

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions du cours :

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée. Donner la définition de la transposée de A .
2. Donner la définition d'une matrice inversible.
3. *Vrai ou Faux* : (Si une assertion vous semble fausse, justifiez en exhibant un contre exemple).
Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$ and $D \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$
 - (a) $Tr(AB) = Tr(BA)$.
 - (b) $Det(A + B) = Det(A) + Det(B)$.

Exercice 1 :

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le produit ABC est-il défini ? Si oui, le calculer. Même question pour le produit CAB .

Exercice 2 :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ des matrices vérifiant

$$AB - BA = A \tag{1}$$

1. Calculer $Tr(A)$.
2. Calculer $Tr(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 :

1. Ecrire l'équation du plan qui contient les points $(1, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$ et $(0, -2, 1)$.
2. Déterminer le point qui se trouve à l'intersection de trois plans d'équation respectives $x + y + z = 1$, $x - y + z = -1$ et $2x + y + z = 2$.
3. En utilisant la méthode d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Exercice 4 :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A est inversible. Calculer le déterminant de son inverse et calculer A^{-1} .