# Dérivation et Intégration
# A1 Semestre 2

JAD DABAGHI

Enseignant-Chercheur en Mathématiques DVRC
*jad.dabaghi@devinci.fr*

# Table des matières

# Objectifs

1. Comprendre les comportements locaux et asymptotiques des fonctions
2. Savoir manipuler les développements limités
3. Savoir calculer plusieurs familles d'intégrales
4. Introduction à l'analyse à plusieurs variables.

# Contenu du module

1. Chapitre 1 : Relations de comparaison (CMO 1)
   - Un peu de topologie, continuité d'une fonction en un point.
   - Fonctions dominées, fonctions négligeables, fonctions équivalentes.
2. Chapitre 2 : Développements limités (CMO 2)
   - Formules de Taylor, opérations sur les développements limités, applications.
   - **Contrôle continu 1h 14 Mars 2023**
3. Chapitre 3 : Calcul d'intégrales (CMO 3)
4. Chapitre 4 : Introduction à l'analyse à plusieurs variables (CMO 4)

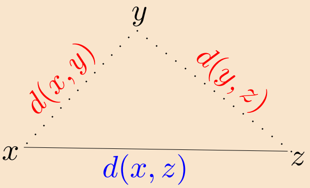
# Analyse réelle

# Analyse réelle

## Définition (distance)

*Soit $E$ un ensemble non vide. Une* ***distance*** *sur $E$ est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E$*

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \textit{(homogénéité)}$$
$$d(x, y) = d(y, x) \quad \textit{(symétrie)}$$
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \textit{(inégalité triangulaire)}.$$




*Le couple $(E, d)$ est appelé* ***espace métrique****.*

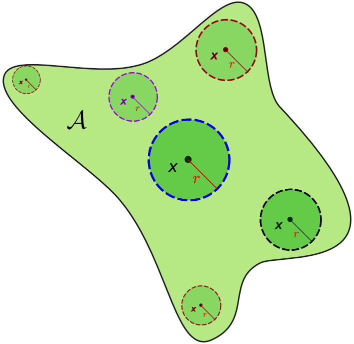
**Exemple :**

- Sur $\mathbb{R}$, la métrique usuelle est $d(x, y) = |x - y|$
- Sur $\mathbb{C}$, la métrique usuelle est $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$

## Définition (Ouvert)

*Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit que $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ est un ouvert de $E$ si $\mathcal{A}$ contient une boule ouverte. Autrement dit, si*

$$\forall x \in \mathcal{A},\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset \mathcal{A} \qquad B(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\}$$




**Exemples ouverts :**

- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2$
- $]a, b[$
- $B(x, r)$

## Définition (Voisinage)

- $(E, d)$ ***espace métrique*** *et* $a \in E$.

*On dit que* $\mathcal{V} \subset E$ *est un voisinage de* $a$ *si, et seulement si, il existe un ouvert* $O \subset \mathcal{V}$ *contenant* $a$*. Autrement dit s'il existe* $B(a, r) \subset \mathcal{V}$*.*

**Remarque :**

- En dimension 1,

$$\mathcal{V}_a = ]a - \eta, a + \eta[$$

- En dimension 2,

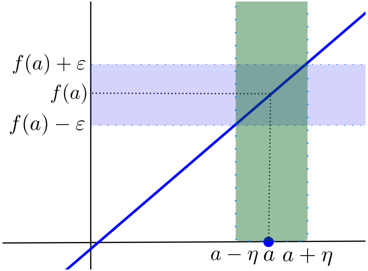
$$\mathcal{V}_a = B(a, \eta)$$

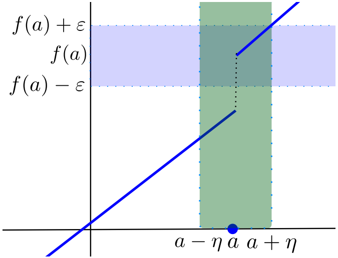
# Continuité

## Définition (Caractérisation de Weierstrass)

*Une fonction $f$ est dite continue en $a \in I$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right).$$



# Fonctions dominées

## Définition

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors $f$ est* ***dominée*** *par $\varphi$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de $a$ et telle que $f = \varphi u$ au voisinage de $a$. On note*

$$f = \mathcal{O}(\varphi)$$

# Fonctions dominées

## Définition

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors f est* ***dominée*** *par $\varphi$ au voisinage de a, s'il existe une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de a et telle que $f = \varphi u$ au voisinage de a. On note*

$$f = \mathcal{O}(\varphi)$$

**Exemple :** $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(x) = x^2$. Alors

$$f(x) = \varphi(x)u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $u$ est bornée donc $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

# Fonctions négligeables

## Définition

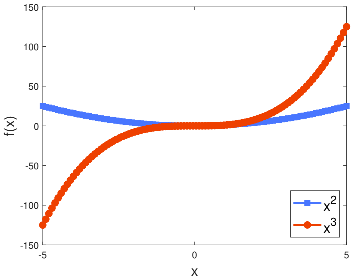
*on dit que $f$ est **négligeable** devant $\varphi$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$ tel que $f = \varphi\varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. On note $f = o(\varphi)$.*

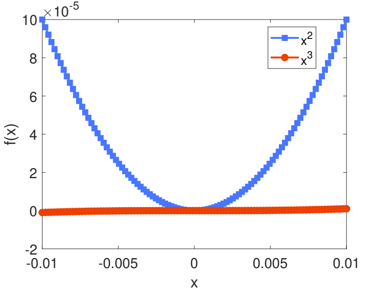
# Fonctions négligeables

## Définition

*on dit que $f$ est **négligeable** devant $\varphi$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $I$ tel que $f = \varphi\varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. On note $f = o(\varphi)$.*

**Exemple :** $x^3 = o(x^2)$ au voisinage de 0 car $x^3 = x \times x^2$ avec $\varepsilon(x) = x$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.



# Quelques résultats

## Propriété

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.*

1. *La fonction $f$ est bornée au voisinage de $a$ si, et seulement si $f = \mathcal{O}(1)$.*
2. *La fonction $f$ tend vers $0$ en $a$ si, et seulement si $f = o(1)$.*

# Quelques résultats

## Propriété

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.*

1. *La fonction $f$ est bornée au voisinage de $a$ si, et seulement si $f = \mathcal{O}(1)$.*
2. *La fonction $f$ tend vers $0$ en $a$ si, et seulement si $f = o(1)$.*

**Démonstration :**

1. ($\Rightarrow$) On suppose $f$ bornée au voisinage de $a$. $\forall x \in \mathcal{V}_a$, $|f(x)| = f(x) \times \underbrace{1}_{\text{bornée}}$. Donc $f = \mathcal{O}(1)$.

# Quelques résultats

## Propriété

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.*

1. *La fonction $f$ est bornée au voisinage de $a$ si, et seulement si $f = \mathcal{O}(1)$.*
2. *La fonction $f$ tend vers $0$ en $a$ si, et seulement si $f = o(1)$.*

**Démonstration :**

1. $(\Rightarrow)$ On suppose $f$ bornée au voisinage de $a$. $\forall x \in \mathcal{V}_a$, $|f(x)| = f(x) \times \underbrace{1}_{\text{bornée}}$. Donc $f = \mathcal{O}(1)$.

   $(\Leftarrow)$ $f = \mathcal{O}(1)$. Alors $\exists \varphi$ bornée sur $\mathcal{V}_a$ tel que $f = \varphi \times 1$ sur $\mathcal{V}_a$. Donc $f$ bornée sur $\mathcal{V}_a$.

2 $(\Rightarrow)$ $f$ tend vers 0 en $a$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_1 > 0 \ \forall x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[, \ |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{D}_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$

Alors $f = o(1)$.

2 $(\Rightarrow)$ $f$ tend vers 0 en $a$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta_1 > 0 \; \forall x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[, \; |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$

Alors $f = o(1)$.

$(\Leftarrow)$ $f = o(1)$ au voisinage de $a$. Alors $\exists \varphi$ définie au voisinage de $a$ tel que $f = \varphi 1$ au voisinage de $a$ avec $\lim_a \varphi = 0$.
Or $\lim_a \varphi \in \mathcal{V}_a$ donc $\lim_a f = \lim_a \varphi = 0$.

# Quelques remarques

1. Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. Mais, $\lim_a \varepsilon \not\to 0$ sur $I$ tout entier.

**Contre exemple :**

$$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

On a $f = o(g)$ au voisinage de 0 ($\varepsilon(x) = x$) mais $\varepsilon(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

# Quelques remarques

1. Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. Mais, $\lim_a \varepsilon \not\to 0$ sur $I$ tout entier.

   **Contre exemple :**
   $$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$
   On a $f = o(g)$ au voisinage de 0 ($\varepsilon(x) = x$) mais $\varepsilon(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^*$.

2. Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ au voisinage de $a$ alors $f$ n'est pas forcément égal à $g$.

   **Contre exemple :**
   $$f : x \mapsto x^3 \quad g : x \mapsto x^4 \quad h : x \mapsto x^2.$$
   On a $f = o(h)$ au voisinage de 0 et $g = o(h)$ au voisinage de 0 mais $f \neq g$.

# Quelques remarques

1. Lorsque $f = o(g)$ au voisinage de $a \in I$, $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de $a$ et $\lim_a \varepsilon = 0$. Mais, $\lim_a \varepsilon \not\to 0$ sur $I$ tout entier.

   **Contre exemple :**

   $$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

   On a $f = o(g)$ au voisinage de 0 ($\varepsilon(x) = x$) mais $\varepsilon(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

2. Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ au voisinage de $a$ alors $f$ n'est pas forcément égal à $g$.

   **Contre exemple :**

   $$f : x \mapsto x^3 \quad g : x \mapsto x^4 \quad h : x \mapsto x^2.$$

   On a $f = o(h)$ au voisinage de 0 et $g = o(h)$ au voisinage de 0 mais $f \neq g$.

3. Le même phénomène s'observe pour la notation $\mathcal{O}$.

# Règles de calcul

## Propriété

1. $f = o(\varphi) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi)$ *(négligeable $\Rightarrow$ bornée)*
2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ *et* $f_2 = \mathcal{O}(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$ *(somme de fonctions bornée est bornée)*
3. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi_1)$ *et* $f_2 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = \mathcal{O}(\varphi_1 \varphi_2)$
4. $f_1 = o(\varphi)$ *et* $f_2 = o(\varphi) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(\varphi)$ *(somme de termes négligeable est négligeable)*
5. $f_1 = o(\varphi_1)$ *et* $f_2 = o(\varphi_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(\varphi_1 \varphi_2)$
6. $f = \mathcal{O}(\varphi_1)$ *et* $\varphi_1 = \mathcal{O}(\varphi_2) \Rightarrow f = \mathcal{O}(\varphi_2)$ *(transitivité de la domination)*
7. $f = o(\varphi_1)$ *et* $\varphi_1 = o(\varphi_2) \Rightarrow f = o(\varphi_2)$ *(transitivité de la négligence)*

# Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow \ f = g\varphi$ au voisinage de $a$ et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, \ |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction $g$ est donc bornée au voisinage de $a$. Alors $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

# Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow\ f = g\varphi$ au voisinage de $a$ et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in ]a-\eta, a+\eta[,\ |g(x)| \leq \varepsilon.$$

   La fonction $g$ est donc bornée au voisinage de $a$. Alors $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ alors $f_1 = \varphi u$ au voisinage de $a$ où $u$ est bornée au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_1 > 0\ \forall x \in ]a-\eta_1, a+\eta_1[,\ f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$

# Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow\ f = g\varphi$ au voisinage de $a$ et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in ]a-\eta, a+\eta[,\ |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction $g$ est donc bornée au voisinage de $a$. Alors $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ alors $f_1 = \varphi u$ au voisinage de $a$ où $u$ est bornée au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_1 > 0\ \forall x \in ]a-\eta_1, a+\eta_1[,\ f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$

$f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$ donc $f_2 = \varphi v$ au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_2 > 0\ \forall x \in ]a-\eta_2, a+\eta_2[,\ f_2(x) = \varphi(x)v(x).$$

# Démonstration

1. $f = o(\varphi)$ au voisinage d'un point $a \Rightarrow\ f = g\varphi$ au voisinage de $a$ et $\lim_a g = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in ]a-\eta, a+\eta[,\ |g(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction $g$ est donc bornée au voisinage de $a$. Alors $f = \mathcal{O}(\varphi)$.

2. $f_1 = \mathcal{O}(\varphi)$ alors $f_1 = \varphi u$ au voisinage de $a$ où $u$ est bornée au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_1 > 0\ \forall x \in ]a-\eta_1, a+\eta_1[,\ f_1(x) = \varphi(x)u(x).$$

$f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$ donc $f_2 = \varphi v$ au voisinage de $a$.

$$\exists \eta_2 > 0\ \forall x \in ]a-\eta_2, a+\eta_2[,\ f_2(x) = \varphi(x)v(x).$$

Pour $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ on a $\forall x \in ]a-\eta, a+\eta[\ (f_1+f_2)(x) = \varphi(x)(u+v)(x)$. Comme $u+v$ bornée au voisinage de $a$ on a $f_1+f_2 = \mathcal{O}(\varphi)$.

# Démonstration

4

- $f_1 = o(\varphi)$ au voisinage de $a$ alors il existe une fonction $\varepsilon_1$ définie au voisinage de $a$ tel que
$$\lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$$
et vérifiant $f_1 = \varepsilon_1 \varphi$ au voisinage de $a$
- $f_2 = o(\varphi)$ au voisinage de $a$ alors il existe une fonction $\varepsilon_2$ définie au voisinage de $a$ tel que
$$\lim_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$$
vérifiant $f_2 = \varepsilon_2 \varphi$ au voisinage de $a$.

Ainsi, la fonction $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ est bien définie au voisinage de $a$ et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.
Alors, $f_1 + f_2 = o(\varphi)$.

# Règle pratique

## Propriété

*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Supposons que $\varphi$ ne s'annule pas sur $I \backslash a$. Alors au voisinage de $a$*

1. *$f$ est dominée par $\varphi$ si, et seulement si, $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de $a$.*
2. *$f$ est négligeable devant $\varphi$ si, et seulement si, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.*

# Fonctions équivalentes

## Définition

*Soient $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $h$ définie sur $I$ telle que $f = gh$ au voisinage de $a$ et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.*

# Fonctions équivalentes

## Définition

*Soient $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $h$ définie sur $I$ telle que $f = gh$ au voisinage de $a$ et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.*

**Exercice :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Montrer que $f$ et $g$ sont équivalentes en 0.

# Fonctions équivalentes

## Définition

*Soient $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $h$ définie sur $I$ telle que $f = gh$ au voisinage de $a$ et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.*

**Exercice :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Montrer que $f$ et $g$ sont équivalentes en 0.

**Correction :** On a $f \underset{0}{\sim} g$. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = h(x) \times g(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\rightarrow} 1.$$

# Fonctions équivalentes

## Définition

*Soient $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$, s'il existe une fonction $h$ définie sur $I$ telle que $f = gh$ au voisinage de $a$ et $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.*

**Exercice :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Montrer que $f$ et $g$ sont équivalentes en 0.

**Correction :** On a $f \underset{0}{\sim} g$. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = h(x) \times g(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\to} 1.$$

**Remarque :** $x \mapsto x$ est un DL à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de 0.

# Équivalent pour les polynômes

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

1. **Étude en** 0 **:** Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n = a_p x^p \underbrace{\left(1 + \frac{a_{p+1}}{a_p} x + \cdots + \frac{a_n}{a_p} x^{n-p}\right)}_{\to 1}$$

Donc $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.

# Équivalent pour les polynômes

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0.$$

1. **Étude en** 0 **:** Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n = a_p x^p \underbrace{\left(1 + \frac{a_{p+1}}{a_p} x + \cdots + \frac{a_n}{a_p} x^{n-p}\right)}_{\to 1}$$

Donc $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$.

2. **Étude en** $+\infty$ **:** Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = a_n x^n \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} x^{-2} + \cdots + \frac{a_p}{a_n} x^{p-n}\right)}_{\to 1}$$

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$.

# Cas pratique

**Comment montrer que deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point ?**

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ et $a \in I$. On suppose que $g$ ne s'annule pas sur $I \backslash a$. Alors, la fonction $f$ est équivalente à la fonction $g$ au voisinage de $a$, si et seulement si,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

# Résultats fondamentaux

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions équivalentes en $a \in I$.*

1. *Si $g$ a une limite finie ou infinie en $a$ alors $\lim_a f = \lim_a g$.*
2. *Si $g$ est positive sur $I$ alors $f$ est positive au voisinage de $a$.*
3. *Si $g$ ne s'annule pas sur $I$ alors $f$ ne s'annule pas au voisinage de $a$.*

**Obtention d'équivalents :** Si $f$ est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors au voisinage de $a$ :

$$\boxed{f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)}$$

# Exercices

1. Montrer que $e^x - 1 \sim x$ au voisinage de 0
2. Montrer que $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0
3. Montrer que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de 0

**Corrigé :**

1. Comme $x \mapsto e^x$ est dérivable en 0 et que $e^0 = 1$ on a

$$e^x - e^0 \underset{0}{\sim} e'(0)(x-0) \Rightarrow e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$$

2. $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable en 0 et et possède une dérivée non nulle

$$\sin(x) - \sin(0) \underset{0}{\sim} \sin'(0)(x-0) \Rightarrow \sin(x) \underset{0}{\sim} x.$$

3. $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 et et possède une dérivée non nulle

$$\ln(1+x) - \ln(1+0) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1+0}(x-0) \Rightarrow \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x.$$

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ définies sur $I$ et équivalentes en $a$. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en $\alpha$.*

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient f et g définies sur I et équivalentes en a. Si* $u : \Delta \to I$ *et telle que* $\lim_{t \to \alpha} u(t) = a$*, alors* $f(u(t))$ *et* $g(u(t))$ *sont équivalentes en* $\alpha$*.*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient f et g définies sur I et équivalentes en a. Si* $u : \Delta \to I$ *et telle que* $\lim_{t \to \alpha} u(t) = a$*, alors* $f(u(t))$ *et* $g(u(t))$ *sont équivalentes en* $\alpha$*.*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

1. $e^{\sin t} - 1$

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ définies sur $I$ et équivalentes en $a$. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en $\alpha$.*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

1. $e^{\sin t} - 1$

   **Correction :** $u(t) = \sin t$, $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$. On a $f \underset{0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 0$ donc $f(u(t)) \underset{0}{\sim} g(u(t))$. Finalement, $e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t$.

2. $\ln(\cos(t))$

# Substitution dans un équivalent

## Propriété

*Soient $f$ et $g$ définies sur $I$ et équivalentes en $a$. Si $u : \Delta \to I$ et telle que $\lim_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors $f(u(t))$ et $g(u(t))$ sont équivalentes en $\alpha$.*

**Application :** Déterminer les équivalents des fonctions suivantes en 0 :

1. $e^{\sin t} - 1$

   **Correction :** $u(t) = \sin t$, $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$. On a $f \underset{0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = 0$ donc $f(u(t)) \underset{0}{\sim} g(u(t))$. Finalement, $e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t$.

2. $\ln(\cos(t))$

   **Correction :** On a $\ln(\cos(t)) = \ln(1 + \cos(t) - 1)$. Posons $u(t) = \cos(t) - 1$. Alors, $\lim_{t\to 0} u(t) = 0$. De plus, $\ln(1 + y) \underset{0}{\sim} y$. Donc, $\ln(1 + u(t)) \underset{0}{\sim} u(t)$. Ainsi, $\ln(\cos(t)) \underset{0}{\sim} \cos(t) - 1$.

# Opération sur les fonctions équivalentes

## Propriété

*Si au voisinage de a on a*

1. $f_1 \sim g_1$ *et* $g_1 \sim g_2$ *alors* $f_1 \sim g_2$ *en a* (*transitivité*).
2. *Si* $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2$ *alors* $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ *en a* (*produit*).
3. *Si* $f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2$ *et si aucune de ces fonctions ne s'annule sur* $I \backslash a$ *alors* $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

## Propriété

1. *Si* $g = o(f)$ *au voisinage d'un point* $a \in I$, *alors* $f + g \underset{a}{\sim} f$.
2. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et* $a \in I$. *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* $f = \mathcal{O}(g)$ *au voisinage de a.*

# Application

Déterminer un équivalent de $f$ au voisinage de $+\infty$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}.$$

# Application

Déterminer un équivalent de $f$ au voisinage de $+\infty$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}.$$

**Correction :** On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(1 - e^{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}}\right) = e^{\frac{1}{x^2}}\left(1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}}\right).$$

Or $1 - e^y \underset{0}{\sim} y$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0$. Donc, $1 - e^{\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-2}{x^3}$.

De plus, $e^{\frac{1}{x^2}} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{x^3}$.

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :**

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0.$$

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

# Application

Déterminer un équivalent en 0 de $\ln(\sin(x))$

**Correction :** On a

$$\ln(\sin(x)) = \ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = o(\ln(x)) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = 0.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) + \ln(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

Ainsi

$$ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

# Remarques importantes

1. **Composition d'équivalents :** Si $f \sim g$ on ne peut rien dire à priori de $u \circ f$ et $u \circ g$.
**Exemple :** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \quad \text{mais} \quad e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$$

# Remarques importantes

1. **Composition d'équivalents :** Si $f \sim g$ on ne peut rien dire à priori de $u \circ f$ et $u \circ g$.
**Exemple :** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \quad \text{mais} \quad e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$$

2. **Somme d'équivalents :** Si $u_1 \sim u_2$ et $v_1 \sim v_2$ alors $u_1 + v_2 \not\sim u_2 + v_2$.
**Exemple :**

$$u(x) = \sin(2x) + \cos(x) - 1.$$

On a

$$\sin(y) \underset{0}{\sim} y \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} 2x = 0 \Rightarrow \sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x \quad \cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Or

$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{2x} = \left(\frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{\cos(x) - 1}{2x}\right) = 1 \Rightarrow u(x) \underset{0}{\sim} 2x$$

# Dérivation

## Définition

*On dit que $f$ est dérivable en $a$ si la fonction $\mathcal{T}$, appelée taux d'accroissement de $f$ en $a$, définie sur $I \setminus \{a\}$ par*

$$\mathcal{T}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*possède une limite finie en $a$. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de $f$ en $a$ et se note $f'(a)$.*

**Exemples :**

1. Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $f : x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha.$$
2. La fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x} = \pm 1$, la limite n'est pas unique !

## Propriété

*Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.*

**Démonstration :**

## Propriété

*Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.*

**Démonstration :**

1. $f$ est dérivable au point $a$ alors $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

## Propriété

*Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.*

**Démonstration :**

1. $f$ est dérivable au point $a$ alors $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
2. **Ecriture équivalente :** $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in ]a-\eta, a+\eta[, \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon$ donc $|f(x) - f(a)| < |x-a|(\varepsilon + |f'(a)|) < \eta(\varepsilon + |f'(a)|)$

## Propriété

*Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

**Démonstration :**

1. $f$ est dérivable au point $a$ alors $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
2. **Ecriture équivalente :** $\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0\ \forall x \in ]a-\eta, a+\eta[, \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon$ donc $|f(x) - f(a)| < |x-a|(\varepsilon + |f'(a)|) < \eta(\varepsilon + |f'(a)|)$
3. Mq $f$ est $\mathcal{C}^0$. Soit $\varepsilon_1 > 0$. Mq $\exists\eta_1 > 0$ tq $|x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$.
4. Choix de $\eta_1$ en fonction de $\varepsilon_1$ satisfaisant la Def de Continuité

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \eta_1 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + |f'(a)|}$$

## Propriété

*Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.*

**Démonstration :**

1. $f$ est dérivable au point $a$ alors $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
2. **Ecriture équivalente :** $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in ]a-\eta, a+\eta[, \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon$ donc $|f(x) - f(a)| < |x-a|(\varepsilon + |f'(a)|) < \eta(\varepsilon + |f'(a)|)$
3. Mq $f$ est $\mathcal{C}^0$. Soit $\varepsilon_1 > 0$. Mq $\exists \eta_1 > 0$ tq $|x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$.
4. Choix de $\eta_1$ en fonction de $\varepsilon_1$ satisfaisant la Def de Continuité

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \eta_1 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + |f'(a)|}$$

5. Conclusion :

$$|f(x) - f(a)| < |x-a|\left(\varepsilon_1 + |f'(a)|\right) < \eta_1\left(\varepsilon_1 + |f'(a)|\right) < \varepsilon_1.$$

### Définition

*Lorsque la fonction $f$ est dérivable en tout point de $I$ on dit que $f$ est dérivable sur $I$ et la fonction définie sur $I$ par $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de $f$, et se note $f'$.*

### Propriété

*Si $f$ est dérivable sur $I$, alors elle est continue sur $I$.*

# Interprétations des dérivées

1. Soit une fonction $f$ définie sur $I$, pour $x \in I \setminus \{a\}$, la droite joignant les points $A = (a, f(a))$ et $M = (x, f(x))$ a pour pente $T_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
   Si $f$ est dérivable en $a \in I$, cette pente a pour limite $f'(a)$ quand $x$ tend vers $a$. Le vecteur de composantes $(1, T_a(x))$ est un vecteur directeur de la corde $(AM)$, et il tend vers $(1, f'(a))$. La droite passant par $A$ et de pente $f'(a)$ est donc la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$.

2. La tangente en $A$ est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.

3. Lorsque $f(t)$ est l'abscisse à l'instant $t$ d'un point en mouvement rectiligne, pour $t \neq a$ le taux d'accroissement $T_a(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ représente la vitesse moyenne entre les instants $a$ et $t$, et sa limite $f'(a)$ représente la vitesse instantanée à l'instant $a$.

# Opérations sur les dérivées

## Propriété

*Soient f et g deux fonctions définies sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si f et g sont dérivables en a alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ sont dérivables en a et :*

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) \quad \textit{and} \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \tag{1}$$

**Démonstration :**

1.

$$\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a) + f(x)g(a) - f(x)g(a)}{x - a} \\
&= \lim \frac{g(a)\big(f(x) - f(a)\big) + f(x)\big(g(x) - g(a)\big)}{}
\end{aligned} \tag{2}$$

2

$$
\begin{aligned}
(\lambda f+\mu g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(a)}{x-a}\\
&= \lambda\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)}+\mu\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{g'(a)}
\end{aligned} \tag{3}
$$

## Corollaire

*Si $f$ et $g$ sont deux fonctions dérivables sur $I$, alors la fonction $fg$ est dérivable sur $I$ et*

$$
\begin{aligned}
(f+g)' &= f'+g'\\
(fg)' &= fg'+f'g
\end{aligned} \tag{4}
$$

# Inverse et quotient

## Propriété

*Soit $f$ une fonction dérivable en $a$ et ne s'annulant pas sur $I$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en $a$ et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$$

**Démonstration :** Soit $x \in I$ et $a \in I$ tel que $x \neq a$.

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(-\frac{1}{f(x)f(a)}\right) \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}.$$

## Corollaire

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables en $a$. Si $g$ ne s'annule pas sur $I$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en $a$ et*

# Composée et fonction réciproque

## Propriété

*Soient $I$ et $J$ deux intervalles, $f$ une application de $I$ dans $J$ et $g$ une application définie sur $J$. Si $f$ est dérivable en $a \in I$ et $g$ dérivable en $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en $a$ et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) \tag{5}$$

**Démonstration :** Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'\left(f(a)\right) f'(a). \end{aligned} \tag{6}$$

**Exemple :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**Exemple :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**Correction :** Sur $\mathbb{R}^*$, $f$ est dérivable en tant que produit et composée de fonctions dérivables. Étudions la dérivabilité de $f$ en 0. On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Exemple :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**Correction :** Sur $\mathbb{R}^*$, $f$ est dérivable en tant que produit et composée de fonctions dérivables. Étudions la dérivabilité de $f$ en 0. On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Exemple :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**Correction :** Sur $\mathbb{R}^*$, $f$ est dérivable en tant que produit et composée de fonctions dérivables. Étudions la dérivabilité de $f$ en 0. On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \leq \lim_{x \to 0} |x| = 0 \quad f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.$$

## Propriété

*Soit $f$ une application continue et strictement monotone de l'intervalle $I$ sur l'intervalle $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$. La fonction $f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$ et l'on a alors*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

## Propriété

*Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un point de $I$ qui n'en est pas une borne. Si la fonction $f$ présente un extremum local en $a$ et si elle est dérivable en $a$ alors $f'(a) = 0$.*

## Propriété

*Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un point de $I$ qui n'en est pas une borne. Si la fonction $f$ présente un extremum local en $a$ et si elle est dérivable en $a$ alors $f'(a) = 0$.*

**Démonstration :** Par hypothèse, $f$ possède un extremum local en $a$. Supposons que l'extremum est un minimum. Alors, $\exists h > 0$ tel que $\forall x \in [a-h, a+h],\ f(x) \geq f(a)$. D'autre part, $f$ est dérivable en $a$ donc

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Si $x \in [a, a+h]$ alors $f'(a) \geq 0$. D'autre part, si $x \in [a-h, a]$, il vient que $f'(a) \leq 0$. En conclusion $f'(a) = 0$.

# Quelques remarques

# Quelques remarques

1. Une fonction peut avoir un extremum local en $a$ et ne pas être dérivable en a, comme le prouve l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.

# Quelques remarques

1. Une fonction peut avoir un extremum local en $a$ et ne pas être dérivable en a, comme le prouve l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.
2. Si $a$ est une extrémité de l'intervalle, une fonction peut présenter un extremum local en $a$ et être dérivable en $a$ sans que sa dérivée y soit nulle, comme le prouve l'exemple de la restriction à $[0, 1]$ de la fonction $x \mapsto x$ qui présente un minimum en 0 et un maximum en 1.

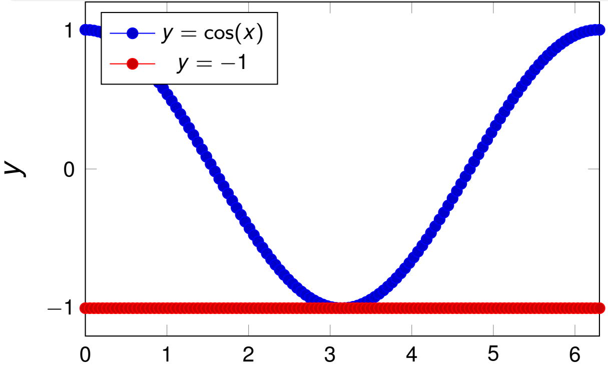
# Quelques remarques

1. Une fonction peut avoir un extremum local en $a$ et ne pas être dérivable en a, comme le prouve l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.
2. Si $a$ est une extrémité de l'intervalle, une fonction peut présenter un extremum local en $a$ et être dérivable en $a$ sans que sa dérivée y soit nulle, comme le prouve l'exemple de la restriction à $[0, 1]$ de la fonction $x \mapsto x$ qui présente un minimum en 0 et un maximum en 1.
3. L'annulation de la dérivée de $f$ en $a$ n'est qu'une condition nécessaire pour que $f$ possède un extremum local en $a$, comme le prouve l'exemple de la fonction strictement croissante $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0 mais qui ne possède pas d'extremum en 0

# Théorème de Rolle

## Théorème

*Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*




Le théorème de Rolle nous dit que le graphe de la fonction $f$ possède au moins une tangente horizontale !

**Démonstration :**

**Démonstration :**

1. La fonction $f$ est continue sur $[a, b]$. L'image par $f$ du segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$ avec $m \leq M$.

**Démonstration :**

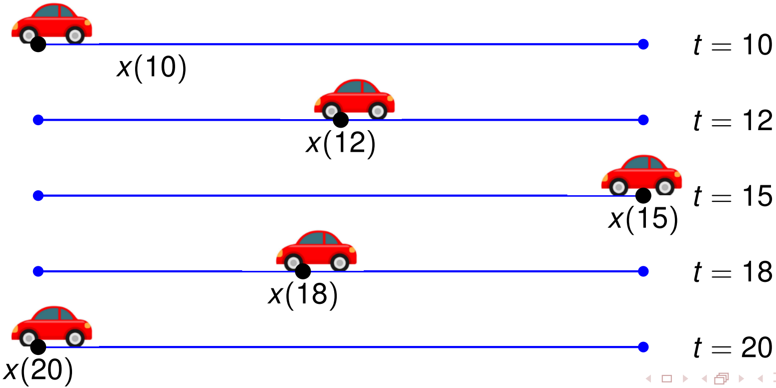
1. La fonction $f$ est continue sur $[a, b]$. L'image par $f$ du segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$ avec $m \leq M$.
2. Si la fonction $f$ est constante sur $[a, b]$ il vient que $m = M$ et donc $f' = 0$ sur $[a, b]$.

**Démonstration :**

1. La fonction $f$ est continue sur $[a, b]$. L'image par $f$ du segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$ avec $m \leq M$.
2. Si la fonction $f$ est constante sur $[a, b]$ il vient que $m = M$ et donc $f' = 0$ sur $[a, b]$.
3. Si $m < M$, l'un des réels $m$ ou $M$ est différent de la valeur commune prise par $f$ en $a$ et en $b$. Supposons par exemple que $m \neq f(a)$. La fonction $f$ atteint alors la valeur $m$ en un point $c$ différent de $a$ et $b$. Elle admet donc un minimum en ce point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ ce qui implique $f'(c) = 0$.

# Interprétation cinématique

*Le théorème de Rolle nous dit qu'un point mobile sur un axe qui revient à son point de départ a vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.*



# Égalité des accroissements finis

## Théorème

*Étant donnés des réels $a$ et $b$ tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, il existe un réel $c$ appartenant à $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

**Démonstration :**

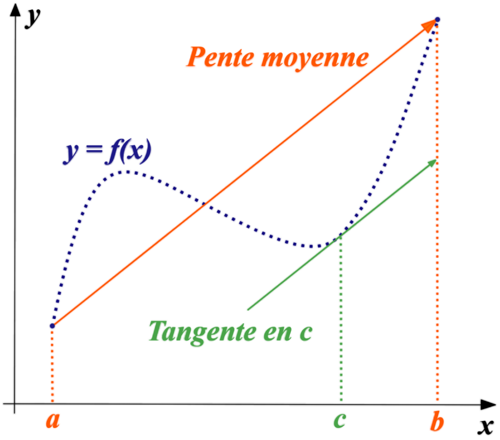
1. Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit $\varphi$ définie sur $[a, b]$ par $\varphi(x) = f(x) - k(x - a)$.
2. Pour $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ on obtient $\varphi(a) = \varphi(b)$.
3. De plus, $\varphi \in C^0([a, b])$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b)$. D'après le théorème de Rolle,

$$\exists c \in ]a, b[ \quad \varphi'(c) = 0 \iff f'(c) - k = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

# Quelques remarques

Si $\Gamma$ est le graphe de la fonction $f$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ et si $A$ et $B$ sont les points de $\Gamma$ d'abscisses respectives $a$ et $b$, l'égalité des accroissements finis nous dit qu'il existe au moins un point de $\Gamma$ en lequel la tangente à $\Gamma$ est parallèle à la droite $(AB)$.

**Interprétation en cinématique :** En cinématique, la formule des accroissements finis nous dit que lorsqu'une voiture réalise un parcours à la moyenne de 90 $km/h$, il existe un instant du trajet en lequel sa vitesse instantanée est de 90 $km/h$.



# Variations d'une fonction

## Propriété

*Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction $f$ est croissante (respectivement décroissante) ssi $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$ (respectivement $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$).*

# Variations d'une fonction

## Propriété

*Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction $f$ est croissante (respectivement décroissante) ssi $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (respectivement $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$).*

**Démonstration :** Supposons $f$ croissante. Soit $x_0 \in I$. On a $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

- Si $x \geq x_0$ par croissance de $f$ on a $f'(x_0) \geq 0$. De même si $x \leq x_0$ on a $f'(x_0) \geq 0$.
- Réciproquement, supposons que $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et montrons que $f$ est croissante. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$. D'après l'égalité des accroissements finis, $\exists c \in ]x_1, x_2[$ tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; f \text{ croissante}.$$

# Inégalité des accroissements finis

## Propriété

*Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $a < b$ *ainsi qu'une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ *et dérivable sur* $]a, b[$*. S'il existe des réels* $m$ *et* $M$ *vérifiant* $\forall x \in ]a, b[, \ m \leq f'(x) \leq M$ *alors on a*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

# Inégalité des accroissements finis

## Propriété

*Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $a < b$ *ainsi qu'une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ *et dérivable sur* $]a, b[$*. S'il existe des réels* $m$ *et* $M$ *vérifiant* $\forall x \in ]a, b[, \ m \leq f'(x) \leq M$ *alors on a*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

**Démonstration :**

1. La fonction $f$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
2. D'après l'égalité des accroissements finis, $\exists c \in ]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

3. Par hypothèse, $m \leq f'(c) \leq M$. Il vient que

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

## Corollaire

*Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $k$ un réel positif tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq k$. Alors on a*

$$\forall (x_1, x_2) \in I \times I,\ |f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|.$$

*On dit aussi que la fonction $f$ est $k$-lipschitzienne sur $I$.*

## Corollaire

*Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et k un réel positif tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq k$. Alors on a*

$$\forall (x_1, x_2) \in I \times I,\ |f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|.$$

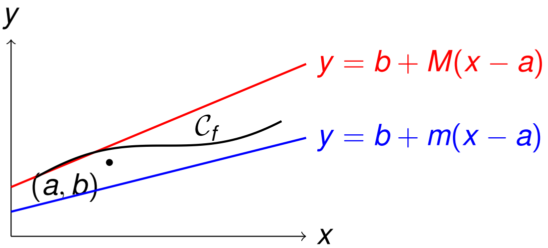
*On dit aussi que la fonction f est k-lipschitzienne sur I.*

**Démonstration :**

1. Soit $(x_1, x_2) \in I \times I$. Supposons que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq k$.
2. La fonction $f$ étant dérivable sur $I$, on peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis, $\exists c \in ]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.
3. Ainsi, $|f'(c)| = \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leq k$. Cela prouve le résultat souhaité.

# Interprétations graphique et cinématique

$f$ dérivable sur $I$ tq $\forall x \in I,\ m \leq f'(x) \leq M$.
Soit $a \in I$ et $b = f(a)$. Par l'égalité des accroissements finis sur $[a, x]$, $\exists c \in [a, x]$ tel que
$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a).$$
Cela donne
$$b + m(x - a) \leq f(a) + f'(c)(x - a) \leq b + M(x - a).$$
La courbe représentative de $f$ se trouve entre les droites d'équations
$$y = b + m(x - a) \quad \text{et} \quad y = b + M(x - a).$$



**En cinématique :** Sur l'autoroute A14, 2 radars sont placés à une distance de $2{,}6$ km. La vitesse maximale autorisée est de 130 km/h. On note $A$ le radar situé en $f(t_A)$ et à l'instant $t_A$. On note $B$ le radar situé en $f(t_B)$ à l'instant $t_B$. On suppose $t_A = 0$ et que la fonction $f$ décrivant la position de la voiture à chaque instant $t \in [t_A, t_B]$ est lisse.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|f(t_B) - f(t_A)| \leq \sup_{t \in [t_A, t_B]} |f'(t)| \, |t_B - t_A|.$$

Ici $|f'(t)|$ désigne la vitesse instantanée de l'automobiliste à l'instant $t$ entre les points $A$ et $B$. D'après l'énoncé, on a $\sup_{t \in [t_A, t_B]} |f'(t)| = 130$ km/h.
Ainsi, l'inégalité des accroissements finis est valide lorsque

$$|t_B - t_A| \geq \frac{f(t_B) - f(t_A)}{130} = \frac{2{,}6}{130} = 1{,}2.$$

Finalement, si l'automobiliste parcourt la distance entre les deux radars en moins de $1{,}2$ minutes, il aura une amende !