

Diseño del sistema de elución y filtrado de una planta de extracción

Juan David Argüello Plata

Universidad Industrial de Santander

Facultado de Ingenierías Físicomecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Maestría en Ingeniería Mecánica

2020

Diseño del sistema de elución y filtrado de una planta de extracción

Autor

Juan David Argüello Plata

Ingeniero Mecánico

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Ingeniería Mecánica

Director

Omar Armando Gélvez Arocha

Ingeniero Mecánico M.Sc.

Universidad Industrial de Santander

Facultado de Ingenierías Físicomecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Maestría en Ingeniería Mecánica

2020

Índice

Introducción	6
1. Método MSPD	7
1.1. Factores a considerar en la extracción MSPD	8
1.2. Extracción en fase sólida	8
1.3. Prototipo a escala	9
2. CFD	10
2.1. Análisis unidimensional estacionario - 1D	12
2.2. <i>Solvers</i>	14
2.3. Metodologías de verificación y validación	14
2.4. Análisis bidimensional estacionario - 2D	15
3. DEM	16
3.1. Detección de una colisión	17
4. CFD-DEM	18
4.1. Fase del solvente	18
5. Sedimentación	20
5.1. Sedimentación con coagulantes	20
5.2. Sedimentadores de <i>placas paralelas</i>	20
5.3. Turbiedad	21
6. Etapa de elución y filtrado	23
6.1. Naturaleza del flujo	23
6.2. Parámetros operacionales	24
6.3. Dimensionamiento	25
6.3.1. Panel de lamelas	26
6.4. Método de Hazen → tiempo de sedimentación	27
6.5. Tamaño de partícula mínima	27
6.6. Resultados	28
7. Modelo CFD-DEM	29
7.1. Geometría	29
7.2. Mallado	30
7.3. Condiciones de frontera	32
7.4. Desarrollo de la simulación	34
7.4.1. CFD	34
7.4.1.1. Resultados	36
7.4.1.2. Análisis de resultados	37
7.4.2. CFD-DEM	37

7.4.2.1.	Planteamiento numérico	38
7.4.2.2.	Resultados	40
7.4.2.3.	Análisis de resultados	42
8.	Validación del modelo	43
8.1.	Descripción del problema	43
8.2.	Desarrollo experimental	44
8.2.1.	Descripción particular	44
8.2.2.	Métodos experimentales	46
8.3.	Resultados	47
9.	Conclusiones	50

Índice de figuras

1.	Método MSPD ^[1]	7
2.	Prototipo desarrollado ^[2, 3]	9
3.	Discretización del dominio (malla cartesiana).	11
4.	Tipos de mallas.	12
5.	Problema unidimensional.	13
6.	Método de validación simple.	14
7.	Discretización dominio bidimensional.	15
8.	Comparación entre metodologías de análisis de partículas para una esfera suave deformada en un plano: situación física real (izquierda), modelo analizado con el método de elementos finitos (centro) y modelo con el método de elementos discretos (derecha)	16
9.	Detección de colisión entre partículas.	17
10.	Esquema de la aproximación por malla dual para la búsqueda de partículas vecinas en un fluido.	19
11.	Sedimentador de placas paralelas.	21
12.	Velocidad de asentamiento de partículas discretas en un fluido estático.	25
13.	Vista en corte de la geometría del panel de lamelas.	30
14.	Mallado de la geometría.	31
15.	Zona de generación de partículas en la tubería de entrada.	32
16.	Condiciones de frontera.	32
17.	Diagrama de flujo del solucionador <code>pimpleFoam</code>	35
18.	Diagrama de contorno de la distribución de velocidades del sistema de sedimentación.	36
19.	Diagrama de contorno de la distribución de presiones del sistema de sedimentación.	36
20.	Interacción dinámica entre partículas.	39

21.	Diagrama de contorno de velocidades del sistema.	40
22.	Diagrama de contorno de presiones del sistema de separación de sustancias.	41
23.	Distribución de partículas de arena sobre el volumen de control durante el segundo 28 de la simulación.	41
24.	Monitoreo de residuales en la simulación CFD-DEM.	42
25.	Geometría de estudio.	43
26.	Esquema del montaje experimental ^[4]	45
27.	Esquema del sistema de medición de la interacción partícula fluido ^[4]	46
28.	Comparación entre resultados del diseño experimental desarrollado por Fessler & Eaton y los obtenidos a partir del modelo CFD-DEM desarrollado.	48
29.	Resultados obtenidos a partir del modelo CFD-DEM desarrollado.	48
30.	Distribución de las partículas de cobre sobre la geometría.	49
31.	Comparación directa de los perfiles de velocidad experimentales con respecto al del modelo numérico desarrollado.	49

Resumen

Título:	Diseño del sistema de elución y filtrado de una planta de extracción ¹
Autor:	Juan David Argüello Plata ²
Palabras clave:	CFD-DEM, MSPD, Python, Jupyter, ParaView, OpenFoam, Yade

Contenido:

El proceso de extracción basado en el método de dispersión de la matriz en fase sólida, MSPD, consiste de tres etapas. La primera es la etapa de pretratamiento, o de molienda, en donde se busca disminuir el tamaño de partícula del material orgánico con el fin de incrementar el área de transferencia de masa. La siguiente se trata de la etapa de elución y filtrado, en donde se produce la extracción de metabolitos secundarios a través de un solvente; luego, se filtra el material particulado para obtener la mezcla homogénea solvente - extracto. Finalmente, se desarrolla una etapa de separación de sustancias, en donde se separa el solvente del extracto (producto final).

Se propone una metodología de diseño automático del sistema de elución y filtrado que simula el comportamiento fluidodinámico durante la etapa de filtrado, permitiendo predecir el grado de concentración de partículas a lo largo del sistema a través de un modelo numérico basado en CFD-DEM. Esta metodología ha sido elaborada con herramientas de código abierto. Utilizando Python como lenguaje base, Jupyter como entorno de desarrollo, ParaView como plataforma de análisis de resultados y librerías de C++ (como Yade, LIGGGHTS y OpenFoam) para el desarrollo de las simulaciones numéricas.

¹Tesis de grado de maestría en ingeniería mecánica.

²Facultad: Físicomecánicas. Escuela: Ingeniería mecánica. Director: Omar Armando Gélvez Arocha.

Abstract

Título: Design of the elution and filtering system of an extraction plant³

Author: Juan David Argüello Plata⁴

Key words: CFD-DEM, MSPD, Python, Jupyter, ParaView, OpenFoam, Yade

Content:

The extraction process based on the matrix solid-phase dispersion (MSPD) can be summarized in three steps. The first one is the pretreatment, which consists of decreasing the particle size of organic material to increase mass transfer area. The next one consists of the elution and filtering step, where the extraction of secondary metabolites is produced with the help of a solvent. Finally, a separation process is required to reuse the solvent for future extraction processes and to obtain the final product (extract).

An automatic design methodology is proposed, from where the fluid dynamics behaviour is simulated during the filtering process, allowing to predict the particle concentration along the system through a numerical model based on CFD-DEM. This methodology had been elaborated with open source tools. Using Python as base language, Jupyter as development environment, ParaView as platform for analysis of results and C++ libraries (like Yade, LIGGGHTS and OpenFoam) for the developement of numerical simulations.

³Master thesis project.

⁴Faculty: Physical mechanical engineering. School: Mechanical engineering. Director: Omar Armando Gélvez Arocha.

Introducción

El método de *dispersión de la matriz en fase sólida*, MSPD, es un método de extracción ampliamente usado a escala de laboratorio para la obtención y análisis de la actividad biológica de extractos. Consiste de tres etapas: pretratamiento; elución y filtrado; y separación de sustancias. El éxito de este método extractivo recae en su simplicidad, rapidez y economía^[5]; razones por las que se han desarrollado estudios de escalabilidad en busca de la industrialización^[2, 6, 3]. En estos estudios se ha reportado un cuello de botella⁵ durante la etapa de filtrado. Debido a ello, la presente investigación desarrolla una metodología de diseño enfocada en la etapa de filtrado de una planta de extracción basada en el método MSPD; en dónde se aprecia en detalle la concentración de partículas a lo largo del sistema de elución y filtrado, permitiendo la optimización del mismo a través de un modelo numérico validado mediante experimentación.

En general, los métodos numéricos son teoremas matemáticos que permiten describir la naturaleza de diferentes fenómenos de carácter físico-químico. Son ampliamente usados en ingeniería como metodologías predictivas durante el proceso de diseño funcional y mecánico. Para el análisis de comportamientos fluidodinámicos de partículas, es común encontrar estudios que combinen los métodos numéricos de *elementos discretos* y *volúmenes finitos*, o como es mejor conocido: *modelo CFD-DEM*.

El acoplamiento entre CFD-DEM se ha empleado cuando se busca desarrollar análisis de partículas y su interacción en medios viscosos. Ampliamente usado para análisis de lecho fluidizado^[7], separadores de ciclón (Chu *et al.*, 2009) y para el estudio de retención de partículas en medios filtrantes^[8], por citar algunos ejemplos. Se han desarrollado estudios experimentales que corroboran la efectividad y viabilidad de las simulaciones numéricas que emplean CFD-DEM^[7, 9].

⁵En el prototipo desarrollado, se evidenció que la etapa de filtrado requiere de un tiempo cercano al doble en comparación con las otras etapas del proceso de extracción.

1. Método MSPD

El método de dispersión de la matriz en fase sólida (MSPD, por sus siglas en inglés) ha sido ampliamente utilizado para el estudio de muestras biológicas. Existen más de 250 publicaciones en las que se emplea este método extractivo para el análisis de extractos de distintas naturalezas [5]. Esto se debe a la alta eficiencia y bajo costo de este método de extracción.

Consiste, básicamente, de tres etapas (como se puede observar en la Figura 1):

1. Maceración de la muestra con un *agente dispersante* (material particulado, normalmente compuesto de sílice).
2. Homogenización de la muestra macerada en la columna.
3. Elución con solvente y filtrado de la mezcla *solvente - extracto*.

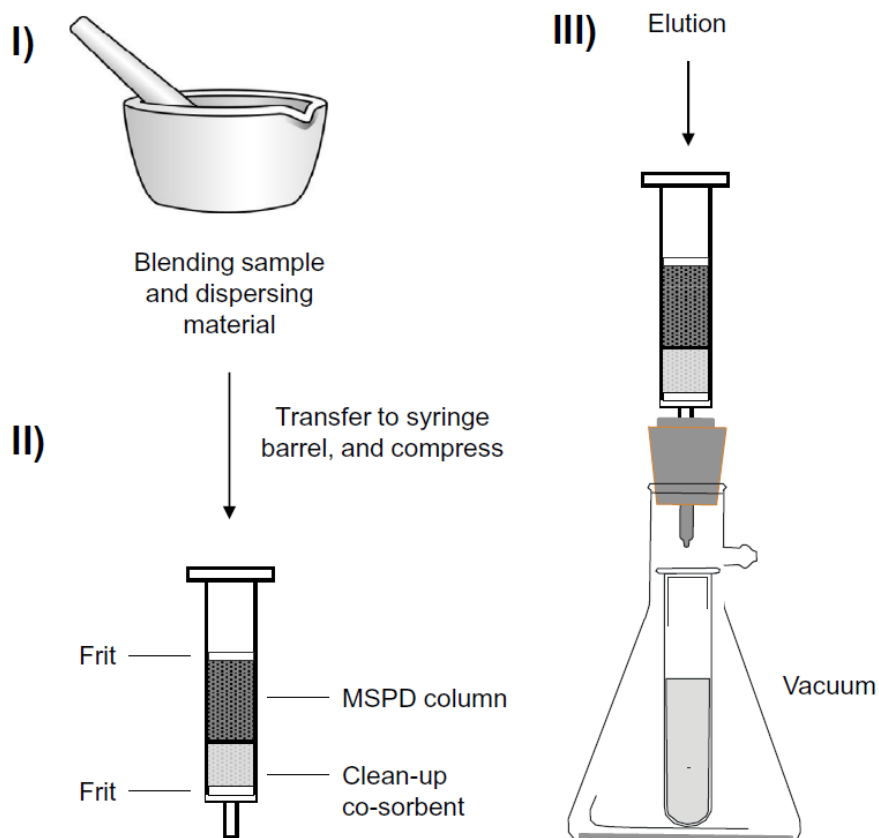


Figura 1: Método MSPD^[1].

1.1. Factores a considerar en la extracción MSPD

Hay varios factores a considerar en la extracción MSPD, que incluye:

1. *Efecto del tamaño de partícula media:* tamaños de partícula pequeños (entre 3 - 10 μm) requiere de grandes tiempos de elución y altos gradientes de presión para obtener un flujo adecuado.
2. *Agente dispersante:* el uso de silicatos infravalorados, como la arena de río, para la maceración de muestras presenta resultados diferentes a los reportados con agentes dispersantes como el C_{18} o el C_8 . A pesar de que el mismo principio de disrupción de la matriz se conserva, debido a la abrasión, es probable que se de una interacción química no deseada entre silicatos infravalorados y algunos de los flavonoides del extracto.
3. *Relación másica:* la mejor relación másica reportada en la literatura frecuenta ser una relación 1 a 4 ^[5], aunque puede variar de una aplicación a otra.
4. *Solvente:* el vertimiento del solvente en la columna MSPD tiene el fin de aislar analitos específicos o familias de compuestos. El tipo de solvente, y la polaridad de este, define la composición final del extracto. Existen estudios en donde se ha demostrado un incremento en el rendimiento extractivo al emplear solventes a temperaturas superiores a la temperatura ambiente e inferiores a los 60 $^{\circ}C$ ^[10].

1.2. Extracción en fase sólida

El método MSPD presenta diferencias claras respecto a la extracción fase sólida clásica (SPE, por sus siglas en inglés); entre ellas^[5]:

1. Al emplear el método MSPD, se consigue una disrupción completa de la muestra en partículas de reducido tamaño, incrementando el área de extracción. En SPE, la disrupción de la muestra se considera un paso *adicional*, donde muchos de los compuestos se descartan al procesar la muestra para la columna SPE.
2. En SPE, la muestra es usualmente absorbida en la parte superior de la columna y no a través de ella, como en el método MSPD.
3. La interacción física y química de los compuestos del sistema son mayores en el método MSPD y diferentes, en diversos sentidos, de aquellos apreciados en el SPE clásico, incluyendo otras formas de cromatografía líquida.

2. CFD

La *Dinámica de Fluidos Computacional* (CFD, por sus siglas en inglés) es una herramienta computacional ampliamente usada en ingeniería para el desarrollo de simulaciones numéricas que involucren fluidos. Emplea como método base el método de volúmenes finitos (FVM). Este método numérico transforma las ecuaciones diferenciales parciales, que representan las leyes conservativas, en ecuaciones algebraicas discretas sobre volúmenes finitos.

Inicia con la discretización del dominio en elementos no superpuestos. Las ecuaciones diferenciales son discretizadas (transformadas) en ecuaciones algebraicas al integrarlas sobre cada dominio de los elementos. El sistema de ecuaciones algebraicas es luego resuelto para calcular los valores de las variables dependientes de cada elemento. Algunos de los términos en la ecuación de conservación se convierten en flujos que se evalúan sobre las caras de los elementos. Es ‘sencillo’ evaluar condiciones de frontera, tanto de tipo *Dirichlet* como *Neumann*, de manera no invasiva, dado que las variables desconocidas se evalúan en los centroides de los elementos, no en las caras de los mismos, como se aprecia en la Figura 3. Estas características lo hacen adecuado para que la simulación presente una variedad de aplicaciones que involucren: flujo de fluidos y transferencia de calor y masa.

Básicamente, con este método numérico se busca resolver los siguientes grupos de ecuaciones:

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Ecuaciones de momento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \beta g_x (T - T_{ref})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \beta g_y (T - T_{ref})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \beta g_z (T - T_{ref})$$

- Ecuación de energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

De estas ecuaciones, los componentes desconocidos suelen ser la presión, temperatura y velocidad. Se requieren condiciones iniciales y de frontera para definir el problema. Dos fuertes *acoplamientos* caracterizan este sistema de ecuaciones:

- *Presión - velocidad*: no hay una ecuación específica para definir la presión. Para flujos incompresibles, la presión es el campo que hace que la velocidad logre cumplir la ley de la conservación de la masa.
- *Temperatura - velocidad*: sólo está presente durante la convección natural; la convección mixta o forzada son dependientes de las propiedades físicas.

Los métodos numéricos se enfocan tanto en el proceso de discretización como en el método de solución del grupo de ecuaciones algebraicas obtenidas. La **precisión** de una solución numérica está arraigada al método de discretización.

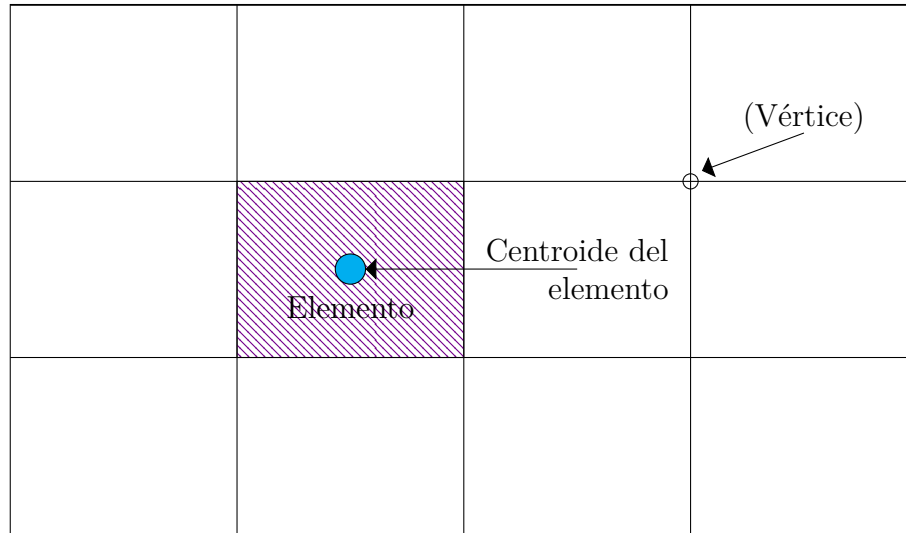


Figura 3: Discretización del dominio (malla cartesiana).

Existen dos tipos de mallas para el análisis mediante CFD, como se aprecia en la Figura 4.

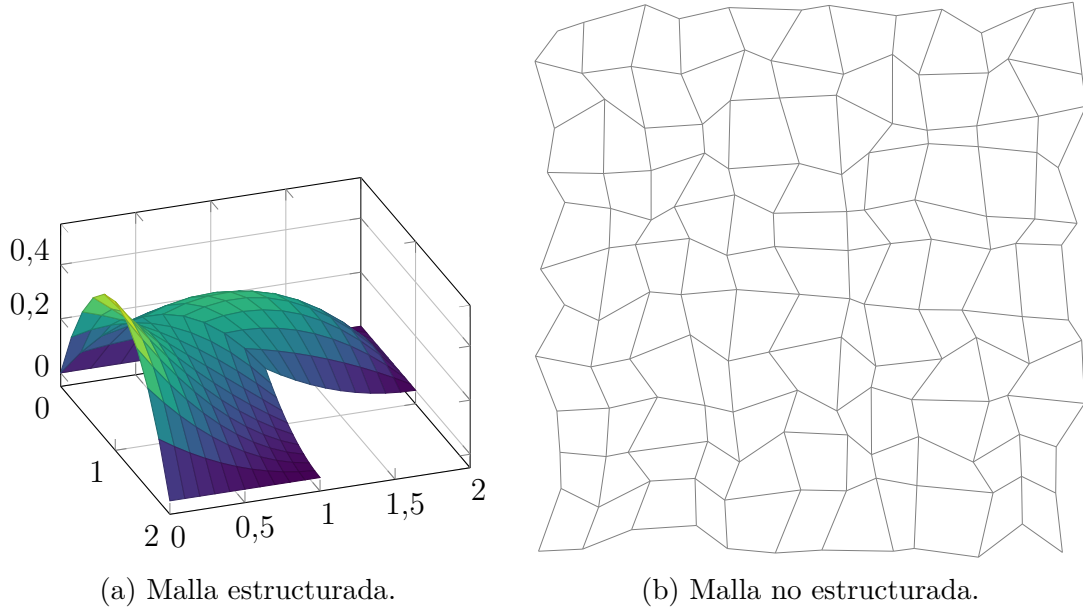


Figura 4: Tipos de mallas.

La conversión de las ecuaciones diferenciales parciales requieren la discretización del dominio de estudio; que, a su vez, depende de la dimensionalidad del problema.

2.1. Análisis unidimensional estacionario - 1D

Las Ecuaciones diferenciales parciales se pueden agrupar en diferentes términos; entre ellos: *transitorio*, *convectivo*, *difusivo* y *fuentes*, como se aprecia en la Ecuación 1.

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\rho u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}}_{\text{convectivo}} - \underbrace{\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)}_{\text{difusivo}} = \underbrace{S_\phi}_{\text{fuente}} \quad (1)$$

Asumiendo estado estacionario, unidimensional en la dirección x ; la ecuación de difusión se puede apreciar a continuación.

$$\underbrace{\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)}_{\text{difusivo}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{fuente}} = 0 \quad (2)$$

Resolviendo la Ecuación 2 para $\phi = T$ e integrando con respecto al elemento P (ver Figura 5), se obtiene lo siguiente:

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \rightarrow \left(\Gamma \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{dT}{dx} \right)_w + \int_w^e S dx = 0 \quad (3)$$

Si se asume que T varía linealmente entre nodos, se tiene:

$$\frac{\Gamma_e (T_E - T_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w (T_P - T_W)}{\delta x_w} + S \Delta x = 0 \quad (4)$$

La expresión mostrada en la Ecuación 4 ya no es exacta. Gráficamente, el problema se ve reducido a lo siguiente:

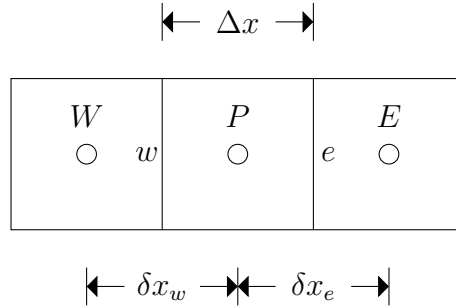


Figura 5: Problema unidimensional.

Agrupando los términos, se obtiene:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (5)$$

Dónde: $a_i = \Gamma_i / \delta x_i$, $a_P = a_E + a_W$ y $b = S \Delta x$. De esta forma, la conservación se garantiza para cada elemento de la malla a través de los flujos sobre las caras de los elementos.

Las condiciones de frontera pueden ser tipo *Dirichlet* o *Neumann*, dependiendo del problema.

Dirichlet	Neumann
$a_E = a_W = 0$	$a_I = 1$
$a_B = 1$	$a_B = 1$
$b = \phi$	$b = 0$

Cuadro 1: Condiciones de frontera - problema unidimensional.

2.2. Solvers

Existen diferentes métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas que pueden ser: *exactos* o *iterativos*. Los solucionadores que emplean métodos exactos no suelen usarse en simulaciones numéricas debido al alto costo computacional, básicamente tratan de resolver el sistema matricial $A\phi = B \rightarrow \phi = A^{-1}B$.

Los métodos iterativos suelen basarse en la lógica de *suposición* y *corroboración*. El método de Gauss - Seidel, por ejemplo, inicia suponiendo el valor de una variable, corroborándola con el cálculo de las demás; en caso de no coincidir, se supone el resultado final de la variable supuesta, donde se vuelve a corroborar hasta que el supuesto y la corroboración coincidan o hasta que el margen de error sea tolerable.

2.3. Metodologías de verificación y validación

Tienen por objetivo garantizar el menor *error computacional* posible. Entre ellas se destacan:

- *Simple*: estudio de la evolución global o local de una variable debido al refinamiento de malla, como se aprecia en la Figura 6.

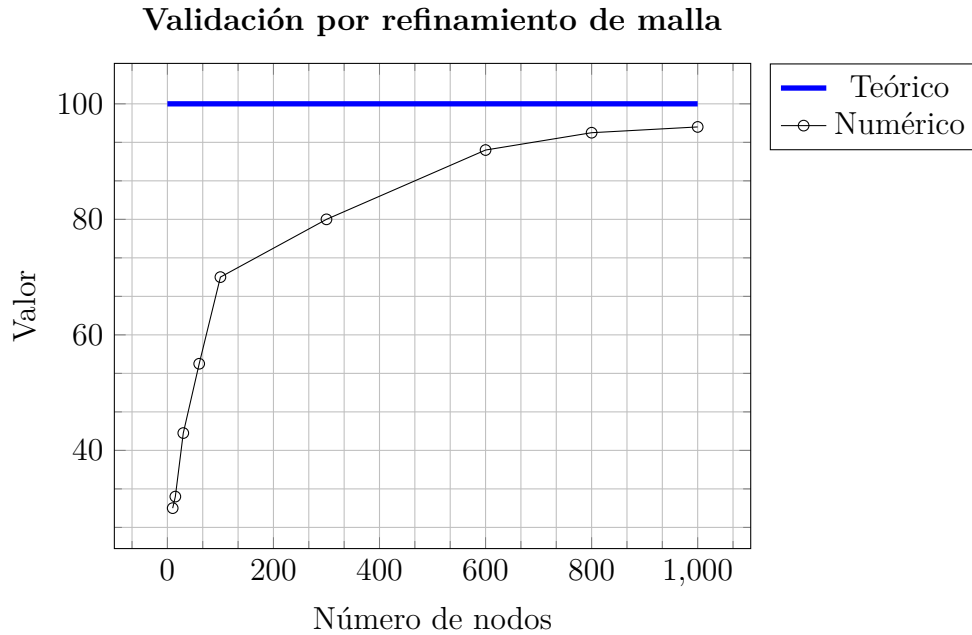


Figura 6: Método de validación simple.

- *Detallada*: se basa en la extrapolación generalizada de Richardson y en el índice de convergencia de malla (GCI).
- *Experimentación*: se validan los resultados con estudios experimentales.

2.4. Análisis bidimensional estacionario - 2D

Para análisis bidimensional, la Ecuación 1 se transforma en lo siguiente:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y}}_{\text{convectivo}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}_{\text{difusivo}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{fuente}} \quad (6)$$

La discretización del dominio se realiza acorde a la Figura 7.

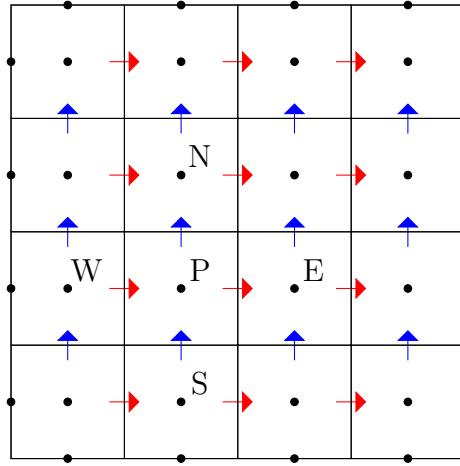


Figura 7: Discretización dominio bidimensional.

Existen diferentes enfoques para el análisis de problemas bidimensionales, entre ellos se encuentran: diferencias centradas, *upwind* e híbrido. El acercamiento por diferencias centradas asume una variación lineal de ϕ entre nodos para una malla uniforme, de modo que:

$$\begin{aligned} a_P \phi_P &= a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \\ a_E &= D_e - F_e/2 \\ a_W &= D_w + F_w/2 \\ a_N &= D_n - F_n/2 \\ a_S &= D_s + F_s/2 \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (F_e - F_w + F_n - F_s) \\ b &= \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \phi_P^0 + S \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (7)$$

3. DEM

El método de elementos discretos (DEM) es un método que modela fuerzas interpartícula basadas en parámetros de elasticidad y la superposición de partículas no deformadas, que se entiende como la cantidad de deformación necesaria para que puedan, físicamente, ocupar el espacio en su actual configuración. Requiere de seis grados de libertad en cuerpos rígidos: tres en dos dimensiones y seis en tres dimensiones.

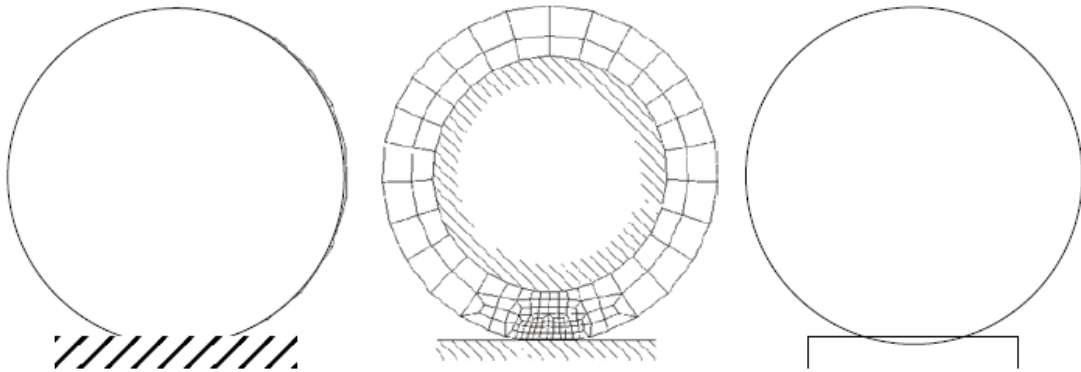


Figura 8: Comparación entre metodologías de análisis de partículas para una esfera suave deformada en un plano: situación física real (izquierda), modelo analizado con el método de elementos finitos (centro) y modelo con el método de elementos discretos (derecha)

El principio de este método es el de computar las fuerzas proporcionales a la superposición geométrica de las partículas empleadas. Para partículas esféricas, o circulares, las fuerzas involucradas son de tipo central; a diferencia de otras configuraciones geométricas, debido a que deben caracterizar las fuerzas en la forma ‘débil’ y ‘fuerte’.

Una simulación que emplea este método numérico, normalmente se rige bajo los siguientes pasos:

1. Detección de colisión entre partículas.
2. Creación de una nueva interacción y determinación de diferentes propiedades, entre ellas la rigidez.

Para interacciones ya existentes:

1. Evaluación de deformación.
2. Computación del esfuerzo basada en la deformación.
3. Aplicación de fuerzas en la interacción entre partículas.

3.1. Detección de una colisión

La detección *exacta* de colisión entre dos partículas requiere de un alto costo computacional. Tomando una pareja de cuerpos i y j y su colisión ‘exacta’ (en el sentido de precisión admisible por la implementación numérica) presentadas en los puntos P_i y P_j la detección procede en los siguientes dos puntos:

1. Detección de colisión rápida usando puntos aproximados \tilde{P}_i y \tilde{P}_j ; siendo estas preconstrucciones en el modo que características individuales P_i y P_j satisfacen la siguiente condición mostrada en la Ecuación 8.

$$\forall x \in R^3 : x \in P_i \rightarrow x \in \tilde{P}_i \quad (8)$$

De igual manera para P_j . El predicado aproximado se conoce como ‘volumen límite’, siguiendo lo siguiente:

$$(\tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j) = \emptyset \rightarrow (P_i \cap P_j) = \emptyset \quad (9)$$

2. Al filtrar las colisiones imposibles mediante la Ecuación 9, algoritmos de detección de mayor costo computacional pueden ser implementados al filtrar falsas parejas de colisión restantes, como se observa en la Figura 9.

$$(\tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j) \neq \emptyset \wedge (P_i \cap P_j) = \emptyset \quad (10)$$

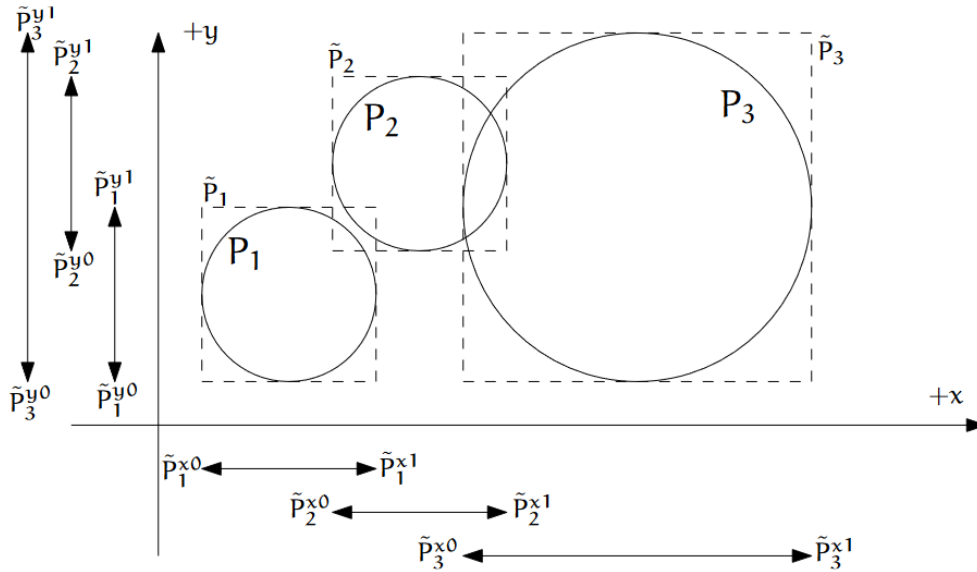


Figura 9: Detección de colisión entre partículas.

4. CFD-DEM

En el acoplamiento clásico entre CFD-DEM, el flujo se resuelve a través del método CFD basado en malla, mientras que la fase sólida es modelada mediante DEM para cada partícula sujeta a través de fuerzas hidrodinámicas, fuerzas de cuerpo (como la gravedad) y a través de fuerzas de contacto, actualizando valores de velocidad y posición conforme a la segunda ley de Newton (Hoomans *et al.*, 1996; Tsuji *et al.*, 1993; Xu y Yu, 1997). En principio, todos los métodos CFD pueden acoplarse con DEM; lo que ha dado origen a diferentes métodos discretos y continuos, tal como el método de Lattice Boltzmann (LBM), Hidrodinámica de Partículas Suaves (SPH), métodos de Diferencias Finitas y Volúmenes Finitos (FVM).

Gran parte de las simulaciones reportadas en la literatura comprenden modelos 2D o sistemas prototipados de pequeña escala. En busca de acelerar los tiempos de simulación e incrementar la eficiencia computacional, se han desarrollado técnicas de computación paralela; donde gran parte de los esfuerzos han sido enfocados en la paralelización del DEM. Muchos algoritmos se han propuesto para lograr este hecho, como la técnica de espejo de dominio (Damana, *et al.*, 2006; Washington y Meegoda, 2003), el método de subconjunto de partículas (Kafui *et al.*, 2011) y métodos de descomposición de dominios (Amritkar *et al.*, 2014; Tsuji *et al.*, 2008). El uso de estos algoritmos depende de la arquitectura del hardware. La paralelización sobre memoria compartida del sistema se alcanza, normalmente, empleando *OpenMP* (“Open Multi-Processing”, por sus siglas en inglés), mientras que el MPI (Interfaz de Paso de Mensajes) se emplea en sistemas de memoria distribuida (Rabenseifner *et al.*, 2009). Por ejemplo, Tsuji *et al.* (2008) paralelizaron una simulación en CFD-DEM usando MPI para el intercambio de información entre 16 CPUs, reportando el comportamiento fluidodinámico de 4.5 millones de partículas en un medio gaseoso; empleando el método unidimensional de descomposición de dominio.

4.1. Fase del solvente

En un modelo CFD-DEM, la fase del fluido se resuelve en el nivel computacional en cada elemento de la malla (ver Figura 3) empleando un marco de referencia Euleriano mientras que el movimiento de la partícula se sigue a través de un marco de referencia Lagrangiano. Para lograr el acoplamiento de fase, es necesario interpolar las propiedades de las partículas a los centroides de los elementos CFD y las propiedades del fluido a la posición de cada partícula. Como se muestra en la Figura 10, se crean dos mallas alineadas de búsqueda: la malla de búsqueda de partículas (amarilla) y la malla de búsqueda de fluido (azul).

Los pasos clave con los que se basan las mallas de búsqueda son: detección de colisión de partículas (descrito en la sección 3.1), geometría de los elementos de

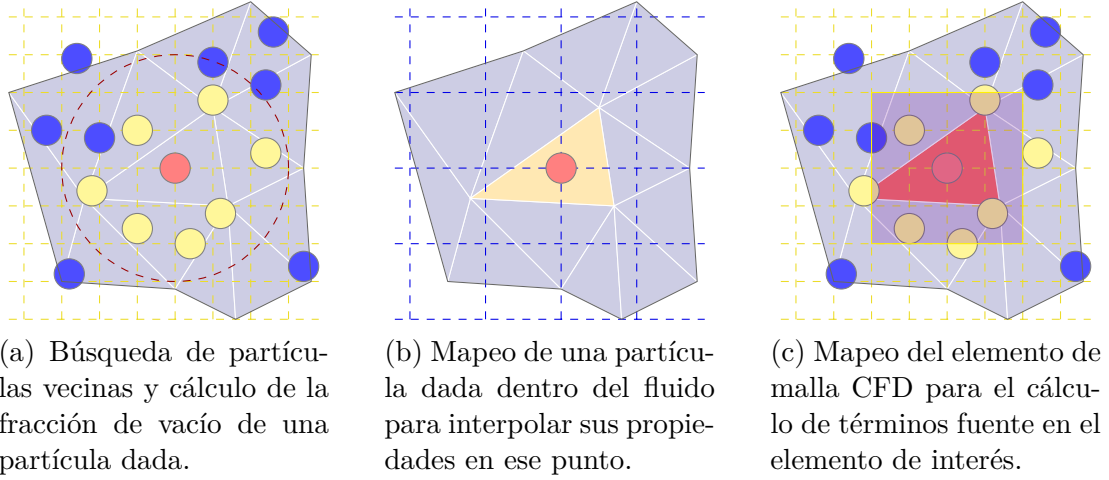


Figura 10: Esquema de la aproximación por malla dual para la búsqueda de partículas vecinas en un fluido.

malla CFD (detallado en la sección 2.4) y el cálculo de fuerzas de fluido, entre otras.

Para el cálculo de las fuerzas ejercidas por el fluido, se requiere conocer las propiedades del fluido en la posición de la partícula; incluyendo el gradiente de presión, la velocidad del flujo y el gradiente de velocidades (para fluidos gaseosos). Normalmente, las propiedades del fluido se ‘almacenan’ en el centroide de los elementos de malla durante cálculos mediante FVM, como se muestra en la Ecuación 11.

$$\phi_p = \phi_{el} + \nabla \phi_{el} \cdot r_{pc} \quad (11)$$

Dónde: ϕ_p y ϕ_{el} son las propiedades del fluido en la posición de la partícula y el centroide del elemento, respectivamente; y r_{pc} es el vector distancia que va desde el centro del elemento hasta la posición de la partícula.

5. Sedimentación

La sedimentación es uno de los procesos más antiguos en el tratamiento del agua y consiste en la deposición de materiales sólidos de mayor peso que el agua.

Existen cinco tipos de sedimentación que se clasifican de acuerdo a la clase de partículas, características superficiales y concentración de las mismas:

- Sedimentación *discreta*: las partículas no tienden a aglomerarse, mantienen su tamaño e individualidad. Son generalmente de textura arenosa.
- Sedimen *floculenta*: las partículas floculan y tienden a agruparse durante el proceso.
- Sedimentación *másica*: la concentración de partículas es tan grande que colisionan entre sí, sedimentando como una masa.
- Sedimentación por *compresión*: la concentración de partículas es tan grande que cada una reposa sobre la otra, presentándose una especie de soporte entre cada una de ellas; el peso de las partículas superiores tiende a compactar a las inferiores.
- Sedimentación de *alta tasa*: es una variación de la sedimentación discreta, en la que se insertan placas paralelas con el fin de aumentar la eficiencia de remoción de partículas.

La *sedimentación* realiza la separación de los sólidos más densos que el agua y la *filtración* separa aquellos que tienen una densidad muy cercana a la del fluido.

5.1. Sedimentación con coagulantes

Se efectúa la decantación de partículas en las cámaras de floculación; el tamaño y densidad de las partículas y viscosidad del agua desempeñarán un papel importante en el dimensionamiento de los sedimentadores. Las unidades podrán ser circulares o de flujo radial, cuadradas y rectangulares. Si los tanques sedimentadores se diseñan en dos o más pisos, podrán ser de flujos independientes o de flujo *zig-zag*, de manera que el flujo recorra todos los pisos de la unidad.

5.2. Sedimentadores de *placas paralelas*

Se trata de un tipo de sedimentador desarrollado por Hazen A, en 1904, quien expuso el siguiente principio: “como la acción de un tanque sedimentador depende de su área, y no de su profundidad, una subdivisión horizontal produciría una superficie doble para reunir sedimentos en lugar de una sencilla y duplicaría la cantidad de trabajo”.

La diferencia de los sedimentadores de tasa normal y los de alta tasa son:

- El fondo del decantador no es horizontal sino inclinado.
- La profundidad del decantador es baja, de forma que hay que construir un número considerable de celdas superpuestas para poder tratar los volúmenes de agua.
- El flujo **debe ser laminar**, con número de Reynolds entre 80 y 250.

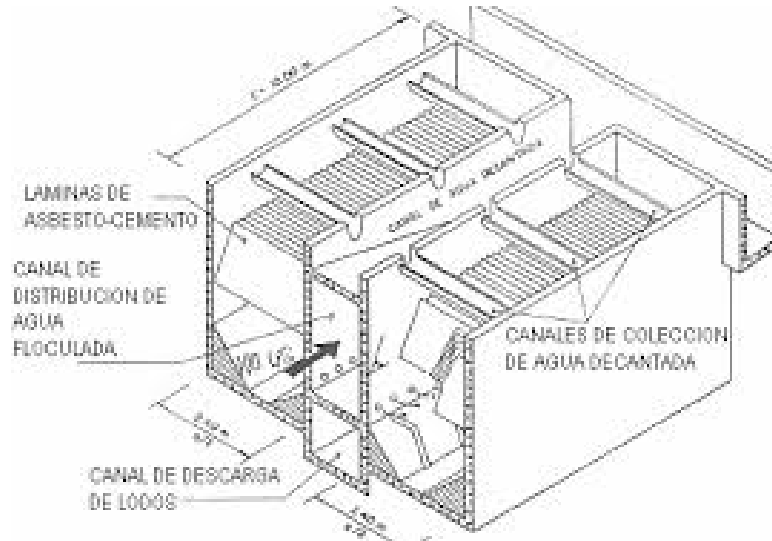


Figura 11: Sedimentador de placas paralelas.

Las placas presentan una inclinación, donde el agua ascendente deposita sobre ellas el material que trae en suspensión. Los lodos resbalan pendiente abajo, y pueden ser recolectados en una tolva en la parte inferior de la estructura.

$$V_s = \frac{V_0 S}{\sin \theta + \frac{L}{e} \cos \theta} \quad (12)$$

La Ecuación 12, para un determinado posicionamiento de las placas, permite determinar la velocidad requerida para conseguir una velocidad crítica. Es crucial mantener el número de Reynolds bajo para evitar que la turbulencia levante los lodos de la cara de las placas donde se está sedimentando.

5.3. Turbiedad

La turbidez es la expresión de la propiedad óptica de la muestra que causa que los rayos de la luz sean dispersados y absorbidos en lugar de ser transmitidos en línea recta a través de la muestra.

La turbiedad en el agua puede ser causada por la presencia de partículas suspendidas y disueltas de gases, líquidos y sólidos tanto orgánicos como inorgánicos.

La eliminación de la turbiedad se lleva a cabo mediante procesos de coagulación, asentamiento y filtración.

6. Etapa de elución y filtrado

Como se explicó en el capítulo 1, la etapa de elución y filtrado busca separar la fase sólida, compuesta por el material pulverizado, de la fase líquida que consiste de una mezcla homogénea entre el solvente y el extracto (producto final).

El *objeto* de la presente investigación consiste en el desarrollo de una metodología de diseño de esta etapa orientada a una planta de extracción piloto con capacidad de procesamiento de 20[kg] por lote que presenta las condiciones operacionales mostradas en el Cuadro 2.

Parámetro	Valor
Cantidad de material sólido a remover [kg]	80
Densidad media del material sólido [kg/m ³]	1700
Volumen de la mezcla [L]	200
Tamaño de partícula medio [μm]	250
Tipo de solvente	Mezcla agua - etanol (50 % volumétrico)
Temperatura del proceso [°C]	28
Tiempo del proceso [h]	1

Cuadro 2: Condiciones operacionales requeridas por el sistema de elución y filtrado.

El principio físico de separación de sustancias empleado por el sistema es la **sedimentación**, producida por la diferencia de densidades entre el material sólido a separar y el solvente; siendo el material sólido de mayor densidad que el líquido.

El diseño del sistema parte de las siguientes afirmaciones y suposiciones:

- El fenómeno a describir se trata de la *sedimentación discreta*; indicativo de que las partículas no tienden a aglomerarse y se desprecian los efectos de colisión entre ellas.
- Cada partícula se trata como un cuerpo esférico micrométrico de tamaño equivalente a 250[μm].

6.1. Naturaleza del flujo

Para asegurar el éxito del sistema de sedimentación, el flujo dentro del sistema no puede ser de carácter turbulento. Debido a ello, según Miguel Vire ("*Diseño de la planta de potabilización del agua*"), se asume regimen laminar; cuya velocidad de flujo se determina a través de la Ecuación 13.

$$V_{laminar} = \frac{g}{18} (S_s - 1) \left(\frac{d_{particula}^2}{\mu} \right) \quad (13)$$

Dónde: $V_{laminar}$ es la velocidad del flujo laminar, S_s es una constante, $d_{particula}$ es el diámetro de una partícula y μ es el valor de la viscosidad cinemática del fluido.

El número de Reynolds caracteriza la naturaleza de un flujo y se calcula con base en la siguiente relación matemática.

$$Re = \frac{V_{laminar} d_{particula}}{\mu} \quad (14)$$

Con base en la Ecuación 14, el número de Reynolds tiene un valor de 3,625; valor superior a 1,0 e inferior a 1000. Indicativo de que el flujo no es de carácter laminar ni turbulento, encontrándose en el **régimen de transición**.

6.2. Parámetros operacionales

Al encontrarse el flujo en régimen de transición, la velocidad de flujo se calcula a partir de la Ley de Allen, mostrada en la Ecuación 15.

$$V_{transicion} = 36 \sqrt{(S_s - 1) \frac{d_{particula}}{C_D}} \quad (15)$$

En donde C_D es una constante que se calcula de la siguiente forma:

$$C_D = \frac{24}{Re_{corregido}} + \frac{3}{\sqrt{Re_{corregido}}} + 0,34 \quad (16)$$

A partir de las características de las partículas y del agua, se obtienen las constantes K_1 y K_2 de la Figura 12; en donde $X_1 = K_1 d$. De modo que:

$$\left(\frac{g (S_s - 1)}{\mu^2} \right)^{1/3} = K_1$$

$$[g (S_s - 1) \mu]^{1/3} = K_2$$

Se calcula una velocidad de transición *corregida* para la determinación del número de Reynolds que se calcula de la siguiente forma:

$$V_{corregida} = X_2 K_2$$

$$Re_{trans} = \frac{V_{corregida} d_{particula}}{\mu} \quad (17)$$

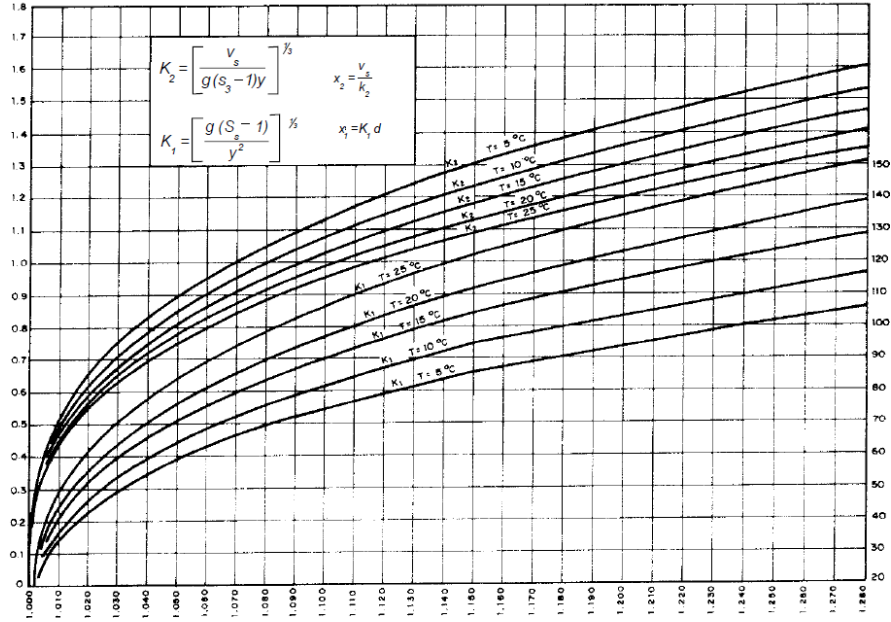


Figura 12: Velocidad de asentamiento de partículas discretas en un fluido estático.

El número de Reynolds de transición presenta un valor de 2,858 con una velocidad de 1,446[cm/s].

6.3. Dimensionamiento

El sistema de filtrado se trata de un equipo sedimentador de placas planas paralelas inclinadas a 60°. La velocidad crítica de sedimentación de las partículas se calcula a partir de la Ecuación 18 (fórmula de Yao), la cual define el valor de la velocidad mínima requerida para que una partícula se sedimente.

$$V_{sc} = \frac{S_c V_0}{\sin \theta + L_{rel} \cos \theta} \quad (18)$$

De la Ecuación 18, S_c es una constante de sedimentación cuyo valor es 1 para sistemas de *placas paralelas*, V_0 es la magnitud de la velocidad del flujo, L_{rel} es la relación entre la longitud de una lamela y el ancho de la misma; y θ es el ángulo de inclinación de las placas.

La relación entre el ancho e del conducto y la longitud L tiene una importancia especial en la eficiencia del sedimentador. Si esta relación L_{rel} es muy pequeña, cada sedimentador actúa como un sedimentador horizontal corriente de baja velocidad. Debido a que la eficiencia varía lentamente para una $L_{rel} > 20$, se toma un valor de 20.

Para que un sedimentador pueda trabajar con alta velocidad, es necesario que exista flujo laminar en las celdas, esto es que el número de Reynolds sea inferior a 250. Cualquier turbulencia puede generar arrastre de partículas, bajando notoriamente la eficiencia; razón por la que se emplea como criterio principal de diseño.

$$N_R = \frac{V_0 4R_h}{\mu} \quad (19)$$

En dónde R_h es el radio hidráulico, cuyo valor está definido por la Ecuación 20.

$$R_h = \frac{b e}{2(b + e)} \quad (20)$$

De la Ecuación 20: b es el ancho de la lamela y e el largo de la misma. Dimensiones que definen el área transversal de una lamela.

A partir de un proceso iterativo, se obtuvo que las mejores dimensiones son: $b = 30[cm]$ y $e = 2[cm]$; lo que se traduce en un número de Reynolds de 89,69 (régimen laminar).

6.3.1. Panel de lamelas

La mejor relación de eficiencia referente al número de lamelas está entre 5 y 8 lamelas, por lo que se escoge desarrollar el proceso de diseño con 6 lamelas en el panel; seleccionando láminas de calibre 24 para su construcción.

El distanciamiento horizontal entre lamelas se calcula de la siguiente forma:

$$e_x = \frac{e}{\sin \theta} \quad (21)$$

Obteniendo un distanciamiento de $2,31[cm]$. El ancho total del panel se puede calcular a través de la Ecuación 22.

$$P_{ancho} = e_x(N_{lamelas} - 1) + t_{lamela} N_{lamelas} + L_{lamela} \cos \theta \rightarrow P_{ancho} = 34,68[cm] \quad (22)$$

El alto del panel se calcula de la siguiente forma:

$$P_{alto} = L_{lamela} \sin \theta \rightarrow P_{alto} = 39,45[cm] \quad (23)$$

La profundidad del panel es equivalente al ancho de la lamela: $30[cm]$.

6.4. Método de Hazen → tiempo de sedimentación

El concepto de carga hidráulica superficial (parámetro de Hazen) compara la velocidad de sedimentación de la partícula para conocer si alcanza a sedimentarse durante el trayecto por el sistema. La *altura* de sedimentación requerida se calcula mediante la Ecuación 24.

$$H_{sedimentacion} = \frac{e}{\cos \theta} \quad (24)$$

La altura de sedimentación requerida es de 4[cm] (distanciamiento vertical entre lamelas), cuyo tiempo de sedimentación se calcula a través de la siguiente relación matemática:

$$t_{sed} = \frac{H_{sedimentacion}}{V_{corregida}} \quad (25)$$

De acuerdo a la Ecuación 25, se requieren de 2,767[s] para sedimentar las partículas dentro de cada celda.

6.5. Tamaño de partícula mínima

El tamaño de partícula *mínima* se calcula a través de la Ecuación 26.

$$V_{sc} = 0,22 \left[g \left(\frac{\rho_{solido} - \rho_{fluido}}{\rho_{fluido}} \right) \right]^{2/3} \frac{d_{particula}}{\sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho_{fluido}}}} \quad (26)$$

De esta manera, se concluye que el sistema diseñado está capacitado para retirar partículas de hasta 40[μm]. La eficiencia del sistema se calcula a través de la siguiente relación matemática:

$$Ef = 1 - \frac{V_{sc}}{V_0} \quad (27)$$

Obteniendo un valor cercano al 91 %.

6.6. Resultados

En resumen, los resultados del proceso de diseño funcional del sistema se pueden apreciar en el Cuadro 3.

Parámetro	Valor
Caudal [m^3/h]	0,3
Tiempo [h]	1
Altura lamela [cm]	40
Ancho lamela [cm]	36
Tamaño de partícula mínima [μm]	40
Eficiencia general del sistema	91 %

Cuadro 3: Resumen de resultados.

7. Modelo CFD-DEM

El modelo CFD-DEM consiste de una metodología de cálculo, a través de los métodos numéricos de volúmenes finitos (FVM) y elementos discretos (DEM), que busca predecir el comportamiento dinámico de las partículas en un medio fluido.

La metodología se resume en lo siguiente:

1. Definición de la geometría del problema.
2. Mallado de la geometría para el análisis fluidodinámico mediante CFD.
3. Definición de las condiciones de frontera.
4. Desarrollo de la simulación CFD - DEM.
5. Postprocesamiento y presentación de resultados.

Se desarrolló un algoritmo a través de herramientas de *código abierto*: Python como lenguaje base; Jupyter como entorno de desarrollo; OpenFOAM y Yade para el desarrollo las simulaciones numéricas; y ParaView como entorno de presentación de resultados de post-procesamiento.

7.1. Geometría

Para la definición de la geometría, se desarrolló una metodología de cálculo teórico automático en Python - Jupyter para diferentes problemas de interés, conforme a la metodología planteada en el Capítulo 6.

El diámetro de la entrada de la mezcla *solvente - material pulverizado* está definido por la Ecuación 28.

$$D_I = \frac{4Q_T}{Re \pi \mu} \quad (28)$$

En dónde: D_I es el diámetro de ingreso de la mezcla sólido - líquido, Q_T es el caudal del problema, Re es el número de Reynolds y μ es la viscosidad cinemática del fluido.

Con base en los resultados mostrados en el Cuadro 3, el diámetro de ingreso tiene un valor de 27[cm]. La geometría con la que se desarrolla el presente modelo se puede apreciar en la Figura 13.

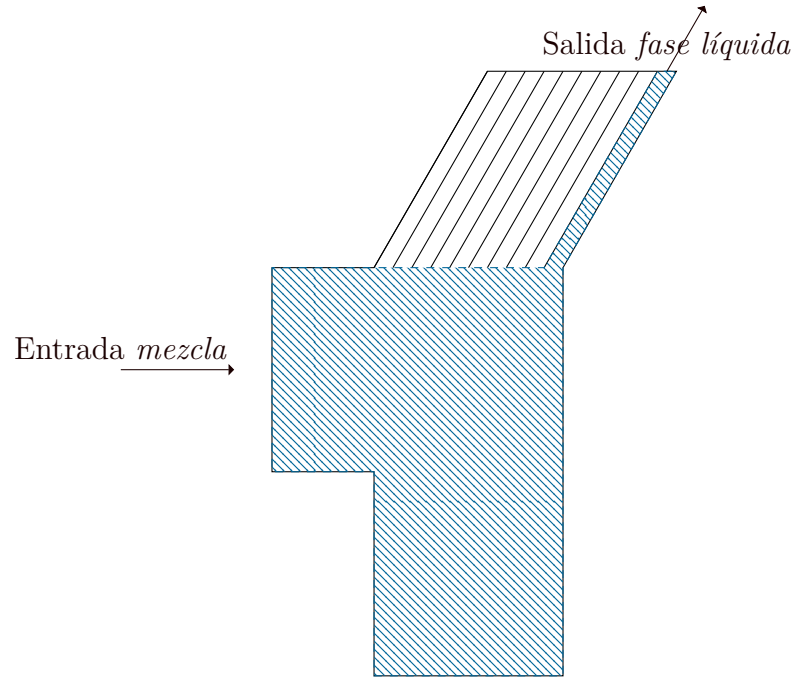


Figura 13: Vista en corte de la geometría del panel de lamelas.

De la Figura 13, el área sombreada corresponde a la geometría de análisis, en donde se observa: una zona de *entrada* de la mezcla sólido - líquido; una de *salida* (al final de la superficie inclinada), en donde se espera obtener la *fase líquida* de la mezcla; y un área de depósito de lodos, localizada en la parte inferior de la geometría, en donde se deposita el material particulado.

7.2. Mallado

Gran parte del éxito de las simulaciones numéricas recaen en la discretización del dominio y en la calidad de los elementos que la componen. Se desarrolló una metodología de mallado automático con base en el lenguaje *gms* tomando como variables de entrada las dimensiones de la geometría definida en la sección 7.1. Esta metodología emplea elementos de diferentes tamaños y permite también definir su naturaleza (rectangulares o triangulares).

El algoritmo ejecuta, además, un refinamiento automático en la zona en donde ocurre el mayor grado de sedimentación: en la superficie inclinada, como se aprecia en la Figura 14.

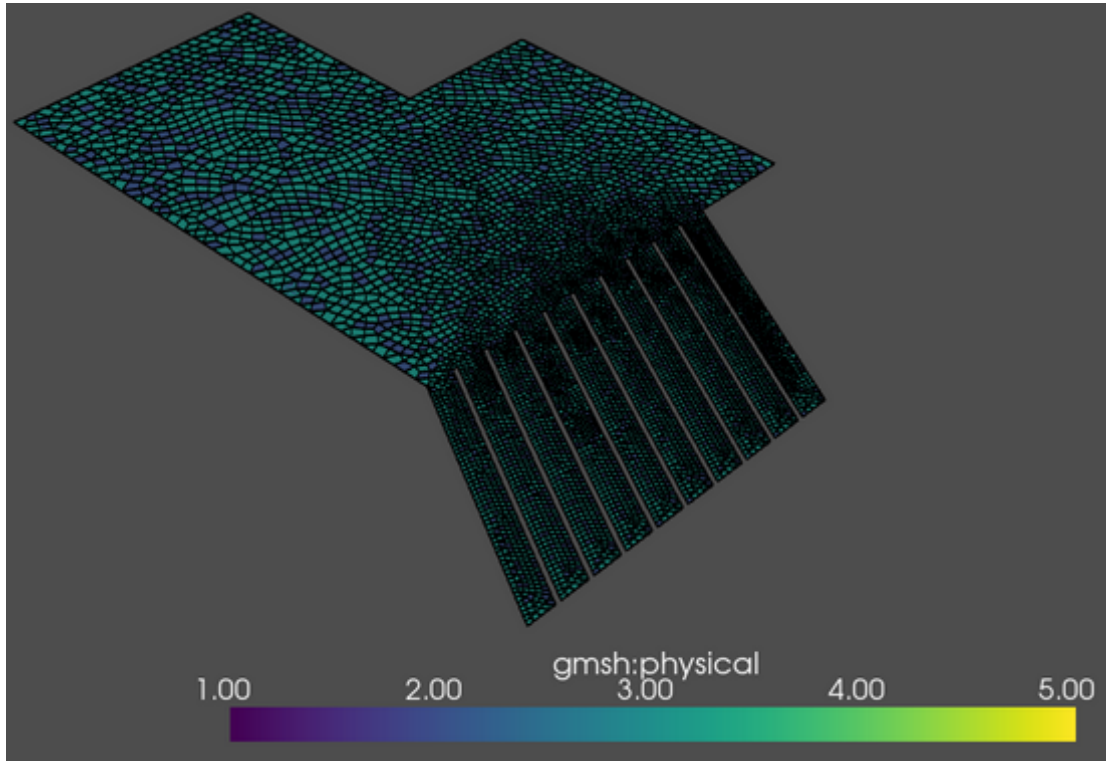


Figura 14: Mallado de la geometría.

La malla mostrada en la Figura 14 presenta las siguientes características:

Parámetro	Valor
Tipo de elementos	Rectangulares
Número de elementos	20415
Número de nodos	13692

Cuadro 4: Datos de la malla generada.

Al emplear el método `checkMesh` de OpenFOAM para el análisis preliminar de malla, se obtuvieron los siguientes resultados:

Parámetro	Valor
Apertura <i>máxima</i> entre elementos	11.45
Checkeo de <i>no</i> ortogonalidad	OK
Oblicuidad máxima	0.66 OK
Conclusión de malla	OK

Cuadro 5: Resumen de resultados sobre el checkeo de malla.

A partir de los resultados mostrados en el Cuadro 5, se concluye que la malla es óptima para el desarrollo de las simulaciones numéricas consecutivas.

7.3. Condiciones de frontera

La mezcla sólido-líquida en la entrada presenta un caudal de $0,3 [m^3/h]$. Los muros se consideran como superficies no deslizantes para la fase líquida. La temperatura es constante durante todo el proceso e igual a $27[^\circ C]$. En el tiempo $t = 0$, las partículas sólidas esféricas se generan en una región lineal, como se aprecia en la Figura 15.

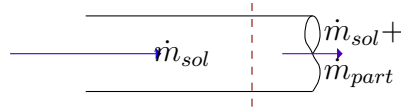


Figura 15: Zona de generación de partículas en la tubería de entrada.

De la Figura 15: \dot{m}_{sol} se refiere al flujo másico de solvente, \dot{m}_{part} es el flujo másico de partículas generadas y las líneas punteadas representan la zona de generación.

Las condiciones de frontera se resumen en la Figura 16.

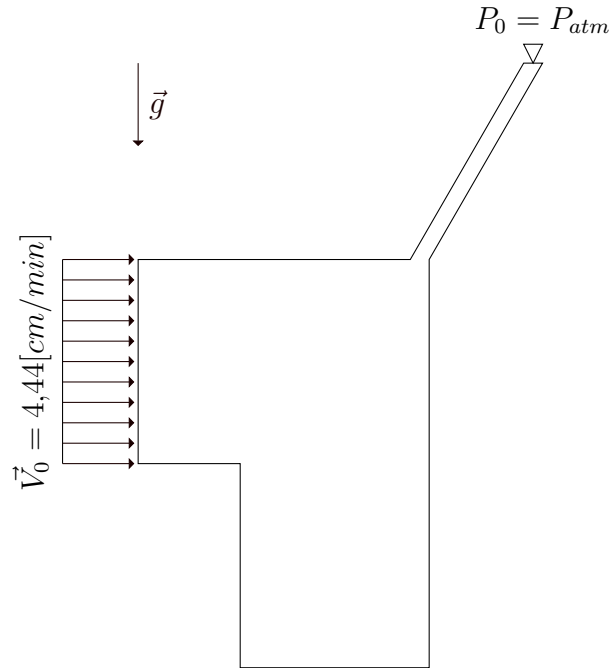


Figura 16: Condiciones de frontera.

Zona	Propiedad	Valor	Tipo
<i>Entrada</i>	Velocidad [cm/min]	4,44	Neumann
<i>Salida</i>	Presión [KPa]	101,325	Dirichlet

Cuadro 6: Clasificación de las condiciones de frontera.

La clasificación de las condiciones de frontera se puede apreciar en el Cuadro 6.

Al tratarse de una simulación 2D, se emplean condiciones de *no deslizamiento* en las zonas de “muro” y en las caras frontal y posterior de la geometría se consideran superficies vacías (“empty”).

7.4. Desarrollo de la simulación

La simulación numérica a realizar comprende **dos** métodos numéricos: el método de *volúmenes finitos* (FVM, por sus siglas en inglés), con el cual se predice el comportamiento fluidodinámico dentro del volumen de control, y el método de *elementos discretos* (DEM, por sus siglas en inglés) con el que se predice el comportamiento dinámico de las partículas sólidas y su interacción con el solvente.

7.4.1. CFD

La *Dinámica de Fluidos Computacional* (CFD) es una herramienta ampliamente usada en ingeniería para el desarrollo de simulaciones numéricas que involucren fluidos. Emplea como método base el método de volúmenes finitos (FVM). Este método numérico transforma las ecuaciones diferenciales parciales, que representan las leyes conservativas, en ecuaciones algebraicas discretas sobre volúmenes finitos.

Desde un punto de vista de *mecánica de fluidos computacional*, el presente problema busca estudiar un flujo con las siguientes características:

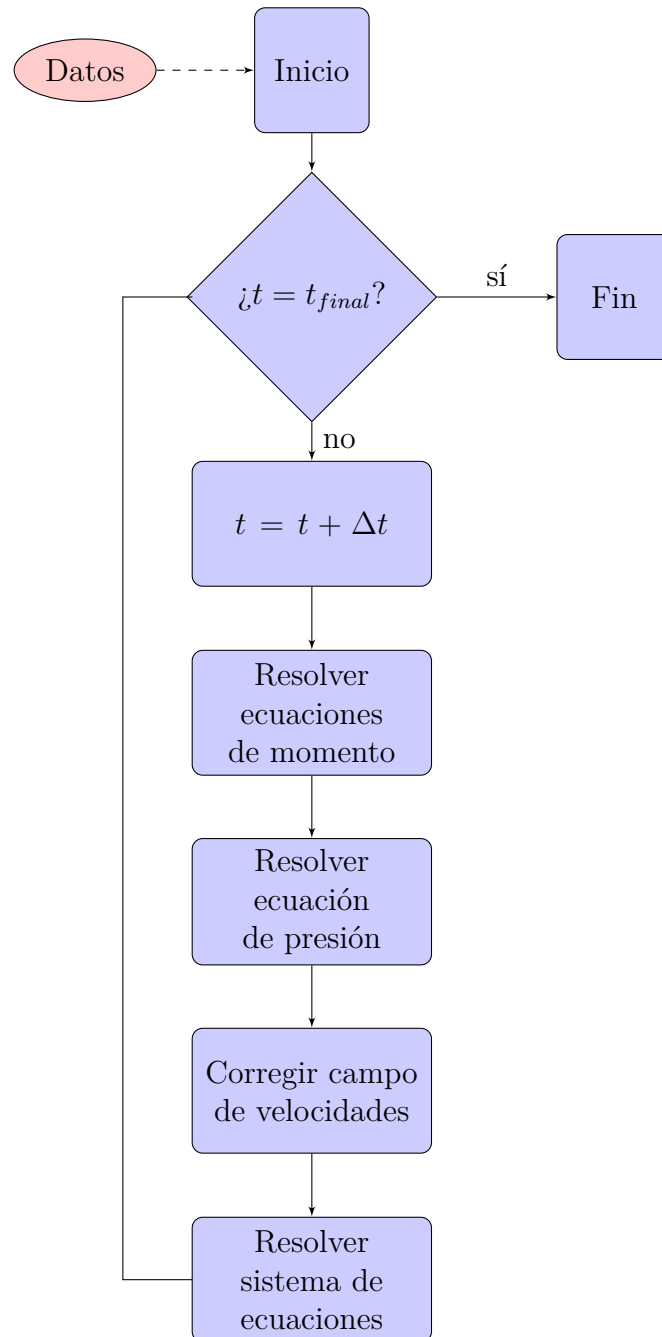
- Laminar.
- Incompresible.
- Transitorio.
- Fluido newtoniano.

Tratándose, además, de un problema *bidimensional*, que matemáticamente hablando se refiere a lo siguiente:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y}}_{\text{convectivo}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}_{\text{difusivo}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{fuente}} \quad (9)$$

De la gama de solucionadores estándar que maneja OpenFOAM, existen dos que pueden resolver el sistema de ecuaciones de la Ecuación 9: `icoFoam` y `pimpleFoam`. Para la solución del modelo CFD-DEM, se seleccionó un solucionador basado en *pimpleFoam* debido a que existe la posibilidad de generación de turbulencia a ciertas velocidades de flujo del sistema en la interacción fluido-partícula.

La lógica de solución detrás de `pimpleFoam` se puede apreciar en la Figura 17.

Figura 17: Diagrama de flujo del solucionador `pimpleFoam`.

7.4.1.1. Resultados

Los resultados de la simulación numérica mediante el método de *volúmenes finitos* se puede apreciar en las Figuras 18 y 19.

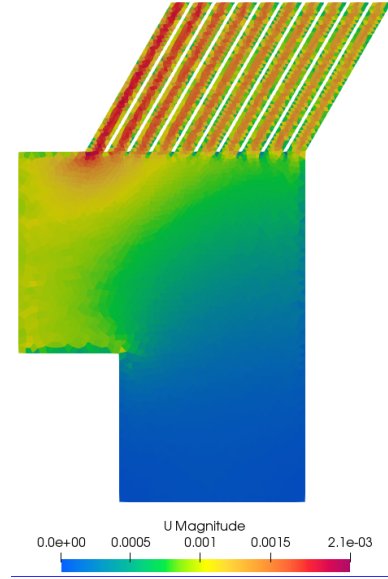


Figura 18: Diagrama de contorno de la distribución de velocidades del sistema de sedimentación.



Figura 19: Diagrama de contorno de la distribución de presiones del sistema de sedimentación.

7.4.1.2. Análisis de resultados

La simulación numérica, desarrollada en OpenFOAM, encontró su punto de equilibrio (punto *estacionario*) al cabo de ocho segundos de simulación; cuyos resultados, en términos de velocidad y presión, pueden apreciarse en las Figuras 18 y 19, respectivamente.

En la Figura 18 se observa un valor de velocidad máxima de $0,0021[m/s]$ que es alcanzada en la primera lamela y decrece en las lamelas consecuentes hasta un valor cercano de $0,0015[m/s]$; fenómeno físico que va acorde a la realidad por tratarse de flujos en serie.

En la Figura 19 se puede apreciar el perfil de presiones sobre el sistema; en donde se presenta un comportamiento uniforme y simétrico alcanzando un valor de presión máxima de hasta $0,000012[kPa]$. Como era de esperarse, las condiciones de frontera establecidas en la sección 7.3 fueron respetadas: en la salida del flujo se aprecia una presión de 0 (atmosférica) y la velocidad de flujo en la entrada es de $0,00097[m/s]$.

7.4.2. CFD-DEM

El acoplamiento entre CFD (“*Computational Fluid Dynamics*”) y DEM (“*Discrete Element Method*”) busca predecir la interacción fluido-partícula. El flujo se resuelve a través de CFD basado en malla (ver sección 7.4.1), mientras que la fase sólida es modelada mediante DEM para cada partícula sujeta a través de fuerzas hidrodinámicas, fuerzas de cuerpo (como la gravedad) y a través de fuerzas de contacto; actualizando valores de velocidad y posición conforme a la segunda ley de Newton (Hoomans *et al.*, 1996; Tsuji *et al.*, 1993; Xu y Yu, 1997).

La tasa de partículas debido a la sedimentación, a través de canales inclinados, ha sido ampliamente estudiado debido al reconocido *efecto Boycott*^[?]. Este fenómeno se produce por el incremento en el área efectiva de sedimentación debido a la presencia de placas inclinadas^[?]. Acrivos *et al.* han desarrollado una serie de planteamientos teóricos y experimentales entre la tasa de sedimentación de partículas y el área efectiva de sedimentación. El efecto Boycott ha sido aplicado con éxito en diversos procesos industriales para la remoción de partículas en lecho de fluidizado a través del asentamiento gravitacional; entre los principales ejemplos de este hecho se encuentran: tratamientos de aguas residuales^[?] y procesos de filtrado de agua^[?].

El acercamiento experimental para la investigación característica de partículas en suspensión a alta concentración ha demostrado ser una experiencia retadora debido a las limitantes instrumentales y técnicas de medición^[?]. Los modelos

numéricos basados en CFD han demostrado ser una herramienta poderosa y promisoría que provee información detallada y precisa sobre las características locales del flujo particulado. Normalmente, se han aplicado dos enfoques generales en la literatura para resolver problemas que involucran flujo particulado: *Eulerian - Eulerian* (E-E) y *Eulerian - Lagrange* (E-L). En el enfoque E-E, las fases sólida y fluida son interpretadas de manera continua en donde comparten el mismo grupo de ecuaciones gobernantes. Doroodchi *et al.*^[?] emplearon el modelo E-E para investigar la influencia de las placas inclinadas y el efecto expansivo de sólidos en suspensión en camas de lecho fluidizado; obteniendo resultados prometedores tanto en la parte experimental como numérica. Salem *et al.*^[?] desarrollaron un modelamiento en CFD empleando el modelo E-E para evaluar las características hidráulicas de un sedimentador de placas hidráulicas (IPS, por sus siglas en inglés); demostrando el importante rol que cumplen las herramientas computacionales en el estudio de los sistemas de sedimentación. Sin embargo, el tratamiento de la fase sólida de manera continua va en contra de la naturaleza discreta de las partículas sólidas, y todavía más importante: el acercamiento a través de E-E carece de facultades numéricas para revelar información importante referente a la escala particular.

El enfoque otorgado por el modelo E-L, por otro lado, adopta la teoría continua para la fase líquida y resuelve el problema cinemático de cada partícula individual **directamente**. Información referente a la posición, velocidad, fuerza hidrodinámica y difusividad, entre otros, se pueden obtener para cualquier instante de tiempo. Teniendo así el potencial de sobrellevar las dificultades y limitaciones existentes en modelos teóricos y empíricos. Es debido a ello que en el *presente trabajo* se emplea un enfoque E-L para abordar el problema CFD-DEM; investigando la interacción fluido - partícula en un sistema de sedimentación con canales (lamelas) inclinadas.

7.4.2.1. Planteamiento numérico

El flujo del modelo CFD-DEM se resuelve a través de las ecuaciones de momento, continuidad y a través de las ecuaciones de movimiento de cada partícula individual, seguidas a través del método de elementos discretos. Se consideraron los efectos e interacciones entre partícula-partícula (ver Figura 20), partícula-fluido y partícula-muro. Las ecuaciones gobernantes y la metodología numérica empleada se describe brevemente a continuación.

En DEM, no se requiere de un *cierre* para la fase sólida dado que la dinámica de la partícula se resuelve de manera directa. La traslación y rotación de la partícula i está dada por las Ecuaciones 29 y 30.

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_{c,i} + F_{f,i} + F_{g,i} \quad (29)$$

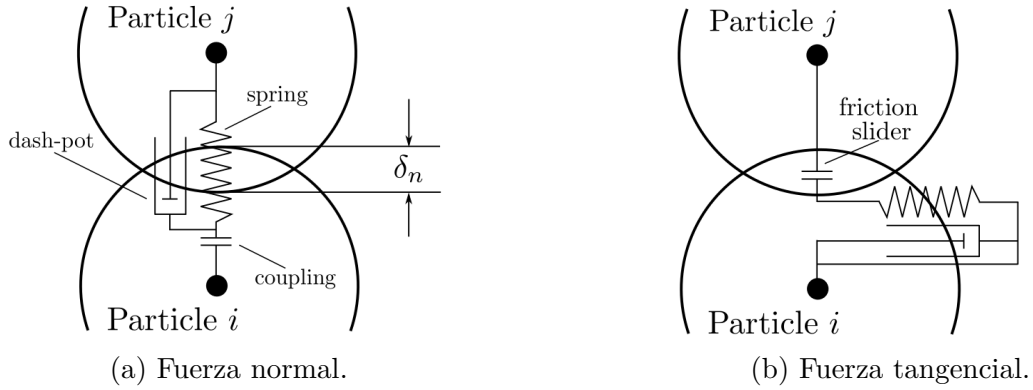


Figura 20: Interacción dinámica entre partículas.

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} = T_{c,i} + T_{r,i} \quad (30)$$

Las fuerzas de impacto ($F_{c,i}$) y el torque de contacto ($T_{c,i}$) fueron calculados por el modelo lineal resorte-dashpot en el que se tuvo en cuenta el efecto histerético causado por el historial de contacto de la partícula. La resistencia a la rodadura se calculó empleando la Ecuación 31.

$$T_{r,i} = - \sum_{j=0}^{N_{pc}} \mu_{rol} |F_{cn,ij}| \frac{\omega_{ij}}{|\omega_{ij}|} r_i \quad (31)$$

Dónde ω_{ij} es la velocidad angular relativa entre las partículas i y j ; y está definida a través de la Ecuación 32.

$$\omega_{ij} = \frac{\omega_i r_i + \omega_j r_j}{r_i + r_j} \quad (32)$$

La fuerza total actuante del fluido $F_{f,i}$ causada por la distorsión de las líneas de corriente alrededor de la partícula, que a su vez produce variación en el tensor de esfuerzos del fluido, se calcula mediante la Ecuación 33.

$$F_{f,i} = -V_i \nabla p + V_i (\nabla \cdot \tau_f) + \epsilon F_{d,i} \quad (33)$$

Dónde τ_f es el tensor de esfuerzos viscoso del fluido; que se calcula de la siguiente manera:

$$\tau_f = \mu_L \left[(\nabla u_L) + (\nabla u_L)^{-1} \right] + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \cdot u_L) \bar{I} \quad (34)$$

La fuerza de arrastre $F_{d,i}$ del fluido, de la Ecuación 33, se resuelve a una escala longitudinal mayor que el tamaño de la partícula y está dada por la siguiente relación matemática:

$$F_{d,i} = \frac{V_i}{1 - \epsilon} \beta (u_L - v_i) \quad (35)$$

7.4.2.2. Resultados

Para la definición de la interacción partícula-partícula, fluido-partícula y partícula-muro se emplearon los datos contenidos en el Cuadro 7.

Parámetro	Valor
Generales	
Material	Arena de río
Tamaño de partícula [μm]	250
Módulo de Young	10^6
Número de partículas por segundo	22300
Velocidad inicial [m/s]	0,0097
$\rho[kg/m^3]$	1600
ν	0,2
Coefficientes de par de resorte Dashpot	
α	0,12
μ	0,52
Pasos de resolución de colisión	12

Cuadro 7: Datos generales para el desarrollo de la simulación CFD-DEM.

La simulación numérica desarrollada permitió observar el comportamiento dinámico entre las partículas y el solvente; desarrollándose el fenómeno de sedimentación desde la entrada de material debido a la baja velocidad de flujo. El diagrama de contorno de velocidades del sistema se puede apreciar en la Figura 21.

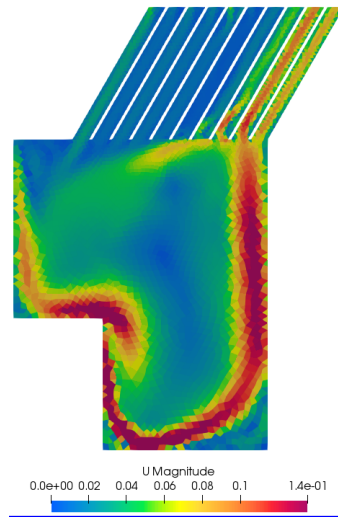


Figura 21: Diagrama de contorno de velocidades del sistema.

El diagrama de contorno de presiones del sistema de sedimentación se puede apreciar en la Figura 22.

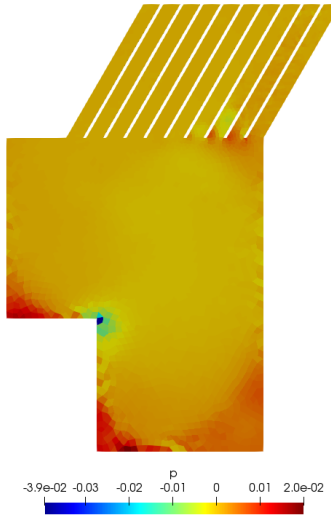


Figura 22: Diagrama de contorno de presiones del sistema de separación de sustancias.

Durante la simulación, en el que se analizaron 30[s], se apreció el desarrollo de vórtices y remolinos debido al reflujo de las partículas, como se aprecia en la Figura 23.

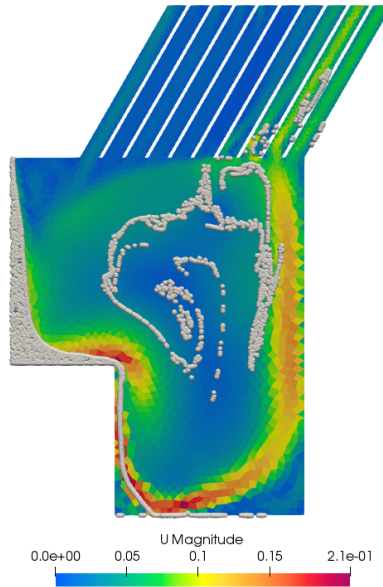


Figura 23: Distribución de partículas de arena sobre el volumen de control durante el segundo 28 de la simulación.

7.4.2.3. Análisis de resultados

Comparando las Figuras 18 y 21, se puede apreciar cómo el solvente cambia la distribución de velocidades por la sedimentación sufrida por las partículas de arena, cuya densidad es mayor que la del fluido circundante; razón por la que el solvente tiende a moverse con mayor velocidad en las últimas lamelas en lugar de las primeras, a diferencia de lo observado en la sección 7.4.1.1.

Diferente al fenómeno apreciado en la Figura 19, la distribución de presiones en la Figura 22 no es simétrica y tiende a presentar sus máximos valores en la zona de congregación de los sedimentos.

La presencia de vórtices y remolinos en la simulación CFD-DEM rectifica la decisión de haber empleado un solucionador basado en `pimpleFoam`, el cual se adaptó para resolver el problema *Euler - Lagrange* (E - L).

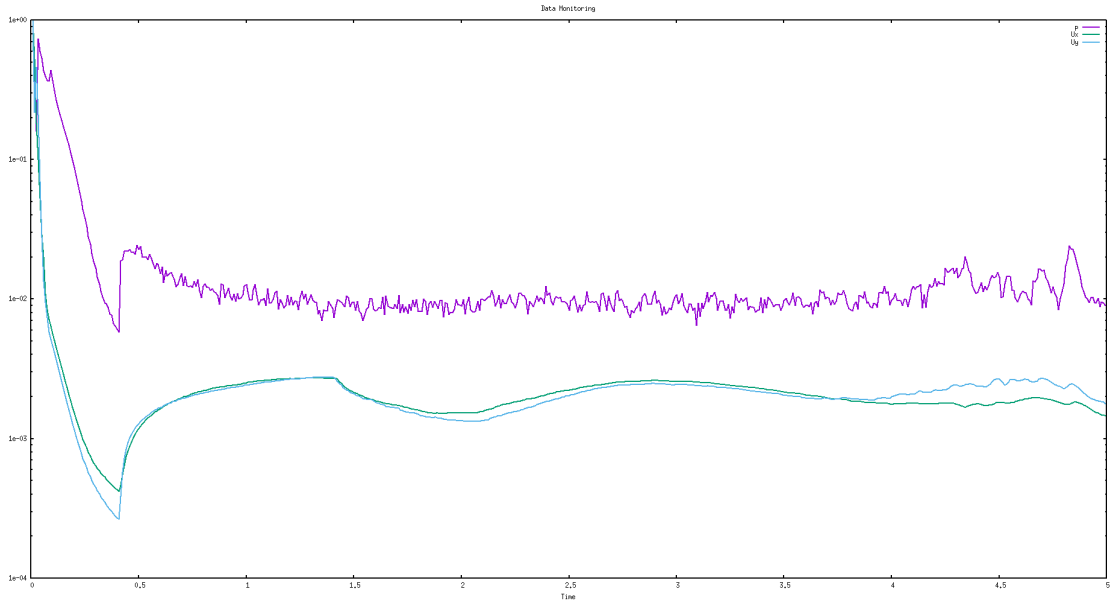


Figura 24: Monitoreo de residuales en la simulación CFD-DEM.

De la Figura 24, la línea morada corresponde al residual de la presión, la de color cian al residual de la velocidad en y y la de color verde al residual de la velocidad en x . El comportamiento de los residuales está directamente relacionado con la magnitud de los errores en la solución de las ecuaciones gobernantes. Debido al hecho de que tienden a aglomerarse en valores cercanos a cero, son un indicativo de alta precisión del modelo numérico implementado. Las variaciones vistas en los residuales de presión se deben a la vorticidad originada por los reflujos consecuentes a la interacción fluido - partícula. Durante la simulación, se observó una estabilización en los perfiles de velocidad; razón por la que los residuales U_x y U_y presentan un comportamiento “suave” y con pequeñas variaciones durante el desarrollo del flujo dentro del volumen de control.

8. Validación del modelo

Para la validación del modelo CFD-DEM desarrollado, se aplicó el modelo para resolver el problema de Fessler & Eaton^[4], en donde se investigó el efecto de la turbulencia generada por partículas de cobre de $70[\mu m]$ de diámetro sobre un flujo orientado hacia atrás, como se muestra en la Figura 25.

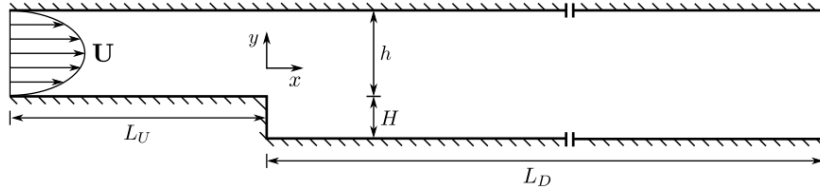


Figura 25: Geometría de estudio.

8.1. Descripción del problema

En 1999, Fessler & Eaton estudiaron el efecto de partículas de vidrio y cobre de distintos tamaños (70 , 90 y $150[\mu m]$ de diámetro), a diferentes cargas másicas (entre el 3 y el 40% del flujo másico) y a las mismas condiciones experimentales de velocidad y presión de flujo en donde se apreció una atenuación del nivel de turbulencia relacionada con un decaimiento en el número de Stokes de las partículas.

La motivación detrás de esta investigación recae en la complejidad de las interacciones entre partículas pequeñas y densas con la fase turbulenta de una sustancia gaseosa; además de la importancia en diferentes casos, de carácter industrial y natural, en donde se producen flujos particulados que son, muchas veces, inentendidos. En pocos aspectos, tales como la dispersión de partículas en flujos homogéneos, se pueden llevar a cabo estudios analíticos con altos niveles de precisión. Sin embargo, la mayoría de los casos en la realidad comprenden flujos heterogéneos y anisotrópicos sujetos a inestabilidades, con marcadas variaciones entre flujo y flujo, que imposibilitan el desarrollo de un modelo matemático analítico que defina a cabalidad la naturaleza de los flujos y que sea, a su vez, lo suficientemente preciso.

Se ha reportado en la literatura que los niveles de turbulencia pueden ser moderados con la ayuda de la carga de diferentes masas. Investigaciones como la de Hetsroni^[11] y Gore & Crowe^[12] establecieron los cimientos del comportamiento turbulento en la interacción fluido - partícula; mientras que en investigaciones desarrolladas por Kulick, Fessler & Eaton^[13] y Tsuji, Morikawa & Shiomi^[14] se demostró que la atenuación de la turbulencia incrementa tanto con la carga másica como con el número de Stokes de las partículas.

En el presente estudio se investigó el comportamiento de las partículas sobre un flujo *orientado hacia atrás* (Figura 25). Este flujo es ideal para el estudio de la interacción partícula-turbulencia debido a que las estadísticas del flujo medio son conocidas como *invariables* debido a la presencia de partículas sólidas^[13]; hecho esencial que garantiza que los cambios en la turbulencia se deben únicamente a la presencia de material particulado, dado que los flujos separados son sensibles al perfil de velocidad media. En este trabajo se emplearon partículas de vidrio de 90 y 150[μm] de diámetro y partículas de cobre de 70[μm]; que proveen dos diferentes partículas con números de Stokes distinto y tres diferentes valores de Reynolds.

Parámetro	Valor
Altura H	26,7[mm]
Rango de expansión	5:3
Relación de aspecto	17:1
Velocidad inicial U_0	9,39[m/s]
$Re_H = \frac{U_0 H}{\mu}$	18400
τ_f , gran escala de tiempos de remolino, $\frac{5H}{U_0}$	12,7[ms]

Cuadro 8: Parámetros del flujo.

8.2. Desarrollo experimental

El flujo sufre una expansión unidireccional en donde se evita la sedimentación de partículas. El número de Reynolds de la entrada fue de 13800 con una velocidad en la línea central de 10,5[m/s]. El rango de expansión fue de $\frac{5}{3}$; mientras que la relación de aspecto es de 17:1. Hecho que garantiza un flujo bidimensional a través de una porción importante del experimento.

El condicionamiento del flujo de entrada, el flujo de salida y el sistema de alimentación de partículas se ilustra en la Figura 26. El sistema provee velocidad de flujo uniforme con carga de partículas en la entrada. Un canal de 5,2[m] asegura el completo desarrollo del flujo y contempla el tiempo suficiente para que las partículas lleguen al equilibrio con el medio circundante. Se empleó un ventilador, con frecuencia variable, como sistema de control másico.

8.2.1. Descripción particular

El número de Reynolds que define el movimiento particular está definido por la Ecuación 36.

$$Re_p = \frac{d_p U_{rel}}{\mu} \quad (36)$$

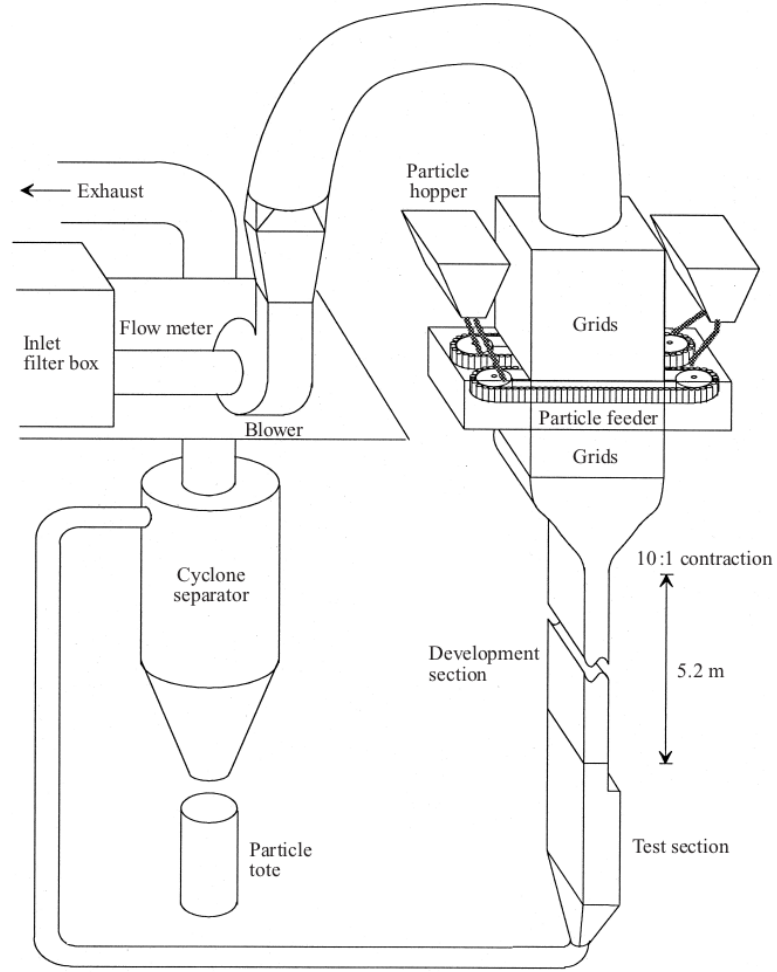


Figura 26: Esquema del montaje experimental^[4].

De la Ecuación 36: d_p es el diámetro de la partícula, μ es la viscosidad cinemática y U_{rel} es la escala de velocidad que caracteriza la velocidad de deslizamiento medio de la partícula sobre el flujo.

El número de Stokes es la relación entre el tiempo de respuesta de las partículas con respecto a la escala de tiempo representativa en el flujo.

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f} \quad (37)$$

Para partículas pequeñas con números de Reynolds despreciables, Stokes (1851) demostró que la constante de tiempo particular se define con base en la Ecuación 38.

$$\tau_{p,Stokes} = \frac{(2\rho_p + \rho_f) d_p^2}{36\mu} \quad (38)$$

El coeficiente de arrastre C_D , para números de Reynolds superiores a 700, puede calcularse con base en la Ecuación 39.

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left(1 + 0,15 Re_p^{0,687} \right) \quad (39)$$

El incremento en el coeficiente de arrastre como el del número de Reynolds disminuirá la constante de tiempo particular; de modo que la constante de tiempo modificada empleada en este estudio se puede apreciar en la Ecuación 40.

$$\tau_p = \frac{\tau_{p,stokes}}{1 + 0,15 Re_p^{0,687}} \quad (40)$$

La escala de tiempo representativa en el flujo se calculó con base en la Ecuación 41.

$$\tau_f = \frac{5H}{U_0} \quad (41)$$

8.2.2. Métodos experimentales

Todas las velocidades de flujo fueron medidas a través de un anemómetro láser Doppler (LDA, por sus siglas en inglés). Cada punto de dato representa 2000 muestras individuales de velocidad que mantiene la incertidumbre estadística desde $\pm 0,02[m/s]$ hasta $\pm 0,08[m/s]$. Para medir la velocidad de las partículas, se empleó una técnica de discriminación por amplitud de pedestal, apreciable en la Figura 27. A partir de allí, se estimó un error experimental cercano al 5 %.

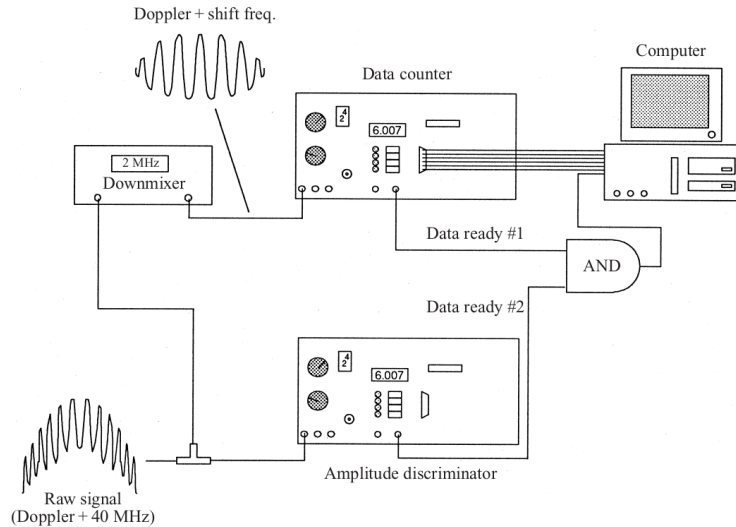


Figura 27: Esquema del sistema de medición de la interacción partícula fluido^[4].

El campo de densidad medio de partículas se midió al iluminar el material particulado a través de un pulso de frecuencia doble, $10[mJ]$ por pulso de Neodimio, y al analizar diversas fotografías del experimento a través de un software de procesamiento de imágenes; permitiendo así identificar cada partícula, su tamaño y posición en el lecho fluidizado.

8.3. Resultados

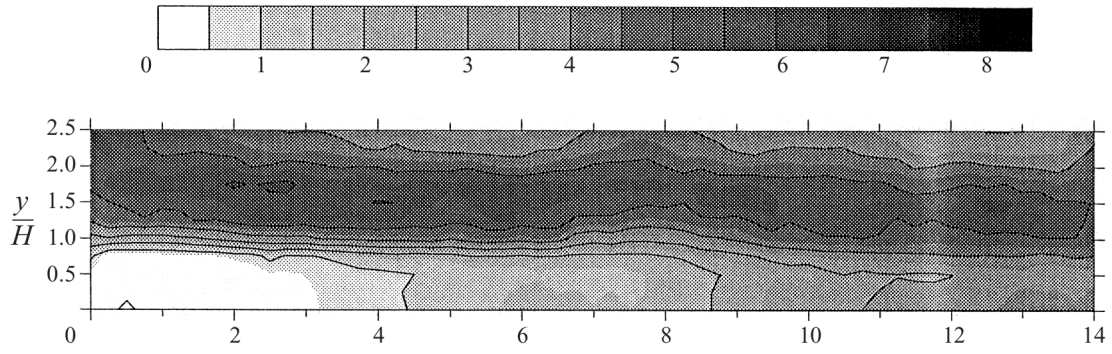
Los perfiles de velocidad media se midieron, de manera experimental, a través de las condiciones especificadas en el Cuadro 9. Pocas partículas fueron identificadas en la zona de recirculación, por lo que no se reportaron datos en la zona $x/H = 2,5$ y 7 .

Clase de partícula	Dirección de flujo		Dirección normal al muro	
	x/H	Carga másica	x/H	Carga másica
Vidrio de $90[\mu m]$	2,5,7,9,14	20 %		
Vidrio de $150[\mu m]$	2,5,7,9,14	20 %, 40 %	2,5,7,9,14	10 %
Cobre de $70[\mu m]$	-2, 0, 2, 5, 7, 9, 12	3 %, 10 %	2,5,7,9,14	20 %

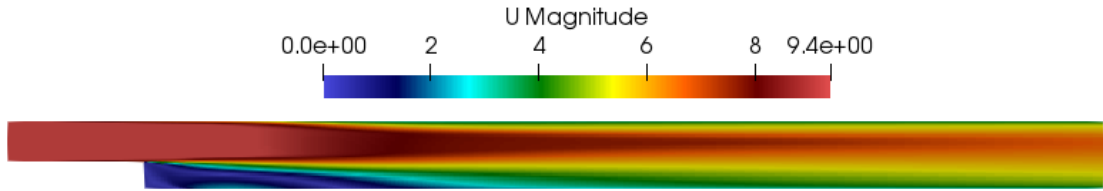
Cuadro 9: Condiciones experimentales.

En la Figura 28 *a)* se muestra el esquema de contorno de la densidad media de partículas de cobre de $70[\mu m]$. La velocidad máxima encontrada en este es, aproximadamente, de $0,2U_0$. En la Figura 28 *b)*, se puede apreciar el esquema de contorno obtenido con base en el modelo CFD-DEM desarrollado.

Cerca de la zona de salida del volumen de control, las velocidades de las partículas exceden a las del gas debido a la desaceleración del fluido producida por la expansión. La velocidad media de las partículas en la dirección del muro fue, generalmente, similar a las velocidades del fluido correspondiente.



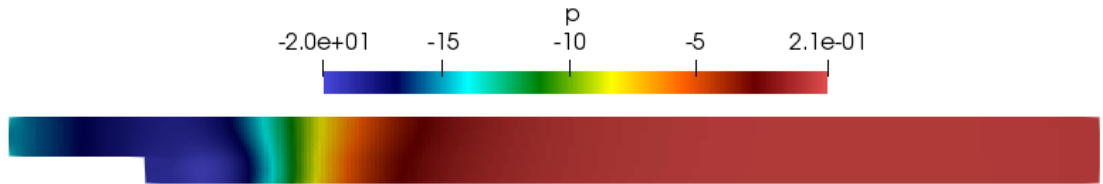
(a) Diagrama de contorno de referencia de la densidad media de partículas de cobre de $70[\mu m]$ [4].



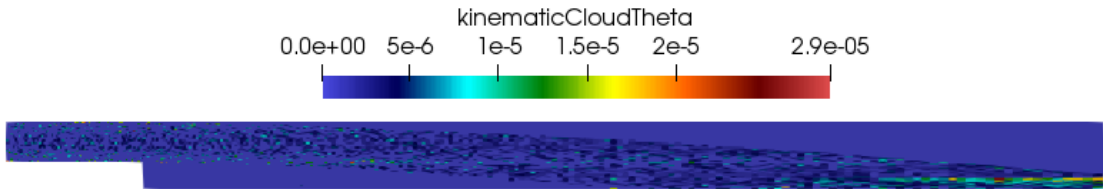
(b) Diagrama de contorno de la distribución de velocidad del sistema con partículas de cobre de $70[\mu m]$ - resultado obtenido al usar el modelo CFD-DEM desarrollado.

Figura 28: Comparación entre resultados del diseño experimental desarrollado por Fessler & Eaton y los obtenidos a partir del modelo CFD-DEM desarrollado.

Adicional al resultado mostrado en la Figura 28 b), el modelo CFD-DEM desarrollado también permite apreciar los resultados mostrados en la Figura 29.



(a) Diagrama de contorno de la distribución de la presión dentro del volumen de control.



(b) Diagrama de contorno de la variación de la fracción de vacío en el volumen de control

Figura 29: Resultados obtenidos a partir del modelo CFD-DEM desarrollado.

La tendencia de distribución de las partículas de cobre sobre el volumen de control se puede apreciar en la Figura 30.

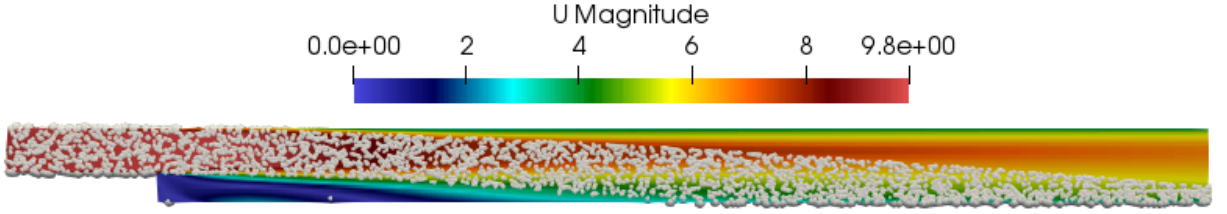


Figura 30: Distribución de las partículas de cobre sobre la geometría.

En la Figura 31 se puede apreciar la comparación directa en los perfiles de velocidad en diferentes puntos de interés, contrastando los definidos por Fessler & Eaton con respecto a los calculados por el modelo CFD-DEM desarrollado.

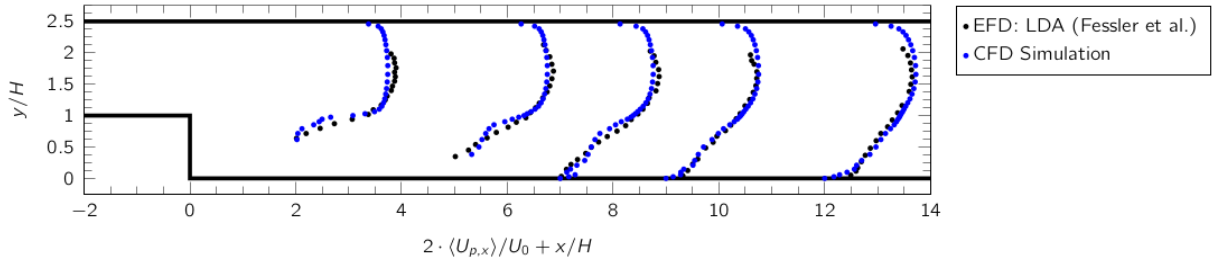


Figura 31: Comparación directa de los perfiles de velocidad experimentales con respecto al del modelo numérico desarrollado.

En la Figura 31, se puede apreciar una variación de hasta el 0,6% entre los resultados experimentales con respecto a los obtenidos por el modelo numérico; validando así el modelo CFD-DEM desarrollado.

9. Conclusiones

Referencias

- [1] A. L. Capriotti, C. Cavaliere, P. Foglia, R. Samperi, S. Stampachiacchiere, S. Ventura, and A. Laganà, “Recent advances and developments in matrix solid-phase dispersion,” *TrAC Trends in Analytical Chemistry*, vol. 71, pp. 186–193, sep 2015. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165993615001387>
- [2] J. D. Argüello Plata and Ó. A. Gómez Sepúlveda, “Diseño de un prototipo de una planta destinada a la producción de extractos vegetales mediante el método de extracción de dispersión en la fase sólida - MSPD, con sistema de recuperación del solvente,” Tech. Rep., 2017.
- [3] O. A. Gélvez Arocha, J. R. Martínez Morales, E. Stashenko, Ó. A. Gómez Sepúlveda, and J. D. Argüello Plata, “CO2018013023A1 - Equipo, proceso y producto obtenido a partir de material vegetal con propiedades biológicas - Google Patents,” 2018. [Online]. Available: [https://patents.google.com/patent/CO2018013023A1/es?inventor=juan+david+arg{\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{u\global\mathchardef\spacefactor}\let\begin\group\end\group\relax\let\ignorespaces\relax\accent127u\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\protect\penalty\@M\hskip/z@skip}ello{\&}oq=juan+david+arg{\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{u\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\let\begin\group\end\group\relax\let\ignorespaces\relax\accent127u\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\protect\penalty\@M\hskip/z@skip}ello](https://patents.google.com/patent/CO2018013023A1/es?inventor=juan+david+arg{\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{u\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\let\begin\group\end\group\relax\let\ignorespaces\relax\accent127u\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\protect\penalty\@M\hskip/z@skip}ello{\&}oq=juan+david+arg{\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{u\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\let\begin\group\end\group\relax\let\ignorespaces\relax\accent127u\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\protect\penalty\@M\hskip/z@skip}ello)
- [4] J. R. Fessler and J. K. Eaton, “Turbulence modification by particles in a backward-facing step flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 394, pp. 97–117, sep 1999. [Online]. Available: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/turbulence-modification-by-particles-in-a-backwardfacing-step-flow/7CCEE8B4F7C6A3003434D4106D7D1E24>
- [5] S. A. Barker, “Matrix solid phase dispersion (MSPD),” *Journal of Biochemical and Biophysical Methods*, vol. 70, no. 2, pp. 151–162, 2007.
- [6] E. Stashenko, O. A. Gélvez Arocha, J. R. Martínez Morales, D. C. Durán García, J. D. Argüello Plata, and Ó. A. Gómez Sepúlveda, “Numerical simulation through the Discrete Element Method (DEM) and the Finite Volume Method (FVM) of the crushing and filtering processes for the production of vegetable extracts by the Matrix Solid-Phase Disper- sion (MSPD),” in *XI Congreso Colombiano de Métodos Numéricos*, vol. 1. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2017, pp. 57–66.

- [7] F. Alobaid and B. Epple, "Improvement, validation and application of CFD/DEM model to dense gas-solid flow in a fluidized bed," *Particuology*, vol. 11, no. 5, pp. 514–526, oct 2013.
- [8] C. Yue, Q. Zhang, and Z. Zhai, "Numerical simulation of the filtration process in fibrous filters using CFD-DEM method," *Journal of Aerosol Science*, vol. 101, pp. 174–187, nov 2016.
- [9] A. E. Carlos Varas, E. A. Peters, and J. A. Kuipers, "CFD-DEM simulations and experimental validation of clustering phenomena and riser hydrodynamics," *Chemical Engineering Science*, vol. 169, pp. 246–258, sep 2017.
- [10] J. Vieira, R. Mantovani, M. Raposo, M. Coimbra, A. Vicente, and R. Cunha, "Effect of extraction temperature on rheological behavior and antioxidant capacity of flaxseed gum," *Carbohydrate Polymers*, vol. 213, pp. 217–227, jun 2019. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0144861719302206>
- [11] G. Hetsroni, "Particles-turbulence interaction," *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 15, no. 5, pp. 735–746, sep 1989.
- [12] R. A. Gore and C. T. Crowe, "Modulation of turbulence by a dispersed phase," *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 113, no. 2, pp. 304–307, jun 1991.
- [13] J. D. Kulick, J. R. Fessler, and J. K. Eaton, "Particle response and turbulence modification in fully developed channel flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 277, pp. 109–134, 1994. [Online]. Available: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/particle-response-and-turbulence-modification-in-fully-developed-channel-flow/5C12D16FEB1A89A7C2C8C8502C6F83FA>
- [14] Y. Tsuji, Y. Morikawa, and H. Shiomi, "LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a vertical pipe," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 139, pp. 417–434, 1984. [Online]. Available: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/ldv-measurements-of-an-air-solid-two-phase-flow-in-a-vertical-pipe/043CBA133D1AE2D65549105FBD48DDBD>