Analyse à Plusieurs Variables

JAD DABAGHI

Enseignant-Chercheur en Mathématiques
jad.dabaghi@devinci.fr

ESILV ENGINEERING SCHOOL DE VINCI PARIS

Table des matières

1. Différentielle et dérivées partielles
2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$
3. Fonctions plusieurs fois différentiables
4. Extrema locaux
5. Formes différentielles de degré un et champs de vecteurs
6. Champ de vecteurs
7. Changements de coordonnées en dimension 3

Fonctions $\mathcal{C}^1$

Definition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f est différentiable et si df est continue, c-a-d si les dérivées partielles de f sont continues.

Propriété

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admet des dérivées partielles en tout point et les dérivées partielles sont continues, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque : Pour montrer qu'une fonction n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit que l'une de ses dérivées partielles ne soit pas continue ou que la fonction ne soit pas continue.

Example

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Correction :

Example

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Correction :

- Etude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$: la fonction f est une fraction rationnelle donc elle est $\mathcal{C}^1$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Example

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Correction :

- Etude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$: la fonction f est une fraction rationnelle donc elle est $\mathcal{C}^1$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

- Etude de la continuité en $(0,0)$:

$$0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq y^2 \underset{y\to 0}{\to} 0. \quad \Rightarrow \quad f \text{ continue en } (0,0)$$

- Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

- Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

- Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|\leq\frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2}\leq 2|x|\underset{x\to 0}{\to}0.$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|\leq\frac{2|y|x^4}{(x^2+y^2)^2}\leq 2|y|\underset{y\to 0}{\to}0.$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles

Propriété (Somme, produit, quotient)

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors fg est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *Si de plus, g ne s'annule pas sur U, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Propriété (Composition)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$, avec $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $g \circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Opération sur les fonctions vectorielles $\mathcal{C}^1$

Propriété

Soit U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^p)$ une application définie par

$$f : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_p(x_1, \cdots, x_n))$$

Alors, f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si, les composantes f_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$ sont $\mathcal{C}^1$.

Definition

On appelle matrice jacobienne de f en $a \in U$, la matrice de l'application linéaire df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ notée $J_f(a)$. Plus précisément, $\left[J_f(a)\right]_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

Example

Pour $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, soit f la fonction définie par $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors,

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Propriété

$f,g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \in [\![1,n]\!]$. Supposons l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.

- *$\dfrac{\partial(\lambda f+g)}{\partial x_i}(a)$ est définie et $\dfrac{\partial(\lambda f+g)}{\partial x_i}(a) = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.*
- *$\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a)$ est définie et $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a) + f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$.*
- *Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a)$ est définie et on a $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a) - f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{g(a)^2}$*

Composition d'applications $\mathcal{C}^1$

Propriété

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. On suppose $f(U) \subset V$. On pose $h = g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ où $h = (h_1, \ldots, h_p)$. Soit $a \in U$. Si f admet des dérivées partielles en a et g admet des dérivées partielles en $f(a)$ alors h admet des dérivées partielles en a et

- $\dfrac{\partial h_k}{\partial x_i}(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad \forall k \in \{1, \ldots, p\}$ *Dérivation en chaîne*
- $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

Attention : La notation $\dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a))$ correspond à la dérivée partielle de g_k par rapport à j-ème variable évaluée en $f(a)$.

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Example

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sin^2(t) + 3\cos(t)\sin(t) + 5\cos^2(t)$. Calculer $h'(t)$.

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Example

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sin^2(t) + 3\cos(t)\sin(t) + 5\cos^2(t)$. Calculer $h'(t)$.

Corrigé :

Application concrète : Soient des fonctions différentiables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $h = f \circ \varphi$. Alors,

$$h'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Example

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \sin^2(t) + 3\cos(t)\sin(t) + 5\cos^2(t)$. Calculer $h'(t)$.

Corrigé : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (\sin(t), \cos(t))$. Alors, $h = f \circ \varphi$ vérifie

$$\begin{aligned} h'(t) &= \cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\sin(t), \cos(t)) - \sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\sin(t), \cos(t)) \\ &= \cos(t)(2\sin(t) + 3\cos(t)) - \sin(t)(3\sin(t) + 10\cos(t)) \\ &= 3\cos^2(t) - 3\sin^2(t) - 8\cos(t)\sin(t) \end{aligned}$$

Différentiabilité d'ordre 2

Quelques notations : Pour E et F deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F.

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable, et soit $a \in U$.

1. On dit que f est *deux fois différentiable* en $a \in U$ si df est différentiable en a et on note $(d^2f)_a = d(df)_a$ et on l'appelle la *différentielle seconde de f en a*.
2. On dit que f est *deux fois différentiable sur U*, si elle est deux fois différentiable en tout point $a \in U$ et note d^2f la différentielle seconde de f.

Remarque : Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable, $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. De même,

$$d^2f : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Definition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f est deux fois différentiable et $d^2 f$ est continue.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Definition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f est deux fois différentiable et $d^2 f$ est continue.

Attention : Si f est $\mathcal{C}^2$, alors f est deux fois différentiable. La réciproque est fausse.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Definition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f est deux fois différentiable et d^2f est continue.

Attention : Si f est $\mathcal{C}^2$, alors f est deux fois différentiable. La réciproque est fausse.

Propriété (Formule de Taylor-Young)

Si f est deux fois différentiable en a, on a un DL à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Definition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f est deux fois différentiable et $d^2 f$ est continue.

Attention : Si f est $\mathcal{C}^2$, alors f est deux fois différentiable. La réciproque est fausse.

Propriété (Formule de Taylor-Young)

Si f est deux fois différentiable en a, on a un DL à l'ordre 2 :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2} d^2 f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$$

Theorem (Schwartz)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Si f est deux fois différentiable en a, alors l'application $d^2 f_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est symétrique i.e. $d^2 f(h,h') = d^2 f(h',h)$

Dérivées partielles d'ordre 2

Dérivées partielles d'ordre 2

Definition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles de f sont définies au voisinage de a et si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a, ces dérivées sont appelées *dérivées partielles secondes de f en a*. On les note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

Dérivées partielles d'ordre 2

Definition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles de f sont définies au voisinage de a et si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a, ces dérivées sont appelées *dérivées partielles secondes de f en a*. On les note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

Example

$f : (x, y) \mapsto \ln\left(\frac{x}{y}\right)$. Calculez les dérivées partielles premières et secondes de f.

Dérivées partielles d'ordre 2

Definition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles de f sont définies au voisinage de a et si elles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a, ces dérivées sont appelées *dérivées partielles secondes de f en a*. On les note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

Example

$f : (x,y) \mapsto \ln\left(\frac{x}{y}\right)$. Calculez les dérivées partielles premières et secondes de f.

Corrigé : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$.

Definition

Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle *matrice hessienne* de f la matrice des dérivées partielles secondes (lorsqu'elles existent). On la note H_f et on pour $a \in U$:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice hessienne $H_f(a)$ est symétrique.

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors la Hessienne $H_f(a)$ est la matrice de $(d^2f)_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit

$$(d^2f)_a(h,h') = {}^t h H_f(a) h' \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \forall h' \in \mathbb{R}^n$$

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors la Hessienne $H_f(a)$ est la matrice de $(d^2f)_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit

$$(d^2f)_a(h,h') = {}^t h H_f(a) h' \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \forall h' \in \mathbb{R}^n$$

Démonstration : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

$$(d^2f)_a(h,h') = (d^2f)_a\Big(\sum_{i=1}^n h_i e_i, \sum_{j=1}^n h'_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h'_j (d^2f)_a(e_i, e_j) = {}^t h H_f(a) h'$$

Lien entre dérivées partielles secondes et différentielle seconde

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors la Hessienne $H_f(a)$ est la matrice de $(d^2 f)_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit

$$(d^2 f)_a(h, h') = {}^t h H_f(a) h' \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \forall h' \in \mathbb{R}^n$$

Démonstration : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

$$(d^2 f)_a(h, h') = (d^2 f)_a\Big(\sum_{i=1}^n h_i e_i, \sum_{j=1}^n h'_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h'_j (d^2 f)_a(e_i, e_j) = {}^t h H_f(a) h'$$

Corollaire (Schwartz)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois différentiable en $a \in U$. Alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Extremas locaux

Extremas locaux

En dimension 1, si f est deux fois dérivable en un point x_0, alors f a un DL à l'ordre 2 en x_0. Si, de plus, $f'(x_0) = 0$, le DL s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Extremas locaux

En dimension 1, si f est deux fois dérivable en un point x_0, alors f a un DL à l'ordre 2 en x_0. Si, de plus, $f'(x_0) = 0$, le DL s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Conclusion :

1. Condition nécessaire d'extremum local : Si f admet un minimum local resp. maximum local en x_0, alors $f''(x_0) \geq 0$, resp. $f''(x_0) \leq 0$.
2. Condition suffisante d'extremum local strict : Si $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$, alors f admet un minimum local strict, resp. un maximum local strict en x_0.

Extremas locaux

En dimension 1, si f est deux fois dérivable en un point x_0, alors f a un DL à l'ordre 2 en x_0. Si, de plus, $f'(x_0) = 0$, le DL s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Conclusion :

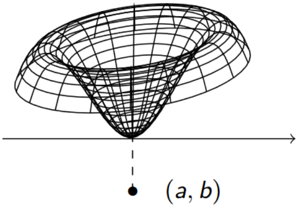
1. Condition nécessaire d'extremum local : Si f admet un minimum local resp. maximum local en x_0, alors $f''(x_0) \geq 0$, resp. $f''(x_0) \leq 0$.
2. Condition suffisante d'extremum local strict : Si $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$, alors f admet un minimum local strict, resp. un maximum local strict en x_0.

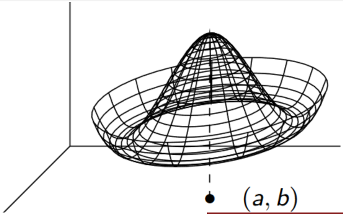
Comment généraliser ce résultat à plusieurs variables?

Extremas locaux pour une fonction de plusieurs variables

Definition

1. f admet un *minimum local*, resp. *maximum local* en a si $\forall x \in \mathcal{V}_a, f(a) \leq f(x)$, resp. $f(a) \geq f(x)$.
2. f admet un *extremum local* en a si f admet un minimum local ou un maximum local en a.
3. f admet un *minimum local strict*, resp. *maximum local strict* en a si $\forall x \in \mathcal{V}_a$ privé de a, $f(a) < f(x)$, resp. $f(a) > f(x)$.





Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Example

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$. Déterminez les points critiques de f.

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Example

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$. Déterminez les points critiques de f.

Corrigé :

Definition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que a est un *point critique* de f si : $df_a = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

Example

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$. Déterminez les points critiques de f.

Corrigé : On a

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff (2x - 2, 2y - 2) = (0, 0) \iff (x, y) = (1, 1)$$

Propriété

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en a. Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Propriété

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en a. Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration : On suppose que f admet un maximum local en a. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. L'application $g : t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0.

Propriété

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en a. Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration : On suppose que f admet un maximum local en a. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. L'application $g : t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0. Alors,

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Propriété

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet un extremum local en a. Alors $d_a f = 0$, ou de manière équivalente $\nabla f(a) = 0$.

Démonstration : On suppose que f admet un maximum local en a. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. L'application $g : t \mapsto f(a + te_j)$ est définie et dérivable au voisinage de 0 et admet un extremum en 0. Alors,

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Or $f(x) \leq f(a)\ \forall x \in \mathcal{V}_a$. Pour $x = a + te_j$ avec $t \to 0^+$ on a $f(a + te_j) - f(a) \leq 0$ et

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = 0^+$$

Pour $x = a + te_j$ avec $t \to 0^-$ on a $f(a + te_j) - f(a) < 0$ et

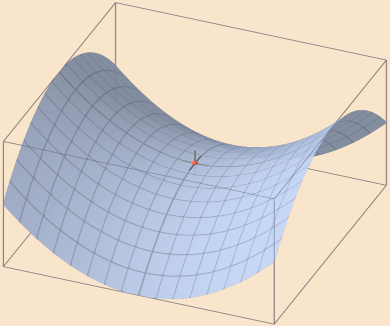
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = 0^-$$

Conclusion : $\nabla f = 0$

Definition

Soit a un point critique de f. On dit que f admet un *point col* ou un *point selle* en a si

- $\exists v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $t \mapsto f(a + tv_1)$ admet un minimum local strict en $t = 0$
- $\exists v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $t \mapsto f(a + tv_2)$ admet un maximum local strict en $t = 0$.



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$(0, 0)$: point-selle de la fonction

Condition d'obtention d'un extremum

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- *Si f admet un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est positive c-a-d : $h^T H_f(a) h \geq 0$.*
- *Si f admet un maximum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est négative c-a-d : $h^T H_f(a) h \leq 0$*

Condition d'obtention d'un extremum

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- *Si f admet un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est positive c-a-d : $h^T H_f(a) h \geq 0$.*
- *Si f admet un maximum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est négative c-a-d : $h^T H_f(a) h \leq 0$*

Démonstration :

Condition d'obtention d'un extremum

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- *Si f admet un minimum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est positive c-a-d : $h^T H_f(a) h \geq 0$.*
- *Si f admet un maximum local en a alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est négative c-a-d : $h^T H_f(a) h \leq 0$*

Démonstration : Formule de Taylor-Young :
$0 \leq f(a+h) - f(a) \underset{h \to 0}{=} \cancel{df_a(h)} + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$. Pour $h = tv$ où $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $t > 0$ petit on trouve

$$0 \leq \frac{f(a+tv) - f(a)}{t^2} = \frac{1}{2} v^T d^2 f_a(v, v) v + o(1).$$

Propriété

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deux fois différentiable en $a \in U$.

- *Si a est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie positive ($h^T H_f(a) h > 0$), alors f admet un minimum local strict en a.*
- *Si a est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie négative ($h^T H_f(a) h < 0$), alors f admet un maximum local strict en a.*

Démonstration : Puisque a est un point critique, la formule de Taylor-Young donne

$$f(a+h) - f(a) \underset{h \to 0}{\sim} h^T H_f(a) h > 0.$$

Donc f admet un minimum local strict en a.

Cas pratique $n = 2$

Corollaire

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. On suppose que a est un point critique de f. On note :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \quad \text{et} \quad H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \quad \delta = \det(H_f(a)) = rt - s^2.$$

- *Si $\delta > 0$ et $r > 0$ alors $H_f(a)$ est définie positive et f a un minimum local strict en a.*
- *Si $\delta > 0$ et $r < 0$ alors $H_f(a)$ est définie négative et f a un maximum local strict en a.*
- *Si $\delta < 0$ alors f présente un point selle en a, et donc n'a pas d'extremum en a.*

Remarque : Si $\delta = 0$ alors on ne peut pas conclure sur la présence ou non d'un extremum de f en a par cette méthode.

Example

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Example

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Détermination des points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 4b = 0 \\ 4b^3 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a(a^8 - 1) = 0 \end{cases} \quad \underbrace{(0,0), (1,1), (-1,-1)}_{\text{points critiques}}.$$

Example

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Détermination des points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 4b = 0 \\ 4b^3 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a(a^8 - 1) = 0 \end{cases} \underbrace{(0,0), (1,1), (-1,-1)}_{\text{points critiques}}.$$

- Etude de la hessienne en les points critiques

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \qquad \det(H_f)(x,y) = 144x^2y^2 - 16$$

Example

Etudier les extremas de la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

- Détermination des points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 4b = 0 \\ 4b^3 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ a(a^8 - 1) = 0 \end{cases} \underbrace{(0,0), (1,1), (-1,-1)}_{\text{points critiques}}.$$

- Etude de la hessienne en les points critiques

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \qquad \det(H_f)(x,y) = 144x^2y^2 - 16$$

  - Pour $(x,y) = (0,0)$, $\delta = -16 < 0$ donc $(0,0)$ est un point selle.
  - Pour $(x,y) = (1,1)$, $\delta = 128 > 0$ et $r = 12 > 0$ donc $(1,1)$ est un minimum local.
  - Pour $(x,y) = (-1,-1)$, $\delta = 128$ et $r = 12$ donc $(-1,-1)$ est un minimum local.

Formes différentielles de degré 1

Formes différentielles de degré 1

Motivation : Trouver les primitives de fonctions à plusieurs variables

Formes différentielles de degré 1

Motivation : Trouver les primitives de fonctions à plusieurs variables

Rappel :

- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $dx_i : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, qui à $a \in U$ associe la fonction $(dx_i)_a$, elle-même définie par $(dx_i)_a(h_1, \ldots, h_n) = h_i$.

Formes différentielles de degré 1

Motivation : Trouver les primitives de fonctions à plusieurs variables

Rappel :

- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $dx_i : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, qui à $a \in U$ associe la fonction $(dx_i)_a$, elle-même définie par $(dx_i)_a(h_1, \ldots, h_n) = h_i$.

Definition

On appelle *1-forme différentielle* sur $U \subset \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^k$: $\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Formes différentielles de degré 1

Motivation : Trouver les primitives de fonctions à plusieurs variables

Rappel :

- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $dx_i : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, qui à $a \in U$ associe la fonction $(dx_i)_a$, elle-même définie par $(dx_i)_a(h_1, \ldots, h_n) = h_i$.

Definition

On appelle *1-forme différentielle* sur $U \subset \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^k$: $\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Ainsi, toute application $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique

$$\omega(M) = \sum_{j=1}^{n} P_j(M) e_j^\star = \sum_{j=1}^{n} P_j(M) dx_j$$

Theorem

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^k$*. Alors* $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *est une forme différentielle de degré* 1 *et de classe* $\mathcal{C}^{k-1}$*. De plus, pour tout* $M \in U$

$$df_M = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) dx_j$$

Theorem

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$. Alors $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une forme différentielle de degré 1 et de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. De plus, pour tout $M \in U$

$$df_M = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) dx_j$$

Definition

On dit qu'une 1-forme différentielle est exacte s'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ telle que $\omega = df$.

Theorem

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$. Alors $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une forme différentielle de degré 1 et de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. De plus, pour tout $M \in U$

$$df_M = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) dx_j$$

Definition

On dit qu'une 1-forme différentielle est exacte s'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ telle que $\omega = df$.

Conséquence : Ainsi, si $\omega : M \in U \mapsto \sum_{j=1}^{n} P_j(M) dx_j$ alors ω est exacte ssi il existe f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ tq $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $P_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Dans ce cas, f est appelée une primitive de ω.

Remarque : En dimension 1, les primitives d'une fonction sont définies à une constante près. Comment généraliser ce résultat pour les fonctions à plusieurs variables ?

Theorem

Soit U un ouvert. On suppose que $\forall (x,y) \in U$, il existe un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ dans U reliant x et y, c'est-à-dire une fonction $\gamma : [0,1] \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $df = 0$ alors f est constante.

Preuve :

1. Soit $\varphi : t \in [0,1] \mapsto f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^m$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On a $\varphi(0) = f(\gamma(0)) = f(x)$ et $\varphi(1) = f(\gamma(1)) = f(y)$.
2. on a $\varphi'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$. Donc φ est constante, donc $\varphi(0) = \varphi(1)$, donc $f(x) = f(y)$.
3. Comme ceci est vrai pour tous x et y dans U, f est constante.

Propriété

On suppose que pour tous $(x,y) \in U$, il existe un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ dans U reliant x et y, c'est-à-dire une fonction $\gamma : [0,1] \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
Soit ω une 1-forme différentielle sur U. S'il existe f une primitive de ω sur U, alors les autres primitives de ω sont les fonctions de la forme $f + c$ où c est une constante.

Preuve :

1. Soit g une primitive de ω. Alors $\omega = dg$.
2. Or f est une primitive de ω donc $dg = df$. Puis $d(g-f) = 0$
3. D'après le Théorème précédent, $g - f = c$ où c est une constante.

Conditions d'existence de primitives

Théorème de Schwarz : $\Rightarrow$ condition nécessaire d'existence de primitives.

Theorem

Soit $\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ avec $w(M) = \sum_{j=1}^n P_j(M)dx_j$. Si ω est exacte, alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $\forall M \in U$,

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(M)$$

Preuve :

1. ω est exacte $\Rightarrow \omega = df$ et $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ et $P_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.
2. Théorème de Schwarz $\Rightarrow \forall M \in U$, $\dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M) = \dfrac{\partial P_i}{\partial x_i}(M)$.

Definition

Une 1-forme différentielle $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) telle que

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \quad \forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad \text{est dite fermée.}$$

Definition

Une 1-forme différentielle $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) telle que

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad \text{est dite fermée.}$$

Example

Montrer que la forme différentielle $d\theta$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ par

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{est exacte.}$$

Definition

Une 1-forme différentielle $\omega = \sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$ de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) telle que

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad \text{est dite fermée.}$$

Example

Montrer que la forme différentielle $d\theta$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ par

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad \text{est exacte.}$$

Corrigé : On a

$$d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Corollaire

Toute forme différentielle exacte est fermée.

Corollaire

Toute forme différentielle exacte est fermée.

Attention : Il existe des fonctions fermées non exactes.

Corollaire

Toute forme différentielle exacte est fermée.

Attention : Il existe des fonctions fermées non exactes.

Sur quels types d'ouverts, a t-on l'équivalence forme différentielle exacte $\iff$ forme différentielle fermée ?

Corollaire

Toute forme différentielle exacte est fermée.

Attention : Il existe des fonctions fermées non exactes.

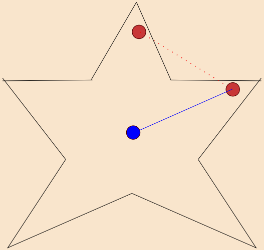
Sur quels types d'ouverts, a t-on l'équivalence forme différentielle exacte $\iff$ forme différentielle fermée ?

Definition

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite *étoilée* par rapport à un point $a_0 \in A$, alors appelé *centre* de A, si $\forall a \in A$, le segment

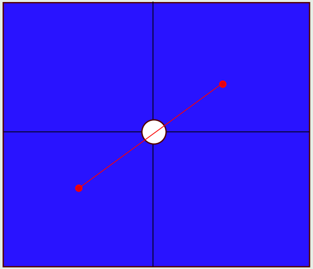
$$[a_0, a] = \{ta_0 + (1-t)a \mid t \in [0,1]\}$$

est inclus dans A.



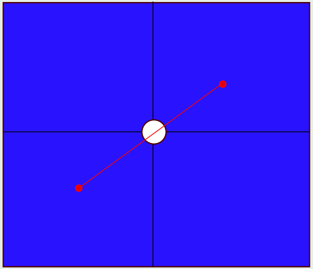
Example

- $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.



Example

- $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.



Theorem (Poincaré)

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. Alors toute 1-forme différentielle fermée sur U est exacte. De plus, si ω est une 1-forme différentielle sur U et f est une primitive de ω, alors les primitives de ω sont les fonctions de la forme $f +$ constante.

Example

1. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle $\omega = y\,dx - x\,dy$. La forme différentielle ω est-elle exacte ?
2. Soit $\omega = (x^3 + y)\,dx + (x + 2y)\,dy$ sur $\mathbb{R}^2$. La forme ω est-elle exacte ? Calculez une primitive f de ω.

Corrigé :

1. On a $\omega = u_x dx + u_y dy$ avec $u_x(x,y) = y$ et $u_y(x,y) = -x$. De plus,
$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$
Ainsi, ω n'est pas exacte.
2. On a $\omega = u_x dx + u_y dy$ avec $u_x(x,y) = x^3 + y$ et $u_y(x,y) = x + 2y$. On a $\dfrac{\partial u_x}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est étoilé, ω est exacte.

Cherchons une primitive f de ω. On cherche donc f telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^3 + y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y \ \color{red}{(2)} \end{cases} \overset{\color{red}{\int_x}}{\Longleftrightarrow} f(x,y) = \frac{x^4}{4} + xy + \alpha(y) \overset{\color{red}{\frac{\partial}{\partial y}}}{\Longleftrightarrow} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \alpha'(y) \overset{\color{red}{(2)}}{=} x + 2y$$

Donc $\alpha(y) = y^2 + k$.

Ainsi, les primitives de ω sont de la forme

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + xy + y^2 + k.$$

Facteur intégrant

Facteur intégrant

Definition

Si ω est une 1-forme différentielle sur U et $\mu : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ non nulle, on dit que μ est un facteur intégrant pour ω si $\mu\omega$ est exacte.

Facteur intégrant

Definition

Si ω est une 1-forme différentielle sur U et $\mu : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ non nulle, on dit que μ est un facteur intégrant pour ω si $\mu\omega$ est exacte.

Remarque : Lorsqu'une forme n'est pas exacte, existe-il existe un facteur intégrant ?

Facteur intégrant

Definition

Si ω est une 1-forme différentielle sur U et $\mu : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ non nulle, on dit que μ est un facteur intégrant pour ω si $\mu\omega$ est exacte.

Remarque : Lorsqu'une forme n'est pas exacte, existe-il existe un facteur intégrant ?

Example

Considérons la forme différentielle $\omega = yzdx + dy + dz$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Est-elle exacte ?
2. Existe-il un facteur intégrant ?

Corrigé :

1. $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \neq \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.
2. Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

Corrigé :

1. $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \neq \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.
2. Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x,y,z)yz \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial x} \quad \mu(x,y,z) \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial y} \quad \mu(x,y,z) \overset{(3)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial z}$

Corrigé :

1. $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \neq \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.
2. Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x,y,z) yz \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial x} \quad \mu(x,y,z) \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial y} \quad \mu(x,y,z) \overset{(3)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial z}$
- $\dfrac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x,y,z) \overset{(\text{Schwarz})}{=} \dfrac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 C}{\partial z \partial y} \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial z} \overset{(3)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial y}$

Corrigé :

1. $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \neq \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.
2. Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x,y,z)yz \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial x} \quad \mu(x,y,z) \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial y} \quad \mu(x,y,z) \overset{(3)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial z}$
- $\dfrac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x,y,z) \overset{(\text{Schwarz})}{=} \dfrac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 C}{\partial z \partial y} \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial z} \overset{(3)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial^2 C}{\partial z \partial x} \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial z} yz + y\mu(x,y,z) \overset{(\text{Schwarz})}{=} \dfrac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x,y,z)$

Corrigé :

1. $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \neq \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.
2. Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x,y,z) yz \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial x} \quad \mu(x,y,z) \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial y} \quad \mu(x,y,z) \overset{(3)}{=} \dfrac{\partial C}{\partial z}$
- $\dfrac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x,y,z) \overset{(\text{Schwarz})}{=} \dfrac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 C}{\partial z \partial y} \overset{(2)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial z} \overset{(3)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial y}$
- $\dfrac{\partial^2 C}{\partial z \partial x} \overset{(1)}{=} \dfrac{\partial \mu}{\partial z} yz + y\mu(x,y,z) \overset{(\text{Schwarz})}{=} \dfrac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x,y,z)$
- $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x,y,z) = \dfrac{\partial \mu}{\partial z} yz + y\mu(x,y,z) \Rightarrow \mu = 0$

Corrigé :

1. $\omega = u_x dx + u_y dy + u_z dz \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial x}$. Donc w n'est pas fermée.
2. Supposons $\exists \mu$ un facteur intégrant. Alors $\mu\omega$ est exacte $\Rightarrow \exists C$ tq $\mu\omega = dC$.

$$dC = \mu yz dx + \mu dy + \mu dz = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz.$$

- $\mu(x,y,z) yz \overset{(1)}{=} \frac{\partial C}{\partial x} \quad \mu(x,y,z) \overset{(2)}{=} \frac{\partial C}{\partial y} \quad \mu(x,y,z) \overset{(3)}{=} \frac{\partial C}{\partial z}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \overset{(1)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x,y,z) \overset{(\text{Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \overset{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial y} \overset{(2)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial z} \overset{(3)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial y}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial x} \overset{(1)}{=} \frac{\partial \mu}{\partial z} yz + y\mu(x,y,z) \overset{(\text{Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x,y,z)$
- $\frac{\partial \mu}{\partial y} yz + z\mu(x,y,z) = \frac{\partial \mu}{\partial z} yz + y\mu(x,y,z) \Rightarrow \mu = 0$
- **Conclusion :** Il n'existe donc pas de facteur intégrant.

Champ de vecteurs

Definition

Un champ de vecteurs sur un ouvert U est une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$. En pratique on considérera des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$.

Champ de vecteurs

Definition

Un champ de vecteurs sur un ouvert U est une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$. En pratique on considérera des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$.

Il y a une équivalence entre les champs de vecteurs et les 1-formes différentielles, définie comme suit : à une forme différentielle $\omega = u_1 dx_1 + \cdots + u_n dx_n$ correspond le champ de vecteurs $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, qui à $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ associe $\begin{pmatrix} u_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ u_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$.

Champ de vecteurs

Definition

Un champ de vecteurs sur un ouvert U est une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$. En pratique on considérera des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$.

Il y a une équivalence entre les champs de vecteurs et les 1-formes différentielles, définie comme suit : à une forme différentielle $\omega = u_1 dx_1 + \cdots + u_n dx_n$ correspond le champ de vecteurs $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, qui à $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ associe $\begin{pmatrix} u_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ u_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$.

Notation : On appelle *nabla*, l'opérateur $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

Gradient et potentiels scalaires

Definition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On appelle *gradient* de f en a et on note $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a)$, ou le vecteur de $\mathbb{R}^n$ définit par :

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Gradient et potentiels scalaires

Definition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On appelle *gradient* de f en a et on note $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a)$, ou le vecteur de $\mathbb{R}^n$ définit par :

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n$$

Remarque : Le gradient d'une fonction caractérise la variabilité de la fonction au voisinage d'un point. Dans un repère orthonormé, si le vecteur gradient n'est pas nul, alors il pointe dans la direction où la fonction croît le plus rapidement, et sa norme est égale au taux de croissance dans cette direction.

Example

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$.

Example

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xyz$.

Corrigé :

Alors $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

Example

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$.

Corrigé :

Alors $\vec{\nabla} f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Comment relier la différentielle au gradient?

Example

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$.

Corrigé :

Alors $\vec{\nabla} f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Comment relier la différentielle au gradient?

Propriété

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. Pour tout $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$df_a(v) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Quelques propriétés

Propriété

Soient f et g deux fonctions différentiables sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a* $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f + g) = \lambda\overrightarrow{\text{grad}}f + \overrightarrow{\text{grad}}g$
2. $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f$

Démonstration :

Quelques propriétés

Propriété

Soient f et g deux fonctions différentiables sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a* $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f + g) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g$
2. $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g + g\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f$

Démonstration :

1. Par définition

$$\nabla(\lambda f + g) = \left(\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_n}\right) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$$

Quelques propriétés

Propriété

Soient f et g deux fonctions différentiables sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a* $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f + g) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g$
2. $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g + g\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f$

Démonstration :

1. Par définition
$$\nabla(\lambda f + g) = \left(\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x_n}\right) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$$
2. $$\nabla(fg) = \left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial(fg)}{\partial x_n}\right) = \left(f\frac{\partial g}{\partial x_1} + g\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, f\frac{\partial g}{\partial x_n} + g\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = f\nabla g + g\nabla f$$

Definition

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On dit que $\vec{V}$ *est un champ de gradients* ou *dérive d'un potentiel scalaire* s'il existe f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U telle que

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f.$$

f est alors appelée un *potentiel scalaire* de $\vec{V}$.

Definition

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On dit que $\vec{V}$ *est un champ de gradients* ou *dérive d'un potentiel scalaire* s'il existe f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U telle que

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f. \qquad f \text{ est alors appelée un } \textit{potentiel scalaire} \text{ de } \vec{V}.$$

Example

Montrons que $\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{e}_x + (x^2 + z)\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ est un champ de gradients.

Definition

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On dit que $\vec{V}$ *est un champ de gradients* ou *dérive d'un potentiel scalaire* s'il existe f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U telle que

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f. \qquad f \text{ est alors appelée un } \textit{potentiel scalaire} \text{ de } \vec{V}.$$

Example

Montrons que $\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{e}_x + (x^2 + z)\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ est un champ de gradients.

Corrigé : On cherche f de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\vec{v} = \nabla f$.

Definition

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On dit que $\vec{V}$ *est un champ de gradients* ou *dérive d'un potentiel scalaire* s'il existe f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f. \qquad f \text{ est alors appelée un } \textit{potentiel scalaire} \text{ de } \vec{V}.$$

Example

Montrons que $\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{e}_x + (x^2+z)\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ est un champ de gradients.

Corrigé : On cherche f de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $\vec{v} = \nabla f$.

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x f &= 2xy \\ \partial_y f &= x^2+z \\ \partial_z f &= y \end{cases} \Longleftrightarrow f(x,y,z) = x^2y + zy + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Opérateur divergence

Definition

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *divergence de* $\overrightarrow{V}$ en a le nombre réel défini par :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(a) = \nabla \cdot \overrightarrow{V}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$$

Opérateur divergence

Definition

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *divergence de* $\overrightarrow{V}$ en a le nombre réel défini par :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(a) = \nabla \cdot \overrightarrow{V}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$$

Interprétation : L'opérateur divergence mesure si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace.

Opérateur divergence

Definition

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *divergence de* $\overrightarrow{V}$ en a le nombre réel défini par :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(a) = \nabla \cdot \overrightarrow{V}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$$

Interprétation : L'opérateur divergence mesure si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace. Illustration en mécanique des fluides :

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho(x,t)\overrightarrow{V}) = 0$$

ρ : masse volumique du fluide en (x, t) et $\overrightarrow{V}$ la vitesse d'un

Opérateur divergence

Definition

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *divergence de* $\overrightarrow{V}$ en a le nombre réel défini par :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(a) = \nabla \cdot \overrightarrow{V}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$$

Interprétation : L'opérateur divergence mesure si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace. Illustration en mécanique des fluides :

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho(x,t) \overrightarrow{V}) = 0$$

ρ : masse volumique du fluide en (x,t) et $\overrightarrow{V}$ la vitesse d'un

écoulement incompressible : $\rho = \text{cste} \Rightarrow \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = 0$. La divergence va mesurer localement les variations de densité de flux.

Example

Pour $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (2xy + \sin(x), x^2y) = (V_1(x,y), V_2(x,y))$. On a :

$$\mathrm{div}\, \vec{V}(x,y) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y) = 2y + \cos(x) + x^2.$$

Example

Pour $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy + \sin(x), x^2y) = (V_1(x,y), V_2(x,y))$. On a :

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y) = 2y + \cos(x) + x^2.$$

Propriété

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *On a* $\operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}) = \lambda \operatorname{div} \overrightarrow{V} + \operatorname{div} \overrightarrow{W}$.
2. *Pour $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$:* $\operatorname{div}(f\vec{V}) = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \cdot \vec{V} + f \operatorname{div} \vec{V}$.

Example

Pour $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2xy + \sin(x), x^2y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$. On a :

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, y) = 2y + \cos(x) + x^2.$$

Propriété

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *On a* $\operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}) = \lambda \operatorname{div} \overrightarrow{V} + \operatorname{div} \overrightarrow{W}$.
2. *Pour $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$:* $\operatorname{div}(f\vec{V}) = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \cdot \vec{V} + f \operatorname{div} \vec{V}$.

Démonstration : Utiliser la définition de l'opérateur divergence et sa linéarité.

Rotationnel et potentiel vecteur

Definition

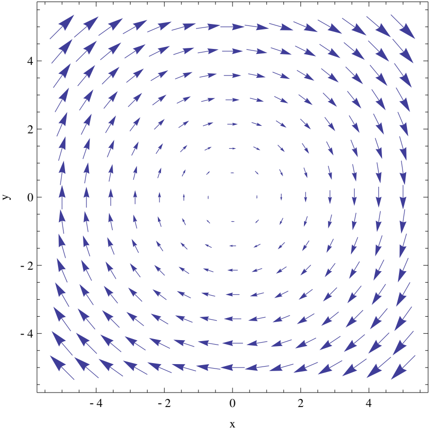
Soit $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z)$ un champ de vecteurs différentiable en $a \in U$. On appelle *rotationnel de* $\vec{V}$ en a, et on note $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(a)$, le vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y}(a) - \dfrac{\partial V_y}{\partial z}(a) \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z}(a) - \dfrac{\partial V_z}{\partial x}(a) \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x}(a) - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Si $\overrightarrow{V}$ est différentiable sur U, on appelle *rotationnel de* $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs qui à a associe $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}(a)$.

Illustration

- Le rotationnel d'un champ vectoriel exprime la tendance qu'ont les lignes de champ du champ vectoriel considéré à tourner autour d'un point.
- Dans une tornade, le vent tourne autour de l'oeil du cyclone et le champ vectoriel vitesse du vent a un rotationnel non nul autour de l'oeil.
- Le rotationnel de ce champ de vitesse est lié aussi au vecteur tourbillon noté généralement $\overrightarrow{\Omega}$ du champs de vitesse par la relation $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}$. Le tourbillon est d'autant plus intense que l'on est proche de l'oeil du cyclone.



Example

Pour $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $\overrightarrow{V}(x, y, z) = (xyz, 2x + 3yz, e^{xyz})$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V}(x, y, z) = (xze^{xyz} - 3y, xy - yze^{xyz}, 2 - xz).$$

Example

Pour $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (xyz, 2x+3yz, e^{xyz})$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V}(x,y,z) = (xze^{xyz} - 3y, xy - yze^{xyz}, 2 - xz).$$

Propriété

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\lambda \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{W}$.
2. *Pour $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$:*
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{V}) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) \wedge \vec{V} + f\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V}$$
3. *Si de plus, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U*
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0} \quad \textit{et} \quad \mathrm{div}\, (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V}) = 0$$

Definition

On dit que $\overrightarrow{V} \in \mathbb{R}^3$ *dérive d'un potentiel vecteur* ou *est un champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs $\overrightarrow{A}$ appelé *potentiel vecteur* de $\overrightarrow{V}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.

Definition

On dit que $\overrightarrow{V} \in \mathbb{R}^3$ *dérive d'un potentiel vecteur* ou *est un champ de rotationnels* s'il existe un champ de vecteurs $\overrightarrow{A}$ appelé *potentiel vecteur* de $\overrightarrow{V}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.

Propriété

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Alors

1. *$\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{0}$.*
2. *$\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\Leftrightarrow \mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = 0$.*
3. *Si f est un potentiel scalaire de $\overrightarrow{V}$, les potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}$ sont les fonctions de la forme $f +$ constante.*
4. *Si $\overrightarrow{A}$ est un potentiel vecteur de $\overrightarrow{V}$, les potentiels vecteurs de $\overrightarrow{V}$ sont les fonctions de la forme $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.*

Example

Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 2yz \\ 2z(x+3y) \\ y(2x+3y)+2z \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^3$.

On peut vérifier que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = 0$. Par conséquent, $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire. Calculons un potentiel scalaire f de V. On cherche $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & = & 2yz \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & = & 2xz + 6yz \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & = & 2xy + 3y^2 + 2z \end{cases}$$

Donc les potentiels de $\overrightarrow{V}$ sont les fonctions de la forme $f(x,y,z) = 2xyz + 3y^2z + z^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Expression des opérateurs dans les bases cylindriques et sphériques

Propriété (Coordonnées cylindriques)

Si f est une fonction de (r, θ, z) :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Pour $\vec{V}$ un champ de vecteurs

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rVr) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}V_\theta + \frac{\partial Vz}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

Propriété (Coordonnées sphériques)

Si f est une fonction de (r, θ, φ)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}V_\varphi$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$$