Groupe PCGI 21.1 — Contrôle du — 13/03/2017

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions du cours :

1. Soit A une matrice carrée. Donner la définition de la trace de A.
2. Donner la définition d'une matrice inversible.
3. *Vrai ou Faux :* (Si une assertion vous semble fausse, justifiez en exhibant un contre exemple).
   Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$
   (a) Multiplication matricielle est commutative, alors $AB = BA$.
   (b) La multiplication des matrices est associative, alors $(AB)C = A(BC)$.

Exercice 1 :

1. Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Le produit ABC est-il défini ? Si oui, le calculer. Même question pour le produit CAB.
2. Calculer $Tr({}^tBB)$ et $Tr(B^tB)$. Que remarquez vous ? Cette formule est-elle générale ?

Exercice 2 :

1. Soient les matrices A et B définies respectivement par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - I_3.$$
   Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n.
2. Calculer $A(3I_3 - 3A + A^2)$. Que pouvez vous en déduire ?

Exercice 3 :

1. On utilise x molécules de C_3H_6 et y molécules de C_2H_4 pour obtenir 4 molécules de CH_4. Trouver x et y.

2. En utilisant la méthode d'elimination de Gauss, résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 :
Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Montrer que la matrice A est inversible. Calculer le déterminant de son inverse et calculer A^{-1}.