas rectas. El ángulo que forman estas líneas entre sí es α mirando hacia la base. El lado de la base es b. Determinar el volumen del prisma.

660. En un prisma triangular regular el ángulo que forman una diagonal de una cara lateral y otra cara lateral es igual a α. Determinar el área lateral del prisma, sabiendo que la arista de la base mide a.

661. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo ABC en el que $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$ y el cateto $AC = b$. La diagonal de la cara lateral del prisma que pasa por la hipotenusa AB forma un ángulo β con la cara lateral que pasa por el cateto AC. Hallar el volumen del prisma.

662. El área total de una pirámide cuadrangular regular es igual a S y el ángulo entre las caras en el vértice igual a α. Hallar la altura de la pirámide.

663. En una pirámide n-agonal regular el ángulo entre las caras en el vértice es igual a α, y el lado de la base mide a. Hallar el volumen de la pirámide.

664. En un prisma cuadrangular regular se traza un plano por una diagonal de la base inferior y uno de los vértices de la base superior, que separa una pirámide de área total S. Hallar el área total del prisma, sabiendo que el ángulo en el vértice del triángulo obtenido en la sección es igual a α.

665. Las aristas laterales de una pirámide triangular tienen la misma longitud l. De los tres ángulos que forman las caras en los vértices de la pirámide dos son iguales a α y el tercero a β. Hallar el volumen de la pirámide.

666. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo que es proyección de la cara lateral que pasa por un cateto. El ángulo opuesto a este cateto en la base de la pirámide es igual a α, y el que está en la

cara lateral es igual a β. El área de esta cara lateral sobrepasa la de la base en S. Determinar la diferencia entre las áreas de las otras dos caras y los ángulos formados por las caras laterales con la base.

667. En una pirámide triangular dos caras laterales son triángulos rectángulos (de ángulo recto en el vértice) isósceles, cuyas hipotenusas miden b y forman entre sí un ángulo α. Determinar el volumen de la pirámide.

668. En una pirámide de base rectangular cada una de las aristas laterales es igual a l; uno de los ángulos entre las caras en el vértice es α y el otro β. Determinar el área de la sección que pasa por las bisectrices de los ángulos β.

669. En un paralelepípedo las longitudes de las tres aristas que concurren en un vértice son, respectivamente, a, b y c; las aristas a y b son perpendiculares entre sí y la arista c forma un ángulo α con cada una de ellas. Determinar el volumen del paralelepípedo, su área lateral y el ángulo que forma la arista c con el plano de la base. (¿Para qué valores de α tiene solución el problema?)

670. Todas las caras de un paralelepípedo son rombos de lados a y ángulos agudos α. Determinar el volumen del paralelepípedo.

671. La base de un paralelepípedo es un rombo oblicuo $ABCD$ de lado a y ángulo agudo α. La arista AA_1 es igual a b y forma un ángulo φ con las aristas AB y AD. Determinar el volumen del paralelepípedo.

672. En un paralelepípedo rectangular se traza un plano por una diagonal de la base y una diagonal de la cara lateral mayor, partiendo ambas de un mismo vértice. El ángulo que forman estas diagonales es β. Determinar el área lateral del paralelepípedo, el área de la sección que intercepta el paralelepípedo en el plano trazado y el ángulo de inclinación de éste respecto de la base, sabiendo que el radio del círculo circunscrito a la base del paralelepípedo es igual a R y que el ángulo menor que forman las diagonales de la base entre sí vale 2α.

673. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo ABC. El radio del círculo circunscrito a él es R y el cateto AC subtiende un arco 2β. Se traza por una diagonal de la cara lateral que contiene al otro cateto BC un plano perpendicular a esta cara e inclinado un ángulo β respecto de la base. Determinar el área lateral del prisma y el volumen de la pirámide cuadrangular obtenida.

674. La base de una pirámide es un trapecio, cuyos lados no paralelos y la base menor tienen la misma longitud. La base mayor mide a y el ángulo obtuso α. Todas las aristas laterales de la pirámide están inclinadas un ángulo β respecto de la base. Determinar el volumen de la pirámide.

675. La base de una pirámide es un trapecio cuya diagonal es perpendicular a uno de los lados no paralelos y forma un ángulo α con la base. Todas las aristas laterales tienen la misma longitud. La cara lateral que contiene la base mayor del trapecio tiene un ángulo $\varphi = 2\alpha$, en el vértice de la pirámide y su área es S. Determinar el volumen de la pirámide y los ángulos de inclinación de las caras laterales respecto de la base.

676. La base de una pirámide es un triángulo regular, de lado a. La altura trazada desde el vértice de la pirámide pasa por uno de los vértices de la base. La cara lateral que contiene al lado de la base opuesto a este vértice forma un ángulo φ con la base. Determinar el área lateral de la pirámide si se toma como base una de las caras laterales iguales.

677. La base de un prisma recto es un triángulo isósceles de lados iguales que miden a y ángulo con la base α. Por la base del triángulo, que es la base superior del prisma, y el vértice opuesto de la base inferior se traza un plano que forma un ángulo β con la base. Determinar el área lateral del prisma y el volumen de la pirámide cuadrangular obtenida.

678. La base de una pirámide es un cuadrado. Las caras laterales son perpendiculares a la base y las otras dos forman con ella un ángulo α. El radio del círculo circunscrito a una cara lateral perpendicular a la base es R. Determinar el área total de la pirámide.

679. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo con un cateto a, y el ángulo opuesto a él, α. Por el vértice del ángulo recto de la base inferior se traza un plano paralelo a la hipotenusa y que corta a la cara lateral opuesta bajo un ángulo $\beta = 90^\circ - \alpha$. Determinar el volumen de la porción de prisma comprendida entre su base y el plano de corte y el área lateral del prisma, sabiendo que el área de la cara lateral que pasa por el cateto a es igual al área de la intersección del prisma con el plano trazado. Determinar el valor del ángulo α para el cual el plano de corte corta a la cara lateral que pasa por la hipotenusa de la base.

680. La base de una pirámide es un rectángulo. Una arista lateral es perpendicular a la base y dos caras laterales están inclinadas respecto de ella los ángulos α y β, respectivamente. Determinar el área lateral de la pirámide, sabiendo que su altura es H.

681. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α; el radio del círculo inscrito es igual a r. Cada cara lateral está inclinada respecto de la base un ángulo α. Determinar el volumen y las áreas lateral y total de la pirámide.

682. La base de un prisma $ABCA_1B_1C_1$ es un triángulo isósceles ABC ($AB = AC$ y $\angle ABC = \alpha$). El vértice B_1, de la base superior del

prisma, se proyecta en el centro del círculo de radio r inscrito en la base inferior. A través del lado AC de la base y el vértice B_1, se se traza un plano de corte que forma un ángulo α con la base. Hallar el área total de la pirámide triangular $ABCB_1$ obtenida y el volumen del prisma.

683. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo. La altura de la pirámide pasa por el punto de intersección de la hipotenusa y la bisectriz del ángulo recto de la base. La arista lateral que pasa por el vértice del ángulo recto está inclinada un ángulo α respecto de la base. Determinar el volumen de la pirámide y los ángulos de inclinación de las caras laterales respecto de la base, sabiendo que la bisectriz del ángulo recto de la base mide m y forma un ángulo $45^\circ + \alpha$ con la hipotenusa.

684. La base de una pirámide es un rombo de lado a. Dos caras adyacentes están inclinadas respecto al plano de la base un ángulo α, la tercera, un ángulo β; demostrar que la cuarta está también inclinada este mismo ángulo. La altura de la pirámide es H. Hallar el volumen y su área total.

685. La base de una pirámide cuadrangular es un rombo cuyo lado mide a y el ángulo agudo α. Los planos que pasan por el vértice de la pirámide y las diagonales de la base están inclinados respecto de ésta los ángulos φ y ψ. Determinar el volumen de la pirámide, sabiendo que su altura corta a un lado de la base.

686. La base de un prisma oblicuo es un triángulo rectángulo ABC de cateto $BC = a$. El vértice B_1 de la base superior se proyecta en el punto medio del cateto BC. El ángulo diedro que forman las caras laterales que pasan por el cateto BC y la hipotenusa AB es igual a α. Las aristas laterales están inclinadas un ángulo β respecto de la base. Determinar el área lateral del prisma.

687. La base de un prisma $ABCA_1B_1C_1$ es un triángulo isósceles ABC ($AB = AC$ y $\angle BAC = 2\alpha$). El vértice A_1 de la base superior se proyecta sobre el centro del círculo de radio R circunscrito a la base inferior. La arista lateral AA_1 forma con el lado AB de la base un ángulo $2\,\alpha$. Determinar el volumen y el área lateral del prisma.

688. Determinar el volumen de una pirámide cuadrangular regular cuya arista lateral mide l y el ángulo diedro que forman dos caras laterales adyacentes es igual a β.

689. En un tronco de pirámide cuadrangular regular se dan: la diagonal d, el ángulo diedro α en la base inferior y la altura H. Hallar el volumen del tronco de pirámide.

690. La arista lateral de un tronco de pirámide cuadrangular regular es igual a l y está inclinada respecto de la base un ángulo β. La diagonal de la pirámide es perpendicular a su arista lateral. Determinar el volumen de la pirámide.

691. La altura de un tronco de pirámide cuandrangular regular es H, la arista lateral y la diagonal de la pirámide están inclinadas respecto de la base los ángulos α y β, respectivamente. Hallar el área lateral del tronco de pirámide.

692. Los lados de las bases de un tronco de pirámide cuadrangular regular miden, respectivamente, a y $a\sqrt{3}$; la cara lateral está inclinada respecto de la base un ángulo γ. Determinar el volumen y el área total del tronco de pirámide.

693. Un cubo está inscrito en una pirámide cuadrangular regular de manera que cuatro vértices se hallan sobre las aristas laterales y los cuatro restantes en el plano de su base. Determinar la arista del cubo, sabiendo que la altura de la pirámide es H y la arista lateral l.

694. Un cubo está inscrito en una pirámide cuadrangular regular de manera que sus vértices están sobre las alturas de las caras laterales de la pirámide. Hallar la relación entre el volumen de la pirámide y el volumen del cubo, sabiendo que el ángulo que forman la altura de la pirámide y una cara lateral es igual a α.

695. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden, respectivamente, 6 y 8. El vértice de la pirámide dista 24 de la base y se proyecta sobre su plano en un punto interior a ella. Hallar la arista del cubo cuyos cuatro vértices estén en el plano de la base de la pirámide dada y las aristas que unen estos vértices sean paralelas a los catetos correspondientes del triángulo de la base de la pirámide. Los otros cuatro vértices del cubo caen en las caras laterales de la pirámide dada.

696. El ángulo diedro en la base de una pirámide cuadrangular regular vale α. Por su arista se traza un plano de corte que forme un ángulo β con la base. El lado de la base es igual a a. Determinar el área de la figura interceptada por el plano.

697. En una pirámide cuadrangular regular, el lado de la base mide a y el ángulo diedro en la base vale α. Por dos lados opuestos de la base de la pirámide se trazan dos planos perpendiculares entre sí. Determinar la longitud de la línea de intersección de los planos contenida dentro de la pirámide, sabiendo que corta al eje de la misma.

698. En una pirámide cuadrangular regular, se traza un plano por un vértice de la base que sea perpendicular a la arista lateral opuesta. Determinar el área de la figura interceptada por el plano en la pirámide, sabiendo que el lado de la base de la pirámide mide a y que la arista lateral está inclinada respecto del plano que contiene la base un ángulo φ ($\varphi > 45°$; demostrarlo).

699. Se necesita cortar un prisma cuadrangular regular por medio de un plano para obtener una sección que dé un rombo de ángulo agudo α. Hallar el ángulo de inclinación del plano de corte respecto de la base.

700. La base de un paralelepípedo recto es un rombo de ángulo agudo α. ¿Con qué ángulo respecto de la base se debe trazar un plano de corte para obtener una sección cuadrada con sus vértices situados sobre las aristas laterales del paralelepípedo?

701. Un paralelepípedo recto, cuya base es un rombo de lado a y ángulo agudo α, se corta mediante un plano que pasa por el vértice del ángulo α obteniéndose un rombo de ángulo agudo $\frac{\alpha}{2}$. Determinar el área de esta sección.

702. La arista de un tetraedro es igual a b. Por el punto medio de una de las aristas se traza un plano paralelo a dos aristas que no se cortan. Determinar el área de la sección así obtenida.

703. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo de cateto a. Una de las aristas laterales de la pirámide es perpendicular a la base, mientras que las otras dos están inclinadas respecto de ella el mismo ángulo α. Un plano perpendicular a la base corta la pirámide según un cuadrado. Determinar el área de este cuadrado.

704. En un tronco de pirámide cuadrangular regular los lados de las bases superior e inferior miden, respectivamente a y $3a$ y las caras laterales están inclinadas respecto del plano que contiene la base inferior un ángulo α. A través de un lado de la base superior se traza un plano paralelo a la cara lateral opuesta. Determinar el volumen del prisma cuadrangular obtenido en el tronco de pirámide dado y el área lateral de la parte restante de dicho tronco de pirámide.

705. Por un punto tomado sobre la arista lateral de un prisma regular de lado de la base a se trazan dos planos. Uno de ellos pasa por un lado de la base inferior del prisma y forma un ángulo α con la base, el otro pasa por el lado paralelo de la base superior y forma con ella un ángulo β. Determinar el volumen del prisma y la suma de las áreas de las secciones así obtenidas.

706. En un prisma cuadrangular regular se traza un plano por los puntos medios de los lados adyacentes de la base que forma un ángulo α respecto de ella y que corta a tres aristas laterales. Determinar el área de la figura así obtenida y su ángulo agudo, sabiendo que el lado de la base del prisma es igual a b.

707. La base de un prisma recto es un trapecio isósceles (de ángulo agudo α) circunscrito a un círculo de radio r. A través de uno de los lados no paralelos de la base y del vértice opuesto al ángulo agudo de la base superior, se traza un plano que forma un ángulo α con la base. Determinar el área lateral del prisma y el área de la figura de corte así obtenida.

708. La base de un prisma recto $ABCA_1B_1C_1$ es un triángulo isósceles ABC con ángulo α en la base BC. El área lateral del prisma es igual a S. Hallar el área de la sección obtenida mediante un plano que pasa por una diagonal de la cara BCC_1B_1 paralelo a la altura AD de la base del prisma y que forma un ángulo β con la base.

709. La base de un prisma recto $ABCA_1B_1C_1$ es un triángulo rectángulo ABC con ángulo β en el vértice B ($\beta < 45°$). La diferencia entre las áreas de sus caras laterales que pasan por los catetos BC y AC es igual a S. Hallar el área de la sección obtenida mediante un plano que forma un ángulo φ con la base y pasa por los tres puntos siguientes: el vértice B_1 del ángulo β de la base superior, el punto medio de la arista lateral AA_1 y el punto D situado sobre la base y simétrico del vértice B respecto del cateto AC.

710. Las diagonales que no se cortan de dos caras laterales adyacentes de un paralelepípedo rectangular están inclinadas respecto de su base los ángulos α y β. Hallar el ángulo que forman estas diagonales.

711. Dados tres ángulos planos del triedro $SABC$: $\angle BSC = \alpha$; $\angle CSA = \beta$; $\angle ASB = \gamma$. Hallar los ángulos diedros de este triedro.

712. Uno de los ángulos diedros de un triedro vale A; los ángulos planos adyacentes al ángulo diedro dado son iguales a α y β. Hallar el tercer ángulo plano.

713. Dados en un triedro los tres ángulos planos de valores 45°, 60° y 45°, determinar el ángulo diedro contenido entre las dos caras con ángulos planos de 45°.

714. Sobre la arista de un ángulo diedro se da un segmento AB. En una de las caras se da un punto M en el que una recta trazada desde A y formando un ángulo α con AB corta a una línea trazada desde B perpendicular a AB. Determinar el ángulo diedro, sabiendo que la recta AN está inclinada respecto de la segunda cara del ángulo diedro un ángulo β.

715. Se dan dos rectas que se cruzan en el espacio, que forman un ángulo φ entre sí y tienen una perpendicular común $PQ = h$ que intercepta a ambas. Sobre estas rectas se dan dos puntos A y B desde los que el segmento PQ se ve bajo los ángulos α y β, respectivamente. Determinar la longitud del segmento AB.

716. Sobre dos líneas que se cruzan en el espacio bajo ángulo recto, y cuya distancia perpendicular entre ellas es $PQ = h$, se dan dos puntos A y B desde los que se ve el segmento PQ bajo los ángulos α y β,

respectivamente. Determinar el ángulo de inclinación del segmento AB respecto de PQ.

717. Un plano de corte divide las aristas laterales de una pirámide cuadrangular regular en las relaciones (medidas desde el vértice): $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, $\frac{m_3}{n_3}$. ¿En qué relación está dividido el volumen de la pirámide por este plano?

718. Desde el punto medio de la altura de una pirámide cuadrangular regular se traza una perpendicular, de longitud h, a una arista lateral, y otra perpendicular, de longitud b, a una cara lateral. Hallar el volumen de la pirámide.

Capítulo 10 SOLIDOS DE REVOLUCION

719. La generatriz de un cono mide l y forma un ángulo de $60°$ con el plano de la base. Determinar el volumen del cono.

720. La longitud de la generatriz de un cono mide l y la circunferencia de la base mide c. Determinar el volumen.

721. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro es un cuadrado de lado a. Hallar el volumen del cilindro.

722. El desarrollo de la superficie curva de un cilindro es un rectángulo de diagonal d y forma un ángulo α con la base. Determinar el volumen del cilindro.

723. El ángulo en el vértice de una sección axial de un cono es igual a 2α y la suma de las longitudes de la altura y la generatriz es igual a m. Hallar el volumen y el área total del cono.

724. El volumen de un cono es V. Su altura se divide en tres partes iguales y por los puntos de división se trazan dos planos paralelos a la base. Hallar el volumen de la porción central.

725. Determinar el volumen de un cono, sabiendo que una cuerda de longitud a trazada en el círculo de la base subtiende un arco α y la altura del cono forma un ángulo β con la generatriz.

726. Dos conos (uno interior al otro) se construyen con la misma base; el ángulo que forman la altura y la generatriz del cono menor es igual a α, y el del cono mayor es igual a β. La diferencia entre las alturas es igual a h. Hallar el volumen del sólido comprendido entre los dos conos.

727. La superficie curva de un cono es igual a S y el área total igual a P. Determinar el ángulo que forman la altura y la generatriz.

728. Cuando se desarrolla en un plano, la superficie curva de un cono representa un sector circular de ángulo α y cuerda a. Determinar el volumen del cono.

729. Un plano, trazado por el vértice de un cono y que forma un ángulo φ con la base, corta en el círculo de la base un arco α; la distancia entre el plano y el centro de la base es a. Hallar el volumen del cono.

730. Un cuadrado de lado a está inscrito en la base de un cono. Un plano trazado por el vértice del cono y un lado del cuadrado corta a la superficie del cono a lo largo de un triángulo cuyo ángulo en el vértice es α. Determinar el volumen y el área del cono.

731. La generatriz l de un tronco de cono forma un ángulo α con la base inferior y es perpendicular a la recta que une su extremo superior con el extremo inferior de la generatriz opuesta. Hallar el área lateral del tronco de cono.

732. Se da un cono de volumen V, cuya generatriz está inclinada un ángulo α respecto de la base. ¿A qué altura se debe trazar un plano perpendicular al eje del cono para que divida la superficie lateral del cono en dos partes de áreas iguales? Lo mismo con el área total.

733. Determinar el volumen y el área de un sector esférico obtenido en una esfera de radio R y que tiene un ángulo α en la sección axial.

734. El área de un segmento esférico de radio R es S. Hallar su altura.

735. El área de un triángulo ABC es igual a S, el lado $AC=b$ y $\sphericalangle CAB=\alpha$. Hallar el volumen del sólido formado al girar el triángulo ABC respecto del lado AB.

736. Se da en un triángulo ABC: el lado a, el ángulo B y el ángulo C. Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar el triángulo respecto del lado dado.

737. Un rombo de diagonal mayor d y ángulo agudo γ gira respecto de un eje que pasa por su vértice y es perpendicular a su diagonal mayor. Determinar el volumen del sólido así obtenido.

738. En un triángulo se dan: lados b y c y el ángulo α que forman. El triángulo gira respecto de un eje que pasa por el vértice del ángulo α y está inclinado respecto los lados b y c el mismo ángulo. Determinar el volumen del sólido así generado.

739. En un trapecio isósceles una diagonal es perpendicular a uno de los lados no paralelos. El lado es igual a b y forma un ángulo α con la base mayor. Determinar el área del sólido generado al girar el trapecio respecto de la base mayor.

740. Se trazan dos planos por el vértice de un cono. Uno de ellos está inclinado un ángulo α respecto de la base del cono, y la corta a lo largo de una cuerda de longitud a, el otro está inclinado un ángulo β respecto de la base y la corta a lo largo de una cuerda de longitud b. Determinar el volumen del cono.

741. Una esfera está inscrita en un cono. Hallar el volumen de la esfera, sabiendo que la generatriz del cono mide l y está inclinada un ángulo α respecto de la base.

742. Una recta, tangente a la superfice lateral de un cono, forma un ángulo θ con la generatriz que pasa por el punto de tangencia. ¿Qué ángulo φ formará esta línea con el plano de la base P del cono, sabiendo que la generatriz está inclinada respecto del plano P un ángulo α?

743. Un triángulo obtusángulo de ángulos agudos α y β y altura menor h gira respecto del lado opuesto al ángulo β. Hallar la superficie del sólido así engendrado.

744. En un cono (cuya sección axial representa un triángulo equilátero) colocado con su base arriba y lleno de agua se coloca una pelota de radio r que queda tangente al nivel del agua. Determinar la altura del nivel de agua en el cono después de quitar la pelota.

745. En un cono, cuyo radio del círculo de la base es R y cuya generatriz está inclinada un ángulo $\frac{\alpha}{2}$ respecto de la base, se inscribe un prisma triangular recto, de manera que su base inferior cae sobre la base del cono y los vértices de la base superior están sobre la superficie lateral del cono. Determinar el área lateral del prisma, sabiendo que su base es un triángulo rectángulo, uno de cuyos ángulos agudo es α, y su altura es igual al radio del círculo, a lo largo del cual el plano que pasa por la base superior del prisma corta al cono.

746. En una pirámide triangular, cuya base es un triángulo regular con lado a, se inscribe un cilindro de manera que su base inferior se haya sobre la base de la pirámide tocando su base superior todas las caras laterales. Hallar los volúmenes del cilindro y de la pirámide cortada por el plano que pasa por la base superior del cilindro, sabiendo que la altura del cilindro es igual a $\frac{a}{2}$, una de las aristas laterales está pirámide es perpendicular a la base, y una de sus caras laterales está inclinada respecto de la base un ángulo α (definir los valores de α para los que el problema tiene solución).

747. Se inscribe un prisma triangular recto en una esfera de radio R. La base del prisma es un triángulo rectángulo de ángulo α y su cara lateral mayor es un cuadrado. Hallar el volumen del prisma.

748. La base de una pirámide es un rectángulo cuyas diagonales forman un ángulo agudo α y sus aristas forman un ángulo φ con la base. Determinar el volumen de la pirámide, sabiendo que el radio de la esfera circunscrita es igual a R.

749. El radio del círculo de la base de un cono mide R y el ángulo en el vértice de su sección axial es α. Hallar el volumen de una pirámide triangular regular circunscrita en el cono.

750. Se inscribe una esfera de radio r en un tronco de cono. La generatriz del cono está inclinada respecto de la base un ángulo α. Hallar el área lateral del tronco de cono.

751. Un tronco de cono está circunscrito a una esfera y sus generatrices están inclinadas un ángulo α respecto de la base. Determinar el área total del tronco de cono, sabiendo que el radio de la esfera es r.

752. Una esfera de radio r está inscrita en un tronco de cono cuya generatriz está inclinada un ángulo α respecto del plano de la base. Hallar el volumen del tronco de cono.

753. Desde un punto situado sobre la superficie de una esfera de radio R se trazan tres cuerdas iguales que forman entre sí un círculo α. Determinar sus longitudes.

754. Un tronco de cono está inscrito en una esfera de radio R. Las bases del tronco de cono cortan en la esfera dos segmentos con arcos en la sección recta iguales a α y β, respectivamente. Hallar el área lateral del tronco de cono.

755. Las caras laterales de una pirámide cuadrangular regular están inclinadas respecto de la base un ángulo α. La altura de las caras de la pirámide es m. Hallar el área total del cono inscrito en la pirámide y el ángulo de inclinación de la arista lateral de la base.

756. Un cono está circunscrito a una pirámide exagonal regular. Hallar su volumen, sabiendo que la arista lateral de la pirámide es igual a l y el ángulo que forman dos aristas laterales contiguas es α.

757. Un cono está inscrito en una pirámide triangular regular. Hallar su volumen, sabiendo que la arista lateral de la pirámide es igual a l y el ángulo que forman dos aristas laterales adyacentes es α.

758. Un cono está inscrito en una esfera y su volumen es igual a un cuarto de la esfera. Hallar el volumen de la esfera, sabiendo que la altura del cono es H.

759. Una esfera está inscrita en un prisma triangular regular. Hallar la relación entre el área de la esfera y el área total del prisma.

760. Una esfera de radio R está inscrita en una pirámide cuya base es un rombo de ángulo agudo α. Las caras laterales de la pirámide están inclinadas respecto de la base un ángulo. Hallar el volumen de la pirámide.

761. Una hemiesfera está inscrita en una pirámide cuadrangular regular, de manera que su base es paralela a la base de la pirámide y la superficie esférica está en contacto con ella. Determinar el área total de la pirámide, sabiendo que sus caras laterales están inclinadas un ángulo α respecto de la base y el radio de la esfera es r.

762. Se inscribe una hemisfera en una pirámide cuadrangular regular, de manera que su base cae en la base de la pirámide y la superficie esférica toca las caras laterales de la pirámide. Hallar la relación entre la superficie de la hemisfera y el área total de la pirámide y el volumen de la hemisfera, sabiendo que las caras laterales están inclinadas un ángulo α respecto de la base y que el diámetro de la esfera vale m.

763. En un cono, de radio del círculo de la base R y ángulo entre la altura y la generatriz α, se inscribe una esfera que toca a la base y a la superficie lateral del cono. Determinar el volumen de la porción de cono situada por encima de la esfera.

764. La superficie total de un cono circular recto es n veces mayor que la superficie de la espera inscrita en él. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la generatriz respecto de la base?

765. Una esfera está inscrita en un cono. La relación entre sus volúmenes es n. Hallar el ángulo de inclinación de la generatriz respecto de la base (hacer el cálculo para $n = 4$).

766. Determinar el ángulo que forman el eje y la generatriz de un cono cuya superficie total es n veces mayor que el área de su sección axial.

767. Inscrita en un cono hay una hemisfera, cuyo círculo máximo cae en la base del cono. Determinar el ángulo en el vértice del cono, sabiendo que la relación entre el área total del cono y el área de la hemisfera es 18 : 5.

768. Determinar el ángulo que forman la altura y la generatriz de un cono, sabiendo que el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ veces mayor que el de la hemisfera inscrita en el cono, de manera que el círculo diametral cae en la base del cono y la superficie toca a la superficie lateral del cono.

769. Determinar el ángulo que forman la altura y la generatriz de un cono cuya superficie lateral está dividida en dos partes iguales mediante la línea de su intersección con una superficie esférica cuyo centro está situado en el vértice del cono y el radio es igual a la altura del cono.

770. Un cono de altura H y ángulo entre la generatriz y la altura α está cortado por una superficie esférica con centro en el vértice del cono, de manera que el volumen del cono queda dividido en dos partes iguales. Hallar el radio de la esfera.

771. Con la altura de un cono, igual a H, como diámetro se construye una esfera de radio $\frac{H}{2}$. Determinar el volumen de la parte de la esfera que queda fuera del cono sabiendo que el ángulo entre la generatriz y la altura es α.

772. Se dan dos esferas tangentes exteriormente O y O_1 y un arco circunscrito a ellas. Calcular el área de la superficie lateral del tronco de cono cuyas bases son los círculos, a lo largo de los cuales las esferas hacen contacto con la superficie del cono, sabiendo que los radios de las esferas son R y R_1.

773. Cuatro bolas del mismo radio r están en una mesa, de manera que están en contacto una con otra. Una quinta bola del mismo diámetro se coloca sobre ellas en el centro. Hallar la distancia entre el punto superior de la quinta bola y el plano de la mesa.

774. Determinar el ángulo en el vértice de la sección axial de un cono circunscrito a cuatro bolas iguales dispuestas de manera que cada una de ellas esté en contacto con las otras tres.

775. Las caras de un tronco de pirámide triangular regular tocan a una esfera. Determinar la relación entre la superficie de la esfera y el área total de la pirámide, sabiendo que las caras laterales de la pirámide están inclinadas un ángulo α respecto de la base.

776. Un cilindro, de altura igual al radio de la base de un cono, está inscrito en dicho cono. Hallar el ángulo que forman el eje del cono y su generatriz, sabiendo que la relación entre la superficie del cilindro y el área de la base del cono es 3 : 2.

777. El radio de una esfera inscrita en una pirámide cuadrangular regular es igual a r. El ángulo diedro formado por dos caras laterales adyacentes de la pirámide es α. Determinar el volumen de la pirámide cuyo vértice está en el centro de la esfera y los vértices de la base caen en los cuatro puntos de tangencia de la esfera y las caras laterales de la pirámide.

778. Una esfera de radio r está inscrita en un cono. Hallar el volumen del cono, sabiendo que un plano tangente a la esfera y perpendicular a la generatriz del cono dista del vértice del cono una distancia d.

779. La arista de un cubo es a, y su diagonal AB. Hallar el radio de una esfera tangente a las tres caras que convergen en el vértice A y a las tres aristas que salen del vértice B. Hallar también el área en la parte de superficie esférica exterior al cubo.

780. En un tetraedro regular de arista a se inscribe una esfera, de manera que esté en contacto con todas las aristas. Determinar el radio de la esfera y el volumen de la parte exterior al tetraedro.

Capítulo **11** TRANSFORMACIONES TRIGONOMETRICAS

Demostrar las identidades siguientes:

781. $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha$

782. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

783. $2(\csc 2\alpha+\cot 2\alpha)=\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}$

784. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan(45^\circ+\alpha)$; 785. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan 2\alpha+\sec 2\alpha$

786. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$

787. $\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1$

788. $\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$

789. $\frac{\cos 2\alpha}{\cot^2\alpha-\tan^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$

790. $\frac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$

791. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

792. $\frac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}=\frac{1+\sin 2y}{\cos 2y}$

793. $\tan^2\alpha-\tan^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\sec^2\alpha\sec^2\beta$

794. $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\cot\alpha$

795. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$

796. $\frac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}=\csc\alpha$

797. $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\tan 3\alpha$

798. $\sin(a-b)+\sin(a-c)+\sin(b-c)=4\cos\dfrac{a-b}{2}\sin\dfrac{a-c}{2}\cos\dfrac{b-c}{2}$

799. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)+1=0$

800. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0$

801. $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha$

802. Demostrar que

$$\frac{1-2\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}=\tan\varphi-\cot\varphi$$

803. Demostrar que

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$$

804. Demostrar la identidad

$$\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)=\sin^2\alpha$$

805. Simplificar la expresión

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

806. Demostrar que

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2,$$

si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

807. Demostrar que

$$\cot A\cot B+\cot A\cot C+\cot B\cot C=1,$$

si $A+B+C=\pi$.

808. Demostrar que

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$$

809. Demostrar que

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$$

Reducir a una forma conveniente para tomar logaritmos:

810. $1+\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}$; **811.** $1-\sqrt{2}\cos\alpha+\cos 2\alpha$

812. $1-\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$

813. $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\tan\alpha$; **814.** $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

815. $1-\tan\alpha+\sec\alpha$; 816. $\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha$

817. $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

818. $\frac{2\sin\beta-\sin 2\beta}{2\sin\beta+\sin 2\beta}$; 819. $\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

820. $\cot\alpha+\cot 2\alpha+\csc 2\alpha$; 821. $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\tan\alpha$

822. $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$; 823. $\frac{1+\tan 2\alpha\tan\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}$

824. $2+\tan 2\alpha+\cot 2\alpha$

825. $\tan x-1+\sin x\,(1-\tan x)+\frac{1}{1+\tan^2 x}$

826. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$; 827. $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$

828. $\tan x+\tan y+\tan z-\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}$

829. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ si $\alpha+\beta+\gamma=180°$

Capítulo **12** ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Resolver las ecuaciones siguientes:

830. $1-\sin 5x=\left(\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)^2$

831. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$

832. $\sin(x+30^\circ)+\cos(x+60^\circ)=1+\cos 2x$

833. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$

834. $\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1$; **835.** $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$

836. $\sin(x-60^\circ)=\cos(x+30^\circ)$; **837.** $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$

838. $\sin^2 x(\tan x+1)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3$

839. $\cos 4x=-2\cos^2 x$; **840.** $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x}$

841. $\sin 3x=\cos 2x$; **842.** $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$

843. $3\tan^2 x-\sec^2 x=1$; **844.** $(1+\cos 4x)\sin 4x=\cos^2 2x$

845. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$; **846.** $3\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=0$

847. $\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=1$

848. $6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x=2$

849. $\sin^2 x+\frac{3}{2}\cos^2 x=\frac{5}{2}\sin x\cos x$

850. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$; **851.** $\sin x+\cos x=1$

852. $\sin x+\cos x=1+\sin 2x$; **853.** $\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}$

854. $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$; **855.** $\cos x\sin 7x=\cos 3x\sin 5x$

856. $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$; **857.** $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$

858. $5\cos 2x=4\sin x$; **859.** $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\tan x-2=0$

860. $8\tan^2\frac{x}{2}=1+\sec x$; **861.** $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos x}=\sec^2\frac{x}{2}-1$

862. $1-\cos(\pi-x)+\sin\frac{\pi+x}{2}=0$

863. $2\left[1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\right]=\sqrt{3}\tan\frac{\pi-x}{2}$

864. $\sin x-\cos x-4\cos^2 x\sin x=4\sin^3 x$

865. $\cot x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$

866. $2\cot(x-\pi)-(\cos x+\sin x)(\csc x-\sec x)=4$

867. $\sin(\pi-x)+\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sec x-\cos x}{2\sin x}$

868. $\dfrac{1-\tan\frac{x}{2}}{1-\cot\frac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}$

869. $\sin(\pi-x)+\cot\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sec(-x)-\cos(2\pi-x)$

870. $\sec^2 x-\tan^2 x+\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos 2x\sec^2 x$

871. $\sin^3 x(1+\cot x)+\cos^3 x(1+\tan x)=\cos 2x$

872. $\sin^3 x\cos 3x+\sin 3x\cos^3 x=0.375$

873. $\tan x+\tan 2x=\tan 3x$

874. $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}-45^\circ\right)$

875. $1-\cos^2 2x=\sin 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

876. $1-3\cos x+\cos 2x=\frac{\csc(\pi-x)}{\cot 2x-\cot x}$

877. $[\cos x-\sin(x-\pi)]^2+1=\frac{2\sin^2 x}{\sec^2 x-1}$

878. $(\sin x+\cos x)^2=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

879. $2-\sin x\cos 2x-\sin 2x\cos x=$

$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)\right]^2$$

880. $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

881. $\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$

882. $(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x$

883. $\frac{\cos^2 x-\sin^2 2x}{4\cos^2 x}=\sin(x+30^\circ)\sin(x-30^\circ)$

884. $\dfrac{\sin(60^\circ+x)+\sin(60^\circ-x)}{2}=\dfrac{\tan x}{(1+\tan^2 x)^2}+\dfrac{\cot x}{(1+\cot^2 x)^2}$

885. $\sec^2 x-\left(\cos x+\sin x\tan\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{\sin(x-30^\circ)+\cos(60^\circ-x)}{\cos x}$

886. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{\tan\dfrac{x}{2}+\cot\dfrac{x}{2}}{2\sqrt{2}}$

887. $2\sqrt{2}\sin(45^\circ+x)=\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin x}$

888. $1-\dfrac{2(\sin 2x-\cos 2x\tan x)}{\sqrt{3}\sec^2 x}=\cos^4 x-\sin^4 x$

889. $\sin 3x=4\sin x\cos 2x$

890. $\sec x+1=\sin(\pi-x)-\cos x\tan\dfrac{\pi+x}{2}$

891. $\dfrac{\tan 2x\tan x}{\tan 2x-\tan x}-2\sin(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x)=0$

892. $\tan(x-45^\circ)\tan x\tan(x+45^\circ)=\dfrac{4\cos^2 x}{\tan\dfrac{x}{2}-\cot\dfrac{x}{2}}$

893. $\dfrac{\tan(x+45^\circ)+\tan(x-45^\circ)}{2}=\tan(x-45^\circ)\tan(x+45^\circ)\tan x$

894. $\tan(x+\alpha)+\tan(x-\alpha)=2\cot x$

895. $\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{2}{\tan\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{x+\pi}{2}}$

896. $\dfrac{\sin x}{\sin(30^\circ+x)+\sin(30^\circ-x)}=1+\tan\left(\dfrac{x}{2}+45^\circ\right)-\tan\left(45^\circ-\dfrac{x}{2}\right)$

897. $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

897a. $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{9}{8}$

Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:

898. $\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}$; $\cos x\cos y=\dfrac{1}{4}$

899. $x+y=\alpha$; $\sin x\sin y=m$; 900. $x+y=\alpha$; $\tan x+\tan y=m$

901. $x+y=\dfrac{\pi}{4}$; $\tan x+\tan y=1$

902. $2^{\sin x+\cos y}=1$; $16^{\sin^2 x+\cos^2 y}=4$

903. $\sin x\sin y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$; $\tan x\tan y=\dfrac{1}{3}$

904. $\sin x=2\sin y$; $\cos x=\dfrac{1}{2}\cos y$

Capítulo 13 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

905. Calcular

$$2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arccot}(-1)+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arccos(-1)$$

906. Demostrar que

$$\tan(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

907. Demostrar que

$$\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Calcular:

908. $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$; **909.** $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

910. $\cot\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right]$; **911.** $\tan\left(5\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

912. $\sin\left(3\arctan\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$

913. $\cos\left[3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

Demostrar las identidades siguientes:

914. $\arctan(3+2\sqrt{2})-\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$

915. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

916. $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

917. $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$

918. $2\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{4}=\arctan\frac{32}{43}$

919. $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

Resolver las ecuaciones siguientes:

920. $4\arctan(x^2-3x-3)-\pi=0$

921. $6\arcsin(x^2-6x+8.5)=\pi$

922. $\arctan(x+2)-\arctan(x+1)=\frac{\pi}{4}$

923. $2\arctan\frac{1}{2}-\arctan x=\frac{\pi}{4}$

924. $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\arcsin\frac{1}{3}$

925. $\arctan\frac{a}{b}-\arctan\frac{a-b}{a+b}=\arctan x$

926. $\arcsin 3x=\arccos 4x$; **927.** $2\arcsin x=\arcsin\frac{10x}{13}$

928. Resolver el sistema de ecuaciones

$$x+y=\arctan\frac{2a}{1-a^2}, \quad \tan x\tan y=a^2 \quad (|a|<1)$$