Dérivation et intégration

Polycopié du cours

A1 - S2

Année 2022/2023

Jad Dabaghi
Enseignant chercheur en Mathématiques
jad.dabaghi@devinci.fr

Introduction

Ce module est consacré à l'étude et l'approximation locale des fonctions, le calcul d'intégrales, et les fractions rationnelles. En particulier, on introduira un nouvel outil, les développements limités, permettant d'approcher localement une fonction par des polynômes, et de calculer la limite en un point d'une fonction donnée sous une forme indéterminée (par exemple, le quotient de deux fonctions ayant toutes les deux une limite nulle). Les développements limités constituent ainsi un outil très puissant que l'on retrouve dans de nombreux domaines de la physique (mécanique, électricité,...) pour ne citer que ceux-là. La seconde partie de ce module est dédiée aux différentes techniques d'intégrations existantes : la formule d'intégration par parties (déjà vue au lycée), la formule du changement de variable, et les règles de Bioche. Les fractions rationnelles seront également abordées avec notamment la décomposition en éléments simples permettant de simplifier un bon nombre de calculs.

Ce polycopié est constitué de 4 chapitres :

1. Chapitre 1 : On introduit la définition rigoureuse de la continuité d'une fonction en un point. Quelques notions de topologies sont également présentées pour comprendre la notion de voisinage en un point d'une fonction.
2. Chapitre 2 : On étudie l'approximation locale des fonctions par des polynômes. Les principales relations de comparaisons entre fonctions sont présentées (fonction dominée, fonction négligeable, équivalence).
3. Chapitre 3 : Ce chapitre est entièrement consacré aux développements limités. Les développements limités des fonctions usuelles au voisinage d'un point sont également données, et les différentes règles de calculs licites sont détaillées.
4. Chapitre 4 et 5 : Dans un premier chapitre, nous faisons quelques rappels sur les polynômes avant d'aborder l'étude des fractions rationnelles. La décomposition en éléments simples est détaillée et quelques applications directes sont présentées.
5. Chapitre 6 : Ce chapitre est dédiée aux calculs d'intégrales en dimension 1 d'espace. Nous rappellons la formule d'intégration par parties et nous présentons la formule du changement de variable et les règles de Bioche.

Chapitre 1

Continuité d'une fonction en un point

1.1 Un peu de topologie

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble non vide. Une distance sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E$*

$$\begin{aligned} & d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \textit{(homogénéité)} \\ & d(x,y) = d(y,x) \quad \textit{(symétrie)} \\ & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \textit{(inégalité triangulaire).} \end{aligned} \tag{1.1}$$

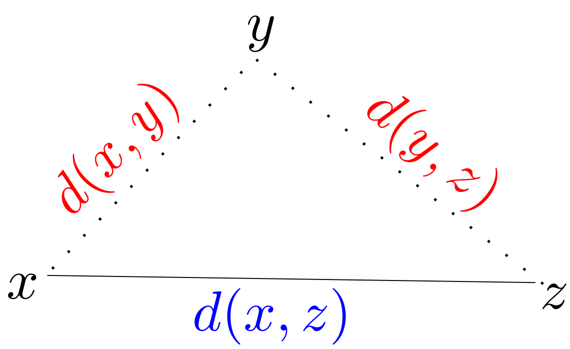


FIGURE 1.1 – inégalité triangulaire

Si d est une distance sur E, le couple (E, d) est appelé espace métrique.

- Sur $\mathbb{R}$, la métrique usuelle est $d(x, y) := |x - y|$.
- Sur $\mathbb{C}$, la métrique usuelle est $d(z_1, z_2) := |z_2 - z_1|$.

Définition 1.1.2. *[Boule ouverte, boule fermée] Soit (E, d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble*

$$B(a,r) := \{x \in E, \ \textit{tel que } d(x,a) < r\}.$$

Sur l'espace métrique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, *la boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *est l'intervalle* $]a-r, a+r[$. *De même, la boule fermée de centre* a *et de rayon* r *est l'ensemble*

$$B_f(a,r) := \{x \in E, \text{ tel que } d(x,a) \leq r\}.$$

Ainsi, sur l'espace métrique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, *la boule fermée de centre* a *et de rayon* r *est l'intervalle* $[a-r, a+r]$.

Définition 1.1.3. *[Ouvert]*
Soit (E,d) *un espace métrique. On dit que* $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ *est un ouvert de* E *si* $\mathcal{A}$ *contient une boule ouverte. Autrement dit, si*

$$\forall a \in \mathcal{A}, \ \exists r > 0 \text{ tel que } B(a,r) \subset \mathcal{A}.$$

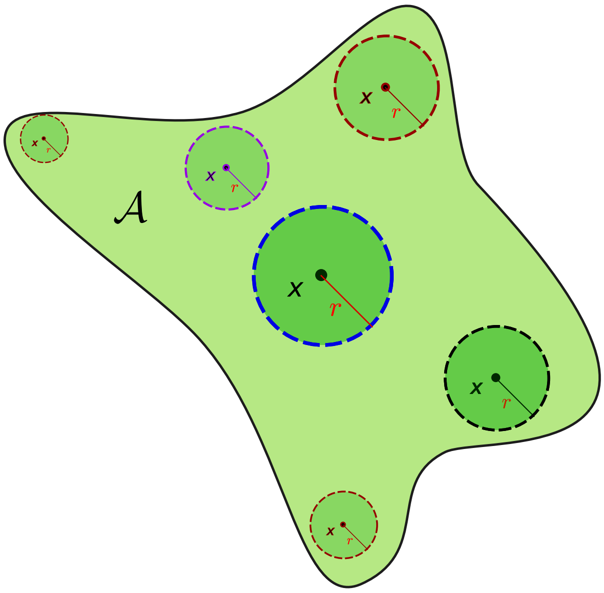


FIGURE 1.2 – Ouvert dans le plan $\mathbb{R}^2$

Définition 1.1.4. *[Fermé]*
Soit (E,d) *un espace métrique. On dit que* $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ *est un fermé si* $\mathcal{C}_E\mathcal{A}$ *est un ouvert de* E.

Dans un espace métrique (E,d) une boule ouverte est un ouvert de E comme le montre la proposition suivante.

Propriété 1.1.5. *Soit* (E,d) *un espace métrique. La boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *est un ouvert de* E.

Démonstration. D'après la Définition 1.1.2, la boule ouverte de centre a et de rayon r est définie par

$$B(a,r) := \{x \in E, \text{ tel que } d(x,a) < r\}.$$

Il s'agit de montrer que l'ensemble $B(a,r)$ est un ouvert de E, autrement dit de montrer que $B(a,r)$ contient une boule ouverte. Soit $a' \in B(a,r)$. Posons $r' = r - d(a,a')$. Alors, on peut affirmer que $B(a',r') \subset B(a,r)$. Pour prouver cette inclusion on procède de la manière suivante. Soit $x \in B(a',r')$. Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire (1.1) on obtient

$$d(a,x) \leq d(a,a') + d(a',x) < d(a,a') + r' = r.$$

Il s'ensuit que $d(a,x) < r$ et donc que $x \in B(a,r)$.

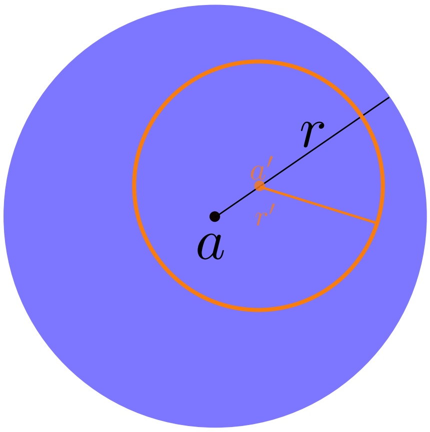


FIGURE 1.3 – Boule de centre a et de rayon r en bleu. Boule de centre a' et de rayon r' en rouge.

Pour une illustration se référer à la Figure 1.3. □

Propriété 1.1.6. *Soit (E,d) un espace métrique. Alors, la boule fermée de centre a et de rayon r notée $B_f(a,r)$ est un fermé de E.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}_E B_f(a,r)$ est un ouvert de E. Autrement dit, nous devons montrer que $\mathcal{C}_E B_f(a,r)$ contient une boule ouverte. De manière équivalente cela revient à montrer que

$$\forall a' \in \mathcal{C}_E B_f(a,r) \; \exists r' > 0 \quad \text{tel que} \quad B(a',r') \subset \mathcal{C}_E B_f(a,r).$$

Soit $a' \in \mathcal{C}_E B_f(a,r)$. Posons $r' = \dfrac{d(a,a') - r}{2}$. Alors, $B(a',r') \subset \mathcal{C}_E B_f(a,r)$. En effet, soit $x \in B(a',r')$. Comme $a' \in \mathcal{C}_E B_f(a,r)$ il vient que

$$d(a,x) > d(a,a') = 2r' + r > r.$$

Finalement, $x \in \mathcal{C}_E B_f(a,r)$.

Une illustration graphique est fournie dans la Figure 1.4 pour aider à la compréhension.

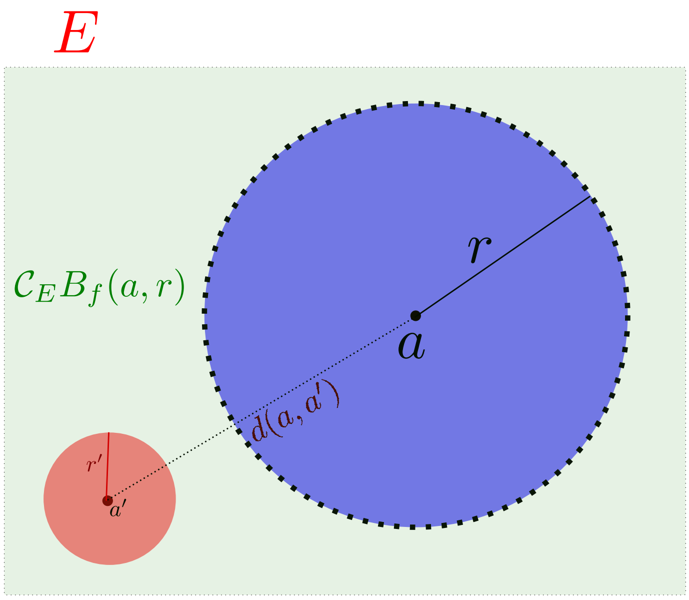


FIGURE 1.4 – Ensemble E contenant une boule fermée $B_f(a,r)$ en bleu et le complémentaire cette boule fermée $\mathcal{C}_E B_f(a,r)$ (zone verte). Cette zone contient toujours une boule ouverte (rouge).

□

Remarque 1.1.7. *Dans la preuve de la proposition précédente, nous avons choisi* $r' = \dfrac{d(a,a')-r}{2}$. *Cependant, le choix* $r' = d(a,a') - r$ *aurait suffit.*

Définition 1.1.8. *[Voisinage]*
Soit (E,d) *un espace métrique et* $a \in E$. *On dit que* $\mathcal{V} \subset E$ *est un voisinage de* a *si, et seulement si, il existe un ouvert* $O \subset \mathcal{V}$ *contenant* a. *Autrement dit s'il existe une boule ouverte de centre* a *et de rayon* $r > 0$ *contenue dans* $\mathcal{V}$: $B(a,r) \subset \mathcal{V}$.

Remarque 1.1.9. *En dimension une d'espace, un voisinage d'un point est défini par un intervalle ouvert (voir la Figure 1.5 pour une illustration)*

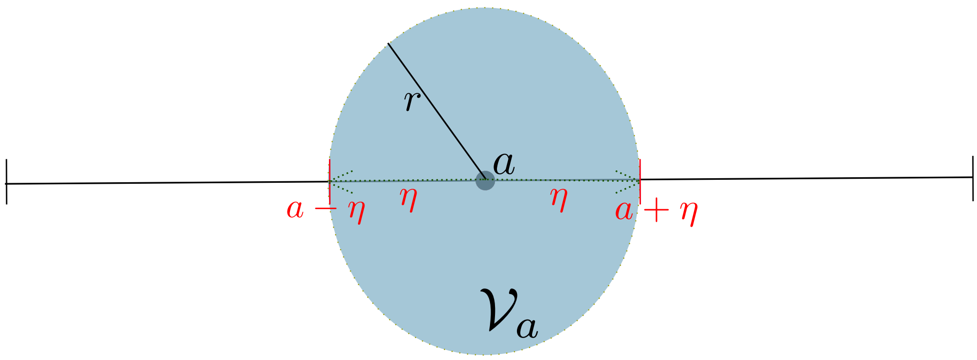


FIGURE 1.5 – Voisinage d'un point a. En dimension 1 d'espace $\mathcal{V}_a =]a-\eta, a+\eta[$ et en dimension 2 d'espace $\mathcal{V}_a = B(a,r)$.

1.2 Continuité

Dans toute la suite, pour simplifier, nous considérons comme espace métrique l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle $d(x,y) = |x-y| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 1.2.1. *[Caractérisation de Weierstrass]*
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et $a \in I$. La fonction f est dite continue en a si la limite de f en a existe et vaut $f(a)$ i.e.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1.2}$$

En langage formalisé :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon. \tag{1.3}$$

Cela veut dire qu'en fixant un seuil $\varepsilon > 0$, on peut trouver un intervalle autour de a (voisinage de a) tel que $f(x)$ soit à une distance inférieure à ε de $f(a)$.

Une fonction qui n'est pas continue est dite discontinue.

Commentaire 1.2.2. *Cette définition posée par Karl Weierstrass a permis de rendre rigoureuse la notion intuitive de continuité. Une approche intuitive consisterait à dire que : f est continue en a si $f(x) - f(a)$ est infiniment petit quand $x - a$ est infiniment petit. En utilisant la notion de voisinage, cela reviendrait à dire que si x est dans un voisinage de a alors $f(x)$ est dans un voisinage de $f(a)$. L'idée d'introduire un seuil $\varepsilon > 0$ pour lequel on trouvera toujours un réel $\eta > 0$ est d'une importance capitale ici. Cela permet de définir rigoureusement les "infiniment petits". Graphiquement, dire qu'une fonction est continue signifie tout simplement que sa courbe représentative ne présente pas de « sauts ». Une illustration graphique est fournie dans la Figure 1.6. Des exemples de fonctions non continues classiquement rencontrées dans la littérature sont la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ (cette fonction est discontinue en 0) ou la fonction $x \mapsto \tan(x)$ (cette fonction présente des discontinuités aux points $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$).*

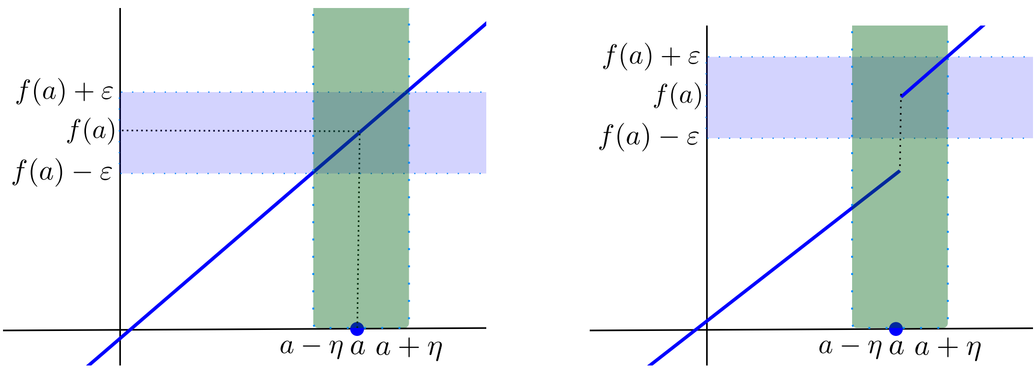


FIGURE 1.6 – Exemple d'une fonction continue (gauche) et d'une fonction non continue (droite) sur un intervalle.

Définition 1.2.3. *[Continuité sur un intervalle]*
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, si f est continue en tout point de I.

Les théorèmes suivants ont déjà été abordés au Lycée. Les démonstrations ne sont pas fournies mais sont accessibles dans différents ouvrages.

Théorème 1.2.4. *[Théorème des valeurs intermédiaires]*
Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$. Toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par la fonction f sur $[a, b]$.

Corollaire 1.2.5. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b) \leq 0$ alors :*

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f(c) = 0.$$

Théorème 1.2.6. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a et b deux points de I. Alors f est bornée sur $[a, b]$.*

Chapitre 2

Relations de comparaison

2.1 Fonctions dominées, fonctions négligeables

Définition 2.1.1. *Soit f et φ des fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. On dit que f est* ***dominée*** *par la fonction φ au voisinage de a, s'il existe une fonction u définie sur I, bornée au voisinage de a et telle que $f = \varphi u$ au voisinage de a. On note $f = \mathcal{O}(\varphi)$*

Exemple 2.1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = x^2$. On a $f(x) = \varphi(x)u(x)$ où $u(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction u est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f = \mathcal{O}(\varphi)$.*

Définition 2.1.3. *on dit que f est* ***négligeable*** *devant φ au voisinage de a, s'il existe une fonction ε définie sur I tel que $f = \varphi\varepsilon$ au voisinage de a et $\lim_a \varepsilon = 0$.*

Exemple 2.1.4. *Au voisinage de 0, la fonction $x \mapsto x^3$ est négligeable devant la fonction $x \mapsto x^2$. En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$.*

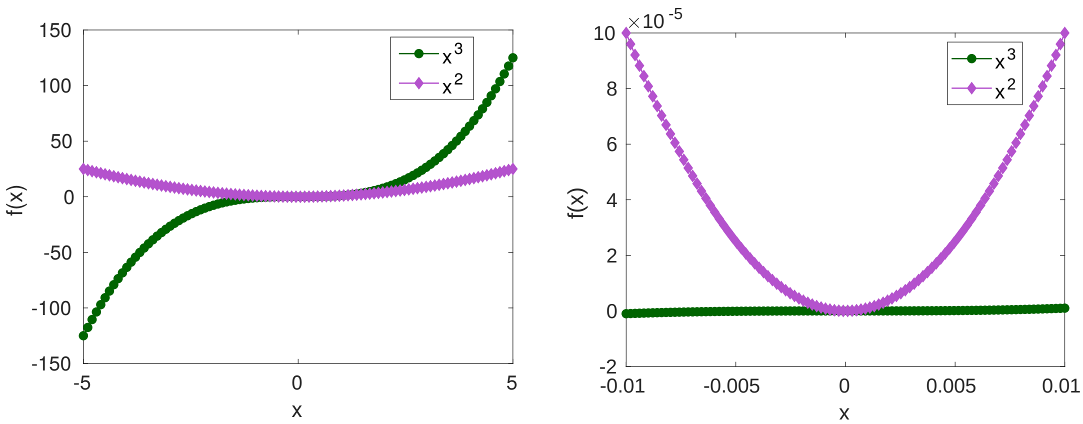


FIGURE 2.1 – courbe en vert : $x \mapsto x^3$, courbe en violet : $x \mapsto x^2$. Figure Gauche : domaine spatial étendu. Figure Droite : zoom au voisinage du point 0.

On commence par énoncer deux propriétés :

Propriété 2.1.5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.*

1. *La fonction f est bornée au voisinage de a si, et seulement si, elle est dominée par la fonction constante 1, autrement dit $f = \mathcal{O}(1)$.*
2. *La fonction f tend vers 0 en a si, et seulement si, elle est négligeable devant la fonction constante 1, c'est à dire $f = o(1)$.*

Démonstration. 1. Pour prouver cette première équivalence, procédons par double implication. Supposons dans un premier temps que f est bornée au voisinage de a. On rappelle que le voisinage de a noté $\mathcal{V}_a$ est définit par $\mathcal{V}_a =]a-\eta, a+\eta[$ où $\eta > 0$. On a $\forall x \in \mathcal{V}_a \; f(x) = f(x) \times 1$. La fonction f étant bornée on obtient $f = \mathcal{O}(1)$.
Réciproquement, supposons que $f = \mathcal{O}(1)$ et montrons que f est bornée au voisinage de a. Par définition, puisque $f = \mathcal{O}(1)$ $\exists \varphi$ bornée au voisinage de a tel que $f = \varphi \times 1$ au voisinage de a. Il s'ensuit que f est bornée au voisinage de a.

2. Supposons que f tend vers 0 en a. Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in [a-\eta, a+\eta], \; |f(x)| \leq \varepsilon.$$

En considérant la fonction φ définie au voisinage de a par $\varphi(x) = f(x)$ on a évidemment $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$ et $f(x) = 1 \times \varphi(x) \; \forall x \in \mathcal{V}_a$. D'où $f = o(1)$.
Réciproquement, supposons que $f = o(1)$ et montrons que f tend vers 0 en a. Comme $f = o(1)$ au voisinage de a, il existe une fonction φ tel que $\forall x \in \mathcal{V}_a \; f(x) = \varphi(x) \times 1$ et $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$. Or $\lim_{x\to a} \varphi(x) \in \mathcal{V}_a$. Ainsi, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

$\square$

Remarque 2.1.6. *Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, il existe une fonction ε qui tend vers 0 au voisinage de a tel que $f = g\varepsilon$ au voisinage de a. Cependant, il n'existe pas forcément une fonction ε qui tend vers 0 sur I tout entier comme le montre l'exemple de la Figure 2.1.*

Remarque 2.1.7. *Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ au voisinage de a alors f n'est pas forcément égal à g. En posant $f : x \mapsto x^3$, $g : x \mapsto x^4$, et $h : x \mapsto x^2$ on a $f = o(h)$ au voisinage de 0 et $g = o(h)$ au voisinage de 0 mais $f \neq g$. Le même phénomène s'observe pour la notation $\mathcal{O}$.*

Propriété 2.1.8. *[Règles de calcul]*

1. $f = o(\varphi) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi)$
2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ *et* $f_2 = \mathcal{O}(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$
3. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi_1)$ *et* $f_2 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = \mathcal{O}(\varphi_1\varphi_2)$
4. $f_1 = o(\varphi)$ *et* $f_2 = o(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(\varphi)$
5. $f_1 = o(\varphi_1)$ *et* $f_2 = o(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(\varphi_1\varphi_2)$

6. $f = \mathcal{O}(\varphi_1)$ *et* $\varphi_1 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi_2)$
7. $f = o(\varphi_1)$ *et* $\varphi_1 = o(\varphi_2) \Rightarrow f = o(\varphi_2)$

Démonstration. 1. Supposons que $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \in I$. Alors il existe une fonction g qui tend vers 0 en a ($\lim_{x\to a} g(x) = 0$) tel que $f = g\varphi$ au voisinage de a. Ce qui s'écrit aussi à l'aide de la définition de la limite (1.3)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in [a-\eta, a+\eta],\ |g(x)| \leq \varepsilon.$$

Finalement, g est bornée au voisinage de a et donc $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

2. Puisque $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ il existe une fonction u bornée au voisinage de a tel que $f_1 = \varphi u$ au voisinage de a. En utilisant la définition du voisinage on obtient

$$\exists \eta_1 > 0\ \forall x \in]a-\eta_1, a+\eta_1[,\ f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$

De plus, $f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$ alors il existe une fonction v bornée au voisinage de a tel que $f_2 = \varphi v$ au voisinage de a. De même,

$$\exists \eta_2 > 0\ \forall x \in]a-\eta_2, a+\eta_2[,\ f_2(x) = \varphi(x)v(x).$$

En posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ on a $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\ f_1(x)+f_2(x) = \varphi(x)(u+v)(x)$ (voir la Figure 2.2 pour une illustration). Or u et v sont bornées au voisinage de a donc

$$\exists M > 0\ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[,\ |u(x)| \leq M$$
et
$$\exists M' > 0\ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[,\ |v(x)| \leq M'.$$

En posant $w : x \mapsto u(x) + v(x)$ on a $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[,\ |w(x)| \leq M + M'$. Finalement,

$$\exists \eta > 0\ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\ f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)w(x)$$

avec w bornée au voisinage de a. Donc $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$.

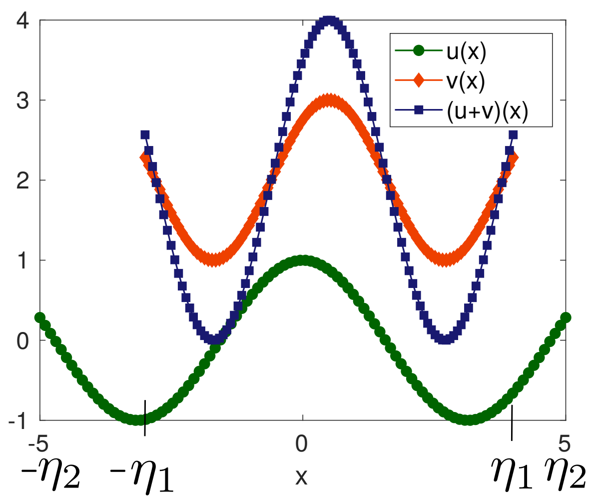


FIGURE 2.2 – illustration du concept $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$

3. Puisque $f_1 = \mathcal{O}(\varphi_1)$ il existe une fonction u bornée au voisinage de a tel que $f_1 = \varphi_1 u$ au voisinage de a. De même, $f_2 = \mathcal{O}(\varphi_2)$ donc il existe une fonction v bornée au voisinage de a tel que $f_2 = \varphi_2 v$ au voisinage de a. Ainsi, en utilisant la méthodologie employée dans le cas précédent, on obtient

$$\exists \eta > 0 \ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ (f_1 f_2)(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)w(x)$$

où $w(x) = u(x)v(x)$. Par ailleurs, les fonctions u et v sont bornées au voisinage de a donc

$$\begin{aligned} &\exists M > 0 \ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ |u(x)| \leq M \\ &\exists M' > 0 \ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ |v(x)| \leq M'. \end{aligned}$$

Finalement, $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ |w(x)| \leq MM'$ ce qui prouve que la fonction w est bornée au voisinage de a. D'où, $f_1 f_2 = \mathcal{O}(\varphi_1\varphi_2)$.

4. Puisque $f_1 = o(\varphi)$ et $f_2 = o(\varphi)$ au voisinage de a il existe une fonction ε_1 et il existe une fonction ε_2 tel que

$$\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$$

et $f_1 = \varepsilon_1\varphi$ au voisinage de a et $f_2 = \varepsilon_2\varphi$ au voisinage de a. En utilisant la définition du voisinage (voir le premier cas ci dessus),

$$\exists \eta > 0 \ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\ f_1(x) + f_2(x) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(x)\varphi(x).$$

En posant $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, on obtient

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\ (f_1 + f_2)(x) = \varepsilon\varphi(x).$$

Comme $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ on obtient bien que $f_1 + f_2 = o(\varphi)$.

5. Puisque $f_1 = o(\varphi_1)$ et $f_2 = o(\varphi_2)$ au voisinage de a il existe une fonction ε_1 et il existe une fonction ε_2 tel que

$$\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$$

et $f_1 = \varepsilon_1\varphi_1$ au voisinage de a et $f_2 = \varepsilon_2\varphi_2$ au voisinage de a. En utilisant les mêmes arguments que précédemment (définition du voisinage)

$$\exists \eta > 0 \ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\ f_1(x) = \varepsilon_1(x)\varphi_1(x) \text{ et } f_2(x) = \varepsilon_2(x)\varphi_2(x).$$

En posant $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2$, on obtient

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\ (f_1 f_2)(x) = \varepsilon(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x).$$

Comme $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ on obtient bien que $f_1 f_2 = o(\varphi_1\varphi_2)$.

6. Comme $f = \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = \mathcal{O}(\varphi_2)$ il existe une fonction u_1 bornée au voisinage de a et il existe une fonction u_2 bornée au voisinage de a tel que

$$f(x) = u_1(x)\varphi_1(x) \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = u_2(x)\varphi_2(x)$$

au voisinage de a. Il s'ensuit que

$$\exists \eta > 0 \ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ f(x) = u_1(x)u_2(x)\varphi_2(x).$$

Or u_1 et u_2 sont bornées au voisinage de a donc

$$\exists M_1 > 0 \ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ |u_1(x)| \leq M_1$$
et
$$\exists M_2 > 0 \ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ |u_2(x)| \leq M_2.$$

En posant $M = M_1M_2$ on a

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ |(u_1u_2)(x)| \leq M$$

ce qui montre en outre que la fonction u_1u_2 est bornée au voisinage de a. Bref, $f = \mathcal{O}(\varphi_2)$.

7. Puisque $f = o(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = o(\varphi_2)$ il existe une fonction ε_1 qui tend vers 0 en a et il existe une fonction ε_2 qui tend vers 0 en a tel que

$$f(x) = \varphi_1(x)\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\varepsilon_2(x).$$

Ainsi
$$f(x) = (\varepsilon_1\varepsilon_2)(x)\varphi_2(x)$$
au voisinage de a où $\lim_{x\to a}(\varepsilon_1\varepsilon_2)(x) = 0$. Finalement, $f = o(\varphi_2)$.

□

Nous énonçons une propriété très utile en pratique pour montrer qu'une fonction est dominée ou négligeable par une autre fonction.

Propriété 2.1.9. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Supposons que φ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$. Alors au voisinage de a*

1. *f est dominée par φ si, et seulement si, $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a.*
2. *f est négligeable devant φ si, et seulement si, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.*

2.2 Fonctions équivalentes

Définition 2.2.1. *Étant données deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, on dit que f est équivalente à g au voisinage de a, ou équivalente à g en a, s'il existe une fonction h définie sur I telle que $f = gh$ au voisinage de a et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note alors $f \sim g$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.*

Exemple 2.2.2. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$. On a $f \underset{0}{\sim} g$. En effet*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \ f(x) = \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{h(x)} \times g(x).$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Donc $f \underset{0}{\sim} g$. On verra plus tard qu'au voisinage de 0, la fonction $x \mapsto x$ constitue un développement limité à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

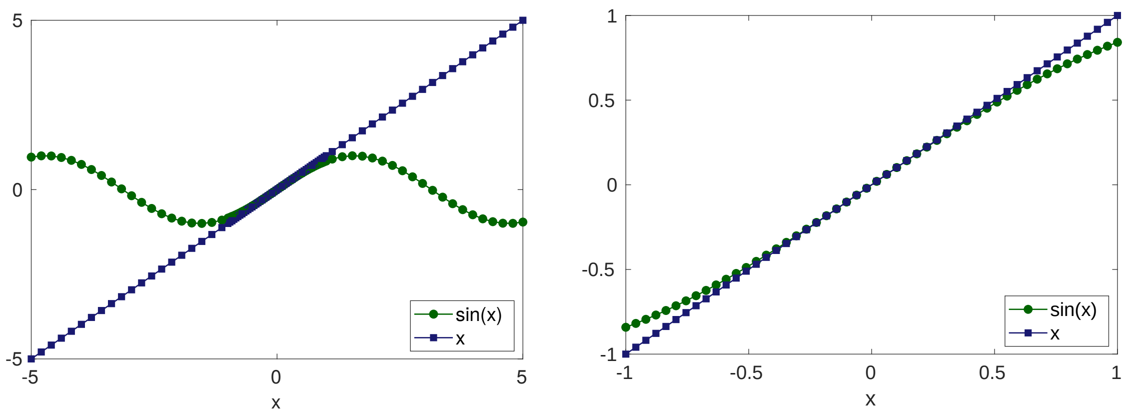


FIGURE 2.3 – Approximation de $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de 0. Gauche : domaine spatial étendu. Droite : zoom au voisinage de 0.

Remarque 2.2.3. *On a l'équivalence suivante $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g = o(g)$ au voisinage de a. En effet,*

$$\begin{aligned}
f \underset{a}{\sim} g &\iff \exists h : I \to \mathbb{R} \text{ avec } \lim_{x\to a} h(x) = 1 \text{ tel que } f = gh \text{ au voisinage de } a \\
&\iff \exists \tilde{h} : I \to \mathbb{R} \text{ avec } \lim_{x\to a} \tilde{h}(x) = 0 \text{ tel que } f = g(1+\tilde{h}) \text{ au voisinage de } a \\
&\iff \exists \tilde{h} : I \to \mathbb{R} \text{ avec } \lim_{x\to a} \tilde{h}(x) = 0 \text{ tel que } f - g = g\tilde{h} \text{ au voisinage de } a \\
&\iff f - g = o(g).
\end{aligned}$$

Exemple 2.2.4. *Soit f la fonction polynomiale non nulle définie par :*

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

1. ***Étude en* 0 :** *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n \\
&= a_p x^p \left(1 + \frac{a_{p+1}}{a_p} x + \cdots + \frac{a_n}{a_p} x^{n-p}\right) \\
&= a_p x^p \left(1 + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a_k}{a_p} x^{k-p}\right).
\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to 0} \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a_k}{a_p} x^{k-p} = 0$. *Donc* $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.

2. ***Étude en*** $+\infty$ ***:*** *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} x^{-2} + \cdots + \frac{a_p}{a_n} x^{p-n}\right) \\ &= a_n x^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n-p} \frac{a_{n-k}}{a_n} x^{-k}\right). \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-p} \frac{a_{n-k}}{a_n} x^{-k} = 0$ *et donc* $f(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$.

Finalement, en 0*, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré et en* $+\infty$*, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.*

La proposition suivante est très utile en pratique pour montrer que deux fonctions sont équivalentes en un point.

Propriété 2.2.5. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle* I *et* $a \in I$*. On suppose que* g *ne s'annule pas sur* $I \setminus \{a\}$*. Alors, la fonction* f *est équivalente à la fonction* g *au voisinage de* a*, si et seulement si,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Démonstration. D'après le Remarque 2.2.3

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g = o(g) \iff \frac{f-g}{g} = \frac{f}{g} - 1 \underset{a}{\to} 0 \iff \frac{f}{g} \underset{a}{\to} 1.$$

□

2.2.1 Résultats fondamentaux

Lemme 2.2.6. *Étant données deux fonctions* f *et* g *équivalentes en* a*, si* g *a une limite finie ou infinie en* a *alors* f *a une limite finie en* a *et :*

$$\lim_a f = \lim_a g.$$

Démonstration. Supposons que $f \underset{a}{\sim} g$ et que g admet une limite $L \in \mathbb{R}$ en a. Alors il existe une fonction h définie tel que $f = gh$ au voisinage de a avec $\lim_a h = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_a h = 1$

$$\exists \eta_1 > 0 \ \forall x \in [a - \eta_1, a + \eta_1], \ |h(x) - 1| \leq \frac{|L|}{\varepsilon}.$$

Or g admet une limite L en a donc

$$\exists \eta_2 > 0 \; \forall x \in [a-\eta_2, a+\eta_2], \; |g(x) - L| \leq \varepsilon_2 = \varepsilon - |L|.$$

En posant $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$ on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a-\eta, a+\eta], \; |f(x) - L| = |g(x)h(x) - L| &= |g(x)\,(h(x)-1) + g(x) - L| \\
&\leq |g(x)\,(h(x)-1)\,| + |g(x) - L| \\
&\leq |g(x)||h(x)-1| + |g(x) - L| \\
&\leq |g(x)|\frac{|L|}{\varepsilon} + \varepsilon - |L|.
\end{aligned}$$

Or $|g(x)| \leq |g(x) - L| + |L| < \varepsilon$. Donc

$$\forall x \in [a-\eta, a+\eta], \; |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. □

Propriété 2.2.7. *Soient f et g deux fonctions équivalentes en $a \in I$.*

1. *Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a.*
2. *Si g ne s'annule pas sur I alors f ne s'annule pas au voisinage de a.*

Démonstration.

1. Comme $f \underset{a}{\sim} g$ au voisinage de a il existe une fonction h définie sur I tel que $f = gh$ au voisinage de a et $\lim_{a} h = 1$. Ainsi, la limite de h est positive au voisinage de a. Puisque g est positive sur I, g est également positive au voisinage de a ce qui prouve que f est positive au voisinage de a.
2. Puisque g ne s'annule pas sur I, g ne s'annule pas au voisinage de a et comme h tend vers 1 au voisinage de a la fonction f ne s'annule pas au voisinage de a.

□

2.2.2 Obtention d'équivalents

Propriété 2.2.8. *Si f est une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et si $f'(a) \neq 0$, alors au voisinage de a :*

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a).$$

Démonstration. La définition du nombre dérivé en $a \in \mathbb{R}$ donne

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Donc

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f'(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = 1.$$

Ainsi
$$f(x) - f(a) \sim f'(a)\,(x-a)$$
ce qui prouve la Proposition. Par ailleurs, l'égalité (2.2.2) donne aussi
$$f'(a) \sim \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

□

Quelques équivalents usuels au voisinage de 0 **:**

1. $e^x - 1 \sim x$
2. $\ln(1+x) \sim x$
3. $\sin(x) \sim x$
4. $\tan(x) \sim x$

Propriété 2.2.9. *[Substitution dans un équivalent] Soient f et g deux fonctions définies sur I et équivalentes en a. Si u est une fonction définie sur $\Delta \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans I et telle que $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en α.*

Démonstration. Comme f et g sont équivalentes en a il existe une fonction h définie sur I tel que $f = gh$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$. En exploitant la définition du voisinage on a
$$\exists \gamma > 0 \ \forall x \in]a-\gamma, a+\gamma[, \ f(x) = g(x)h(x).$$
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) = a$
$$\exists \delta > 0 \ \forall t \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta], \ a-\varepsilon < u(t) < a+\varepsilon.$$
En posant $\eta = \min(\gamma, \varepsilon)$ on a
$$\forall t \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta], \ a-\eta < u(t) < a+\eta$$
et
$$f(u(t)) = g(u(t))h(u(t)).$$
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$ donc la fonction h tend vers 1 quand x et dans un voisinage de a. En remplaçant x par $u(t)$ (appartenant au voisinage de a) on a $\lim\limits_{t\to\alpha} h(u(t)) = 1$. D'où
$$f(u(t)) \underset{\alpha}{\sim} g(u(t)).$$

□

Exercice 2.2.10. *Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :*

1. $e^{\sin t} - 1$

   Correction : *Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(t) = \sin t$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - 1$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x$. On a $f \underset{0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 0$ donc $f(u(t)) \underset{0}{\sim} g(u(t))$. Finalement,*

$$e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t.$$

2. $(1+x)^\alpha - 1$

   Correction : *On a*

$$(1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln(1+x)} - 1.$$

   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(y) = e^y - 1$, soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(y) = y$ et soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \alpha \ln(1+x)$. On a $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ et $f \underset{0}{\sim} g$. Alors, $f(u(x)) \underset{0}{\sim} g(u(x))$. Ainsi,

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha \ln(1+x).$$

3. $\ln(\cos(t))$

   Correction : *On a*

$$\ln(\cos(t)) = \ln(1 + \cos(t) - 1).$$

   Posons $u(t) = \cos(t) - 1$. On a évidemment $\lim\limits_{t\to 0} \cos(t) - 1 = 0$. De plus, $\ln(1+y) \underset{0}{\sim} y$. Finalement, $\ln(1+u(t)) \underset{0}{\sim} u(t)$ Ainsi,

$$\ln(\cos(t)) \underset{0}{\sim} \cos(t) - 1.$$

Remarque 2.2.11. ***Attention :*** *Il n'y a pas de résultats générales concernant la composition d'équivalents. Si les fonctions f et g sont équivalentes on ne peut rien dire à priori de $u \circ f$ et $u \circ g$ comme le prouve l'exemple suivant.*

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x + \sqrt{x}$. Au voisinage de $+\infty$ $f \sim g$. Mais $e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$.

Propriété 2.2.12. *[Opération sur les fonctions équivalentes]*
Si au voisinage de a on a

1. *$f \sim g$ et $g \sim h$ alors $f \sim h$ en a (transitivité).*
2. *Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ en a (produit).*
3. *Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ et si aucune de ces fonctions ne s'annule sur $I \setminus \{a\}$ alors $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$ en a (quotient).*

Démonstration. 1. Supposons que $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ et montrons que $f \underset{a}{\sim} h$. Par définition, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 définies sur I tels que $f = g\varepsilon_1$ au voisinage de a, $g = h\varepsilon_2$ au voisinage de a et vérifiant $\lim\limits_a \varepsilon_1 = \lim\limits_a \varepsilon_2 = 1$. En utilisant la définition du voisinage d'un point on obtient

$$\exists \eta_1 > 0 \ \forall x \in]a-\eta_1, a+\eta_1[, \ f(x) = g(x)\varepsilon_1(x)$$

et

$$\exists \eta_2 > 0 \ \forall x \in]a-\eta_2, a+\eta_2[, \ g(x) = h(x)\varepsilon_2(x).$$

Ainsi, en posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ on a

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ f(x) = h(x)\varepsilon_2(x)\varepsilon_1(x).$$

Comme $\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) = 1$ on a bien $f \underset{a}{\sim} h$.

2. Supposons que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$. Alors, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 définies sur I tels que $f_1 = g_1\varepsilon_1$ au voisinage de a, $f_2 = g_2\varepsilon_2$ au voisinage de a et vérifiant $\lim\limits_a \varepsilon_1 = \lim\limits_a \varepsilon_2 = 1$. En utilisant la définition du voisinage d'un point on obtient

$$\exists \eta_1 > 0 \ \forall x \in]a-\eta_1, a+\eta_1[, \ f_1(x) = g_1(x)\varepsilon_1(x)$$

et

$$\exists \eta_2 > 0 \ \forall x \in]a-\eta_2, a+\eta_2[, \ f_2(x) = g_2(x)\varepsilon_2(x).$$

Ainsi, en posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ on a

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x)\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x).$$

Comme $\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) = 1$ on a bien $f_1f_2 \underset{a}{\sim} g_1g_2$.

3. Supposons que $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ et que ces deux fonctions ne s'annulent pas sur $I \setminus \{a\}$. Alors, comme dans les cas précédents,

$$\exists \eta_1 > 0 \ \forall x \in]a-\eta_1, a+\eta_1[, \ f_1(x) = g_1(x)\varepsilon_1(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 1.$$

et

$$\exists \eta_2 > 0 \ \forall x \in]a-\eta_2, a+\eta_2[, \ f_2(x) = g_2(x)\varepsilon_2(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 1.$$

En posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ on obtient

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \frac{\varepsilon_1(x)}{\varepsilon_2(x)}$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varepsilon_1(x)}{\varepsilon_2(x)} = 1$ Ce qui prouve que $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

□

Exercice 2.2.13. *Calculons au voisinage de 0 un équivalent des fonctions suivantes :*

1. $e^{\sin(t)} - 1$.

   Correction : *Posons* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = e^x - 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = x$, *et* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $u(t) = \sin(t)$. *On a* $f \underset{0}{\sim} g$ *et* $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 0$ *donc* $e^{\sin(t)} - 1 \underset{0}{\sim} \sin(t)$. *Or* $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. *Par transitivité,*

$$e^{\sin(t)} - 1 \underset{0}{\sim} t.$$

2. $(1+x)^\alpha - 1$.

   Correction : *On a*

$$(1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha\ln(1+x)} - 1.$$

   On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = e^x - 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = x$ *et* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $u(t) = \alpha\ln(1+t)$. *On a* $f \underset{0}{\sim} g$ *et* $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 0$. *Ainsi,*

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha\ln(1+x).$$

   Or $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$. *Donc, par transitivité*

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x.$$

3. *Soit* f *la fonction rationnelle non nulle définie par :*

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{k=p}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{k=q}^{m} b_k x^k} \quad \text{avec} \quad a_p,\ a_n,\ b_q,\ b_m \neq 0.$$

   Cherchons un équivalent en 0 *et en* $\underset{-}{+}\infty$ *de* f.

   Correction : *On a*

$$\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{0}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad \sum_{k=q}^{m} b_k x^k \underset{0}{\sim} b_q x^q.$$

   Sur $\mathbb{R}^*$ *les fonctions précédemment définies ne s'annulent pas donc*

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} = \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}.$$

   Cherchons un équivalent en $+\infty$ *de* f. *On a*

$$\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=q}^{m} b_k x^k \underset{+\infty}{\sim} b_m x^m.$$

Sur $\mathbb{R}$ les fonctions précédemment définies ne s'annulent pas donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

Finalement, en 0 une fonction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus bas degré alors qu'en $+\infty$ une fonction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus haut degré.

4. $\ln(\cos(t))$

Correction : *On a*

$$\cos(t) - 1 = \cos(t) - \cos(0) = -2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Or $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ *et* $\lim_{t\to 0} \frac{t}{2} = 0$. *Ainsi,* $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$. *Donc* $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{4}$. *Finalement,*

$$\cos(t) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{t^2}{2}.$$

Par ailleurs,

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

et en posant $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $u(t) = \cos(t) - 1$ *on a* $\lim_{t\to 0} u(t) = 0$. *D'où*

$$\ln(\cos(t)) = \ln(1 + \cos(t) - 1) \underset{0}{\sim} \cos(t) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{t^2}{2}.$$

5. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}.$$

Cherchons un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

Correction : *On a*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(1 - e^{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}}\right) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}}\right).$$

Par ailleurs,

$$\frac{-2x-1}{x^2\,(x+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-2}{x^3}.$$

Or $1 - e^y \underset{0}{\sim} y$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0$ *donc*

$$1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2\,(x+1)^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-2x-1}{x^2\,(x+1)^2}.$$

Par transitivité on a

$$1-e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-2}{x^3}.$$

De plus,

$$e^{\frac{1}{x^2}} \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{x^3}.$$

Remarque 2.2.14. *Il n'y a pas de résultats général pour une somme ou différence d'équivalents comme le montre l'exemple ci-dessous.*

Exercice 2.2.15. *Cherchons au voisinage de* 0 *un équivalent de la fonction* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$u(x) = \sin(2x) + \cos(x) - 1.$$

Correction : *On a*

$$\sin(y) \underset{0}{\sim} y \quad et \quad \lim_{x\to 0} 2x = 0 \;\Rightarrow\; \sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

De plus

$$\cos(x) - 1 = \cos(x) - \cos(0) = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Or

$$\sin(y) \underset{0}{\sim} y \quad et \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow \sin(\frac{x}{2}) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

D'où

$$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Or

$$u(x) = x\left(\frac{\sin(2x)}{x} + \frac{\cos(x)-1}{x}\right).$$

et

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x} + \frac{\cos(x)-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(2\frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{\cos(x)-1}{x}\right) = 2.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{2x} = 1.$$

D'où $u(x) \underset{0}{\sim} 2x$*. Cet exemple montre bien que la somme de deux équivalents ne donne pas le bon résultat.*

Exercice 2.2.16. *Déterminer un équivalent de* $x + \ln(x)$ *en* $+\infty$*.*
Correction : *On a*

$$x + \ln(x) = x\left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Or $\ln(x) = o(x)$ *au voisinage de* $+\infty$*. Donc* $x + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x$*.*

La méthode utilisée dans les deux derniers exemples se généralise dans le résultat suivant :

Propriété 2.2.17. *Si f et g sont deux fonctions telles que $g = o(f)$ au voisinage d'un point $a \in I$, alors $f + g \underset{a}{\sim} f$.*

Démonstration. Puisque $g = o(f)$ il existe une fonction ε telle que $g = f\varepsilon$ au voisinage de a et telle que $\lim\limits_{a} \varepsilon = 0$. Alors, au voisinage de a

$$g - f\varepsilon = g + f - f\varepsilon - f = g + f - f(\varepsilon + 1) = 0.$$

Donc, au voisinage de a

$$g + f = f(1 + \varepsilon).$$

Or $\lim\limits_{a} (1 + \varepsilon) = 1$. Finalement $f + g \underset{a}{\sim} f$. □

Exercice 2.2.18. *Déterminer un équivalent en* 0 *de* $\ln(\sin(x))$.

Correction : *On a*

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

Or $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x))$ *car* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0$. *D'où*

$$ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

Propriété 2.2.19. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a \in I$. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f = \mathcal{O}(g)$ au voisinage de a.*

Démonstration. Puisque $f \underset{a}{\sim} g$, il existe une fonction h telle que $f = gh$ au voisinage de a et $\lim_a h = 1$. Alors $\exists \eta_1 > 0\ \forall x \in]a - \eta_1, a + \eta_1[,\ f(x) = g(x)h(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ très petit. Comme $\lim_{x\to a} h(x) = 1$

$$\exists \eta_2 \geq 0\ (\eta_2 < \eta_1)\ \forall x \in [a - \eta_2, a + \eta_2],\ 1 - \varepsilon \leq h(x) \leq 1 + \varepsilon.$$

Donc la fonction h est bornée sur l'intervalle $[a - \eta_2, a + \eta_2]$. Ainsi, $f = gh$ sur $[a - \eta_2, a + \eta_2]$ et h est bornée sur $[a - \eta_2, a + \eta_2]$ donc $f = \mathcal{O}(g)$. □

Chapitre 3

Développements limités

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel. Si f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.

3.1 Formules de Taylor

Dans cette section, a et b désignent deux éléments d'un intervalle I et n est un entier naturel.

3.1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 3.1.1. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, on a :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{dt}.$$

Démonstration. Pour prouver ce résultat utilisons un raisonnement par récurrence.

Soit $\mathcal{P}_n$ l'assertion : "Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I alors $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{dt}$".

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Soit $n = 0$ et supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors la fonction f' est continue sur I et on a
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{dt}$$
et donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
- Hypothèse de récurrence (HR) : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On veut donc montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I alors
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{dt}.$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, on peut utiliser la formule d'intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{dt} &= \left[\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{dt}\\ &= -\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{dt}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{dt}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{dt}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)\\ &+ \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{dt}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{dt}\\ &= f(b) \quad \text{par (HR).}\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 3.1.2. *Montrez que* $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$

Correction : *On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction cosinus à l'ordre 2 sur l'intervalle* $[0, x]$. *On obtient*

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos^{(3)}(t)\,\mathrm{dt} \quad (3.1)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t)\,\mathrm{dt}. \quad (3.2)\end{aligned}$$

Or la fonction sinus est positive sur $[0, \pi]$ *et elle est négative sur* $[-\pi, 0]$. *Ainsi,*

$$\forall x \in [-\pi, 0] \quad \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t)\,\mathrm{dt} = -\int_x^0 \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t)\,\mathrm{dt} \geq 0$$

et

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t)\,\mathrm{dt} \geq 0.$$

D'où

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t) \,\mathrm{d}t \geq 0.$$

Finalement

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \ \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

3.1.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 3.1.3. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a, b]$, on a :*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à la fonction f donne

$$\begin{aligned} \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| &= \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}t \right| && (3.3) \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t. && (3.4) \end{aligned}$$

On utilise une technique de changement de variable. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie par

$$\varphi(u) = a + (b-a)u$$

On a $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. La formule du changement de variable donne

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} g(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(\varphi(u))\varphi'(u) \,\mathrm{d}u$$

où $g(t) = \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right|$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) \,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{(b-\varphi(u))^n}{n!} f^{(n+1)}(\varphi(u))(b-a) \,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \left| \frac{(b-a-u(b-a))^n}{n!} f^{(n+1)}(\varphi(u))(b-a) \right| \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \left| \frac{(b-a)^n(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(\varphi(u))(b-a) \right| \mathrm{d}u \\ &= |b-a|^{n+1} \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+(b-a)u) \right| \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Or par hypothèse,

$$\sup_{x\in[a,b]} f^{(n+1)}(x) = \sup_{u\in[0,1]} f^{(n+1)}(a+(b-a)u) = M.$$

D'où

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt} \leq M\,|b-a|^{n+1} \int_0^1 \left|\frac{(1-u)^n}{n!}\right| \mathrm{du}.$$

De plus, $\forall u \in [0,1]$, $(1-u)^n \geq 0$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt} &\leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n\,\mathrm{du}\\ &= M\frac{|b-a|^{n+1}}{n!}\frac{1}{n+1}\left[(-1)(1-u)^{n+1}\right]_0^1\\ &= M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

□

Exercice 3.1.4. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6}\right| \leq \dfrac{x^4}{24}$.

Correction : *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 donne*

$$\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right| \leq \frac{|x|^4}{4!}$$

et donc

$$\left|\sin(x) - x - \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{x^4}{24}.$$

3.1.3 Formule de Taylor–Young

La formule de Taylor–Young permet de calculer le développement limité à l'ordre n de fonctions suffisaments régulières. Elle est capitale comme on le verra par la suite.

Théorème 3.1.5. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, il existe une fonction ε définie sur I telle que :*

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration. Démontrons la formule de Taylor–Young par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}_n$ l'assertion : "Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, il existe une fonction ε définie sur I telle que : $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x -$

$a)^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$." Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n=0$, si la fonction f est continue sur I alors en posant $\varepsilon(x)=f(x)-f(a)$ on a $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ et $f(x)=f(a)+\varepsilon(x)$.

Hypothèse de récurrence (HR) : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Supposons que $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors $f'\in\mathcal{C}^n(I)$. D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
f'(t)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-a)^k}{k!}f'^{(k)}(a)+(t-a)^n\varepsilon_1(t)\quad\text{avec}\quad\lim_{t\to a}\varepsilon_1(t)=0\\
&=f'(a)+(t-a)f^{(2)}(a)+\frac{(t-a)^2}{2}+f^{(3)}(a)+\cdots+\frac{(t-a)^n}{n!}f'^{(n)}(a)+(t-a)^n\varepsilon_1(t).
\end{aligned}$$

On intègre l'égalité précédente entre a et x et on obtient

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(a)+\int_a^x\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-a)^k}{k!}f'^{(k)}(a)\right)(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^x(t-a)^n\varepsilon_1(t)\,\mathrm{d}t\\
&=f(a)+\int_a^x\left(f'(a)+(t-a)f''(a)+\cdots+\frac{(t-a)^n}{n!}f'^{(n)}(a)\right)(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^x(t-a)^n\varepsilon_1(t)\,\mathrm{d}t\\
&=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\cdots+f'^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\\
&+f'^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\int_a^x(t-a)^n\varepsilon_1(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}}\displaystyle\int_a^x(t-a)^n\varepsilon_1(t)\,\mathrm{d}t$. Il reste à montrer que $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$. Il faut donc montrer que

$$\forall\widetilde{\varepsilon}>0\ \exists\widetilde{\eta}>0\ \forall x\in]a-\widetilde{\eta},a+\widetilde{\eta}[\ |\varepsilon(x)|\leq\widetilde{\varepsilon}.$$

Soit $\widetilde{\varepsilon}>0$. Comme $\lim_{t\to a}\varepsilon_1(t)=0$

$$\forall\delta>0\ \exists\eta>0\ |t-a|\leq\eta\Rightarrow|\varepsilon_1(t)|\leq\delta.$$

Posons $\widetilde{\eta}=\eta$ et $\delta=\widetilde{\varepsilon}$. Ainsi,

$$|\varepsilon(x)|\leq\left|\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\right|\int_a^x\eta^n\delta=\frac{1}{\widetilde{\eta}^{n+1}}\widetilde{\eta}^n\delta\widetilde{\eta}=\delta\leq\widetilde{\varepsilon}$$

ce qui prouve que $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$. Finalement, si $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$ on a montré que

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+(x-a)^{n+1}\varepsilon(x)\quad\text{avec}\quad\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$.
$\square$

3.2 Définitions, exemples

3.2.1 Développement limité au voisinage de 0

Définition 3.2.1. *Une fonction f admet un développement limité l'ordre n au voisinage de 0, ou un développement limité à l'ordre n en 0, s'il existe des réels a_0, a_1, $\cdots$, a_n et une fonction ε définie sur $\mathcal{D}_f$ tels que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \tag{3.5}$$

Remarque 3.2.2. *La relation (3.5) est équivalente à*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = o(x^n)$$

ce qui s'écrit aussi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Exemple 3.2.3.

1. *La fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x)$$

admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 puisqu'en posant :

$$\forall x \in]-1,1[\ \ \varepsilon(x) = \ln(1+x)$$

on a

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. *La fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. En effet,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Alors,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) = -\dfrac{x}{1-x}$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

3. *Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle contenant 0, alors la formule de Taylor-Young prouve qu'elle admet un développement limité à l'ordre n en 0 qui s'écrit :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Propriété 3.2.4. *Si f est une fonction pour laquelle il existe deux $(n+1)$-listes de réels $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$ vérifiant :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n), \tag{3.6}$$

alors on a $(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (b_0, b_1, \cdots, b_n)$.

Démonstration. D'après (3.6) on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n \varepsilon_2(x) \tag{3.7}$$

et

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Pour prouver l'égalité des listes $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$ raisonnons par l'absurde en les supposant différentes. Supposons qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \neq b_p$. D'après (3.7)

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k + a_p x^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x) = \sum_{k=0}^{p-1} b_k x^k + b_p x^p + \sum_{k=p+1}^{n} b_k x^k + x^n \varepsilon_2(x)$$

et donc $\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$

$$a_p x^p = b_p x^p$$

ce qui donne $a_p = b_p$. Cela est contradictoire avec la définition de l'entier $p \in \mathbb{N}$. $\square$

Définition 3.2.5. *Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, alors le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ s'appelle partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en 0 ou, plus simplement, développement limité de f à l'ordre n en 0.*

Corollaire 3.2.6. *Si f est une fonction admettant $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ comme développement limité à l'ordre n en 0, alors f admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre $p \leq n$ dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.*

Démonstration. Puisque f admet un développement limité à l'ordre n en 0 on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui s'écrit aussi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Posons $\varepsilon_1(x) = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)$. On observe que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + x^p \varepsilon_1(x)$$

ce qui prouve que f admet un développement limité à l'ordre p. □

Corollaire 3.2.7. *Soit f une fonction admettant au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.*

Si f est paire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances paires de x.

Si f est impaire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances impaires de x.

Démonstration. Puisque f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Si f est paire on a $\forall x \in \mathcal{D}_f$

$$f(x) = f(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + (-1)^n x^n \varepsilon(-x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(-x) = 0.$$

L'unicité du développement limité entraine

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k(-1)^k = a_k.$$

Ainsi, le polynôme P ne contient que des puissances paires de x. De même, en supposant que f est impaire, on a $\forall x \in \mathcal{D}_f$

$$f(-x) = -f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + (-1)^n x^n \varepsilon(-x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(-x) = 0.$$

Par unicité du développement limité on obtient

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k(-1)^k = -a_k.$$

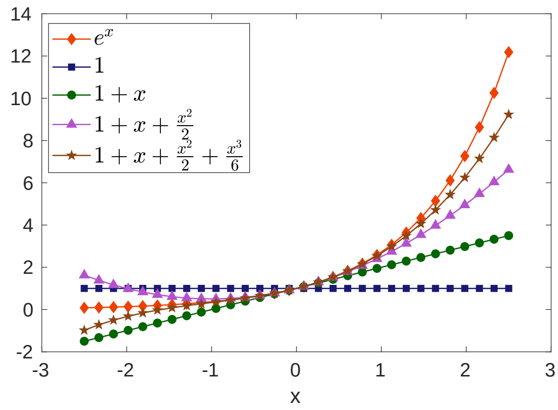
ce qui prouve que le polynôme P ne contient que des puissances impaires de x. □

3.3 Développements limités en 0 des fonctions élémentaires

Les fonctions élémentaires suivantes étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elles possèdent un développement limité à tout ordre en 0, développement limité que l'on peut déterminer à l'aide de la formule de Taylor–Young :

- La fonction exponentielle :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$



- Les fonctions hyperboliques :

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \mathrm{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

On rappelle que les fonctions hyperboliques ch et sh sont définies par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

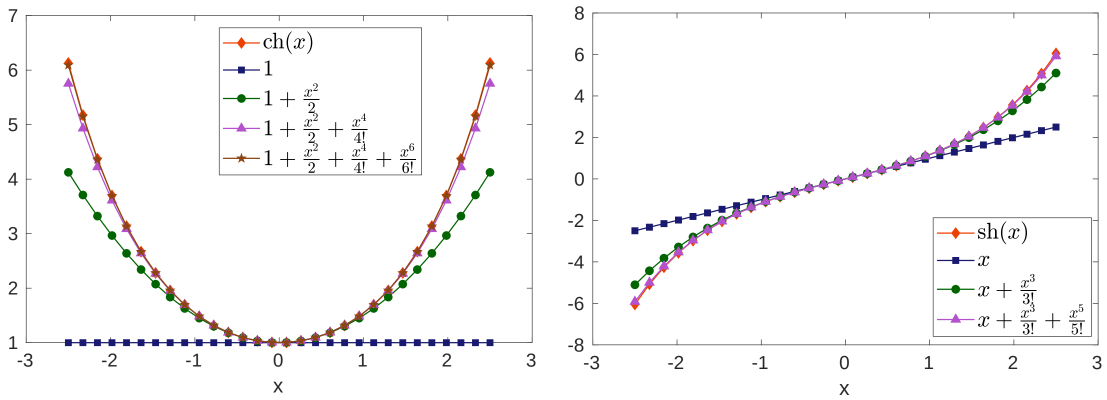
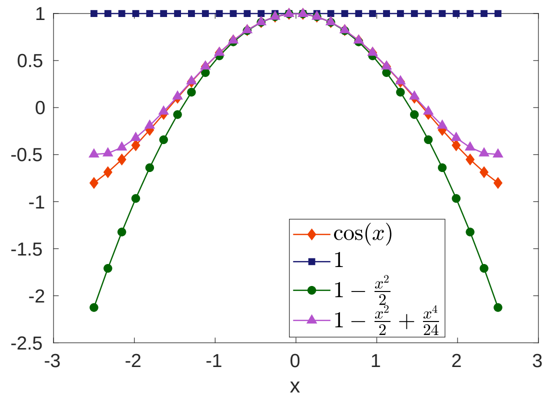
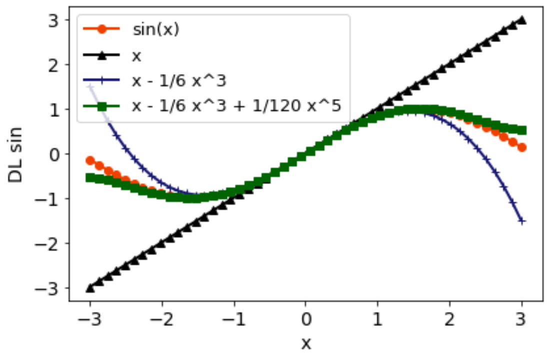


FIGURE 3.1 – Développement limités des fonctions hyperboliques ch et sh

- Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$





- La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

- Pour α un réel quelconque, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ possède au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n qui s'écrit :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x + o(x^n)$$

Exercice 3.3.1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.*

Correction : On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{2+x-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)} \tag{3.8}$$

Posons $h = x-2$. Alors, au voisinage de 2 on obtient $h \to 0$. Ainsi, chercher un développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1+\frac{x-2}{2}}$ au voisinage de 2 est équivalent à chercher un développement limité de $h \mapsto \dfrac{1}{1+\frac{h}{2}}$ au voisinage de 0. D'après le cours, le développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0 s'écrit

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3).$$

En remplacant u par $\frac{h}{2}$ on obtient au voisinage de 0

$$\frac{1}{1+\frac{h}{2}} = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o\left(\frac{h^3}{8}\right).$$

Finalement en utilisant (3.8) on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x-2}{2}+\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(x-2)^3}{8}+o\left(\frac{(x-2)^3}{8}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+o\left(\frac{(x-2)^3}{16}\right). \end{aligned}$$

Or

$$o\left(\frac{(x-2)^3}{16}\right)=o((x-2)^3).$$

D'où

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+o\left((x-2)^3\right).$$

Remarque 3.3.2. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0, la formule de Taylor–Young donne*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Ainsi, la fonction f possède un développement limité à l'ordre n en x_0 dont la partie régulière est

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Propriété 3.3.3. *Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition. Si f admet au voisinage de x_0 un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ alors*

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x-x_0)^k=\mathcal{O}((x-x_0)^n)$$

Réciproquement si, en x_0, la fonction f vérifie une relation du type :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+\mathcal{O}((x-x_0)^{n+1}),$$

alors elle admet au voisinage de x_0 un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$.

Démonstration. Supposons que f admet au voisinage de x_0 un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$. Alors,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

On a alors
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k = \mathcal{O}((x - x_0)^n)$$
Par définition il existe une fonction h bornée au voisinage de x_0 telle que
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k = h(x)(x - x_0)^n$$
et donc
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - x_0)^k = h(x)(x - x_0)^n + a_n (x - x_0)^n = (h(x) + a_n)(x - x_0)^n.$$
Or la fonction $h(x) + a_n$ est bornée au voisinage de x_0 ce qui prouve que
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - x_0)^k = \mathcal{O}((x - x_0)^n).$$
Réciproquement, supposons que en x_0 la fonction f vérifie
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1}).$$
Donc il existe une fonction h bornée au voisinage de x_0 telle que
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k = h(x)(x - x_0)^{n+1} = h(x)(x - x_0)^n (x - x_0).$$
Posons $\varepsilon(x) = h(x)(x - x_0)$. Alors, $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ ce qui prouve que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$
$\square$

3.3.1 Développement limité à droite et à gauche

Définition 3.3.4. *On dit qu'une fonction f admet un développement limité à droite (respectivement à gauche) à l'ordre n au voisinage de x_0 si la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap [x_0, +\infty[$ (respectivement à $\mathcal{D}_f \cap]-\infty, x_0]$) admet un développement limité à l'ordre n en x_0.*

Propriété 3.3.5. *Soit f une fonction définie sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. Supposons que*
$$\exists h > 0 : [x_0 - h, x_0 + h] \backslash x_0 \subset \mathcal{D}_f$$
alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si, et seulement si, la fonction f admet des développements limités à droite et à gauche à l'ordre n en

x_0 et les coefficients de ces derniers développements limités sont égaux.

Démonstration. Supposons que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0. Soit $\eta > 0$

$$\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

La restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap [x_0, +\infty[$ et $\mathcal{D}_f \cap]-\infty, x_0[$ est définie au voisinage de x_0 donc la fonction f admet des développements limités à droite et à gauche à l'ordre n en x_0. Réciproquement supposons que la fonction f admet des développements limités à droite et à gauche à l'ordre n au voisinage de x_0 avec des coefficients égaux. Alors $\exists \eta_1 > 0$ $\exists \eta_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in [x_0, x_0+\eta_1[\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

$$\forall x \in]x_0-\eta_2, x_0]\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Alors la fonction ε définie sur $\mathcal{D}_f$ par

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \varepsilon_2(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

tend vers 0 et en posant $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$ on obtient

$$\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

ce qui prouve que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0. □

Exercice 3.3.6. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|^3}$ n'admet pas un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.*

Correction : *On sait que*

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{si } x \geq 0 \\ -x & \textit{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^3} & \textit{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{1-x^3} & \textit{si } x < 0. \end{cases}$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on a au voisinage de 0

$$(1+u)^{-1} = 1 - u + o(u).$$

En posant $u = x^3$ qui tend vers 0 au voisinage de 0 on obtient

$$(1 + x^3)^{-1} = 1 - x^3 + o(x^3).$$

De même, sur $\mathbb{R}_-^*$ on a au voisinage de 0

$$(1 - u)^{-1} = 1 + u + o(-u).$$

On pose $u = x^3$ et on obtient

$$(1 - x^3)^{-1} = 1 + x^3 + o(x^3).$$

Ainsi, la fonction f admet un développement limité à droite et à gauche au voisinage de 0. Néanmoins, les parties régulières de ces développements limités étant différentes, f n'admet pas de développement limité au voisinage de 0.

3.3.2 Dérivabilité et développement limité

Développement limité à l'ordre 0

Soit f une fonction admettant une limite réelle ℓ en $x_0 \in \mathbb{R}$. En définissant la fonction ε sur $\mathcal{D}_f$ par $\varepsilon(x) = f(x) - \ell$, on obtient :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \; f(x) = \ell + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

La fonction f admet donc un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de x_0.

Réciproquement. Soit f une fonction possédant un développement limité à l'ordre 0 en $x_0 \in \mathbb{R}$, pour laquelle on peut donc trouver un réel a_0 et une fonction ε vérifiant :

$$f(x) = a_0 + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors f possède en x_0 une limite égale à a_0.

- De plus, si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, la fonction f est continue en x_0. En effet, $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0$ et $f(x_0) = a_0$ donc $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Si $x_0 \notin \mathcal{D}_f$, on peut prolonger f par continuité en posant $f(x_0) = a_0$.

Le résultat suivant est très utile en pratique :

Propriété 3.3.7. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. Alors f est continue en x_0 si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0. Précisément, dans ce cas, au voisinage de x_0*

$$f(x) = f(x_0) + o(1).$$

Démonstration. En effet, si f est continue en a on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On définit la fonction ε par $\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0)$. Alors $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + 1 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui se réécrit au voisinage de x_0 par

$$f(x) = f(x_0) + o(1).$$

□

Développement limité à l'ordre 1

Propriété 3.3.8. *Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. Alors, f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f possède un développement limité à l'ordre 1 en x_0. Dans ce cas :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0).$$

Soit f une fonction dérivable en x_0. Alors par définition,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

En définissant la fonction ε par :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\} \quad \text{et} \quad \varepsilon(x_0) = 0.$$

On a $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x).$$

La fonction f admet donc un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0.

Réciproquement Soit f admettant un développement limité à l'ordre 1 en x_0, pour laquelle on peut donc trouver des constantes a_0 et a_1 telles que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + o(x-x_0).$$

alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$. En effet, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$$

Alors

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{a_0 + a_1(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x) - a_0}{x-x_0} = a_1 + \varepsilon_1(x) \tag{3.9}$$

avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$. Donc

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a_1 = f'(x_0).$$

On peut remarquer que l'équation (3.9) peut également s'écrire avec la notation de landau

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a_1 + o(1).$$

3.4 Opérations sur les développements limités

L'utilisation de la formule de Taylor–Young n'est pas en général la meilleure méthode pour calculer le développement limités d'une fonction f. En effet, le calcul des dérivées successives de f au sein de la formule de Taylor–Young est souvent pénible. On va présenter dans cette section des règles de calcul (somme, produit, quotient, composition) permettant de calculer efficacement des développements limités. Comme on l'a vu au préalable, les calculs des développements limités s'effectuent généralement au voisinage de 0. Dans cette configuration, nous présentons dans un premier temps les règles de calculs au voisinage de 0.

3.4.1 Somme et produit de développements limités

Propriété 3.4.1. *Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ ainsi que f et g deux applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ admettant en 0 des développements limités à l'ordre n qui s'écrivent :*

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o(x^n).$$

Alors, les fonctions $f+g$ et fg admettent au voisinage de 0 des développements limités à l'ordre n qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= P(x) + Q(x) + o(x^n) \\ f(x)g(x) &= R(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

où R est le polynôme obtenu en ne gardant, dans le produit PQ, que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Démonstration. Par hypothèse il existe des fonctions ε_1 et ε_2 définies sur $\mathcal{D}$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) &= P(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0 \\ \forall x \in \mathcal{D},\ g(x) &= Q(x) + x^n \varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Cela montre que $f+g$ admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n donné par $P+Q$. De plus, $\forall x \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (P(x) + x^n \varepsilon_1(x))\,(Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)) \\ &= P(x)Q(x) + x^n \varepsilon_1(x) Q(x) + P(x) x^n \varepsilon_2(x) + x^{2n} \varepsilon_1(x) \varepsilon_2(x) \\ &= P(x)Q(x) + x^n \left(\varepsilon_1(x)Q(x) + \varepsilon_2(x)P(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right). \end{aligned}$$

Soit R le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit PQ que les termes de degré inférieur ou égal à n. Alors

$$\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)Q(x) = R(x) + x^{n+1} T(x) \quad \text{où} \quad \deg(T) \leq n-1.$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D}\ f(x)g(x) &= R(x)+x^{n+1}T(x)+x^n\left(\varepsilon_1(x)Q(x)+\varepsilon_2(x)P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right)\\ &= R(x)+x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

où $\varepsilon(x)=xT(x)+\varepsilon_1(x)Q(x)+\varepsilon_2(x)P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$. Or

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

On en déduit que la fonction fg admet R comme développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. □

Exercice 3.4.2. *1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-e^x$.*

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de g définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$.

Correction :

1. *Au voisinage de 0*

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$$

et

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

Par somme de développements limités on obtient au voisinage de 0

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3).$$

2. *Au voisinage de 0 on a*

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)=P(x)+o(x^4)\quad \text{où}\quad P(x)=1-\frac{x^2}{2}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)=Q(x)+o(x^3)$$

avec $Q(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3$. D'après le cours, la partie régulière du développement limité de g est le polynôme noté R obtenu en ne gardant dans le produit PQ que les termes de degré inférieur ou égal à 3. Ainsi,

$$g(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3).$$

3.4.2 Quotient de développements limités

Propriété 3.4.3. *Soit u une fonction telle que $\lim_0 u = 0$. Si u admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.*

Exercice 3.4.4. *1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de*

$$f(x) = \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction g définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par

$$g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Correction :

1. *Dans un premier temps déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.*

$$x \in \mathcal{D}_f \iff 1 + x + \frac{x^2}{2} \neq 0 \tag{3.10}$$

Le trinôme du second degré définit par (3.10) admet comme discriminant $\Delta = -1 < 0$. Ce trinôme est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De plus,

$$f(x) = \frac{1}{1 - (-x - \frac{x^2}{2})}$$

Posons $u(x) = -x - \dfrac{x^2}{2}$. On a $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$. Comme la fonction u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$, la fonction u admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor–Young. En utilisant la règle du quotient de développements limités, la fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0. On sait que la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 donné par

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(u) \quad \textit{avec} \quad \lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + u(x) + (u(x))^2 + (u(x))^2\varepsilon(u(x)) \quad \textit{avec} \quad \lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0. \\ &= 1 + \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(-x - \frac{x^2}{2}\right)\varepsilon(u(x)) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{4} + \left(-x - \frac{x^2}{2}\right)\varepsilon(u(x)) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + x\widetilde{\varepsilon}(u(x)) \end{aligned}$$

où $\widetilde{\varepsilon}(u(x)) = x^2 + \dfrac{x^3}{4} - \varepsilon(u(x)) - \dfrac{x}{2}\varepsilon(u(x))$. *On remarque que* $\lim_{x\to 0} \widetilde{\varepsilon}(u(x)) = 0$ *et donc*

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x).$$

2. *On a*

$$g(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - u(x)}$$

où $u(x) = 1 - \cos(x)$. *La fonction* u *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. *D'après la formule de Taylor–Young,* u *admet un développement limité à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0. *De plus,* $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$. *Ainsi, par la règle de quotient de développements limités, la fonction* g *possède un développement limité à l'ordre* 4. *Par ailleurs, au voisinage de* 0*, la fonction* $x \mapsto \cos(x)$ *admet le développement limité à l'ordre* 4 *suivant :*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6\varepsilon_1(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

ce qui s'écrit aussi

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - x^6\varepsilon_1(x).$$

Par ailleurs, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ *admet le développement limité à l'ordre* 4 *suivant au voisinage de* 0

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^4\varepsilon(u) \quad \textit{où} \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0. \tag{3.11}$$

En utilisant la règle des développements limités d'un produit de développements limités on obtient :

$$(1 - \cos(x))^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^6)$$

En injectant l'expression de $u(x)$ *dans* (3.11) *on obtient*

$$\frac{1}{1-u} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^6) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^6\varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

D'où

$$g(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4\widetilde{\varepsilon}(x) \quad \textit{avec} \quad \widetilde{\varepsilon}(x) = x^2\varepsilon(x) \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to 0} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0.$$

3. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$. *On a*

$$f(x) = \frac{1}{1 - u(x)} \quad \textit{avec} \quad u(x) = -e^x$$

3.4.3 Intégration des développements limités

Propriété 3.4.5. *Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue possédant en 0 un développement limité à l'ordre n qui vaut $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Si F est une primitive de f, alors elle admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 qui est :*

$$F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Démonstration. On va tout d'abord considérer le cas où $f : I \mapsto \mathbb{R}$ possède un développement limité nul au voisinage de 0. On va montrer que la primitive de f notée F possède un développement limité à l'ordre $n+1$ nul au voisinage de 0, c'est à dire que $F(x) = o(x^{n+1})$ au voisinage de 0. Par hypothèse, il existe une fonction φ définie sur I telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = x^n \varphi(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varphi = 0. \tag{3.12}$$

Puisque $\lim_{x \to 0} \varphi = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in [\eta, \eta] \cap I \;\; |\varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui se réécrit aussi

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in [-\eta, \eta] \cap I \;\; |f(x)| \leq \varepsilon \left| x^n \right|.$$

Alors

$$\forall t \in [0, x] \text{ tel que } |x| \leq \eta \; |f(t)| \leq \varepsilon |t^n| \leq \varepsilon |x|^n.$$

Il s'ensuit que $\forall t \in [0, x]$ tel que $|x| \leq \eta$

$$|F(x)| = \left| \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt} \right| \leq \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{dt} \leq \int_0^x \varepsilon |x|^n\,\mathrm{dt} \leq \varepsilon |x|^{n+1}.$$

Ainsi

$$\forall x \in [-\eta, \eta] \; \frac{F(x)}{|x|^{n+1}} \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que $\dfrac{F(x)}{|x|^{n+1}}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi, $F(x) = o(x^{n+1})$ au voisinage de 0.

Revenons désormais au cas général et supposons que f admet un développement limité à l'ordre n qui vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Par hypothèse on a au voisinage de 0

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n). \tag{3.13}$$

En intégrant l'égalité (3.13) entre 0 et x on obtient

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n) \right) \mathrm{dt} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \right]_0^x + \int_0^x o(t^n)\,\mathrm{dt}.$$

Or

$$\int_0^x o(t^n)\,\mathrm{dt} = \int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{dt} \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Ainsi,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{dt} \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Comme $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

$$\forall \delta > 0\ \exists \eta > 0\ \forall t \in [-\eta, \eta]\ |\varepsilon(t)| \leq \delta. \tag{3.14}$$

Ainsi, $\forall t \in [-\eta, \eta]$ on a

$$\int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{dt} \leq \int_0^x |t^n|\,|\varepsilon(t)|\,\mathrm{dt} \leq \int_0^x \eta^n \delta\,\mathrm{dt}.$$

Or $[-\eta, \eta] \subset [0, x]$ ce qui fait que

$$\int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{dt} \leq \left|x^{n+1}\right| \delta.$$

Finalement,

$$\int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{dt} = o(\left|x^{n+1}\right|)$$

On en déduit que

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(\left|x^{n+1}\right|\right).$$

D'où

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + F(0) + o\left(\left|x^{n+1}\right|\right).$$

□

Exemple 3.4.6. *Dans les exemples ce-dessous on montre qu'on peut retrouver le développementlimités de certaines fonction en intégrant le développement limités d'autres.*

1. *Ecrivons le développement limité à l'ordre n de $\dfrac{1}{1+x}$:*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Or $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. Donc, le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ est donné par

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

2. *Ecrivons le développement limité à l'ordre n de* $\dfrac{1}{1+x^2}$ *:*

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Or $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *est une primitive de* $x \mapsto \arctan(x)$*. Ainsi, le développement limité de* $x \mapsto \arctan(x)$ *est donné par*

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

3.5 Applications

3.5.1 Recherche d'équivalents

Quand une fonction f admet en x_0 un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k (x-x_0)^k \quad \textit{avec} \quad a_p \neq 0$$

alors :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p (x-x_0)^p.$$

En effet,

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^p)$$

et

$$\frac{f(x)}{a_p(x-x_0)^p} = 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-x_0) + \frac{a_{p+2}}{a_p}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{a_{n+p}}{a_p}(x-x_0)^n.$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{a_p(x-x_0)^p} = 1.$$

Exercice 3.5.1. *1. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = x\,(1+\cos(x)) - 2\tan(x).$$

Correction : On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R} \; f(-x) = -x(1+\cos(x)) + 2\tan(x) = -f(x).$$

Ainsi, la fonction f est impaire. La partie régulière du développement limité de f ne contient que des puissances impaires de x. De plus la fonction $x \mapsto \cos(x)$ possède au voisinage de 0 le développement limité suivant à l'ordre 4 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

Donc,

$$1+\cos(x) = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^4).$$

Ainsi,

$$x\,(1+\cos(x)) = 2x - \frac{x^3}{2} + o(x^5).$$

De plus,

$$\tan(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}.$$

Le dévéloppement limité de $x \mapsto \sin(x)$ à l'ordre 4 est donné par

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-(1-\cos(x))} = \frac{1}{1-u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = 1-\cos(x)$$

Or le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1-u} = (1-u)^{-1}$ est donné par :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3).$$

Ainsi, le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est donné par

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + (1-\cos(x)) + (1-\cos(x))^2 + (1-\cos(x))^3 + o((1-\cos(x))^3) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - o(x^4) + \left(\frac{x^2}{2} - o(x^4)\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - o(x^4)\right)^3 \\
&+ o\left(\left(\frac{x^2}{2} - o(x^4)\right)^3\right).
\end{aligned}$$

Le développement limité d'un produit de développements limités est obtenu en ne considérant dans le produit que les termes de degré inférieur ou égal à 3. Dans ce contexte, le développement limité de $x \mapsto (1-\cos(x))^2$ est donné par

$$\begin{aligned}
(1-\cos(x))^2 &= -x^2 o(x^4) + (o(x^4))^2 \\
&- o(x^6) + o(x^8) \\
&= o(x^6).
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
(1-\cos(x))^3 &= \left(\frac{x^2}{2} - o(x^4)\right) o(x^6) \\
&= \frac{x^2}{2} o(x^6) - o(x^{10}) \\
&= o(x^8).
\end{aligned}$$

De plus,

$$o\left(\left(\frac{x^2}{2} - o(x^4)\right)^3\right) = o\left(\frac{x^6}{8} + o(x^8)\right) = o(x^6).$$

Finalement

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

On obtient alors le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \tan(x)$

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} + xo(x^4) - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3!}o(x^4) + o(x^4) + \frac{x^2}{2}o(x^4) + (o(x^4))^2 \\
&= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).
\end{aligned}$$

On en conclue que le développment limité au voisinage de 0 de f s'écrit

$$f(x) = -\frac{7x^3}{6} + o(x^4).$$

Finalement

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{7x^3}{6}.$$

3.5.2 Etude de tangentes

L'existence d'une tangente non verticale au point d'abcisse x_0 du graphe d'une fonction f est équivalente à la dérivabilité de f en x_0, c'est à dire à l'existence d'un développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de x_0. Dans ce cas, l'étude du signe de :

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)$$

permet de préciser la position de la courbe par rapport à la tangente.

Méthode : Supposons qu'une fonction f possède en 0 un développement limité à l'ordre 2. Alors

$$f(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)^2 a_2 + o((x - x_0)^2) \quad \text{avec} \quad a_2 \neq 0.$$

Alors la tangente est la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ et, au voisinage de x_0, la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de a_2, car :

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) = (x - x_0)^2 a_2 + o((x - x_0)^2) \underset{x_0}{\sim} a_2(x - x_0)^2.$$

Plus généralement, si en x_0, on dispose d'un développement limité à un ordre $p \geq 2$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_p(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p) \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0$$

alors la position de la courbe par rapport à cette tangente est déterminée de la manière suivante. On note k le degré du premier coefficient non nul dans le développement limité à partir du degré 2 et on note a_k son coefficient.

- Si k est pair et $a_k > 0$ alors la courbe est au dessus de sa tangente.
- Si k est pair et $a_k < 0$ alors la courbe est en dessous de sa tangente.
- Si k est impair et $a_k > 0$ alors la courbe traverse sa tangente en passant au dessus.
- Si k est impair et $a_k > 0$ alors la courbe traverse sa tangente en passant en dessous.

Exercice 3.5.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

Déterminer la position relative de la tangente à la courbe représentative de f au point 0.

Correction : *Le développement limité de $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0 est donné par :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

De plus,

$$f(x) = \frac{1}{2+(e^x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{e^x-1}{2}\right)}.$$

Donc le développement limité de $x \mapsto \dfrac{e^x-1}{2}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est donné par

$$\frac{e^x-1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

Par ailleurs le développement limité de $u \mapsto (1+u)^{-1}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 est donné par :

$$(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3).$$

En remplaçant u par le développement limité de $\dfrac{e^x-1}{2}$ on obtient au voisinage de 0

$$u \underset{0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

Or le développement limité d'un produit de développements limités de degré 3 est obtenu en ne considérant dans le produit que les termes de degré inférieur ou égal à 3. Finalement, on obtient

$$u^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$
$$u^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

Finalement, au voisinage de 0 *la fonction* f *admet le développement limité suivant :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \end{aligned} \tag{3.15}$$

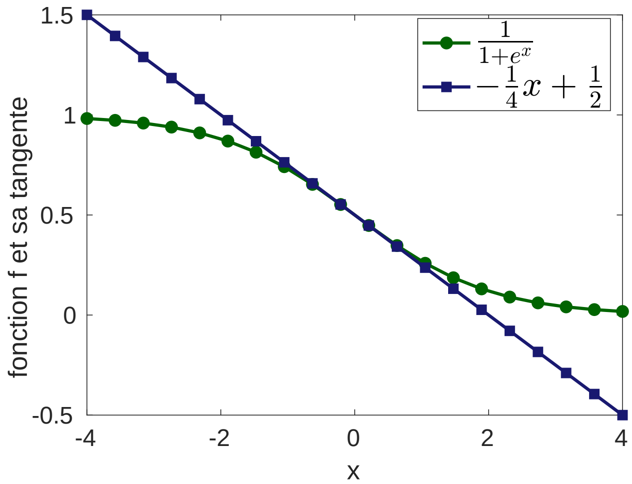
Ainsi, l'équation de la tangente à f *au point* 0 *notée* g *est donnée par*

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

La position de la tangente par rapport à la courbe représentative de f *est donné par l'étude du signe de* $f - g$*. On a*

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{1}{48}x^3$$

La courbe représentative de la fonction f *sera au dessus de la tangente en* 0 *pour* $x > 0$ *et sera en dessous de la tangente en* 0 *pour* $x < 0$*.*



Chapitre 4

Polynômes

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

4.1 Définition et premières propriétés

Définition 4.1.1. *On appelle polynôme à une indéterminée à coefficient dans $\mathbb{K}$ toute expression du type*

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où $(a_k)_{k\in\mathbb{K}}$ sont des coefficients réels ou complexes. De plus, le degré du polynôme A, noté $\deg(A)$ *est définit par*

$$\deg(A) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} & si\ A \neq 0 \\ -\infty & si\ A = 0. \end{cases}$$

Lorsque le coefficient $a_n \neq 0$ alors il s'appelle coefficient dominant du polynôme.

Propriété 4.1.2. *Etant donnés deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$, on a :*

1. $\deg(A+B) = \max(\deg(A), \deg(B))$,
2. $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$

Démonstration. 1. Le cas où $A = B = 0$ est évident. En effet, dans ce cas, $A + B = 0$ et donc $\deg(A+B) = -\infty = \max(\deg(A), \deg(B)) = -\infty$. Revenons désormais au cas général où $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tels que $\deg(A) = p \in \mathbb{N}^*$, $\deg(B) = q \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = \max(p, q) \in \mathbb{N}$. On a alors

$$A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

et

$$A + B = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k + \sum_{k=0}^{q} b_k X^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k.$$

Ainsi, $\deg(A+B) = n = \max\{\deg(A), \deg(B)\}$.

2. Comme dans le cas précédent, le cas où $A = B = 0$ est évident. En effet, dans ce cas, $AB = 0$ et donc $\deg(AB) = -\infty = \deg(A) + \deg(B)$. Supposons maintenant que $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(A) = p \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(B) = q \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$AB = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{q} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) X^k.$$
Ainsi, $\deg(AB) = p + q$.

□

Propriété 4.1.3. *L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

Démonstration. On rappelle que $\mathbb{K}_n[X] = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k,\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}\right\}$. Le polynôme nul est élément de $\mathbb{K}_n[X]$. De plus, pour $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X] \times \mathbb{K}_n[X]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}$ on a
$$(\alpha P + \beta Q)(X) = \alpha P(X) + \beta Q(X) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) X^k = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k X^k$$
avec $\gamma_k := \alpha a_k + \beta b_k$. Ainsi, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. □

Propriété 4.1.4. *Soit* $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ \ PQ = 0 \ \Rightarrow\ (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$

Démonstration. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$. Raisonnons par contraposition et supposons que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Or
$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \neq 0.$$
Donc le polynôme PQ ne peut être le polynôme nul. □

4.2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 4.2.1. *Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$. On dit que A divise B si*
$$\exists C \in \mathbb{K}[X]\ AC = B$$

Exemple 4.2.2.
1. *Le polynôme $(X-1)(X-2)$ divise le polynôme $(X-1)^2(X-2)(X^2+X+1)$. En effet,*
$$(X-1)^2(X-2)(X^2+X+1) = (X-1)(X-2) \times R(X)$$
avec $R(X) = (X-1)(X^2+X+1)$.
2. *Le polynôme 0 est divisible par tous les polynômes mais il ne divise que lui même.*

Théorème 4.2.3. *[Division euclidienne] .*
Étant donnés deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ vérifiant

$$A = BQ + R \quad \textit{avec} \quad \deg(R) < \deg(B). \tag{4.1}$$

Q est appelé le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Démonstration. Dans cette démonstration, nous allons prouver l'unicité du couple (Q, R) vérifiant (4.1) puis nous prouverons l'existence d'un tel couple.

1. **Unicité.** Supposons par l'absurde qu'il exsite deux couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) vérifiant $Q_1 \neq Q_2$ et $Q_2 \neq R_2$ et

$$\begin{aligned} A &= BQ_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad \deg(R_1) < \deg(B) \\ A &= BQ_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad \deg(R_2) < \deg(B). \end{aligned} \tag{4.2}$$

   Alors
$$R_2 - R_1 = A - BQ_2 - (A - BQ_1) = B(Q_2 - Q_1).$$

   Ainsi,

$$\deg(R_2 - R_1) = \deg(B(Q_2 - Q_1)) = \deg(B) + \deg(Q_2 - Q_1) \geq \deg(B).$$

   De plus,

$$\deg(R_2 - R_1) = \max\{\deg(R_2), \deg(R_1)\} < \deg(B)$$

   ce qui est contradictoire. D'où l'unicité du couple (Q, R).

2. **Existence.** Soient B un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(B) = m$ et $A \in \mathbb{K}[X]$ où $\deg(A) = n$ et $m \leq n$. Par définition

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k.$$

   Utilisons un raisonnement par récurrence pour prouver le résultat d'existence. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "Pour $A \in \mathbb{K}_n[X]$ et $B \in \mathbb{K}_m[X]$ il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ vérifiant $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$".

   - **Initialisation :** Pour $n = m$ on a $\deg(A) = \deg(B) = n$. Le couple $(Q, R) := (\frac{a_n}{b_n}, A - BQ)$ vérifie bien l'égalité $A = BQ + R$. De plus,

$$R = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{n} b_k X^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k - \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k.$$

     Il s'ensuit que $\deg(R) < \deg(B)$.

- **Hypothèse de récurrence :** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq m$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Comme $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ et $B \in \mathbb{K}_m[X]$ on peut écrire

$$A = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k.$$

Posons $(Q, R) = \left(\frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m}, A - BQ\right)$. On a de manière évidente $BQ + R = A$. De plus,

$$\begin{aligned} A - BQ &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \\ &= a_{n+1} X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} \sum_{k=0}^{m-1} b_k X^k - a_{n+1} X^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} \sum_{k=0}^{m-1} b_k X^k \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $A - BQ \in \mathbb{K}_n[X]$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un couple (Q_1, R_1) de polynômes tel que

$$A - BQ = BQ_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad \deg(R_1) < \deg(B).$$

Alors,

$$A = BQ + R = B\frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} + BQ_1 + R_1 = B\left(\frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m} + Q_1\right) + R_1$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \geq m$.

$\square$

4.2.1 Conjugaison

Définition 4.2.4. *Si* $A = \sum_{k=0}^{+\infty}$ *est un polynôme à coefficients complexes, on appelle conjugué de* A*, le polynôme* $\overline{A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a}_k X^k$.

Propriété 4.2.5. *Soit $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$. Alors, on a les propriétés suivantes :*

1. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$
2. $\overline{AB} = \overline{A} \times \overline{B}$
3. $A \in \mathbb{R}[X] \iff \overline{A} = A$

Démonstration. Soit $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$. Par définition,

$$\exists (a_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{C} \; \exists (b_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{C} \text{ tels que } A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \text{ et } B = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k.$$

1. Comme le conjugué d'une somme de complexe est donné par la somme des conjugués on obtient immédiatement
$$\overline{A + B} = \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k} = \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k} + \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k} = \overline{A} + \overline{B}.$$
2. De même, le conjugué d'un produit de complexes est égal au produit des conjugués donc
$$\overline{AB} = \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \times \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k} = \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k} \times \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k} = \overline{A} \times \overline{B}$$
3. A est un polynôme réel si, et seulement si,
$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \quad \text{avec} \quad (a_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{R}$$
si, et seulement si,
$$\overline{A} = A.$$

□

4.2.2 Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commus multiple (PPCM)

Propriété 4.2.6. *Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $B \neq 0$. Si Q et R sont les quotient et reste de la division euclidienne de A par B, alors les diviseurs communs à A et B sont les mêmes que les diviseurs communs à B et R.*

Démonstration. On a $A = BQ + R$ donc les diviseurs de A sont

$$A, \quad BQ + R, \quad 1.$$

De plus, $B = \dfrac{A-R}{Q}$. Alors, les diviseurs de B sont

$$\frac{1}{Q}, \quad A-R, \quad 1, \quad B.$$

Par ailleurs, $R = A - BQ$ donc les diviseurs de R sont

$$R, \quad A-BQ, \quad 1.$$

On a également, $B = \frac{A-R}{Q}$ et donc les diviseurs de B sont

$$\frac{1}{Q}, \quad A-R, \quad B, \quad 1.$$

□

Propriété 4.2.7. *[Algorithme d'Euclide] Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$. Il existe un unique polynôme D nul ou unitaire dont les diviseurs sont les diviseurs communs à A et B c'est à dire tel que l'on ait :*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \ (P|A \quad et \quad P|B) \iff P|D$$

De plus, il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.

- *Le polynôme D est appelé PGCD de A et B et noté $A \wedge B$.*
- *Le couple (U,V) est un couple de coefficients de Bézout de A et B.*

Démonstration. Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$. Montrons qu'il existe un unique polynôme D nul ou unitaire dont les diviseurs sont les diviseurs communs à A et B.

1. **Unicité :** Supposons par l'absurde qu'il existe deux polynômes D_1 et D_2 nuls ou unitaires dont les diviseurs sont les diviseurs communs à A et B. Soit P un diviseur quelconque de D_1 et D_2, diviseurs commun à A et B. Alors, $\exists C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ tels que

$$PC_1 = D_1, \quad PC_2 = D_2, \quad PC_3 = A, \quad PC_4 = B.$$

   Ainsi,

$$\frac{D_1}{C_1}C_3 = A \quad \text{et} \quad \frac{D_1}{C_1}C_4 = B, \quad D_2 = \frac{D_1}{C_1}C_2.$$

   Alors, D_1 divise A, B et D_2. Par symétrie on a aussi D_2 qui divise D_1. Finalement, on obtient $D_1 = D_2$.

2. **Existence :** Soit A un polynôme de degré n et B un polynôme de degré m. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "Pour tout $A \in \mathbb{K}_n[X]$ il existe un polynôme D dont les diviseurs sont les diviseurs communs à A et B, ainsi que U et V tels que $AU + BV = D$".
   - **Initialisation :** Si $n = m$ alors $\deg(A) = \deg(B)$. Pour $D = A$, $U = 1$ et $V = 0$ on a

$$AU + BV = D.$$

- **Hypothèse de récurrence :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Soit $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ et $B \in \mathbb{K}_m[X]$. Par le théorème de la division euclidienne

$$\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}_n[X] \times \mathbb{K}_n[X] \ A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Alors $\deg(R) < m$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme D_1 dont les diviseurs sont les diviseurs communs à B et R et il existe deux polynômes U_1 et V_1 tels que $BU_1 + RV_1 = D_1$. En utilisant la Proposition 4.2.6, les diviseurs communs à A et B sont les mêmes que les diviseurs communs à B et R. On a aussi

$$BU_1 + (A - BQ)V_1 = D_1$$

ce qui donne

$$AV_1 + B(U_1 - QV_1) = D_1.$$

- **Conclusion :** Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

□

Remarque 4.2.8. *1. Le PGCD de A et B est le plus grand des diviseurs de A et B au sens de la divisibilité.*

- *Il n'y a pas unicité des polynômes U et V, puisque si (U_0, V_0) est un couple de coefficients de Bézout de A et B, alors il en est de même du couple $(U_0 + QB, V_0 - QA)$. En effet,*

$$A(U_0 + QB) + B(V_0 - QA) = AU_0 + AQB + BV_0 - BQA = AU_0 + BV_0.$$

4.2.3 Polynômes premiers entre eux

Définition 4.2.9. *Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si $A \wedge B = 1$, c'est à dire si les seuls diviseurs communs à A et B sont les polynômes de degré 0.*

Exemple 4.2.10. *Les polynômes $A = X - 1$ et $B = X - 2$ sont premiers entre eux car le seul diviseur commum à A et B est le polynôme 1.*

Théorème 4.2.11. *[Identité de Bézout] Les polynômes A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.*

Démonstration. Supposons que les polynômes A et B sont premiers entre eux. Par définition, $A \wedge B = 1$. Ainsi, il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$. Réciproquement, s'il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$. D'après la proposition précédente, il existe un unique polynôme D nul ou unitaire dont les diviseurs sont les diviseurs communs à A et B avec $D = A \wedge B$. Alors il existe deux polynômes C_1 et C_2 tels que

$$A = C_1 D \quad \text{et} \quad B = C_2 D.$$

Ainsi,

$$AU + BV = C_1DU + C_2DV = D\,(C_1U + C_2V)\,.$$

D'où D divise $AU+BV = 1$. Ainsi, D est de degré 0. Cela prouve que les polynômes A et B sont premiers entre eux. □

Théorème 4.2.12. *[Théorème de Gauss] Étant donnés trois polynômes A, B et C, on a :*

$$(A \wedge B = 1 \quad \textit{et} \quad A \mid BC) \Rightarrow A \mid C.$$

Démonstration. Soient A, B, et C trois polynômes tels que $A \wedge B = 1$ et $A \mid BC$. Alors, il existe un polynôme D tel que $BC = AD$. Puisque $A \wedge B = 1$, d'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$. Alors, $CAU + CBV = C$. Il vient que $ACU + ADV = C$. Ainsi, $A\,(CU + DV) = C$. Finalement, A divise C. □

Chapitre 5

Fractions rationnelles

5.1 Polynômes

Définition 5.1.1. *On appelle corps des fractions rationnelles à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *l'ensemble définit par*

$$\mathcal{K} = \left\{ F = \frac{P}{Q} \quad \textit{avec} \quad (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \textit{et} \quad Q \neq 0 \right\}.$$

Un tel couple (P, Q) *s'appelle un représentant de la fraction rationnelle* F. *On définit l'addition et la multiplication de fractions rationnelles de façon naturelle. Pour* P, P_1, Q, Q_1, *et* R *des polynômes avec* $Q \neq 0$, $Q_1 \neq O$ *et* $R \neq 0$ *on a les règles de calcul suivantes :*

- $\dfrac{P}{Q} + \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{PQ_1 + P_1Q}{QQ_1}$
- $\dfrac{P}{Q} \times \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{PP_1}{QQ_1}$
- $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1} \iff PQ_1 = P_1Q$
- $\dfrac{PR}{QR} = \dfrac{P}{Q}$
- *Si* $P \neq 0$, $\left(\dfrac{P}{Q}\right)^{-1} = \dfrac{Q}{P}$.

Définition 5.1.2. *Soit* $F \in \mathcal{K}$ *une fraction rationnelle à coefficients complexes s'écrivant sous la forme* $F = \dfrac{P}{Q}$ *avec* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ *et* $Q \neq 0$. *On appelle fraction rationnelle conjuguée de* F *notée* $\overline{F}$ *la fraction rationnelle définie par*

$$\overline{F} = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}}.$$

Propriété 5.1.3. *Soient $F \in \mathbb{C}[X]$ et $G \in \mathbb{C}[X]$ deux fractions rationnelles. Alors*
$$\overline{F+G} = \overline{F} + \overline{G} \quad \text{et} \quad \overline{FG} = \overline{F}\,\overline{G}. \tag{5.1}$$

Démonstration. Puisque $F \in \mathbb{C}[X]$ et $G \in \mathbb{C}[X]$ on a
$$F = \frac{P}{Q} \quad \text{et} \quad G = \frac{P_1}{Q_1} \quad \text{où} \quad (P, P_1) \in (\mathbb{C}[X])^2 \quad \text{et} \quad (Q, Q_1) \in (\mathbb{C}^*[X])^2.$$
Ainsi
$$F + G = \frac{PQ_1 + P_1Q}{QQ_1}$$
et
$$\overline{F+G} = \overline{\frac{PQ_1 + P_1Q}{QQ_1}} = \frac{\overline{PQ_1 + P_1Q}}{\overline{QQ_1}} = \frac{\overline{PQ_1} + \overline{P_1Q}}{\overline{QQ_1}} = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}} + \frac{\overline{P_1}}{\overline{Q_1}}.$$
De plus,
$$\overline{FG} = \overline{\frac{P}{Q}\frac{P_1}{Q_1}} = \overline{\frac{P}{Q}} \times \overline{\frac{P_1}{Q_1}} = \overline{F} \times \overline{G}.$$
□

5.2 Représentant irréductible d'une fraction rationnelle

Définition 5.2.1 (Polynômes premiers entre eux)**.** *Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si les seuls diviseurs communs à A et B sont les polynômes de degré* 0.

Exemple 5.2.2. *Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$. Si p et q sont deux entiers naturels, les polynômes $A = (X-a)^p$ et $B = (X-b)^q$ sont premiers entre eux puisque les diviseurs unitaires de A sont les polynômes $(X-a)^k$, avec $k \leq p$, et que parmi eux, seul* 1 *divise B.*

Définition 5.2.3.
- *On appelle représentant irréductible d'une fraction rationnelle F tout représentant (P, Q) de F où P et Q sont premiers entre eux.*
- *On appelle représentant irréductible unitaire d'une fraction rationnelle F tout représentant irréductible (P, Q) de F tel que Q soit un polynôme unitaire.*

On rappelle qu'un polynôme unitaire est un polynôme non nul dont le coefficient dominant (le coefficient du terme de plus haut degré) est égal à 1.

Propriété 5.2.4. *Soit $F \in \mathcal{S}$ une fraction rationnelle. Alors*

1. *Si $\dfrac{P}{Q}$ est une forme irréductible d'une fraction rationnelle $F = \dfrac{P_1}{Q_1}$, alors :*
$$\exists R \in \mathbb{K}[X] \;\; P_1 = RP \quad \text{et} \quad Q_1 = RQ.$$

2. *Si* $\dfrac{P}{Q}$ *et* $\dfrac{P_1}{Q_1}$ *sont deux formes irréductibles d'une fraction* F*, alors :*

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \ P_1 = \lambda P \quad \textit{et} \quad Q_1 = \lambda Q.$$

3. *Toute fraction rationnelle admet un représentant irréductible unitaire et un seul.*

Démonstration. 1. Supposons que $\exists (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ premiers entre eux tel que $F = \dfrac{P}{Q}$. On sait aussi que F s'écrit sous la forme $F = \dfrac{P_1}{Q_1}$ où $(P_1, Q_1) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Alors,

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q} \iff P_1 Q = P Q_1.$$

Il vient que Q divise PQ_1. Comme P et Q sont premiers entre eux le Théorème de Gauss (voir Théorème 4.2.12) montre que Q divise Q_1. Comme Q divise Q_1, il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}(X)$ tel que $Q_1 = RQ$. Ainsi,

$$P_1 = \frac{PQ_1}{Q} = PR.$$

et

$$Q_1 = RQ.$$

2. Supposons que $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{P_1}{Q_1}$ sont deux formes irréductibles de F. Alors par définition,

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$$

où P et Q sont premiers entre eux et P_1 et Q_1 sont premiers entre eux et $Q, Q_1 \neq 0$. On obtient

$$PQ_1 = QP_1 \iff P_1 = \frac{PQ_1}{Q} = \lambda P \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{Q_1}{Q} \in \mathbb{K}^*[X].$$

- Supposons par l'absurde qu'une fraction rationnelle admet deux représentants irréductibles unitaire. Alors il existe $(P_1, Q_1) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $(P_2, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec Q_1 et Q_2 unitaire tel que

$$F = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}.$$

Alors

$$P_1 Q_2 = Q_1 P_2.$$

Donc P_1 divise $Q_1 P_2$. Comme P_1 et Q_1 sont premiers entre eux, le Théorème de Gauss nous dit que P_1 divise P_2. De manière symétrique, P_2 divise $P_1 Q_2$ et puisque P_2 et Q_2 sont premiers entre eux, il vient d'après le Théorème de Gauss que P_2 divise P_1. D'où $P_1 = P_2$. De manière analogue on obtient $Q_1 = Q_2$.

□

5.2.1 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 5.2.5. *Si F est une fraction rationnelle, la quantité* $\deg(P) - \deg(Q) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ *ne dépend pas du représentant (P, Q) choisi pour la fraction F. On l'appelle degré de F et on le note* $\deg(F)$. *En particulier, on a* $\deg(0) = -\infty$.

Propriété 5.2.6. *Étant données deux fractions rationnelles F_1 et F_2 de $\mathbb{K}[X]$, on a :*

1. $\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2))$
2. $\deg(F_1 F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$

Démonstration. Soient F_1 et F_2 deux fractions rationnelles. Il existe P_1 et Q_1 premiers entre eux et P_2 et Q_2 premiers entre eux tels que

$$F_1 = \frac{P_1}{Q_1} \quad F_2 = \frac{P_2}{Q_2}.$$

1. On a,
$$F_1 + F_2 = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}.$$
Il vient que
$$\deg(F_1 + F_2) = \deg(P_1 Q_2 + P_2 Q_1) - \deg(Q_1 Q_2).$$
De plus,
$$\begin{aligned} \deg(P_1 Q_2 + P_2 Q_1) &= \max(\deg(P_1 Q_2), \deg(P_2 Q_1)) \\ &= \max(\deg(P_1) + \deg(Q_2), \deg(P_2) + \deg(Q_1)) \end{aligned} \tag{5.2}$$
D'autre part
$$\deg(Q_1 Q_2) = \deg(Q_1) + \deg(Q_2).$$
Supposons que $\deg(F_1) \geq \deg(F_2)$. On obtient alors
$$\deg(P_1) - \deg(Q_1) \geq \deg(P_2) - \deg(Q_2)$$
et ensuite
$$\deg(P_1) + \deg(Q_2) \geq \deg(P_2) + \deg(Q_1) \tag{5.3}$$
En combinant (5.3) et (5.2) on obtient
$$\begin{aligned} \deg(F_1 + F_2) &= \deg(P_1) + \deg(Q_2) - \deg(Q_1) - \deg(Q_2) \\ &= \deg(P_1) - \deg(Q_1) = \deg(F_1) \end{aligned}$$
De manière analogue, si $\deg(F_1) \leq \deg(F_2)$ alors
$$\deg(F_1 + F_2) = \deg(F_2)$$
D'où
$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg(F_1), \deg(F_2)).$$

2. On a de même

$$F_1F_2 = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\deg(F_1F_2) &= \deg(P_1P_2) - \deg(Q_1Q_2)\\ &= \deg(P_1) + \deg(P_2) - \deg(Q_1) - \deg(Q_2)\\ &= \deg(F_1) - \deg(F_2)\end{aligned}$$

□

5.2.2 Racines, pôles

Définition 5.2.7 (Racines, pôles)**.** *Soit F une fraction rationnelle de forme irréductible $\frac{P}{Q}$.*

- *On appelle racine de F toute racine de P.*
- *On appelle pôle de F toute racine de Q.*
- *Si a est une racine (respectivement un pôle) de $F \neq 0$, l'ordre de multiplicité de a est l'ordre de multiplicité de a en tant que racine du polynôme P (respectivement Q).*

Remarque 5.2.8. *Les racines (respectivement les pôles) d'une fraction rationnelle F ne peuvent être obtenues qu'à partir d'une forme irréductible de F. En effet, considérons la fraction rationnelle F définie par*

$$F = \frac{X^3-1}{X^2-1}. \tag{5.4}$$

On a

$$F = \frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X-1)(X+1)} = \frac{X^2+X+1}{X+1} \tag{5.5}$$

On remarque que le polynôme constant $X = 1$ vérifie $F(1) = 0$ donné par (5.4) mais ne vérifie pas $F(1) = 0$ donné par (5.5).

Remarque 5.2.9. *Un élément $\alpha \in \mathbb{K}$ ne peut pas être à la fois racine et pôle d'une fraction rationnelle F. Sinon, en prenant une forme irréductible $F = \dfrac{P}{Q}$, on aurait $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$, et donc les polynômes P et Q seraient divisibles par $X - \alpha$, ce qui contredirait le caractère irréductible de $\dfrac{P}{Q}$.*

Définition 5.2.10 (Fonction rationnelle)**.** *Soit F une fraction rationnelle, de forme irréductible $\dfrac{P}{Q}$, dont on désigne par A l'ensemble des pôles.*

— *Pour $\alpha \in \mathbb{K}\backslash A$, on définit $F(\alpha) = \dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$.*

— *La fonction définie sur $\mathbb{K}\backslash A$ par $x \mapsto F(x)$ est appelée fonction rationnelle associée à la fraction rationnelle F.*

5.3 Décomposition en éléments simples

Dans cette section, nous détaillons la technique de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Cet outil est très important pour simplifier des expressions, calculer des intégrales, etc.

5.3.1 Partie entière

Propriété 5.3.1. *Toute fraction rationnelle F s'écrit de façon unique comme la somme d'un polynôme, appelé partie entière de F, et d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif.*

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons démontrer l'existence d'une fraction rationnelle F s'écrivant sous la forme :

$$F = E + E_1 \quad \text{avec} \quad \deg(E_1) < 0.$$

1. **Existence :** Puisque F est une fraction rationnelle il existe deux polynômes P et Q avec $Q \neq 0$ tels que $F = \dfrac{P}{Q}$. D'après le théorème de la division Euclidienne $\exists!(E, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = EQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(Q).$$

Il s'ensuit que

$$F = E + \frac{R}{Q} \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(Q)$$

ce qui constitue l'écriture recherchée.

2. **Unicité :** Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux couples $(E, E_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\tilde{E}, E_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $\deg(E_1) < 0$ et $\deg(E_2) < 0$ tels que

$$F = E + E_1, \quad \text{et} \quad F = \tilde{E} + E_2. \tag{5.6}$$

De (5.6) il vient que

$$E - \tilde{E} = E_2 - E_1.$$

Supposons que $\deg(E_1) < \deg(E_2)$ (le cas symétrique se traite de manière analogue). On obtient alors $\deg(E - \tilde{E}) < 0$. Alors, $E_1 - E_2 = 0$, c'est à dire $E_1 = E_2$. D'où $E = \widetilde{E}$.

□

Exemple 5.3.2. *1. Soit F une fraction rationnelle. Si $\deg(F) < 0$ alors la partie entière de F est nécessairement nulle.*

2. La partie entière de la fraction rationnelle $\dfrac{X^5}{(X^2 + X + 1)^2}$ est $X - 2$. En effet, posons $P(X) = X^5$ et $Q(X) = (X^2 + X + 1)^2$. D'après le théorème de le division euclidienne

$$\exists!(E, R) \in \mathbb{K}_5[X] \times \mathbb{K}_5[X] \text{ tel que } P = EQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(E).$$

L'algorithme de la division euclidienne donne

$$X^5 = (X-2) \times (X^2+X+1)^2.$$

Remarque 5.3.3. *Si F est une fraction rationnelle paire, alors sa partie entière est paire. En effet, si $F(X) = E(X) + E_1(X)$ avec E la partie entière de F et* $\deg(E_1) < 0$ *alors*

$$F(-X) = E(-X) + E_1(-X) = F(X).$$

L'unicité de la partie entière nous donne $E(X) = E(-X)$.

De même la partie entière d'une fraction rationnelle impaire est impaire.

5.3.2 Partie polaire

Propriété 5.3.4. *Si F est une fraction rationnelle admettant a pour pôle d'ordre n, il existe un unique n-uplet de scalaires $(\lambda_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ et une unique fraction F_0 n'admettant pas a pour pôle tels que :*

$$F(X) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p} + F_0.$$

La quantité :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p}$$

s'appelle la partie polaire de F relative au pôle de a.

Démonstration. 1. **Unicité :** Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux n-uplets de scalaires $(\lambda_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ et $(\mu_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ et deux fractions rationelles F_1 et F_2 n'admettant pas a pour pôle tels que :

$$F(X) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p} + F_1 = \sum_{p=1}^{n} \frac{\mu_p}{(X-a)^p} + F_2.$$

Posons $k = \max\{p \in [\![1,n]\!] \,|\lambda_p \neq \mu_p\}$. Alors, $\forall p \in [\![k+1,n]\!]$, $\lambda_p = \mu_p$. Ainsi

$$\sum_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p} + F_1 = \sum_{p=1}^{k} \frac{\mu_p}{(X-a)^p} + F_2. \tag{5.7}$$

En multipliant l'équation (5.7) par $(X-a)^k$ on obtient

$$\lambda_k + \sum_{p=1}^{k-1} \lambda_p (X-a)^{k-p} + F_1(X-a)^k = \mu_k + \sum_{p=1}^{k-1} \mu_p (X-a)^{k-p} + F_2(X-a)^k.$$

Pour $X = a$ on trouve $\lambda_k = \mu_k$ ce qui contredit la définition de k.

2. **Existence :** Soit F une fraction rationnelle s'écrivant sous la forme $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec P et Q premiers entre eux. Comme F admet a pour pôle d'ordre n, on peut écrire F sous la forme

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^n Q_1(X)} \quad \text{où} \quad Q_1(a) \neq 0.$$

Puisque a n'est pas racine de Q_1 il vient que les polynômes $(X-a)^n$ et Q_1 sont premiers entre eux. D'après l'identité de Bézout, on peut donc trouver des polynômes U et V tels que

$$Q_1(X)U(X) + (X-a)^n V(X) = 1.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^n Q_1(X)} &= \frac{P(X)\left(Q_1(X)U(X) + (X-a)^n V(X)\right)}{(X-a)^n Q_1(X)} \\ &= \frac{P(X)U(X)}{(X-a)^n} + \frac{P(X)V(X)}{Q_1(X)} \end{aligned}$$

Le polynôme PU étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, la formule de Taylor Young donne au voisinage du point a

$$(PU)(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(X-a)^k}{k!}(PQ)^k(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (X-a)^k.$$

Ainsi,

$$\frac{P(X)U(X)}{(X-a)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (X-a)^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{(X-a)^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{(X-a)^{n-k}} + R(X)$$

où R est un polynôme. Finalement

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{(X-a)^{n-k}} + R(X) + \frac{P(X)V(X)}{Q_1(X)}.$$

La fraction rationnelle $R(X) + \frac{P(X)V(X)}{Q_1(X)}$ n'admettant pas a pour pôle, on en déduit le résultat recherché.

□

5.3.3 Application

Soit F une fraction rationnelle admettant a pour pôle.

pôle d'ordre 1

Si a est pôle d'ordre 1 de F, on peut écrire

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)Q_1(X)} \tag{5.8}$$

où Q_1 est un polynôme n'admettant pas a pour racine. On cherche le scalaire λ et la fraction rationnelle F_0 n'admettant pas a pour pôle tels que :

$$F(X) = \frac{\lambda_1}{X-a} + F_0.$$

On multiplie l'équation (5.8) par $X - a$ et on obtient

$$\frac{P(X)}{Q_1(X)} = \lambda_1 + (X-a)F_0.$$

Ainsi

$$\lambda_1 = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

La partie relative au pôle a est donc :

$$\frac{\lambda_1}{X-a} \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

Pôle d'ordre 2

Si a est pôle d'ordre 2 de F, on peut écrire

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^2 Q_2(X)}$$

où Q_2 est un polynôme n'admettant pas a pour racine. On cherche les scalaires λ_1 et λ_2 tels que :

$$F(X) = \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \frac{\lambda_1}{X-a} + F_0.$$

où F_0 est une fraction rationnelle n'admettant pas a pour pôle. En multipliant l'égalité précédente par $(X-a)^2$ on obtient

$$\frac{P(X)}{Q_2(X)} = \lambda_2 + \lambda_1(X-a) + F_0(X-a)^2.$$

Pour $X = a$ on a $\lambda_2 = \dfrac{P(a)}{Q_2(a)}$. La partie polaire relative au pôle a est donc :

$$\frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} \quad \text{avec} \quad \lambda_2 = \frac{P(a)}{Q_2(a)}.$$

Ainsi, on a

$$\frac{P(X)}{Q_2(X)} = \frac{P(a)}{Q_2(a)} + \lambda_1(X-a) + F_0(X-a)^2$$

En dérivant l'équation précédente par rapport à X on obtient

$$\left(\frac{P(X)}{Q_2(X)}\right)' = \lambda_1 + F_0'(X)(X-a)^2 + 2(X-a)F_0(X).$$

Pour $X = a$ on obtient finalement

$$\lambda_1 = \left(\frac{P}{Q_2}\right)'(a)$$

Cas général : pôle d'ordre n

Dans le cas général, si a est pôle d'ordre n, alors

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^n Q_n(X)}$$

avec $Q_n(a) \neq 0$, et la partie polaire relative au pôle a est :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(X-a)^p} \quad \text{avec} \quad \lambda_n = \frac{P(a)}{Q_n(a)}$$

Exercice 5.3.5. *Soit* $F = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$. *Trouvez la partie polaire associée à chaque pôle de* F*.*

Correction : *Effectuons la division euclidienne de* X^5+1 *par* $X(X-1)^2$*. Déjà on remarque que* -1 *est racine de* F*. Ainsi,*

$$X^5 + 1 = (X+1)Q_4(X) \quad \text{avec} \quad Q_4 \in \mathbb{P}_4(X).$$

Alors

$$\exists (A,B,C,D,E) \in \mathbb{R}^5 \qquad X^5+1 = (X+1)(AX^4 + BX^3 + CX^2 + DX + E).$$

Finalement

$$X^5 + 1 = AX^5 + (B+A)X^4 + (C+B)X^3 + (D+C)X^2 + (E+D)X + E$$

Par identification,

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B + A &= 0 \\ C + B &= 0 \\ D + C &= 0 \\ E + D &= 0 \\ E &= 1. \end{aligned}$$

D'où

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = 1 \quad D = -1 \quad E = 1.$$

Alors

$$X^5 + 1 = (X+1)(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1).$$

Finalement, la fraction rationnelle F s'écrit sous la forme

$$F(X) = \frac{(X+1)(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1)}{X(X-1)^2}.$$

De plus, F admet 0 comme pôle d'ordre 1 et 1 comme pôle d'ordre 2. On cherche à écrire F sous la forme

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X-1} + \frac{\lambda_3}{(X-1)^2} \\ &= \frac{\lambda_1(X-1)^2 + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 X}{X(X-1)^2} \\ &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)X^2 + (-2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)X + \lambda_1 - \lambda_2}{X(X-1)^2} \end{aligned}$$

Alors, par identification

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

On a alors $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. Finalement,

$$F(X) = \frac{1/2}{X} + \frac{-1/2}{X-1} + \frac{1/2}{(X-1)^2}.$$

5.3.4 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 5.3.6. *Étant donnée une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}[X]$ dont les pôles sont $a_1, a_2, \cdots, a_n$ distincts deux à deux et d'ordres de multiplicité respectifs $r_1, r_2, \cdots, r_n$, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$ et une unique famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le r_i}}$ tels que :*

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j} \right).$$

Autrement dit, toute fraction rationnelle de $\mathbb{C}[X]$ est la somme de sa partie entière et des parties polaires associées à chacun de ses pôles. Cette décomposition s'appelle la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Chapitre 6

Calcul d'intégrales