Dérivation et Intégration

JAD DABAGHI

Enseignant-Chercheur en Mathématiques

jad.dabaghi@devinci.fr

ESILV ENGINEERING SCHOOL DE VINCI PARIS

Table des matières

Objectifs

1. Comprendre les comportements locaux et asymptotiques des fonctions
2. Savoir manipuler les développements limités
3. Connaître les principales propriétés des fractions rationnelles
4. Savoir calculer plusieurs familles d'intégrales

Contenu du module

1. Chapitre 1 : Analyse réelle (CMO 1)
   - Un peu de topologie, continuité d'une fonction en un point.
2. Chapitre 2 : Relations de comparaison (CMO 1)
   - Fonctions dominées, fonctions négligeables, fonctions équivalentes.
3. Chapitre 3 : Développements limités (CMO 1 & CMO 2)
   - Formules de Taylor, opérations sur les développements limités, applications.
   - **Contrôle continu 45 minutes 11 Mars 2023**
4. Chapitre 4 : Fractions rationnelles (CMO 3)
5. Chapitre 5 : Calcul d'intégrales (CMO 4)

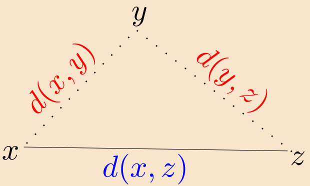
Analyse réelle

Analyse réelle

Definition (distance)

Soit E un ensemble non vide. Une **distance** sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie $\forall (x,y,z) \in E \times E \times E$

$$d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \text{(homogénéité)}$$
$$d(x,y) = d(y,x) \quad \text{(symétrie)}$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \text{(inégalité triangulaire).}$$



Le couple (E,d) est appelé **espace métrique**.

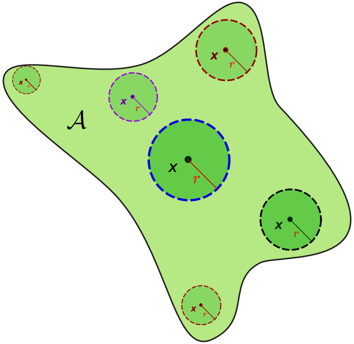
Exemple :

- Sur $\mathbb{R}$, la métrique usuelle est $d(x,y) = |x-y|$
- Sur $\mathbb{C}$, la métrique usuelle est $d(z_1,z_2) = |z_2 - z_1|$

Definition (Ouvert)

Soit (E, d) un espace métrique. On dit que $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ est un ouvert de E si $\mathcal{A}$ contient une boule ouverte. Autrement dit, si

$$\forall x \in \mathcal{A},\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset \mathcal{A}.$$



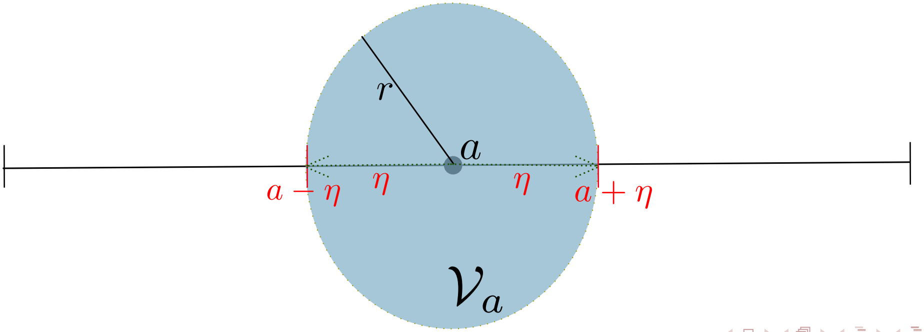
Exemples ouverts :

- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2$
- $]a, b[$

Definition (Voisinage)

- (E, d) **espace métrique** et $a \in E$.

On dit que $\mathcal{V} \subset E$ est un voisinage de a si, et seulement si, il existe un ouvert $O \subset \mathcal{V}$ contenant a. Autrement dit s'il existe $B(a, r) \subset \mathcal{V}$.

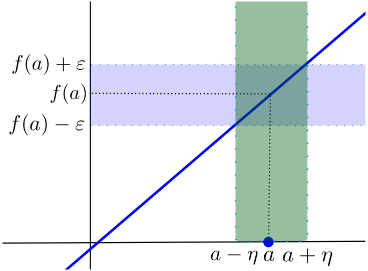


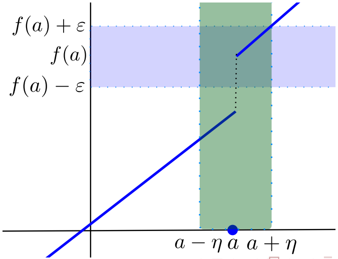
Continuité

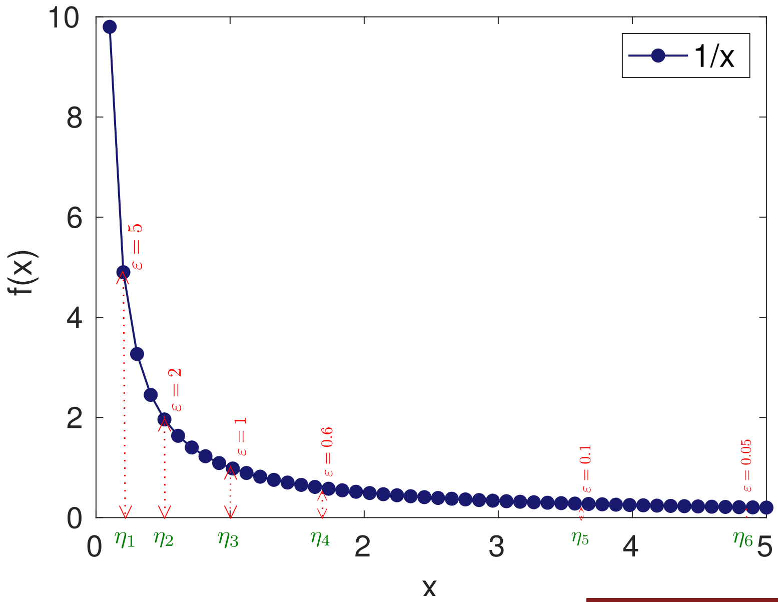
Definition (Caractérisation de Weierstrass)

Une fonction f est dite continue en $a \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \quad (\lim_{x \to a} f(x) = f(a)).$$






1/x
f(x)
x
10
8
6
4
2
0
0
2
3
4
5
$\varepsilon = 5$
$\varepsilon = 2$
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon = 0.6$
$\varepsilon = 0.1$
$\varepsilon = 0.05$
η_1
η_2
η_3
η_4
η_5
η_6

Fonctions dominées

Definition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors f est **dominée** par φ au voisinage de a, s'il existe une $u : I \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de a et telle que $f = \varphi u$ au voisinage de a. On note

$$f = \mathcal{O}(\varphi)$$

Fonctions dominées

Definition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors f est **dominée** par φ au voisinage de a, s'il existe une $u : I \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de a et telle que $f = \varphi u$ au voisinage de a.
On note

$$f = \mathcal{O}(\varphi)$$

Exemple : $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(x) = x^2$. Alors

$$f(x) = \varphi(x)u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right). \quad \text{borne!}$$

Ainsi, $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

Fonctions négligeables

Definition

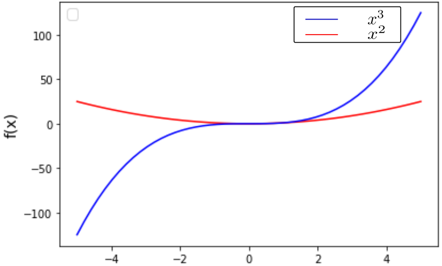
on dit que f est **négligeable** devant φ au voisinage de a, s'il existe une fonction ε définie sur I tel que $f = \varphi\varepsilon$ au voisinage de a et $\lim_a \varepsilon = 0$. On note $f = o(\varphi)$.

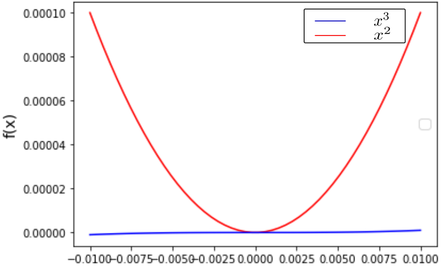
Fonctions négligeables

Definition

on dit que f est **négligeable** devant φ au voisinage de a, s'il existe une fonction ε définie sur I tel que $f = \varphi\varepsilon$ au voisinage de a et $\lim_a \varepsilon = 0$. On note $f = o(\varphi)$.

Exemple : $x^3 = o(x^2)$ au voisinage de 0 car $x^3 = x \times x^2$ avec $\varepsilon(x) = x$ et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.





Quelques résultats

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

1. *La fonction f est bornée au voisinage de a si, et seulement si $f = \mathcal{O}(1)$.*
2. *La fonction f tend vers 0 en a si, et seulement si $f = o(1)$.*

Quelques résultats

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

1. *La fonction f est bornée au voisinage de a si, et seulement si $f = \mathcal{O}(1)$.*
2. *La fonction f tend vers 0 en a si, et seulement si $f = o(1)$.*

Démonstration :

1. $(\Rightarrow)$ f bornée au voisinage de a où $\mathcal{V}_a =]a-\eta, a+\eta[$. Donc $f(x) = f(x) \times 1$ $\forall x \in \mathcal{V}_a$. Alors, $f = \mathcal{O}(1)$.

Quelques résultats

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

1. *La fonction f est bornée au voisinage de a si, et seulement si $f = \mathcal{O}(1)$.*
2. *La fonction f tend vers 0 en a si, et seulement si $f = o(1)$.*

Démonstration :

1. $(\Rightarrow)$ f bornée au voisinage de a où $\mathcal{V}_a =]a-\eta, a+\eta[$. Donc $f(x) = f(x) \times 1$ $\forall x \in \mathcal{V}_a$. Alors, $f = \mathcal{O}(1)$.

   $(\Leftarrow)$ $f = \mathcal{O}(1)$. Alors $\exists \varphi$ bornée sur $\mathcal{V}_a$ tel que $f = \varphi \times 1$ sur $\mathcal{V}_a$. Donc f bornée sur $\mathcal{V}_a$.

2 $(\Rightarrow)$ f tend vers 0 en a donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_1 > 0 \ \forall x \in [a - \eta_1, a + \eta_1], \ |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$

Alors $f = o(1)$.

2 $(\Rightarrow)$ f tend vers 0 en a donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta_1 > 0 \; \forall x \in [a - \eta_1, a + \eta_1], \; |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : \mathcal{D}_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$

Alors $f = o(1)$.

$(\Leftarrow)$ $f = o(1)$ au voisinage de a. Alors $\exists \varphi$ définie au voisinage de a tel que $f = \varphi 1$ au voisinage de a avec $\lim_a \varphi = 0$.
Or $\lim_a \varphi \in \mathcal{V}_a$ donc $\lim_a f = \lim_a \varphi = 0$.

Quelques remarques

1. Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de a et $\lim_a \varepsilon = 0$. Mais, $\lim_a \varepsilon \not\to 0$ sur I tout entier.

   Contre exemple :

   $$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

   On a $f = o(g)$ au voisinage de 0 ($\varepsilon(x) = x$) mais $\varepsilon(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Quelques remarques

1. Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de a et $\lim_a \varepsilon = 0$. Mais, $\lim_a \varepsilon \not\to 0$ sur I tout entier.

   Contre exemple :
   $$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$
   On a $f = o(g)$ au voisinage de 0 ($\varepsilon(x) = x$) mais $\varepsilon(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

2. Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ au voisinage de a alors f n'est pas forcément égal à g.

   Contre exemple :
   $$f : x \mapsto x^3 \quad g : x \mapsto x^4 \quad h : x \mapsto x^2.$$
   On a $f = o(h)$ au voisinage de 0 et $g = o(h)$ au voisinage de 0 mais $f \neq g$.

Quelques remarques

1. Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de a et $\lim_a \varepsilon = 0$. Mais, $\lim_a \varepsilon \not\to 0$ sur I tout entier.

   Contre exemple :
   $$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$
   On a $f = o(g)$ au voisinage de 0 ($\varepsilon(x) = x$) mais $\varepsilon(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

2. Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ au voisinage de a alors f n'est pas forcément égal à g.

   Contre exemple :
   $$f : x \mapsto x^3 \quad g : x \mapsto x^4 \quad h : x \mapsto x^2.$$
   On a $f = o(h)$ au voisinage de 0 et $g = o(h)$ au voisinage de 0 mais $f \neq g$.

3. Le même phénomène s'observe pour la notation $\mathcal{O}$.

Règles de calcul

Propriété

1. $f = o(\varphi) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi)$
2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ et $f_2 = \mathcal{O}(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$
3. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $f_2 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = \mathcal{O}(\varphi_1 \varphi_2)$
4. $f_1 = o(\varphi)$ et $f_2 = o(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(\varphi)$
5. $f_1 = o(\varphi_1)$ et $f_2 = o(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(\varphi_1 \varphi_2)$
6. $f = \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi_2)$
7. $f = o(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = o(\varphi_2) \Rightarrow f = o(\varphi_2)$

Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow f = g\varphi$ au voisinage de a et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in [a - \eta, a + \eta], \; |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction g est donc bornée au voisinage de a. Alors, $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow f = g\varphi$ au voisinage de a et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in [a-\eta, a+\eta],\ |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction g est donc bornée au voisinage de a. Alors, $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ et $f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$ donc $f_1 = \varphi u$ au voisinage de a et $f_2 = \varphi v$ au voisinage de a avec u et v bornées au voisinage de a.

$$\exists \eta_1 > 0\ \forall x \in]a-\eta_1, a+\eta_1[,\ f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$
$$\exists \eta_2 > 0\ \forall x \in]a-\eta_2, a+\eta_2[,\ f_2(x) = \varphi(x)v(x).$$

Pour $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ on a $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\ (f_1+f_2)(x) = \varphi(x)(u+v)(x)$. Or $u+v$ bornée au voisinage de a donc $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$.

Démonstration

4. Puisque $f_1 = o(\varphi)$ et $f_2 = o(\varphi)$ au voisinage de a il existe une fonction ε_1 définie au voisinage de a et il existe une fonction ε_2 définie au voisinage de a tel que

$$\lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$$

et vérifiant $f_1 = \varepsilon_1 \varphi$ au voisinage de a et $f_2 = \varepsilon_2 \varphi$ au voisinage de a. Ainsi, la fonction $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ est bien définie au voisinage de a et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Alors, $f_1 + f_2 = o(\varphi)$.

Règle pratique

Propriété

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Supposons que φ ne s'annule pas sur $I \backslash a$. Alors au voisinage de a

1. *f est dominée par φ si, et seulement si, $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a.*
2. *f est négligeable devant φ si, et seulement si,* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$

Fontions équivalentes

Definition

Soient f et g définies sur un intervalle I. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, s'il existe une fonction h définie sur I telle que $f = gh$ au voisinage de a et $\lim_{x \to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Fontions équivalentes

Definition

Soient f et g définies sur un intervalle I. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, s'il existe une fonction h définie sur I telle que $f = gh$ au voisinage de a et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Exercice : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Montrer que f et g sont équivalentes en 0.

Fontions équivalentes

Definition

Soient f et g définies sur un intervalle I. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, s'il existe une fonction h définie sur I telle que $f = gh$ au voisinage de a et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Exercice : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Montrer que f et g sont équivalentes en 0.

Correction : On a $f \underset{0}{\sim} g$. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = h(x) \times g(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\to} 1.$$

Fontions équivalentes

Definition

Soient f et g définies sur un intervalle I. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, s'il existe une fonction h définie sur I telle que $f = gh$ au voisinage de a et $\lim_{x \to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Exercice : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Montrer que f et g sont équivalentes en 0.

Correction : On a $f \underset{0}{\sim} g$. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = h(x) \times g(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\to} 1.$$

Remarque : $x \mapsto x$ est un DL à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de 0.

Équivalent pour les polynômes

$$f(x)=\sum_{k=p}^{n}a_kx^k \quad \text{avec} \quad a_p\neq 0 \quad \text{et} \quad a_n\neq 0.$$

1. **Étude en** 0 **:** Pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f(x)=a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots+a_nx^n=a_px^p\underbrace{\left(1+\frac{a_{p+1}}{a_p}x+\cdots+\frac{a_n}{a_p}x^{n-p}\right)}_{\to 1}$$

Donc $f(x)\underset{0}{\sim}a_px^p$.

Équivalent pour les polynômes

$$f(x)=\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

1. **Étude en** 0 **:** Pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f(x)=a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\cdots+a_nx^n=a_px^p\underbrace{\left(1+\frac{a_{p+1}}{a_p}x+\cdots+\frac{a_n}{a_p}x^{n-p}\right)}_{\to 1}$$

Donc $f(x)\underset{0}{\sim}a_px^p$.

2. **Étude en** $+\infty$ **:** Pour $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f(x)=a_nx^n\underbrace{\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}x^{-2}+\cdots+\frac{a_p}{a_n}x^{p-n}\right)}_{\to 1}$$

Donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}a_nx^n$.

Cas pratique

Comment montrer que deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point ?

Propriété

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a \in I$. On suppose que g ne s'annule pas sur $I \backslash a$. Alors, la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage de a, si et seulement si,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Résultats fondamentaux

Propriété

Soient f et g deux fonctions équivalentes en $a \in I$.

1. *Si g a une limite finie ou infinie en a alors f a une limite finie en a et :* $\lim_a f = \lim_a g$.
2. *Si g est positive sur I alors f est positive au voisinage de a.*
3. *Si g ne s'annule pas sur I alors f ne s'annule pas au voisinage de a.*

Obtention d'équivalents : Si f est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors au voisinage de a :

$$\boxed{f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)}$$

Application

1. Montrer que $e^x - 1 \sim x$ au voisinage de 0

   Correction : Comme $x \mapsto e^x$ est dérivable en 0 et que $e^0 = 1$ on a

$$e^x - e^0 \underset{0}{\sim} e'(0)(x-0) \Rightarrow e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$$

Application

1. Montrer que $e^x - 1 \sim x$ au voisinage de 0
Correction : Comme $x \mapsto e^x$ est dérivable en 0 et que $e^0 = 1$ on a
$$e^x - e^0 \underset{0}{\sim} e'(0)(x-0) \Rightarrow e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$$

2. Montrer que $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0
Correction : $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 et possède une dérivée non nulle
$$\ln(1+x) - \ln(1+0) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+0}(x-0) \Rightarrow \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x.$$

Application

1. Montrer que $e^x - 1 \sim x$ au voisinage de 0
   Correction : Comme $x \mapsto e^x$ est dérivable en 0 et que $e^0 = 1$ on a
   $$e^x - e^0 \underset{0}{\sim} e'(0)(x-0) \Rightarrow e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$$
2. Montrer que $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0
   Correction : $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 et possède une dérivée non nulle
   $$\ln(1+x) - \ln(1+0) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+0}(x-0) \Rightarrow \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x.$$
3. Montrer que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de 0
   Correction : $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable en 0 et et possède une dérivée non nulle
   $$\sin(x) - \sin(0) \underset{0}{\sim} \sin'(0)(x-0) \Rightarrow \sin(x) \underset{0}{\sim} x.$$

Substitution dans un équivalent

Propriété

Soient f et g définies sur I et équivalentes en a. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en α.

Substitution dans un équivalent

Propriété

Soient f et g définies sur I et équivalentes en a. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en α.

Application : Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

Substitution dans un équivalent

Propriété

Soient f et g définies sur I et équivalentes en a. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en α.

Application : Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

1. $e^{\sin t} - 1$

Substitution dans un équivalent

Propriété

Soient f et g définies sur I et équivalentes en a. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en α.

Application : Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

1. $e^{\sin t} - 1$

   Correction : $u(t) = \sin t$, $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$. On a $f \underset{0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 0$ donc $f(u(t)) \underset{0}{\sim} g(u(t))$. Finalement, $e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t$.

2. $\ln(\cos(t))$

Substitution dans un équivalent

Propriété

Soient f et g définies sur I et équivalentes en a. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en α.

Application : Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

1. $e^{\sin t} - 1$

   Correction : $u(t) = \sin t$, $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$. On a $f \underset{0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 0$ donc $f(u(t)) \underset{0}{\sim} g(u(t))$. Finalement, $e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t$.

2. $\ln(\cos(t))$

   Correction : On a $\ln(\cos(t)) = \ln(1 + \cos(t) - 1)$. Posons $u(t) = \cos(t) - 1$. Alors, $\lim_{t\to 0} u(t) = 0$. De plus, $\ln(1+y) \underset{0}{\sim} y$. Donc, $\ln(1 + u(t)) \underset{0}{\sim} u(t)$. Ainsi, $\ln(\cos(t)) \underset{0}{\sim} \cos(t) - 1$.

Opération sur les fonctions équivalentes

Propriété

Si au voisinage de a on a

1. $f_1 \sim g_1$ *et* $g_1 \sim g_2$ *alors* $f_1 \sim g_2$ *en* a *(transitivité).*
2. *Si* $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2$ *alors* $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ *en* a *(produit).*
3. *Si* $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2$ *et si aucune de ces fonctions ne s'annule sur* $I \setminus a$ *alors* $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

Propriété

1. *Si* $g = o(f)$ *au voisinage d'un point* $a \in I$*, alors* $f + g \underset{a}{\sim} f$.
2. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle* I *et* $a \in I$*. Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* $f = \mathcal{O}(g)$ *au voisinage de* a.

Application

Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}.$$

Application

Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}.$$

Correction : On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(1 - e^{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}}\right) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}}\right).$$

Or $1 - e^y \underset{0}{\sim} y$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0$. Donc, $1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-2}{x^3}$. De plus, $e^{\frac{1}{x^2}} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{x^3}$.

Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

Correction :

Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

Correction : On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

Correction : On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0.$$

Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

Correction : On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

Correction : On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

Ainsi

$$ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

Remarques importantes

1. **Composition d'équivalents :** Si $f \sim g$ on ne peut rien dire à priori de $u \circ f$ et $u \circ g$.
   Exemple : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \quad \text{mais} \quad e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$$

Remarques importantes

1. **Composition d'équivalents :** Si $f \sim g$ on ne peut rien dire à priori de $u \circ f$ et $u \circ g$.
Exemple : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par
$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \quad \text{mais} \quad e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$$
2. **Somme d'équivalents :** Si $u_1 \sim u_2$ et $v_1 \sim v_2$ alors $u_1 + v_2 \not\sim u_2 + v_2$.
Exemple :
$$u(x) = \sin(2x) + \cos(x) - 1 .$$
On a
$$\sin(y) \underset{0}{\sim} y \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} 2x = 0 \Rightarrow \sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x \quad \cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$
Or
$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{2x} = \left(\frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{\cos(x) - 1}{2x}\right) = 1 \Rightarrow u(x) \underset{0}{\sim} 2x$$

Développements limités

Formules de Taylor

Theorem (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient I un intervalle et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Formules de Taylor

Theorem (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient I un intervalle et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{dt}.$$

Application : Montrez que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$

Formules de Taylor

Theorem (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient I un intervalle et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Application : Montrez que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$

Correction : Formule de Taylor avec reste intégral à la fonction cos à l'ordre 2 :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t)\,\mathrm{d}t}_{\geq 0}.$$

Formules de Taylor

Theorem (Inégalité de Taylor Lagrange)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a, b]$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Formules de Taylor

Theorem (Inégalité de Taylor Lagrange)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a,b]$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^4}{24}.$

Formules de Taylor

Theorem (Inégalité de Taylor Lagrange)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Si M majore $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a,b]$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^4}{24}$.

Correction : On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 à la fonction sin de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| \leq 1$.

$$\left| \sin(x) - \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = \left| \sin(x) - x - \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^4}{4!} = \frac{x^4}{24}.$$

Formules de Taylor

Theorem (Formule de Taylor-Young)

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\iff f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Formule très importante ! Elle permet de déterminer le développement limité de f à l'ordre n.

Mais... peu commode en pratique...

Applications

1. Développement limité de $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
Correction : La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La formule de Taylor-Young donne
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Applications

1. Développement limité de $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
Correction : La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La formule de Taylor-Young donne
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. Développement limité de $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de 0.
Correction : La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La formule de Taylor-Young donne
$$\begin{aligned} cos(x) &= 1 + \frac{x}{1!}\cos'(0) + \frac{x^2}{2!}\cos^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\cos^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}\cos^{(4)}(0) + \cdots + o(x^n) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

3 Développement limité de $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de 0.
Correction : La fonction $x \sin(x)$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. La formule de Taylor-Young donne

$$\sin(x) = \frac{x}{1!}\sin'(0) + \frac{x^2}{2!}\sin^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\sin^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}\sin^{(4)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin^{(n)}(0) + o(x^n)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots (-1)^n o(x^{2n+1})$$

3. Développement limité de $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de 0.
Correction : La fonction $x \sin(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. La formule de Taylor-Young donne

$$\sin(x) = \frac{x}{1!}\sin'(0) + \frac{x^2}{2!}\sin^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}\sin^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}\sin^{(4)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin^{(n)}(0) + o(x^n)$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots (-1)^n o(x^{2n+1})$$

4. Développement limité de $(1+x)^\alpha$ où $x > -1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Correction : La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. La formule de Taylor-Young donne

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!}+\cdots+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$