Calcul matriciel

1- Matrices, vecteurs

Exo 1.1 : Calculer la norme de chacun des vecteurs :

La norme (euclidienne) de $X \in \mathbb{R}^n$: où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Rappel un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ est une collection de nombres réels que nous rangerons verticalement

- $\|U\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

  où $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

- $V = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

  $\|V\| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

- $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $X \in \mathbb{R}^3$

  $\|X\| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

- $Y = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\|Y\| = \sqrt{(-3)^2+1^2+4^2} = \sqrt{26}$

Exo 1.2

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}_{2\times2}$ $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{2\times1}$ $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{2\times1}$

Calculer $Y_1 = AX_1$:

$$Y_1 = \underset{2\times2}{A}\ \underset{2\times1}{X_1} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{2\times1}$$

nombre de colonnes de A = nb de lignes de X.

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times3 + 3\times2 \\ -1\times3 + 7\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times(-1) + 3\times1 \\ -1\times(-1) + 7\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$\quad\ \ \uparrow\ \ \uparrow$
$\quad\ X_1\ X_2$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times3+3\times2 & 1\times(-1)+3\times1 \\ -1\times3+7\times2 & -1\times(-1)+7\times1 \end{pmatrix}$$

Ce produit est défini car $\underset{2\times2}{A}\ \underset{2\times2}{B}$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} = C$$
$\qquad\qquad Y_1\ \ Y_2$

$\Rightarrow A.B = A(X_1\ X_2) = (AX_1\ AX_2) = (Y_1\ Y_2)$

Exo 1.3

A_1	A_2	A_3
2×3	3×4	3×2

$A_1 v_3$ $A_2 v_1$ $A_3 v_2$ sont les produits définis

$$A_1 v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times2 + (-2)\cdot(-1) + 3\times3 \\ -1\times2 + 1\times(-1) + 0\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ -22 \end{pmatrix}$$

$$A_3 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Exo 1.4

- $\underset{2\times3}{A}\ .\ \underset{3\times3}{B}\ .\ \underset{3\times2}{C} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{2\times2}$

  Oui le produit est défini.

  $ABC = (AB)C$

  on note $D = AB$

  donc $ABC = (AB)C = DC$.

  Calculons d'abord D :

$$\underset{2\times3\ 3\times3}{D = AB} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$DC = \underset{2\times3}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}\ \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = ABC$$

- $\underset{3\times2}{C}\ \underset{2\times3}{A}\ \underset{3\times3}{B}$ défini

  La multiplication des matrices est associative $(AB)C = A(BC)$

$$CAB = C(AB) = CD = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -2 & 0 & -5 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

multiplication matricielle n'est pas commutative

$\boxed{\text{NB } CD \neq DC}$ Ex : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

01.5 :

$\underset{2\times 2}{A_1}$ $\underset{2\times 3}{A_2}$ $\underset{3\times 2}{A_3}$ $\underset{3\times 3}{A_4}$

$\underset{2\times 2}{B_1}$ $\underset{2\times 3}{B_2}$ $\underset{3\times 2}{B_3}$ $\underset{3\times 3}{B_4}$

Les produits suivantes sont definis :

$\underset{2\times 2 \; 2\times 2}{A_1 B_1}$ $\underset{2\times 2 \; 2\times 3}{A_1 B_2}$

$\underset{2\times 3 \; 3\times 2}{A_2 B_3}$ $\underset{2\times 3 \; 3\times 3}{A_2 B_4}$

$\underset{3\times 2 \; 2\times 2}{A_3 B_1}$ $\underset{3\times 2 \; 2\times 3}{A_3 B_2}$

$\underset{3\times 3 \; 3\times 2}{A_4 B_3}$ $\underset{3\times 3 \; 3\times 3}{A_4 B_4}$

- $A_1 B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 31 \\ 4 & 59 \end{pmatrix}$
- $A_1 B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ -6 & 7 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 14 & -28 \\ -44 & 56 & -82 \end{pmatrix}$
- $A_2 B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -12 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -43 \\ 24 & -84 \end{pmatrix}$
- $A_2 B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -5 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -4 & -25 \\ 43 & 45 & -27 \end{pmatrix}.$$

- $A_3 B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 39 \\ 20 & 65 \\ 4 & 59 \end{pmatrix}.$$

- $A_3 B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ -6 & 7 & -11 \end{pmatrix}.$

$$= \begin{pmatrix} -12 & 0 & -18 \\ -20 & 0 & -30 \\ -44 & 56 & -82 \end{pmatrix}.$$

$A_4 B_3 = \begin{pmatrix} 12 & -42 \\ 40 & -80 \\ 20 & -82 \end{pmatrix}$

$A_4 B_4 = \begin{pmatrix} 9 & -9 & -27 \\ 45 & 35 & -25 \\ 37 & 35 & -31 \end{pmatrix}$

Exo 1.6

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

La matrice identité est noté I_n où $(n \in \mathbb{N})$ est :

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ ici $n = 4$.

elle est diagonale dont tous les elements diagonaux valent 1.

$\forall \; A_{n\times n} : \underset{n\times n}{A} \cdot I_n = I_n \cdot \underset{n\times n}{A} = A$

où A est une matrice carré (Tyis).

exemple :

$A I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A$

$I_n^2 = I_n \cdot I_n = I_n$

$I_n^3 = \underbrace{I_n \cdot I_n}_{I_n} \cdot I_n = I_n \cdot I_n = I_n$

$(I_n)^n = I_n$

Si $A_{n\times n}$ alors $A^0_{n\times n} = I_n$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

3×2

Il faut trouver une matrice B tq

$B.A = I_p$ ← matrice carré.

$B.A = I_p$

$n \times m \quad 3 \times 2$

ici $m = 3$ forcement

et comme I_p est une matrice carré

donc forcement $n = 2$ (I_p matrice carré 2×2)

Donc $\underset{2\times3 \;\; 3\times2}{B.A} = I_2$ ← $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $p = n = 2$

Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2\times3}$

$BA = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}$

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a + 3b - c & 2a + 4b + 4c \\ d + 3e - f & 2d + 4e + 4f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} a + 3b - c = 1 \\ 2a + 4b + 4c = 0 \\ d + 3e - f = 0 \\ 2d + 4e + 4f = 1 \end{cases}$$

on a : $\begin{cases} a + 3b - c = 1 \\ 2a + 4b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b - c = 1 \\ a = \frac{-4b - 4c}{2} = -2b - 2c \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (-2b - 2c) + 3b - c = 1 \\ a = -2b - 2c \text{ (reste la m)}. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b - 3c = 1 \\ a = -2b - 2c \end{cases}$ (reste la m).

$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 + 3c \\ a = -2b - 2c \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 + 3c \\ a = -2(1 + 3c) - 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 + 3c \\ a = -2 - 8c \end{cases}$

on peut prendre par exemple $c = 0$

donc $a = -2$

$b = 1$

on traite ensuite la 3e et 4e equation du système $(*)$:

$\begin{cases} d + 3e - f = 0 \\ 2d + 4e + 4f = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d = f - 3e \\ 2d + 4e + 4f = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d = f - 3e \\ 2(f - 3e) + 4e + 4f = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d = f - 3e \\ 2f - 6e + 4e + 4f = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d = f - 3e \\ 6f - 2e = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d = f - 3e \\ f = \frac{2e + 1}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d = \left(\frac{2e + 1}{6}\right) - 3e = \frac{2e + 1 - 18e}{6} = \frac{1 - 16e}{6} \\ f = \frac{2e + 1}{6} \end{cases}$

si $e = 0$ alors $d = \frac{1}{6}$

$f = \frac{1}{6}$

donc $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

qui est une des solutions possibles.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 - 8c & 1 + 3c & c \\ \frac{1 - 16e}{6} & e & \frac{2e + 1}{6} \end{pmatrix} \Big/ c, e \in \mathbb{R} \right\}$$

* Trouvons B tq $A.B = I_p$.

$$\underbrace{A}_{3\times2}\ \underbrace{B}_{m\times n} = I_p$$

$m = 2$

$n = 3$

donc $\underset{3\times2}{A}\ \underset{2\times3}{B} = \underset{3\times3}{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}}_{=} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \\ -a+4d & -b+4e & -c+4f \end{pmatrix}$$

on a :

$a + 2d = 1$

$3a + 4d = 0$

$-a + 4d = 0$

$$\begin{cases} a + 2d = 1 \\ 3a + 4d = 0 \\ a = 4d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4d + 2d = 1 \\ 3(4d) + 4d = 0 \\ a = 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 6d = 1 \\ 16d = 0 \end{matrix} \text{ impossible}$$

donc il n'existe pas une solution pour ce système.

Il n'existe donc pas une matrice B telque $A.B = I_p$.

Exo 1.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = A - I_3$

Calculons d'abord B :

$$B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $n=0$ $\quad B^0_{3\times3} = I_3$

Calculons B^n $\forall n \geq 1$:

$n = 1$ $\quad B^1_{3\times3} = B$

$n = 2$ $\quad B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$n = 3$ $\quad B^3 = B.B.B = B^2.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

$n = 4$ $\quad B^4 = B.B.B.B = B^3.B = O_3\, B = \underset{\text{de taille } 3\times3}{O_3}$.

$\forall n \geq 3 \quad B^n = O_3$.

* En déduire A^n, $n \geq 1$.

$A = B + I_3$.

$A^n = (B + I_3)^n$

Binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

exemple : $(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k}$

$$= \binom{2}{0} a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1} a^1 b^{2-1} + \binom{2}{2} a^2 b^{2-2}$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}\, 1.\, b^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!}\, a^1 b^1 + \frac{2!}{2!\,(2-2)!}\, a^2\, 1$$

$$= b^2 + 2ab + a^2.$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

Donc :

$$A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \underbrace{I_3^{n-k}}_{=I_3}$$

car $I_n . I_n = I_n . I_n = I_n^2 = I_n$.

$\forall k \in \mathbb{N}$ $I_n^k = I_n$.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3$$

$I_n A = A . I_n = A$.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k$$

$$= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 + \binom{n}{3} \underbrace{B^3}_{O_3}$$

$$+ \binom{n}{4} \underbrace{B^4}_{O_3} + \cdots + \binom{n}{n} \underbrace{B^n}_{O_3}$$

Donc :

$$A^n = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Donc $A^n = 1 . I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$

$$= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 3n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• $A(A^2 - 3A + 3I_3) \overset{?}{=} I_3$ à montrer.

$$\underbrace{(A-I)^3}_{B^3 = O_3} = A^3 - 3A^2 I + 3AI^2 - I^3$$

$$= A^3 - 3A^2 + 3A - I$$

donc $A^3 - 3A^2 + 3A - I = O_3$

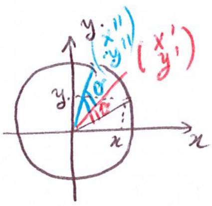
$$A(A^2 - 3A + 3) - I = O_3$$

$$A(A^2 - 3A + 3) = O_3 + I_3 = I_3$$

Exercice 1.8

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

la matrice de rotation



$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A.A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A.A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

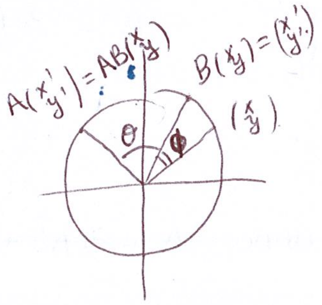
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin(n\theta) & \cos n\theta \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

AB :

$A.B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — ϕ — θ



$$AB = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi.\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & -\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix}.$$

Examen

0.3 1) Définition de la norme euclidienne d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$

2) Soit $A = \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

0.1 Déterminer le nombre de ligne et de colonne de A et de B

0.1 Est-ce que le produit $C = AB$ est défini ?

0.6 Si oui déterminer le nb de lignes et de colonne de C et calculer $C = AB$

0.2 Peut on calculer $D = BA$? Si oui déterminer le nb de L et C et calculer $D = BA$

0.3 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

0.3 4) c'est quoi la puissance p-ième d'une matrice

1 Matrices, vecteurs

Exercice 1.1 Calculer la norme de chacun des vecteurs

$$U = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2 On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $Y_1 = AX_1$ et $Y_2 = AX_2$. On note B la matrice dont la première colonne est X_1 et la deuxième colonne X_2. Calculer le produit AB. On note C la matrice dont la première colonne est Y_1 et la deuxième colonne est Y_2. Que constatez-vous ?

Exercice 1.3 Calculer, quand il est défini, le produit de la matrice A_i et du vecteur v_j

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

et

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.4 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le produit ABC est-il défini ? Si oui, le calculer. Même question pour le produit CAB.

Exercice 1.5 Peut-on définir les produits A_iB_j pour les matrices suivantes ? Si oui, les calculer.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ -6 & 7 & -11 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -12 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -5 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.6 Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour $p \geq 1$ entier, on note I_p la matrice identité dans $M_p(\mathbb{R})$. Existe-t-il des matrices B à coefficients réels ou complexes telles que $BA = I_p$? Telles que $AB = I_p$? Si oui les calculer.

Exercice 1.7 Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $B = A - I_3$. Calculer B^n, pour $n \geq 1$. En déduire A^n, $n \geq 1$. Montrer l'égalité $A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$.

Exercice 1.8 Pour des réels θ et ϕ, on définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices A^2, AB et BA. Commentez.

$a_1 x + a_1 y = c$

$a_{21} + a_{22} y = b$

$a_1 x + a_1 y = e$

2 Systèmes linéaires : $n = 2$

Exercice 2.1 Résoudre les systèmes suivants par substitution

1. $\begin{cases} -4x+2y &= -2 \\ 5x+y &= -1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -x+2y &= 2 \\ -4x+3y &= 4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x+2y &= 0 \\ 6x+2y &= 3 \end{cases}$

Exercice 2.2 Résoudre les systèmes suivants par combinaison linéaire et retrouver graphiquement le résultat.

1. $\begin{cases} -3x+2y &= 0 \\ -2x+y &= -1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -3x+2y &= 0 \\ -4x+2y &= -2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x+2y &= 0 \\ -2x+y &= 9 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 6x+2y &= 0 \\ 3x+y &= 9 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 3y+2x &= 3 \\ 2y+5x &= 2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x &= 4 \\ 2y+5x &= 2 \end{cases}$

Exercice 2.3 Résoudre les systèmes suivants en utilisant les matrices et retrouver le résultat en utilisant la méthode d'élimination de Gauss :

1. $\begin{cases} 2x+5y &= -3 \\ x-2y &= 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+5y &= 0 \\ 2y+x &= 3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x+5y &= 1 \\ -2y+x &= 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x+3y &= 1 \\ -2y+x &= 1/2 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2y &= 4 \\ x+2y &= 2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 4x-2y &= 0 \\ -2x+y &= -1 \end{cases}$

Exercice 2.4 Résoudre les problèmes suivants

1. On utilise x moiécules de CH_4 et y molécules de C_2H_4 pour obtenir 4 molécules de C_2H_6. Trouver x et y.
2. On utilise x molécules de C_3H_8 et y molécules de C_2H_6 pour obtenir 3 molécules de CH_4 et 2 molécules de C_2H_4. Trouver x et y.
3. On utilise x molécules de C_3H_6 et y molécules de C_2H_4 pour obtenir 4 molécules de CH_4. Trouver x et y.

Exercice 2.5 Déterminer les points d'intersection des droites suivantes après avoir posé le problème en équations :

1. La droite d_1 passant par les points de coordonnées $(1,2)$ et $(0,0)$ et la droite d_2 passant par les points $(1,5)$ et $(-1,-3)$.
2. La droite d_3 passant par les points de coordonnées $(-10,5)$ et $(2,-1)$ et la droite d_4 passant par les points $(2,2)$ et $(1,-3)$.

Exercice 2.6 Un récipient rempli d'eau a une masse de 720 g. Le même récipient rempli d'huile a une masse de 680 g. Déterminer le volume V en cm^3 et sa masse vide m en g.
Données : masse volumique de l'eau : 1.0 g.cm^{-3}, masse volumique de l'huile : 0.9 g.cm^{-3}.

Système linéaires : n = 2

Exercice 2.1 :

Résoudre les systèmes par substitution

1-

$$\begin{cases} -4x+2y=-2 \\ 5x+y=-1 \end{cases}$$

Pour fixer les idées nous cherchons à éliminer y/ou x

$$\begin{cases} y=\frac{-2+4x}{2}=-1+2x \\ 5x+(-1+2x)=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} '' \\ 7x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-1+2.0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x+2y=2 \\ -4x+3y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2y-2 \\ -4(2y-2)+3y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} '' \\ -8y+8+3y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} '' \\ -5y=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2.\left(\frac{4}{5}\right)-2 \\ y=\frac{4}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 6x+2y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{2}{3}y \\ 6\left(-\frac{2}{3}y\right)+2y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} '' \\ -4y+2y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)=1 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Exercice 2.2

$ax+by=c$
$a'x+b'y=c'$
on cherche à éliminer une inconnue, mais sans division par b (ou b') $y=\frac{c-ax}{b}$
mais en multipliant la 1e équation par b' et la 2e par b, et on fait la différence.

1-

$$\begin{cases} -3x+2y=0 & \times 1 \\ -2x+y=-1 & \times 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x+2y=0 \\ -4x+2y=-2 \end{cases}$$

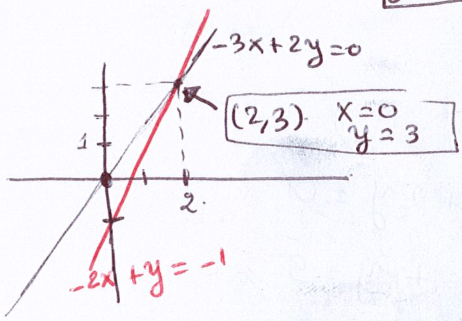
on soustrait ;

$$-3x+4x=2$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\Rightarrow -3x+2y=0$$

$$-3.2+2y=0 \Rightarrow \boxed{y=3}$$



2.

$$\begin{cases} -3x+2y=0 \\ -4x+2y=-2 \end{cases}$$

On soustrait directement

$$-3x+4x=2$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\Rightarrow -3.2+2y=0$$

$$\boxed{y=3}$$

Remarque même solut° que dans 1 car $-4x+2y=-2$ est la même équat° que $-2x+y=-1$

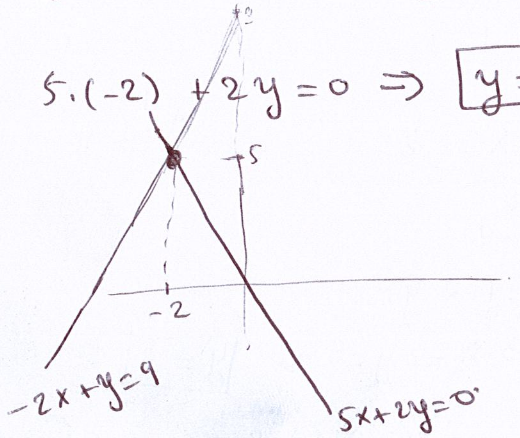
3- $\begin{cases} 5x + 2y = 0 & \times 1 \\ -2x + y = 9 & \times 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ -4x + 2y = 18 \end{cases}$

$\Rightarrow 5x + 4x = -18$

$\Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

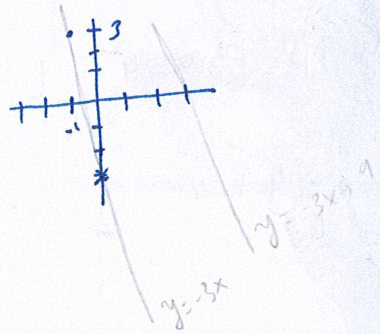
$5.(-2) + 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 5}$



4- $\begin{cases} 6x + 2y = 0 & \times 1 \\ 3x + y = 9 & \times 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x + 2y = 0 \\ 6x + 2y = 18 \end{cases} \Rightarrow$ pas de solut° donc les 2 droites sont parallèles //

$\rightarrow \begin{array}{l} 2y = -6x \\ 2y = -6x + 18 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ y = -3x + 9 \end{cases}$



5- $\begin{cases} 3y + 2x = 3 & \times 2 \\ 2y + 5x = 2 & \times 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 6y + 4x = 6 \\ 6y + 15x = 6 \end{cases}$

$4x - 15x = 0 \Rightarrow -11x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

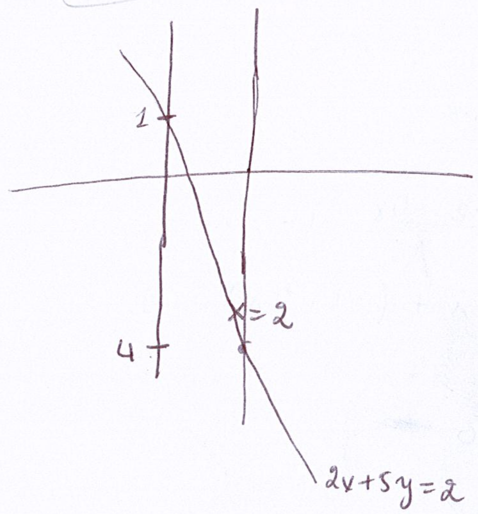
$3y + 2.0 = 3 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

6- $\begin{cases} 2x = 4 \\ 2y + 5x = 2 \end{cases}$

$\boxed{x = 2}$

$2y + 10 = 2$

$\boxed{y = -4}$



Exercice 2.3 :

1- $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

Sous forme matricielle : on cherche $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que

1re ligne = 1re équation →

$$\begin{pmatrix} 2^{a_{11}} & 5^{a_{12}} \\ 1_{a_{21}} & -2_{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

NB :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = e & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = f & (2) \end{cases}$$

on multiplie (1) par $\frac{1}{a_{11}}$

$\times \frac{1}{a_{11}}$

$$\begin{cases} x + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} y = \dfrac{1}{a_{11}} e \\ \cancel{a_{21}x + a_{22}y = f} \end{cases}$$

$\times a_{21}$

$$a_{21}x + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} y = \frac{a_{21}}{a_{11}} e \quad (L_1)$$

puis on retranche le résultat à la deuxième ligne c'est-à-dire $L2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$

$$\cancel{a_{21}x + a_{22}y = f} \quad (L_2)$$

c'est la même chose que (1) ~~$a_{21}x + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} y = \frac{a_{21}}{a_{11}} e$~~

$$L_2 - 1 \rightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = e \\ \boxed{\left(a_{22} - a_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right) y = f - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} e} \quad (*) \end{cases}$$

par (*)

$$\left(-2 - 1 \cdot \frac{5}{2}\right) y = 3 - \frac{1}{2}(-3)$$

$$-\frac{9}{2} y = 3 + \frac{3}{2}$$

$$-\frac{9}{2} y = \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{y = -1} \quad \boxed{x = 1}$$

3- $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -2y + x = 5 \end{cases}$

attention bien mettre x sous x et y sous y.

$A X = Y$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Par (*)

on divise la 1re par 2 ⇒ $x + \frac{5}{2}y = \frac{1}{2}$
puis je multiplie par a_{21} : $x + \frac{5}{2}y = \frac{1}{2}$
$L2 = L2 -$ → ; $L2$: $\left(-2 - \frac{5}{2}\right)y = 5 - \frac{1}{2}$

$$\left(-2 - 1 \cdot \frac{5}{2}\right) y = 5 - \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$-\frac{9}{2} y = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow y = -1$$

$$x = 3$$

4- $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2y + x = \frac{1}{2} \end{cases}$

bien mettre x sous x et y sous y.

$A x = Y$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

par (*) ~~je multiplie … 1 par 2 : $x + \frac{3}{2}y =$~~ ~~je multiplie par -2 : $-2x - 3y = -1$~~

$$\left(-2 - \frac{1}{2} \cdot 3\right) y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$-\frac{7}{2} y = 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

6- $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$

pas de sol

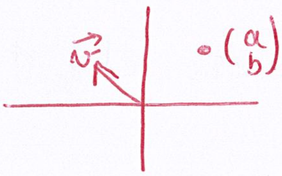
L'autre méthode pour trouver l'équation d'une droite

$d_1 : \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$d_2 : \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}.$

$d : \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

où $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ c'est la direction de la droite d.



$(d_1) : \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$d_1 : \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$: \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda . 1 \\ y = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 2x}$ d_1

$d_2 : \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$

$d_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 5 + 8\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \lambda$

$y = 5 + 8\left(\frac{x-1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = 4x+1}$ d_2

Point d'intersection : on résout le système :

$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y = -1 \end{cases}$

② $d_3 : \begin{pmatrix}-10\\5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$(d_4) : \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$(d_3) : v = \begin{pmatrix}-10\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\6\end{pmatrix}$

$(d_3) : \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-12\\6\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = -1 + 6\lambda \end{cases} \Rightarrow 12\lambda = 2 - x \Rightarrow \lambda = \cancel{2x}\frac{2-x}{\lambda}$

je remplace

$y = -1 + \frac{2-x}{2}$

$\boxed{y = -\frac{1}{2} x}$

$d_4 : v = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$d_4 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{cases} x = 2 + \lambda \Rightarrow \lambda = x - 2 \\ y = 2 + 5\lambda \Rightarrow y = 2 + 5x - 10 \end{cases}$

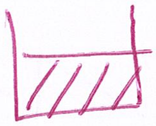
$\Rightarrow \boxed{y = 5x - 8}$ d_4

intersection d_3 et d_4 :

$\begin{cases} y = -1/2\, x \\ y = 5x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16/11 \\ y = -8/11 \end{cases}$

Exo 6

 720g.

 680g.

Volume en cm ? et sa masse vide m en g ?

$m_{eau} = 400$

$\Rightarrow m_{récip} = 720 - 400$

$= 320$

masse du récipient = 720 - 680

$\rho = \frac{m}{V}$

$\text{masse eau} - m_h = 40$

$\frac{m_h}{m_{eau}} = 0,9$

$x + \text{masse eau} = 720\,g$

$x + \text{masse huile} = 680$ } eau - huile = 40.

$\rho = \frac{m}{V} = 1\ g/cm^3 = \frac{m_{eau}}{\cancel{V_{eau}}}$

$\Rightarrow \frac{m_h}{m_{eau}} = 0.9.$

$0.9\ g/cm^3 = \frac{m_{huile}}{\cancel{V_{huile}}}$

$x + V_{eau} = 720\,g.$

$x +$

$\text{mass} - m_h = 40.$

$m_h = 0.9\ m_{eau}$

$\Rightarrow m_{eau} - 0.9\ m_{eau} = 40$

$m_{eau}(1 - 0.9) = 40$

$m_{eau} = 40/0.1 = 400$

$x CH_4 + y C_2H_2 = 4 C_2H_6$

$\begin{cases} xC + 2y = 8 & (C) \\ 4x + 2y = & (H) \end{cases}$

Groupe 24.2– Interrogation numéro 6 du 9/04/ 2015

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

Numéro d'étudiant							

Nom		Prénom	

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

$U = R I$ → volta, → ampère, → résistance

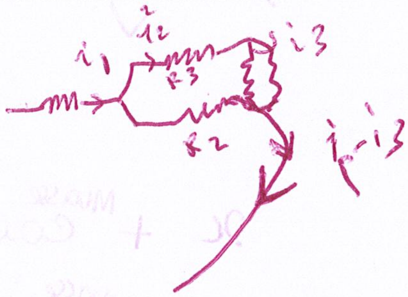
Question :

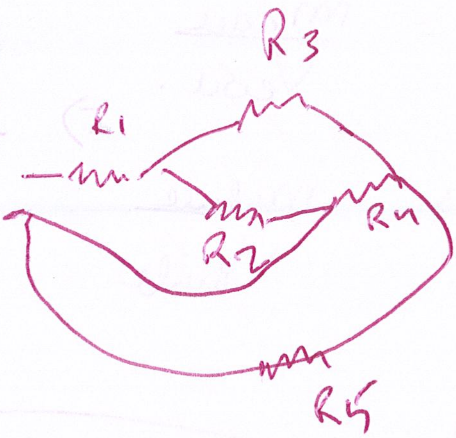
loi Kirchhoff = loi des noeud

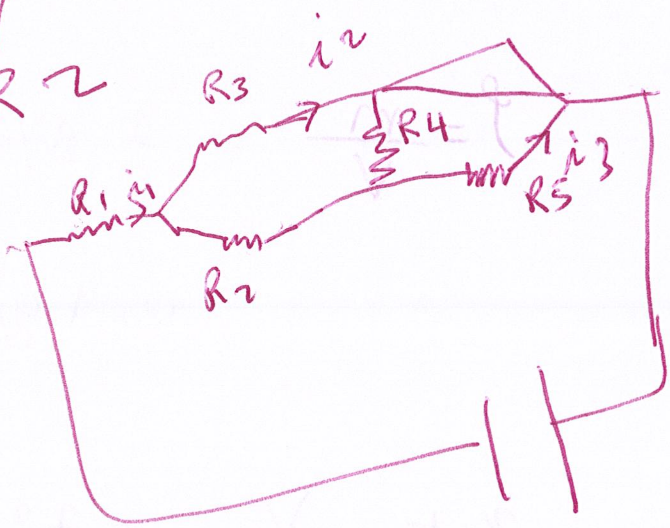
D'après la loi des noeuds : $i_1 + i_2 = i_3 + i_4$

→ intensité

Réponse :







425

3 Systèmes linéaires : $n = 3$

Exercice 3.1 Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode de Gauss :

1. $\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x-y &= 0 \\ x+4y+z &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 5 \\ x-y-z &= 1 \\ x+z &= 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-y+2z &= a \\ -x+2y-3z &= b \\ x+2y+z &= c \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+4y+5z &= 5 \\ 3x+6y+2z &= 9 \\ 5x+7y+9z &= 12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x+2y+10z &= 7 \\ 6x+3y+15z &= 19 \\ 7x+13y+17z &= 23 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+5y+2z &= 8 \\ 3x+15y+6z &= 24 \\ 9x+45y+18z &= 72 \end{cases}$

Exercice 3.2 Soit $a \in \mathbb{R}$. On étudie le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ x+3y-2z=5 \\ 2x-y+az=1 \end{cases}$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système peut :
   (a) n'admettre aucune solution
   (b) admettre exactement une solution
   (c) admettre une infinité de solutions
2. Résoudre le système lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 3.3 Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

$-1 \overset{?}{=} \frac{-a}{a+2}$

$\cancel{-a}-2=\cancel{-a}$

Exercice 3.4 Soient a, b et c des réels.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres pour que le système suivant ait au moins une solution ?

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ x+y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$$

2. Est-ce que le système peut avoir une unique solution ?

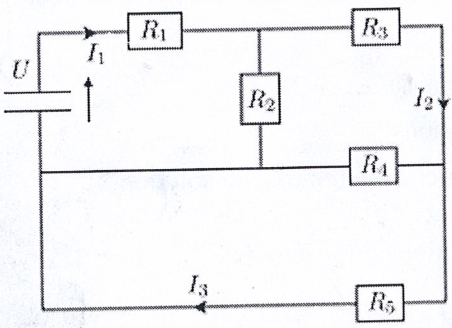
ce 3.5 Soit $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^3 \times \mathbb{R}$. On considère le plan $\mathcal{P}$, d'équation $x + y + z = d$, droite $\mathcal{L}$ passant par l'origine et dirigée suivant le vecteur (a, b, c). Quelles sont les conditions vant être vérifiées par a, b, c et d pour que :

- $\mathcal{P}$ contienne $\mathcal{L}$?
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ soient parallèles ?

Exercice 3.6 Soit $O = (0, 0, 0)$ l'origine de $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver l'équation de la droite $\mathcal{L}_1$ passant par les points $P = (1, 2, 3)$ et $Q = (5, 7, 2)$.
2. Trouver l'équation du plan $\mathcal{P}_1$ qui passe par l'origine et qui est orthogonal à $\mathcal{L}_1$.
3. Trouver l'équation du plan $\mathcal{P}_2$ qui passe par Q et qui est parallèle au plan $\mathcal{P}_1$.
4. Trouver les points symétriques de P par rapport aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. On les appelera P_1 et P_2 respectivement.
5. Trouver l'équation du plan, $\mathcal{P}_3$, qui contient les segments OP_1 et OP_2. Est-ce que $\mathcal{P}_3$ contient aussi P et Q ?.
6. Finalement, déterminer les équations des droites formant l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ d'une part, et des plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'autre part. Ces droites sont-elles parallèles ? pourquoi ?

Exercice 3.7 On considère le circuit électrique suivant, en régime stationnaire.



1. Utiliser les Lois de Kirchhoff pour obtenir un système linéaire liant I_1, I_2 et I_3 en fonction des paramètres U, R_1, R_2, R_3, R_4 et R_5.
2. On suppose maintenant que $U = 1V$ et $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$. Déterminer les valeurs de I_1, I_2 et I_3.

Feuille de TD 3

Systèmes linéaires n=3

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

on dit que ce système est homogène.

Si système homogène, ⇒ il existe 1 solution (0,0,0) au moins.

méthode de Gauss

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (on remplace la 2ème ligne par la soustraction de la ligne 2 et 1)

car les coeff de x sont les mêmes (1)

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2}L_2$ $\quad (2 + \frac{3}{2})z = 0$

$\frac{3}{2}L_2 : -3y + \frac{3}{2}z = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$L_3 : \frac{7}{2}z = 0 \Rightarrow z = 0$

$L_2 : -2y + 1z = 0 \Rightarrow -2y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

$L_1 : 1.x + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x=0$
$y=0$
$z=0$

Il existe 1 solution unique (0,0,0)

2- $$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ -y - z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ z = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2$

$\frac{1}{2}L_2 : \boxed{-y - \frac{3}{2}z = -2}$

$L_3 : -y - z = -2$

$L_3 - \frac{1}{2}L_2 : (-1 + \frac{3}{2})z = 0$

ou

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ z = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$

$2L_3 : -2y - 2z = -4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

il existe une solution (3,2,0)

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors il existe au moins 1 solut° $(0, 0, 0)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a & L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ 7y + z = 3c - a & L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 54z = 5(3c - a) - 7(3b + a) & L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2 \end{cases}$$

$5L_3$: $35y + 5z = 5(3c - a)$.

$7L_2$: $35y - 49z = 7(3b + a)$

$5L_3 - 7L_2$: $54z = 5(3c - a) - 7(3b + a)$

$$z = \frac{5(3c - a) - 7(3b + a)}{54} = \frac{15c - 5a - 21b - 7a}{54} = \frac{15c - 12a - 21b}{54} = \frac{5c - 4a - 7b}{18}$$

$$5y - 7\left(\frac{5c - 4a - 7b}{18}\right) = 3b + a$$

$$5y = \frac{7(5c - 4a - 7b)}{18} + 3b + a$$

$$= \frac{35c - 28a - 49b + 18a + 54b}{18}$$

$$= \frac{35c - 10a + 5b}{18}$$

$$y = \frac{7c - 2a + b}{18}$$

$$x = \frac{8a + 5b - c}{18}$$

pour chaque valeur de a, b, c il existe une solut°.

4- $\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 5 \\ 3x + 6y + 2z = 9 \\ 5x + \cancel{7}y + 9z = 12 \end{cases}$

5- $\begin{cases} 4x + 2y + 10z = 7 \\ 6x + 3y + 15z = 19 \\ 7x + 13y + 17z = 23 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_3 - 5L_1$ $\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 5 \\ -11z = 3 \\ -6y - 7z = -1 \end{cases}$

$L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$ $\begin{cases} 4x + 2y + 10z = 7 \\ 0x \quad 0 \quad 0 = 38 - 21 = 17 \end{cases}$

pas de solution.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 5z = 5 \\ +6y + 7z = 1 \\ -11z = 3 \end{cases}$

6- $\begin{cases} x + 5y + 2z = 8 \\ 3x + 15y + 6z = 24 \\ 9x + 45y + 18z = 72. \end{cases}$

$x + 5y + 2y = 8.$

$\boxed{z = -\frac{3}{11}}$

$6y + 7\left(-\frac{3}{11}\right) = 1 \Rightarrow 6y - \frac{21}{11} = 1$

$6y = \frac{21 + 11}{11}$

$6y = \frac{32}{11} = \cancel{3}$

$y = \frac{16}{33}$ $\cancel{y = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$

$\cancel{2x + 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{15}{11} = 5}$

$\cancel{2x = \frac{15}{11} + 3 = \frac{15 + 33}{11} = \frac{48}{11}}$

$\cancel{x = \frac{24}{11}}$

$\cancel{2 \cdot \frac{24}{11} + 2 - \frac{15}{11} = \frac{48 + 22 - 15}{11} = \frac{55}{11} = 5}$ $\quad 70 - 15$

Suite

$2x + 4\left(\frac{16}{33}\right) + 5\left(-\frac{3}{11}\right) = 5$

$2x + \frac{64}{33} - \frac{15}{11} = 5$

$\frac{66x + 64 - 45}{33} = \frac{165}{33}$

$66x = 165 - 64 + 45$

$= 101 + 45$

$= 146$

$\boxed{x = \frac{146}{66} = \frac{73}{33}}$

Exo2 :

Soit $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 5y - 5z = 3 \\ 3y + (a-6)z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 5L_3 - 3L_2 \end{array} \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 5y - 5z = 3 \\ 5(a-3)z = -24 \end{cases}$$

$5L_3$: $15y + 5(a-6)z = -15$

$3L_2$: $15y - 15z = 9$

$5L_3 - 3L_2$: $(5(a-6) + 15)z = -24$

$(5a - 30 + 15)z = -24$

$(5a - 15)z = -24$

$5(a-3)z = -24$.

on a : $5(a-3)z = -24$

Si $a \neq 3 \Rightarrow z = \dfrac{-24}{5(a-3)} \Rightarrow$

une solut°

$x = \dfrac{8(2a-3)}{5(a-3)}$

$y = \dfrac{3(a-11)}{5(a-3)}$

Si $a = 3$ on a $0 = -24$

$\Rightarrow$ il n'existe pas de solut

Exercice 3.4

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

$L_1 \longleftrightarrow L_3$ on intervertit

$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ x + aby + z = b \\ ax + by + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array} \begin{cases} x + by + az = 1 \\ (ab-b)y + (1-a)z = b-1 \\ (b-ab)y + (1-a^2)z = 1-a \end{cases}$$

$\boxed{ab - b = -(b-ab)}$

$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \\ -b(a-1)y + (1-a^2)z = 1-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \\ (1-a^2+1-a)z = b-1+1-a \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$-a^2 - a + 2 = -(a^2+a-2)$
$= -(a+2)(a-1)$

- Si $a \neq -2$ et $a \neq 1$ alors $2-a-a^2 \neq 0$ donc

$$\boxed{z = \frac{b-a}{2-a-a^2}}$$

on remplace z dans L_2 :

$b(a-1)y = b-1-(1-a)z$

si $b \neq 0$ alors $b(a-1) \neq 0$

donc $y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$

→ Donc si $a \neq -2$ et $a \neq 1$ et $b \neq 0$ alors on a :

$z = \frac{b-a}{2-a-a^2}$

$y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$

et $x = 1 - by - az$

on a 1 unique solution

$= \cancel{1 - \frac{b-1-(1-a)z}{(a-1)} - \frac{a(b-a)}{2-a-a^2}}$

- Si $a \neq -2, 1$ et $b = 0$ on a alors :

$$\begin{cases} x + 0y + az = 1 \\ 0y + (1-a)z = 0-1 \\ (2-a-a^2)z = -a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + az = 1 \\ z = \frac{-1}{1-a} \\ z = \frac{-a}{2-a-a^2} \end{cases}$$

$\neq$ il n'existe pas de solution

$= \frac{-a}{-(a+2)(a-1)} = \frac{-a}{(a+2)(1-a)}$

- Si $a = 1$ alors on a

$$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = b-1 \\ 0 = b-1 \end{cases}$$

1 → Si $b = 1$ alors $x+y+z = 1$

⇒ on a une infinité de solution

$S = \{(1-z-y, y, z), \; y, z \in \mathbb{R}\}$

2 → ~~Si a = 1 et~~ $b \neq 1$ alors

$x + by + z = 1$

$0 = b-1 \neq 0$

$0 = b-1 \neq 0$

⇒ il n'existe pas de solution

• Si $a = -2$ on a alors :

$$\begin{cases} x + by - 2z = 1 \\ -3by + 3z = b - 1 \\ 0 = b + 2. \end{cases}$$

→ si $b \neq -2$ alors il n'existe pas de solut°
(car $0 = b + 2 \neq 0$)

→ Si $b = -2$

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \Rightarrow x = 1 + 2y + 2z = 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right) + 2z = 1 + 1 - z + 2z \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = z. \\ 6y + 3z = -3 \Rightarrow y = -\frac{3 + 3z}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

Conclusion :

- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$: on a l'unique solution
- Si $b = 0$: pas de solution
- ~~Si $a \neq 1$ et $b \neq 1$~~

- Si $a = 1$ et $b = 1$ infinité de solut°
- Si $a = 1$ $b \neq 1$ pas de solut°

- Si $a = -2$ et $b \neq -2$ pas de solut°
- Si $a = -2$ et $b = -2$ infinité de solut

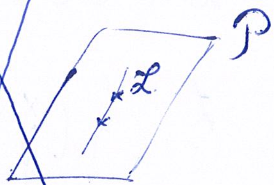
1

Exercice 5

$(P) : x + y + z = d$

$\mathcal{L} : O \in \mathcal{L}$ et (a, b, c).

1) $\mathcal{L} \subset (P)$



$O \in \mathcal{L} \Rightarrow O \in P$

$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y + z = d$

$0 + 0 + 0 = d \Rightarrow \boxed{d = 0}$

si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$

Exercice 4

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ x + y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & -8 & b-a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{array}\right)$$

$x = -\frac{3}{10}$

$-2y + 7\left(\frac{-3}{10}\right) = 1$

$-2y = 1$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & -8 & b-a \\ 0 & 0 & 42 & (c-a)-4(b-a) \end{array}\right.$$

$\cancel{42}z = \frac{c - a - 4b + 4a}{42} = \frac{c + 3a - 4b}{42}$

$-y - 8z = b - a$

$-y - 8\left(\frac{c + 3a - 4b}{42}\right) = b - a$

$-y - \frac{4}{21}(c + 3a - 4b) = b - a$

$y = -(b - a) - \frac{4}{21}(c + 3a - 4b)$

$= \frac{-21b + 21a - 4c - 12a + 16b}{21}$

$= \frac{-5b \overset{+9a}{\cancel{+33a}} - 4c}{21}$

$x + 2y - 3z = a$

$x = a - 2y + 3z$

$= a \cancel{+a} + \frac{10b \overset{-18a}{\cancel{+66a}} + 8c}{21}$

$+ \frac{3(c + 3a - 4b)}{42}$

$= \frac{42a + 20b \cancel{+}136a + 16c + \bigcirc}{42}$

$3(c + 3a - 4b)$

$= \frac{42a + 20b + \overset{-36a}{136a} + 16c + 3c + 9a - 12b}{42}$

$= \frac{\overset{+15a}{\cancel{187a}} + 8b + 19c}{42}$

Exercice 3.5 :

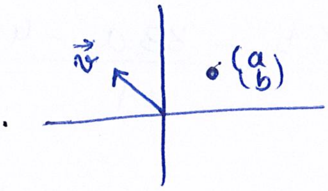
NB exercice 2.5 TD2 autre méthode pour trouver l'équat° d'une droite à partir de 2 points :

(d_1) passe par $(1,2)$ $(0,0)$

(d_2) passe par $(1,5)$ $(-1,-3)$

$$d : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

et où $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ donne la direction de la droite (d)



(d_1) : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$d_1 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R} \right.$

$d_1 : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1\lambda \\ y = 2\lambda \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{y = 2x} \ d_1.$$

(d_2) : $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$d_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 5 + 8\lambda \end{array} \right. \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \lambda$$

$$y = 5 + 8\left(\frac{x-1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = 4x+1} \ d_2.$$

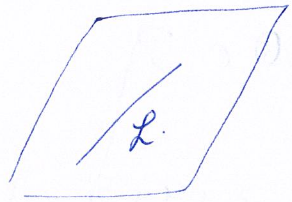
$a, b, c \neq 0$

$d \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{P}$: $x + y + z = d$

$\mathcal{L}$: $0 \in \mathcal{L}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$



$\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$

$0 \in \mathcal{L} \Rightarrow 0 \in \mathcal{P}$

où $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $0 \in \mathcal{P} \Rightarrow$

$0 + 0 + 0 = d$

$\boxed{\Rightarrow d = 0}$

si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$

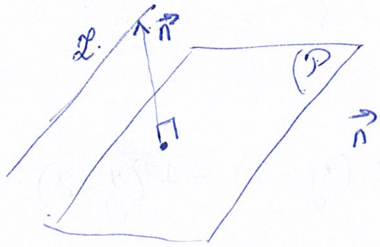
$\Rightarrow ta + tb + tc = d = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow t(a+b+c) = 0$

$\Rightarrow a + b + c = 0$.

Donc si $\mathcal{L} \in \mathcal{P}$ alors $\left\{ \begin{array}{l} d = 0 \\ a+b+c = 0 \end{array} \right.$.

- $(P) \parallel \mathcal{L}$.



$\vec{n} \perp P$.

Si $ax + by + cz = d$ est un plan alors $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ satisfait $n \perp (P)$.

Donc dans notre cas :

$(P) : x + y + z = d$

donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \perp P$

donc $\vec{n} \perp \mathcal{L}$.

donc $\langle n, \cancel{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}} \rangle = 0$ → plutôt $\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$ car $\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$ vecteur directeur

pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow \boxed{a + b + c = 0}$

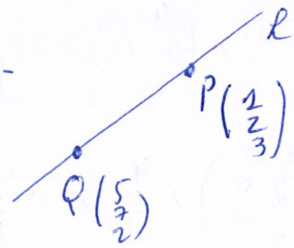
et $d \in \mathbb{R}$.

on peut prendre n'importe quel d mais $a+b+c=0$

Exo 3.6

$O = (0,0,0)$

1.



$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overset{\in \mathcal{L}}{A} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

↳ vecteur directeur ($= \vec{PQ}$ ou $\vec{QP}$)

$PQ = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 7-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathcal{L} : \begin{cases} x = 1 + \lambda 4 \\ y = 2 + 5\lambda \\ z = 3 - \lambda \Rightarrow \lambda = 3 - z. \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2 + 5(3-z) \\ x = 1 + 4(3-z) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 17 - 5z \\ x = 13 - 4z. \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 13 - 4z \\ 17 - 5z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$.

2- P_1 passe par O et $\perp$ à $\mathcal{L}$,

$O \in P_1 \Leftrightarrow d = 0$ donc $P_1 : ax + by + cz = 0$

$\mathcal{L} \perp P_1 \Leftrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \perp P_1$

Le vecteur normale de P_1 est le vecteur dirigeant de $\mathcal{L}$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ alors

car $O \in P_1$ et M n'importe quel pt de P_2

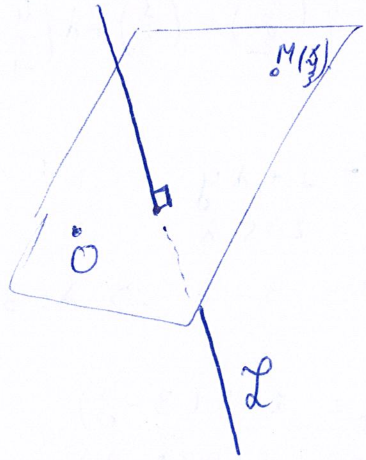
$$P_1 : \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \langle \vec{OM}, \vec{n} \rangle = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

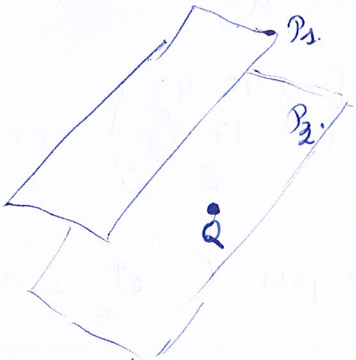
$$= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 5y - z = 0.$$

~~3)~~ $\perp P$



3- (P_2) passe par Q et // à P_1.



$Q \in P_2$ et $P_1 \,//\, P_2$.

$\vec{n} = \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} \perp P_1$ donc $n \perp P_2$.

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \langle QM, \vec{n} \rangle = 0 \right\}.$$

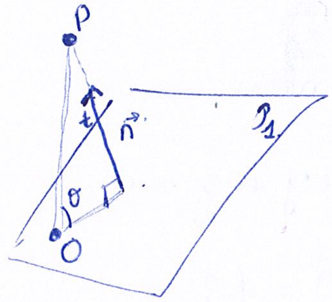
$$\left\langle \begin{pmatrix}x-5\\y-7\\z-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$(x-5)\cdot 4 + 5(y-7) - 1(z-2) = 0$$

$$4x - 20 + 5y - 35 - z + 2 = 0$$

$$\boxed{4x + 5y - z = 53} \quad P_2.$$

4)



$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x + y = b \\ x + 2y + 9z = c \end{cases}$$

1- Montrer que si $3a - 4b + c \neq 0$ le système n'admet pas de solution

2. (S) que le système peut avoir une unique solution

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & -2 & 9 & c \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -1 & -3 & b-a \\ 0 & -4 & 6 & c-a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3+4L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & +1 & +3 & -b+a \\ 0 & 0 & 18 & (c-a)+4(-b+a) \end{array}\right)$$

$c - a - 4b + 4a$

$18z = 3a - 4b + c$

$z = \frac{3a - 4b + c}{18}$

$6\times$

$6 + 4\times3$
12

on remplace

$y + \cancel{3}\left(\frac{3a-4b+c}{\cancel{18}}\right) = -b + a$

$y = -b + a - \left(\frac{3a-4b+c}{6}\right)$

$= \cancel{-b+}a$

$= \frac{-6b + 6a - 3a + 4b - c}{6}$

$= \frac{-2b + 3a - c}{6}$

$x + 2\left(\frac{-2b+3a-c}{6}\right) + 3\left(\frac{3a-4b+c}{18}\right) = a$

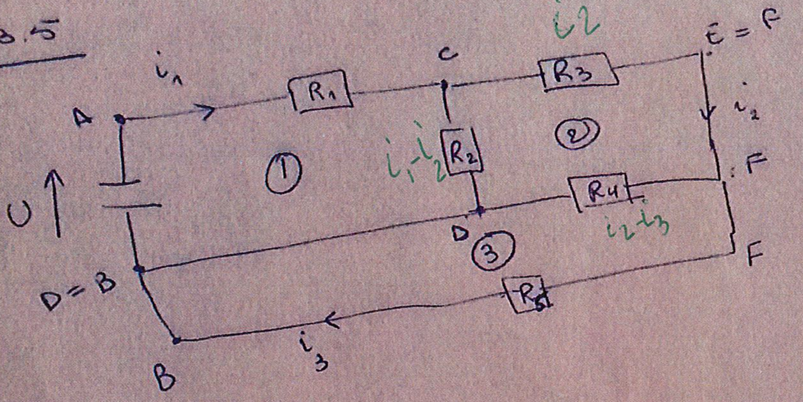
$x + \left(\frac{-2b+3a-c}{3}\right) + \frac{3a-4b+c}{6} = a$

$x + \frac{-4b + 6a - 2c + 3a - 4b + c}{6} = a$

$x = \frac{\cancel{6a} + 4b - \cancel{6a} + 2c - 3a + 4b - c}{6}$

$= \frac{-3a + 8b + c}{6}$

Exo 3.5



loi de Kirchhoff
loi des noeuds : somme des intensités des courants qui ~~sort~~ entrent par un noeud = Somme des intensités des courants qui sortent du même noeud.

$$\begin{cases} U_{AB} = U_{AC} + U_{CD} & -① \\ U_{CD} = U_{CE} + U_{FD} & -② \\ U_{DF} = U_{FB} & -③ \end{cases}$$

$= U_{AB} = 0_{AB}$

FD plutôt

tension, résistance, intensité

$\boxed{\text{loi d'hom : } U = R \cdot I}$

$$\begin{cases} u = R_1 i_1 + R_2(i_1 - i_2) \\ R_2(I_1 - I_2) = R_3 i_2 + R_4(i_2 - i_3) \\ R_4(I_2 - I_3) = R_5 i_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = (R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_2 \\ 0 = (R_2 + R_3 + R_4) i_2 - R_2 i_1 - R_4 i_3 \\ 0 = (R_4 + R_5) i_3 - R_4 I_2 \end{cases}$$

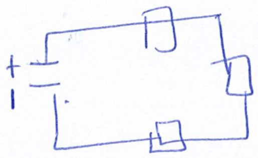
2) $U = 1V$ et $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$, alors

$$\begin{cases} 2 i_1 - i_2 = 1 \\ -i_1 + 3 i_2 - i_3 = 0 \\ i_2 - 2 i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 5L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \end{array}\right)$$

$i_3 = \frac{1}{8}$, $5 i_2 - \frac{2}{8} = 1 \Rightarrow i_2 = \frac{1}{4}$
$\Rightarrow i_1 = 5/8$



$V_1 + V_2 + V_3 - V_4 = 0$

$$x + y + 2z = 5$$
$$x - y - z = 1$$
$$x \quad + z = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$1\cancel{(-1)} - 1(1+1) + 2(-1)$$

$$= -1 - 2 - 2 = -5$$

$\cancel{x+}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad L_2 - L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad L_2 - L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

UPMC 1M004 Calcul matriciel 2014-2015

Groupe 24.2– Interrogation numéro 6 du 9/04/ 2015

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

Numéro d'étudiant							

Nom		Prénom	

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Question : $a_1, \dots a_n \in \mathbb{K}$ 2 à 2 differ.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & & a_n \\ & & \\ a_1^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$ on a n nombre de $a_1 \dots a_n$

mq: $\det M = V(a_1, \dots a_n) = \prod (a_j - a_i)$ avec le $\prod$ pour $j = 2 \dots n$, $i = 1 \dots, n-1$, $i<j$

Etudier un polynome à une seul variable

Réponse : en remplacant a_n par x.

$$V(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$$

donc on essaye de dégager une relat° de récurrence

à $V_n = (a_1 \dots a_n)$ et $V_{n-1} = (a_1 \dots a_{n-1})$

une fois qu'on a ça ça sera facile d'etablir la formule

une relation qui relie V_n à V_{n-1}

de Vandermonde.

Commencons par : $P(x) = V(a_1 \dots, a_{n-1}, x)$ dernier elet est x

polynome

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_{n-1} & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}$$ en developpant la dernière colone de $P(x)$;

la dernière ligne et dernière colonne,

$$\begin{vmatrix} 1 = a_1^0 & & & 1 \\ a_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

cad mon facteur est x^{n-1}

$$= x^{n-1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ a_1 & & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}}_{V_{n-1}} + \underbrace{Q(x)}_{\text{son degré } \leq n-2}$$

polynôme

par le développement la dernière colonne.

Ce qui nous intéresse à ce stade c'est $\boxed{x^{n-1}}$

Qu'est ce qu'on sait de V_n ?

- $V_n = P(a_n)$

Le coefficient de plus haut degré de $P(x)$ est V_{n-1}

et $V_{n-1} = P(a_{n-1})$

Il nous reste à étudier les propriétés du Polynôme $P(x)$

$$V_n(a_1 \dots a_n) = V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

$$= V_1(a_1, a_1, a_3 \dots a_{n-1} - a_n)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ a_1 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots \end{vmatrix}$$

$a_1^{n-1} - a_n a_n^{n-2}$

$a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2}$

$a_1^{n-2}(a_1 - a_n)$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ 0 & a_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & a_1^{n-1} & \end{vmatrix} = 0.$$

$$P(x) = V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, x)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_n & x \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & & a_n - a_1 & x - \\ \vdots & & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} & \end{vmatrix}$$

Groupe 24.2– Interrogation numéro 6 du 9/04/ 2015

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

Numéro d'étudiant							

Nom		Prénom	

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Question :

Réponse : Determinant de Vandermonde

$V_2(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$

$V_3(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$.

$= 1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1^2 & a_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$

$= a_2 a_3^2 - a_2^2 a_3 - a_1 a_3^2 + a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2 - a_1^2 a_2$

$= a_2 a_3 (a_3 - a_1) + a_1 a_3 (a_3 - a_1) + a_1 a_2 (a_2 - a_1)$

$$= (-1)^n D(\alpha_1, \alpha_2 \text{-----}, \alpha_{n-1}) \prod_{i \neq n} (\alpha_i - \alpha_n)$$

par une récurrence immédiate, on obtient :

$$D(\alpha_1, \text{---} \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

cette matrice est donc inversible dès que tous les α_j sont distincts

---

$A = a_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}$$

x^2

$x + 2$

$a\, 1 + b(1+x) = 0$

$a + b + bx = 0$

$$\Big(\quad 1+x \quad 1 \quad 1$$

Montrer par récurrence sur n la formule suivante pour le calcul du determinant de Van Der Monde

$\forall (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$

$$D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ \alpha_1 & & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & & \alpha_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

on remplace chaque ligne l_i par $l_i - \alpha_n l_{i-1}$
on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha_1 - \alpha_n & \alpha_2 - \alpha_n & & \alpha_{n-1} - \alpha_n & 0 \\ \vdots & & & & \\ \alpha_1^{n-2}(\alpha_1 - \alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_n) & & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha_n & \alpha_2 - \alpha_n & & \alpha_{n-1} - \alpha_n \end{vmatrix}$$

313_0909_864 As

Exercice 5.10 Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Soit $x_i \in \mathbb{R}^3 - \{0\},\ i = \{1, 2, 3\}$. On suppose que,

$$\begin{cases} f(x_1) = \lambda_1 x_1, \\ f(x_2) = \lambda_2 x_2, \\ f(x_3) = \lambda_3 x_3. \end{cases}$$

1. Montrer que : pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, avec $i \neq j$ $\{x_i, x_j\}$, est libre.
2. La famille $\{x_1, x_2, x_3\}$ est-elle libre ?

Exercice 5.11 Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. On considére $e \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(e) \neq 0$.

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $u := \alpha e + \beta f(e) + \gamma f^2(e) = 0$. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (Indication : calculer $f(u)$ et $f^2(u)$)
2. Montrer que la famille $e, f(e), f^2(e)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.12

1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les rotations r_α et r_β d'angles respectifs α et β
   (a) Géométriquement, que vaut $r_\alpha \circ r_\beta$?
   (b) Donner l'expression de R_α et R_β, les matrices de r_α et r_β dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Retrouver le résultat de la première question.
2. Soit ρ la rotation vérifiant $\rho(3, -4) = (3, 4)$. Calculer $\rho(3, 4)$.

par récurrence :

pour $n=2$ $\quad V_2 = a_2 - a_1$ -

- $n = \mathbb{N}$ $\quad V_n = \prod_{\substack{j=2 \\ i<j \\ i \in \{1 \dots n-1\}}}^{n} (a_j - a_i)$

on suppose ce c'est vrai

et on fait $V_{n+1} = $ ——

donc la formule de Vandermonde par une methode polynomiale

Groupe 24.2– Interrogation numéro 6 du 9/04/ 2015

Tout appareil électronique (calculatrices, téléphones portables, etc.) est interdit

Numéro d'étudiant							

Nom		Prénom	

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Question :

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & \\ a_1^{n-1} & & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

Réponse :

Si on remplace x par a_1, on obtient que la colonne 1 et la dernière sont les mm et mm chose pour $a_2, \dots a_{n-1}$

donc on obtient un déterminant avec 2 colonne de la matrice identique :

cad que det $= 0$ car ~~le~~ ~~tout~~ déterminant qui a 2 colonne identique, le det $= 0$

donc ~~P~~ $P(a_1) = \cdots P(a_{n-1}) = 0$

Puisque $P(x)$ est de degré $n-1$ et dispose de $(n-1)$ racine qu'on vient de voir

donc $P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$

→ Qu'est ce qu'on sait du monôme du plus haut degré de P ?

on sait que son coeff est $= V_{n-1}$ cad au det de Vendemond à $n-1$ ~~deg~~ a

et donc on deduit, comme le coeff de plus haut degré est λ donc :

$$V_{n-1} = \lambda$$

donc on écrit :

$$P(x) = V_{n-1} \prod_{i}^{n-1} (x - a_i).$$

et come on a vue que $\boxed{V_n = P(a_n)}$

on en deduit la formule de vendemonde :

donc $V_n = V_{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1 \text{ ou } n\,?} (a_n - a_i)$

$V_{n-2} \prod_{i=1}^{n-1} (a_{n-1} - a_i)$

en réitérant cette formule en appliquant

$$\vdots$$

$$= \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_i). \quad j=2,\ i<j,\ i \in \{1, \dots, n-1\}$$

UPMC-Paris 6 Année universitaire 2015-2016

L1 - 1M004

PCGI

Sans documents ni calculatrice

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs.

$$x = \frac{15a + 8b + 19c}{42}$$

$$y = \frac{-5b + 9a - 4c}{21}$$

$$z = \frac{c + 3a - 4b}{42}.$$

une unique solution ssi

$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$

$$15a + 8b + 19c = 0$$
$$9a - 5b - 4c = 0$$
$$3a - 4b + c = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 9 & -5 & -4 & 0 \\ 15 & 8 & 19 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 48 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 24 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 31 & 0 \end{array}\right)$$

$31z = 0 \Rightarrow z = 0$

$y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 0$

1	2	-3
1	1	11
1	-2	7

$7 - 22$

$-1(2 \times 7 - 6)$

$+ 22 + 3$

$= 7 - \cancel{22} - 14 + \cancel{6} + \cancel{22}$
$+3$

$$x = \frac{15a + 8b + 19c}{42}$$

$$y = \frac{-5b + 9a - 4c}{21}$$

$$z = \frac{c + 3a - 4b}{42}.$$

Si $a = b = c = 0$

alors

$x + 2y - 3z = 0$

$x + y - 11z = b$

$x - 2y + 7z = c.$

$x = 0$

$y = 0$

$z = 0.$

~~au moins une solut° si :~~ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$15 \times \frac{145}{126} + 8 \times \left(\frac{-19}{21}\right) + 19$

$a = b = c = 0 \Rightarrow$

$x = 0$

(7)

$$\begin{matrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 40 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{matrix}$$

$20x + 7y = 3$

$28x + 5y = -5$

$\Rightarrow c = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow 40c + 14b = -6$

20 40

28 56 10

$\frac{20}{3} + 14b = -6 \Rightarrow 14b = -6 - \frac{20}{3}$

$= \frac{-18 - 20}{3} = \frac{-38}{3}$

$\Rightarrow b = \frac{-38}{14 \times 3} = -\frac{19}{21}$

(4)

$$\begin{matrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 7 & -3 \\ 0 & 8 & -2 & -2 \end{matrix}$$

(5)

$$\begin{matrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 14 & -6 \\ 0 & 40 & -10 & -10 \end{matrix}$$

(6)

$$\begin{matrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 40 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & -24 & -4 \end{matrix}$$

$15a + 8b + 19c = 0$

$-5b + 9a - 4c = 0$

$c + 3a - 4b = 0$

$x = 0$

$y = 0$

$z = 0$

$3a - 4b + c = 0$

$3a - 4 \times \frac{19}{21} + \frac{1}{6} = 0$

$\Rightarrow 3a = \frac{2 \times 4 \times 19 - 7}{42}$

$a = \frac{2 \times 4 \times 19 - 7}{42 \times 3}$

$= \frac{152 - 7}{126}$

$= \frac{145}{126}$

$$\begin{matrix} & 15 & 8 & 10 & \\ (1) & 9 & -5 & -4 & 0 \\ & 3 & -4 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$\begin{array}{r} 19 \\ \times 8 \\ \hline 152 \end{array}$

$\rightarrow$ (2)

$$\begin{matrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 10 & 0 \\ 15 & 8 & 10 & 0 \end{matrix}$$

(3)

$$\begin{matrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 7 & -3 \\ 0 & 28 & 5 & -5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & a \end{matrix}$$

$$\det = 1(3a-2) + 2(a+4) + 3(-1-6)$$

$$= \cancel{3a} - \cancel{2} + \cancel{2a} + \cancel{8} - \cancel{3} - 18$$

$$= 5a - 15 \neq 0$$

donc si $a = 3 \Rightarrow$ pas de solution

si $a \neq 3 \Rightarrow$ un

A inversible $\Leftrightarrow \det \neq 0$

$\Leftrightarrow$ pour tout b le syst $AX=b$ a au plus une solution et au mois une soltion

$\Leftrightarrow$ les colone sont linéairement indépendant

les colonne de A forment la base.

$\det \neq 0$

si $a \neq 3$.

on s'est ramené à calculer

$$\cancel{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x \\ \vdots & 0 & \ddots & & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & -x \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix} = x \underbrace{\begin{vmatrix} x & \cdots & -x \\ 0 & \ddots \quad 0 & \vdots \\ \vdots & 0 \quad x & -x \\ 1 & \cdots\ 1 & 1+x \end{vmatrix}}_{\text{dim } n-1} = x \begin{vmatrix} x & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & -x \\ \vdots & 0 \quad x & -x \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\cancel{= x \cdot x \underbrace{\begin{vmatrix} x & \cdots & -x \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \quad x & -x \\ 1 & \cdots\ 1 & 1+x \end{vmatrix}}_{\text{dim } n-2}}$$

$C_n \leftarrow C_n + C_1$:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & & & & -x \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & x & -x \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & x+2 \end{vmatrix}$$ développe selon cette ligne

$$= x \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -x \\ 0 & x & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x & \vdots \\ 0 & & & x & -x \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x+2 \end{vmatrix}}_{\text{dim } n-1}{}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$C_n \leftarrow C_n + C_1$

$$= x \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & -x \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & -x \\ 1 & & & & x+3 \end{vmatrix}$$

$$= x \cdot x \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & \cdots\ 0 & -x \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & x & -x \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x+3 \end{vmatrix}}_{\text{dim } n-2}{}_{(n-2)(n-2)}$$

$$= \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{x^3} \begin{vmatrix} & & \\ & & x+4 \end{vmatrix}_{(n-3)(n-3)}$$

$3+1$

par récurrence

$$= x^{n-2} \begin{vmatrix} x & -x \\ 1 & x+[(n-2)+1] \end{vmatrix}$$

$\text{dim } [n-(n-2)] \times [n-(n-2)]$
donc de dimen
2

$n-2-x=3$
$x = 3-n+2$
$= -n+1$
$= n-(n-1)$

$$= x^{n-2} \begin{vmatrix} x & -x \\ 1 & x+(n-1) \end{vmatrix}_{2\times 2}$$

$$= x^{n-2}\left[x(x+n-1)+x\right] = x^{n-1}\left[x+n-1+1\right]$$

$$\cancel{= x^{n-2}\left[x^2 + n-1\right.}$$

$$= x^{n-1}(x+n)$$

$$\begin{matrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots\ 1 & 1+x \end{matrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_n$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_n$
$\vdots$
$L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \cdots & 0 & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & x & -x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & & 0 & \\ & x & & & & -x \\ & & x & 0 & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & x & -x \\ 1 & \cdots & & & 1 & 1+x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{x \quad 0 \quad \cdots} & & 0 & -x \\ & x & 0 & \vdots \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & x & -x \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Exo 6 : $x \in \mathbb{R}$. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

pour $n = 2$: A est une matrice 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}$$

$$|A| = (1+x)^2 - 1$$
$$= (1+x-1)(1+x+1)$$
$$= x(x+2).$$

pour $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 0 & x & -x \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ $\begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

$\cancel{L_3 \leftarrow xL_3 - L_1}$

$$\cancel{\begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ 0 & x & x(1+x)+x \end{vmatrix}}$$

$\cancel{x(x+2)}$

$\cancel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$ $\cancel{\begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ 0 & 0 & x(1+x)+x \end{vmatrix}}$

$\cancel{x(x+3)}$.

donc $\det = x \cdot x \cdot x(x+3)$
$= x^3$

$L_3 \leftarrow xL_3 - L_1$ on a multiplié par x donc on élève du détermin[ant] un x

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ 0 & x & x(1+x)+x \end{vmatrix}$$

$x(x+2)$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ $\begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ 0 & 0 & x(x+2)+x \end{vmatrix}$

$x(x+2+1)$
$= x(x+3)$

donc $x \det A = x \cdot x \cdot x(x+3)$

$\det A = x^2(x+3)$.

$$x\begin{vmatrix} x & -x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x[x(1+x)+x] - x[-x]$$

$= x[x(1+x+1)] + x^2$
$= x^2(x+2) + x^2$
$= x^2(x+3)$

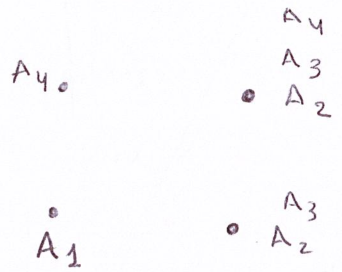
Exo4 :

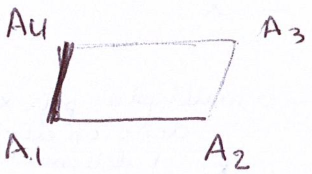
$A_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$A_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$A_3 \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$A_4 \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix}$





1) $\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{pmatrix} a_4 - a_1 \\ b_4 - b_1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A_2A_3} = \begin{pmatrix} a_3 - a_2 \\ b_3 - b_2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A_4A_3} = \begin{pmatrix} a_3 - a_4 \\ b_3 - b_4 \end{pmatrix}$

- condition 1 : $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_4$

$b_2 - b_1 = b_3 - b_4$

- condition 2 : $\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{A_2A_3}$

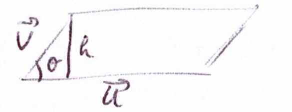
$a_4 - a_1 = a_3 - a_2$

$b_4 - b_1 = b_3 - b_2$

- condition 3 :

on sait que l'aire :

$$\text{Aire} = \|u\|\, h = \underbrace{\|u\|}_{>0}\ \underbrace{\|v\|}_{>0} \sin\theta$$



où $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos\theta}$

$$= \sqrt{1 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2 \|v\|^2}}$$

on veut que $\sin\theta \neq 0$

où $\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_2}$

$\vec{v} = \overrightarrow{A_1A_4}$

$$\text{aire orientée} = \det \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_4 - a_1 \\ b_2 - b_1 & b_4 - b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_4 - a_1 \\ b_2 - b_1 & b_4 - b_1 \end{vmatrix}$$

pour dire déterminant

$$= (a_2 - a_1)(b_4 - b_1) - (b_2 - b_1)(a_4 - a_1)$$

$$\text{aire non orientée} = \left| (a_2 - a_1)(b_4 - b_1) - (b_2 - b_1)(a_4 - a_1) \right|$$

valeur absolue

3) Soit $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{N}$

alors

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \in \mathbb{N}$$

car $L_3 = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$\in \mathbb{N}$

car diffeunce ou multiplication de deux entiers naturels donne tjrs un entiers naturel.

Exo année précédente :

Exo 6 :

1) Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2) Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coeff entiers est un nb entier

Réponse :

$$1) \text{ Aire} = \left| \begin{array}{cc} u & v \\ \downarrow & \downarrow \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right| = |8-4| = 5$$

valeur absolue

NB $A = (u \; v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

donc aire $= \sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u,v \rangle^2}$

$$= \sqrt{(4+9)(1+16) - (2\times 1 + 3\times 4)^2}$$

$$= \sqrt{13 \times 17 - 14^2}$$

$$= \sqrt{221 - 196}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

$$= \det A$$

$$= 8 - 3$$

$$= 5$$

2) $\text{Vol} = |\langle u \wedge v, w \rangle| = \det A$

$$\text{Vol} = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \left| 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right|$$

$$= |(1-3) + 6| = 4$$

OU

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \\ 0 \times 0 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \left\langle \begin{matrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \right| =$$

$$|6 - 3 + 1| = 4$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

produit vectoriel K

$$K = \vec{u} \wedge V$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & \Delta_{31} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} & -\Delta_{32} \\ \Delta_{13} & -\Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6$

$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$

$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & -0 & -0 \\ -(-3) & +(6) & -0 \\ (-4) & -(4) & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}333 & -0{,}3333 & 0{,}333 \end{pmatrix}$$

$\frac{6 \times 6 \times 4}{12} = \frac{6 \times 4}{2} = 12$

Sur matlab

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 \\ -0.3333 & -0.3333 & 0.3333 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & \Delta_{31} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} & -\Delta_{32} \\ \Delta_{13} & -\Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

où $\det B = -2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $\quad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} (-2) & -(0) & 0 \\ -(0) & +(2) & -(1) \\ 2 & -(2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0{,}5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe un entier naturel p $(p \in \mathbb{N}^*)$ tq $A^p = 0$

$A^p = O = O_{n \times n}$ (matrice nulle de det = 0

$\det A^p = \det(A \times A \times A \times \dots A)$
$= \det A \cdot \det A \dots \det A$
$= (\det A)^p$

$\det A^p = \det O_n = 0 \in \mathbb{C}$

donc $(\det A)^p = 0$

$\Rightarrow \det A = 0$.

Exo 3

Si A est une matrice inversible alors:
$\exists A^{-1}$ tq $A^{-1}A = A A^{-1} = I$

$\det(A^{-1}A) = \det(A A^{-1}) = \det(I) = 1$.

car $\underset{\det(I)}{\underset{\shortparallel}{|I|}} = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

donc $\Rightarrow$ $\det A^{-1} \cdot \det A = 1$

$\Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ (matrice inverse existe si et si $\det A \neq 0$

2) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 2 \times 2 \times 3 = 12$

$\det A^{-1} = |A^{-1}| = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{12}$.

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$
$= -2$

$|B^{-1}| = -\dfrac{1}{2}$.

$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= \boxed{1}$

$\det C^{-1} = |C^{-1}| = 1$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$L_1 \leftarrow \lambda L_1$
$\det \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \lambda \det A$

$L_1 \leftrightarrow L_2$ $\det \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix} = -\det A$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ c+a & a+b \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} a & c \\ b+c & a+b \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} a & b \\ b+c & c+a \end{vmatrix}$$

$$= b(a+b) - c(c+a) - a(a+b) + c(b+c) + a(c+a) - b(b+c)$$

$$= (a+b)(b-a) + (c+a)(a-c) + (b+c)(c-b)$$

$$= b^2 - a^2 + a^2 - c^2 + c^2 - b^2$$

$$= 0$$

ou

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & c+a & b+a \end{vmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - (a+b+c)L_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ b+c & c+a & b+a \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

Exercice 2 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\det C = |C| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det BC = -25$$

$$\det B \times \det C = -25$$

donc $\boxed{\det(B) \times \det(C) = \det(BC)}$

très vraie

$$\det(B+C) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(B+C) \neq \det B + \det C$$

en generale

exemple

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B+C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\det B = 0$

$\det C = 0$

$\det B + \det C = 0$

$\neq$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (1-1) \quad -1(-1-1)$$
$$+1(1+1)$$

$$= 2 + 2 = 4$$

ou

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ +1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_1 + L_2$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1(-4)$$
$$= 4.$$

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$$
$$= -3 + 12 - 9 = 0.$$

$\boxed{\text{ou}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 \quad L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - a^2L_1$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$\det = (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2)$$
$$= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a)$$
$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a)$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 3\times 3 = 1-9 = -8$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ {}^{-}0 & {}^{+}-1 & {}^{-}4 \\ {}^{+}0 & {}^{-}0 & {}^{+}5 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times\left(-5 - (0\times 4)\right) - 3(0\times 5 - 0\times 4) + 1(0\times 0 - 0\times(-1))$$

$$= -5$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$= 0 - 0 + 5\left(1\times(-1) - 0\times 3\right)$$

$$= -5$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5$$

$\boxed{\text{ou}}$ matrice ~~diagonale~~ triangulaire dont det est la multiplication des nombres sur la diagonale.

$\rightarrow$ donc $\det B = 1.(-1).5 = -5$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1.\left(-2.2 - 0.0\right)$$

$$= -4$$

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{3} \\ \overset{-}{2} & \overset{+}{0} & \overset{-}{4} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{1} \end{vmatrix} = 1.\left(0.1 - (-1).4\right) - 0.\left(2.1 - 3.4\right) + 3\left(2.(-1) - 0.3\right)$$

$$= 4 - 6 = -2.$$

ou

$$-1.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)(4-6) = -2$$

4 Déterminants

Exercice 4.1 Calculer les déterminants suivants. Factoriser les deux derniers, si possible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 4.2

1. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Calculer $\det B$, $\det C$ et $\det(BC)$. Que remarquez-vous ? Cette formule est-elle générale ?
   Calculez $\det(B + C)$. Que remarquez-vous ?
2. Rappel : une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$.
   Montrer que si A est nilpotente alors $\det(A) = 0$.

Exercice 4.3 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle relation lie le déterminant d'une matrice inversible et celui de son inverse ?
2. Montrer que les matrices précédentes sont inversibles. Calculer le déterminant de leur inverse.
3. Calculer A^{-1}, B^{-1} et C^{-1}.

Exercice 4.4 Soit x un réel. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\begin{cases} a_{i,j} = 1 & \forall\, i \neq j \\ a_{i,i} = 1 + x & \forall\, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Exercice 4.5 *Déterminant de Vandermonde*
Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels. On appelle déterminant de Vandermonde le déterminant suivant :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Calculer $V_n(a_1, \dots, a_n)$ pour $n = 1, 2, 3$.
2. Montrer que $V_n(a_1, \dots, a_n) = 0$ lorsque $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas tous distincts.
3. On suppose que $a_1, \dots, a_n$ sont distincts. On pose $P(x) = V_{n+1}(a_1, \dots, a_n, x)$. En développant, montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, et donner son coefficient dominant. Montrer que
$$P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_n)$$
et en déduire que
$$P(x) = V_n(a_1, \dots, a_n)(x - a_1) \dots (x - a_n).$$
On rappelle que tout polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n admet au plus n racines distinctes, et que α est une racine de P si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.
4. Montrer par récurrence sur n que
$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

$\frac{36}{28} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$

$9 \times 1 = 9$

$9 \times 0{,}12$

$= 0{,}9 + 1{,}8$

$= 2{,}7$

$= 9 \times 1{,}12$

$\frac{2{,}7}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6{,}7}{7}$

$\dfrac{\frac{112}{7}}{\frac{100}{7}} = \frac{112}{7} \times \frac{7}{100}$

$\frac{112}{100} = 1{,}12$

Maissa

Naissa.

3 Systèmes linéaires : $n = 3$

Exercice 3.1 Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode de Gauss :

1. $\begin{cases} x+y-z = 0 \\ x-y = 0 \\ x+4y+z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+2z = 5 \\ x-y-z = 1 \\ x+z = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-y+2z = a \\ -x+2y-3z = b \\ x+2y+z = c \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+4y+5z = 5 \\ 3x+6y+2z = 9 \\ 5x+7y+9z = 12 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x+2y+10z = 7 \\ 6x+3y+15z = 19 \\ 7x+13y+17z = 23 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+5y+2z = 8 \\ 3x+15y+6z = 24 \\ 9x+45y+18z = 72 \end{cases}$

Exercice 3.2 Soit $a \in \mathbb{R}$. On étudie le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x-2y+3z = 2 \\ x+3y-2z = 5 \\ 2x-y+az = 1 \end{cases}$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système peut :
   (a) n'admettre aucune solution
   (b) admettre exactement une solution
   (c) admettre une infinité de solutions
2. Résoudre le système lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 3.3 Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax+by+z = 1 \\ x+aby+z = b \\ x+by+az = 1 \end{cases}$$

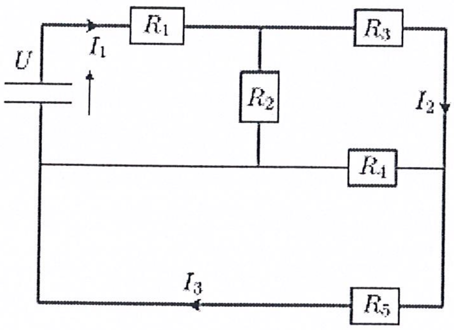
Exercice 3.4 Soient a, b et c des réels.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres pour que le système suivant ait au moins une solution ?

$$\begin{cases} x+2y-3z = a \\ x+y-11z = b \\ x-2y+7z = c \end{cases}$$

2. Est-ce que le système peut avoir une unique solution ?

Exercice 3.5 On considère le circuit électrique suivant, en régime stationnaire.



1. Utiliser les Lois de Kirchhoff pour obtenir un système linéaire liant I_1, I_2 et I_3 en fonction des paramètres U, R_1, R_2, R_3, R_4 et R_5.
2. On suppose maintenant que $U = 1V$ et $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$. Déterminer les valeurs de I_1, I_2 et I_3.

TD5

On dit que F est une application linéaire si $\forall X, Y$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

on a : $F(\lambda X + Y) = \lambda F(X) + F(Y)$

Exercice 1

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x \\ -7y+5x \end{pmatrix}$

equation d'une droite
~~c'est~~ et une equat° d'une droite est linéaire donc chaque coordonné est linéaire

donc Linéaire

Soient $\underset{\| X}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$ et $\underset{\| Y}{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^2$

et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x + v \\ \lambda y + w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3(\lambda x + v) \\ -7(\lambda y + w) + 5(\lambda x + v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\lambda x + 3v \\ -7\lambda y - 7w + 5\lambda x + 5v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\lambda x \\ -7\lambda y + 5\lambda x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3v \\ -7w + 5v \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 3x \\ -7y + 5x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3v \\ -7w + 5v \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f(X) + f(Y).$$

donc c'est une application linéaire

$(f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y))$

Une application linéaire F caractérise de manière unique par une matrice $A_F \in M_2(\mathbb{R})$ telque pour tout $X \in \mathbb{R}^2$:

$$F(X) = A_F X.$$

Dans notre cas

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(X) = A_f X = A_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2) $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sin(xyz)$

la fonction sin n'est pas linéaire, donc g n'est pas linéaire

sin ∿∿

3) $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ 0 \\ x + 2y - 3z \end{pmatrix}$

$$h\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right)$$

$$= h\begin{pmatrix} \lambda x + u \\ \lambda y + v \\ \lambda z + w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda x + u) + 2(\lambda y + v) - 3(\lambda z + w) \\ 0 \\ (\lambda x + u) + 2(\lambda y + v) - 3(\lambda z + w) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x + 2\lambda y - 3\lambda z \\ 0 \\ \lambda x + 2\lambda y - 3\lambda z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u + 2v - 3w \\ \\ u + 2v - 3w \end{pmatrix}$$

$$= \lambda\, f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

donc cette application est linéaire.

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$''$

$h(x, y, z)$.

Exercice 2 :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longrightarrow (y, x)$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longrightarrow (0, x)$

$f + g = ?$ $\quad 2f - 3g = ?$ $\quad f \circ g = ?$ $\quad g \circ f = ?$ $\quad f^2 = ?$ $\quad g^2 = ?$

$$(f+g)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\2x\end{pmatrix}$$

$$(2f-3g)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - 3g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2y\\2x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y\\-x\end{pmatrix}$$

$$(f\circ g)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{\text{définition}}{=} f\Big(\overbrace{g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}}\Big) = f\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$$

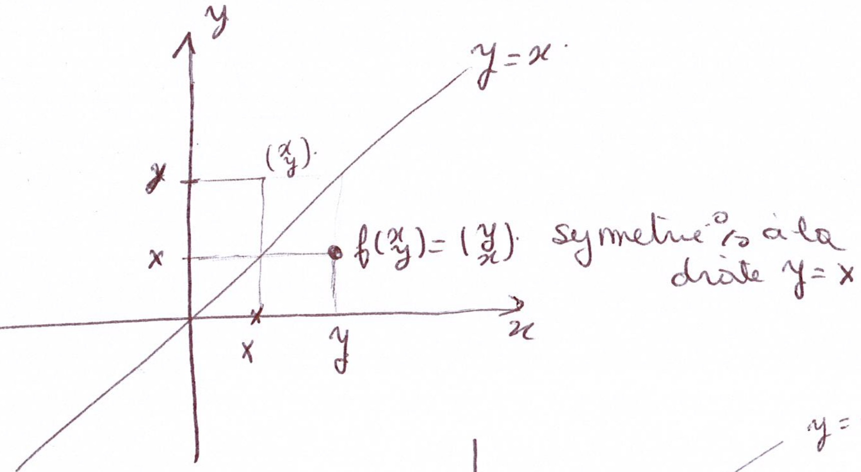
$$(g\circ f)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} g\Big(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Big) = g\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$$

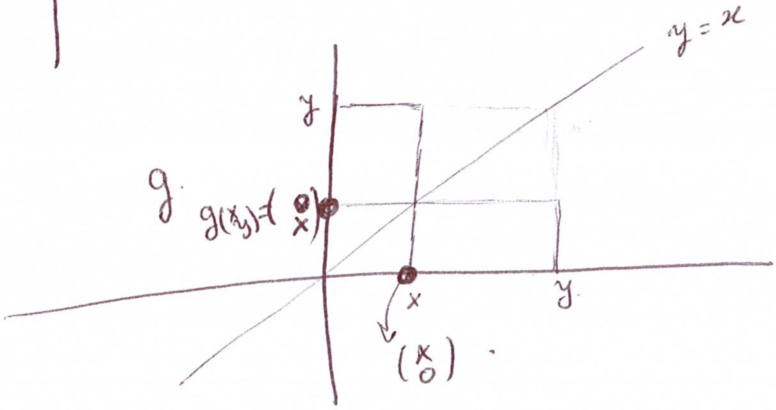
$$(f^2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\circ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\Big(\overbrace{f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}}\Big) = f\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$\rightarrow f\circ f = $ Identité dans $\mathbb{R}^2$

$$(g^2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (g\circ g)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = g\Big(g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Big) = g\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

f





Exercice 5.3 :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (7x, 7y)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (2x+3y, 7x-5y)$$

$g \circ f = ?$

$f \circ g = ?$

f et g commutent ?

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7x\\7y\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+3y\\7x-5y\end{pmatrix}$$

$$f \circ g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\left(g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$
$$= f\begin{pmatrix}2x+3y\\7x-5y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}7(2x+3y)\\7(7x-5y)\end{pmatrix}$$
$$= 7\begin{pmatrix}2x+3y\\7x-5y\end{pmatrix}.$$

$$g \circ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$
$$= g\begin{pmatrix}7x\\7y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2(7x)+3(7y)\\7(7x)-5(7y)\end{pmatrix}$$
$$= 7\begin{pmatrix}2x+3y\\7x-5y\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f \circ g = g \circ f$: f et g commute

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A_f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ ou } f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7x\\7y\end{pmatrix}.$$

donc $A_f = 7\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 7I$

F''

$A_G = \begin{pmatrix}2&3\\7&-5\end{pmatrix}_{2\times 2}$ car $g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+3y\\7x-5y\end{pmatrix}$

G

$f \circ g \Leftrightarrow F.G = 7\begin{pmatrix}2&3\\7&-5\end{pmatrix}$

Exercice 4

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow (7x, 7y, 7z)$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longrightarrow (x,y)$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f \circ g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f\left(g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \cancel{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

pas défini

$$g \circ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = g\left(7\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$= 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

f et g ne commutent pas.

- La matrice qui represente $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}}_{G} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1}.$$

$\underset{3\times 3}{F} \cdot \underset{2\times 3}{G}$ pas défini

~~Exercice~~

NB

Si f est une application linéaire alors

$$F = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

où $(e_1, e_2, e_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$G = (g(e_1), g(e_2), g(e_3))$$

$$= \left(g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow (3x+y, x-y)$.

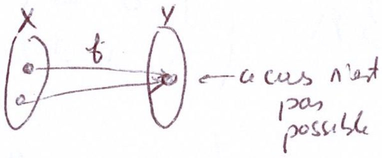
$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ou}}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

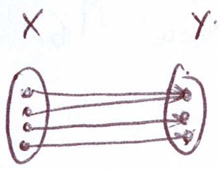
2- On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est bijective ssi f est surjective et injective (en generale)

injective : si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.



surjective :

$\forall y \in Y, \exists\, x \in X : f(x) = y$.



f est une application linéaire alors f est bijective ssi $|F| \neq 0$

(f est bijective ssi F est inversible).

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$|F| = -4 \neq 0 \Rightarrow f$ est bijective

NB u et v 2 ap linéaire.
M_U et M_V leurs matrice associé
alors $M_{U \circ V} = M_U \times M_V$

- $f : X, Y$ est bijective alors la fonction réciproque existe, et l'on note $f^{-1} : Y \longrightarrow X$
et on a $f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$.

$$F^{-1} = \frac{1}{|F|} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix}.$$

$\Delta_{11} = -1$

$-\Delta_{12} = -1$

$-\Delta_{12} = -1$

$\Delta_{22} = 3$

$$F^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

$$f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}}^{F^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} \\ \frac{x}{4} - \frac{3y}{4} \end{pmatrix}.$$

$$f \circ f^{-1}\binom{x}{y} = f\begin{pmatrix} \frac{x}{4}+\frac{y}{4} \\ \frac{x}{4}-\frac{3y}{4}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{4}\right) + \left(\frac{x}{4}-\frac{3y}{4}\right) \\ \left(\frac{x}{4}+\frac{y}{4}\right) - \left(\frac{x}{4}-\frac{3y}{4}\right)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 :

$$u\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2y-x \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$v\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y-x \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où : $e_1 = \binom{1}{0}$

donc

$$u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$e_2 = \binom{0}{1}$

$$u(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $A = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v \circ u = v\left(u\binom{x}{y}\right)$$

x de v

comme y de v

$$= v\begin{pmatrix} x-y \\ 2y-x \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x-y) - (x+y) \\ (2y-x) - (x-y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2y \\ -2x+3y \end{pmatrix}.$$

La matrice qui represente l'application lineaire $v \circ u$ est

$B \cdot A$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

$$M_{v\circ u} = M_v \times M_u.$$

Exercice 9 :

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{vecteur } X} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ 2x + 4y + 2z \\ x + y + 3z \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (on prend l_{ex}).

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

donc $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\alpha' = 1$, $\beta' = 4$, $\gamma' = 1$

Le noyau d'une application linéaire $E \to F$ est un sous espace vectoriel de E

Exercice 1

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ x + y + z \\ x \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

ou

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- $\mathrm{Ker}(f) = \{ x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 0 \}$ = noyau de f.

ou $X \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow AX = 0$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} y + z \\ x + y + z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}}_{\text{système}} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

il faut trouver les solut° du système :

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas bijectif

$$= \left\{ [illegible] \; \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Ker f = Vect [illegible]

$\mathrm{Im}\, f = \{ f(x), x \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ x+y+z \\ x \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \left\{ x \overset{f(e_1)}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

| donc la famille $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est bien generatrice mais pas facile + libre ~~cherchons une~~ famille de 2 vecteurs qui elle soit libre

les 3 vecteurs $\overset{f(e_1)}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{f(e_2)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{f(e_3)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ sont l'image de f par la base canonique. donc $\mathrm{Im} f = \underbrace{\mathrm{vect}}_{1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 2

mais d'après le th de rang : $\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \underbrace{\dim \mathrm{Ker} f}_{1} + \dim \mathrm{Im} f$

ils suffit d'appliquer f aux vecteurs de la base canonique

l'image de f est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

ne sont pas colineair
les 2 vecteurs sont libre

dim 2 formé de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

or $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la famille est liée

donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ constitue une ~~famille libre~~ base $\mathrm{Im} f$

→ Suite Ker f : **NB** si det ≠ 0 alors noyau = $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ donc bijectif

$\mathrm{Ker} f = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

si det A = 0 alors noyau ≠ $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ n'est pas bijectif

$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ donc noyau ≠ $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ n'est pas bijectif

donc si n'est elle n'est pas bijectif

Ex 10

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ \lambda_3$.

pour montrer que c'est libre il faut que $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$ avec $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

on suppose

$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$ ~~avec $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$~~

$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = f(0) = 0$

$\|$ car applicat° linéa

$f(\alpha x_1) + f(\beta x_2)$

$\|$

$\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

$\|$

$\alpha \lambda_1 x_1 + \beta \lambda_2 x_2$

$\|$

$-\lambda_1 \beta x_2 + \beta \lambda_2 x_2$

$\|$

$(\lambda_2 - \lambda_1) \beta x_2 = 0$ car

$x_2 \neq 0$

$\lambda_2 > \lambda_1$ donc $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$

donc $\beta = 0$

et donc on remplace $\Rightarrow \alpha = 0$

$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$

$f(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3) = f(0) = 0$

$\|$

$\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) + \gamma f(x_3)$

$\|$

$\alpha \lambda_1 x_1 + \beta \lambda_2 x_2 + \gamma \lambda_3 x_3$

$\gamma x_3 = -\alpha x_1 - \beta x_2$

$\|$

$\alpha \lambda_1 x_1 + \beta \lambda_2 x_2 - \alpha \lambda_3 x_1 - \beta \lambda_3 x_2$

$\|$

$x_1(\alpha \lambda_1 - \alpha \lambda_3) + x_2(\beta \lambda_2 - \beta \lambda_3)$

$= \alpha x_1 (\lambda_1 - \lambda_3) + \beta x_2 (\lambda_2 - \lambda_3)$.

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow v_1 v_2 v_3$ libre

$\lambda_1 - \lambda_3 \neq 0$

$\lambda_2 - \lambda_3 \neq 0$.

$x_1 \neq 0$

$x_2 \neq 0$

donc α et $\beta = 0$

$\alpha = \beta = 0$.

$\gamma = 0$.

donc $x_1 \ x_2 \ x_3$ est une base de ~~E~~ $\mathbb{R}^3$

NB ~~En algèbre linéaire, une famille d'un~~

~~les vecteurs~~

une famille de vecteurs de E est dite libre ou "linéairement indépendants" si la seule combinaison linéaire des vecteurs v_i égale au vecteur nul 0 est celle dont tous les coefficients sont nuls,

$\forall (a_1 \dots a_n) \in K^n \quad a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_E \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Exercice 5.8

1) $f(x+3y+z, 2x-2y-6z, -x+3y+5z)$

2) $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x)=0\}$

= noyau f

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}x+3y+z\\2x-2y-6z\\-x+3y+5z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{ \quad " \quad : F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

trouver la solution du système

$$x+3y+z=0$$
$$2x-2y-6z=0$$
$$-x+3y-5z=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$-2-2.3=-2-6=-8$

$-6-2.1=-8$

$$\begin{array}{c} \\ L_2-2L_1 \\ L_3+L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$y=-z$

$1x+3y+z=0$

$x-3z+z=0 \Rightarrow x-2z=0 \Rightarrow x=2z$

$x=2z$

$y=-z$

z

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2z\\-z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

donc

$$\ker f = \left\{\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \text{vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

EXO11 :

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f^3 = 0$

$f^2 \neq 0$

$e \in \mathbb{R}^3$

$f^2(e) \neq 0$

1) $u = \alpha e + \beta f(e) + \gamma f^2 = 0$

$\alpha e + \beta f(e) + \gamma f^2 = 0$
$\alpha f(e) + \beta f^2(e) = f(0)$
$\alpha f^2(e) = f^2(0)$

$f(u) = f(\alpha e + \beta f(e) + \gamma f^2(e)) = f(0)$

$= f(\alpha e) + f(\beta f(e) + f(\gamma f^2(e)) = 0$

$= \alpha f(e) + \beta f^2(e) + \gamma \underbrace{f^3(e)}_{0} = f(0).$

car $f^3 = 0$

$f^2(u) = f(f(u)) = f(f(0))$

$= f(\alpha f(e) + \beta f^2(e))$

$= \alpha f^2(e) + \beta \underbrace{f^3(e)}_{0} = f(f(0)) = f^2(0)$

donc $\alpha f^2(e) = f^2(0) = 0$

une famille libre de $\mathbb{R}^3$ ~~donc~~ donc ~~generatrice~~

et donc base de $\mathbb{R}^3$.

---

une famille de vecteur est
une base ssi elle est libre maximal (c.a.d generatrice minimale)

Formule de changement de base

Exercice 6.1

On est dans $\mathbb{R}^3$.

Si 2 triplets ou 4 donc c'est pas une base. Il faut un triplet car on est $\mathbb{R}^3$ } seule

$B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$B = \{u, v, w\} \in \mathbb{R}^3$

B est une base de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det(u,v,w) \neq 0$

1) $|B_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc B_1 est une base.

2) $|B_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ base.

3) n'est pas une base (car libre mais pas generatrice).

4) // car n'est pas libre : $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exo 6.2 :

Soient $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$

$C = \{c_1, c_2, c_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$

Il $\exists$ $M_{B \to C} = \begin{pmatrix} [c_1]_B & [c_2]_B & [c_3]_B \end{pmatrix}$

$[c_i]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_i = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$

1) Exemple (pas dans le TD)

$B = \{e_1, e_2, e_3\} = C$

$c_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$

$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 1 b_1 + 0 . b_2 + 0 . b_3$

pas nécessaire → $= 1 . e_1 + 0 . e_3 + 0 e_3$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[c_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$

$= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= e_2$

$[c_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[c_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M_{B \to C} = M_{B \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = Identité

3) $B = \left\{ \overset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \overset{b_2}{\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}}, \overset{b_3}{\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}} \right\}$

$C = \left\{ \overset{c_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \overset{c_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \overset{c_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\}$

$$c_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 + \gamma\, b_3$$
$$= \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$
$\beta = \gamma = 0$

$\boxed{\text{donc } [c_1]_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$

vecteur qui represente c dans B.

$$c_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 + \gamma\, b_3$$
$$= \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$$

$\boxed{\gamma = 0}$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\boxed{\beta = \frac{1}{4}}$ car on veut que ca soit = à 1

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc $\gamma = \frac{3}{4}$

$\boxed{\text{donc } [c_2]_B = \begin{pmatrix}3/4\\1/4\\0\end{pmatrix}}$

$$c_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$$

$\boxed{\gamma = \frac{1}{3}}$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\alpha - 3\beta + 1\\4\beta - 2\\1\end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\beta = \frac{1}{2}}$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha - \frac{3}{2} + 1\\0\\1\end{pmatrix}$$ donc $\alpha - \frac{3}{2} + 1 = 0$

$\alpha = \frac{3}{2} - 1$
$= \frac{3-4}{2}$
$= -\frac{1}{2}$.

$$[c_3]_B = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

$$M_{B \to C} = \begin{pmatrix}1 & 3/4 & -1/2\\0 & 1/4 & 1/2\\0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}.$$

1) $B = \{(1;0;0), (0,1,0), (0;0,1)\}$

$C = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$

$C_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$

$= \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\alpha = 1$
$\beta = 1$
$\gamma = 0$

$[C_1]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{matrix}$

$C_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\alpha = \gamma = 0$
$\beta = 1$

$[C_2]_B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$C_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 1$

$[C_3]_B = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$M_{B\to C} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2) $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$C = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$C_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\gamma = 0$
$\beta = -1$
$\alpha = 1$

$\alpha = 1$
$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 1$
$\gamma = 0$

$(C_1)_B = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$C_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\gamma = 0$
$\alpha = 0$
$\beta = 1$

$(C_2)_B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$C_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \cancel{8}\,\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\alpha = 0$
$\beta = -1$
$\gamma = 1$

$[C_3]_B = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$M_{B\to C} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

NB $M_{C\to B}$

base

$B\, M_{B\to C} = C$ C'est pour cela qu'on

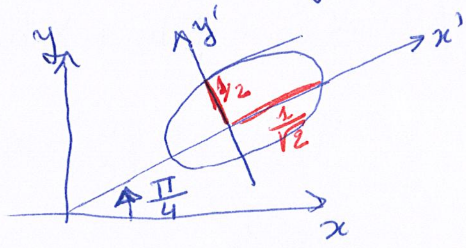
base l'appelle matrice de changement de Base

4)

Avant l'exo 6.3 faire ~~ex~~ dernier exo TD1.

Exercice 6.3

ellipse $\Rightarrow ax^2+by^2=1$



$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

matrice de passage de ~~…~~ une base canonique à l'autre

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

NB

$P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{\underset{\text{déterminant}}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$1\times1-(-1\times1)=2$.

$\sqrt{2}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') = x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y'-x') = y \end{cases}$$

$3x^2+2xy+3y^2=1$.

$$\frac{3}{2}(x'+y')^2 + 2\cdot\frac{1}{2}(x'+y')(y'-x') + \frac{3}{2}(y'-x')^2 = 1$$

$$3\left((x')^2+(y')^2+2x'y'\right) + 2\left((y')^2-(x')^2\right) + 3\left((y')^2+(x')^2-2x'y'\right) = 2$$

$4(x')^2+8(y')^2=2$

ellipse $\Rightarrow 4(\cancel{2}x')^2 + 4(y')^2 = 2$.

NB

une matrice de passage (ou ~~une~~ encore matrice de changement de base) permet d'écrire des formule de changement de base pour les représentations matricielles des vecteurs, des app linéaires et des formes bil.

Soit B, B' 2 bases de E.

$P_B^{B'}$: matrice de passage de B à B'.

L'application de cette matrice à un élé^t correspond donc à l'interprétat° de cet élé^t comme des coordonnés dans la base B' d'un vecteur

B' : nouvelle base
B : ancienne base

La matrice de pass^e est utilisé pour effectuer des change^t de coordonné :

Les colonnes de la matrice de passage sont les coordonnés des vecteurs de la nouvelle base, exprimés dans l'ancienne

$$B = (e_1, \dots, e_n)$$

$$B' = (e_1', \dots e_n') \quad \text{où} \quad e_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad \text{pour } j = 1, \dots n$$

alors $P_B^{B'} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{K})$.

Changement de coordonnés pour un vecteur

Soit un vecteur x qui a pour coordonné X et X' dans deux bases B et B'.

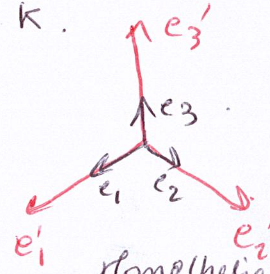
alors $X = P_B^{B'} X'$

l'applicat° de la matrice $P_B^{B'}$ dans les bases B', B aux coordonnés X' dans B' donne les coordonnés de x dans B.

Exemple :

$B = (e_1, e_2, e_3)$.

$B' = (e_1', e_2', e_3')$ est obtenue par une homothétie de facteur k.



Homothétie d'un facteur k.

$e_1' = k e_1$
$e_2' = k e_2$
$e_3' = k e_3$

La matrice de Passage s'écrit

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Soit x un vecteur de composantes (X_1, X_2, X_3) dans B et (X_1', X_2', X_3') dans B' :

on a :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k X_1' \\ k X_2' \\ k X_3' \end{pmatrix}.$$

- B et B' 2 base.

alors $P_B^{B'}$ est inversible

et $(P_B^{B'})^{-1} = P_{B'}^{B}$.

$$P_B^{B'} P_{B'}^{B} = I_n.$$

Homothétie

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{k} \\ \frac{x_2}{k} \\ \frac{x_3}{k} \end{pmatrix}$$

Exos :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ but : $A = PDP^{-1}$ où P est inversible.

2) $C = (u_1, u_2)$

tq $\begin{cases} Au_1 = u_1 \\ Au_2 = -u_2 \end{cases}$

$Au_1 = u_1$: $\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 5x - 12y = x \\ 2x - 5y = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 12y \\ 2x = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \{ x = 3y$ on a une infinité de solution

$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ on choisit ça.

$Au_2 = -u_2$ $\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 5x - 12y = -x \\ 2x - 5y = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 12y \\ 2x = 4y \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 2y$

$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

vérifions que u_1 et u_2 forme une base.

$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$.

vérifions que $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

$\alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha = -\beta$.

~~3α~~ $-3\beta + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$

donc libre et

elle est maximal

donc forme une base.

ou

det $\neq 0$.

$|C| = 1 \neq 0$ donc

C est une base de $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$F = A$

A est la matrice dans la base canonique

On veut trouver A dans la base C.

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canonique

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$[c_1]_B$ $[c_2]_B$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 3$, $\beta = 1$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 2$, $\beta = 1$

$$M_{B \to C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}.$$

$M_{C \to B} = M_{B \to C}^{-1} = \frac{1}{3-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

ou

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha = -\beta$

$-3\beta + 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = -1$

$\alpha = 1$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha = -\frac{2}{3}\beta$ $\quad -\frac{2}{3}\beta + \beta = 1$

donc $-2\beta + 3\beta = 3$

$\beta = 3$

$\alpha = -2$

$$A = PDP^{-1}$$

$$P^{-1}A = P^{-1}PDP^{-1}$$

$$P^{-1}AP = \underbrace{P^{-1}P}_{I} D \underbrace{P^{-1}P}_{I}$$

$D = P^{-1}AP$ où $P = M_{B \to cF}$

$$D = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= D.$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^2 = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{Id}DP^{-1}).$$

$$= PD^2P^{-1}.$$

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Changement de Matrice pour une application linéaire

f une applicat° linéaire associé à A,

La matrice de la m̂ app linéaire évaluée dans la nouvelle base est donné par la formule de changement de base :

$K = P^{-1}AP$ où $P = M_{B \to C}$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diagonale}$$

$$= D.$$

Exercice 6.7

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2$$
$$m\ddot{x}_2 = kx_1 + -2kx_2 .$$

1) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2k}{m} x_1 + \frac{k}{m} x_2$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{k}{m} x_1 - \frac{2k}{m} x_2$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

2) $\frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2+1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2-1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{3k}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{3k}{m} v_2 .$

3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

$= \frac{k}{2m}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{k}{2m}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{3k}{m} \end{pmatrix}$

$$Y = P^{-1}X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{Y} = DY = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{3k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{3k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{k}{m} y_1$$
$$\ddot{y}_2 = -\frac{3k}{m} y_2$$

Université Pierre et Marie Curie
Année universitaire 2014-2015

1M004 : *Calcul matriciel*
Travaux dirigés

---

6 Formule de changement de base

Exercice 6.1 Les familles de vecteurs suivantes forment-elles une base de $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
2. $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,1,0)\}$
3. $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ libre mais pas generatrice
4. $\mathcal{B}_4 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}$ n'est pas libre car $1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$

Exercice 6.2 Donner la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ dans les cas suivants

1. $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$
2. $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
3. $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(-3,4,0),(3,-6,3)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
4. $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(-3,4,0),(3,-6,3)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$

Exercice 6.3 Soit $\mathcal{C}$ la courbe dans le plan donnée par l'équation $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$. Considérons des nouvelles coordonnées données par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Donner à quoi correspond géometriquement la matrice de changement de base proposée. Trouver ensuite l'équation de $\mathcal{C}$ dans le système de coordonnées $\binom{x'}{y'}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une ellipse.

Exercice 6.4 Soit f l'application linéaire donnée par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (y, -2x+3y) \end{array}$$

1. Trouver un vecteur $u_1 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ tel que $f(u_1) = u_1$ et un vecteur $u_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ tel que $f(u_2) = 2u_2$.
2. Justifier que $\mathcal{C} = \{u_1, u_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de changement de base entre la base canonique et la base $\mathcal{C}$.
3. Donner la matrice de l'application f dans la base canonique puis dans la base $\mathcal{C}$ et écrire la formule de changement de base entre les deux matrices obtenues.

Exercice 6.5 Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de proposer une méthode pour calculer A^n. Pour cela on va chercher une matrice plus simple, D, telle qu'on ait $A = PDP^{-1}$, pour P une certaine matrice inversible.

15 - 25 - 524.

1. Pourquoi est-il intéressant de trouver une décomposition de la forme $A = PDP^{-1}$?. Pour cela on pourra donner A^n en fonction de D^n.
2. Trouver une base $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ formée de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $Au_1 = u_1$ et $Au_2 = -u_2$.
3. Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$? Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P (qu'on explicitera) telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer D^n et en déduire A^n.

nouvelle

$\cancel{K_B} = P^{-1} A P_{B \to C}$

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 3, \ \beta = 1$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 2, \ \beta = 1$

$M_{B \to C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P$

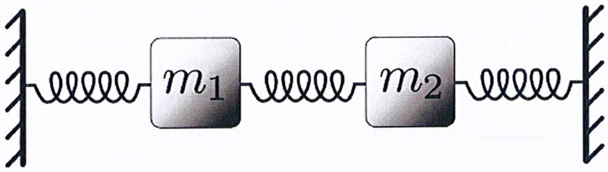
Exercice 6.6 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$

Exercice 6.7 Oscillateur harmonique couplé

Considérons deux particules de même masse $m_1 = m_2 = m$ attachées comme dans la figure ci-dessous.



Soit k la constante de raideur des ressorts. On note les déplacements des particules par x_1 et x_2, les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = kx_1 + -2kx_2, \end{cases} \tag{1}$$

où $\ddot{x}_i$ désigne la dérivée seconde par rapport au temps de x_i. Un tel système d'équations différentielles ordinaires est dit *couplé*.

1. Soit $X = \binom{x_1}{x_2}$. Montrer que le système (1) peut être écrit sous la forme $\ddot{X} = AX$, où A est une matrice 2×2. Trouver A.
2. Montrer que $v_1 = \binom{1}{1}$ est tel que $Av_1 = -\frac{k}{m} v_1$ et que $v_2 = \binom{1}{-1}$ est tel que $Av_2 = -\frac{3k}{m} v_2$.
3. Soit P la matrice dont les colonnes sont données par v_1 et v_2. Montrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{3k}{m} \end{pmatrix}.$$

   On notera D cette matrice diagonale.

4. Soient $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ des nouvelles coordonnées données par $Y = P^{-1}X$. Montrer que Y satisfait le système *découplé* :

$$\ddot{Y} = DY \iff \begin{cases} \ddot{y}_1 = -\dfrac{k}{m}y_1 \\ \ddot{y}_2 = -\dfrac{3k}{m}y_2 \end{cases}. \tag{2}$$

5. Résoudre le système (2) et analyser le résultat.

Exercice 6.8 On note $\mathbb{P}_1$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal 1. Soit les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} e_1 : x &\mapsto 1 \\ e_2 : x &\mapsto x \end{aligned}$$

Soit $p \in \mathbb{P}_1$.

1. Montrer que p s'écrit comme combinaison linéaire unique de e_1 et e_2 : $p = a_1e_1 + a_2e_2$.
2. On pose $f_1 = e_1 + e_2$ et $f_2 = e_1 - e_2$. Montrer que p s'écrit comme combinaison linéaire unique de f_1 et f_2 : $p = b_1f_1 + b_2f_2$.
3. Trouver la matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.9 Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0. \tag{3}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

   On admettra le résultat suivant (appelé le théorème de Cauchy-Lipschitz) :
   Étant donnés t_0 et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, il existe une unique solution y sur $\mathbb{R}$ au problème :

$$(P) : \begin{cases} \ddot{y} + a\dot{y} + by = 0 \\ y(t_0) = \alpha \text{ et } \dot{y}(t_0) = \beta. \end{cases}.$$

2. Montrer que S est de dimension finie et donner sa dimension.
3. On se place maintenant dans le cas où $a = -4$ et $b = 5$. Chercher des solutions de (3) sous la forme :

$$f(x) = \exp(rx)$$

   avec $r \in \mathbb{C}$.
4. Est ce que les solutions obtenues sont indépendantes ? Forment-elles une base de $\mathcal{S}$?

Exercice 7 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y+z \\ x+y+z \\ x \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \left(f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\operatorname{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 0 \}$

= noyau de f.

$X \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow AX = 0$

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} y+z \\ x+y+z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \right\}$$

Système à résoudre

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

il faut trouver les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$\boxed{x=0}$; ← troisième ligne

$x+y+z=0 \longrightarrow 0+y+z=0$

$\longrightarrow \boxed{y+z=0}$. ← 2eme ligne

$\boxed{y+z=0}$ ← 1ere ligne

donc on se ramène au système suivant :

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases}$$

donc

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}$$

donc $\operatorname{Ker} f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

λ ou z. c'est juste une variable.

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

donc cette application n'est pas bijective.

* une autre méthode pour montrer que c'est ~~bijec~~ pas bijective :

NB

Si $\det F \neq 0$ alors noyau $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc bijective

ou Ker f

Si $\det F = 0$ alors noyau $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc n'est pas bijectif.

dans notre cas :

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 0$$

donc l'application n'est pas bijective.

3. $\operatorname{Im} f = \{ f(X),\ X \in \mathbb{R}^3 \} = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ x+y+z \\ x \end{pmatrix} ;\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$$= \left\{ x \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f(e_1)} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f(e_2)} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f(e_3)} ,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

pas libre

Les 3 vecteurs $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_3}$ sont l'image de f dans la base canonique,

$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0$ donc $\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, $\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

donc $\alpha = 0$ et $\gamma = -\beta$ donc $\gamma \neq 0$ et $\beta \neq 0$ donc V_1, V_2, V_3 ne sont pas libre.

et comme $V_2 = 1 \cdot V_3$ donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

il faut que les vecteurs de Im f soient libre.

ne sont pas colinéaire, ces 2 vecteurs sont libre.

NB d'après le théorème de rang : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

$3 = 1 + \dim \operatorname{Im} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$.

Exercice 8

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x+3y+z \\ 2x-2y-6z \\ -x+3y+5z \end{pmatrix}$$

2- $\ker f = \{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(X) = 0 \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{pmatrix} x+3y+z \\ 2x-2y-6z \\ -x+3y+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

on cherche la solution du système :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y - 6z = 0 \\ -x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right).$$

L_2 et L_3 donnent : $y = -z$

L_1 : $x + 3y + z = 0$

$x - 3z + z = 0$

$x - 2z = 0$

$x = 2z$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

donc $\ker f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

TD 6 : Formule de changement de base.

Exercice 1 :

NB, dans $\mathbb{R}^3$:

+ Si on a 2 triplets c'est pas une base de $\mathbb{R}^3$
+ Si on a 4 triplets c'est pas une base de $\mathbb{R}^3$
+ Si on a 3 triplets on cherche à voir si c'est une base de $\mathbb{R}^3$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{ u, v, w \} \in \mathbb{R}^3$$

$$\boxed{B \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \iff \det(u, v, w) \neq 0}$$

1) $|B_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc B_1 est une base

2) $|B_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{\boxed{1}} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 \neq 0$

donc B_2 est une base

3) $B_3 = \left\{ \overset{u}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \overset{v}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} \right\}$

n'est pas une base.

- Je rappelle que une base est libre et maximale

Ici $\alpha u + \beta v = 0$

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{donc } \alpha = \beta = 0$$

donc c'est libre.

mais c'est pas maximale donc c'est pas une base.

- Je note que à partir d'une base on peux générer tout vecteur de l'espace

~~Ici~~

Si on prend $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$,

Ce vecteur ne peut pas être generer par u et v :

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = 3 \cdot \overset{u}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} + 2 \overset{v}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} + \underbrace{\quad}_{\text{ce terme n'existe pas donc on ne peut pas avoir le vecteur } \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}$$

donc ~~cette~~ c'est pas génératrice

~~[illegible]~~

4- C'est pas une base, car elle n'est pas libre

$$\alpha u + \beta v + \gamma w + c z = 0$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~[illegible]~~

Si on prend $\alpha = 1$

$\beta = 2$

$\gamma = 3$

$c = -1$

donc

$$\overset{\neq 0}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{\neq 0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{\neq 0}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\neq 0}{-} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 - 2 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc c'est pas libre.

car $\alpha \neq 0$

$\beta \neq 0$

$\gamma \neq 0$

$c \neq 0$

au moins un des coefficients est non nul donc c'est pas libre

donc n'est pas une base

Exercice 2

$B = \{ b_1, b_2, b_3 \}$ une base de $\mathbb{R}^3$

$C = \{ c_1, c_2, c_3 \}$ une base de $\mathbb{R}^3$

Il existe $M_{B \to C} = \begin{pmatrix} [c_1]_B & [c_2]_B & [c_3]_B \end{pmatrix}$

matrice de changement de base de B à C

où $[c_i]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

et on peut trouver $\alpha, \beta,$ et γ par $c_i = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$

1- $B = \{ \overbrace{(1,0,0)}^{b_1}, \overbrace{(0,1,0)}^{b_2}, \overbrace{(0,0,1)}^{b_3} \} = \{ e_1, e_2, e_3 \} = C$

$C = (\underbrace{(1,0,0)}_{c_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{c_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{c_3})$

$M_{B \to C} = \begin{pmatrix} [c_1]_B & [c_2]_B & [c_3]_B \end{pmatrix}.$

$c_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$

$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{matrix}}$

donc $[c_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $c_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 + \gamma\, b_3$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\alpha = 0$
$\beta = 1$
$\gamma = 0$

donc $[c_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $[c_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $M_{B\to C} = M_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = matrice identité.

$\boxed{2}$ $B = \left\{ \overset{b_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{b_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{b_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ $\quad C = \left\{ \overset{c_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{c_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{c_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

$M_{B\to C} = \left([c_1]_B \quad [c_2]_B \quad [c_3]_B \right)$

- $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 + \gamma\, b_3$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

donc $\alpha = 1$
$\gamma = 0$
$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow 1 + \beta + 0 = 0 \Rightarrow \beta = -1$

donc $[c_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$

$\gamma = 0$

$0 + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \beta = 1$

donc $[c_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$

$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow 0 + \beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta = -1$

$\gamma = 1$

donc $[c_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M_{B \to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left([c_1]_B \quad [c_2]_B \quad [c_3]_B \right)$$

NB

$\mathcal{M}_{C \to B}$

$$\underbrace{B}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\mathcal{M}_{B \to C}}_{\substack{\text{matrice de} \\ \text{changement de base}}} = \underbrace{C}_{\text{base}}.$$

4) $B = \{ \overbrace{(1,0,0)}^{b_1}, \overbrace{(0,1,0)}^{b_2}, \overbrace{(0,0,1)}^{b_3} \}$

$C = \{ \underbrace{(1,1,0)}_{c_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{c_2}, \underbrace{(0,1,1)}_{c_3} \}$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

donc $\alpha = 1$
$\beta = 1$
$\gamma = 0$

$$[c_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \alpha \\ \leftarrow \beta \\ \leftarrow \gamma \end{matrix}.$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$
$\beta = 1$
$\gamma = 0$

donc $[c_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\bullet \ c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$

$\beta = 1$

$\gamma = 1$

$$[c_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B \to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $B = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{b_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}^{b_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}}^{b_3} \right\}$

$C = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_3} \right\}$

$$\bullet \ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 + \gamma\, b_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha - 3\beta + 3\gamma \\ 4\beta - 6\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$4\beta - 6\gamma = 0 \Rightarrow 4\beta - 0 = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\alpha - 3 \times 0 + 3 \times 0 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

donc $[c_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 + \gamma\, b_3$

$$= \begin{pmatrix} \alpha - 3\beta + 3\gamma \\ 4\beta - 6\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\gamma = 0}$

$4\beta - 0 = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = 1/4}$

$\alpha - 3 \cdot 1/4 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{4}}$

donc $[c_2]_B = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 3\beta + 3\gamma \\ 4\beta - 6\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix}$

donc $\gamma = 1/3$

$4\beta - 6 \cdot 1/3 = 0 \Rightarrow 4\beta - 2 = 0 \Rightarrow \beta = 1/2$

$\alpha - 3/2 + 3 \cdot 1/3 = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$

$[c_3]_B = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$M_{B \to C} = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

#

Exercice 4

<u>Rappel</u> : une matrice de passage (ou matrice de changement de base) permet d'écrire des formules de changement de base pour les représentations matricielles des vecteurs, des applications linéaires ...

Soit B et B' 2 bases de E, avec E un espace vectoriel.

$P_B^{B'}$ ou $P_{B\to B'}$: matrice de passage de B à B'.

où B' : nouvelle base

B : ancienne base.

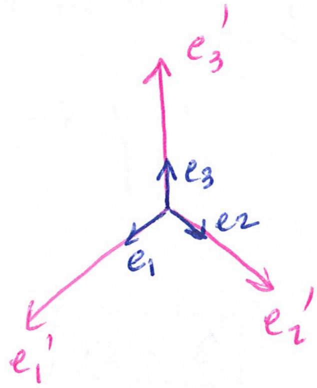
Changement des coordonnées pour un vecteur

Soit un vecteur x qui a pour coordonné X et X' dans 2 bases B et B', alors $X = P_B^{B'} X'$

Exemple :

$B = (e_1, e_2, e_3)$ une base

$B' = (e_1', e_2', e_3')$ est une autre base, ~~xxx~~ B' est obtenue par une homothétie de facteur k.



homothétie d'un facteur k.

$$e_1' = k e_1$$
$$e_2' = k e_2$$
$$e_2' = k e_3$$

- La matrice de Passage s'écrit :

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} k & & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Soit x un vecteur de composante (x_1, x_2, x_3) dans B et (x_1', x_2', x_3') dans B', on a :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix}.$$

$P_B^{B'}$ est inversible et $\left(P_B^{B'}\right)^{-1} = P_{B'}^{B}$

$$P_B^{B'} P_{B'}^{B} = I_n .$$

- La matrice de passage de B' à B :

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'/k \\ x_2'/k \\ x_3'/k \end{pmatrix}$$

Exercice 5

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

but trouver $A = PDP^{-1}$ où P est inversible et D simple

1-

$C = (u_1, u_2)$ tq $\begin{cases} Au_1 = u_1 \\ Au_2 = \alpha u_2 \end{cases}$

• $Au_1 = u_1$: $\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 5x - 12y = x \\ 2x - 5y = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 12y \\ 2x = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \{ x = 3y$$

on a une infinité de solution

on choisit $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $Au_2 = -u_2$

$$\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x - 12y = -x \\ 2x - 5y = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 12y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \{ x = 2y$$

on choisit $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

vérifions que u_1 et u_2 forment une base :

on pose :

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$$

vérifions que $\alpha = \beta = 0$

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\alpha = -2\beta \\ \alpha = -\beta \end{cases} \Rightarrow 3(-\beta) = -2\beta$$

$3 = 2$ impossible

donc $\alpha = \beta = 0$

donc cette famille est libre

+ maximale donc elle forme une base.

Ou autre méthode c'est de vérifier que $\det \neq 0$.

$$|C| = |u_1 \quad u_2| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

donc "C" est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

A est la matrice de l'application linéaire dans la base canonique $(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On cherche à trouver la matrice de f dans la base C

$$B = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2} \}$$ base canonique

$$C = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_2} \}$$ nouvelle base.

Je cherche $M_{B \to C} = M_B^C = P_B^C$

- $c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

donc $\alpha = 3$
$\beta = 1$

donc $[c_1]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

donc $\alpha = 2$
$\beta = 1$

~~d~~ $[c_2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M_{B \to C} = M_B^C = P_B^C = P.$$

Je note que

$$M_{C \to B} = M_{B \to C}^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

déterminant de $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On peut aussi trouver $M_{C \to B}$ par :

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$

$\alpha = -\beta$

$3\alpha + 2\beta = 1 \Rightarrow -3\beta + 2\beta = 1$

$\Rightarrow \boxed{\beta = -1}$

donc $\boxed{\alpha = 1}$

- ensuite $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3\alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta$

$3\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow 3(1-\beta) + 2\beta = 0$

$\Rightarrow 3 - 3\beta + 2\beta = 0$

$\Rightarrow 3 - \beta = 0$

$\boxed{\beta = 3}$

donc $\alpha = 1 - 3 = -2$

donc

$$M_{C \to B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$A = P D P^{-1}$

on multiplie à gauche par P^{-1} :

$P^{-1} A = P^{-1} P D P^{-1}$

on multiplie ensuite à droite par P :

$P^{-1} A P = \underbrace{P^{-1} P}_{P^{-1}P = I} D \underbrace{P^{-1} P}_{P^{-1}P = I}$

donc $D = P^{-1} A P$.

$P^{-1} = \mathcal{M}_{C \to B} = \mathcal{M}^{-1}_{B \to C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$P = \mathcal{M}_{B \to C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

donc D est une matrice diagonale, facile à calculer.

$A = P D P^{-1}$

$A^2 = (P D P^{-1})^2$

$= (P D P^{-1})(P D P^{-1})$

$= P D \underbrace{P^{-1} P}_{Id} D P^{-1}$

$= P D D P^{-1}$

$= P D^2 P^{-1}$

D^2 est facile ~~est~~ à calculer

$D^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = P D \underbrace{P^{-1} P}_{Id} D \underbrace{P^{-1} P}_{Id} D P^{-1}$

$= P D D D P^{-1}$

$= P D^3 P^{-1}$

$D^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

P est tjrs fixe

P^{-1} —"— —"— —"—

donc

$A^n = P D^n P^{-1}$

où $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 4

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ -2x+3y \end{pmatrix}$

on cherche u_1 tq :
$f(u_1) = u_1$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soit $u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$f(u_1) = u_1 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ -2x+3y = y \end{cases}$

donc $x = y$

$-2y + 3y = y$
$y = y$

donc $\boxed{x = y}$

par exemple $\boxed{u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

- $f(u_2) = 2u_2$

Soit $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} y = 2x \\ -2x+3y = 2y \end{cases}$

$y = 2x$
$-2x + 3(2x) = 2y$
$-2x + 6x = 2y$
$4x = 2y$
$y = 2x$

donc $u_2 = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

par exemple $\boxed{u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

2) $C = \{u_1, u_2\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$
donc base

ou on montre que
$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$ avec $\alpha = \beta = 0$

+ maximale

donc c'est une base

- $B = \{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2}\}$ base canonique

$C = \{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{c_2}\}$ nouvelle base.

$M_{B \to C}$

$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2$
$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{matrix}}$ $[c_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$
donc $\alpha = 1$, $\beta = 2$

$\boxed{\text{Exercício 7}}$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 \end{cases}$$

1) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{2k}{m}x_1 + \dfrac{k}{m}x_2 \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{2k}{m}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2) $A v_1 = \dfrac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{k}{m}v_1$$

$A v_2 = \dfrac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-3k}{m}v_2$$

3_ $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k}{2m}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k}{2m}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{3k}{m} \end{pmatrix}}_{D}$$

⋮

~~Exercice 4~~

donc $[C_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$M_{B \to C} = \left([C_1]_B \; [C_2]_B \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ c'est la matrice de changement de base de la base canonique à la base C

3) La matrice de f dans la base canonique :

$$A = \left(f(e_1) \;\; f(e_2) \right)$$

$$= \left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$ la matrice dans la base canonique

Soit G la matrice dans la base $C = \{ (u_1), (u_2) \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

donc $G = M_{C \to B} \, A$

$$M_{C \to B} = M_{B \to C}^{-1} = \frac{1}{2-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

donc

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

qui represente la matrice de l'application f dans la base $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

On note que :

$$A = M_{B \to C} \, G$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$ est la matrice dans la base canonique. on retrouve,

NB// $P_B^{B'} \, P_{B'}^{B} = I_n$ | $(P_B^{B'})^{-1} = P_{B'}^{B}$