Sorbonne Université – L3 Mathématiques
3M236 Méthodes numériques pour les équations différentielles

Partiel mardi 10 mars 2020 – Durée : 1h30 pour les 2 exercices ci-dessous et le quiz

Pas de documents autorisés. Pas de calculatrice, pas de téléphone portable allumé : tous les gadgets électroniques susceptibles de stocker ou de transmettre de l'information doivent être éteints et rangés dans les sacs posés au sol. En particulier, tout téléphone portable trouvé allumé en cours d'épreuve sera saisi.

On pourra supposer vrai le résultat d'une question non traitée. Les questions plus difficiles sont marquées par une (*), n'hésitez pas à avancer dans l'exercice si vous bloquez à ces questions.

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ par $f(t,y)=\sin(y)/\ln(t+1)$. On se donne $t_0>0$ et $y_0\in\mathbb{R}$ et on considère le problème de Cauchy suivant sur $]0,+\infty[$:

$$y'(t)=f(t,y(t))=\frac{\sin(y(t))}{\ln(t+1)},\quad y(t_0)=y_0. \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe une solution globale $y:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ au problème (1).

   1pt pour la continuité, 3 pts pour Lipschitz, 1 pt pour la conclusion.

   La fonction second membre f est continue par rapport à (t,y) et Lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t sur tout intervalle de temps de la forme $[t',+\infty)$ avec $t'>0$ puisque pour tout $t\geq t'$ et tout $y\in\mathbb{R}$,

   $$|\partial_y f(t,y)|=|\frac{\cos(y)}{\ln(t+1)}|\leq\frac{1}{\ln(t'+1)}.$$

   Le théorème de Cauchy-Lipschitz global garantit donc l'existence d'une solution sur $[a,b]$, pour tout $[a,b]$ contenant t_0. Ainsi, la solution maximale est définie sur $]0,+\infty[$.

2. Déterminer les solutions constantes de l'équation différentielle $x'(t)=f(t,x(t))$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $y_0\in[-\pi,0]$, expliquer pourquoi la solution y de (1) reste à valeurs dans un intervalle borné et préciser les valeurs de ces bornes.

   2 pts pour les solutions constantes (je propose de ne pas sanctionner la confusion entre t et x entrainant la réponse $\bar{x}\in\pi\mathbb{N}$, mais il faut la remarquer sur la copie), 3 pts pour la solution dans un intervalle. TVA ou au moins la continuité de y pour avoir les 3 pts

   Une solution $t\mapsto x(t)$ est constante (et vaut $\bar{x}\in\mathbb{R}$) si et seulement si $x'(t)=0$ et donc $\sin(x(t))=\sin(\bar{x})=0$, ce qui implique que $\bar{x}\in\pi\mathbb{Z}$.

   Si y n'est pas bornée, il existe un temps $T>t_0$ tel que $y(T)>0$ (si y n'est pas majorée) ou $y(T)<-\pi$ (si y n'est pas minorée). Comme $t\mapsto y(t)$ est une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $T^*\geq t_0$ tel que $y(T^*)=0$ ou $y(T^*)=-\pi$. Dans les deux cas, cela implique que $t\mapsto y(t)$ est constante pour $t\geq T^*$, et donc bornée, ce qui contredit l'hypothèse. La fonction y satisfait donc $-\pi\leq y(t)\leq 0$ pour tout $t\geq t_0$. (On aurait pu aussi dire que si $t\mapsto-\pi$, $t\mapsto 0$ et $t\mapsto y(t)$ sont trois courbes intégrales qui ne croisent pas en $t=t_0$, elle ne se croisent jamais.)

3. *(*)* Montrer que, si $y_0\in]-\pi,0[$, cette solution y est strictement décroissante. En déduire que y admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$ et que cette limite est $-\pi$.

   1 pt pour décroissante, 1pt pour limite finie dans $[-\pi,0[$, 3 pts pour limite $=-\pi$

   On a vu à la question précédente que si $-\pi<y_0<0$ alors $-\pi<y(t)<0$ pour tout $t\geq t_0$. Ceci implique que $y'(t)=\frac{\sin(y(t))}{\ln(t+1)}<0$ pour tout $t\geq t_0$ et donc que y est strictement décroisssante sur $[t_0,+\infty)$. Comme toute fonction strictement décroissante et minorée sur $[t_0,+\infty)$ admet une limite en $+\infty$, il existe $L\in[-\pi,0)$ tel que $\lim_{t\to+\infty}y(t)=L$. Montrons que $L=-\pi$. Supposons au contraire que $L>-\pi$ et choisissons $\varepsilon>0$ tel que $L+\varepsilon<0$. Comme y est décroissante et converge vers L, il *existe $T \geq t_0$ tel que pour tout $t \geq T$, $L \leq y(t) \leq L+\varepsilon$. En posant $\beta = \max\{\sin(s), L \leq s \leq L+\varepsilon\} < 0$, on obtient pour tout $t \geq T$,*

$$y'(t) = \frac{\sin(y(t))}{\ln(t+1)} \leq \frac{\beta}{\ln(t+1)} < 0.$$

En intégrant cette inégalité entre T et $T^* \geq T$ et en utilisant que $\ln$ est croissant et $\beta < 0$, on obtient

$$y(T^*) \leq y(T) + \int_T^{T^*} \frac{\beta}{\ln(t+1)} dt \leq y(T) + \beta \frac{T^* - T}{\ln(1+T^*)}.$$

Ceci implique $\lim_{T^* \to +\infty} y(T^*) = -\infty$, ce qui contredit le caractère borné de y. On a donc démontré que $L = -\pi$.

4. Écrire le schéma d'Euler explicite pour calculer une approximation de la solution y du problème (1) sur un intervalle de la forme $[t_0, t_0 + T]$.

   1pt pour la discrétisation de l'intervalle, 1 pt pour y_0, 3pts pour la formule de récurrence exacte (pas de pitié pour des $y(t_n)$ ou autres imprécisions)

   Le schéma Euler explicite calcule une approximation $\bar{y}_n \approx y(t_n)$ de la solution sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$ en des points $t_n = t_0 + nh$ avec $n = 0, \dots, N$, $h = T/N$, pour $N \in \mathbb{N}^*$. On définit $\bar{y}_0 = y_0$ et pour tout $n \geq 0$, on définit par récurrence $\bar{y}_n$ par

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h \frac{\sin(\bar{y}_n)}{\ln(1 + t_0 + nh)}.$$

Exercice 2 On cherche à identifier pour quelles valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe une solution non identiquement nulle de

$$-y''(x) + x^2 y(x) = \alpha y(x) \tag{2}$$

sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} y(x) = 0. \tag{3}$$

Ce problème intervient dans l'étude de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique.

1. Quelle est la dimension de l'espace des solutions de (2) pour α fixé ?

   0 ou 5 pts

   L'équation (2) est une EDO linéaire d'ordre 2, l'espace des solutions est donc un espace vectoriel réel de dimension 2.

2. Montrer que la fonction gaussienne $\psi_0(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$ est une solution de (2) sur $\mathbb{R}$ pour une certaine valeur α_0 à déterminer du paramètre α, et qui satisfait (3).

   2 pts pour ψ_0', 2 pts pour ψ_0'', 1 pt pour la conclusion

   On calcule $\psi_0'(x) = -x \exp(-\frac{x^2}{2})$, puis $\psi_0''(x) = -\exp(-\frac{x^2}{2}) + x^2 \exp(-\frac{x^2}{2})$. Ceci implique que $-\psi_0''(x) + x^2 \psi_0(x) = \exp(-\frac{x^2}{2}) = \psi_0(x)$, et donc que ψ_0 est solution de (2) pour $\alpha_0 = 1$. La Gaussienne ψ_0 satisfait bien (3).

3. On cherche maintenant des solutions de (2) pour un α quelconque sous la forme $y(x) = z(x) \exp(-\frac{x^2}{2})$. Cette approche vous rappelle-t-elle une méthode vue en cours ?

   0 ou 5 pts : il faut et suffit d'écrire "variation de la constante" pour avoir 5.

   Cela rappelle la méthode de la variation de la constante. L'approche proposée dans cet exercice revient à écrire (2) sous la forme

$$-y''(x) + x^2 y(x) - \alpha_0 y(x) = (\alpha - \alpha_0) g(x),$$

   à résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $y(x) = z(x) \exp(-\frac{x^2}{2})$, et surtout en s'assurant à la fin que $y = g$... ce qui semble beaucoup demander ! Pourtant, cela va marcher pour certains choix de α.

4. Quelle est l'équation satisfaite par la fonction z si $y(x) = z(x)\exp(-\frac{x^2}{2})$ est solution de (2) ?

1 pt pour y', 1pt pour y'' et 3pts pour l'équation

On calcule

$$\begin{aligned} y'(x) &= z'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xz(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ y''(x) &= z''(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - 2xz'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - z(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2z(x)e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

En injectant cela dans (2), on obtient la condition

$$-z''(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + 2xz'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + (1-\alpha)z(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

et donc (en multipliant par $-e^{\frac{x^2}{2}}$) l'EDO

$$z''(x) - 2xz'(x) + (\alpha - 1)z(x) = 0.$$

5. On définit les polynômes de Hermite H_n de degré $n \geq 0$ par récurrence comme suit : $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ et pour tout $n \geq 1$,

$$(D)_{n+1} \quad : \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

On admet dans cette question que H_n satisfait l'EDO

$$(E)_n \quad : \quad y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$$

(attention, cette équation dépend de n !). Identifier un ensemble de valeurs de α pour lesquelles il existe une infinité de solutions de (2) satisfaisant (3).

3 pts pour $\alpha = 2n+1$, 2pts pour l'explication

Pour $\alpha = 2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\psi_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ engendre un espace vectoriel de solutions de (2) qui satisfont (3). En effet, pour tout polynôme P, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

6. *(*)* Soit y une solution de (2) sur $\mathbb{R}$, montrer que $\tilde{y} : x \mapsto y(-x)$ est aussi solution de (2) sur $\mathbb{R}$. Soit y_{1+} l'unique solution de (2) sur $(0, +\infty)$ satisfaisant $y_{1+}(0) = 0$ et $y'_{1+}(0) = 1$ et y_{2+} l'unique solution de (2) sur $(0, +\infty)$ satisfaisant $y_{2+}(0) = 1$ et $y'_{2+}(0) = 0$. On étend y_{1+} par imparité sur $(-\infty, 0]$ en une fonction y_1 sur $\mathbb{R}$ et y_{2+} par parité sur $(-\infty, 0]$ en une fonction y_2 sur $\mathbb{R}$, i.e.

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad &: \quad y_1(x) = y_{1+}(x), \quad y_2(x) = y_{2+}(x); \\ x < 0 \quad &: \quad y_1(x) = -y_{1+}(-x), \quad y_2(x) = y_{2+}(-x). \end{aligned}$$

Montrer que y_1 et y_2 sont deux solutions de (2) sur $\mathbb{R}$ qui engendrent l'ensemble des solutions de (2) sur $\mathbb{R}$.

2 pts pour y_1 et y_2 solutions de (2) sur $\mathbb{R}$, 3 points pour famille libre

Comme $\tilde{y}'(x) = -y'(-x)$ et $\tilde{y}''(x) = y''(-x)$, on a puisque y est solution de (2), $-\tilde{y}''(x) = -y''(-x) = \alpha y(-x) - (-x)^2 y(-x) = \alpha\tilde{y}(x) - x^2\tilde{y}(x)$. Ainsi, $\tilde{y}$ est bien aussi solution de (2).

Par construction, y_1 et y_2 sont deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme y_{1+} et y_{2+} satisfont (2) sur $[0, +\infty)$, y_1 et y_2 satisfont (2) sur $[0, +\infty)$, mais aussi sur $(-\infty, 0]$ par l'argument ci-dessus. Comme y_1 est impaire et y_2 est paire et qu'elles ne sont pas identiquement nulles, elles sont linéairement indépendantes et engendrent donc l'espace des solutions.

7. Montrer que y_1 et y_2 ne peuvent pas être nulles sur un ouvert et qu'elles ne peuvent donc s'annuler qu'en un nombre dénombrable de points.

3pts pour l'argument d'unicité, 2 pts pour le fait qu'une fonction continue qui ne s'annule sur aucun ouvert ne peut s'annuler qu'en un nombre dénombrable de points (pas besoin de la preuve)

Soit y une solution de (2). Si y s'annule sur un ouvert, alors il existe un point $x \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = 0$ et $y'(x) = 0$. Par unicité de la solution (Cauchy-Lipschitz), cela implique que y est identiquement nulle. Comme ni y_1 ni y_2 ne sont identiquement nulles, elles ne peuvent pas s'annuler sur un ouvert, et comme elles sont continues, elles ne peuvent donc s'annuler qu'en un nombre dénombrable de points.

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule sur aucun ouvert. On définit $I_+ = \{x \in [0,1] \,|\, g(x) > 0\}$ et $I_- = \{x \in [0,1] \,|\, g(x) < 0\}$. Comme g est continue, I_+ et I_- sont des ouverts, et ils s'écrivent donc comme union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. On note $I_+ \cup I_- = \cup_{k\in\mathbb{N}}]a_k, b_k[$. Par définition, $\{x \in [0,1] \,|\, g(x) = 0\} = [0,1] \setminus (I_+ \cup I_-)$. Si $[0,1] \setminus \overline{I_+ \cup I_-}$ était non vide, ce serait un ouvert de $[0,1]$ où g serait nulle, ce qui n'est pas possible par hypothèse. Comme $\overline{I_+ \cup I_-} = \cup_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k]$, ceci implique que $[0,1] \setminus (I_+ \cup I_-) = \cup_k \{a_k, b_k\}$, qui est un ensemble dénombrable.

8. Soit $R > 0$ tel que $y_1(R) \neq 0$ et $y_2(R) \neq 0$. En utilisant les questions précédentes et la parité / imparité des fonctions y_1 et y_2, montrer que l'unique solution de (2) sur $\mathbb{R}$ avec les conditions $y(-R) = 0$ et $y(R) = 0$ est la fonction identiquement nulle.

2 pts pour l'écriture $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, 2 pts pour les deux conditions sur α et β, 1pt pour la conclusion.

Soit y une solution de (2) telle que $y(-R) = y(R) = 0$. Comme y_1 et y_2 forment une base de l'espace des solutions, on a $y = \alpha y_1 + \beta y_2$. Par imparité, $y_1(-R) = -y_1(R) = \gamma_1 \neq 0$ et par parité, $y_2(-R) = y_2(R) = \gamma_2 \neq 0$. Ainsi, les conditions $y(R) = 0$ et $y(-R) = 0$ impliquent $\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2 = 0$ et $-\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2 = 0$, dont l'unique solution est $\alpha = \beta = 0$. Ainsi y est identiquement nulle.

9. *(bonus)* Le but de cette question est de démontrer que H_n est bien solution de $(E)_n$. Montrer par récurrence que H_n est un polynôme et que son degré est n. Pour établir que H_n est solution de $(E)_n$, on procède également par récurrence. Pour ce faire, l'hypothèse de récurrence $(R)_n$ à l'ordre $n \geq 1$ est la suivante : pour tout $1 \leq m \leq n$, on a

$$\begin{aligned} (R)_{n,1} \quad &: \quad H'_m(x) = 2mH_{m-1}(x), \\ (R)_{n,2} \quad &: \quad H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0. \end{aligned}$$

Etablir les propriétés $(R)_{1,1}$, $(R)_{2,1}$, $(R)_{1,2}$ et $(R)_{2,2}$. Montrer que $(D)_{n+1}$, $(R)_{n,1}$, $(R)_{n-1,1}$ et $(D)_n$ impliquent $(R)_{n+1,1}$, puis que $(R)_{n+1,1}$, $(D)_{n+1}$ et $(R)_{n,1}$ impliquent $(R)_{n+1,2}$. En déduire que H_n est solution de $(E)_n$ pour tout $n \geq 0$.

0.5pt pour le degré, 0.5pt pour vérifier $(R)_{1,1}$, $(R)_{2,1}$, $(R)_{1,2}$ et $(R)_{2,2}$, 2pts pour la récurrence $(R)_{n+1,1}$ et 2pts pour la récurrence $(R)_{n+1,2}$

Par une récurrence évidente, H_n définit bien un polynôme de degré n. Traitons en détail la seconde récurrence. Tout d'abord, $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ et un calcul direct montre que $H_2(x) = 4x^2 - 2$. On vérifie donc directement que $(R)_{1,1}$ et $(R)_{2,1}$ sont vrais:

$$H'_1(x) = 2 = 2H_0(x), \quad H'_2(x) = 8x = 4H_1(x),$$

ainsi que les EDO $(R)_{1,2}$ et $(R)_{2,2}$. Il suffit maintenant de montrer que $(R)_{m,1}$ et $(R)_{m,2}$ pour tout $m \leq n$ impliquent $(R)_{m,1}$ et $(R)_{m,2}$ pour tout $m \leq n+1$, ce que l'on fait en suivant les indications de l'énoncé. On commence par $(R)_{n+1,1}$:

$$\begin{aligned} H'_{n+1}(x) \quad &\overset{(D)_{n+1}}{=} \quad 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - 2nH'_{n-1}(x) \\ &\overset{(R)_{n,1}\&(R)_{n-1,1}}{=} \quad 2H_n(x) + 2x2nH_{n-1}(x) - 2n2(n-1)H_{n-2}(x) \\ &\overset{(D)_n}{=} \quad 2H_n(x) + 2nH_n(x) = 2(n+1)H_n(x), \end{aligned}$$

ce qui établit bien $(R)_{n+1,1}$.

On poursuit avec $(R)_{n+1,2}$. *Tout d'abord, par* $(R)_{n+1,1}$ *(qu'on vient de montrer),* $H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x)$ *et donc* $H''_{n+1}(x) = 2(n+1)H'_n(x)$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned}
& H''_{n+1}(x) - 2xH'_{n+1}(x) + 2(n+1)H_{n+1}(x) \\
\overset{(R)_{n+1,1}}{=} \quad & 2(n+1)H'_n(x) - 2x2(n+1)H_n(x) + 2(n+1)H_{n+1}(x) \\
\overset{(D)_{n+1}}{=} \quad & 2(n+1)H'_n(x) - 2x2(n+1)H_n(x) + 2(n+1)\Big(2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\Big) \\
= \quad & 2(n+1)\Big(H'_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\Big) \\
\overset{(R)_{n,1}}{=} \quad & 0,
\end{aligned}$$

ce qui démontre $(R)_{n+1,2}$.