10 Intégration

Ce chapitre se fera sur deux séances.

10.1 Intégration directe

Exercice 10.1. Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int 2\,\mathrm{d}x$
2. $\int x\,\mathrm{d}x$
3. $\int x^2-3x+2\,\mathrm{d}x$
4. $\int 2x^5\,\mathrm{d}x$
5. $\int x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{x-3}{2}\,\mathrm{d}x$
7. $\int x-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
8. $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x$
9. $\int \frac{x^4+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
10. $\int 5x^2+x+\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$
11. $\int 3\sin(x)+2\cos(x)\,\mathrm{d}x$
12. $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
13. $\int \sin^4(x)\cos^5(x)\,\mathrm{d}x$
14. $\int 2(2x+1)^3\,\mathrm{d}x$
15. $\int (-2x+1)^5\,\mathrm{d}x$
16. $\int (3x+2)^{-5}\,\mathrm{d}x$
17. $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}\,\mathrm{d}x$
18. $\int \sin(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$
19. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$
20. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$
21. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\,\mathrm{d}x$
22. $\int 3\sin(3x+\frac{\pi}{2})\,\mathrm{d}x$
23. $\int \frac{1}{\sqrt{3x+5}}\,\mathrm{d}x$
24. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}\,\mathrm{d}x$
25. $\int \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x$
26. $\int \sin^6(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$
27. $\int \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
28. $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$
29. $\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$
30. $\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$
31. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
32. $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
33. $\int x\sin(3x)\,\mathrm{d}x$
34. $\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$
35. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$
36. $\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$
37. $\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
38. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$
39. $\int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13}\,\mathrm{d}x$
40. $\int \frac{\ln(x)-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
41. $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
42. $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$
43. $\int \frac{1}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$
44. $\int \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$
45. $\int \frac{1}{x}(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$
46. $\int \frac{e^x+4}{3}\,\mathrm{d}x$
47. $\int e^{3x+1}\,\mathrm{d}x$
48. $\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$
49. $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$
50. $\int (3x^4-2x^3-7x^2+x+1)e^{3x-5}\,\mathrm{d}x$
51. $\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$
52. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$
53. $\int \frac{1}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

1. $2x+k$
2. $\frac{x^2}{2}+k$
3. $\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+2x+k$
4. $\frac{2x^6}{6}$
5. $\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}+\frac{x}{2}+k$
6. $\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}+k$
7. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+k$
8. $-\cos(x)+k$
9. $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+k$
10. $\frac{5x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2\frac{1}{x}+k$
11. $-3\cos(x)+2\sin(x)+k$
12. $\frac{1}{\cos(x)}+k$
13. $\int \cos(x)(1-\sin^2(x))^2\sin^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^9(x)}{9}-\frac{2\sin^7(x)}{7}+\frac{\sin^(5)}{5}+k$
14. $4x^4+8x^3+6x^2+2x+k=\frac{1}{4}(2x+1)^4+k'$
15. $-\frac{1}{12}(-2x+1)^6+k$
16. $-\frac{1}{12}(3x+2)^{-4}+k$
17. $-\frac{1}{3(x^2+x+1)^3}+k$
18. $-\frac{1}{4}\cos^4(x)+k$
19. $2\sqrt{x+1}+k$
20. $3\sqrt{x^2+1}+k$
21. $-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+k$
22. $-\cos(3x+\frac{\pi}{2})=\sin(3x)+k$
23. $\frac{2\sqrt{3x+5}}{3}+k$
24. $\sqrt{x^2+2x-8}+k$
25. $\frac{1}{3\cos^3(x)}+k$
26. $\frac{\sin^7(x)}{7}+k$
27. $\frac{\sin(x)}{x}+k$
28. $\sin(x)-x\cos(x)+k$
29. $(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+k$
30. $\int\frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}+k$
31. $-\sqrt{1-x^2}+k$
32. $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+k$
33. $-x\frac{\cos(3x)}{3}+\frac{\sin(3x)}{9}+k$
34. $1+\cos(2x)=2\cos^2(x)$ donc u'/u^2 ou poser $t=\cos(x)$
35. poser $t=x^2+2$ cela donne $\frac{t\sqrt{t}}{3}-2\sqrt{t}=\frac{\sqrt{x^2+2}(x^2-4)}{3}+k$
36. $\frac{\ln|2x+1|}{2}+k$
37. $\ln(x^2+1)+k$
38. $\frac{\ln(|x^2+4x+3|)}{2}+k$
39. $\ln|3x^2+7x-13|+k$
40. $-\frac{\ln(x)}{x}+k$
41. $\frac{(\ln(x))^2}{2}+k$
42. $-\ln|\cos(x)|+k$
43. Poser $u=\ln(x)$. $-\frac{1}{2\ln^2(x)}+k$
44. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+k$
45. $\frac{(\ln(x))^3}{3}+k$
46. $\frac{e^x+4x}{3}+k$
47. $\frac{e^{3x+1}}{3}+k$
48. $e^{x^2}+k$
49. $-e^{\frac{1}{x}}+k$
50. Par identification en cherchant une solution de la forme $(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)e^{3x-5}$ et en dérivant cette fonction. $(x^4-2x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{9}x+\frac{4}{27})e^{3x-5}+k$.
51. Poser $u=\ln(x)$ puis faire 2 IPP. Ou alors passer par les complexes $(\sin(\ln(x))=\mathrm{Im}(x^i)\dots)$. $\frac{x}{2}(\sin(\ln(x))-\cos(\ln(x)))+k$.
52. $\ln(e^x+1)+k$
53. $-\frac{1}{2e^{2x}}+k$

Exercice 10.2. Pour chaque primitives précédentes, déterminer (si possible) la primitive qui s'annule en 0.

Exercice 10.3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^3 (t+4)\,\mathrm{d}t$
2. $\int_1^2 \frac{3\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$
3. $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_4^0 (4x-x^2)\,\mathrm{d}x$
6. $\int_2^{-1} 3x^3\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^1 (2x+3)(x^2+3x-5)\,\mathrm{d}x$
8. $\int_2^1 \frac{1}{t^6}\,\mathrm{d}x$
9. $\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x$

1. $\frac{33}{2}$
2. $6\sqrt{2}-6$
3. 2
4. $\sqrt{2}-1$
5. $\frac{-32}{3}$
6. $-\frac{45}{4}$
7. -12
8. $-\frac{31}{160}$
9. $-\frac{3}{8}$

10.2 Intégration par parties

Exercice 10.4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^e x^2 \ln(x)\,dx$
2. $\int_0^1 x\text{Arctan}(x)\,dx$
3. $\int_1^e \ln(x)\,dx$
4. $\int_0^1 \text{Arctan}(x)\,dx$
5. $\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(x)\,dx$
6. $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$
7. $\int_1^{e^\pi} \sin\left(\ln(x)\right)dx$

1.
$$\int_1^e x^2\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$$

2.
$$\int_0^1 x\text{Arctan}(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\text{Arctan}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\text{Arctan}(1) - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[x-\text{Arctan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

3.
$$\int_1^e \ln(x)\,dx = \int_1^e 1\times\ln(x)\,dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx = e - [x]_1^e = 1$$

4.
$$\int_0^1 \text{Arctan}(x)\,dx = \int_0^1 1\times\text{Arctan}(x)\,dx = [x\text{Arctan}(x)]_0^1 - \int_0^1 x\,dx\frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

5.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\times\text{Arcsin}(x)\,dx = [x\text{Arcsin}(x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-t^2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

6.
$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \int_0^1 1\times\ln(1+x^2)\,dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$= \ln(2) - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \ln(2) - 2\,[x-\text{Arctan}(x)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

7.
$$\int_1^{e^\pi} \sin\left(\ln(x)\right)dx = \int_1^{e^\pi} \sin\left(\ln(x)\right)dx = \left[x\sin\left(\ln(x)\right)\right]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos\left(\ln(x)\right)dx = -\int_1^{e^\pi} \cos\left(\ln(x)\right)dx$$
$$= -\left[x\cos\left(\ln(x)\right)\right]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \sin\left(\ln(x)\right)dx$$

Par conséquent :
$$\int_1^{e^\pi} \sin\left(\ln(x)\right)dx = -\frac{1}{2}\left[x\cos\left(\ln(x)\right)\right]_1^{e^\pi} = \frac{e^\pi+1}{2}$$

Exercice 10.5. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\sin(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(2x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{e^\pi} e^x\sin(2x)\,dx$

1. $$\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1(-2x)e^{-x}\,dx = -e^{-1}+2\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -\frac{1}{e}+2\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx\right)$$
$$= -\frac{1}{e}+2\left(-e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_0^1\right) = -\frac{1}{e}+2\left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1\right) = 2-\frac{5}{e}$$

2. $$\int_1^e(\ln(x))^2\,dx = \left[x(\ln(x))^2\right]_1^e - \int_1^e x\left(2\frac{\ln(x)}{x}\right)dx = e-2\int_1^e\ln(x)\,dx = e-2\left([x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx\right)$$
$$= e-2(e-(e-1)) = e-2$$

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\sin(x)\,dx = \left[-x^3\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-3x^2)\cos(x)\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,dx$$
$$= 3\left(\left[x^2\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(x)\,dx\right) = 3\left(\frac{\pi^2}{4}-2\left([-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\,dx\right)\right)$$
$$= 3\left(\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,dx\right) = 3\left(\frac{\pi^2}{4}-2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)\right]\right) = \frac{3}{4}(\pi^2-8)$$

4. $$\int_0^1\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(2x)\,dx = [\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(2x)]_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(2x)\,dx = \mathrm{sh}(1)\mathrm{sh}(2)-2\int_0^1\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(2x)\,dx$$
$$= \mathrm{sh}(1)\mathrm{sh}(2)-2\left([\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(2x)]_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(2x)\,dx\right)$$
$$= \mathrm{sh}(1)\mathrm{sh}(2)-2\mathrm{ch}(1)\mathrm{ch}(2)+2+4\int_0^1\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(2x)\,dx$$
D'où résulte :
$$\int_0^1\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(2x)\,dx = \frac{1}{3}(2\mathrm{ch}(1)\mathrm{ch}(2)-\mathrm{sh}(1)\mathrm{sh}(2)-2)$$

5. $$\int_0^{e^\pi} e^x\sin(2x)\,dx = [e^x\sin(2x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2e^x\cos(2x)\,dx = (0-0)-2\int_0^\pi e^x\cos(2x)\,dx$$
$$= -2\left([e^x\cos(2x)]_0^\pi - \int_0^\pi -2e^x\sin(2x)\,dx\right) = -2(e^\pi-1)-4\int_0^\pi e^x\sin(2x)\,dx$$
D'où résulte :
$$\int_0^\pi e^x\sin(2x)\,dx = \frac{2(1-e^\pi)}{5}$$

Exercice 10.6. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,dt$$

1. Démontrer que $\lim\limits_{n+\infty} I_n = 0$
2. Démontrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n = \frac{1}{(n+1)!}+I_{n+1}$$
3. En déduire que :
$$e = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

1. Observons que $\forall t \in [0;1]\,,\ 0 \leq 1-t \leq 1$ et $0 < \mathrm{e}^t \leq \mathrm{e}$. Il en résulte :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;1]\,,\ 0 \leq (1-t)^n \mathrm{e}^t \leq \mathrm{e}$$

   D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{n!}$$

   On en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. Une intégration par parties fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

3. On en déduit de la relation précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (I_{k-1} - I_k) = 1 + I_0 - I_n$$

   avec $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$. On obtient finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - I_n$$

   On peut alors déduire de 1. que :

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

10.3 Intégration par changement de variable

Exercice 10.7. Calculer les intégrales suivantes au moyen d'un changement de variable adéquat :

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x+x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

1. On pose $t = \sqrt{x}$, soit aussi $t^2 = x$ (c'est équivalent car l'intégrale se fait sur une partie de $\mathbb{R}^+$) :

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1-t}{t}2t\,\mathrm{d}t = -\int_1^2 -2(1-t)\,\mathrm{d}t = -\left[(1-t)^2\right]_1^2 = -1$$

2. On pose $t = \sqrt{x}$, soit aussi $x = t^2$:

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln(t^2)}{t}2t\,\mathrm{d}t = 4\int_1^{\sqrt{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t = 4\,[t\ln(t) - t]_1^{\sqrt{2}} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(2) - \sqrt{2} + 1\right)$$

3. On pose $t = \mathrm{e}^x$, soit aussi $x = \ln(t)$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x+t}\right)\mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(1+t)]_1^{\mathrm{e}}$$
$$= \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^{\mathrm{e}} = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right)$$

4. On pose $t = \operatorname{Arcsin}(x)$, soit aussi $x = \sin(t)$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

5. On pose $t = \operatorname{Arcsin}(x)$, soit aussi $x = \sin(t)$:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

6. On pose $t = \ln(x)$, soit aussi $x = \mathrm{e}^t$:

$$\int_0^{\mathrm{e}} \frac{1}{x + x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$$

7. On pose $t = \cos(x)$, d'où $\mathrm{d}t = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{3+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-1}{3+u^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 10.8. Justifier que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)\mathrm{d}t$$

En déduire la valeur de :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(t))\,\mathrm{d}t$$

Posons $x = -t + \frac{\pi}{4}$, soit aussi $t = -x + \frac{\pi}{4}$. On obtient immédiatement le premier résultat :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)(-\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)\mathrm{d}x$$

On en déduit ensuite au moyen de ce résultat préliminaire :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos(t)+\sin(t)}{\cos(t)}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right)\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sqrt{2})\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln(2)$$

Exercice 10.9. Justifier que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

En déduire la valeur de :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Posons $x = -t + \frac{\pi}{2}$, soit aussi $t = -x + \frac{\pi}{2}$. On obtient alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}(-\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

Il en résulte :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} + \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t$$

D'où la valeur commune $\frac{\pi}{4}$ annoncée.
On en déduit ensuite, en posant $t = \sin(x)$ (c'est-à-dire aussi $x = \mathrm{Arcsin}(t)$) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\sqrt{1-\sin^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 10.10. Soit $a \in]0;+\infty[$ fixé. Au moyen d'un changement de variable judicieux, calculer :

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Posons $t = \frac{1}{x}$, soit aussi $x = \frac{1}{t}$:

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{-x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = -I$$

On en déduit que $I = 0$.

Exercice 10.11. Au moyen d'un changement de variable judicieux, calculer :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Posons d'abord $x = \pi - t$, soit aussi $t = \pi - x$:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}(-\mathrm{d}x) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x - I$$

On en déduit que

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Posons maintenant $u=\cos(x)$, soit aussi $x=\operatorname{Arccos}(u)$. On obtient finalement :

$$I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\times 2\int_0^1\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\pi\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{4}$$

10.4 Intégration par combinaison de méthodes et types classiques d'intégrales

Exercice 10.12. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$

1. Commençons pas observer que :

$$\int_1^2\frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_1^2-\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

Posons $t=\frac{1}{x}$, soit aussi $x=\frac{1}{t}$; puis intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x&=-\int_1^{\frac12}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=\int_{\frac12}^1\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=[t\ln(1+t)]_{\frac12}^1-\int_{\frac12}^1 t\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\\&=\ln(2)-\frac12\ln\left(\frac32\right)-\int_{\frac12}^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\ln(2)-\frac12\ln\left(\frac32\right)-[t-\ln(1+t)]_{\frac12}^1\\&=\ln(2)-\frac12\ln\left(\frac32\right)-(1-\ln(2))+\left(\frac12-\ln\left(\frac32\right)\right)=2\ln(2)-\frac32\ln\left(\frac32\right)-\frac12\\&=\frac52\ln(2)-\frac32\ln(3)-\frac12\end{aligned}$$

2. Posons $t=\mathrm{e}^x>0$, soit aussi $x=\ln(t)$, puis intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x&=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln(1+t)}{t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\int_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=-\left[\frac1t\ln(1+t)\right]_1^{\mathrm{e}}+\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}\\&=-\frac{1}{\mathrm{e}}\ln(1+\mathrm{e})+\ln(2)+\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac1x-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=-\frac1{\mathrm{e}}\ln(1+\mathrm{e})+\ln(2)+[\ln(x)-\ln(1+x)]_1^{\mathrm{e}}\\&=-\frac1{\mathrm{e}}\ln(1+\mathrm{e})+\ln(2)+\ln(\mathrm{e})-\ln(1+\mathrm{e})-\ln(1)+\ln(2)=1+2\ln(2)-\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\ln(1+\mathrm{e})\end{aligned}$$

Exercice 10.13. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$$

1. Posons $x = -t + \frac{\pi}{2}$, soit aussi $t = -x + \frac{\pi}{2}$. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$$

2. On obtient la relation de récurrence annoncée en intégrant par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(t)\right)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ [1 + (n+1)]\,I_{n+2} = (n+1)I_n$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

3. Pour tout $p \geq 1$:

$$I_{2p} = I_0 \prod_{k=0}^{p-1} \frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t \times \prod_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=0}^{p-1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{-2k+2)^2} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=0}^{2p} k \times \left(\prod_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2k+1}\right)^2$$
$$= \frac{\pi}{2}(2p)!\frac{1}{2^{2p}}\frac{1}{(p!)^2} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}$$

Ce résultat demeure valable pour $p = 0$ Par conséquent :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}$$

On obtient de même :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p)!}{(2p+1!)}$$

Exercice 10.14. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 2t + 2}$ 2. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t}{t^2 + 2t + 2}\mathrm{d}t$

1. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t+2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$
2. $\int_{-1}^0 \frac{t}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2+1} = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \mathrm{Arctan}(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}$

Exercice 10.15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

1. Exprimer sans symbole intégral les fonctions F_1 et F_2.
2. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une relation de récurrence entre $F_n(x)$ et $F_{n+1}(x)$.
3. En déduire l'expression sans symbole intégral de F_3.

1. On obtient sans difficulté pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{Arctan}(x)$$

Puis, en posant $t=\tan(\theta)$, soit aussi $\theta=\text{Arctan}(t)$:

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\text{Arctan}(x)} \frac{\left(1+\tan^2(\theta)\right)\mathrm{d}\theta}{\left(1+\tan^2(\theta)\right)^2} = \int_0^{\text{Arctan}(x)} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\tan^2(\theta)} = \int_0^{\text{Arctan}(x)} \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\text{Arctan}(x)} (1+\cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\text{Arctan}(x)} = \frac{1}{2}\text{Arctan}(x)+\frac{1}{4}\sin\left(2\text{Arctan}(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\text{Arctan}(x)+\frac{1}{2}\sin\left(\text{Arctan}(x)\right)\cos\left(\text{Arctan}(x)\right) = \frac{1}{2}\text{Arctan}(x)+\frac{1}{2}\tan\left(\text{Arctan}(x)\right)\cos^2\left(\text{Arctan}(x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\text{Arctan}(x)+\frac{1}{2}x\times\frac{1}{1+\tan^2\left(\text{Arctan}(x)\right)} = \frac{1}{2}\left(\text{Arctan}(x)+\frac{x}{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

2. Une intégration par parties fournit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}} = \int_0^x \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^{n+1}}t\,\mathrm{d}t \\
&= F_n(x)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\times\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{n}\times\frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = F_n+\frac{1}{2n}\times\frac{x}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{2n}F_n(x) \\
&= \frac{1}{2n}\times\frac{x}{(1+x^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}F_n(x)
\end{aligned}$$

3. On peut alors déduire immédiatement de 10.15.1. et 10.15.2. que :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\ F_3(x) &= \frac{1}{2\times 2}\times\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{2\times 2-1}{2\times 2}F_2(x) = \frac{1}{4}\times\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\left(\text{Arctan}(x)+\frac{x}{1+x^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{8}\times\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}\text{Arctan}(x)
\end{aligned}$$

Exercice 10.15 (Bis). Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{2(1+t)}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

En utilisant le résultat du 10.15.1. nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2(1+t)}{(1+t^2)}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{2}{(1+t^2)^2}+\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t = \left[\text{Arctan}(t)+\frac{t}{1+t^2}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 \\
&= 1+\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 10.16. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1+2\cos(t)}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)\cos(t)}$
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)}$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2x}{1+x^2}}\left(\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}(\sqrt{3})-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

2. On peut calculer cette intégrale sans faire de changement de variable en reconnaissant la forme $\frac{u'}{1+2u}$. Nous allons tout de même la calculer avec un changement de variable. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1+2\cos(t)} = \int_1^0 \frac{-1}{1+2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln(2x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(3)$

3. **1re méthode :** $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan(t)\cos^2(t)} = \int_0^1 \frac{\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}}{1+x\frac{1}{1+x^2}} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$
   2de méthode : $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)\cos(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{2}\sin(2t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{2+\sin(2t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin(x)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

4. $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)}$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)}$$
   Les règles de Bioche nous indiquent de poser $x = \tan(t)$, soit $t = \mathrm{Arctan}(x)$. Or $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ " = " $+\infty$. Nous n'avons pas vu comment calculer ce type d'intégrale. Nous allons donc admettre qu'il suffit de le faire à l'aide de limite. Pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$:
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)} = \int_0^{\tan(x)} \frac{\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u}{1+\frac{1}{1+u^2}} = \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{u^2+2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\tan(x)} \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+1}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(x)} \frac{1}{y^2+1}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(x)\right)$$
   On en déduit :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(x)\right) = \lim_{\theta\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arctan}(\theta) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$
   D'où finalement :
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)} = \pi\sqrt{2}$$

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1-\cos^2(t)\right)\left(-\sin(t)\right)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(\frac{2}{x^2+1}-1\right)\mathrm{d}x = \left[2\mathrm{Arctan}(x)-x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 2\mathrm{Arctan}(1)-1-2\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}-2\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

10.5 Applications

Exercice 10.17. Calculer l'intensité efficace I_e d'un courant alternatif en fonction de sa demi-amplitude I_m, sachant qu'il s'agit de la racine carrée de la moyenne du carré de l'intensité au cours d'une période. (L'expression instantanée de cette intensité est de la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, où $(\omega;\varphi) \in \mathbb{R}^2$).

Par définition, la période étant $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\begin{aligned}
I_e^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T (i(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{I_m^2}{2T}\int_0^T (1+\cos(2\omega t+2\varphi))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{I_m^2}{2T}\left[t+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+2\varphi)\right]_0^T = \frac{I_m^2}{2T}\left[T+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T+2\varphi)-\frac{1}{2\omega}\sin(2\varphi)\right] \\
&= \frac{I_m^2}{2T}\left[T+\frac{T}{4\pi}\sin(4\pi+2\varphi)-\frac{T}{4\pi}\sin(2\varphi)\right] = \frac{I_m^2}{2T}\left[T+\frac{T}{4\pi}\sin(2\varphi)-\frac{T}{4\pi}\sin(2\varphi)\right] = \frac{I_m^2}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Exercice 10.18. Déterminer l'aire du domaine (D) du plan défini par le système d'inéquations :

$$\begin{cases} 1 \leq & x & \leq \mathrm{e} \\ x \leq & y & \leq x+\frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$$

En unités d'aire, l'aire demandée est mesurée par :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \left[\left(x+\frac{\ln(x)}{x}\right)-x\right]\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln'(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[(\ln(x))\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$$

Exercice 10.19. Déterminer l'aire de la région du plan délimitée par les courbes d'équations respectives $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = \frac{1}{(1+x^2)}$

Cherchons d'abord les intersections des deux courbes :

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow x^2(1+x^2)-2=0 \Leftrightarrow (x^2)^2+(x^2)-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= X \\ X^2+X-2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=1 \text{ ou } x^2=-2$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1$$

Par ailleurs :

$$\forall x \in [-1;1],\ \frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2} = \frac{-x^4-x^2+2}{2(1+x^2)} = -\frac{(x^2-1)(x^2+2)}{2(1+x^2)} \geq 0$$

En unités d'aire, l'aire demandée est donc mesurée par :

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\left[\mathrm{Arctan}(x)-\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = 2\mathrm{Arctan}(1)-\frac{2}{3} = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{3} = \frac{3\pi-2}{6}$$

Exercice 10.20. Déterminer l'aire de la région du plan délimitée par les courbes d'équations respectives $y = 2x^2$, $y = x^3$ et $y = \sqrt[4]{x}$.

Cherchons d'abord les intersections des trois courbes (leur intersection à l'origine étant évidente) :

$$2x^2 = x^3 \Leftrightarrow x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

$$2x^2 = \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow 16x^8 = x \Leftrightarrow x\left(16x^7 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt[7]{16}}$$

$$x^3 = \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow x^{12} = x \Leftrightarrow x\left(x^{11} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Par ailleurs, pour tout $x \in [0;1]$, $2x^2 \geq x^3$ et $\sqrt[4]{x} \geq x^3$; de plus, sur $[0;1]$, $\sqrt[4]{x} \geq 2x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[7]{16}}$. En unités d'aire, l'aire demandée est donc mesurée par :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(\sqrt[4]{x} - x^3\right) \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{\sqrt[7]{16}}} \left(\sqrt[4]{x} - 2x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt[7]{16}}} \\ &= \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{4}\right) - \left[\frac{4}{5}\left(\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{7}}\right)^{\frac{5}{4}} - \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{7}}\right)^3\right] = \frac{11}{20} - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{5}{28}} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{7}} \end{aligned}$$

Exercice 10.21. Dans un repère donné du plan, on considère sur $[0;1]$ la courbe (C) : $y = x - x^3$. Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que la droite d'équation $y = ax$ partage le sous-ensemble plan limité par (X) et l'axe des abscisses du repère en deux sous-ensembles plans d'aires égales.

Cherchons l'intersection de (X) et d'une telle droite :

$$x - x^3 = ax \Leftrightarrow x^3 + x(a-1) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + (a-1)) = 0$$

Si $a \geq 1$, la seule solution réelle est $x = 0$. Si $0 \leq a < 1$, les deux solutions dans $[0;1]$ sont 0 et $\sqrt{1-a}$. Et si $a < 0$, la seule solution dans $[0;1]$ est 0. Il est donc nécessaire pour parvenir au résultat cherché que $a \in]0;1[$. Plaçons-nous désormais dans cette hypothèse. Alors sur $[0;1]$, $x - x^3 \geq ax \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{1-a}$. La condition recherchée s'exprime dons par :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{1-a}} \left(x - x^3 - ax\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - x^3\right) \mathrm{d}x &\Leftrightarrow \left[(1-a)\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-a}} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-a)^2 - \frac{1}{4}(1-a)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow (1-a)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Exercice 10.22. Calculer le volume :

1. d'une boule de rayon R.
2. d'un demi-cône d'aire de base B et de hauteur h (Attention, un cône n'est pas ce que vous croyez).
3. du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe de la fonction ln considérée sur $[1;e]$.
4. du solide engendré par la rotation autour de l'axe des ordonnées de la courbe de la fonction ln considérée sur $[1;e]$.

1. Soit (P) un plan dont l'intersection avec la boule est non vide. Notons z la distance à (P) du centre de la boule. L'intersection de (P) et de la boule est un disque de rayon $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$; son aire est donc $S(z) = \pi\left(R^2 - z^2\right)$.

Il en résulte que le volume de la boule est :

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - z^2\right) \mathrm{d}z = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - z^2\right) \mathrm{d}z = 2\pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 2\pi\frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2. Soit (P) un plan dont l'intersection avec le demi-cône est non vide. Notons z la distance à (P) du sommet S du demi-cône et notons $S(z)$ l'aire du domaine plan intersection du demi-cône et de (P). En utilisant le théorème de Thalès, on obtient :

$$\frac{S(z)}{B} = \left(\frac{z}{h}\right)^2 \Rightarrow S(z) = \frac{B}{h^2} z^2$$

Il en résulte que le volume du demi-cône est :

$$V = \int_0^z S(z)\,\mathrm{d}z = \frac{B}{h^2}\int_0^h z^2\,\mathrm{d}z = \frac{B}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{B}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Bh$$

3. Le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe de la fonction ln considérée sur $[1\,;\mathrm{e}]$ est, en unités de volume :

$$\begin{aligned} V &= \int_1^{\mathrm{e}} \pi\,[\ln(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^{\mathrm{e}} 1 \times [\ln(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi\left(\left[x\,[\ln(x)]^2\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\left(2\ln(x)\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right) \\ &= \pi\left(\mathrm{e} - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x\right) = \pi\left(\mathrm{e} - 2\left([x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x\right)\right) = \pi\,(\mathrm{e} - 2\,(\mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1))) = \pi\,(\mathrm{e} - 2) \end{aligned}$$

4. Le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des ordonnées de la courbe de la fonction ln considérée sur $[1\,;\mathrm{e}]$ est, en unités de volume :

$$V = \int_0^1 \pi\,(\mathrm{e}^y)^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y = \pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$$

Exercice 10.23. Déterminer la position du centre d'inertie G :

1. du solide plan homogène délimité par la parabole d'équation $y = ax^2$, la droite d'équation $x = a$ et l'axe des abscisses dans un repère donné du plan.
2. d'un demi-disque plan homogène.

Indication. Le centre d'inertie peut être vu comme le « point moyen » des masses. Il s'agit de trouver le centre d'inertie d'un solide plan homogène compris entre l'axe des abscisses, une courbe $f(x)$ et deux droites $x = a$ et $x = b$. Pour comprendre les choses, découpons notre plaque en lamelle très fines. Une lamelle aura pour abscisse $x \in [0\,;a]$, pour hauteur $f(x)$ et pour largeur Δx. La masse de la lamelle est donc $f(x)\Delta x$.
La masse de la plaque (homogène) est donc la somme de toutes les masses des lamelles, soit (les lamelles étant très petites)

$$M = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Le centre d'inertie total est la moyenne pondérée par les masses, des centres d'inertie des lamelles. C'est-à-dire, formellement

$$G = \frac{\int_a^b G(x) f(x)\,\mathrm{d}x}{M}$$

Ainsi, connaissant les abscisses et ordonnées des centre d'inertie de chaque lamelle : $G(x) = \left(x\,;\frac{f(x)}{2}\right)$, nous avons

$$x_G = \frac{\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$y_G = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

1. Les deux courbes se coupent sur $[0;+\infty[$ aux points $(0;0)$ et $\left(a;a^3\right)$. Donc l'abscisse de G est donnée par :

$$x_G = \frac{\int_0^a (ax^2)x\,\mathrm{d}x}{\int_0^a (ax^2)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a x^3\,\mathrm{d}x}{\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{3}{4}a$$

   Et l'ordonnée de G est donnée par :

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a (ax^2)^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^a (ax^2)\,\mathrm{d}x} = \frac{a}{2}\frac{\int_0^a x^4\,\mathrm{d}x}{\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x} = \frac{a}{2}\times\frac{\frac{a^5}{5}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{3}{10}a^3$$

2. Décrivons le demi-cercle dans un repère dont l'origine est le centre du cercle et dont l'unité est son rayon. Il est alors immédiat par symétrie que l'abscisse de G est $x_G = 0$. L'équation du demi-cercle étant $y = \sqrt{1-x^2}$, l'ordonnée de G est alors donnée par :

$$\frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}^2\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\times\frac{2\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x}{2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\times\frac{\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1}{\frac{1}{4}\pi(1)^2} = \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\pi}$$