

En 1952 Alan Turing [1] propose un modèle pour le phénomène de la morphogenèse dont la conséquence est l'émergence d'un motif au niveau macroscopique suite à des interactions au niveau microscopique entre des agents chimiques. La cellule contient des gènes qui entrent en action au contact d'un signal chimique - un morphogène. Le terme *morpho* est issu du grec et signifie transformation. La morphogenèse est donc le phénomène de transformation d'un gène à travers le temps et, dans certains modèles, au contact d'un agent *inhibiteur*. On parle alors d'un modèle activateur-inhibiteur ou encore un mécanisme de diffusion-réaction. Le morphogène se diffuse à travers un tissu. Sans interaction ou interruption, la propagation est uniforme et le motif aussi.

Dans le cas contraire, elle peut donner lieu à l'émergence de motifs observables dans la nature: les bandes sur la robe d'un zèbre, ou encore les taches sur la robe d'un léopard. Dans le cas d'un animal, le motif est aussi déterminé par la taille et la forme de celui-ci. Par exemple, et assez curieusement, il a été observé qu'un animal à bandes, tel qu'un zèbre, ne peut pas avoir une queue tachetée - voir [3]. Les contraintes imposées par le domaine sur lequel le phénomène se produit permettent aussi d'expliquer pourquoi la queue du léopard (du moins, certains spécimens) contient des lignes plutôt que des taches¹. Cette émergence peut être due à l'interaction du morphogène avec l'agent inhibiteur qui se propage plus rapidement que lui à travers le tissu et limite sa diffusion - autrement l'émergence ne serait pas possible.

Ce qu'il y a de surprenant, c'est que le motif émerge même si les concentrations (c_A et c_B) des deux agents (A et B) à la période initiale, $t = 0$, sont distribuées *aléatoirement* dans l'espace.

Le livre de [4] présente une analogie que nous reproduisons ici. Elle n'est pas réaliste, mais a le mérite de bien fixer la pensée.

Imaginez un champ sec rempli de sauterelles. Lorsqu'elles ont chaud, les sauterelles émettent de la sueur en quantité telle que cela a pour effet d'humidifier leur environnement immédiat. Imaginez maintenant que d'un endroit dans le champ, l'herbe prend soudainement feu et que celui-ci commence à se propager. Puisqu'elles auront chaud, les sauterelles émettront de la sueur qui aura pour effet de ralentir la progression du feu en certains endroits. Si on suppose de plus que les sauterelles se déplacent et émettent de la sueur plus rapidement que le feu, et qu'elles sont en quantité suffisante, alors, ultimement, la progression du feu sera stoppée. Imaginez maintenant le résultat si plusieurs feux se déclarent à différents endroits aléatoires dans le champ et vous aurez une bonne idée de ce que le modèle permet de faire.

À la figure 1, un mouvement brownien W_1 de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 0.05$ est utilisé pour déterminer les concentrations de départ des morphogènes A et B dans le tissu. Après plusieurs périodes de temps t , l'émergence d'un motif est claire.

Pour vous convaincre que des dispositions initiales, même si elles sont aléatoires,

¹Une question taraudante en sortant du lit le dimanche matin s'il en est une...

mènent à l'émergence d'un motif, considérez la figure 2 où le mouvement brownien W_2 de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 1$ est maintenant employé. Cela a pour effet d'augmenter la dispersion des concentrations c_A et c_B à $t = 0$. Malgré cela, un motif émerge.

Le modèle proposé par Alan Turing nécessite de comprendre un objet appelé une équation différentielle. Comme ce n'est pas l'objectif de ce petit document, ni celui du cours (!), sachez seulement qu'une équation différentielle est une équation faisant intervenir une fonction et sa dérivée et qu'il n'y en a aucune dans ce document².

En général, une équation différentielle sert à décrire le comportement d'un phénomène physique³ dans l'espace et dans le temps⁴. À chaque période de temps, et chaque point de l'espace, on peut connaître l'état du système. Si on met bout à bout chacune de ces périodes de temps, alors on obtient l'évolution complète du système sur l'horizon considéré.

Une bonne métaphore est de dire d'une équation différentielle qu'elle est comme un film qu'on peut visionner et que les séquences, les scènes contenues sur la bobine, sont l'équivalent des captures du système à chaque période de temps. Si regarder un film est similaire à regarder séquentiellement chacune des scènes alors observer l'évolution d'un système par une équation différentielle revient à regarder séquentiellement chacune des valeurs du système à un instant t .

Il est possible d'approximer la solution de l'équation différentielle - en *espace* et en *temps* à l'aide de méthodes numériques. Le jeu des méthodes numériques ne date pas d'hier.

Pour approximer la valeur de π , le mathématicien Archimète a d'abord *circonscrit* un cercle à l'intérieur d'un polygone régulier (imaginer un cercle dans un carré) puis, dans ce cercle, il a *inscrit* un polygone avec le même nombre de côtés (imaginer un carré dans le cercle). Carré dans un cercle dans un carré.

La méthode numérique employée par Archimète consistait à augmenter le nombre de côtés du polygone et, à chaque fois, de calculer le ratio des aires de ceux-ci. La logique? Plus le polygone a de côtés, plus il se rapproche du cercle. Plus le ratio des aires se rapproche de 1 et plus l'aire du polygone s'approche de celle du cercle. Sa réponse? $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ ⁵.

Archimète a vécu au 3ème siècle avant Jésus-Christ. Aujourd'hui, et ironiquement grâce au travail de ce même Alan Turing,⁶ qui a largement contribué à

²Pour les mathématiques, les ouvrages suivants ont été consultés: [2], [5].

³La propagation des ondes, ou de la chaleur, dans un corps, la trajectoire d'une fusée dans le ciel, ou encore la poursuite du renard vers sa proie sont autant d'exemples de phénomènes qui sont modélisés à l'aide d'équations différentielles.

⁴L'espace peut être à 1 (une droite), 2 (un plan) ou encore 3 (un volume) dimensions.

⁵Prenez une calculatrice et vous verrez qu'il était drôlement proche. Pour vous en convaincre, ou encore tuer le temps pendant un cours soporifique, essayer de refaire ce calcul à la main.

⁶La vie d'Alan Turing est à la fois fascinante et tragique. De l'avis de plusieurs, il aurait contribué à écourter de plusieurs années la durée de la Seconde Guerre Mondiale en inventant

son invention, nous pouvons utiliser l'ordinateur pour résoudre des problèmes à l'aide de méthodes numériques.

Les animations du reste de ce document ont pu être créées grâce à un ordinateur, un peu d'analyse mathématique, un peu de programmation et une méthode numérique pour approximer l'équation différentielle.

Si la curiosité vous y pousse, vous pouvez consulter <http://www.degeneratestate.org/posts/2017/May/05/turing-patterns/> ou encore les références à la fin de ce document pour en connaître plus.



References

- [1] Turing A.M. : The Chemical Basis of Morphogenesis. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1:153–197, 1952.
- [2] Philippin G. : *Éléments de Mathématiques Appliquées: Séries, EDP, Transformées de Laplace et de Fourier*. Loze-Dion, 2004.
- [3] Murray J.D. : Pattern formation: biological. In Arbib M.A., éditeur : *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*, pages 851–859. MIT Press, Cambridge, 2002.
- [4] Murray J.D. : *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, volume 18. Springer-Verlag, 3 édition, 2003.
- [5] De Koninck J.M. et Lacroix N. : *Introduction aux Mathématiques de l'Ingénieur*. Loze-Dion, 2004.

une machine permettant de casser le code *Enigma* de la marine allemande. Cet élément de sa vie est raconté dans le film *The Imitation Game*. Si un jour, l'expression test de Turing vient à vos oreilles, sachez qu'elle lui est aussi attribuée et traduit une autre de ses idées: en mettant au point la première machine pouvant exécuter des tâches (résoudre un problème), il s'est demandé s'il serait un jour possible d'en inventer une qui pourrait être confondue avec un autre être humain. Ce faisant, il jetait en quelque sorte les bases pour le concept d'intelligence artificielle. La pratique d'activités homosexuelles étant criminelle à son époque en Grande-Bretagne, il a été condamné quelques années plus tard à la castration chimique et s'est donné la mort en croquant dans une pomme trempée dans le cyanure. Son article sur la morphogenèse fut l'un des derniers qu'il publia avant sa mort. Le parcours de sa vie est raconté dans le livre d'Andrew Hodges, *Alan Turing: The Enigma*.

Figure 1: Dispersions initiales de l'agent A et de l'agent B sur l'axe de longueur 100. L'axe vertical représente la concentration de A (en rouge) et la concentration de B (en bleu). À mesure que les périodes de temps t avancent, un motif de bandes émerge. Les dispersions initiales sont aléatoires avec variance = 0.05.

Figure 2: Dispersion initiale (variance = 1) de l'agent A et de l'agent B sur l'axe de longueur 100. Cette image montre que, *même* si la dispersion initiale est beaucoup plus grande que celle de la figure 1, un motif émerge et l'amplitude des bandes est similaire.

Figure 3: Il est possible de faire varier le motif en modifiant les paramètres des équations. Ici, l'équation de réaction est modifiée de sorte à allonger la fréquence du système.

Figure 4: Il est aussi possible d'imposer une forme de symétrie au système. Ici, les morphogènes se diffusent et réagissent en formant un genre de spirale - un peu comme une fleur. C'est le résultat d'une symétrie d'ordre 5 qu'il est possible d'imposer.