

# Dérivation et Intégration

## A1 Semestre 2

JAD DABAGHI

Enseignant-Chercheur en Mathématiques DVRC

*[jad.dabaghi@devinci.fr](mailto:jad.dabaghi@devinci.fr)*



# Table des matières

① Analyse réelle

② Relations de comparaison

# Objectifs

- 1 Comprendre les comportements locaux et asymptotiques des fonctions
- 2 Savoir manipuler les développements limités
- 3 Savoir calculer plusieurs familles d'intégrales
- 4 Savoir résoudre les équations différentielles linéaires du 1er et 2nd ordre.

# Contenu du module

## ① Chapitre 1 : Analyse réelle (CMO 1)

- Un peu de topologie, continuité d'une fonction en un point.

## ② Chapitre 2 : Relations de comparaison (CMO 1)

- Fonctions dominées, fonctions négligeables, fonctions équivalentes.

## ③ Chapitre 3 : Développements limités (CMO 2)

- Formules de Taylor, opérations sur les développements limités, applications.
- **Contrôle continu 45 minutes 11 Mars 2023**

## ④ Chapitre 4 : Calcul d'intégrales (CMO 3)

## ⑤ Chapitre 5 : Équations différentielles (CMO 4)

# Analyse réelle

# Analyse réelle

## Definition (distance)

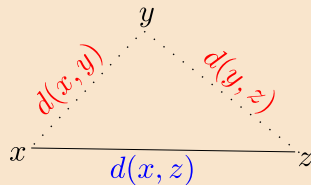
Soit  $E$  un ensemble non vide. Une **distance** sur  $E$  est une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifie  $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E$

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{homogénéité})$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{symétrie})$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Le couple  $(E, d)$  est appelé **espace métrique**.



## Exemple :

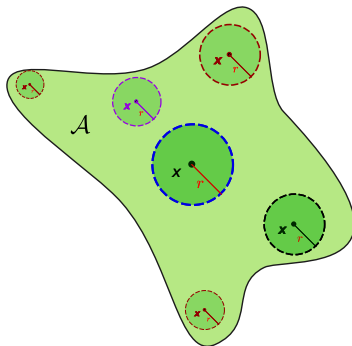
- Sur  $\mathbb{R}$ , la métrique usuelle est  $d(x, y) = |x - y|$
- Sur  $\mathbb{C}$ , la métrique usuelle est  $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$

## Definition (Ouvert)

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On dit que  $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$  est un ouvert de  $E$  si  $\mathcal{A}$  contient une boule ouverte. Autrement dit, si

$$\forall x \in \mathcal{A}, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset \mathcal{A}$$

$$B(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\}$$



### Exemples ouverts :

- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2$
- $]a, b[$
- $B(x, r)$

## Definition (Voisinage)

- $(E, d)$  **espace métrique** et  $a \in E$ .

On dit que  $\mathcal{V} \subset E$  est un voisinage de  $a$  si, et seulement si, il existe un ouvert  $O \subset \mathcal{V}$  contenant  $a$ . Autrement dit s'il existe  $B(a, r) \subset \mathcal{V}$ .

## Remarque :

- En dimension 1,

$$\mathcal{V}_a = ]a - \eta, a + \eta[$$

- En dimension 2,

$$\mathcal{V}_a = B(a, \eta)$$

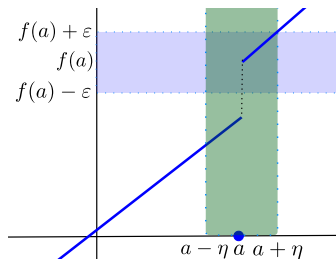
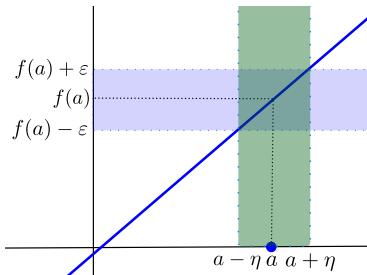


# Continuité

## Definition (Caractérisation de Weierstrass)

Une fonction  $f$  est dite continue en  $a \in I$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \quad \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right).$$



# Fonctions dominées

## Definition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  est **dominée** par  $\varphi$  au voisinage de  $a$ , s'il existe une fonction  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  bornée au voisinage de  $a$  et telle que  $f = \varphi u$  au voisinage de  $a$ . On note

$$f = \mathcal{O}(\varphi)$$

# Fonctions dominées

## Definition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  est **dominée** par  $\varphi$  au voisinage de  $a$ , s'il existe une fonction  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  bornée au voisinage de  $a$  et telle que  $f = \varphi u$  au voisinage de  $a$ . On note

$$f = \mathcal{O}(\varphi)$$

**Exemple :**  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\varphi(x) = x^2$ . Alors

$$f(x) = \varphi(x)u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or  $u$  est bornée donc  $f = \mathcal{O}(\varphi)$ .

# Fonctions négligeables

## Definition

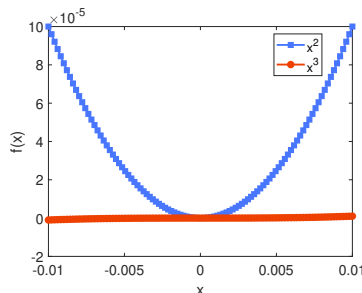
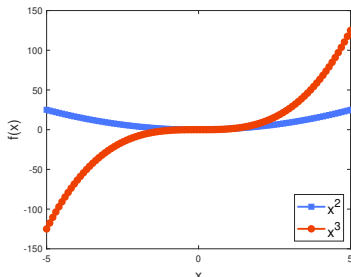
on dit que  $f$  est **négligeable** devant  $\varphi$  au voisinage de  $a$ , s'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I$  tel que  $f = \varphi\varepsilon$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_a \varepsilon = 0$ . On note  $f = o(\varphi)$ .

# Fonctions négligeables

## Definition

on dit que  $f$  est **négligeable** devant  $\varphi$  au voisinage de  $a$ , s'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I$  tel que  $f = \varphi\varepsilon$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_a \varepsilon = 0$ . On note  $f = o(\varphi)$ .

**Exemple :**  $x^3 = o(x^2)$  au voisinage de 0 car  $x^3 = x \times x^2$  avec  $\varepsilon(x) = x$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .



# Quelques résultats

## Propriété

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ .

- 1 La fonction  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  si, et seulement si  $f = \mathcal{O}(1)$ .
- 2 La fonction  $f$  tend vers 0 en  $a$  si, et seulement si  $f = o(1)$ .

# Quelques résultats

## Propriété

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ .

- 1 La fonction  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  si, et seulement si  $f = \mathcal{O}(1)$ .
- 2 La fonction  $f$  tend vers 0 en  $a$  si, et seulement si  $f = o(1)$ .

## Démonstration :

- 1  $(\Rightarrow)$  On suppose  $f$  bornée au voisinage de  $a$ .  $\forall x \in \mathcal{V}_a$ ,  $|f(x)| = f(x) \times \underbrace{1}_{\text{bornée}}$ . Donc  $f = \mathcal{O}(1)$ .

# Quelques résultats

## Propriété

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ .

- ① La fonction  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  si, et seulement si  $f = \mathcal{O}(1)$ .
- ② La fonction  $f$  tend vers 0 en  $a$  si, et seulement si  $f = o(1)$ .

## Démonstration :

- ①  $(\Rightarrow)$  On suppose  $f$  bornée au voisinage de  $a$ .  $\forall x \in \mathcal{V}_a$ ,  $|f(x)| = f(x) \times \underbrace{1}_{\text{bornée}}$ . Donc

$$f = \mathcal{O}(1).$$

$(\Leftarrow)$   $f = \mathcal{O}(1)$ . Alors  $\exists \varphi$  bornée sur  $\mathcal{V}_a$  tel que  $f = \varphi \times 1$  sur  $\mathcal{V}_a$ . Donc  $f$  bornée sur  $\mathcal{V}_a$ .



2  $(\Rightarrow)$   $f$  tend vers 0 en  $a$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_1 > 0 \forall x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[, |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On pose

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

Alors  $f = o(1)$ .

2  $(\Rightarrow)$   $f$  tend vers 0 en  $a$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_1 > 0 \forall x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[, |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On pose

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

Alors  $f = o(1)$ .

$(\Leftarrow)$   $f = o(1)$  au voisinage de  $a$ . Alors  $\exists \varphi$  définie au voisinage de  $a$  tel que  $f = \varphi 1$  au voisinage de  $a$  avec  $\lim_a \varphi = 0$ .

Or  $\lim_a \varphi \in \mathcal{V}_a$  donc  $\lim_a f = \lim_a \varphi = 0$ .

## Quelques remarques

- ① Lorsque  $f = o(g)$  au voisinage de  $a \in I$ ,  $f = g \times \varepsilon$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_a \varepsilon = 0$ .  
Mais,  $\lim_a \varepsilon \not\rightarrow 0$  sur  $I$  tout entier.

**Contre exemple :**

$$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

On a  $f = o(g)$  au voisinage de 0 ( $\varepsilon(x) = x$ ) mais  $\varepsilon(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

## Quelques remarques

- ① Lorsque  $f = o(g)$  au voisinage de  $a \in I$ ,  $f = g \times \varepsilon$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_a \varepsilon = 0$ .  
Mais,  $\lim_a \varepsilon \not\rightarrow 0$  sur  $I$  tout entier.

**Contre exemple :**

$$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

On a  $f = o(g)$  au voisinage de 0 ( $\varepsilon(x) = x$ ) mais  $\varepsilon(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

- ② Si  $f = o(h)$  et  $g = o(h)$  au voisinage de  $a$  alors  $f$  n'est pas forcément égal à  $g$ .

**Contre exemple :**

$$f : x \mapsto x^3 \quad g : x \mapsto x^4 \quad h : x \mapsto x^2.$$

On a  $f = o(h)$  au voisinage de 0 et  $g = o(h)$  au voisinage de 0 mais  $f \neq g$ .

## Quelques remarques

- ❶ Lorsque  $f = o(g)$  au voisinage de  $a \in I$ ,  $f = g \times \varepsilon$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_a \varepsilon = 0$ .  
Mais,  $\lim_a \varepsilon \not\rightarrow 0$  sur  $I$  tout entier.

**Contre exemple :**

$$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

On a  $f = o(g)$  au voisinage de 0 ( $\varepsilon(x) = x$ ) mais  $\varepsilon(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

- ❷ Si  $f = o(h)$  et  $g = o(h)$  au voisinage de  $a$  alors  $f$  n'est pas forcément égal à  $g$ .

**Contre exemple :**

$$f : x \mapsto x^3 \quad g : x \mapsto x^4 \quad h : x \mapsto x^2.$$

On a  $f = o(h)$  au voisinage de 0 et  $g = o(h)$  au voisinage de 0 mais  $f \neq g$ .

- ❸ Le même phénomène s'observe pour la notation  $\mathcal{O}$ .

# Règles de calcul

## Propriété

- 1  $f = o(\varphi) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi)$      (*négligeable  $\Rightarrow$  bornée*)
- 2  $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$  et  $f_2 = \mathcal{O}(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$      (*somme de fonctions bornée est bornée*)
- 3  $f_1 = \mathcal{O}(\varphi_1)$  et  $f_2 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = \mathcal{O}(\varphi_1 \varphi_2)$
- 4  $f_1 = o(\varphi)$  et  $f_2 = o(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(\varphi)$      (*somme de termes négligeable est négligeable*)
- 5  $f_1 = o(\varphi_1)$  et  $f_2 = o(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(\varphi_1 \varphi_2)$
- 6  $f = \mathcal{O}(\varphi_1)$  et  $\varphi_1 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi_2)$      (*transitivité de la domination*)
- 7  $f = o(\varphi_1)$  et  $\varphi_1 = o(\varphi_2) \Rightarrow f = o(\varphi_2)$  (*transitivité de la négligence*)

# Démonstration

①  $f = o(\varphi)$  au voisinage d'un point  $a \Rightarrow f = g\varphi$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_a g = 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction  $g$  est donc bornée au voisinage de  $a$ . Alors  $f = \mathcal{O}(\varphi)$ .

# Démonstration

①  $f = o(\varphi)$  au voisinage d'un point  $a \Rightarrow f = g\varphi$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_a g = 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction  $g$  est donc bornée au voisinage de  $a$ . Alors  $f = \mathcal{O}(\varphi)$ .

②  $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$  alors  $f_1 = \varphi u$  au voisinage de  $a$  où  $u$  est bornée au voisinage de  $a$ .

$$\exists \eta_1 > 0 \forall x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[, f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$



# Démonstration

- ①  $f = o(\varphi)$  au voisinage d'un point  $a \Rightarrow f = g\varphi$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_a g = 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction  $g$  est donc bornée au voisinage de  $a$ . Alors  $f = \mathcal{O}(\varphi)$ .

- ②  $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$  alors  $f_1 = \varphi u$  au voisinage de  $a$  où  $u$  est bornée au voisinage de  $a$ .

$$\exists \eta_1 > 0 \forall x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[, f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$

$f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$  donc  $f_2 = \varphi v$  au voisinage de  $a$ .

$$\exists \eta_2 > 0 \forall x \in ]a - \eta_2, a + \eta_2[, f_2(x) = \varphi(x)v(x).$$

# Démonstration

- ①  $f = o(\varphi)$  au voisinage d'un point  $a \Rightarrow f = g\varphi$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_a g = 0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction  $g$  est donc bornée au voisinage de  $a$ . Alors  $f = \mathcal{O}(\varphi)$ .

- ②  $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$  alors  $f_1 = \varphi u$  au voisinage de  $a$  où  $u$  est bornée au voisinage de  $a$ .

$$\exists \eta_1 > 0 \forall x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[, f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$

$f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$  donc  $f_2 = \varphi v$  au voisinage de  $a$ .

$$\exists \eta_2 > 0 \forall x \in ]a - \eta_2, a + \eta_2[, f_2(x) = \varphi(x)v(x).$$

Pour  $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$  on a  $\forall x \in ]a - \eta, a + \eta[ (f_1 + f_2)(x) = \varphi(x)(u + v)(x)$ . Comme  $u + v$  bornée au voisinage de  $a$  on a  $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$ .

# Démonstration

- 4 •  $f_1 = o(\varphi)$  au voisinage de  $a$  alors il existe une fonction  $\varepsilon_1$  définie au voisinage de  $a$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$$

et vérifiant  $f_1 = \varepsilon_1 \varphi$  au voisinage de  $a$

- $f_2 = o(\varphi)$  au voisinage de  $a$  alors il existe une fonction  $\varepsilon_2$  définie au voisinage de  $a$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x) = 0$$

vérifiant  $f_2 = \varepsilon_2 \varphi$  au voisinage de  $a$ .

Ainsi, la fonction  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  est bien définie au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .  
Alors,  $f_1 + f_2 = o(\varphi)$ .

# Règle pratique

## Propriété

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Supposons que  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $I \setminus a$ . Alors au voisinage de  $a$

- ①  $f$  est dominée par  $\varphi$  si, et seulement si,  $\frac{f}{\varphi}$  est bornée au voisinage de  $a$ .
- ②  $f$  est négligeable devant  $\varphi$  si, et seulement si,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ .

# Fonctions équivalentes

## Definition

Soient  $f$  et  $g$  définies sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$ , s'il existe une fonction  $h$  définie sur  $I$  telle que  $f = gh$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$ . On note  $f \sim_a g$ .

# Fonctions équivalentes

## Definition

Soient  $f$  et  $g$  définies sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$ , s'il existe une fonction  $h$  définie sur  $I$  telle que  $f = gh$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$ . On note  $f \sim_a g$ .

**Exercice :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(x)$  et  $g(x) = x$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont équivalentes en 0.

# Fonctions équivalentes

## Definition

Soient  $f$  et  $g$  définies sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$ , s'il existe une fonction  $h$  définie sur  $I$  telle que  $f = gh$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$ . On note  $f \sim_a g$ .

**Exercice :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(x)$  et  $g(x) = x$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont équivalentes en 0.

**Correction :** On a  $f \sim_0 g$ . En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = h(x) \times g(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{0} 1.$$

# Fonctions équivalentes

## Definition

Soient  $f$  et  $g$  définies sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$ , s'il existe une fonction  $h$  définie sur  $I$  telle que  $f = gh$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$ . On note  $f \sim_a g$ .

**Exercice :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(x)$  et  $g(x) = x$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont équivalentes en 0.

**Correction :** On a  $f \sim_0 g$ . En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = h(x) \times g(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{0} 1.$$

**Remarque :**  $x \mapsto x$  est un DL à l'ordre 1 de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  au voisinage de 0.



# Équivalent pour les polynômes

$$f(x) = \sum_{k=p}^n a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

1 **Étude en 0** : Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n = a_p x^p \underbrace{\left( 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p} x + \dots + \frac{a_n}{a_p} x^{n-p} \right)}_{\rightarrow 1}$$

Donc  $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$ .

# Équivalent pour les polynômes

$$f(x) = \sum_{k=p}^n a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

❶ **Étude en 0** : Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n = a_p x^p \underbrace{\left( 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p} x + \dots + \frac{a_n}{a_p} x^{n-p} \right)}_{\rightarrow 1}$$

Donc  $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$ .

❷ **Étude en  $+\infty$**  : Pour  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$f(x) = a_n x^n \underbrace{\left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} x^{-2} + \dots + \frac{a_p}{a_n} x^{p-n} \right)}_{\rightarrow 1}$$

Donc  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$ .

# Cas pratique

**Comment montrer que deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point?**

## Propriété

*Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur  $I \setminus a$ . Alors, la fonction  $f$  est équivalente à la fonction  $g$  au voisinage de  $a$ , si et seulement si,*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

# Résultats fondamentaux

## Propriété

*Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions équivalentes en  $a \in I$ .*

- ❶ *Si  $g$  a une limite finie ou infinie en  $a$  alors  $\lim_a f = \lim_a g$ .*
- ❷ *Si  $g$  est positive sur  $I$  alors  $f$  est positive au voisinage de  $a$ .*
- ❸ *Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ .*

**Obtention d'équivalents :** Si  $f$  est dérivable en  $a \in I$  et si  $f'(a) \neq 0$ , alors au voisinage de  $a$  :

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$$

# Exercices

- 1 Montrer que  $e^x - 1 \sim x$  au voisinage de 0
- 2 Montrer que  $\ln(1 + x) \sim x$  au voisinage de 0
- 3 Montrer que  $\sin(x) \sim x$  au voisinage de 0

## Corrigé :

- 1 Comme  $x \mapsto e^x$  est dérivable en 0 et que  $e^0 = 1$  on a

$$e^x - e^0 \underset{0}{\sim} e'(0)(x - 0) \Rightarrow e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$$

- 1  $x \mapsto \sin(x)$  est dérivable en 0 et possède une dérivée non nulle

$$\sin(x) - \sin(0) \underset{0}{\sim} \sin'(0)(x - 0) \Rightarrow \sin(x) \underset{0}{\sim} x.$$

- 2  $x \mapsto \ln(1 + x)$  est dérivable en 0 et possède une dérivée non nulle

$$\ln(1 + x) - \ln(1 + 0) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1 + 0}(x - 0) \Rightarrow \ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x.$$

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  et équivalentes en  $a$ . Si  $u : \Delta \rightarrow I$  est telle que  $\lim_{t \rightarrow \alpha} u(t) = a$ , alors  $f(u(t))$  et  $g(u(t))$  sont équivalentes en  $\alpha$ .*

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  et équivalentes en  $a$ . Si  $u : \Delta \rightarrow I$  est telle que  $\lim_{t \rightarrow \alpha} u(t) = a$ , alors  $f(u(t))$  et  $g(u(t))$  sont équivalentes en  $\alpha$ .*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :



# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  et équivalentes en  $a$ . Si  $u : \Delta \rightarrow I$  est telle que  $\lim_{t \rightarrow \alpha} u(t) = a$ , alors  $f(u(t))$  et  $g(u(t))$  sont équivalentes en  $\alpha$ .*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

①  $e^{\sin t} - 1$

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  et équivalentes en  $a$ . Si  $u : \Delta \rightarrow I$  et telle que  $\lim_{t \rightarrow \alpha} u(t) = a$ , alors  $f(u(t))$  et  $g(u(t))$  sont équivalentes en  $\alpha$ .

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

①  $e^{\sin t} - 1$

**Correction :**  $u(t) = \sin t$ ,  $f(x) = e^x - 1$  et  $g(x) = x$ . On a  $f \underset{0}{\sim} g$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0$  donc  $f(u(t)) \underset{0}{\sim} g(u(t))$ . Finalement,  $e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t$ .

②  $\ln(\cos(t))$

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $I$  et équivalentes en  $a$ . Si  $u : \Delta \rightarrow I$  et telle que  $\lim_{t \rightarrow \alpha} u(t) = a$ , alors  $f(u(t))$  et  $g(u(t))$  sont équivalentes en  $\alpha$ .

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

①  $e^{\sin t} - 1$

**Correction :**  $u(t) = \sin t$ ,  $f(x) = e^x - 1$  et  $g(x) = x$ . On a  $f \underset{0}{\sim} g$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0$  donc  $f(u(t)) \underset{0}{\sim} g(u(t))$ . Finalement,  $e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t$ .

②  $\ln(\cos(t))$

**Correction :** On a  $\ln(\cos(t)) = \ln(1 + \cos(t) - 1)$ . Posons  $u(t) = \cos(t) - 1$ . Alors,  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0$ . De plus,  $\ln(1 + y) \underset{0}{\sim} y$ . Donc,  $\ln(1 + u(t)) \underset{0}{\sim} u(t)$ . Ainsi,  $\ln(\cos(t)) \underset{0}{\sim} \cos(t) - 1$ .

# Opération sur les fonctions équivalentes

## Propriété

Si au voisinage de  $a$  on a

- 1  $f_1 \sim g_1$  et  $g_1 \sim g_2$  alors  $f_1 \sim g_2$  en  $a$  (*transitivité*).
- 2 Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$  alors  $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$  en  $a$  (*produit*).
- 3 Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$  et si aucune de ces fonctions ne s'annule sur  $I \setminus a$  alors  $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$ .

## Propriété

- 1 Si  $g = o(f)$  au voisinage d'un point  $a \in I$ , alors  $f + g \underset{a}{\sim} f$ .
- 2 Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . Si  $f \underset{a}{\sim} g$  alors  $f = \mathcal{O}(g)$  au voisinage de  $a$ .

# Application

Déterminer un équivalent de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}.$$

# Application

Déterminer un équivalent de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}.$$

**Correction :** On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \left( 1 - e^{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}} \right) = e^{\frac{1}{x^2}} \left( 1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}} \right).$$

Or  $1 - e^y \underset{0}{\sim} y$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0$ . Donc,  $1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-2}{x^3}$ . De

plus,  $e^{\frac{1}{x^2}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ . Ainsi,  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{x^3}$ .

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de  $\ln(\sin(x))$

**Correction :**

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de  $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x \frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$



# Application

Déterminer un équivalent en 0 de  $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x \frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x)} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \right) = 0.$$

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de  $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x \frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x)} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \right) = 0.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de  $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x \frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x)} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \right) = 0.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

Ainsi

$$\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

## Remarques importantes

① **Composition d'équivalents :** Si  $f \sim g$  on ne peut rien dire à priori de  $u \circ f$  et  $u \circ g$ .

**Exemple :** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \quad \text{mais} \quad e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$$

# Remarques importantes

- ❶ **Composition d'équivalents** : Si  $f \sim g$  on ne peut rien dire à priori de  $u \circ f$  et  $u \circ g$ .

**Exemple** : Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \quad \text{mais} \quad e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$$

- ❷ **Somme d'équivalents** : Si  $u_1 \sim u_2$  et  $v_1 \sim v_2$  alors  $u_1 + v_2 \not\sim u_2 + v_2$ .

**Exemple** :

$$u(x) = \sin(2x) + \cos(x) - 1.$$

On a

$$\sin(y) \underset{0}{\sim} y \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0 \Rightarrow \sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x \quad \cos(x) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{2x} = \left( \frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{\cos(x) - 1}{2x} \right) = 1 \Rightarrow u(x) \underset{0}{\sim} 2x$$