2022/2023

Dérivation/Intégration

Contrôle continu - 11 Mars 2023 - Durée : 45 minutes

Vous devez ajouter votre numéro de groupe de TD dans l'en-tête de votre copie. Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.
La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, ainsi que la lisibilité et l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation de votre copie. En particulier, vos réponses doivent être mises en évidence et tout résultat non justifié ne sera pas pris en compte.

Exercice 1 (8 points)

1. Énoncer le théorème (formule) de Taylor-Young.
2. Énoncer le théorème (formule) de Taylor avec reste intégral.
3. Montrez à l'aide d'une formule de Taylor appropriée que

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors, il existe une fonction ε définie sur I telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

   1 point pour les hypothèses, 1 point pour la formule.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient I un intervalle et $a, b \in I$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

   1 point pour les hypothèses, 1 point pour la formule.

3. Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(x)$. On a $f \in \mathcal{C}^\infty([-\pi, \pi])$. Soit $x \in [-\pi, \pi]$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction f sur $[0, x]$ à l'ordre 2 donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, si $x \in [0, \pi]$ $\sin(t) \geq 0$ car $t \in [0, x]$ et donc $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$. En revanche, si $x \in [-\pi, 0]$ on a

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \frac{(x-t)^2}{2!} \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, $\sin(t) \leq 0$ sur $[-\pi, 0]$ ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$. Il s'ensuit que $\forall t \in [-\pi, \pi]$,

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

Finalement

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \;\; \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

2 points pour l'application de la formule de Taylor avec reste intégral, 2 points pour le reste de l'étude.

Exercice 2 (6 points)

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = \frac{(1-e^x)(1-\cos(x))}{3x^3 + 2x^4} \quad \text{et} \quad g(x) = (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}.$$

1. Donner un équivalent de f en 0 puis en déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
2. Donner un équivalent de $\ln(g)$ en 0 puis en déduire $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

Correction :

1. On a d'après le cours, $1 - e^x \underset{0}{\sim} -x$ et $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. Ainsi, par produit d'équivalents,

$$(1-e^x)(1-\cos(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}.$$

Par ailleurs, en 0, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré donc

$$3x^3 + 2x^4 \underset{0}{\sim} 3x^3.$$

On en déduit par division d'équivalents que

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}.$$

2.5 points

Ainsi, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{1}{6}$.

0.5 points

2. On a
$$\ln(g(x)) = \ln((1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}\ln(1+\sin(x)).$$
De plus, au voisinage de 0
$$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u.$$
Par substitution d'équivalents, en posant $u = \sin(x) \underset{0}{\to} 0$ on a
$$\ln(g(x)) \underset{0}{\sim} \frac{\sin(x)}{x}.$$
Or, d'après le cours, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Alors, par transitivité d'équivalents,
$$\ln(g(x)) \underset{0}{\sim} 1.$$
Ainsi,
$$\lim_{x\to 0} \ln(g(x)) = 1.$$
2 points

Or, $\lim_{y\to 1} e^y = e$ donc par composition de limites, on en déduit que
$$\lim_{x\to 0} g(x) = e.$$
1 point

Exercice 3 (8.5 points)

Calculer les développements limités suivants :

1. e^x à l'ordre 4 en 1.
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0.
3. $\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ à l'ordre 2 en 0.

Correction :

1. On a
$$e^x = e^{(x-1)+1} = e^1 e^{x-1}.$$
Or, le développement limité à l'ordre 4 de $u \mapsto e^u$ au voisinage de 0 est donné par
$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + o(u^4). \tag{1}$$
En remplacant u par $x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ on obtient au voisinage de 0
$$e^{x-1} = x + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + o((x-1)^4). \tag{2}$$
Finalement, le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 1 de e^x est
$$e^x = ex + e\frac{(x-1)^2}{2} + e\frac{(x-1)^3}{3!} + e\frac{(x-1)^4}{4!} + o((x-1)^4).$$
2 points

2. On a
$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$$
Or, le développement limité de $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4 est donné par
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$$
De même, on a
$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$$
Finalement, le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$ est donné par
$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{64}x^4 + o(x^4).$$
2.5 points

3. Le développement limité de $x \mapsto \sin(x)$ en 0 à l'ordre 2 est donné par
$$\sin(x) = x + o(x^2).$$
Ainsi, au voisinage de 0,
$$\sin(x) - 1 = x - 1 + o(x^2).$$
Par ailleurs,
$$\frac{1}{\cos(x)+1} = \frac{1}{(\cos(x)-1)+2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\dfrac{\cos(x)-1}{2}}$$
Or, le développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 est donné par
$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2). \tag{3}$$
De plus, le développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 2 au voisinage e 0 est donné par
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
Ainsi, au voisinage de 0 on a
$$\frac{\cos(x)-1}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}o(x^2). \tag{4}$$
De plus, le développement limité à l'ordre 2 d'un produit est obtenu en ne considérant dans le produit que les termes de degré inférieur ou égaux à 2. Dans cette configuration, au voisinage de 0
$$\left(\frac{\cos(x)-1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}o(x^2)\right)^2 = -\frac{x^2}{4}o(x^2) + \frac{1}{4}\left(o(x^2)\right)^2 = o(x^2).$$
En posant $u = \dfrac{\cos(x)-1}{2}$ et en injectant l'expression de (4) dans (3) on obtient
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\dfrac{\cos(x)-1}{2}} &= 1 - \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}o(x^2)\right) + \left(o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}o(x^2)\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2).\end{aligned}$$

En multipliant les développements limités de $\dfrac{1}{\cos(x)+1}$ et $\sin(x)-1$ on obtient finalement le développement limité à l'ordre 2 suivat

$$\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} = \big(x-1+o(x^2)\big)\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right) = -\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$

4 points