Descrição Fundamental da Natureza

Jhordan Silveira de Borba

18 de fevereiro de 2026

sbjhordan@gmail.com

Sumário

1 Introdução

Meu objetivo é, tanto quanto possível, evitar uma discussão filosófica extensa. Procurarei manter a exposição centrada na estrutura matemática da teoria, deixando a interpretação em aberto ao leitor. Evidentemente, toda descrição carrega algum grau de interpretação — e não sou exceção a essa regra. Ainda assim, tentarei limitar essa dimensão ao mínimo necessário nesta introdução.

Entendo a física como a ciência dedicada à construção de modelos matemáticos capazes de produzir previsões quantitativas acerca de fenômenos observáveis na natureza. Ainda que as fronteiras entre as diferentes ciências não sejam rígidas — pois são, em grande medida, classificações históricas — tradicionalmente atribui-se à física a busca por descrições em níveis mais elementares de organização da matéria e da interação. Outras áreas, como a química ou a biologia, operam em níveis de maior complexidade estrutural, trabalhando com sistemas compostos — moléculas, células, organismos — enquanto a física frequentemente procura modelar os constituintes e interações mais básicos disponíveis em determinado regime de descrição.

A primeira característica que atribuo à física é, portanto, a investigação da natureza em seu nível estrutural mais elementar acessível. A segunda é a centralidade do seu caráter preditivo: o papel da teoria física é estabelecer regras que permitam determinar, dadas certas condições iniciais ou configurações experimentais, quais valores serão medidos para determinadas grandezas.

A primazia do observável constitui o critério último de validação de qualquer teoria física. A adequação empírica de um modelo — isto é, sua capacidade de produzir previsões quantitativas corretas — é um critério operacionalmente mais bem definido do que a escolha entre diferentes interpretações ontológicas. Nesse sentido, a célebre afirmação de Newton — "Hypotheses non fingo" — expressa uma mudança metodológica decisiva: o abandono da busca por causas finais em favor da descrição matemática regular dos fenômenos naturais. O objetivo passa a ser determinar como a natureza se comporta sob determinadas condições, não responder por que ela existe em termos metafísicos.

É possível, inclusive, que dois modelos matemáticos distintos sejam empiricamente equivalentes, isto é, conduzam às mesmas previsões observáveis dentro de determinado domínio de validade. Nesse caso, a escolha entre eles pode depender de critérios adicionais — como simplicidade, generalidade ou poder unificador — e pessoais, mas não exclusivamente da observação imediata.

Adoto, como princípios orientadores, os seguintes axiomas metodológicos:

- **Observáveis**: Toda teoria física associa a cada sistema um conjunto de grandezas mensuráveis e fornece regras para calcular valores esperados ou probabilidades associadas a essas grandezas.
- **Evolução**: Existe uma regra — determinística ou probabilística — que descreve a evolução temporal do sistema, permitindo relacionar estados em instantes distintos.

Não entrarei na discussão ontológica acerca do estatuto de entidades como energia, força ou campo — se existem independentemente do formalismo ou se constituem apenas elementos estruturais da descrição matemática. Quanto ao sistema de unidades, adotarei o Sistema Internacional (SI), por sua familiaridade operacional e ampla padronização experimental. Entretanto, deve-se reconhecer que a escolha de unidades é, em grande medida, convencional. Em contextos específicos — como na relatividade geral — pode ser conveniente utilizar unidades geometrizadas, nas quais constantes fundamentais são absorvidas na definição das grandezas, permitindo expressar todas as dimensões em termos de uma única unidade fundamental, como comprimento.

Também é necessário enfatizar que este livro busca explorar a física em seu nível mais fundamental. Por isso, a análise será restrita a sistemas de uma ou poucas partículas, sem abordar corpos rígidos ou sistemas com muitas partículas.

O foco principal é compreender conceitos e definições mais essenciais da física. Dessa forma, exemplos e problemas não serão tratados pois servem apenas à fixação, não à introdução de novos conceitos. Assim, o leitor é convidado a acompanhar a construção conceitual de forma direta, sem distrações com aplicações imediatas.

2 Clássica

2.1 Leis do movimento

- **Partícula**: um objeto que o tamanho pode ser desprezado. Evidentemente a validade dessa declaração depende do contexto.

O movimento de uma partícula de massa m em uma posição $\boldsymbol{r}$ é governado por:

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}\right) = \dot{\boldsymbol{p}} \tag{1}$$

Onde $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ é o **momento**[1] e $\boldsymbol{F}$ a **força resultante**[2] . É interessante notar

[1] As unidades são $\left[kg\frac{m}{s}\right]$, isto é, esta é uma quantidade proporcional tanto a velocidade quanto a massa de um objeto. A velocidade $\left[\frac{m}{s}\right]$ nos diz o quanto a posição de uma partícula varia a cada segundo. Multiplicando isso pela massa, temos então uma medida da quantidade de massa que percorre uma distância unitária por unidade de tempo. Se $2kg$ e $1m/s$ significa que $2kg$ atravessam $1m$ por segundo. Se $1kg$ e $2m/s$ significa que $1kg$ atravessa $2m$ a cada segundo, ou seja, significa que esse mesmo $1kg$ é capaz de percorrer 2 vezes a disância unitária em $1s$, análogo ao caso anterior.

[2] Agora a unidade é $\left[kg\frac{m}{s^2}\right]$. A acelerção representa a variação da velocidade a cada segundo. Multiplicando essa taxa pela massa, obtemos uma grandeza que expressa a razão com que uma certa quantidade de massa ganha velocidade ao longo do tempo. Assim, se temos $2kg$ submetidos a uma aceleração $1m/s^2$, isso significa que, a cada segundo, esses $2kg$ aumentam sua velocidade velocidade em $1m/s$. De modo análogo, se temos $1kg$ com aceleração $2m/s^2$, isso significa que esse $1kg$ aumenta sua velocidade em $2m/s$ ao longo de um segundo, equivalentemente, pode-se dizer que ele ganha $1m/s$ a cada meio segundo. Em ambos os casos, o efeito total é equivalente a $2kg$ ganhando um incremente de $1m/s$ ao longo de $1s$. Para fins ilustrativos, podemos imaginar cada quilograma como um objeto físico distinto — por exemplo, um tijolo de $1kg$. Aplicar uma aceleração de $1m/s^2$a $2kg$equivale a "injetar" $1m/s$ de velcidade em cada um dos dois tijolos ao longo de $1s$. Já no caso de $1kg$ e $2m/s^2$, podemos imaginar que o mesmo tijolo recebe dois incrementos sucessivos de $1m/s$ dentro do mesmo segundo de tempo, por exemplo, um incremento a cada meio segundo.

que esta equação diferencial descreve a evolução da posição $\boldsymbol{r}(t)$ da partícula ao longo do tempo.

Isto é válido em um referêncial inercial , isto é, onde onde uma partícula livre com $\dot{m} = 0$ viaja em uma linha reta.

Temos então que:

- Se $\boldsymbol{F} = 0$ então $\boldsymbol{p}$ é constante.

Definindo a **energia cinética**[3]:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \right) \tag{2}$$

Considerando a massa constante, e sendo a derivada do produto interno:

$$\frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \right) = \dot{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \dot{\boldsymbol{b}} \tag{3}$$

Então:

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \right) \right] = \frac{m}{2} \left(\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} \right) \tag{4}$$

Uma vez que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ e $c \left(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \right) = c\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot c\boldsymbol{b}$

$$\dot{T} = \frac{m}{2} \left(2\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \right) = \left(m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \right) = \dot{\boldsymbol{p}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \tag{5}$$

Ou ainda:

$$\dot{T} = \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \tag{6}$$

Então a variação de energia total entre os instantes t_1 e t_2:

$$\dot{T} = \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \tag{7}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right) dt \tag{8}$$

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{r_1}^{r_2} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \right) \tag{9}$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \tag{10}$$

Onde essa mudança se justifique por uma integral de linha de um campo escalar onde $\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \int_C F(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$. Perceba que obtivemos este resultado

[3] A energia cinética possui unidade $kg\frac{m^2}{s^2}$. Embora a interpretação direta dessas unidades seja menos intuitiva do que no caso do momento ou da força, trata-se de uma grandeza definida matematicamente como proporcional à massa e ao quadrado da velocidade. O termo "energia", carregado de significados no senso comum, designa aqui apenas uma quantidade matemática bem definida, cujo valor é inferido a partir do estado de movimento do sistema.

apra uma força que tem a posição como variável independente. Esta integral é chamada de **trabalho**[4] feito pela força. E o trabalho é igual a variação na energia cinética. A força que depende apenas da posição $\boldsymbol{r}$ e que é independente do caminho, isto é:

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{11}$$

É chamado de **força conservativa**[5]. Sendo o **potencial**[6] $V(\boldsymbol{r})$ então é uma propriedade do espaço plano $\boldsymbol{R}^3$ que podemos escrever a força como:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \tag{12}$$

Quando temos uma força conservativa, temos a lei de **conservação da energia**. Então:

$$\begin{aligned} T(t_2) - T(t_1) &= \int_{r_1}^{r_2} (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}) && (13) \\ &= -\int_{r_1}^{r_2} (\nabla V(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}) && (14) \\ &= -\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial Z} dx \right) && (15) \end{aligned}$$

Uma vez que $d\boldsymbol{r} = dx + dy + dz$. Sendo o diferencial total de $f(x, y, z)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial Z} dx \tag{16}$$

Lembrando que o $\boldsymbol{r}$ em V é uma posição, não uma função $\boldsymbol{r}(t)$ que mue com o tempo.

Então:

$$\begin{aligned} T(t_2) - T(t_1) &= -\int_{r_1}^{r_2} dV && (17) \\ &= -V(t_2) + V(t_1) && (18) \end{aligned}$$

Ou então:

$$T(t_2) + V(t_2) = T(t_1) + V(t_1) \equiv E \tag{19}$$

Então $E = T + V$ é uma constante de movimento, a energia. Observações:

[4]Trabalho é a variação da quantidade que chamamos de energia cinética, isto é, a variação de uma grandeza matemática proporcional à massa e ao quadrado da velocidade.

[5]Em termos de unidade, força conservativa é apenas força.

[6]O potencial na mecânica clássica, ou melhor, energia potencial, ainda que talvez ainda não esteja claro, também é apenas energia e compartilha da mesma interpretação.

- Problemas típicos de mecânica clássica envolvem nos fornecer uma força $F(\boldsymbol{r})$ e então procedemos resolvendo a equação diferencial resultante.
- É fácil generalizar a discussão para muitas partículas.
- Não há necessidade de falar em torque para uma única partícula.

2.2 Formaliamos Lagrangeano

Vamos definir o **lagrangeano**[7] como uma função das posições $\boldsymbol{r}(t)$ e das velocidades $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ no tempo:

$$L(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)) = T(\dot{\boldsymbol{r}}) - V(\boldsymbol{r}) \tag{20}$$

O $\boldsymbol{r}$ originalente em $V(\boldsymbol{r})$ é uma posição apenas, isto é, fornecemos uma posição e V retorna um valor. Mas agora o $\boldsymbol{r}(t)$ em L é uma função de posição que evolui no tempo, e a cada instante t retorna um valor diferente de $V(\boldsymbol{r})$. Isto é como se a cada instante t através de L, fornecemos um diferente $\boldsymbol{r}$ para V e $\dot{\boldsymbol{r}}$ para T visando obter um L para cada instante. É uma questão de definição.

Para descrever o princípio da mínima ação, consideramos os caminhos suaves[8] $\boldsymbol{r}(t)$ com os pontos fixos:

$$\boldsymbol{r}(t_i) = \boldsymbol{r}_i \qquad \boldsymbol{r}(t_f) = \boldsymbol{r}_f \tag{21}$$

Para cada caminho, vamos assinalar um número chamado **ação**[9]:

$$S[\boldsymbol{r}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} L(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t))\, dt \tag{22}$$

Esta ação é um funcional, isto é, uma função de um caminho que é também uma função.

- **Teorema (princípio da mínima ação)**: O caminho atual que o sistema percorre é um extremo de S.

[7] Unidade de energia.

[8] Isto é, que é diferenciável.

[9] Sobre a unidade da ação, obtemos $\left[kg\frac{m^2}{s}\right]$. É interessante notar que essa mesma unidade pode ser escrita como momento vezes distância. De fato, $\left[kg\frac{m}{s}\right]$ é a unidade de momento linear; multiplicando por um comprimento, recuperamos exatamente a unidade da ação. Como estamos integrando entre dois instantes de tempo, durante os quais a partícula percorre uma certa trajetória, a ação pode ser vista como algo proporcional tanto ao momento quanto ao deslocamento realizado. Também é interessante observar que o integrando é sobre a diferença entre energia cinética e potencial, ou seja, quando minimizamos a ação procuramos uma trajetória onde esta integral é minimizada. no caso de uma partícula que tenha apenas energia cinética e que ela seja constante, temos apenas um produto entre a energia cinética e o tempo percorrido. Nesse sentido, a ação combina informação sobre a velocidade da partícula — já que momento e energia cinética dependem dela — e sobre o caminho percorrido. Assim, embora a palavra "ação" possa soar subjetiva, matematicamente ela corresponde é uma quantidade que depende simultaneamente da dinâmica (via velocidades, certamente uma inspiração para a escolha do nome, já que ação remente a algo em movimento) e da geometria do caminho percorrido.

Vamos considerar uma pequena variação no caminho:

$$\boldsymbol{r}(t) \rightarrow \boldsymbol{r}(t) + \delta\boldsymbol{r}(t) \tag{23}$$

Como os extremos são fixos então $\delta\boldsymbol{r}(t_i) = \delta\boldsymbol{r}(t_f) = 0$. Vamos utilizar o método de Euler e olhar apenas para uma dimensão. Vamos dividir o intervalo de tempo em n partições divididas nos pontos

$$t_0 = t_i < \cdots < t_j < \cdots < t_n = x_f \tag{24}$$

Evidentemente cada intervalo tem o tamanho:

$$\Delta t = t_{j+1} - t_j = \frac{(x_f - x_i)}{n} \tag{25}$$

Agora vamos substituir a curva suave $x(t)$ por uma curva poligonial (formada por segmentos de reta) com os vértices:

$$(x_0, t_0), \ldots, (x_n, t_n) \tag{26}$$

onde $x_j = x(t_j)$. Podemos aproximar então o funcional $J[L]$ por um somatório discreto, isto é, pela soma de Riemman temos[10]:

$$\int f(x) \ldots dx \rightarrow \sum f(x_k)\, \Delta x_k$$

Então:

$$S[x_1, \ldots x_{n-1}] = \sum_{j=0}^{n-1} L\left(x_j, \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}\right) \Delta t \tag{27}$$

Uma vez que x_0e x_n são fixos. Ou então simplesmente mudando a numeração chamando o últim elemento de $n+1$ a invés de n:

$$S[x_1, \ldots x_n] = \sum_{j=0}^{n} L\left(x_j, \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t}\right) \Delta t \tag{28}$$

Fazendo a derivada partcial em termos de x_k, vai restar apenas os termos onde $j = k$ e $j = k - 1$:

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} L\left(x_k, \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}\right) \Delta t + \frac{\partial}{\partial x_k} L\left(x_{k-1}, \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t}\right) \Delta t \tag{29}$$

Reescrevendo como: $\dot{x_k} = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}$:

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} L(x_k, \dot{x}_k)\, \Delta t + \frac{\partial}{\partial x_k} L(x_{k-1}, \dot{x}_{k-1})\, \Delta t \tag{30}$$

[10]Vale observar que quando analisamos o segmento entre t_j e t_{j+1}, pegamos x_jà esquerda, poderíamos adotar outras aproximações.

Utilizando a regra da cadeia para o segundo caso:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} L(x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{k-1}} L(x_{k-1}\dot{x}_{k-1}) \frac{\partial \dot{x}_{k-1}}{\dot{x}_{k-1}} \tag{31}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{k-1}} L(x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}) \frac{1}{\Delta t} \tag{32}$$

Se temos $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ a regra da cadeia para $z = f(x, y)$ é :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{33}$$

Então:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} L(x_k, \dot{x}_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} L(x_k, \dot{x}_k) + \frac{\partial}{\partial \dot{x_k}} L(x_k, \dot{x}_k) \frac{\partial \dot{x_k}}{\partial x_k} \tag{34}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} L(x_k, \dot{x}_k) - \frac{\partial}{\partial \dot{x_k}} L(x_k, \dot{x}_k) \frac{1}{\Delta t} \tag{35}$$

Temos então que:

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} L(x_k, \dot{x}_k) \Delta t - \frac{\partial}{\partial \dot{x_k}} L(x_k, \dot{x}_k) \tag{36}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{k-1}} L(x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}) \tag{37}$$

Observe que se $n \to \infty$ então $\Delta t \to 0$, logo o primeiro termo tende a zero, e os seguintes:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\partial S}{\partial x_k} = 0 - \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial L_k}{\partial \dot{x_k}} - \frac{\partial L_{k-1}}{\partial \dot{x}_{k-1}} \right) \tag{38}$$

Como L é uma função suave (diferenciável) e neste caso $\|x_k - x_{k-1}\| \to 0$ podemos assumir que a própria diferena entre as derivadas tende a zero:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\partial S}{\partial x_k} = 0 \tag{39}$$

De fato queremos um extremo da ação, ou seja, definimos esta derivada parcial como 0 para qualquer valor de k. Mas $0 = 0$ não é interessante. Dividindo tudo então por Δt ficamos com:

$$\frac{1}{\Delta t}\frac{\partial S}{\partial x_k} = \frac{\partial L_k}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial L_k}{\partial \dot{x_k}} - \frac{\partial L_{k-1}}{\partial \dot{x}_{k-1}} \right) \frac{1}{\Delta t} \tag{40}$$

Pela definição de limite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{41}$$

Lembrando que em busca da ação estacionária, definimos $\frac{\partial S}{\partial x_k} = 0$, escrevendo $f(t+\Delta t) = \frac{\partial L_k}{\partial \dot{x_k}}$, uma vez que $L(x(t), \dot{x}(t))$ podemos então aproximar para :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial S}{\partial x_k} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial L_k}{\partial x_k} - \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right) \tag{42}$$

$$0 = \frac{\partial L_k}{\partial x_k} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{43}$$

$$0 = \frac{\partial L_k}{\partial x_k} - \frac{df(t)}{dt} \tag{44}$$

$$0 = \frac{\partial L_k}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \tag{45}$$

Aqui ainda estamos trabalhando com um sistema discreto. Ou seja, no intervalo de tempo entre t_0 e t_1, aproximamos dizendo que a partícula está em x_0, no intervalo de tempo entre t_1 e t_2, se encontra em x_1 ... porém conforme diminuo o intervalo, aproximamos o resultado do caso contínuo. Ou sendo $n \to \infty$, de forma contínua as variáveis discretas $(x_k, \dot{x}_k)$ se tornem contínuas:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \tag{46}$$

Podemos generalizar:

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} L - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla_{\dot{\boldsymbol{r}}} L \right) = 0 \tag{47}$$

Se aplicamos agora o gradiente no Lagrangeano:

$$L = T(\dot{\boldsymbol{r}}) - V(\boldsymbol{r}) \tag{48}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} L = \nabla_{\boldsymbol{r}} T(\dot{\boldsymbol{r}}) - \nabla_{\boldsymbol{r}} V(\boldsymbol{r}) \tag{49}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} L = -\nabla_{\boldsymbol{r}} V(\boldsymbol{r}) \tag{50}$$

Então:

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} L = \dot{\boldsymbol{p}} \tag{51}$$

E no caso discutido até aqui da mecânica clássica (referencial inercial, potencial que depende só da posição, energia cinética padrão):

$$\boldsymbol{F} = \nabla_{\boldsymbol{r}} L \tag{52}$$

Alguns comentários são necessários:

- Quando impomos $\delta S = 0$ não impomos ser necessariamente um mínimo, então é mais um princípio da 'ação estacionária' do que um 'mínimo. Porém como sempre podemos aumentar L aumentando a velocidade, não temos um máximo, porém podemos ter um ponto de cela.

- Todas leis fundamentais da física podem ser escritas em termos do princípio da ação.
- Enquanto a lei de Newton é restrita a um referencial inercial, as equações de Lagrange funcionam em qualquer sistema de coordenada.
- Agora resolvemos o conjunto de equações diferenciais de Euler-Lagrange para obter a equação de posição da partícula $\boldsymbol{r}(t)$.
- Novamente fácilmente generalizável para N partículas.

2.2.1 Restrições holonômicas

A formulação lagrangeana nos permite trabalhar com coordenadas generalizadas $q_i(\boldsymbol{r}, t)$, um bom sistema de coordenadas é aquele que permite inverter e obtermos também $x_j(q_0, \ldots, q_n, t)$. Podemos demonstrar matematicamente que se podemos resolver o problema para as coordenadas $\boldsymbol{r}$, então podemos resolver para $\boldsymbol{q}$.

Restrições holonômicas são restrições entre as coordenadas da forma:

$$f_i(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{53}$$

Se tivessemos N particulas, poderíamos ter então $3N - n$ restrições. Para uma partícula então $N = 1$ podemos ter $3 - n$ restrições. Evidentemente podemos pensar que se tivermos 1 restrição então é que temos 2 coordenadas generalizadas, é exatamente a restrição que nos permite eliminar um grau de liberdade.

Vamos introduzir então para uma particula $3 - n$ variáveis λ_i e definir um novo lagrangeano:

$$L' = L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) + \sum_i \lambda_i f_i(\boldsymbol{r}, t) \tag{54}$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) + \sum_i \lambda_i f_i(\boldsymbol{r}, t)\right) && (55) \\ &= f_i(\boldsymbol{r}, t) && (56) \\ &= 0 && (57) \end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange para x_ié então:

$$\frac{\partial L'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \tag{58}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(L + \sum_i \lambda_i f_i\left(\boldsymbol{r}, t\right)\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left[L + \sum_i \lambda_i f_i\left(\boldsymbol{r}, t\right)\right]\right) = \tag{59}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \tag{60}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{61}$$

- **Teorema:** Para sistemas com restrição, podemos obter as equações de movimento diretamente em coordenadas generalizadas q_i.

Vamos definir genericamente um coordenada:

$$q_a = q_a\left(x_1, x_2, x_3, t\right) \tag{62}$$

Então:

$$\dot{q}_a = \frac{dq_a}{dt} \tag{63}$$

$$r = \frac{\partial q_a}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial q_a}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial q_a}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial q_a}{\partial t} \tag{64}$$

$$= \frac{\partial q_a}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial q_a}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial q_a}{\partial x_3}\dot{x}_3 + \frac{\partial q_a}{\partial t} \tag{65}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial q_a}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial q_a}{\partial t} \tag{66}$$

Um bom sistema de coordenadas também permite inverter $x_i = x_i\left(\boldsymbol{q}, t\right)$ de forma que:

$$\dot{x}_i = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{67}$$

Então substituindo $L\left(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}\right)$ por $L\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\right)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_i} &= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}\right) && (68)\\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{a=1}^{N}\frac{\partial x_j}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right]\right) && (69)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{a=1}^{N}\frac{\partial x_j}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right] \tag{70}
$$

E sendo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) && (71)\\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) && (72)
\end{aligned}
$$

Uma vez que $x_j = (\boldsymbol{q}, t)$ não depende de $\dot{\boldsymbol{q}}$. Tomando a derivada no tempo de 72:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) &= \sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) && (73)\\
&= \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] && (74)
\end{aligned}
$$

Expandindo a segunda derivada temporal:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) &= \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} && (75)\\
&= \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\ddot{q}_k\right] + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} && (76)
\end{aligned}
$$

Vamos tomar a derivada:

$$\dot{x}_i = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{77}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{a=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\partial x_i}{\partial t}\right) \tag{78}$$

$$= \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_a}\frac{\partial \dot{q}_a}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) \tag{79}$$

$$= \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \tag{80}$$

Uma vez que $x = (\boldsymbol{q}, t)$ não depende de $\dot{\boldsymbol{q}}$, então $\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$ também não vai depender de $\dot{\boldsymbol{q}}$. Então retomando a derivada temporal:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\ddot{q}_k\right] + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \tag{81}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 \dot{x}_j}{\partial q_k \partial \dot{q}_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \dot{x}_j}{\partial t \partial \dot{q}_i} \tag{82}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_i} \tag{83}$$

Retomando a derivada do Lagrangeano temos então:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \tag{84}$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_i}\right)\right] \tag{85}$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right] \tag{86}$$

Substituindo 69temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{87}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j}\right]\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{88}$$

O termo entre parêntese a própria equação de Euler-Lagrange para $\boldsymbol{r}$. Se é resolvida então:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{89}$$

Escrevemos o Lagrangeano então como:

$$L\left[\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right] = L\left[\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{q}, t\right), \dot{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right), t\right] \tag{90}$$

E considerando a restrição $L' = L + \sum \lambda_i f_i$ então, de modo análogo obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \tag{91}$$

Porém, em coordenadas cartesianas, a restrição serve para manter a particula em uma dada superfície, uma vez que as coordenadas $\boldsymbol{r}$ permitem que a partícula esteja em qualquer posição do espaço, isto é, sob a superfície temos $f\left(\boldsymbol{r}, t\right) = 0$. Porém como as coordenadas generalizadas são definidas de forma que a partícula só possa estar sob a superfície, então $\frac{\partial f_i}{\partial q_i} = 0$ por definição uma vez que as coordenadas generalizadas são definidas de forma que naturalmente restrinjam a partícula a estar sempre em uma posição $\boldsymbol{r}$ onde $f\left(\boldsymbol{r}, t\right) = 0$.

Então se estamos apenas interessados na dinâmica das coordenadas $\boldsymbol{q}$ podemos ignorar os multiplicadores de lagrange e trabalhador totalmente com o Lagrange sem restrição $L\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right)$.

- Observação:Não há uma teoria geral para resolver sistemas com restrições não-holonômicas (por exemplo, que dependa da velocidade). Há diferentes técnicas para casos específicos.

Em resumo:

Temos um sistema descrito por n cordenadas generalizadas q_i que definem um ponto em um espaço de configuração[11] de n dimensões C. A evolução temporal é uma curva em C governada pelo lagrangeano:

$$L\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t\right) \tag{92}$$

De forma que q_i obedece:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{93}$$

Vamos definir o momento generalizado:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{94}$$

[11] Conjunto de todas as posições possíveis que um sistema pode assumir. Para uma única partícula livre em três dimensões, ela pode ocupar qualquer ponto (x, y, z) de forma que o espaço de configuração é $\mathbb{R}^3$.

O momento generalizado coincide com o momento 'normal' em coordenadas cartesianas. Antes de avanaçar podemos lembrar que o Lagrangeano não é único, se fizermos $L' = \alpha L$ as equações de movimento permanecem inalteradas, podemos ver isso ao pensar na equação de Euler-Lagrange onde a constante simplesmente será retirada para fora de todas derivadsa. Também podemos pensar em $L' = L + \frac{df}{dt}$, sendo $f\left(\boldsymbol{q}, t\right)$.

Aplicando então na equação de euler lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0 \tag{95}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[L + \frac{df}{dt}\right]\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(L + \frac{df}{dt}\right) = 0 \tag{96}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{df}{dt}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \frac{df}{dt}}{\partial q_i}\right] \tag{97}$$

Então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \frac{df}{dt}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) && (98)\\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t}\right) && (99)\\ &= \frac{\partial f}{\partial q_i} && (100)\end{aligned}$$

Uma vez que f não depende de $\dot{q}_i$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial \frac{df}{dt}}{\partial q_i}\right] \tag{101}$$

Como pelo teorema de Clairaut-Schwarz :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) && (102)\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{df}{dt}\right) && (103)\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) && (104)\end{aligned}$$

Então:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{105}$$

2.2.2 Teorema de Noether

Vamos começar definindo uma função $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_i, t)$ onde sua derivada temporal para qualquer $q_i(t)$ que satisfaz as equações de Legendre é:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{106}$$

Neste caso chamamos então F de quantidade conservada (ou constante de movimento). Isto é, F permanece constante durante todo o caminho percorrido pelo sistema.

- **Afirmação**: Se L não depende explicitamente do tempo então:

$$H = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \tag{107}$$

é constante. Se escrevermos $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ em termos de q_i e p_i então é chamado de Hamiltoniano e usualmente identificado como a anergia total do sistema.

Prova:

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) && (108) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{dL}{dt} && (109) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) && (110) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \dot{q}_j && (111)
\end{aligned}$$

Onde a equação entre parêntese é a de Euler-Lagrange de forma que temos simplesmente $\dot{H} = 0$.

- **Afirmação**: Se para algum q_j temos $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ então q_j é dita ignorável e temos a quantia conservada:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Prova:
Comentários:

- Todas leis de conservação estão relacionadas a simetrias através do Teorema de Noehter.
- Há também simetris discretas.

2.3 O formalismo Hamiltoniano

30 / 139

- Classica: 10-13,17-26,38-41,80,80-130

3 Eletromagnética

3.1 Introdução

3.2 Eletrostática

3.3 Magnetostática

3.4 Eletrodinâmica

3.5 Eletromagnetismo e relatividade

3.6 Radiação eletromagnética

4 Quântica

4.1 Introdução

4.2 Uma partícula quântica em uma dimensão

4.3 O formalismo da Mecânica quântica

4.4 Uma partícula quântica em três dimensões

A Calculo Variacional

B Créditos

- Notas de aula de dinâmica Clássica: David Tong.
- Obtenção de Equação Euler-Lagrante: Prof. Domingos H. U. Marchetti.