Analyse à Plusieurs Variables

JAD DABAGHI

Enseignant-Chercheur en Mathématiques

jad.dabaghi@devinci.fr

Table des matières

Fonctions $\mathcal{C}^1$

Definition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f est différentiable et si df est continue, c-a-d si les dérivées partielles de f sont continues.

Propriété

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admet des dérivées partielles en tout point et les dérivées partielles sont continues, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque : Pour montrer qu'une fonction n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit que l'une de ses dérivées partielles ne soit pas continue ou que la fonction ne soit pas continue.

Example

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et elle de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2\,?$$

Correction :

Example

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et elle de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2\,?$$

Correction :

- Etude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$: la fonction f est une fraction rationnelle donc elle est $\mathcal{C}^1$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Example

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Correction :

- Etude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$: la fonction f est une fraction rationnelle donc elle est $\mathcal{C}^1$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

- Etude de la continuité en $(0,0)$:

$$0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq y^2 \underset{y\to 0}{\to} 0. \quad \Rightarrow \quad f \text{ continue en } (0,0)$$

- Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

- Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

- Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)|\leq\frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2}\leq 2|x|\underset{x\to 0}{\to}0.$$
$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)|\leq\frac{2|y|x^4}{(x^2+y^2)^2}\leq 2|y|\underset{y\to 0}{\to}0.$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles

Propriété (Somme, produit, quotient)

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors fg est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *Si de plus, g ne s'annule pas sur U, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Propriété (Composition)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$, avec $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $g \circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Opération sur les fonctions vectorielles $\mathcal{C}^1$

Propriété

Soit U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^p)$ une application définie par

$$f : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_p(x_1, \cdots, x_n))$$

Alors, f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si, les composantes f_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$ sont $\mathcal{C}^1$.

Definition

On appelle matrice jacobienne de f en $a \in U$, la matrice de l'application linéaire df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ notée $J_f(a)$. Plus précisément, $\left[J_f(a)\right]_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

Example

Pour $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, soit f la fonction définie par $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors,

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Propriété

$f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \in [\![1,n]\!]$. Supposons l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.

- $\dfrac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_i}(a)$ *est définie et* $\dfrac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_i}(a) = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.
- $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a)$ *est définie et* $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a) + f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.
- *Si $g(a) \neq 0$, alors* $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a)$ *est définie et on a* $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a) - f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{g(a)^2}$

Composition d'applications $\mathcal{C}^1$

Propriété

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. On suppose $f(U) \subset V$. On pose $h = g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ où $h = (h_1, \ldots, h_p)$. Soit $a \in U$. Si f admet des dérivées partielles en a et g admet des dérivées partielles en $f(a)$ alors h admet des dérivées partielles en a et

- $\dfrac{\partial h_k}{\partial x_i}(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a))\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad \forall k \in \{1, \ldots, p\}$ *Dérivation en chaîne*
- $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

Attention : La notation $\dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a))$ correspond à la dérivée partielle de g_k par rapport à j-ème variable évaluée en $f(a)$.

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Example

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sin^2(t) + 3\cos(t)\sin(t) + 5\cos^2(t)$. Calculer $h'(t)$.

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Example

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sin^2(t) + 3\cos(t)\sin(t) + 5\cos^2(t)$. Calculer $h'(t)$.

Corrigé :

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Example

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sin^2(t) + 3\cos(t)\sin(t) + 5\cos^2(t)$. Calculer $h'(t)$.

Corrigé : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (\sin(t), \cos(t))$. Alors, $h = f \circ \varphi$ vérifie

$$\begin{aligned} h'(t) &= \cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\sin(t), \cos(t)) - \sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\sin(t), \cos(t)) \\ &= \cos(t)(2\sin(t) + 3\cos(t)) - \sin(t)(3\sin(t) + 10\cos(t)) \\ &= 3\cos^2(t) - 3\sin^2(t) - 8\cos(t)\sin(t) \end{aligned}$$

Différentiabilité d'ordre 2

Quelques notations : Pour E et F deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F.

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable, et soit $a \in U$.

1. On dit que f est *deux fois différentiable* en $a \in U$ si df est différentiable en a et on note $(d^2f)_a = d(df)_a$ et on l'appelle la *différentielle seconde de f en a*.
2. On dit que f est *deux fois différentiable sur U*, si elle est deux fois différentiable en tout point $a \in U$ et note d^2f la différentielle seconde de f.

Remarque : Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable, $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. De même,

$$d^2f : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Definition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f est deux fois différentiable et d^2f est continue.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Definition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f est deux fois différentiable et $d^2 f$ est continue.

Attention : Si f est $\mathcal{C}^2$, alors f est deux fois différentiable. La réciproque est fausse.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Definition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f est deux fois différentiable et d^2f est continue.

Attention : Si f est $\mathcal{C}^2$, alors f est deux fois différentiable. La réciproque est fausse.

Propriété (Formule de Taylor-Young)

Si f est deux fois différentiable en a, on a un DL à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Definition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f est deux fois différentiable et d^2f est continue.

Attention : Si f est $\mathcal{C}^2$, alors f est deux fois différentiable. La réciproque est fausse.

Propriété (Formule de Taylor-Young)

Si f est deux fois différentiable en a, on a un DL à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$$

Theorem (Schwartz)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Si f est deux fois différentiable en a, alors l'application $d^2f_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est symétrique i.e. $d^2f(h,h') = d^2f(h',h)$

Dérivées partielles d'ordre 2

Dérivées partielles d'ordre 2

Definition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles de f sont définies au voisinage de a et si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a, ces dérivées sont appelées *dérivées partielles secondes de f en a*. On les note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

Dérivées partielles d'ordre 2

Definition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles de f sont définies au voisinage de a et si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a, ces dérivées sont appelées *dérivées partielles secondes de f en a*. On les note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

Example

$f : (x, y) \mapsto \ln\left(\frac{x}{y}\right)$. Calculez les dérivées partielles premières et secondes de f.

Dérivées partielles d'ordre 2

Definition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles de f sont définies au voisinage de a et si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a, ces dérivées sont appelées *dérivées partielles secondes de f en a*. On les note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

Example

$f : (x, y) \mapsto \ln\left(\frac{x}{y}\right)$. Calculez les dérivées partielles premières et secondes de f.

Corrigé : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$.

Definition

Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle *matrice hessienne* de f la matrice des dérivées partielles secondes (lorsqu'elles existent). On la note H_f et on pour $a \in U$:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice hessienne $H_f(a)$ est symétrique.

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors la Hessienne $H_f(a)$ est la matrice de $(d^2 f)_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit

$$(d^2 f)_a(h, h') = {}^t h H_f(a) h' \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \forall h' \in \mathbb{R}^n$$

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors la Hessienne $H_f(a)$ est la matrice de $(d^2f)_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit

$$(d^2f)_a(h,h') = {}^t h H_f(a) h' \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \forall h' \in \mathbb{R}^n$$

Démonstration : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

$$(d^2f)_a(h,h') = (d^2f)_a\Big(\sum_{i=1}^n h_i e_i, \sum_{j=1}^n h'_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h'_j (d^2f)_a(e_i, e_j) = {}^t h H_f(a) h'$$

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors la Hessienne $H_f(a)$ est la matrice de $(d^2f)_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit

$$(d^2f)_a(h,h') = {}^t h H_f(a) h' \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \forall h' \in \mathbb{R}^n$$

Démonstration : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

$$(d^2f)_a(h,h') = (d^2f)_a\Big(\sum_{i=1}^n h_i e_i, \sum_{j=1}^n h'_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h'_j (d^2f)_a(e_i, e_j) = {}^t h H_f(a) h'$$

Corollaire (Schwartz)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois différentiable en $a \in U$. Alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}$$

Extremas locaux

Extremas locaux

En dimension 1, si f est deux fois dérivable en un point x_0, alors f a un DL à l'ordre 2 en x_0. Si, de plus, $f'(x_0) = 0$, le DL s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Extremas locaux

En dimension 1, si f est deux fois dérivable en un point x_0, alors f a un DL à l'ordre 2 en x_0. Si, de plus, $f'(x_0) = 0$, le DL s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Conclusion :

1. Condition nécessaire d'extremum local : Si f admet un minimum local resp. maximum local en x_0, alors $f''(x_0) \geq 0$, resp. $f''(x_0) \leq 0$.
2. Condition suffisante d'extremum local strict : Si $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$, alors f admet un minimum local strict, resp. un maximum local strict en x_0.

Extremas locaux

En dimension 1, si f est deux fois dérivable en un point x_0, alors f a un DL à l'ordre 2 en x_0. Si, de plus, $f'(x_0) = 0$, le DL s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Conclusion :

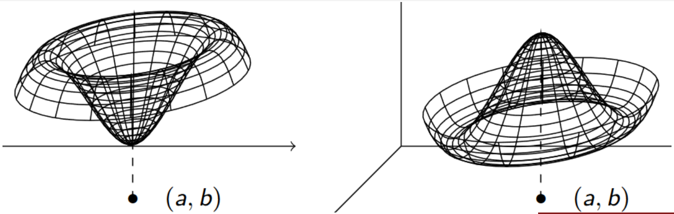
1. Condition nécessaire d'extremum local : Si f admet un minimum local resp. maximum local en x_0, alors $f''(x_0) \geq 0$, resp. $f''(x_0) \leq 0$.
2. Condition suffisante d'extremum local strict : Si $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$, alors f admet un minimum local strict, resp. un maximum local strict en x_0.

Comment généraliser ce résultat à plusieurs variables ?

Extremas locaux pour une fonction de plusieurs variables

Definition

1. f admet un *minimum local*, resp. *maximum local* en a si $\forall x \in \mathcal{V}_a, f(a) \leq f(x)$, resp. $f(a) \geq f(x)$.
2. f admet un *extremum local* en a si f admet un minimum local ou un maximum local en a.
3. f admet un *minimum local strict*, resp. *maximum local strict* en a si $\forall x \in \mathcal{V}_a$ privé de $a, f(a) < f(x)$, resp. $f(a) > f(x)$.



Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Example

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$. Déterminez les points critiques de f.

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Example

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$. Déterminez les points critiques de f.

Corrigé :

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Example

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$. Déterminez les points critiques de f.

Corrigé : On a

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff (2x - 2, 2y - 2) = (0, 0) \iff (x, y) = (1, 1)$$

Propriété

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en a. Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Propriété

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en a. Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration : On suppose que f admet un maximum local en a. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. L'application $g : t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0.

Propriété

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en a. Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration : On suppose que f admet un maximum local en a. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. L'application $g : t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0. Alors,

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Propriété

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en a. Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration : On suppose que f admet un maximum local en a. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.
L'application $g : t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0. Alors,

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Or $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in \mathcal{V}_a$. Pour $x = a + te_j$ avec $t \to 0^+$ on a $f(a + te_j) - f(a) \leq 0$ et

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = 0^+$$

Pour $x = a + te_j$ avec $t \to 0^-$ on a $f(a + te_j) - f(a) < 0$ et

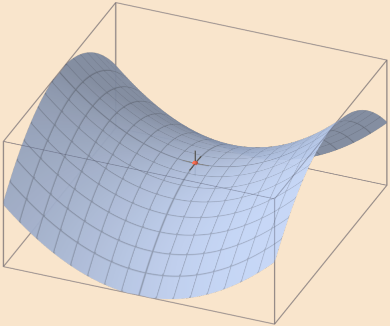
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = 0^-$$

Conclusion : $\nabla f = 0$

Definition

Soit a un point critique de f. On dit que f admet un *point col* ou un *point selle* en a si

- $\exists v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $t \mapsto f(a + tv_1)$ admet un minimum local strict en $t = 0$
- $\exists v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $t \mapsto f(a + tv_2)$ admet un maximum local strict en $t = 0$.



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$(0, 0)$: point-selle de la fonction

Condition d'obtention d'un extremum

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- *Si f admet un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est positive c-a-d : $h^T H_f(a)h \geq 0$.*
- *Si f admet un maximum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est négative c-a-d : $h^T H_f(a)h \leq 0$*

Condition d'obtention d'un extremum

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- *Si f admet un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est positive c-a-d : $h^T H_f(a) h \geq 0$.*
- *Si f admet un maximum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est négative c-a-d : $h^T H_f(a) h \leq 0$*

Démonstration :

Condition d'obtention d'un extremum

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- *Si f admet un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est positive c-a-d : $h^T H_f(a) h \geq 0$.*
- *Si f admet un maximum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est négative c-a-d : $h^T H_f(a) h \leq 0$*

Démonstration : Formule de Taylor-Young :
$0 \leq f(a+h) - f(a) \underset{h \to 0}{=} \cancel{df_a(h)} + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$. Pour $h = tv$ où $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $t > 0$ petit on trouve

$$0 \leq \frac{f(a+tv) - f(a)}{t^2} = \frac{1}{2} v^T d^2 f_a(v,v) v + o(1).$$

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- *Si a est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie positive ($h^T H_f(a)h > 0$), alors f admet un minimum local strict en a.*
- *Si a est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie négative ($h^T H_f(a)h < 0$), alors f admet un maximum local strict en a.*

Démonstration : Puisque a est un point critique, la formule de Taylor-Young donne

$$f(a+h) - f(a) \underset{h \to 0}{\sim} h^T H_f(a)h > 0.$$

Donc f admet un minimum local strict en a.

Cas pratique $n = 2$

Corollaire

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. On suppose que a est un point critique de f. On note :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \quad \text{et} \quad H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \quad \delta = \det(H_f(a)) = rt - s^2.$$

- *Si $\delta > 0$ et $r > 0$ alors $H_f(a)$ est définie positive et f a un minimum local strict en a.*
- *Si $\delta > 0$ et $r < 0$ alors $H_f(a)$ est définie négative et f a un maximum local strict en a.*
- *Si $\delta < 0$ alors f présente un point selle en a, et donc n'a pas d'extremum en a.*

Remarque : Si $\delta = 0$ alors on ne peut pas conclure sur la présence ou non d'un extremum de f en a par cette méthode.

Example

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Example

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Détermination des points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 4b = 0 \\ 4b^3 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a(a^8 - 1) = 0 \end{cases} \underbrace{(0,0), (1,1), (-1,-1)}_{\text{points critiques}}.$$

Example

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Détermination des points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 4b = 0 \\ 4b^3 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a(a^8 - 1) = 0 \end{cases} \underbrace{(0,0), (1,1), (-1,-1)}_{\text{points critiques}}.$$

- Etude de la hessienne en les points critiques

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \qquad \det(H_f)(x,y) = 144x^2y^2 - 16$$

Example

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Détermination des points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 4b = 0 \\ 4b^3 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a(a^8 - 1) = 0 \end{cases} \quad \underbrace{(0,0),(1,1),(-1,-1)}_{\text{points critiques}}.$$

- Etude de la hessienne en les points critiques

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \qquad \det(H_f)(x,y) = 144x^2y^2 - 16$$

  - Pour $(x,y) = (0,0)$, $\delta = -16 < 0$ donc $(0,0)$ est un point selle.
  - Pour $(x,y) = (1,1)$, $\delta = 128 > 0$ et $r = 12 > 0$ donc $(1,1)$ est un minimum local.
  - Pour $(x,y) = (-1,-1)$, $\delta = 128$ et $r = 12$ donc $(-1,-1)$ est un minimum local.