ZU MANNIGFALTIGKEITEN, VEKTORBÜNDELN USW.

↪ Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen.

Der Schlüssel zur Definition der Mannigfaltigkeiten ist die Kettenregel (!): Falls U, V und W offene Teilmengen euklidischer Räume und $f: U \to V$, $g: V \to W$ differenzierbar sind, so ist $g \circ f$ differenzierbar, und für die Ableitungen gilt

$$D(g \circ f)|_x = Dg|_{f(x)} \circ Df|_x \quad \forall x \in U.$$

Atlanten.

$f: U \subset \mathbb{R}^m \to V \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^k-Abbildung, falls f k-mal stetig differenzierbar ist. Im Fall $k = \infty$ wird f unendlich oft differenzierbar.

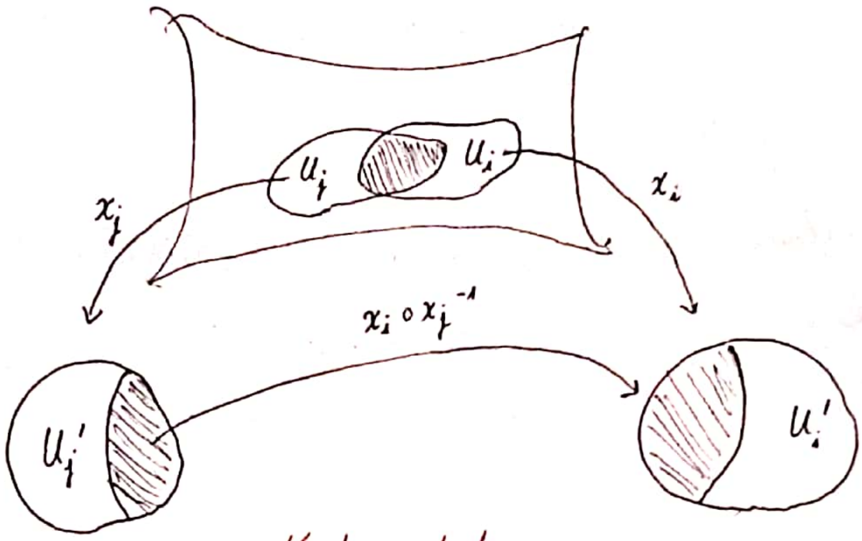
Definition. Für $m \geq 0$ und $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ besteht ein m-dimensionaler C^k-Atlas $\mathcal{A}$ auf einer Menge M aus:

1. einer Überdeckung $(U_i)_{i \in \Omega}$ von M,
2. einer Familie $(U_i')_{i \in \Omega}$ offener Teilmengen des $\mathbb{R}^m$,
3. einer Familie $x_i : U_i \to U_i'$, $i \in \Omega$, von Bijektionen,

sodass $x_i(U_i \cap U_j)$ $\forall i, j \in \Omega$ offen in $\mathbb{R}^m$ sind und

$$x_i \circ x_j^{-1} : x_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow x_i(U_i \cap U_j), \quad \forall i, j \in \Omega$$

C^k-Abbildungen sind. Die x_i heißen Karten und U_i heißen Kartengebiete. Die $x_i \circ x_j^{-1}$ heißen Kartenwechsel des Atlanten. ◇



Kartenwechsel.

Bemerkung. Die Kartenwechsel sind umkehrbar, weil es $(x_i \circ x_j^{-1})^{-1} = x_j \circ x_i^{-1}$ gilt. Daher sind die Kartenwechsel Homoömorphismen (im Fall C^0) bzw. Diffeomorphismen (im Fall C^k).

Ein C^0-Atlas heißt auch ein topologischer Atlas.

Ein C^∞-Atlas heißt auch ein glatter Atlas.

Einem Atlas A auf einer Menge M ist auf kanonische Weise eine Topologie $\mathcal{I}_A$ auf M zugeordnet.

SATZ. Es sei M eine Menge und $A = ((U_i, x_i))_{i \in \Omega}$ ein Atlas auf M. Sei $\mathcal{I}_A$ die Menge:

$$\mathcal{I}_A := \{ U \subset M \; ; \; x_i(U \cap U_i) \text{ offen in } \mathbb{R}^m \; \forall i \in \Omega \}$$

Dann ist $\mathcal{I}_A$ eine Topologie auf M und es gilt:

(1) Die Teilmengen $U \subset M$, für die es ein $i \in \Omega$ gibt mit $U \subset U_i$ und $x_i(U)$ offen in $\mathbb{R}^m$, bilden eine Basis von $\mathcal{I}_A$.

(2) Die $x_i : U_i \longrightarrow U_i'$ sind homoömorphismen.

(3) Zusammen mit $\mathcal{T}_A$ ist M ein lokal kompakter, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. $\square$

SATZ UND DEFINITION Es sei $A = ((U_i, x_i))_{i \in \Omega}$ ein m-dimensionaler C^k-Atlas auf M. Es seien $U \subset M$, $U' \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, und $x : U \to U'$ eine Bijektion. Dann heißt (U, x) eine mit A verträgliche Karte, falls

$$x_i(U \cap U_i) \text{ und } x(U \cap U_i) \text{ offen in } \mathbb{R}^m \text{ sind}, \forall i \in \Omega,$$

und

$$x \circ x_i^{-1} : x_i(U \cap U_i) \longrightarrow x(U \cap U_i),$$

$$x_i \circ x^{-1} : x(U \cap U_i) \longrightarrow x_i(U \cap U_i),$$

C^k-Abbildungen sind, $\forall i \in \Omega$. (Man kann A „mit x fortsetzen“).

Die Familie $\overline{A}$ aller mit einem m-dimensionalen C^k-Atlas A auf M verträglichen Karten ist wieder ein m-dimensionaler C^k-Atlas auf M und ist maximal, in dem Sinne, dass er nicht echt in einem größeren m-dimensionalen C^k-Atlas enthalten ist. $\square$

→ Einen solchen maximalen C^k-Atlas nennt man eine C^k-Struktur auf M.

Definition (Mannigfaltigkeit). Eine m-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit ist eine Menge M zusammen mit einer m-dimensionalen C^k-Struktur A auf M, derart dass M mit der von A induzierten Topologie $\mathcal{T}_A$ hausdorffsch und parakompakt ist.

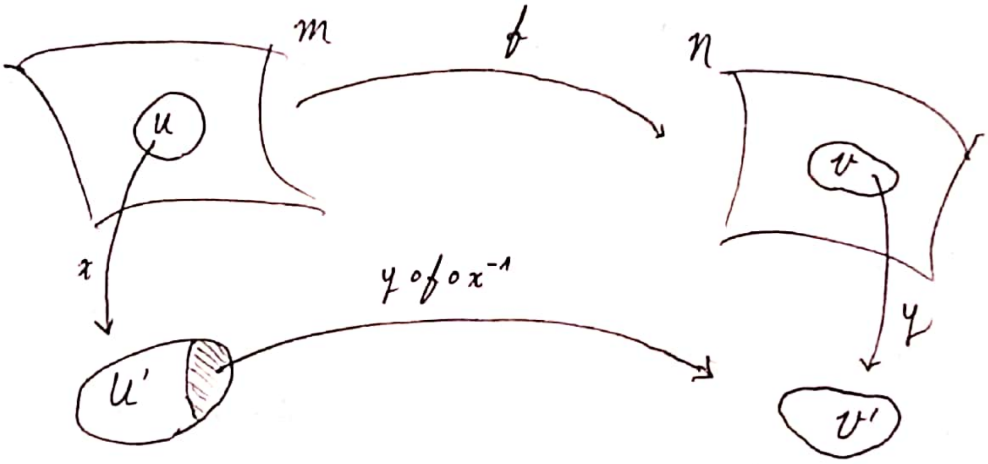
(*) Wir interessieren uns nur für glatte bzw. C^∞-Mannigfaltigkeiten.

Glatte Abbildungen:

Für $k \in \{0, 1, \dots, \infty\} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sagen wir, dass eine Abbildung $f: M \longrightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten C^k ist, wenn

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow V'$$

C^k ist für alle Karten $x: U \longrightarrow U'$ von M und $y: V \longrightarrow V'$ von N.



Mit $C^k(M, N)$ bezeichnen wir den Raum aller C^k-Abbildungen von M nach N. Für $k = \infty$ sprechen wir auch von glatten Abbildungen und setzen $\mathcal{F}(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Lemma. Zu jeder offenen Umgebung V eines Punktes p in einer Mannigfaltigkeit M gibt es eine Glockenfunktion, also eine glatte Funktion $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$0 \leq f \leq 1$$

und

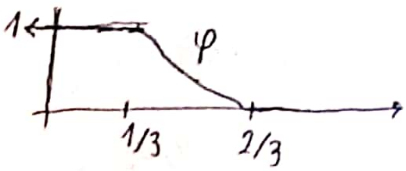
$$T(f) := \overline{\{a \in M \,;\, f(a) \neq 0\}} \subset V,$$

sodass $f \equiv 1$ lokal um p ist.

Beweis. Man wähle eine Karte $x: U \longrightarrow B(0,1)$ von M um p mit $U \subset V$ und $x(p) = 0$. Darüber hinaus sei $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und

$\varphi(r) = 1$ für $r \leq 1/3$,

$\varphi(r) = 0$ für $r \geq 2/3$.



Man setze dann $f(q) := \varphi(\|x(q)\|)$ für $q \in U$ und $f(q) = 0$ für $q \notin U$.
Man kann es beweisen, dass f glatt auf M ist. $\square$

Diffeomorphismen

Eine Abbildung $f: M \longrightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten heißt Diffeomorphismus, wenn f eine Bijektion ist, und f und f^{-1} glatt sind.

Tangentialvektoren und Ableitungen

Im Folgenden bezeichnen wir mit M und N Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Eine Kurve durch $p \in M$ ist eine Kurve $c: I \longrightarrow M$ wobei I ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $c(0) = p$ ist.

SATZ UND DEFINITION. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann nennen wir zwei glatte Kurven c_0 und c_1 durch p äquivalent, wenn bezüglich einer Karte x um p gilt

$$\frac{d(x \circ c_0)}{dt}(0) = \frac{d(x \circ c_1)}{dt}(0).$$

Dies hängt nicht von der Wahl der Karte x ab, und definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der glatten Kurven durch p.

Eine Äquivalenzklasse nennen wir einen Tangentialvektor an M in p.

Die Menge T_pM aller Tangentialvektoren an M in p heißt Tangentialraum an M in p

die Menge $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ heißt das Tangentialbündel von M.

Beweis. Für $p \in M$ und eine glatte Kurve c durch p bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von c mit $[c]$. Für eine Karte x um p setzen wir $\sigma := x \circ c$, und sagen, dass $v := \sigma'(0)$ ein Repräsentant ist.

Es seien c_0 und c_1 Kurven durch p, die bezüglich der Karte x um p äquivalent sind. Es sei y eine weitere Karte um p und setze

$$\sigma_i = x \circ c_i \quad , \quad \tau_i = y \circ c_i \quad , \quad i \in \{1,2\}.$$

Wegen $\tau_i = (y \circ x^{-1}) \circ \sigma_i$ folgt mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\tau_0'(0) &= D(y\circ x^{-1})|_{x(p)}(\sigma_0'(0)) \\ &= D(y \circ x^{-1})|_{x(p)}(\sigma_1'(0)) \\ &= \tau_1'(0). \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung. Es sei c eine glatte Kurve durch $p \in M$ und x eine Karte um p. Setze $u := x(p)$ und $v = \sigma'(0)$ mit $\sigma := x\circ c$, so ist

$$\tilde{c} : t \longmapsto x^{-1}(u + tv) \quad , \quad -\varepsilon < t < \varepsilon$$

eine zu c äquivalente glatte Kurve durch p.

Notation: Für eine glatte Kurve $c: I \longrightarrow M$ und $s \in I$ ist $t \mapsto c(s+t), -\varepsilon < t < \varepsilon$, eine Kurve durch $p := c(s)$. Wir setzen nun

$$\dot{c}'(s) := [t \mapsto c(s+t)] \in T_p M,$$

$c'(s)$ bezeichnet also die Klasse der Kurven durch ein $c(s)$.

SATZ UND DEFINITION. Es seien M und N Mannigfaltigkeiten und $f: M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei p ein Punkt in M, und seien c_0, c_1 äquivalente glatte Kurven durch p. Dann sind $f \circ c_0$ und $f \circ c_1$ äquivalente glatte Kurven durch $f(p)$. Damit erhalten wir die Zuordnung

$$f_{*p} : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N, \quad [c] \longmapsto [f \circ c],$$

die wir die Ableitung von f in p nennen. Die induzierte Abbildung

$$f_* : TM \longrightarrow TN$$

heißt die Ableitung von f.

Beweis. Es seien c_0 und c_1 Kurven durch p mit $[c_0] = [c_1]$. Es seien x eine Karte von M um p und y eine Karte von N um $f(p)$. Seien

$$\sigma_j := x \circ c_j,$$
$$\tau_j := y \circ f \circ c_j, \qquad j \in \{1, 2\}.$$

Wegen $\tau_j = (y \circ f \circ x^{-1}) \circ \sigma_j$ ergibt sich aus der Kettenregel:

$$\tau_0'(0) = D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} (\sigma_0'(0))$$
$$= D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} (\sigma_1'(0)) = \tau_1'(0). \quad \square$$

SATZ (Kettenregel) Für glatte Abbildungen $f: M \to N$ und $g: N \to P$ zwischen Mannigfaltigkeiten gilt

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* .$$

Beweis: Es sei $p \in M$ und c eine glatte Kurve durch p. Dann ist $f \circ c$ eine glatte Kurve durch $f(p)$ und

$$\begin{aligned}(g\circ f)_{*p}([c]) := [(g \circ f)\circ c] &= [g \circ (f \circ c)] \\ &= g_{*f(p)}([f\circ c]) \\ &= g_{*f(p)}(f_{*p}([c])). \\ &= (g_{*f(p)} \circ f_{*p})([c]). \quad \square\end{aligned}$$

Was uns noch fehlt, ist eine lineare Struktur auf den Tangentialräumen, sodass Ableitungen zu linearen Abbildungen werden.

Es sei dazu $p \in M$ und x eine Karte von M um p. Wir behaupten, dass die Abbildung

$$dx(p) : T_p M \to \mathbb{R}^m,$$

$$dx(p)([c]) := \frac{d(x\circ c)}{dt}(0)$$

eine Bijektion ist.

Wir erklären nun eine Vektorraumstruktur auf T_pM, sodass $dx(p)$ zu einem Isomorphismus wird.

SATZ UND DEFINITION Es seien $[c_0], [c_1], [c_2] \in T_p M$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Man setze $\sigma_j := x \circ c_j$, $j \in \{0,1,2\}$. Dann sind die Verknüpfungen

$$[c_0]+[c_1]:=[c_2] \Longleftrightarrow \sigma_0'(0)+\sigma_1'(0)=\sigma_2'(0) \qquad (*)$$

$$\alpha\cdot[c_0]:=[c_1] \Leftrightarrow \alpha\sigma_0'(0)=\sigma_1'(0),$$

unabhängig von der Wahl der Karte x. Bezüglich $+$ und $\cdot$ ist T_pM ein reeller Vektorraum, sodass

$$dx(p): T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

zu einem <u>Isomorphismus</u> wird. Die Ableitung

$$f_{*p}: T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

einer glatten $f: M \longrightarrow N$ ist linear.

Beweis. Wir nehmen es an, dass die rechten Seiten in $(*)$ gelten. Sei nun y eine weitere Karte von M um p. Wie üblich setzen wir

$$\tau_j := y \circ c_j,$$

sodass

$$\tau_j = (y\circ x^{-1})\circ\sigma_j \text{ gilt.}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tau_0'(0)+\tau_1'(0) &= D(y\circ x^{-1})|_{x(p)}(\sigma_0'(0)) + D(y\circ x^{-1})|_{x(p)}(\sigma_1'(0)) \\
&= D(y\circ x^{-1})|_{x(p)}(\sigma_0'(0)+\sigma_1'(0)) \\
&= D(y\circ x^{-1})|_{x(p)}(\sigma_2'(0)) \\
&= \tau_2'(0).
\end{aligned}$$

Deswegen ist $+$ von der Wahl von Karte unabhängig. Analog beweist man die Behauptung für $\cdot$.

Es sei nun $f: M \to N$ eine glatte Abbildung und y eine Karte von N um $f(p)$.
Für $\sigma_j := x \circ c_j$ und $\tau_j := y \circ f \circ c_j$ gilt dann

$$\tau_j = (y \circ f \circ x^{-1}) \circ \sigma_j .$$

$$\Rightarrow \quad \tau_0'(0) + \tau_1'(0) = D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} \left(\sigma_0'(0) + \sigma_1'(0) \right)$$

$$= D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} (\sigma_2'(0))$$

$$= \tau_2'(0) .$$

Somit ist f_{*p} additiv. $\square$

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "f_{*p}"] \arrow[d, "dx(p)"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "dy(f(p))"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "D(y \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Nun erweitern wir das Spektrum der Ableitungen um das <u>Differential</u> einer glatten $f: M \to V$, wobei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum ist.
Wir identifizieren $T_{f(p)}V \simeq V$ und erklären $df(p)$ dadurch, dass

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "f_{*p}"] \arrow[d, "dx(p)"'] \arrow[dr, "df(p)"] & T_{f(p)}V \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "D(f \circ x^{-1})|_{x(p)}"'] & V \end{tikzcd}$$

d.h., $df(p)([c]) = \dfrac{d(f \circ c)}{dt}(0) \in V$,

$[c] \in T_pM$.

SATZ UND DEFINITION** Es sei M ein Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Es sei c eine glatte Kurve durch p mit $[c] = v$. Dann ist die Ableitung in Richtung v, die wir auch mit v bezeichnen:

$$v : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(f) := \frac{d(f \circ c)}{dt}(0), \qquad (**)$$

wohldefiniert, $\mathbb{R}$-linear und erfüllt die Produktregel

$$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g).$$

Umgekehrt gibt es zu jeder $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $a : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, die die Produktregel erfüllt, ein $v \in T_pM$ derart, dass a die Ableitung in Richtung v ist.

Im Sinne von $(**)$ berechnet sich die Ableitung einer glatten $h : M \longrightarrow N$ zu

$$h_{*p}(v)(f) =: h_*(v)(f)$$
$$= v(f \circ h), \qquad v \in TM \text{ und } f \in \mathcal{F}(N). \quad \square$$

Wir können nun zurück auf die Berechnung von Differentialen bezüglich lokaler Koordinaten. Es sei dazu $x : U \longrightarrow U'$ eine Karte von M. Zu $p \in U$ erhalten wir die den Koordinatenrichtungen entsprechenden Tangentialvektoren

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p := [t \longmapsto x^{-1}(x(p) + t\,\underline{e}_i)] \in T_pM, \qquad i \in \{1, \dots, m\},$$

wobei $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^m$ den i-ten Einheitsvektoren bezeichnen.

Im Sinne von $(**)$ ist damit

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) = D(f \circ x^{-1} \circ x \circ \tilde{c}_i)(0), \quad \text{wobei } \tilde{c}_i : t \longmapsto x^{-1}(x(p) + t\,\underline{e}_i).$$

Wegen der Kettenregel ergibt sich also

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f) = D(f \circ x^{-1})\big|_{x(p)} \underbrace{D(x \circ \tilde{c}_i)(0)}_{e_i}$$

$$= \left(\partial_1 (f \circ x^{-1})\big|_{x(p)} \cdots \partial_m (f \circ x^{-1})\big|_{x(p)} \right) e_i$$

$$= \partial_i (f \circ x^{-1})\big|_{x(p)} . \quad \diamond$$

Für die Komponenten von x, etwa x^j gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (x^j) = \delta^j_i , \quad \forall i,j \in \{1, \dots, m\} . \qquad (!)$$

SATZ. Für $v \in T_p M$ ist

$$v = v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p := \sum_{i=1}^m v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p . \quad \square$$

One usually writes the following:

$$\dot{x}^i(v) := v(x^i), \text{ so that } v = \sum_{i=1}^m \dot{x}^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(v)}$$

In mechanics, we use q instead of x to denote charts.