Ejercicio 1 *[4 puntos]:*

Construir el vector a con los valores

$$a_n = \left(-5/6\right)^{n-1} \quad n = 1:21$$

Construir el vector b siguiendo la recurrencia

$$b_1 = 1 \quad b_2 = -5/6 \quad b_n = 5\, b_{n-2} + 31\, b_{n-1}/6 \quad n = 3:21$$

Calcular el error relativo entre ambos vectores.
Hacer un *fprintf* mostrando los siguientes valores:

Para el valor de n = 1 el error relativo es 0.000000e+00
Para el valor de n = 2 el error relativo es 0.000000e+00
Para el valor de n = 3 el error relativo es 1.119105e-15

Dibujar con la escala adecuada y en la misma figura, a la izquierda los valores de an ('b*') y de bn ('g*') y a la derecha el error relativo ('ro'), respecto de n.

¿Para qué valores de n hay menos de dos cifras decimales correctas? ¿A partir de qué valor de n no se obtiene ninguna cifra de precisión?

Ejercicio 2*:*

1. *[2 puntos]* Hacer un bucle para calcular el valor del menor entero k para el que en Matlab 1+2^-k es igual a 1.

Con el resultado obtenido hacer el siguiente *fprintf* mostrando los valores de k, 1+2^-k y 1+2^-(k-1)

Para k = xx el valor de 1+2^-k es 1.00000000000000000000 y el de 1+2^-(k-1) es 1.00000000000000022204

2. *[4 puntos]* La siguiente expresión aproxima el número e=exp(1), en función de x para valores pequeños de x

$$e \approx \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^{(1/x)}$$

Sean vex=exp(1) el valor exacto y vap el vector de valores aproximados dado por la expresión derecha anterior para x=2.^-n con n=1:60.

a. Definir vex y vap. Calcular las tablas Erel del error relativo y Ncifras del número de cifras decimales de precisión. Usar el comando *floor* para calcular la parte entera de un número.

Dibujar con la escala adecuada y en la misma figura, a la izquierda la tabla Erel ('b*') y a la derecha la tabla Ncifras ('go'), respecto de n.

Hacer un fprintf mostrando los siguientes valores:

Para n = 1 obtenemos 2 cifras de precisión
Para n = 2 obtenemos 3 cifras de precisión

¿Para qué valores de x no se obtiene ninguna cifra de precisión?

b. Vamos a estudiar el motivo por el que las cifras de precisión se reducen de 15 (para n=52) a 0 (para n=53).

Sea el vector y=(1+x)-1.

Dibujar con la escala adecuada y en la misma figura, a la izquierda la tabla x ('b*') y a la derecha la tabla y ('go'), respecto de n.

¿Qué valores de la tabla y no se muestran en la gráfica? ¿Porqué? ¿Tiene alguna relación con los resultados obtenidos en el apartado 2.1 anterior?

¿Porqué las cifras de precisión se reducen de 15 (para n=52) a 0 (para n=53)?

c. En la gráfica del Ncifras se puede observar que se reducen las cifras de precisión de 15 (n=25) a 8 (n=26). ¿Cuál es el motivo?. Dar los comandos y volcar los resultados para justificar la respuesta.

SOLUCION

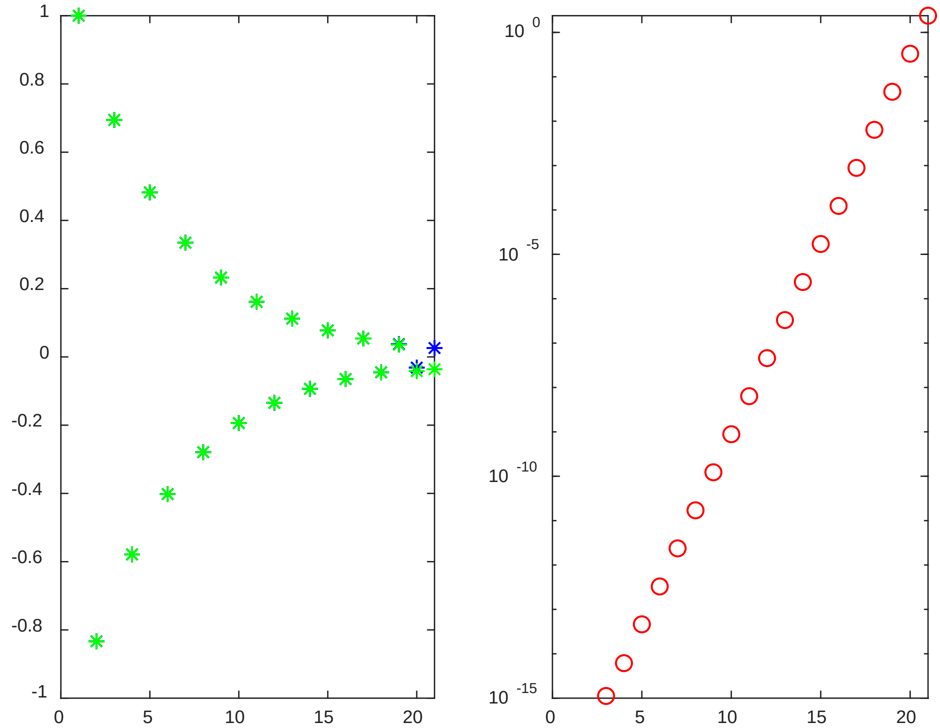
Ejercicio 1 *[4 puntos]:*

```
N=21; n=1:N;  a=(-5/6).^(n-1);
b=nan(size(a)); b(1)=1;b(2)=-5/6;for k=3:N, b(k)=5*b(k-2)+31*b(k-1)/6; end

e_r=abs((b-a)./a);
fprintf('Para el valor de n=%2d el error relativo es %e\n',[n;e_r])
```

```
Para el valor de n= 1 el error relativo es 0.000000e+00
Para el valor de n= 2 el error relativo es 0.000000e+00
Para el valor de n= 3 el error relativo es 1.119105e-15
Para el valor de n= 4 el error relativo es 6.139089e-15
Para el valor de n= 5 el error relativo es 4.604317e-14
Para el valor de n= 6 el error relativo es 3.284720e-13
Para el valor de n= 7 el error relativo es 2.369142e-12
Para el valor de n= 8 el error relativo es 1.705345e-11
Para el valor de n= 9 el error relativo es 1.227882e-10
Para el valor de n=10 el error relativo es 8.840700e-10
Para el valor de n=11 el error relativo es 6.365308e-09
Para el valor de n=12 el error relativo es 4.583022e-08
Para el valor de n=13 el error relativo es 3.299776e-07
Para el valor de n=14 el error relativo es 2.375838e-06
Para el valor de n=15 el error relativo es 1.710604e-05
Para el valor de n=16 el error relativo es 1.231635e-04
Para el valor de n=17 el error relativo es 8.867769e-04
Para el valor de n=18 el error relativo es 6.384794e-03
Para el valor de n=19 el error relativo es 4.597052e-02
Para el valor de n=20 el error relativo es 3.309877e-01
Para el valor de n=21 el error relativo es 2.383112e+00
```

```
subplot(121);plot(a,'b*');hold on;plot(b,'g*')
subplot(122);semilogy(e_r,'or')
```



Hay menos de dos cifras correctas para los valores de n 19 , 20 y 21 Y no hay ninguna cifra decimal correcta para n = 20 y 21

Ejercicio 2*:*

1. *[2 puntos]*

```
k=1
while (1+2^-k ~= 1)
   k=k+1;
end
fprintf('Para k = %2d el valor de 1+2^-k es %.20f y el de 1+2^-(k-1) es %.20f\n',k,1+2^-
k,1+2^-(k-1))
%Para k = 53 el valor de 1+2^-k es 1.00000000000000000000 y el de 1+2^-(k-1) es
1.00000000000000022204
```

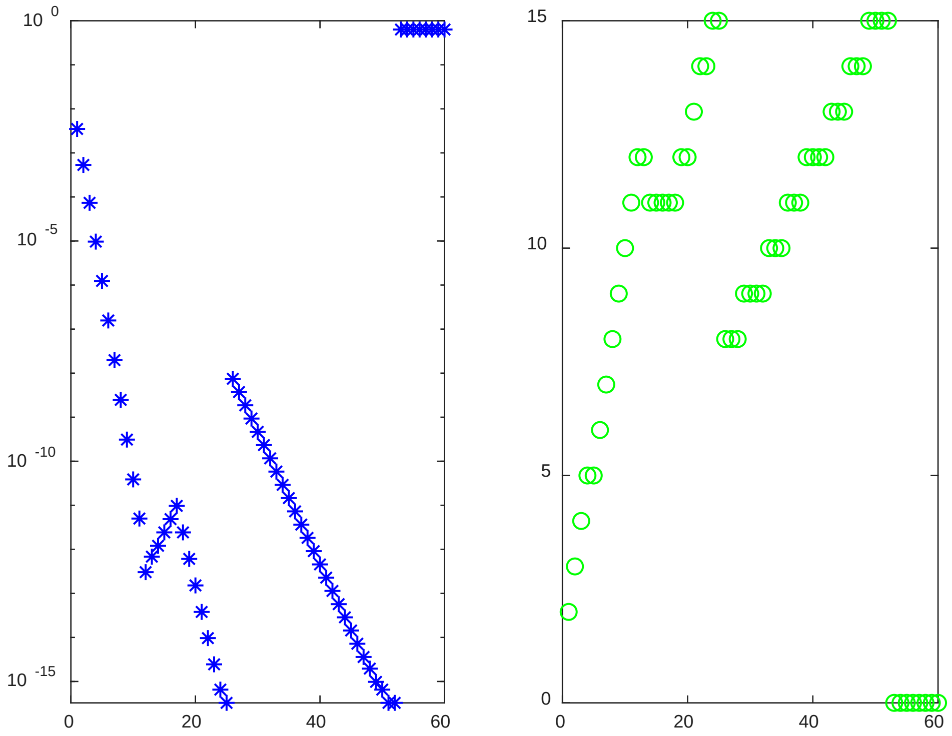
2. *[4 puntos]*

```
clear all
ve=exp(1);
n=1:60;x=2.^-n;
va=(1+x+x.^2/2+x.^3/6).^(1./x);
Erel=abs(ve-va)/abs(ve);
Ncifras=floor(-log10(Erel));
figure;
subplot(121);semilogy(n,Erel,'b*')
subplot(122);plot(n,Ncifras,'go')
fprintf('Para n = %2d obtenemos %2d cifras de precisión\n',[n;Ncifras])
```

Para n = 1 obtenemos 2 cifras de precisión

Para n = 2 obtenemos 3 cifras de precisión
Para n = 3 obtenemos 4 cifras de precisión
Para n = 4 obtenemos 5 cifras de precisión
Para n = 5 obtenemos 5 cifras de precisión
Para n = 6 obtenemos 6 cifras de precisión
Para n = 7 obtenemos 7 cifras de precisión
Para n = 8 obtenemos 8 cifras de precisión
Para n = 9 obtenemos 9 cifras de precisión
Para n = 10 obtenemos 10 cifras de precisión
Para n = 11 obtenemos 11 cifras de precisión
Para n = 12 obtenemos 12 cifras de precisión
Para n = 13 obtenemos 12 cifras de precisión
Para n = 14 obtenemos 11 cifras de precisión
Para n = 15 obtenemos 11 cifras de precisión
Para n = 16 obtenemos 11 cifras de precisión
Para n = 17 obtenemos 11 cifras de precisión
Para n = 18 obtenemos 11 cifras de precisión
Para n = 19 obtenemos 12 cifras de precisión
Para n = 20 obtenemos 12 cifras de precisión
Para n = 21 obtenemos 13 cifras de precisión
Para n = 22 obtenemos 14 cifras de precisión
Para n = 23 obtenemos 14 cifras de precisión
Para n = 24 obtenemos 15 cifras de precisión
Para n = 25 obtenemos 15 cifras de precisión
Para n = 26 obtenemos 8 cifras de precisión
Para n = 27 obtenemos 8 cifras de precisión
Para n = 28 obtenemos 8 cifras de precisión
Para n = 29 obtenemos 9 cifras de precisión
Para n = 30 obtenemos 9 cifras de precisión
Para n = 31 obtenemos 9 cifras de precisión
Para n = 32 obtenemos 9 cifras de precisión
Para n = 33 obtenemos 10 cifras de precisión
Para n = 34 obtenemos 10 cifras de precisión
Para n = 35 obtenemos 10 cifras de precisión
Para n = 36 obtenemos 11 cifras de precisión
Para n = 37 obtenemos 11 cifras de precisión
Para n = 38 obtenemos 11 cifras de precisión
Para n = 39 obtenemos 12 cifras de precisión
Para n = 40 obtenemos 12 cifras de precisión
Para n = 41 obtenemos 12 cifras de precisión
Para n = 42 obtenemos 12 cifras de precisión
Para n = 43 obtenemos 13 cifras de precisión
Para n = 44 obtenemos 13 cifras de precisión
Para n = 45 obtenemos 13 cifras de precisión
Para n = 46 obtenemos 14 cifras de precisión
Para n = 47 obtenemos 14 cifras de precisión
Para n = 48 obtenemos 14 cifras de precisión
Para n = 49 obtenemos 15 cifras de precisión
Para n = 50 obtenemos 15 cifras de precisión
Para n = 51 obtenemos 15 cifras de precisión
Para n = 52 obtenemos 15 cifras de precisión
Para n = 53 obtenemos 0 cifras de precisión
Para n = 54 obtenemos 0 cifras de precisión
Para n = 55 obtenemos 0 cifras de precisión
Para n = 56 obtenemos 0 cifras de precisión
Para n = 57 obtenemos 0 cifras de precisión
Para n = 58 obtenemos 0 cifras de precisión

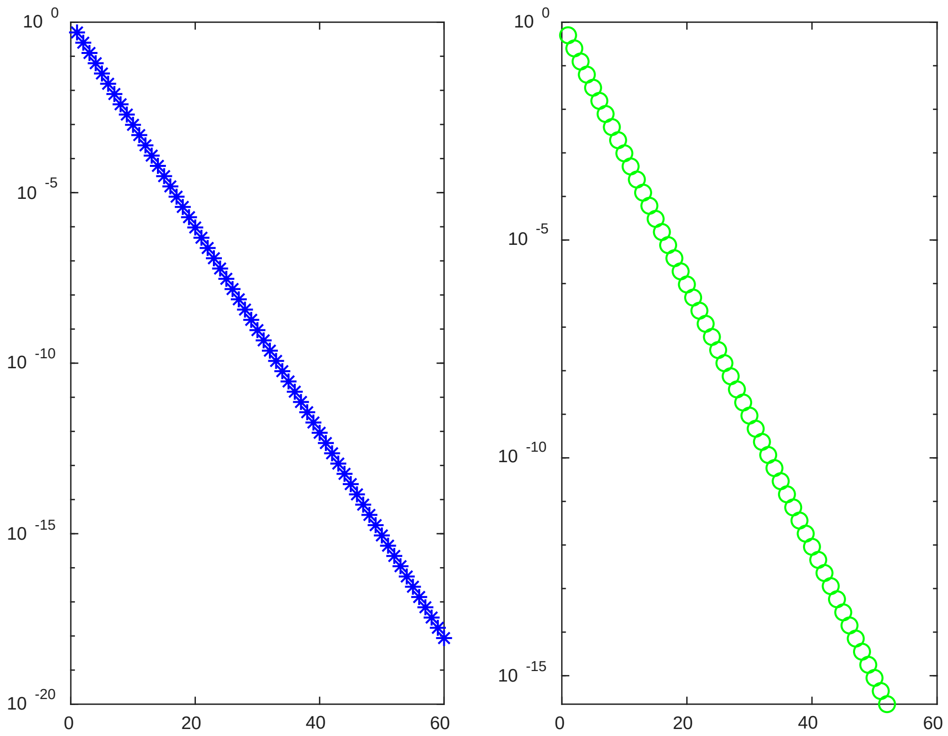
Para n = 59 obtenemos 0 cifras de precisión
Para n = 60 obtenemos 0 cifras de precisión



A partir de n=53, x=2^-53, no se obtiene ninguna cifra de precisión.

b.

```
y=(1+x)-1;
figure;
subplot(121);semilogy(n,x,'b*')
subplot(122);semilogy(n,y,'go')
```



A partir de n=53 no se muestran los datos de la tabla y. Los valores de la tabla y son nulos:

```
>> y(53:end)
ans =
     0     0     0     0     0     0     0     0
```

El eps(1)=2^-52=2.2204e-16. Por tanto, el número máquina de 1+2^-53 es 1.
Para n>=53 se verifica (1+2^-n) == 1.
Este hecho lo podemos comprobar de dos formas:

- El primer elemento nulo de la gráfica de y es cuando x=2^-53.
- En el apartado 2.1, el menor k que verifica 1+2^-k =1 es k=53.

Para n>=53 los valores de x^2 y x^3 no suman nada, ya que son mucho menores que x.

c. En la gráfica del Ncifras se puede observar que se reducen las cifras de precisión de 15 (n=25) a 8 (n=26). ¿Cuál es el motivo?. Dar los comandos y volcar los resultados para justificar la respuesta.

El comportamiento es similar al caso anterior, solamente que ahora para n=25 el valor de $1+x+x^2/2$ es distinto de 1+x. Mientras que para n=26 son iguales. Se puede ver con los comandos:

```
>> n=25;x=2.^-n;x^2/2
ans =
   4.4409e-16
>> n=26;x=2.^-n;x^2/2
ans =
   1.1102e-16
```

Para n=25, (2^-25)^2/2 es mayor que eps(1)
Para n=26, (2^-26)^2/2 es menor que eps(1)