Estimation d'erreur a posteriori pour des problèmes avec des contraintes de complémentarités.

Université Pierre et Marie Curie/INRIA Paris équipe SERENA

présenté par Jad Dabaghi

Encadrants:

- Martin Vohralik
- Vincent Martin

19 Mai 2015

Introduction

- Motivation: Construire des estimateurs d'erreur a posteriori pour des écoulements diphasiques en milieu poreux avec échange entre les phases ([3] et [4]). On étudie des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec inégalités variationnelles.
- Cas diphasique liquide–gaz très complexe. On introduit un problème "académique": le problème du contact entre deux membranes ([1] et [2]).

Problème de deux membranes comme un problème de complémentarité linéaire

Trouver u_1, u_2, λ tels que

$$\begin{cases} -\mu_1 \Delta u_1 - \lambda = f_1 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ -\mu_2 \Delta u_2 + \lambda = f_2 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ (u_1 - u_2)\lambda = 0, \quad u_1 - u_2 \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u_1 = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ u_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Formulation variationnelle: Pour $(f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$, $g > 0$, trouver $(u_1, u_2, \lambda) \in H^1_g(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \times \Lambda$,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \mu_i (\nabla u_i, \nabla v_i)_\Omega - (\lambda, v_1 - v_2)_\Omega = \sum_{i=1}^{2} (f_i, v_i)_\Omega, \\ (\chi - \lambda, u_1 - u_2)_\Omega \geq 0 \quad \forall (v_1, v_2, \chi) \in (H^1_0(\Omega))^2 \times \Lambda. \end{cases} \tag{2}$$

Produit scalaire L^2:

- $(u, v)_\Omega = \int_\Omega uv \,\mathrm{dx}.$

Espaces de Sobolev

- $H^1_g(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \;\; u = g \text{ on } \partial\Omega\},$
- $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,, \Omega) = \left\{\boldsymbol{u} \in \left(L^2(\Omega)\right)^d; \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)\right\},$
- $\Lambda = \{\chi \in L^2(\Omega), \;\; \chi \geq 0 \text{ p.p sur } \Omega\}.$

Espaces de Sobolev brisés

- $H^1(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega); \quad v_{|K} \in H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$
- $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,, \mathcal{T}_h) = \{\boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^d; \quad \boldsymbol{v}_{|K} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,, K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$

Le pb (2) possède une inégalité variationnelle donc on utilise le Théorème de Lions–Stamppachia.

Definition

Soit $\mathcal{K}_g$ l'ensemble convexe fermé non vide défini par

$$\mathcal{K}_g = \{(v_1, v_2) \in H^1_g(\Omega) \times H^1_0(\Omega), v_1 - v_2 \geq 0 \quad \text{p.p} \quad \text{sur} \quad \Omega\}$$

Formulation variationnelle réduite: trouver $(u_1, u_2) \in \mathcal{K}_g$, tq

$$\sum_{i=1}^{2} \mu_i(\nabla u_i, \nabla(v_i - u_i))_\Omega \geq \sum_{i=1}^{2}(f_i, v_i - u_i)_\Omega \quad \forall(v_1, v_2) \in \mathcal{K}_g. \quad (3)$$

Theorem

$\forall(f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ *et* $\forall g > 0$, $\exists!(u_1, u_2) \in \mathcal{K}_g$ *vérfiant* (3) .
Preuve: Théorème de Lions–Stamppachia (voir [1]).

Corollary

$\forall(f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$, *et* $\forall g > 0$ $\exists!(u_1, u_2, \lambda) \in \mathcal{K}_g \times \Lambda$ *vérifiant* (2).

Le problème discret réduit

Notation

On considère une triangulation $\{\mathcal{T}_h\}_{h\geq 0}$ *du domaine* Ω *en un ensemble fini de triangles* K *au sens de Ciarlet.*

- $\mathcal{E}_h$ *:ensemble des arêtes du maillage,*
- $\mathcal{E}_h^{int}$*: ensemble des arêtes intérieures,*
- $\mathcal{E}_h^{ext}$*: ensemble des arêtes extérieures,*
- $\mathcal{V}_h$*: ensemble des sommets de la triangulation,*
- $\mathcal{V}_h^{int}$*: sommets intérieurs du maillage,*
- $\mathcal{V}_h^{ext}$*: sommets à la frontière du maillage,*
- $\mathcal{V}_K$*: ensemble des sommets de* K*,*
- $[\![\boldsymbol{v}]\!]_e = (\boldsymbol{v}_{|K})_{|e} - (\boldsymbol{v}_{|K'})_{|e}$*,* K *et* K' *partageant une arête* e*.*

Espaces discrets:

- $\mathbb{X}_h = \left\{v_h \in C^0(\overline{\Omega}), \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{h|K} \in \mathbb{P}_1(K)\right\} \subset H^1(\Omega)$,
- $\mathbb{X}_{gh} = \{v_h \in \mathbb{X}_h,\ \ v_h = g \text{ sur } \partial\Omega\} \subset H^1_g(\Omega)$,
- $\mathbb{X}_{0h} = \mathbb{X}_h \cap H^1_0(\Omega)$,
- $\mathcal{K}_{gh} = \{(v_{1h}, v_{2h}) \in \mathbb{X}_{gh} \times \mathbb{X}_{0h},\ \ v_{1h} - v_{2h} \geq 0 \text{ sur } \Omega\} \subset \mathcal{K}_g$.

Definition

formulation variationnelle réduite: trouver $(u_{1h}, u_{2h}) \in \mathcal{K}_{gh}$ tq

$$\sum_{i=1}^{2} \mu_i(\nabla u_{ih}, \nabla(v_{ih} - u_{ih}))_\Omega \geq \sum_{i=1}^{2}(f_i, v_{ih} - u_{ih})_\Omega \quad \forall (v_{1h}, v_{2h}) \in \mathcal{K}_{gh}. \tag{4}$$

Proposition

$\forall (f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ *et* $\forall g > 0\ \exists!(u_{1h}, u_{2h}) \in \mathcal{K}_{gh}$ *vérifiant* (4) .

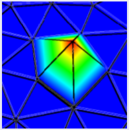
Preuve: Théorème de Lions Stampacchia.

Le problème discret complet

Quel espace judicieux pour l'action λ_h?

Definition

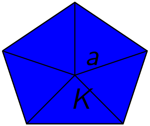
$\psi_{h,\boldsymbol{a}} \in \mathbb{X}_h$: fonction de base de Lagrange associée au nœud $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h$



$$\forall (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}') \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h \quad \psi_{h,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}') = \delta_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{a}'}.$$

Idée naturelle: définir λ_{1h}, λ_{2h} dans $\mathbb{X}_{0h}$ avec le produit scalaire L^2

$$(\lambda_{1h}, \psi_{h,\boldsymbol{a}})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = \mu_1(\boldsymbol{\nabla} u_{1h}, \boldsymbol{\nabla}\psi_{h,\boldsymbol{a}})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} - (f_1, \psi_{h,\boldsymbol{a}})_{\omega_{\boldsymbol{a}}}$$



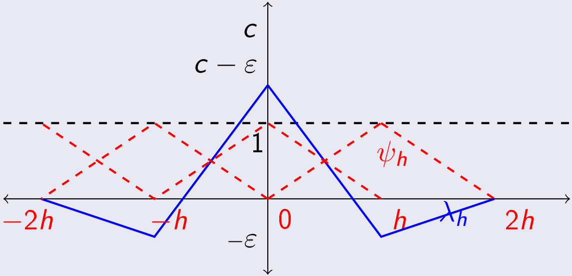
$$(\lambda_{2h}, \psi_{h,\boldsymbol{a}})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = -\mu_2(\boldsymbol{\nabla} u_{2h}, \boldsymbol{\nabla}\psi_{h,\boldsymbol{a}})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} + (f_2, \psi_{h,\boldsymbol{a}})_{\omega_{\boldsymbol{a}}}$$

Theorem

$\lambda_{1h} = \lambda_{2h} = \lambda_h.$

Remarque

λ_h n'est pas nécessairement positif. ***Contre exemple:*** *On a* $(\lambda_h, \psi_{h,\boldsymbol{a}})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} \geq 0 \not\Rightarrow \lambda_h \geq 0.$



Alternative: mass lumping

$$(\lambda_h, \psi_{h,\boldsymbol{a}})_\Omega \approx \lambda_h(\boldsymbol{a})(\psi_{h,\boldsymbol{a}}, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}}}.$$

Definition

On définit λ_{1h} et λ_{2h} dans $\mathbb{X}_{0h}$ par $\forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}$

$$\begin{cases} \lambda_{1h}(\boldsymbol{a})(\psi_{h,\boldsymbol{a}}, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = \mu_1(\boldsymbol{\nabla} u_{1h}, \boldsymbol{\nabla}\psi_{h,\boldsymbol{a}})_\Omega - (f_1, \psi_{h,\boldsymbol{a}})_\Omega, \\ \lambda_{2h}(\boldsymbol{a})(\psi_{h,\boldsymbol{a}}, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = -\mu_2(\boldsymbol{\nabla} u_{2h}, \boldsymbol{\nabla}\psi_{h,\boldsymbol{a}})_\Omega + (f_2, \psi_{h,\boldsymbol{a}})_\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Proposition

Soit $(u_{1h}, u_{2h}) \in \mathcal{K}_{gh}$ solution de la formulation réduite (4). Alors

$$\lambda_{1h} = \lambda_{2h} \geq 0. \tag{6}$$

Definition

L'espace Λ_h est défini par

$$\Lambda_h = \left\{ \lambda_h \in \mathbb{X}_{0h};\ \ \lambda_h(\boldsymbol{a}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{\text{int}} \right\}. \tag{7}$$

FV pour le pb (2) : trouver $(u_{1h}, u_{2h}, \lambda_h) \in \mathbb{X}_{gh} \times \mathbb{X}_{0h} \times \Lambda_h$ tq $\forall (v_{1h}, v_{2h}, \chi_h) \in \mathbb{X}_{0h} \times \mathbb{X}_{0h} \times \Lambda_h$

$$\sum_{i=1}^{2} \mu_i (\boldsymbol{\nabla} u_{ih}, \boldsymbol{\nabla} v_{ih})_\Omega - \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}} [\lambda_h (v_{1h} - v_{2h})](\boldsymbol{a}) (\psi_{h,\boldsymbol{a}}, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = \sum_{i=1}^{2} (f_i, v_{ih})_\Omega$$

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}} (\chi_h - \lambda_h)(\boldsymbol{a}) (u_{1h} - u_{2h})(\boldsymbol{a})\ (\psi_{h,\boldsymbol{a}}, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}}} \geq 0.$$

Analyse a posteriori

Un estimateur d'erreur a posteriori est donné par:

$$|||u - u_h||| \leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2} \qquad \text{où } \eta_K = \eta_K(u_h) \text{ ne dépend pas de } u!$$

Definition

Soit (u_1, u_2) la solution continue de la formulation réduite (3). On définit les flux $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ par

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = -\mu_1 \boldsymbol{\nabla} u_1, \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = -\mu_2 \boldsymbol{\nabla} u_2 \quad . \tag{8}$$

Proposition

Soient $(f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$, $\lambda \in \Lambda$ *et* $g > 0$. *Soit* (u_1, u_2, λ) *la solution continue définie dans* (2). *Soient* $\boldsymbol{\sigma}_1$ *et* $\boldsymbol{\sigma}_2$ *les deux flux définis précédemment. Alors*

$$(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \in (\boldsymbol{H}(\operatorname{div}, \Omega))^2 \quad \textit{et} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1 = f_1 + \lambda \quad \textit{et} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2 = f_2 - \lambda. \tag{9}$$

Remarque

$$-\mu_1 \boldsymbol{\nabla} u_{1h} \notin \boldsymbol{H}(\operatorname{div}, \Omega), \quad -\mu_2 \boldsymbol{\nabla} u_{2h} \notin \boldsymbol{H}(\operatorname{div}, \Omega),$$
$$\operatorname{div}(-\mu_1 \boldsymbol{\nabla} u_{1h}) \neq f_1 + \lambda_h, \quad \operatorname{div}(-\mu_2 \boldsymbol{\nabla} u_{2h}) \neq f_2 - \lambda_h.$$

Semi norme d'énergie:

$$\forall \boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in (H^1(\Omega))^2 \quad |||\boldsymbol{v}||| = \left\{ \sum_{i=1}^{2} \mu_i \left\| \nabla v_i \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem

Soit $(f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ *et* $g \geq 0$. *Soient* $\boldsymbol{u}$ *solution faible du problème* (3) , $\boldsymbol{u}_h \in \mathcal{K}_{gh}$ *la solution approchée et* $\lambda_h \in \Lambda_h$. *Soient* $\boldsymbol{\sigma}_{1h}$ *et* $\boldsymbol{\sigma}_{2h}$ *les flux équilibrés reconstruits. Alors,*

$$|||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h||| \leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{i=1}^{2} (\eta_{\mathrm{R},K,i} + \eta_{\mathrm{F},K,i})^2 + \eta_{\mathrm{C},K} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (10)$$

- $\eta_{\mathrm{F},K,i} = \left\| \mu_i^{\frac{1}{2}} \nabla u_{ih} + \mu_i^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}_{ih} \right\|_{L^2(K)}$,
- $\eta_{\mathrm{R},K,i} = \dfrac{h_K}{\pi} \mu_i^{-\frac{1}{2}} \left\| f - \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}_{ih} - (-1)^i \lambda_h \right\|_{L^2(K)}$,
- $\eta_{\mathrm{C},K} = (u_{1h} - u_{2h}, \lambda_h)_K$.

Corollary

Sous les mêmes hypothèses et en notant $\gamma = 2\max\left\{\mu_1^{\frac{1}{2}}, \mu_2^{\frac{1}{2}}\right\}$ *on a*

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \gamma \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{i=1}^{2} (\eta_{\mathrm{R},K,i} + \eta_{\mathrm{F},K,i})^2 + \eta_{\mathrm{C},K} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

⚠ Dans le Théorème (10) on a supposé que les flux équilibrés étaient reconstruits *i.e*

- $(f_1 + \lambda_h - \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}_{1h}, 1)_K = 0,$
- $(f_2 - \lambda_h - \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}_{2h}, 1)_K = 0.$

Comment reconstruire ces flux discrets rassemblant les propriétés des flux continus?

Reconstruction des flux

Definition

Soit u_{1h} et u_{2h} satisfaisant (4) et soit λ_h donné par (7). $\forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h$, on définit $(\boldsymbol{\sigma}_{1h}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{\sigma}_{2h}^{\boldsymbol{a}}) \in (\mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}})^2$ et $(r_{1h}^{\boldsymbol{a}}, r_{2h}^{\boldsymbol{a}}) \in (Q_h^{\boldsymbol{a}})^2$ en résolvant un problème local par les éléments finis mixtes:

$$\left\{\begin{array}{lcll}
(\boldsymbol{\sigma}_{1h}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{v}_{1h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} - (r_{1h}^{\boldsymbol{a}}, \operatorname{div}\ \boldsymbol{v}_{1h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} & = & -(\tau_{1h}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{v}_{1h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} & \forall \boldsymbol{v}_{1h} \in \mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}}, \\
(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{1h}^{\boldsymbol{a}}, q_{1h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} & = & (g_1^{\boldsymbol{a}}, q_{1h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} & \forall q_{1h} \in Q_h^{\boldsymbol{a}}, \\
(\boldsymbol{\sigma}_{2h}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{v}_{2h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} - (r_{2h}^{\boldsymbol{a}}, \operatorname{div} \boldsymbol{v}_{2h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} & = & -(\tau_{2h}^{a}, \boldsymbol{v}_{2h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} & \forall \boldsymbol{v}_{2h} \in \mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}}, \\
(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{2h}^{\boldsymbol{a}}, q_{2h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} & = & (g_2^{\boldsymbol{a}}, q_{2h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} & \forall q_{2h} \in Q_h^{\boldsymbol{a}}.
\end{array}\right. \tag{11}$$

Definition

$\mathbf{RT}_1(K) = (\mathbb{P}_1)^d + \mathbf{x}\mathbb{P}_1(K).$

- Pour $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}$

$$\mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}} = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,, \omega_{\boldsymbol{a}}), \boldsymbol{v}_{h|K} \in \mathbf{RT}_1(K),\ \boldsymbol{v}_h \cdot \mathbf{n}_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = 0 \text{ sur } \partial\omega_{\boldsymbol{a}} \right\},$$
$$Q_h^{\boldsymbol{a}} = \left\{ q_h \in L^2(\omega_{\boldsymbol{a}}),\ \ q_{h|K} \in \mathbb{P}_1(K),\ \ (q_h, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = 0 \right\}.$$

- Pour $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{ext}$

$$\mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}} = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,, \omega_{\boldsymbol{a}}), \boldsymbol{v}_{h|K} \in \mathbf{RT}_1(K),\ \boldsymbol{v}_h \cdot \mathbf{n}_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = 0 \text{ sur } \partial\omega_{\boldsymbol{a}} \backslash \partial\Omega \right\},$$
$$Q_h^{\boldsymbol{a}} = \left\{ q_h \in L^2(\omega_{\boldsymbol{a}}),\ \ q_{h|K} \in \mathbb{P}_1(K) \right\}.$$

Enfin,

- $g_1^{\boldsymbol{a}} = \psi_{\boldsymbol{a}} f_1 - \mu_1 \boldsymbol{\nabla}\psi_{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{\nabla} u_{1h} + \lambda_h \psi_{\boldsymbol{a}}$,
- $g_2^{\boldsymbol{a}} = \psi_{\boldsymbol{a}} f_2 - \mu_2 \boldsymbol{\nabla}\psi_{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{\nabla} u_{2h} - \lambda_h \psi_{\boldsymbol{a}}$,
- $\boldsymbol{\tau}_{1h}^{\boldsymbol{a}} = \psi_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\nabla} u_{1h}, \quad \boldsymbol{\tau}_{2h}^{\boldsymbol{a}} = \psi_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\nabla} u_{2h}$.
- $\displaystyle \boldsymbol{\sigma}_{1h} = \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h} \boldsymbol{\sigma}_{1h}^{\boldsymbol{a}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{2h} = \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h} \boldsymbol{\sigma}_{2h}^{\boldsymbol{a}}$.

Avantage de la reconstruction des flux par cette méthode:

- Les flux reconstruits appartiennent à l'espace $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,,\Omega)$.
- Les flux sont localement conservatifs.

Theorem

Les flux $\boldsymbol{\sigma}_{1h}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{2h}$ reconstruits par la méthode des éléments finis mixtes vérifient $(\boldsymbol{\sigma}_{1h}, \boldsymbol{\sigma}_{2h}) \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,,\Omega) \times \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,,\Omega)$ et $\forall (q_{1h}, q_{2h}) \in Q_h(K) \times Q_h(K)$

$$\begin{cases} (f_1 + \lambda_h - \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_{1h}, q_{1h})_K = 0, \\ \\ (f_2 - \lambda_h - \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_{2h}, q_{2h})_K = 0, \end{cases} \tag{12}$$

avec $Q_h(K) = \Big\{ q_h \in L^2(K), \;\; q_{h|K} \in \mathbb{P}_1(K) \Big\}.$

formule explicite pour les flux $\boldsymbol{\sigma}_{1h}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{2h}$ La formulation duale mixte (11) est équivalente à la formulation duale: Trouver $\boldsymbol{\sigma}_{1h}^{\boldsymbol{a}} \in \mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{2h}^{\boldsymbol{a}} \in \mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}}$ avec $\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}_{1h}^{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\Pi}_{Q_h^{\boldsymbol{a}}} g_1^{\boldsymbol{a}}$ et $\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}_{2h}^{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\Pi}_{Q_h^{\boldsymbol{a}}} g_2^{\boldsymbol{a}}$ tel que

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}_{1h}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{v}_{1h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = -(\boldsymbol{\tau}_{1h}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{v}_{1h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}}, & \forall \boldsymbol{v}_{1h} \in \mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_{1h} = 0 \\ (\boldsymbol{\sigma}_{2h}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{v}_{2h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = -(\boldsymbol{\tau}_{2h}^{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{v}_{2h})_{\omega_{\boldsymbol{a}}}, & \forall \boldsymbol{v}_{2h} \in \mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_{2h} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Le système précédent coïncide avec un problème de minimisation sous contraintes:

$$\boldsymbol{\sigma}_{1h}^{\boldsymbol{a}} = \underset{\substack{\boldsymbol{v}_{1h} \in \mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}}, \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_{1h} = \boldsymbol{\Pi}_{Q_h^{\boldsymbol{a}}} g_1^{\boldsymbol{a}}}}{\mathrm{argmin}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}_{1h}^{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{v}_{1h}\|_{\omega_{\boldsymbol{a}}}^2, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{2h}^{\boldsymbol{a}} = \underset{\substack{\boldsymbol{v}_{2h} \in \mathbf{V}_h^{\boldsymbol{a}}, \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_{2h} = \boldsymbol{\Pi}_{Q_h^{\boldsymbol{a}}} g_2^{\boldsymbol{a}}}}{\mathrm{argmin}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau}_{2h}^{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{v}_{2h}\|_{\omega_{\boldsymbol{a}}}^2. \tag{15}$$

Résolution

$$\sum_{i=1}^{2} \mu_i(\nabla u_{ih}, \nabla v_{ih})_\Omega - \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}} [\lambda_h(v_{1h} - v_{2h})](\boldsymbol{a})(\psi_{h,\boldsymbol{a}}, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}}} = \sum_{i=1}^{2} (f_i, v_{ih})_\Omega$$

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}} (\chi_h - \lambda_h)(\boldsymbol{a})(u_{1h} - u_{2h})(\boldsymbol{a})(\psi_{h,\boldsymbol{a}}, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}}} \geq 0. \tag{16}$$

$N_h = \dim \mathbb{X}_{0h}$ et soit $(\psi_{h,\boldsymbol{a}})_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}}$ une base de $\mathbb{X}_{0h}$.
$\mathbb{X}_{gh}$ est un espace affine: $\mathbb{X}_{gh} = \mathbb{X}_{0h} + \tilde{g}_h$ avec $\tilde{g}_h$ un recouvrement appartenant à l'espace $\mathbb{X}_h$ tel que $\tilde{g}_{h|\partial\Omega} = g$.

- $u_{2h} = \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}} u_{2h}(\boldsymbol{a})\psi_{h,\boldsymbol{a}}$,
- $u_{1h} = u_{1h}^0 + \tilde{g}_h = \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}} u_{1h}^0(\boldsymbol{a})\psi_{h,\boldsymbol{a}} + \tilde{g}_h$

$v_{1h} = 0$ et $v_{2h} = \psi_{h,\boldsymbol{a}'}$ dans la 1ère ligne de (16) puis $v_{2h} = 0$ et $v_{1h} = \psi_{h,\boldsymbol{a}'}$:

$$\mu_1 \sum_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}_h^{int}} u_{1h}^0(\boldsymbol{a}) \left(\nabla\psi_{h,\boldsymbol{a}}, \nabla\psi_{h,\boldsymbol{a}'}\right)_\Omega - \lambda_h(\boldsymbol{a}') \left(\psi_{h,\boldsymbol{a}'}, 1\right)_{\omega_{\boldsymbol{a}'}}$$
$$= \left(f_1\psi_{h,\boldsymbol{a}'} - \mu_1 \nabla\tilde{g}_h \cdot \nabla\psi_{h,\boldsymbol{a}'}, 1\right)_\Omega,$$

$$\mu_2 \sum_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}_h^{int}} u_{2h}(\boldsymbol{a}) \left(\nabla\psi_{h,\boldsymbol{a}}, \nabla\psi_{h,\boldsymbol{a}'}\right)_\Omega + \lambda_h(\boldsymbol{a}') \left(\psi_{h,\boldsymbol{a}'}, 1\right)_{\omega_{\boldsymbol{a}'}} = \left(f_2, \psi_{h,\boldsymbol{a}'}\right)_\Omega.$$

Le système précédent s'écrit sous forme matricielle: $A\mathbf{X}_h = F$ où

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 & 0 & -B \\ 0 & \mu_2 A_1 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_h,3N_h}(\mathbb{R}) \tag{17}$$

avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} (\nabla\psi_{\boldsymbol{a}_1}, \nabla\psi_{\boldsymbol{a}_1})_\Omega & \dots & \left(\nabla\psi_{\boldsymbol{a}_{N_h}}, \nabla\psi_{\boldsymbol{a}_1}\right)_\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\nabla\psi_{\boldsymbol{a}_1}, \nabla\psi_{\boldsymbol{a}_{N_h}}\right)_\Omega & \dots & \left(\nabla\psi_{\boldsymbol{a}_{N_h}}, \nabla\psi_{\boldsymbol{a}_{N_h}}\right)_\Omega \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N_h,N_h}(\mathbb{R}) \tag{18}$$

$$B = \begin{pmatrix} (\psi_{\boldsymbol{a}_1}, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \left(\psi_{\boldsymbol{a}_{N_h}}, 1\right)_{\omega_{\boldsymbol{a}_{N_h}}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N_h,N_h}(\mathbb{R}) \tag{19}$$

$$F = \begin{pmatrix} (f_1\psi_{\boldsymbol{a}_1} - \mu_1 \boldsymbol{\nabla}\tilde{g}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_{\boldsymbol{a}_1}, 1)_\Omega \\ \vdots \\ \left(f_1\psi_{\boldsymbol{a}_{N_h}} - \mu_1 \boldsymbol{\nabla}\tilde{g}_h \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi_{\boldsymbol{a}_{N_h}}, 1\right) \\ (f_2, \psi_{\boldsymbol{a}_1})_\Omega \\ \vdots \\ \left(f_2, \psi_{\boldsymbol{a}_{N_h}}\right)_\Omega \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_h, N_h}(\mathbb{R}) \qquad (20)$$

Le vecteur des inconnues $\mathbf{X}_h \in \mathcal{M}_{3N_h,1}(\mathbb{R})$ est défini par

$$\mathbf{X}_h^T = \left(u_{1h}^0(\boldsymbol{a}_1) \dots u_{1h}^0(\boldsymbol{a}_{N_h}), u_{2h}(\boldsymbol{a}_1) \dots u_{2h}(\boldsymbol{a}_{N_h}), \lambda_h(\boldsymbol{a}_1) \dots \lambda_h(\boldsymbol{a}_{N_h})\right).$$

Idée: Simplifier la deuxième ligne de (16).

Theorem

Soit $u_h \in \mathcal{K}_{gh}$ *solution de* (4) *et soit* $\lambda_h \in \Lambda_h$. *Les trois expressions suivantes sont équivalentes* $\forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h$

$$\forall \chi_h \in \Lambda_h \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_h^{int}} (\chi_h - \lambda_h)(\boldsymbol{a})(u_{1h} - u_{2h})(\boldsymbol{a})(\psi_{h,\boldsymbol{a}}, 1)_{\omega_{\boldsymbol{a}}} \geq 0 \quad (21)$$

$$(u_{1h} - u_{2h})(\boldsymbol{a}) \geq 0, \;\; \lambda_h(\boldsymbol{a}) \geq 0, \;\; [\lambda_h(u_{1h} - u_{2h})](\boldsymbol{a}) = 0 \quad (22)$$

$$\min(u_{1h} - u_{2h}, \lambda_h) = 0. \quad (23)$$

Preuve:

- (21) $\Rightarrow$ (22): *On remplace* χ_h *par* $0 \in \Lambda_h$ *et* χ_h *par* $2\lambda_h \in \Lambda_h$.
- (22) $\Rightarrow$ (21): *On utilise* $[\lambda_h(u_{1h} - u_{2h})](\boldsymbol{a}) = 0$.
- (22) $\Leftrightarrow$ (23): *évident*

- $$\begin{array}{llll} \mathbf{H} & : & \mathcal{M}_{3N_h,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{2N_h,1}(\mathbb{R}) \\ & & \mathbf{X}_h & \longmapsto A\mathbf{X}_h - F. \end{array}$$

- $$\begin{array}{llll} \mathbf{K} & : & \mathcal{M}_{3N_h,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{N_h,1}(\mathbb{R}) \\ & & \mathbf{X}_h & \longmapsto \begin{pmatrix} u_{1h}^0(\boldsymbol{a}_1) - u_{2h}(\boldsymbol{a}_1) + \tilde{g}_h \\ \vdots \\ u_{1h}^0(\boldsymbol{a}_{N_h}) - u_{2h}(\boldsymbol{a}_{N_h}) + \tilde{g}_h \end{pmatrix}. \end{array}$$

- $$\begin{array}{llll} \mathbf{G} & : & \mathcal{M}_{3N_h,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{N_h,1}(\mathbb{R}) \\ & & \mathbf{X}_h & \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_h(\boldsymbol{a}_1) \\ \vdots \\ \lambda_h(\boldsymbol{a}_{N_h}) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Le problème (16) peut se réécrire sous forme compacte:

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_h) = 0, \tag{24}$$

$$C(\mathbf{X}_h) = \min(\mathbf{K}(\mathbf{X}_h), \mathbf{G}(\mathbf{X}_h)) = 0, \tag{25}$$

ou

$$\boxed{\mathbf{\Pi}(\mathbf{X}_h) = 0}. \tag{26}$$

⚠ La fonction C n'est pas différentiable donc l'algorithme de Newton classique ne marche pas. On utilise l'algorithme de Newton–min.

Algorithme Newton–min

Initialisation $\mathbf{X}_h^0 \in \mathbb{R}^{3N_h}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on construit deux ensembles d'indices complémentaires:

$$\begin{cases} B^k = \{\mathrm{i} : \mathbf{G}_\mathbf{i}(\mathbf{X}_h^k) \leq \mathbf{F}_\mathbf{i}(\mathbf{X}_h^k)\} \subset \{1 \dots N_h\}, \\ I^k = \{\mathrm{i} : \mathbf{G}_\mathbf{i}(\mathbf{X}_h^k) > \mathbf{F}_\mathbf{i}(\mathbf{X}_h^k)\} \subset \{1 \dots N_h\}. \end{cases} \tag{27}$$

$\mathbf{X}_h^k$ est solution de

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{X}_h^k) + \mathbf{H}'(\mathbf{X}_h^k)(\mathbf{X}_h^{k+1} - \mathbf{X}_h^k) = 0, \\ \boldsymbol{C}(\mathbf{X}_h^k) + \mathbf{J}_{\mathbf{X}_h^k}(\mathbf{X}_h^{k+1} - \mathbf{X}_h^k) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Ici, $\mathbf{J}_{\mathbf{X}_h^k}$ est la pseudo-jacobienne de $\boldsymbol{C}$ en $\mathbf{X}_h^k$ définie par

$$(\mathbf{J}_{\mathbf{X}_h^k})_i = \begin{cases} \mathbf{G}_\mathrm{i}'(\mathbf{X}_h^k) & \text{si} \quad \mathrm{i} \in B^k, \\ \mathbf{F}_\mathrm{i}'(\mathbf{X}_h^k) & \text{si} \quad \mathrm{i} \in I^k. \end{cases} \tag{29}$$

Critère d'arrêt: $\left\| \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{X}_h^{k+1}) \right\|_2 \leq \varepsilon$.

Conclusion

- Problème des membranes: Extension de mes travaux à la méthode de Newton–min inexacte tenant compte du solveur algébrique linéaire multigrille. Construire un estimateur d'erreur a posteriori entre la solution exacte $\boldsymbol{u}$ et la solution approchée linéarisée algébrique $\boldsymbol{u}_h^{k,i}$, critère d'arrêt. Extension du Théorème (10) au cas où $\lambda_h \not\geq 0$. Simulation numérique.

- Problème diphasique liquide–gaz: Construction d'un estimateur d'erreur a posteriori, critère d'arrêt: Newton–min adaptatif.

Merci pour votre attention

Faker Ben Belgacem, Christine Bernardi, Adel Blouza, and Martin Vohralík.
A finite element discretization of the contact between two membranes.
M2AN Math. Model. Numer. Anal., 43(1):33–52, 2008.

Faker Ben Belgacem, Christine Bernardi, Adel Blouza, and Martin Vohralík.
On the unilateral contact between membranes. Part 2: *a posteriori* analysis and numerical experiments.
IMA J. Numer. Anal., 32(3):1147–1172, 2012.

Ibtihel Ben Gharbia.
Résolution de problèmes de complémentarité, application à un écoulement diphasique en milieu poreux.
Thèse de Doctorat de mathématique appliquée, INRIA Université Paris Dauphine, 2012.

Ibtihel Ben Gharbia and Jérôme Jaffré.

Gas phase appearance and disappearance as a problem with complementarity constraints.
Math. Comput. Simulation, 99:28–36, 2014.