Section 21.2 – Contrôle du 24 avril

Durée : 1h

La présentation et la clarté des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies. Pensez à justifier tous vos résultats.

Questions du cours :

(Q1) Donner la définition d'*une application linéaire* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(Q2) Donner la définition d'une application linéaire $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui est *une projection* dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1 :

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$, A^{-1}, $\det(B)$, $\det(A+B)$, $\det(AB)$, $Tr(AB)$ et $Tr(A+B)$.
Que remarquez-vous ?

Exercice 2 :

1. Déterminer si le système suivant peut admettre une unique solution $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + y + z = 6 \\ 4x + y - 2z = 11 \end{cases}$
2. Résoudre le système par la méthode d'élimination de Gauss
3. Soient
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que matrice M est inversible. Calculer M^{-1}.

Exercice 3 :

1. Parmi les applications suivantes lesquelles sont linéaires ? (*Justifiez votre réponse !*) Lorsque c'est possible, donner la matrice de l'application (dans les bases canoniques).

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ -7y + 5x \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sin(xyz)$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est g.
g est elle une isométrie, une projection, une homothétie ?

Exercice 4 :

On considère l'application suivante : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y + z \\ x + y + z \\ x \end{pmatrix}$

(a) Montrez que f est linéaire.

(b) Donner l'expression de F, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer l'ensemble $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$

(d) Déterminer l'ensemble $\mathrm{im}(f) = \{f(x) \,,\, x \in \mathbb{R}^3\}$