
INSTITUTO DE INGENIERÍA SANITARIA Y AMBIENTAL

AREA DE HIDRÁULICA

**CÁTEDRA DE HIDRÁULICA APLICADA A LA
INGENIERÍA SANITARIA**

TEORÍA DE LA SEDIMENTACIÓN

**Ing. Luis E. Pérez Farrás
Agosto 2005**

1. Conceptos Generales

Definimos como "sedimentación" al proceso natural por el cual las partículas más pesadas que el agua, que se encuentran en su seno en suspensión, son removidas por la acción de la gravedad.

Las impurezas naturales pueden encontrarse en las aguas según tres estados de suspensión en función del diámetro. Éstos son :

- a) Suspensiones hasta diámetros de 10^{-4} cm.
- b) Coloides entre 10^{-4} y 10^{-6} cm.
- c) Soluciones para diámetros aún menores de 10^{-6} cm.

Estos tres estados de dispersión dan igual lugar a tres procedimientos distintos para eliminar las impurezas.

El primero destinado a eliminar las de diámetros mayores de 10^{-4} cm. constituye la "sedimentación simple".

El segundo implica la aglutinación de los coloides para su remoción a fin de formar un "floc" que pueda sedimentar.

Finalmente, el tercer proceso, que esencialmente consiste en transformar en insolubles los compuestos solubles, aglutinarlos para formar el "floc" y permitir así la sedimentación.

Es decir que en muchos casos, las impurezas pueden ser, al menos en teoría removidas mediante el proceso de sedimentación.

A continuación detallaremos un cuadro en el que se presenta a título ilustrativo valores de la "velocidad de sedimentación" correspondiente a partículas de peso específico $2,65 \text{ kg./dm}^3$ y a una temperatura del agua de 10° C , teniendo en cuenta distintos diámetros y los tiempos necesarios para sedimentar 0,3 m.

D (mm)	Clasificación	Velocidad de Sedimentación (mm/s)	Tiempo para sedimentar 0,3 m.
10,0	Grava	1000,00	0,3 seg.
1,0	Grava	100,00	3,0 seg.
0,1	Arena Gruesa	8,00	38 seg.
0,01	Arena Fina	0,154	33 min.
0,001	Bacterias	0,00154	35 horas
0,001	Coloides	0,0000154	230 días
0,0001	Coloides	0,000000154	63 años

28.8 m/h

250 μm = 0.00025 m = 0.25 mm

De un rápido análisis del cuadro se deduce que en la práctica es necesario establecer un tiempo límite para la sedimentación estableciendo a priori el diámetro mínimo que la estructura podrá remover. Lo contrario implicaría diseñar tanques de sedimentación incompatibles con las posibilidades económicas y aún físicas de los proyectos.

2. Ecuación General de Resistencia

Nos proponemos determinar la intensidad de la fuerza resistente que se produce cuando un cuerpo con un contorno dado es obligado a desplazarse en un fluido en reposo.

La expresión que hallaremos tiene validez general y puede ser aplicada para evaluar tanto la resistencia al avance de una nave submarina, la de un avión, o la resistencia opuesta a la decantación de una partícula en un líquido en reposo. A pesar de lo distintos que pueden parecer estos problemas en un análisis superficial, fácil es comprender que esencialmente constituyen un fenómeno físico similar.

Nuestro interés fundamental es determinar la fuerza resistente que habrá de oponerse al desplazamiento vertical de una partícula discreta (motivado éste por acción de la gravedad) en el seno de un líquido, que en nuestro caso será invariablemente agua y cuyo peso específico ha de ser obviamente menor que el de la partícula.

A este proceso que denominamos con toda generalidad "sedimentación" lo estudiaremos en detalle, en la consideración que la partícula es "discreta", es decir que no cambia su tamaño, forma (la que suponemos esférica), peso ni individualidad.

La experiencia demuestra que el módulo de la fuerza de resistencia que nos proponemos evaluar responde a la siguiente ecuación :

$$F_{\text{res}} = f(V_s, L, \Omega, \rho, \mu) \quad (1)$$

Donde:

- V_s es la velocidad de sedimentación de la partícula.
- L es una longitud característica, en nuestro caso el diámetro d_p de la partícula.
- Ω es un área característica y en nuestro caso es el área que se obtiene de un corte de la partícula con un plano que contenga su baricentro, por lo que:

$$\Omega = \frac{\pi \cdot d_p^2}{4} \quad (2)$$

- ρ es la masa específica de la partícula .
- μ es la viscosidad dinámica del líquido .

Para encontrar la ecuación que vincula a las distintas variables intervinientes nos valdremos del "Análisis Dimensional" utilizando el método de RALEIGH, basado en el principio de la homogeneidad de las dimensiones de las ecuaciones. Este concepto proporciona un método para la determinación de la estructura de ecuaciones físicas a partir de las variables intervinientes en un dado fenómeno en estudio y sus dimensiones.

La experiencia del investigador, plasmada en un íntimo conocimiento de las características físicas del fenómeno en estudio, es la que indica en cada caso las variables a considerar. Es de hacer notar que aunque la homogeneidad dimensional es condición necesaria para que la ecuación tenga validez, no por ello cualquier ecuación homogénea es forzosamente correcta. Existen además muchas formas empíricas no homogéneas desde el punto de vista dimensional pero que reflejan con exactitud datos experimentales correspondientes a un caso dado y a un sistema particular de unidades que delimita el campo de aplicación de la expresión.

Sin embargo, para que la validez sea realmente general, la ecuación ha de ser dimensionalmente exacta. Incluso es recomendable como verificación de la resolución corriente de problemas, una comprobación de la exactitud dimensional, a la vez que numérica, de las ecuaciones utilizadas en el proceso.

2.1 MÉTODO DE RALEIGH

De acuerdo al método adoptado, la ecuación (1) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{F_{\text{res}}}{\Omega} = C \cdot V_s^k \cdot L^m \cdot \rho^n \cdot \mu^s \quad (3)$$

Donde K,m,n y s son exponentes a determinar por el análisis dimensional y C un coeficiente de proporcionalidad a evaluar experimentalmente.

Si consideramos como dimensiones fundamentales a la Masas (M), la longitud (L) y el tiempo (T) y tenemos en cuenta que dimensionalmente la fuerza es :

$$[F] = [M \cdot L \cdot T^{-2}]$$

El área es:

$$[\Omega] = [L^2]$$

El cociente:

$$\left[\frac{F}{\Omega} \right] = \left[\frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2} \right] = [M \cdot L \cdot T^{-2}]$$

La velocidad es:

$$[V] = [L \cdot T^{-1}]$$

La masa específica es:

$$[\rho] = [M \cdot L^{-3}]$$

La viscosidad se deduce de:

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$

Por lo que:

$$\mu = \tau \cdot \frac{dy}{dV} = \frac{F}{\Omega} \frac{dy}{dV}$$

La que dimensionalmente resulta:

$$[\mu] = \left[\frac{F}{L^2} \frac{L}{L \cdot T^{-1}} \right] = \left[\frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L}{L^3 \cdot T^{-1}} \right] = [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]$$

Como la ecuación (3) debe ser necesariamente homogénea desde el punto de vista dimensional tendremos:

$$[M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}] = [L \cdot T^{-1}]^k \cdot [L]^m \cdot [M \cdot L^{-3}]^n \cdot [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]^s$$

O, lo que es lo mismo:

$$[M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}] = [M]^{n+s} \cdot [L]^{k+m-3n-s} \cdot [T]^{-k-s} \quad (4)$$

Como el primer miembro ha de ser dimensionalmente igual al segundo, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones :

$$n + s = 1 \quad (5.1)$$

$$k + m - 3n - s = -1 \quad (5.2)$$

$$-k - s = -2 \quad (5.3)$$

Despejando las incógnitas para ponerlas en función de S tendremos:

$$\text{De la (5.1) : } n = 1 - s$$

$$\text{De la (5.3) : } k = 2 - s$$

Reemplazando estos valores de n y k en la (5.2):

$$(2 - s) + m - 3(1 - s) - s = -1$$

Por lo que:

$$2 - s + m - 3(1 - s) - s = -1$$

$$-1 - 2s + m + 3s = -1 \quad , \quad m + s = 0$$

$$\therefore m = -s$$

Por lo que, resumiendo:

$$\begin{aligned}n &= 1 - s \\k &= 2 - s \\m &= -s\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (3):

$$\frac{F_{res}}{\Omega} = C \cdot V_s^{2-s} \cdot L^{-s} \cdot \rho^{1-s} \cdot \mu^s$$

Multiplicando y dividiendo por 2 al segundo miembro y operando resulta:

$$\frac{F_{res}}{\Omega} = C \frac{\rho \cdot V_s^2}{2} 2 \left(\frac{V_s \cdot L \cdot \rho}{\mu} \right)^{-s} \quad (6)$$

Como en nuestro caso tomamos como valor de longitud característica el diámetro de la partícula, la expresión (6) resulta:

$$\frac{F_{res}}{\Omega} = C \frac{\rho \cdot V_s^2}{2} 2 \left(\frac{V_s \cdot d_p \cdot \rho}{\mu} \right)^{-s} \quad (7)$$

Pero el término entre paréntesis es el número de Reynolds calculado con el diámetro de la partícula, la velocidad de sedimentación, la masa específica de la misma y la viscosidad del líquido, por lo que la expresión (7) puede escribirse:

$$F_{res} = f(Re) C \Omega \frac{\rho \cdot V_s^2}{2}$$

Haciendo:

$$C_d = C \cdot f(Re)$$

Obtendremos finalmente:

$$F_{res} = C_d \Omega \rho \frac{V_s^2}{2} \quad (8)$$

En la que C_d , en función del número de Reynolds, deberá determinarse experimentalmente.

Las investigaciones realizadas al efecto de poder evaluar el valor de C_d llevaron a las siguientes conclusiones:

a) Para $Re > 2 \times 10^3$ $C_d = 0,4$ (9)

b) Para $0,5 < Re < 2 \times 10^3$ C_d responde a la ecuación empírica:

$$C_d = \frac{24}{Re} + \frac{3}{\sqrt{Re}} + 0,34 \quad (10)$$

c) Para $Re < 0,5$:

$$C_d = \frac{24}{Re} = \frac{24 \cdot \mu}{V_s \cdot d_p \cdot \rho} \quad (11)$$

3. Teoría de los Sedimentadores Clásicos

3.1. Velocidad de Sedimentación

La partícula que supondremos discreta y esférica se encuentra sometida a la acción gravitatoria, por lo que estará solicitada por una fuerza que le imprimirá un movimiento vertical uniformemente acelerado. Esa fuerza que denominaremos "activa" estará dada por:

$$\overline{F}_a = \overline{G} - \overline{E}$$

Donde \overline{G} representa el peso de la partícula y \overline{E} el empuje que ésta recibe por estar inmersa en un líquido.

Escribiendo \overline{G} en función de la masa específica y considerando su módulo tendremos:

$$G = g \cdot \tau \cdot \rho_s$$

Donde τ es el volumen y ρ_s es la masa específica de la partícula.

Haciendo lo propio para el empuje deducimos:

$$E = g \cdot \tau \cdot \rho$$

Donde τ es el volumen desalojado por la partícula y ρ la masa específica del agua.

El módulo de la fuerza activa será entonces:

$$F_a = g \cdot \tau \cdot (\rho_s - \rho) \quad (12)$$

El movimiento de asentamiento producido origina la fuerza de rozamiento estudiada en el capítulo 2, la que equilibra a la fuerza activa anulando en condiciones de régimen a la aceleración y produciendo un asentamiento caracterizado por una velocidad uniforme V_s .

Igualando la (12) con la (8) obtendremos:

$$g \tau (\rho_s - \rho) = C_d \Omega \rho \frac{V_s^2}{2}$$

Despejando V_s :

$$V_s = \sqrt{\frac{2g (\rho_s - \rho) \tau}{C_d \rho \Omega}}$$

Pero como $\Omega = \pi \cdot d_p^2 / 4$ y $\tau = \pi \cdot d_p^3 / 6$; reemplazando en la expresión anterior tendremos:

$$V_s = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot (\rho_s - \rho) \cdot d_p}{3 \cdot C_d \cdot \rho}} \quad (13)$$

La expresión (13) es conocida como Ley de Newton de la sedimentación y nos da el valor de la "velocidad de sedimentación" en función del diámetro de la partícula, las masas específicas del agua y la partícula y del N° de Reynolds.

Si consideramos que la mayor parte de las partículas significativas en la sedimentación decantan en régimen laminar, es decir para $Re < 0,5$, y además si recordamos la expresión (11), el valor de C_d es :

$$C_d = \frac{24}{Re} = \frac{24 \cdot \mu}{V_s \cdot d_p \cdot \rho}$$

Reemplazando este valor en la expresión (13) obtendremos:

$$V_s = \frac{g}{18} \frac{(\rho_s - \rho)}{\mu} d_p^2 = \frac{g}{18} \frac{d_p^2}{\nu} (\delta - 1) \quad (14)$$

Donde δ es la densidad de la partícula dada por:

$$\delta = \rho_s / \rho$$

La expresión (14) es conocida como "Ecuación de Stokes" de la sedimentación y nos da el valor de la velocidad de sedimentación en función del diámetro de la partícula, su densidad y la viscosidad cinemática del agua, la que resulta a su vez función de la temperatura.

3.2. Sedimentación Clásica

En la práctica la sedimentación se realiza en tanques por los cuales circula el caudal de diseño de la planta alejándonos de la hipótesis de líquido en reposo.

Ello no obstante, a fin de acercarnos a la idealización enunciada, se proyectan las unidades con velocidades de pasaje lo suficientemente reducidas.

Consideramos además que las partículas son trasladadas horizontalmente con la misma velocidad de pasaje del agua por el tanque, lo que implica que no existe fricción en el sentido horizontal, hipótesis simplificada que permite esbozar un esquema simple de cálculo y que como podrá observarse implica un pequeño sobredimensionado porque fácil es inferir que el efecto de "freno" no es considerado y la longitud de la estructura de la sedimentación resultará imperceptiblemente más larga que la teórica.

Cuando se estudie el diseño de las estructuras de sedimentación se tendrán en cuenta factores distorsionantes del modelo planteado. En efecto, los fenómenos de

"cortocircuito", "velocidad de arrastre", "variación de densidad del floc", etc. que se deberán tener en cuenta, constituyen problemas de proyecto mucho más difíciles de resolver.

Continuando con el desarrollo de la teoría básica de la sedimentación supondremos además lo siguiente:

- a) El escurrimiento en el tanque es uniforme y con la velocidad más baja que permita el costo de la obra.

El tiempo de permanencia de las partículas será entonces:

$$t_0 = \frac{\tau}{Q} \quad (15)$$

Donde t_0 es el tiempo de permanencia, τ el volumen del tanque y Q el caudal de diseño.

- b) La concentración de partículas de cada tamaño es la misma en todos los puntos de la sección de entrada.
- c) Todas las partículas son discretas y sedimentan sin interferencias con una velocidad de sedimentación dada por la expresión (14).
- d) Una vez que las partículas llegan al fondo quedan eliminadas del agua que escurre por el tanque de sedimentación.

A nivel de esquema se representa en la figura 1 un corte de una estructura de sedimentación, en la que podemos distinguir cuatro partes bien definidas:

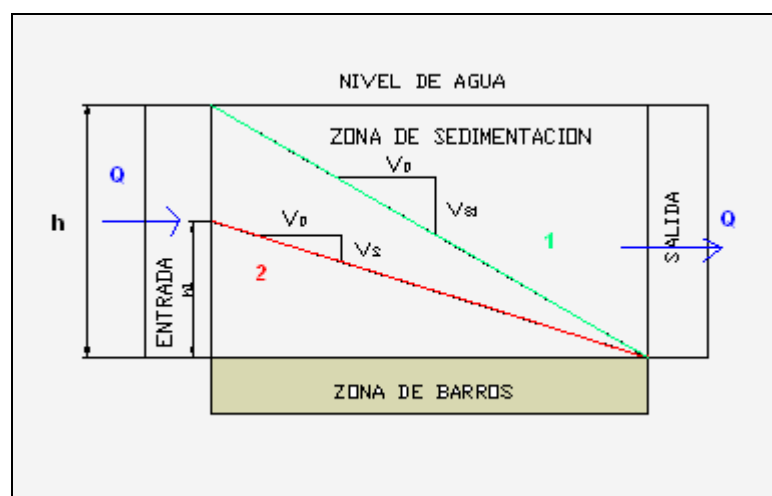


Figura 1

-
- i - Zona de Entrada, la que tiene como misión lograr la mejor uniformidad de las líneas de corriente.
 - j - La zona de sedimentación, donde el régimen es uniforme y tiene lugar el fenómeno en estudio.
 - k - Zona de sedimentos, en la que se considera que las partículas removidas en el proceso quedan retenidas.
 - l - Zona de salida, en la que se encauza al líquido clarificado hacia el o los canales que lo conducen a otras unidades de la planta de potabilización.

Las partículas recorrerán en la zona de sedimentación trayectorias tales como la 1 y la 2 de la figura 1, debidas a las componentes V_0 (horizontal) y V_s (vertical) de la velocidad.

Como V_0 es obviamente constante para todas las partículas y V_s es para una dada temperatura también constante para cada partícula, fácil es deducir que las trayectorias serán rectas de pendiente variable con las características de cada partícula.

Del análisis del esquema se desprende que si una partícula entra a nivel del líquido en el tanque y tiene una V_s tal que produzca una trayectoria como la (1), quedará eliminada del agua.

Por otra parte, todas las partículas cuya V_s sea mayor o igual que la velocidad V_0 de escurrimiento serán igualmente eliminadas puesto que han de sedimentar en un tiempo menor que el de permanencia permitido por la ecuación (15).

De la figura 1 fácil es interpretar que la permanencia ha de ser también:

$$t_0 = \frac{h_0}{V_{s_1}} \quad (16)$$

Por otra parte, el volumen τ de la estructura es en función de su superficie en planta Ω :

$$\tau = h_0 \cdot \Omega$$

Si igualamos (15) y (16):

$$t_0 = \frac{\tau}{Q} = \frac{h_0}{V_{s_1}}$$

Reemplazando el valor de τ :

$$t_0 = \frac{h_0 \cdot \Omega}{Q} = \frac{h_0}{V_{s_1}}$$

Por lo que :

$$V_{s_1} = \frac{Q}{\Omega} \quad (17)$$

La expresión (17) sintetiza el concepto de "carga superficial", el que nos indica la velocidad de sedimentación teórica a partir de la cual las partículas serán removidas por la estructura.

Es de hacer notar que la expresión (17) nos indica que la capacidad de sedimentar de un tanque es independiente de su profundidad y del periodo de permanencia de la partícula. Ello no obstante, las experiencias de Camps prueban que la realidad es muy distinta y sus conclusiones deberán ser tenidas en cuenta en el diseño de las unidades de decantación. Recordamos que en el presente texto se lleva a cabo el desarrollo teórico del tema y que las conclusiones a las que se arriban sufrirán correcciones basadas en los consejos de la práctica y la experimentación.

Las partículas de igual densidad pero de diámetro menor que el de la partícula que determina la trayectoria (1) de la figura 1, serán eliminadas por la estructura de sedimentación si ingresan a la misma con una altura igual o menor a h , cuyo valor se puede deducir, considerando el tiempo de permanencia y su velocidad de sedimentación, en la forma que sigue :

$$h_1 = V_s \cdot t_0 \quad (18)$$

La expresión (18) representa la pendiente de la trayectoria (2) de la figura 1 de referencia e indica la altura máxima de ingreso para que una partícula con V_s menor que V_{s_1} , pueda ser eliminada.

Consecuentemente, la eficiencia de la estructura con respecto a la remoción de partículas de esa característica será evidentemente proporcional al cociente h_1 / h_0 .

La semejanza de triángulos permite escribir :

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{V_s}{V_{s_1}} \quad (19)$$

Y, recordando el concepto de carga superficial dado por la expresión (17) tendremos:

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{V_s}{V_{s_1}} = \frac{V_s}{Q/\Omega} \quad (20)$$

En consecuencia, definimos como "eficiencia de un tanque de sedimentación" al valor dado por la expresión (20) pero expresado en porcentuales.

Es de hacer notar que así definida resulta independiente de la profundidad del tanque y de la permanencia del agua en el mismo, siendo válidas para la eficiencia las observaciones que se hicieran cuando estudiamos el concepto de carga superficial.

4. La Ecuación de Yao

4.1. Generalidades

Las ecuaciones de Yao permiten encarar el diseño de los "Sedimentadores Acelerados" o "Sedimentadores de Placas Planas" y fueron deducidas considerando un escurrimiento laminar del agua turbia, a través de placas planas paralelas, distanciadas entre sí en la magnitud " d " y formando con la horizontal un ángulo " θ ". Por otra parte se considera que las partículas cuya sedimentación se analiza en forma teórica son discretas.

El proceso que tiene lugar y los parámetros que lo definen se estudian íntegramente con las deducciones realizadas por Yao.

El éxito de muchas plantas que cuentan con unidades de sedimentación, basadas en el principio físico que se trata en este trabajo, ha hecho que la revista Técnica "Chemical Engineering" considere en 1969 a estos sedimentadores, dentro de los 10 equipos "más populares" del momento.

La publicación del especialista del C.E.P.I.S., Ingeniero Jorge ARBOLEDA, titulada "Teoría, Diseño y Control de los Procesos de Clarificación del Agua" hace referencia a aspectos de diseño de este tipo de unidades, convenientes por lo fácil de su operación, su alto rendimiento y la pequeña superficie ocupada frente a los sedimentadores clásicos.

La obra citada no incluye la deducción de las ecuaciones de Yao, las que tampoco figuran en otras bibliografías difundidas en nuestro medio.

El presente trabajo constituye la instancia adecuada, para que las ecuaciones de YAO sean deducidas. Esto permitirá una mayor claridad de conceptos, cuando los mismos deban aplicarse al diseño de unidades, teniendo en cuenta a su vez los resultados de la experimentación.

4.2. Análisis de las Fuerzas Intervinientes en el Proceso

El análisis de las fuerzas intervinientes sobre una partícula discreta y esférica que sedimenta en el seno de un fluido de viscosidad μ , que escurre en RÉGIMEN LAMINAR entre dos placas planas paralelas (las que forman un ángulo θ con la horizontal) se analiza en el esquema de la figura 2.

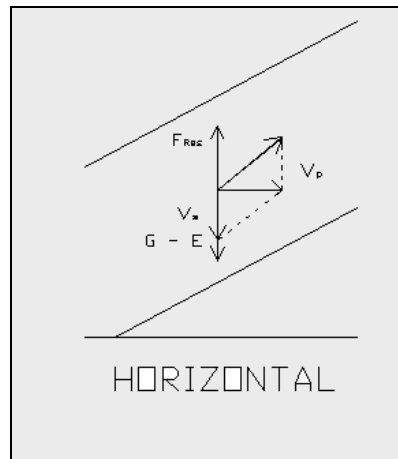


Figura 2

Actúan sobre la partícula:

Su peso $\bar{G} = \rho_p \cdot V \cdot \bar{g}$, donde;

- ρ_p es la masa específica y V el volumen de la partícula.
- \bar{g} es la aceleración "normal de la gravedad".

El empuje $-\bar{E} = -\rho \cdot V \cdot \bar{g}$, donde:

- ρ es la masa específica del agua.

La partícula en un determinado instante se encuentra en la posición P_1 (Ver figura 3), dotada de velocidad \bar{u} (no se ejercen fuerzas resultantes por estar en movimiento rectilíneo uniforme).

Por acción de la fuerza $\bar{G} - \bar{E}$, la partícula pasa en un diferencial dt a la posición P_2 de velocidad $\bar{u} + d\bar{u}$, lo que da lugar a una velocidad :

$$\bar{V}_p + d\bar{V}_p$$

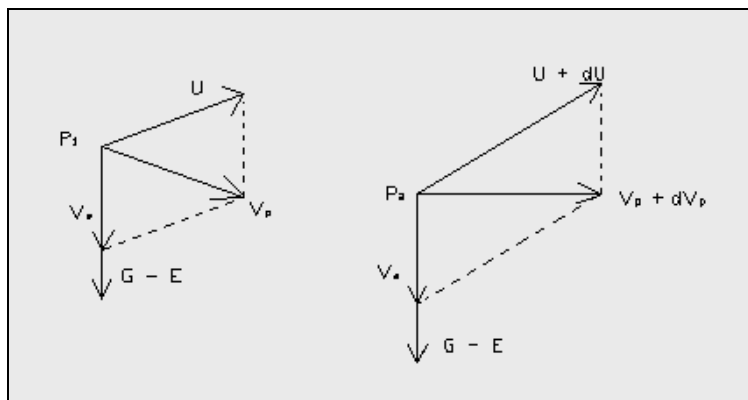


Figura 3

Este incremento de velocidad $\overline{dV_p}$ en el tiempo dt implica una aceleración y consecuentemente una fuerza:

$$m \frac{d\overline{V_p}}{dt}$$

que indudablemente ha de resultar nula al ser equilibrada la fuerza resultante entre el peso y el empuje por la fuerza resistente \overline{F}_{res} .

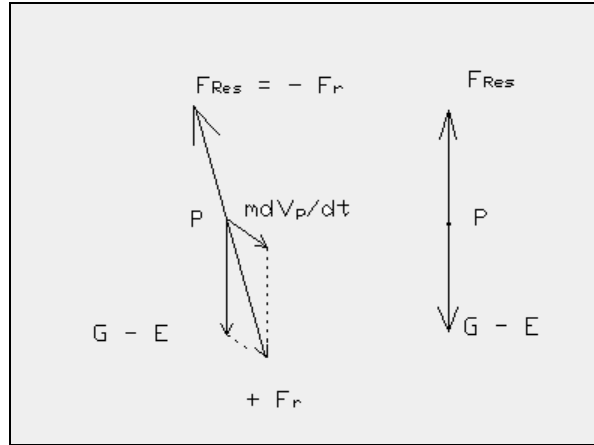


Figura 4

En la figura 4 se esquematizan las fuerzas puestas en juego.

Es obvio que podemos imaginar que el fenómeno es regido por el equilibrio de las fuerzas de la figura 4b, lo que nos permite escribir:

$$\overline{G} - \overline{E} - \overline{F}_{res} = 0 \quad (21)$$

Reemplazando valores se obtiene:

$$\rho_p \cdot V \cdot \overline{g} - \rho \cdot V \cdot \overline{g} - \overline{F}_{res} = 0$$

Operando:

$$V \cdot \overline{g} \cdot (\rho_p - \rho) = \overline{F}_{res} \quad (22)$$

4.3. Análisis de la Fuerza Resistente

Del estudio realizado en el numeral 1 "Función General de Resistencia", concluimos que:

$$\overline{F}_{res} = C_d \Omega \rho \frac{\overline{V_s}^2}{2} \quad (23)$$

De acuerdo a lo estudiado oportunamente, tenemos que para $Re < 0,5$ (que es el caso usual en la práctica) el valor de C_d resulta:

$$C_d = \frac{24}{Re} = \frac{24 \cdot \mu}{V_s \cdot d_p \cdot \rho}$$

Por otra parte:

$$\Omega = \frac{\pi \cdot d_p}{4}$$

Reemplazando en la expresión (23):

$$\bar{F}_{res} = \frac{24 \cdot \mu}{V_s \cdot d_p \cdot \rho} \frac{\pi \cdot d_p}{4} \frac{\rho \cdot \bar{V}_s}{2} = 3\mu \pi \rho d_p \bar{V}_s$$

Pero de la figura 5 podemos deducir que:

$$\bar{V}_s = \bar{V}_p - \bar{u}$$

Por lo que:

$$\bar{F}_{res} = 3 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \rho \cdot d_p \cdot (\bar{V}_p - \bar{u})$$

La ecuación (22) nos queda entonces:

$$V \cdot g \cdot (\rho_p - \rho) = 3 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \rho \cdot d_p \cdot (\bar{V}_p - \bar{u})$$

Por consiguiente:

$$\frac{V \cdot g \cdot (\rho_p - \rho)}{3 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \rho \cdot d_p} = \bar{V}_p - \bar{u} = \bar{V}_s \quad (24)$$

Expresión que nos permite conocer \bar{V}_s en función de parámetros conocidos.

4.4 Ecuación Diferencial de la Trayectoria de la Partícula

Adoptando los ejes coordenados de la figura 5, de la misma se deduce V_{px} y V_{py} .

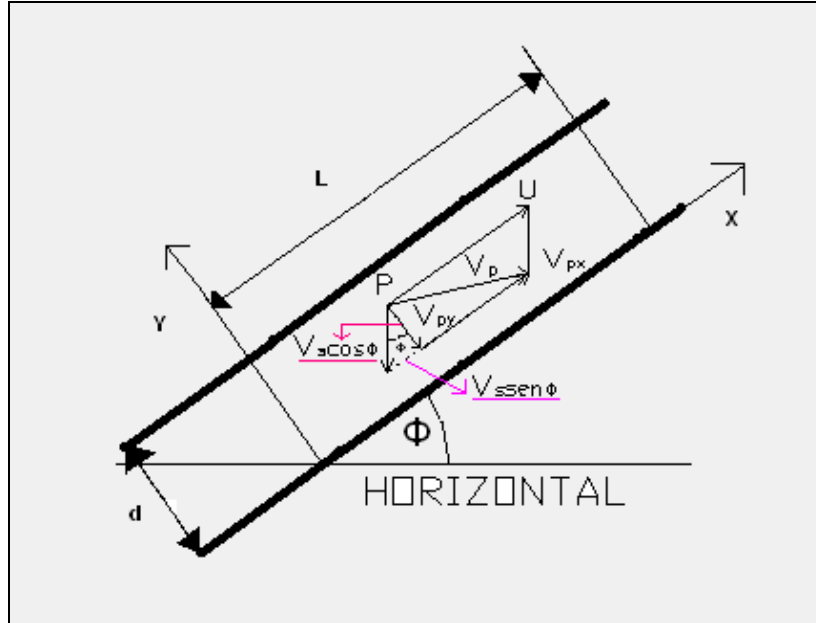


Figura 5

Del análisis de la figura 5 se deduce que:

$$V_{px} = u - V_s \sen \theta = \frac{dx}{dt}$$

$$V_{py} = -V_s \cos \theta = \frac{dy}{dt}$$

El signo es negativo para V_{py} dado que tiene sentido inverso al eje y.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-V_s \cdot \cos \theta}{u - V_s \cdot \sen \theta} \quad (25)$$

La expresión (25) constituye la Ecuación diferencial de la trayectoria de la partícula.

4.5. Integración de la Ecuación Diferencial

Integrando la expresión anterior:

$$\int \mu dy - V_s \cdot y \cdot \sin \theta + V_s \cdot x \cdot \cos \theta = C_0$$

Dividiendo por V_0 (velocidad media entre placas), y haciendo:

$$Y = y/d ; \quad X = x/d \quad \text{donde } d \text{ es el espesor}$$

$$L = l/d \quad \text{entre placas}$$

Obtenemos:

$$\int \frac{\mu}{V_0} dy - \frac{V_s}{V_0} y \sin \theta + \frac{V_s}{V_0} x \cos \theta = \frac{C_0}{V_0} = C_1$$

Pero:

$$dy = dY \quad y \quad dx = dX$$

$$\therefore \int \frac{\mu}{V_0} dY - \frac{V_s}{V_0} Y \sin \theta + \frac{V_s}{V_0} X \cos \theta = C_1 \quad (26)$$

Para el movimiento laminar se cumple la relación que se deduce de la figura 6, que representa el análisis de un elemento diferencial del fluido en escurrimiento.

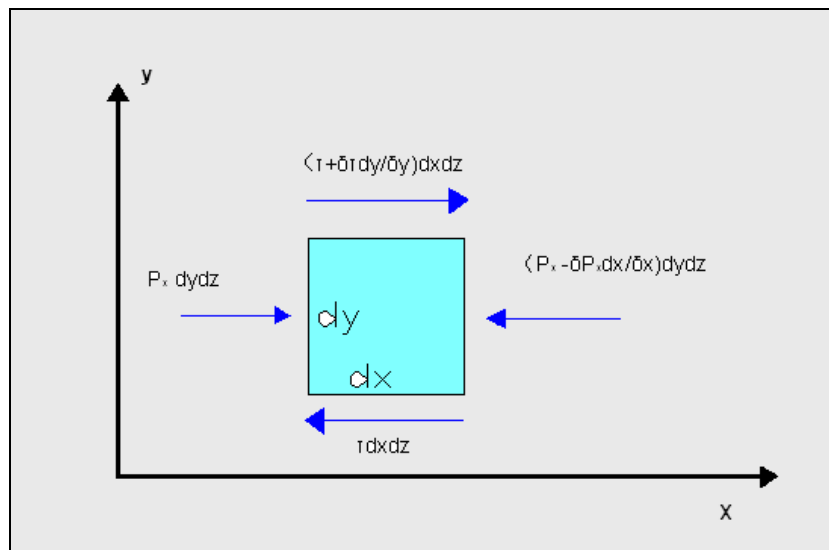


Figura 6

De la figura 6 surge :

$$P_x dydz - \left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right) dydz = \tau dx dz - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx dz$$

$$\therefore \frac{dP_x}{dx} dx dy dz = \frac{d\tau}{dy} dy dx dz$$

$$\therefore \frac{dP_x}{dx} = \frac{d\tau}{dy}$$

Por lo que concluimos que el gradiente de presiones según x es equilibrado por el gradiente de los τ según y.

Pero:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

De donde:

$$\frac{d\tau}{dy} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$\frac{dP_x}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} \quad \therefore \quad \mu \frac{d^2u}{dy^2} - \frac{dP_x}{dx} = 0 \quad (27)$$

La expresión (27) representa la ecuación diferencial de un movimiento unidireccional de un fluido viscoso ($Re < 500$) y en el que son despreciables otros efectos tales como los debidos a la gravedad.

Como la dimensión Z es muy grande comparada con d podemos considerar que no se perturba el régimen laminar.

Despejando de la expresión (27) obtendremos:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}$$

Integrando la anterior:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} y + C_1 \quad (28)$$

(recordamos que $\frac{dp}{dx}$ es constante en una sección).

Integrando la expresión (28) , obtendremos:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (29)$$

Es de hacer notar que la expresión (29) configura una distribución parabólica de velocidades característica de los regímenes laminares.

Para poder determinar el valor de las constantes de integración recordamos que según Newton - Meyer la velocidad de la partícula de líquido en las inmediaciones del contorno sólido coincide con la velocidad de dicho contorno, por lo que:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad ; \quad \text{si } y = 0 \\ u &= 0 \quad ; \quad \text{si } y = d \end{aligned}$$

De la expresión (29) se deduce inmediatamente que $C_2 = 0$ y además que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} d^2 + C_1 d &= 0 \\ \therefore C_1 &= -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} d \end{aligned}$$

Por lo que finalmente la distribución de velocidades responde a la ley parabólica:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (y^2 - y d) \quad (30)$$

La velocidad media del escurrimiento entre placas surge de considerar:

$$V_0 \cdot d \cdot 1 = 1 \cdot \int u dy$$

Por lo que:

$$V_0 = \frac{1}{d} \int u dy$$

Reemplazando en la expresión anterior el valor de u dado por la expresión (30), obtendremos:

$$V_0 = \frac{\int_0^d \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (y^2 - yd) dy}{d}$$

Integrando tendremos:

$$V_0 = -\frac{1}{12\mu} \frac{dP}{dx} d^2 \quad (31)$$

Haciendo:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} (y^2 - d \cdot y)}{-\frac{1}{12\mu} \frac{dP}{dx} d^2} = 6 \left[\frac{y}{d} - \frac{y^2}{d^2} \right]$$

$$\therefore \frac{u}{V_0} = 6(Y - Y^2) \quad (32)$$

Recordando la (26):

$$\int \frac{\mu}{V_0} dY - \frac{V_s}{V_0} y \sin \theta + \frac{V_s}{V_0} x \cos \theta = C_1$$

Reemplazando resulta:

$$6 \int (Y - Y^2) dy = 6 \left[\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3} \right]$$

Reemplazando en la ecuación (26) tendremos:

$$6 \left[\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3} \right] - \frac{V_s}{V_0} y \sin \theta + \frac{V_s}{V_0} x \cos \theta = C_1 \quad (33)$$

Expresión que nos da la trayectoria de una partícula que sedimenta en un flujo laminar en un sedimentador de placas planas.

Para $X = L$; $Y = 0$; por lo que:

$$\frac{V_s}{V_0} L \cos \theta = C_1$$

Reemplazando en la ecuación (33):

$$6 \left[\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3} \right] - \frac{V_s}{V_0} y \sin \theta + \frac{V_s}{V_0} (x - L) \cos \theta = 0 \quad (34)$$

La (4.14) representa la ecuación de la trayectoria de la partícula que sedimenta en un flujo laminar entre placas planas.

Para $X = 0$, $Y = 1$, que son las condiciones que fijan la posición de la primera curva de sedimentación, tendremos que, haciendo:

$$S = 6 \left[\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3} \right]$$

$$S = 6 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = 1$$

Por lo que:

$$S = \frac{V_s}{V_0} (\sin \theta + L \cos \theta) = 1 \quad (35)$$

Obviamente las partículas cuyo S supera a 1 tendrán una trayectoria que hará que toquen a la placa inferior antes, por lo que serán removidas aquellas que cumplan que $S \geq 1$.

Si despejamos V_s de la expresión (35), tendremos:

$$V_s = \frac{S V_0}{\sin \theta + L \cos \theta} \quad (36)$$

La expresión (36) vincula a todas las magnitudes puestas en juego en el proceso, ya sean estas propias de las partículas o de la estructura de sedimentación.

Bibliografía

- Apuntes de las clases del Ing. BLUME (Perú) en el curso sobre "Diseño de Plantas Modernas de Tratamiento de Agua", llevado a cabo en la U.N.S., Bahía Blanca en 1973.
- "Mecánica de Fluidos y máquinas Hidráulicas", Mateix.
- Sedimentadores de Placas; de la "Empresa de Teléfono, Agua Potable y Alcantarillado de CUENCA, ECUADOR; XIII Congreso de Ingeniería Sanitaria, ASUNCIÓN, PARAGUAY, 1973.
- "Sedimentación Acelerada", KUAN M. YAO; Congreso de Ingeniería Sanitaria, ASUNCIÓN, PARAGUAY, 1973.

