1 Matrices, vecteurs

Exercice 1.1 Calculer la norme de chacun des vecteurs

$$U = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2 On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $Y_1 = AX_1$ et $Y_2 = AX_2$. On note B la matrice dont la première colonne est X_1 et la deuxième colonne X_2. Calculer le produit AB. On note C la matrice dont la première colonne est Y_1 et la deuxième colonne est Y_2. Que constatez-vous ?

Exercice 1.3 Calculer, quand il est défini, le produit de la matrice A_i et du vecteur v_j

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

et

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.4 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le produit ABC est-il défini ? Si oui, le calculer. Même question pour le produit CAB.

Exercice 1.5 Peut-on définir les produits A_iB_j pour les matrices suivantes ? Si oui, les calculer.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ -6 & 7 & -11 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -12 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -5 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.6 Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour $p \geq 1$ entier, on note I_p la matrice identité dans $M_p(\mathbb{R})$. Existe-t-il des matrices B à coefficients réels ou complexes telles que $BA = I_p$? Telles que $AB = I_p$? Si oui, écrire les relations que doivent vérifier les coefficients de la matrice B.

Exercice 1.7 Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $B = A - I_3$. Calculer B^n, pour $n \geq 1$. En déduire A^n, $n \geq 1$. Montrer l'égalité $A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$.

Exercice 1.8 Pour des réels θ et ϕ, on définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices A^2, AB et BA. Commentez.

2 Systèmes linéaires : $n = 2$

Exercice 2.1 Résoudre les systèmes suivants par substitution

1. $\begin{cases} -4x + 2y = -2 \\ 5x + y = -1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ -4x + 3y = 4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$

Exercice 2.2 Résoudre les systèmes suivants par combinaison linéaire et retrouver graphiquement le résultat.

1. $\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x + 2y = 0 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 3y + 2x = 3 \\ 2y + 5x = 2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x = 4 \\ 2y + 5x = 2 \end{cases}$

Exercice 2.3 Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle. Les résoudre en utilisant la méthode d'élimination de Gauss :

1. $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 2y + x = 3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -2y + x = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2y + x = 1/2 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

Exercice 2.4 Résoudre les problèmes suivants

1. On utilise x molécules de CH_4 et y molécules de C_2H_4 pour obtenir 4 molécules de C_2H_6. Trouver x et y.
2. On utilise x molécules de C_3H_8 et y molécules de C_2H_6 pour obtenir 3 molécules de CH_4 et 2 molécules de C_2H_4. Trouver x et y.
3. On utilise x molécules de C_3H_6 et y molécules de C_2H_4 pour obtenir 4 molécules de CH_4. Trouver x et y.

Exercice 2.5 Déterminer les points d'intersection des droites suivantes après avoir posé le problème en équations :

1. La droite d_1 passant par les points de coordonnées $(1, 2)$ et $(0, 0)$ et la droite d_2 passant par les points $(1, 5)$ et $(-1, -3)$.
2. La droite d_3 passant par les points de coordonnées $(-10, 5)$ et $(2, -1)$ et la droite d_4 passant par les points $(2, 2)$ et $(1, -3)$.

Exercice 2.6 Un récipient rempli d'eau a une masse de 720 g. Le même récipient rempli d'huile a une masse de 680 g. Déterminer le volume V en cm^3 et sa masse vide m en g.
Données : masse volumique de l'eau : 1.0 g.cm^{-3}, masse volumique de l'huile : 0.9 g.cm^{-3}.

3 Systèmes linéaires : $n = 3$

Exercice 3.1 Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode de Gauss :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ x-y &=& 0 \\ x+4y+z &=& 0 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 5 \\ x-y-z &=& 1 \\ x+z &=& 3 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+2z &=& a \\ -x+2y-3z &=& b \\ x+2y+z &=& c \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y+5z &=& 5 \\ 3x+6y+2z &=& 9 \\ 5x+7y+9z &=& 12 \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{rcl} 4x+2y+10z &=& 7 \\ 6x+3y+15z &=& 19 \\ 7x+13y+17z &=& 23 \end{array}\right.$
6. $\left\{\begin{array}{rcl} x+5y+2z &=& 8 \\ 3x+15y+6z &=& 24 \\ 9x+45y+18z &=& 72 \end{array}\right.$

Exercice 3.2 Soit $a \in \mathbb{R}$. On étudie le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ x+3y-2z=5 \\ 2x-y+az=1 \end{cases}$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système peut :
   (a) n'admettre aucune solution
   (b) admettre exactement une solution
   (c) admettre une infinité de solutions
2. Résoudre le système lorsque celui-ci admet une (ou des) solution(s).

Exercice 3.3 Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

Exercice 3.4 Soient a, b et c des réels. On considère le système suivant

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ x+y=b \\ x-2y+9z=c \end{cases}$$

1. Montrer que si $3a-4b+c \neq 0$, le système n'admet pas de solution.
2. Est-ce que le système peut avoir une unique solution ?

Exercice 3.5

1. Écrire l'équation du plan qui contient les points $(1,1,0)$, $(1,0,-1)$ et $(0,-2,1)$.
2. Déterminer le point qui se trouve à l'intersection de trois plans d'équations respectives : $x+y+z=1$, $x-y+z=-1$ et $2x+y+z=2$.

Exercice 3.6 On considère un circuit électrique (voir figure 1) en régime stationnaire.

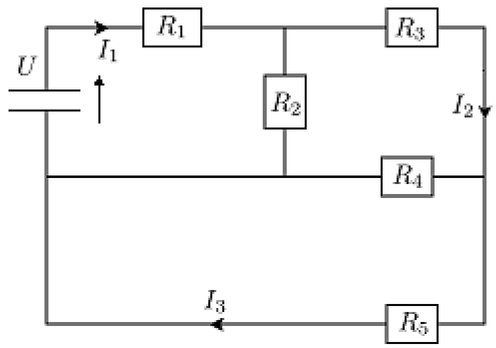


FIGURE 1 – Un circuit électrique.

1. Utiliser les Lois de Kirchhoff pour obtenir un système linéaire liant I_1, I_2 et I_3 en fonction des paramètres U, R_1, R_2, R_3, R_4 et R_5.
2. On suppose maintenant que $U = 1V$ et $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$. Déterminer les valeurs de I_1, I_2 et I_3.

Exercice 3.7 On considère la réaction chimique suivante

$$x\mathrm{Ca(H_2PO_4)_2} + y\mathrm{Ca(OH)_2} \to z\mathrm{Ca_3(PO_4)_2} + w\mathrm{H_2O}.$$

où les coefficients x, y, z, w sont à déterminer.

1. Trouver des relations linéaires entre x, y, z, w pour décrire la conservation des masses dans la réaction pour chaque élément.
2. Trouver y, z, w quand $x = 1$.

4 Déterminants

Exercice 4.1 Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 4.2

1. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Calculer $\det B$, $\det C$ et $\det(BC)$. Que remarquez-vous ? Cette formule est-elle générale ?
   Calculez det$(B + C)$. Que remarquez-vous ?
2. Rappel : une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$.
   Montrer que si A est nilpotente alors $\det(A) = 0$.

Exercice 4.3

1. Quelle relation lie le déterminant d'une matrice inversible et celui de son inverse ?
2. (a) Soient
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   Montrer que ces matrices sont inversibles. Calculer le déterminant de leur inverse. Calculer A^{-1}, B^{-1} et C^{-1}.
3. (a) Soient
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   Montrer que ces matrices sont inversibles. Calculer le déterminant de leur inverse. Calculer A^{-1}, B^{-1} et C^{-1}.

Exercice 4.4

1. Écrire les systèmes linéaires de l'exercice 2.3 de la feuille 2 sous forme matricielle. Pour chaque système, dire s'il a une solution unique. Et si oui, la caluler par la méthode de Cramer.
2. Écrire les systèmes linéaires de l'exercice 3.1 de la feuille 3 sous forme matricielle. Pour chaque système, dire s'il a une solution unique. Et si oui, la caluler par la méthode de Cramer.

Exercice 4.5 Soit x un réel. On définit la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} a_{i,j} = 1 & \forall\, i \neq j \\ a_{i,i} = 1 + x & \forall\, i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Calculer le déterninant de cette matrice dans le cas $n = 2$ puis $n = 3$.
Facultatif : calculer le déterninant dans le cas général (n entier quelconque).

Exercice 4.6 *Déterminant de Vandermonde*

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. On appelle déterminant de Vandermonde le déterminant suivant :

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Pour $n = 2$, calculer $V_2(a_1, a_2)$. Que vaut le déterminant si $a_1 = a_2$?
2. Pour $n = 3$, calculer, puis factoriser $V_3(a_1, a_2, a_3)$. Que vaut le déterminant si deux des points a_i sont égaux ?
3. Facultatif.
   (a) Montrer que $V_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$ lorsque $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas tous distincts.
   (b) On suppose que $a_1, \ldots, a_n$ sont distincts. On pose $P(x) = V_{n+1}(a_1, \ldots, a_n, x)$. En développant, montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, et donner son coefficient dominant. Montrer que
   $$P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_n)$$
   et en déduire que
   $$P(x) = V_n(a_1, \ldots, a_n)(x - a_1) \ldots (x - a_n).$$
   On rappelle que tout polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n admet au plus n racines distinctes, et que α est une racine de P si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.
   (c) Montrer par récurrence sur n que
   $$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

5 Applications linéaires

Exercice 5.1 Parmi les applications suivantes lesquelles sont linéaires ? Lorsque c'est possible, donner la matrice de l'application (dans les bases canoniques).

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad (x, y) \longmapsto (3x, -7y + 5x)$
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad (x, y, z) \longmapsto \sin(xyz)$
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x, y, z) \longmapsto (x + 2y - 3z, 0, x + yz)$

Exercice 5.2 On considère les applications suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (7x, 7y) \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x + 3y, 7x - 5y) \end{array}$$

Donner les expressions de $f + g$, $2f - 3g$, $f \circ g$, $g \circ f$, f^2, g^2.

Exercice 5.3 On considère les applications suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (7x, 7y, 7z) \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

Est-ce que f et g commutent ?

Exercice 5.4 On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x + y, x - y) \end{array}$$

1. Quelle est la matrice F de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?
2. f est elle une une application linéaire bijective ?
3. Donner l'expression de f^{-1}, l'application réciproque de f.

Exercice 5.5 On considère les applications suivantes

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x - y, 2y - x, x + y) \end{array}$$

et

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x - z, y - x) \end{array}$$

1. Quelle est la matrice A (respectivement B) de u (respectivement v) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) ?
2. Donner l'expression de l'application composée $v \circ u$ de deux manières différentes. Que remarque-t-on ?

Exercice 5.6 On considère l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+y+z, x) \end{array}$$

1. Donner l'expression de F, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer l'ensemble $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 0\}$.
3. Déterminer l'ensemble im$(f) = \{f(x), x \in \mathbb{R}^3\}$

Exercice 5.7 Soit $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est F.

1. Donner l'expression de f.
2. Déterminer l'ensemble $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 0\}$.

Exercice 5.8 Soit $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est F.

Exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3.

Exercice 5.9 Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Soit $x_i \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ i = \{1,2,3\}$. On suppose que,

$$\begin{cases} f(x_1) = \lambda_1 x_1, \\ f(x_2) = \lambda_2 x_2, \\ f(x_3) = \lambda_3 x_3. \end{cases}$$

1. Montrer que : pour tout $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$ avec $i \neq j$, la famille $\{x_i, x_j\}$, est libre.
2. La famille $\{x_1, x_2, x_3\}$ est-elle libre ?

Exercice 5.10 Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. On considère $e \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(e) \neq 0$.

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e + \beta f(e) + \gamma f^2(e) = 0$. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (Indication : poser $u = \alpha e + \beta f(e) + \gamma f^2(e)$, calculer $f(u)$ et $f^2(u)$)
2. Montrer que la famille $\{e, f(e), f^2(e)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.11

1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les rotations r_α et r_β d'angles respectifs α et β
   (a) Géométriquement, que vaut $r_\alpha \circ r_\beta$?
   (b) Donner l'expression de R_α et R_β, les matrices de r_α et r_β dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Retrouver le résultat de la première question.
2. Soit ρ la rotation vérifiant $\rho(3,-4) = (3,4)$. Calculer $\rho(3,4)$.

Exercice 5.12 On considère les applications suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y) \end{array},$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,0) \end{array},$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (\pi x, \pi y, \pi z) \end{array},$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \end{array}.$$

Déterminer parmi ces application lesquelles sont des isométries, des homothéties ou des projections.

6 Formule de changement de base

Exercice 6.1 Les familles de vecteurs suivantes forment-elles une base de $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
2. $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,1,0)\}$
3. $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$
4. $\mathcal{B}_4 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}$

Exercice 6.2 Donner la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ dans les cas suivants

1. $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$
2. $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
3. $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(-3,4,0),(3,-6,3)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
4. $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(-3,4,0),(3,-6,3)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$

Exercice 6.3 Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (i.e. $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$).

1. Expliquer pourquoi $\mathcal{B} = \{(1,2),(-1,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.
3. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
dans la base $\mathcal{C}$. Écrire la matrice A' semblable à A pour la base $\mathcal{B}$.
4. (facultatif) Refaire les questions $1-3$ avec, cette fois, $\mathcal{C} = \{(1,1),(0,-1)\}$.

Exercice 6.4 Soit f l'application linéaire donnée par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,-2x+3y) \end{array}$$

1. Trouver un vecteur $u_1 \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ tel que $f(u_1) = u_1$ et un vecteur $u_2 \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ tel que $f(u_2) = 2u_2$.
2. Justifier que $\mathcal{C} = \{u_1, u_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de changement de base entre la base canonique et la base $\mathcal{C}$.
3. Donner la matrice de l'application f dans la base canonique puis dans la base $\mathcal{C}$ et écrire la formule de changement de base entre les deux matrices obtenues.

Exercice 6.5 Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de proposer une méthode pour calculer A^n. Pour cela on va chercher une matrice plus simple, D, telle qu'on ait $A = PDP^{-1}$, pour P une certaine matrice inversible.

1. Pourquoi est-il intéressant de trouver une décomposition de la forme $A = PDP^{-1}$?. Pour cela on pourra donner A^n en fonction de D^n.
2. Trouver une base $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ formée de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $Au_1 = u_1$ et $Au_2 = -u_2$.
3. Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$? Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P (qu'on explicitera) telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer D^n et en déduire A^n.

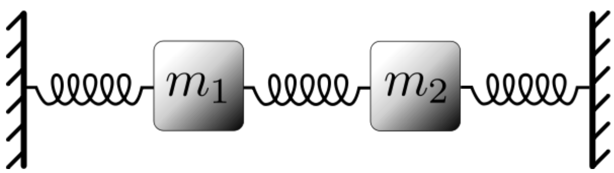
Exercice 6.6 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de changement de base entre la base canonique et la base (u_1, u_2, u_3) et calculer son inverse.
3. Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$

Exercice 6.7 Oscillateur harmonique couplé

Considérons deux particules de même masse $m_1 = m_2 = m$ attachées comme dans la figure ci-dessous.



Soit k la constante de raideur des ressorts. On note les déplacements des particules par x_1 et x_2, les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = kx_1 + -2kx_2, \end{cases} \tag{1}$$

où $\ddot{x}_i$ désigne la dérivée seconde par rapport au temps de x_i. Un tel système d'équations différentielles ordinaires est dit *couplé*.

1. Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que le système (1) peut être écrit sous la forme $\ddot{X} = AX$, où A est une matrice 2×2. Trouver A.
2. Montrer que $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est tel que $Av_1 = -\frac{k}{m}v_1$ et que $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ est tel que $Av_2 = -\frac{3k}{m}v_2$.
3. Soit P la matrice dont les colonnes sont données par v_1 et v_2. Montrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{3k}{m} \end{pmatrix}.$$

On notera D cette matrice diagonale.

4. Soient $Y = \binom{y_1}{y_2}$ des nouvelles coordonnées données par $Y = P^{-1}X$. Montrer que Y satisfait le système *découplé* :

$$\ddot{Y} = DY \iff \begin{cases} \ddot{y}_1 = -\dfrac{k}{m}y_1 \\ \ddot{y}_2 = -\dfrac{3k}{m}y_2 \end{cases}. \tag{2}$$

5. Résoudre le système (2) et analyser le résultat.

Exercice 6.8 On note $\mathbb{P}_1$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal 1. Soient les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} e_1 : x &\longmapsto 1 \\ e_2 : x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Soit $p \in \mathbb{P}_1$.

1. Montrer que p s'écrit comme combinaison linéaire unique de e_1 et e_2 : $p = a_1e_1 + a_2e_2$.
2. On pose $f_1 = e_1 + e_2$ et $f_2 = e_1 - e_2$. Montrer que p s'écrit comme combinaison linéaire unique de f_1 et f_2 : $p = b_1f_1 + b_2f_2$.
3. Trouver la matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.9 Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0. \tag{3}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

   On admettra le résultat suivant (appelé le théorème de Cauchy-Lipschitz) :
   Étant donnés t_0 et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, il existe une unique solution y sur $\mathbb{R}$ au problème :

$$(P) : \begin{cases} \ddot{y} + a\dot{y} + by = 0 \\ y(t_0) = \alpha \text{ et } \dot{y}(t_0) = \beta. \end{cases}.$$

2. Montrer que S est de dimension finie et donner sa dimension.
3. On se place maintenant dans le cas où $a = -4$ et $b = 5$. Chercher des solutions de (3) sous la forme :

$$f(x) = \exp(rx)$$

   avec $r \in \mathbb{C}$.
4. Est ce que les solutions obtenues sont indépendantes ? Forment-elles une base de $\mathcal{S}$?