DM3: Conception et utilisation d'un SAT-solver

TODO

19 mai 2025

1 Conception du SAT-solver

Q10.

Soit n le nombre d'opérateurs.

Dans la configuration $(...((a_0|a_1)|a_2)|...)|a_n$, il y a bien n opérateurs.

De plus, la complexité de l'algorithme dans cette configuration est $C_n = C_{n-1} + \Omega(n)$.

Il existe donc un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0$:

$$C_n \geq C_{n-1} + An \Longrightarrow C_n \geq C_{n_0} + A \sum_{k=n_0+1}^{n} k$$

Donc $C_n - C_{n_0} = \Omega(n^2)$. Or C_{n_0} est une constante.

Donc dans le pire cas, la complexité est au moins de l'ordre de $\Omega(n^2)$.

Pour améliorer cette fonction, on pourrait par exemple utiliser un arbre rouge-noir.

Q11. (Bonus)

Dans la nouvelle fonction, on a

$$\begin{aligned} C_n &= \Theta(n) + \Theta(n \log(n)) \\ C_n &= \boxed{\Theta(n \log(n))} \end{aligned}$$

Q19.

La complexité de l'algorithme dans la configuration $\sim (...(\sim T)...)$ est

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n-2} + \Theta(n) \\ C_n &= \boxed{\Theta(n^2)} \end{aligned}$$

Q20. (Bonus)

Dans la nouvelle fonction, on simplifie les enfants avant le nœud.

La complexité est

$$\begin{aligned} C_n &= C_i + C_{n-1-i} + \Theta(1), \quad i \in [\![0, n-1]\!] \\ C_n &= \boxed{\Theta(n)} \end{aligned}$$

Q25.

Q26. (Bonus)

Le satsolver spécialisé en FNC a été implémenté dans `fnc_solver.ml`. De plus, la propagation unitaire a été rajoutée.

En termes d'efficacité, le satsolver en FNC est meilleur que le simple. En effet, dans la résolution du problème à n dames (cf. seconde partie), le satsolver en FNC permet de résoudre plus de dames et en moins de temps.

2 Résolution de problèmes

Q31.

La formule $\boxed{\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} (\neg a_i \vee \neg a_j)}$ est sous FNC.

Pour n variables différentes, la formule contient $n(n-1)$ variables.

Calculs de mémoire (Q29 - Q38)

On note $T(n)$ la taille des formules en nombre de caractères. et $p = 2(\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1) + 3$ la taille maximale d'une variable `X_i_j`.

au_moins_une :

La formule est de la forme : `(X_0_0 | ... | X_n_n)`.

$$T(n) \leq n(p+3)$$

au_plus_une :

La formule est de la forme : `((~X_0_0 | ~X_0_1) & ... & (~X_n_n | X_n_(n-1)))`

Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ clauses, chaque clause est de taille $2p+7$ et entre chaque clause il y a 3 caractères.

$$T(n) \leq \frac{n(n-1)}{2}(2p+10) = n(n-1)(p+5)$$

Contrainte sur une ligne :

La formule est de la forme : `(au_moins_une & au_plus_une)`

$$T(n) \leq 5 + n(n-1)(p+5) + n(p+3)$$

Contrainte sur toutes les lignes :

La formule est de la forme : `(contrainte_une_ligne & ... & contrainte_une_ligne)`

$$T(n) \leq n(3 + 5 + n(p+3) + n(n-1)(p+5))$$

Contrainte sur toutes les colonnes :

La formule est de la forme : `(au_plus_une & ... & au_plus_une)`

$$T(n) \leq n(3 + 5 + n(n-1)(p+5))$$

Contrainte sur toutes les diagonales :

La formule est de la forme : `(au_plus_une & ... & au_plus_une)` avec $2(n-1)(n-2)$ `au_plus_une`.

$$T(n) \leq 2n(n-1)^2(n-2)(p+5)$$

Q38.

La taille de la formule de `gen_formule_n_dames` est

$$\begin{aligned} C_n &= C_{ligne}(n) + C_{col}(n) + C_{diag}(n) + \Theta(1) \\ &= nE_x(n) + nE_p(n) + 2\sum_{i=-n+2}^{n-2} E_p(|n-i|) + \Theta(n) \end{aligned}$$

Avec E_x la fonction `exactement_une` et E_p `au_plus_une`.

Or $nE_x(n) = \Theta(n^3)$, $nE_p(n) = \Theta(n^3)$ et $2\sum_{i=-n+2}^{n-2} E_p(|n-i|) \leq 4nE_p(n) = O(n^3)$, donc

$$\begin{aligned} C_n &= \Theta(n^3) + \Theta(n^3) + O(n^3) + \Theta(n) \\ C_n &= \boxed{O(n^3)} \end{aligned}$$

Q40.

Pour le problème à 5 dames, on obtient

```
fred@mp2:~/DM3$ problemes/n_dames 5
Fichier '5_dames.txt' généré.
Taille du fichier : 3471 octets.
fred@mp2:~/DM3$ satsolver/fnc_solver '5_dames.txt'
La formule est sous FNC.
La formule est satisfiable en assignant 1 aux variables suivantes et 0 aux autres :
X_0_4
X_1_2
X_2_0
X_3_3
X_4_1
Temps d'exécution : 0.001377 s
```

Soit encore

	0	1	2	3	4
0			X		
1					X
2		X			
3				X	
4	X				

Pour le problème à 8 dames, on obtient

```
fred@mp2:~/DM3$ satsolver/fnc_solver '8_dames.txt'
La formule est sous FNC.
La formule est satisfiable en assignant 1 aux variables suivantes et 0 aux autres :
X_0_7
X_1_3
X_2_0
X_3_2
X_6_6
X_5_1
X_4_5
X_7_4
Temps d'exécution : 0.005287 s
```

Soit encore

	0	1	2	3	4	5	6	7
0			X					
1						X		
2				X				
3		X						
4								X
5					X			
6							X	
7	X							

Et pour le problème à 3 dames, on obtient

```
fred@mp2:~/DM3$ satsolver/fnc_solver '3_dames.txt'
La formule est sous FNC.
La formule est insatisfiable.
Temps d'exécution : 0.000985 s
```

3 Problème des cinq maisons

3.1 Description

Le problème des cinq maisons a les contraintes suivantes :

1. φ_1 : Chaque caractéristique (« anglais », « poisson rouge », ...) se retrouve dans exactement une des cinq maisons
2. φ_2 : Chaque maison doit avoir exactement une caractéristique de chaque catégorie (nationalité, boisson, couleur, ...). Par exemple, la maison 1 doit avoir exactement une couleur.
3. φ_3 : Contraintes de l'énoncé

3.2 Nomenclature

Les variables utilisées dans les formules sont de la forme `numéro_caractéristique`. Par exemple :
- `1_anglais` représente « l'anglais habite dans la maison 1 »
- `5_poisson_rouge` représente « la personne habitant la maison 5 a pour animal de compagnie un poisson rouge »
- `3_yop` représente « la personne habitant la maison 3 boit du yop »
- etc.

Dans la suite de cette section, notons C l'ensemble des caractéristiques ($C = \{\text{anglais}, \text{lait}, \text{escalade}, \dots\}$), $\mathscr{C}$ l'ensemble des catéogries de caractéristiques (nationalité, couleur, ...) (donc $C = \bigsqcup_{\mathcal{C}\in\mathscr{C}} \mathcal{C}$) et utilisons des indices de maison dans $[\![1, 5]\!]$.

3.3 Modélisation de la contrainte 1

Pour modéliser la contrainte « Chaque caractéristique se retrouve dans exactement une des cinq maisons », on peut d'abord modéliser la contrainte « La caractéristique c se retrouve dans exactement une maison », en utilisant la formule suivante :

$$\bigvee_{j=1}^{5}\left(\texttt{j\_c} \land \bigwedge_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{5} \neg\texttt{i\_c}\right)$$

(i.e. « Soit cette caractéristique est dans la maison 1 et aucune autre, soit dans la 2 et aucune autre, etc. »)

Ainsi, on peut modéliser la contrainte sur toutes les caractéristiques en faisant un « et » logique :

$$\varphi_1 \equiv \bigwedge_{c\in C}\bigvee_{j=1}^{5}\left(\texttt{j\_c} \land \bigwedge_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{5} \neg\texttt{i\_c}\right)$$

3.4 Modélisation de la contrainte 2

Pour modéliser la contrainte « Chaque maison doit avoir exactement une caractéristique de chaque catégorie », on peut d'abord modéliser la contrainte « La maison i a exactement une caractéristique de la catégorie $\mathcal{C} \in \mathscr{C}$ », en utilisant la formule suivante :

$$\bigvee_{c'\in\mathcal{C}}\left(\texttt{i\_c'} \land \bigwedge_{\substack{c\in\mathcal{C}\\ c\neq c'}} \neg\texttt{i\_c}\right)$$

On peut alors modéliser la contrainte sur toutes les catégories de caractéristiques avec un « et » logique :

$$\bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathscr{C}} \bigvee_{c'\in\mathcal{C}} \left(\texttt{i\_c'} \wedge \bigwedge_{\substack{c\in\mathcal{C}\\ c\neq c'}} \neg\texttt{i\_c} \right)$$

Et de même, on modélise la contrainte sur toutes les maisons ainsi :

$$\varphi_2 \equiv \bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{\mathcal{C}\in\mathscr{C}} \bigvee_{c'\in\mathcal{C}} \left(\texttt{i\_c'} \wedge \bigwedge_{\substack{c\in\mathcal{C}\\ c\neq c'}} \neg\texttt{i\_c} \right)$$

3.5 Modélisation de la contrainte 3

Les contraintes de l'énoncé se modélisent assez facilement. Par exemple, « L'Anglais vit dans une maison rouge » se modélise ainsi :

$$\bigvee_{i=1}^{5} \texttt{i\_anglais} \wedge \texttt{i\_rouge}$$

« La personne qui fait de l'escalade vit à côté de celle qui a des chats » se modélise avec cette formule :

$$\left(\bigvee_{i=1}^{4} \texttt{i\_escalade} \wedge \texttt{(i+1)\_chats} \right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{4} \texttt{i\_chats} \wedge \texttt{(i+1)\_escalade} \right)$$

Encore plus simple, « La personne qui vit dans la maison du centre boit du lait » se modélise avec la formule suivante :

$$\texttt{3\_lait}$$

Il suffit ensuite de faire un « et » logique sur toutes les formules données par les contraintes pour obtenir φ_3.

3.6 Solution

Le satsolver résoud le problème en 0.4 secondes. À noter que l'ordre des contraintes est important : écrire dans le fichier $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ prend au moins 10 minutes (peut-être beaucoup plus, on l'a arrêté avant), tandis que $\varphi_3 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_1$ est beaucoup plus rapide.

La solution est la suivante :

Maison	1	2	3	4	5
Couleur	Jaune	Bleu	Rouge	Vert	Blanc
Nationalité	Norvégien	Danois	Anglais	Allemand	Suédois
Animal	Chats	Cheval	Oiseaux	Poisson rouge	Chiens
Boisson	Eau	Thé	Lait	Café	Yop
Sport	Danse	Escalade	Vélo	Karaté	Basket

Ainsi, le poisson rouge est l'animal de compagnie de l'Allemand.

4 Problème du calendrier

4.1 Description

Pour la résolution du problème du calendrier, il faut respecter ces deux règles :

1. Chaque case a une pièce (voire 0 pour certaines cases).
2. Chaque pièce n'est utilisée qu'une seule fois.

Pour représenter le problème, chaque case aura 10 variables, indiquant si la pièce correspondante est dessus.

Elle seront de la forme `X_0_0` avec X le nom de la pièce, $(0, 0)$ les coordonnées de la case. Exemples : `l_4_5`, `T_2_7`. (Les noms des pièces sont I, L, S, b, C, l, s, Z, T et V)

Pour optimiser, les cases qui doivent avoir 0 pièce ne seront ni créées ni utilisées.

4.2 Définition des ensembles

On définit $C \subset [\![0,7]\!]^2$ l'ensemble des cases qui doivent être remplies, implémentés avec `date` et le tableau `calendrier`.

On définit $\mathbb{P}$ l'ensemble des pièces, implémenté dans `pieces.c` et `pieces.h` ($\mathbb{P}$ est ordonné).

On définit $\mathbb{V}_p$ l'ensemble des positions valides de la pièce $p \in \mathbb{P}$, implémenté avec `piece_valide`.

Pour $p \in \mathbb{P}$ et $v \in \mathbb{V}_p$, on définit N_v par

$$\forall (i,j) \in C, \quad N_v(p_{i,j}) = \begin{cases} p_{i,j} & \text{si } p \text{ dans la position } v \text{ est sur la case } (i,j) \\ \neg p_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple pour la pièce T de position $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $N_v(T_{1,2}) = T_{1,2}$ et $N_v(T_{3,1}) = \neg T_{3,1}$

4.3 Modélisation de la contrainte sur une case avec qu'une pièce

Pour $p_{i,j}$ les variables « p est en (i,j) », la contrainte sur la case $(i,j) \in C$ est

$$\varphi_{i,j} = \left(\bigvee_{p \in \mathbb{P}} p_{i,j} \right) \wedge \bigwedge_{\substack{(p,p') \in \mathbb{P}^2 \\ p < p'}} (\neg p_{i,j} \vee \neg p'_{i,j})$$

Cette formule est sous FNC.

Elle est implémentée dans `contrainte_une_case`.

4.4 Modélisation de la contrainte sur toutes les cases avec qu'une pièce

La contrainte sur toutes les cases est

$$\begin{aligned} \varphi &= \bigwedge_{(i,j) \in C} \varphi_{i,j} \\ &= \bigwedge_{(i,j) \in C} \left(\left(\bigvee_{p \in \mathbb{P}} p_{i,j} \right) \wedge \bigwedge_{\substack{(p,p') \in \mathbb{P}^2 \\ p < p'}} (\neg p_{i,j} \vee \neg p'_{i,j}) \right) \end{aligned}$$

Cette formule est sous FNC.

Elle est implémenter dans `contrainte_toutes_cases`.

4.5 Modélisation de la contrainte sur une pièce

La contrainte sur la pièce $p \in \mathbb{P}$ est

$$\varphi'_p = \bigvee_{v \in \mathbb{V}_p} \left(\bigwedge_{(i,j) \in C} N_v(p_{i,j}) \right)$$

Mais cette formule n'est pas sous FNC, on doit passer par des variables intermédiaires que l'on nomme $Z_{p,v}$.

$$\begin{aligned}
\varphi'_p &= \bigvee_{v\in\mathbb{V}_p}\left(\bigwedge_{(i,j)\in C} N_v(p_{i,j})\right)\\
&= \left(\bigvee_{v\in\mathbb{V}_p} Z_{p,v}\right) \wedge \bigwedge_{v\in\mathbb{V}_p}\left(Z_{p,v} \leftrightarrow \bigwedge_{(i,j)\in C} N_v(p_{i,j})\right)\\
&= \left(\bigvee_{v\in\mathbb{V}_p} Z_{p,v}\right) \wedge \bigwedge_{v\in\mathbb{V}_p}\left(Z_{p,v} \to \bigwedge_{(i,j)\in C} N_v(p_{i,j})\right) \wedge \bigwedge_{v\in\mathbb{V}_p}\left(\neg Z_{p,v} \to \neg \bigwedge_{(i,j)\in C} N_v(p_{i,j})\right)
\end{aligned}$$

Que l'on peut simplifier en

$$\begin{aligned}
\varphi'_p &= \left(\bigvee_{v\in\mathbb{V}_p} Z_{p,v}\right) \wedge \bigwedge_{v\in\mathbb{V}_p}\left(Z_{p,v} \to \bigwedge_{(i,j)\in C} N_v(p_{i,j})\right)\\
&= \left(\bigvee_{v\in\mathbb{V}_p} Z_{p,v}\right) \wedge \bigwedge_{v\in\mathbb{V}_p}\left(\neg Z_{p,v} \vee \bigwedge_{(i,j)\in C} N_v(p_{i,j})\right)\\
&= \left(\bigvee_{v\in\mathbb{V}_p} Z_{p,v}\right) \wedge \bigwedge_{\substack{(i,j)\in C\\ v\in\mathbb{V}_p}} (\neg Z_{p,v} \vee N_v(p_{i,j}))
\end{aligned}$$

qui est sous FNC.

Elle est implémentée en 2 parties dans `contrainte_piece_pos` et dans `contrainte_une_piece`.

4.6 Modélisation de la contrainte sur toutes les pièces

La contrainte sur toutes les pièces est

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \bigwedge_{p\in\mathbb{P}} \varphi'_p\\
&= \bigwedge_{p\in\mathbb{P}}\left(\left(\bigvee_{v\in\mathbb{V}_p} Z_{p,v}\right) \wedge \bigwedge_{\substack{(i,j)\in C\\ v\in\mathbb{V}_p}} (\neg Z_{p,v} \vee N_v(p_{i,j}))\right)
\end{aligned}$$

Cette formule est sous FNC.

Elle est implémentée dans `contrainte_toutes_pieces`.

4.7 Formule générale

La formule générale est donc

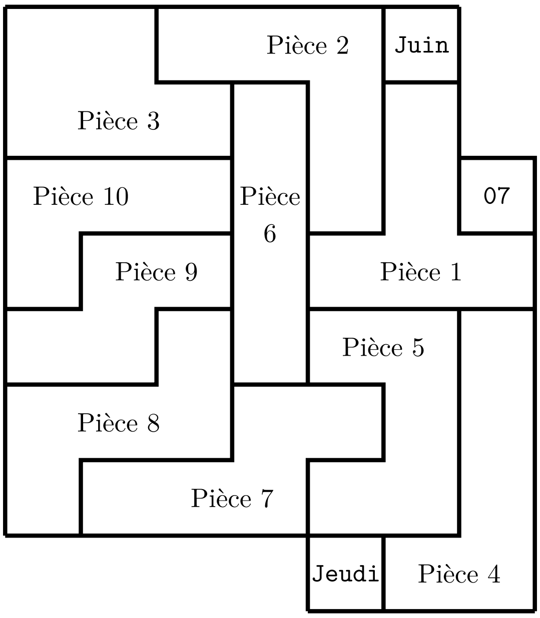
$$\begin{aligned}
\Phi &= \varphi \wedge \varphi'\\
&= \bigwedge_{(i,j)\in C}\left(\left(\bigvee_{p\in\mathbb{P}} p_{i,j}\right) \wedge \bigwedge_{\substack{(p,p')\in\mathbb{P}^2\\ p<p'}} (\neg p_{i,j} \vee \neg p'_{i,j})\right) \wedge \bigwedge_{p\in\mathbb{P}}\left(\left(\bigvee_{v\in\mathbb{V}_p} Z_{p,v}\right) \wedge \bigwedge_{\substack{(i,j)\in C\\ v\in\mathbb{V}_p}} (\neg Z_{p,v} \vee N_v(p_{i,j}))\right)
\end{aligned}$$

4.8 Solution

Malheureusement, la complexité de cette formule est trop élevée pour les 10 pièces. Donc, en plus d'avoir implémenté le problème dans `calendrier.c`, une version simplifiée est implémentée dans `calendrier_n_pieces.c`.

Ce programme représente le Jeudi 7 Juin avec, en entrée, le nombre de pièces à prendre entre 2 et 10.

L'une des solution attendue pour 10 pièces est



Pour le problème avec 6 pièces, on obtient

```
fred@mp2:~/DM3$ problemes/calendrier_n_pieces 6
Fichier 'calendrier_6_pieces.txt' généré.
Taille du fichier : 182857 octets.
fred@mp2:~/DM3$ satsolver/fnc_solver calendrier_6_pieces.txt | problemes/print_tab 8
La formule est sous FNC.
La formule est satisfiable en assignant 1 aux variables suivantes et 0 aux autres :
C_4_4
alias_C28
C_4_5
C_5_5
C_6_4
C_6_5
I_1_3
I_2_3
I_3_3
I_4_3
alias_L23
L_4_6
L_5_6
L_6_6
L_7_5
L_7_6
T_1_5
T_2_5
T_3_4
alias_V3
V_0_2
V_0_3
V_0_4
V_1_4
V_2_4
b_0_0
b_0_1
alias_b43
b_1_0
b_1_1
b_1_2
T_3_5
T_3_6
alias_I26
alias_T31
Temps d'exécution : 4.159915 s
+--+--+--+--+--+--+--+--+
|     |        |        |
+     +--+--+  +--+     +
|        |  |  |  |     |
+--+--+--+  +  +  +     +
|        |  |  |  |     |
+        +  +--+  +--+  +
|        |  |        |  |
+        +  +--+--+--+  +
|        |  |     |  |  |
+        +--+--+  +  +  +
|              |  |  |  |
+           +--+  +  +  +
|           |     |  |  |
+           +--+--+  +  +
|              |     |  |
+--+--+--+--+--+--+--+--+
```

Et pour le problème avec 7 et 8 pièces, on obtient

```
fred@mp2:~/DM3$ satsolver/fnc_solver calendrier_7_pieces.txt | problemes/print_tab 8
La formule est sous FNC.
La formule est satisfiable en assignant 1 aux variables suivantes et 0 aux autres :
C_4_4
...
alias_T48
Temps d'exécution : 45.569438 s
+--+--+--+--+--+--+--+--+
|     |        |        |
+     +--+--+  +--+     +
|        |  |  |  |     |
+--+--+--+  +  +  +     +
|        |  |  |  |     |
+        +  +--+  +--+  +
|        |  |        |  |
+        +  +--+--+--+  +
|        |  |     |  |  |
+        +--+--+  +  +  +
|        |     |  |  |  |
+  +--+--+  +--+  +  +  +
|  |        |     |  |  |
+  +--+--+--+--+--+  +  +
|              |     |  |
+--+--+--+--+--+--+--+--+
fred@mp2:~/DM3$ satsolver/fnc_solver calendrier_8_pieces.txt | problemes/print_tab 8
La formule est sous FNC.
La formule est satisfiable en assignant 1 aux variables suivantes et 0 aux autres :
C_4_4
...
alias_T58
Temps d'exécution : 675.462875 s
+--+--+--+--+--+--+--+--+
|     |        |        |
+     +--+--+  +--+     +
|        |  |  |  |     |
+--+--+--+  +  +  +     +
|        |  |  |  |     |
+        +  +--+  +--+  +
|        |  |        |  |
+     +--+  +--+--+--+  +
|     |  |  |     |  |  |
+--+--+  +--+--+  +  +  +
|        |     |  |  |  |
+  +--+--+  +--+  +  +  +
|  |        |     |  |  |
+--+--+--+--+--+--+  +  +
|              |     |  |
+--+--+--+--+--+--+--+--+
```

Mais il n'est pas possible de résoudre avec 9 pièces en un temps convenable.