Índice general

Capítulo 1

Introducción

Considero que una de las materias más complicadas para los alumnos que cursan la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales que se imparte en la Escuela Superior de Cómputo del Intituto Politécnico Nacional (ESCOM-IPN), y en especial para aquellos que se inclinan en el área de la Electrónica es la asignatura de Metodos Matemáticos.

La presente selección de problemas resueltos de la materia de Métodos Matemáticos, tiene como objetivo principal proporcionar al alumno que cursa la materia, un apoyo bibliográfico más para el entendimiento de la misma, esperando que le sea de gran ayuda, en la aplicación de la teoría adquirida en el salón de clases y poder ejercitar sus conocimientos en la solución de problemas similares. La mayoría de los problemas resueltos, son problemas que están propuestos en libros tradicionales de la materia, como por ejemplo, el libro de Análisis de Fourier de la editorial Addison-Wesley Iberoamericana, cuyo autor es Hwei P. Hsu., y el libro de Matemáticas Avanzadas para Ingeniería de la editorial Cecsa, cuyo autor es Peter V. OÑeil., entre otros.

En la mayoria de los problemas se trató de ilustrar al alumno el más mínimo paso algebraico, así como una ilustración geométrica de algunos problemas, con la finalidad de que el alumno entienda mejor la solución de los mismos.

La mayoria de los problemas están basados en exámenes departamentales, exámenes extraordinarios y exámenes especiales que el autor ha aplicado, así como en ejercicios de clases en la impartición de la materia en el segundo semestre del ciclo escolar 2002-2003 en la ESCOM-IPN.

La idea de escribir esta serie de problemas, es debida principalmente a la experiencia que el autor ha adquirido al impartir la materia en el cuarto semestre en la ESCOM-IPN, de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales y en la cual el índice de alumnos que no aprueban la materia es muy alto

Los problemas se encuentran distribuidos de la siguiente forma:

En el capítulo 1 se tratan problemas que comprenden lo relacionado a Variable Compleja; desde las operaciones básicas de los números complejos, algunos problemas de aplicación a la Geometría Analítica, pasando por derivación de funciones de Variable Compleja y aplicaciones de las condiciones de Cauchy-Riemann. En este capítulo, se pone énfasis en los problemas de expandir una función en series de Mc Laurin, de Taylor y de Laurent. Finalmente, se abordan problemas de Integración de funciones de Variable Compleja; aplicaciones del teorema de Cauchy y aplicaciones del mismo, hasta llegar al teorema del Residuo y algunas aplicaciones al calculo de integrales de funciones de Variable Real.

En el capítulo 2 se tratan problemas relacionados con el Análisis de Fourier; desde la representación en serie de Fourier de cualquier función periódica y no periódica, pasando por problemas de la transformada de Fourier de cualquier función y funciones especiales (función delta de Dirac, de Heaviside, etc.) y algunas aplicaciones (espectros de frecuencia y de fase), hasta llegar a algunas aplicaciones de la TF como convolución y correlaciøñ de funciones, que son temas que generalmente se dificultan al alumno y que el autor trata de ejemplificar paso a paso la teoría. Al final del presente problemario, se presentan algunos problemas en cuya solución involucra ecuaciones diferenciales parciales.

Finalmente, como en cualquier tipo de trabajo, el lector tendrá la última palabra en decidir si se cumple el objetivo principal, así también, el autor está abierto a todo tipo de comentarios y sugerencias que serán bien venidas para la mejora del presente trabajo.

Capítulo 2

Problemas de Variable Compleja

En esta parte del problemario presentamos algunos problemas que van desde la ilustración de las operaciones básicas de los números complejos pasando por..

2.1. Operaciones básicas de números complejos

1. Aplique operaciones básicas de números complejos,

   a) Escribir el siguiente número complejo

   $$\frac{j}{1+\frac{j}{1+\frac{1}{j}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{j}}},$$

   de la forma $a+bi$.

   b) Encontrar la parte real e imaginaria del siguiente número complejo

   $$z=\frac{j}{1+j+\frac{j}{1+j+\frac{j}{1+j}}}$$

Solución:

a) Aplicando las operaciones elementales de números complejos,

$$\begin{aligned}
\frac{j}{1+\frac{j}{1+\frac{1}{j}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{j}}} &= \frac{j}{1+\frac{j}{1-j}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1-j}} \\
&= \frac{j}{1+\frac{j(j+1)}{2}}+\frac{1}{1+\frac{1+j}{2}} \\
&= \frac{j}{1+\frac{j-1}{2}}+\frac{1}{1+\frac{1+j}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2j}{1+j} + \frac{2}{3+j} \\
&= \frac{2j(1-j)}{2} + \frac{2(3-j)}{10} \\
&= 1 + j + \frac{3}{5} - \frac{1}{5}j \\
&= \frac{8}{5} + \frac{4}{5}j.
\end{aligned}
$$

b) Aplicando operaciones elementales de suma, multiplicación y división de números complejos obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\frac{j}{1+j} &= \frac{j(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{(1+j)}{2} \\
\frac{j}{1+j+\frac{j}{1+j}} &= \frac{2}{3}\frac{j}{(1+j)}\frac{1-j}{1-j} = \frac{2}{3}\frac{(1+j)}{2} = \frac{1}{3}(1+j)
\end{aligned}
$$

finalmente,

$$
\begin{aligned}
\frac{j}{1+j+\frac{j}{1+j+\frac{j}{1+j}}} &= \frac{j}{1+j+\frac{1}{3}(1+j)} \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{j}{1+j}\right) \\
&= \frac{3}{4}\frac{j(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{3}{8}(1+j),
\end{aligned}
$$

por lo tanto;

$$
Re(z) = \frac{3}{8} \quad Im(z) = \frac{3}{8}
$$

2. *a*) Resolver la ecuación $\sin(z) = 1$. La función logaritmo compleja puede tomarse definida por $log(z) = ln(|z|) + jArg(z)$, donde $Arg(z)$ es el argumento principal de z.

   b) Demostrar que
$$\left|\tau' + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4},$$
   si $\tau' = \frac{2-3\tau}{4\tau-3}$, y τ es un complejo tal que $\left|\tau - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

Solución:

a) Sabemos que $sen(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, así la ecuación $sen(z) = 1$ es equivalente a
$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i$$
multiplicando esta ecuación por e^{iz} y resolviendo la ecuación cuadrática en e^{iz} obtenemos;
$$\left(e^{iz}\right)^2 - 1 = 2ie^{iz}$$
o también,
$$\left(e^{iz}\right)^2 - 2i(e^{iz}) - 1 = 0 \quad ; si \quad y = e^{iz}$$
entonces
$$y = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 + 4}}{2} = \frac{2i}{2} = i$$
de esta forma
$$e^{iz} = i,$$
por otro lado si $z = e^w$, donde z y w son complejos, entonces
$$w = \log z$$
donde $\log z = \ln|z| + i \arg z$, por lo tanto, si $e^{iz} = i$ entonces,
$$iz = \log(i) = \ln|i| + i \arg(i) = i\frac{\pi}{2}$$
finalmente
$$z = \frac{\pi}{2},$$
obsérvese que tomamos el argumento principal del complejo i.

b) Sustituyendo el valor de $\tau' = \frac{2-3\tau}{4\tau-3}$ obtenemos;
$$\left|\tau' + \frac{3}{4}\right| \quad = \quad \left|\frac{2-3\tau}{4\tau-3} + \frac{3}{4}\right|$$

realizando pasos algebraicos,

$$\begin{aligned} \left|\tau' + \frac{3}{4}\right| &= \frac{1}{4}\left|\frac{2 - 3\tau + 3\left(\tau - \frac{3}{4}\right)}{\tau - \frac{3}{4}}\right| \\ &= \frac{1}{4}\left|\frac{2 - 3\tau + 3\tau - \frac{9}{4}}{\tau - \frac{3}{4}}\right| \\ &= \frac{1}{4}\left|\frac{-\frac{1}{4}}{\tau - \frac{3}{4}}\right| \end{aligned}$$

y aplicando la hipótesis de que $\left|\tau - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$ obtenemos finalmente

$$\left|\tau' + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

2.2. Potencias y raices de ecuaciones

3. *a*) Encontrar todos los valores del número complejo z, y localizarlos en el plano complejo si:

$$z^3 = -8i$$

b) Describir el lugar geométrico de los puntos en el plano complejo que satisfacen la ecuación,

$$|z + 2i| = |z + 1 - 3i|$$

Solución:

a) En forma polar el numero complejo $-8i$ se puede escribir como:

$$-8i = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

en forma más general,

$$-8i = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]$$

por otro lado si $z = r\left(\cos\theta + isen\theta\right)$ aplicando el teorema de De Moivre,

$$z^3 = r^3\left(\cos 3\theta + i\sin 3\theta\right),$$

de las ecuaciones anteriores obtenemos,

$$z^3\left(\cos 3\theta + i\sin 3\theta\right) = -8i = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right].$$

Aplicando la igualdad de números complejos obtenemos,

$$\begin{aligned} r^3 &= 8, \\ \theta &= \frac{1}{3}\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] = \frac{(4k-1)\pi}{6}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{(4k-1)\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(4k-1)\pi}{6}\right)\right]$$

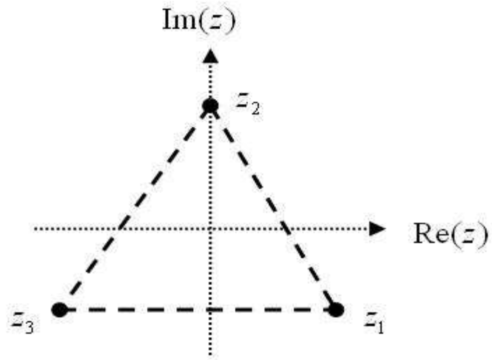


Figura 2.1: Raíces de la ecuación $z^3 + 8i = 0$.

para $k = 0, 1, 2$. Geométricamente, los número complejos se ilustran en la figura siguiente.

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i \\
z_2 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i \\
z_3 &= 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i
\end{aligned}$$

b) Recordemos que $|z - w|$ representa la distancia entre los números complejos z y w en el plano complejo, así $|z + 2i| = |z + 1 - 3i|$ nos dice que la distancia entre z y $-2i$ y z y $-1 + 3i$ es la misma. Por lo tanto el número complejo z debe equidistar a ambos puntos solamente si z esta en la resta perpendicular al segmento de recta entre estos puntos y que bisceta al segmento, es decir; si, $z = x + iy$ entonces,

$$\begin{aligned}
|z + 2i| &= |z + 1 - 3i| \\
|x + iy + 2i| &= |x + iy + 1 - 3i| \\
|x + (y + 2)\, i| &= |(x + 1) + (y - 3)\, i| \\
\sqrt{x^2 + (y + 2)^2} &= \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} \\
x^2 + y^2 + 4y + 4 &= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\
4y + 4 &= 2x - 6y + 10,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación de una recta,

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}.$$

4. Encuentre las raices de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ y representarlas en el plano complejo.

   Solución:

   Para encontrar las raices de $z^4 = -1$ procedemos de la siguiente forma: Escribimos la ecuación de la forma $z^4 = -4$, donde el complejo -4 en forma polar está dado por,

$$-4 = 4\left[\cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k)\right],$$

   por otro lado, si $z = R[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$, aplicando el teorema de De Moivre obtenemos

$$z^4 = R^4[\cos(4\varphi) + i\sin(4\varphi)],$$

   de las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} R^4 &= 4 \\ \varphi &= \frac{\pi + 2\pi k}{4} \end{aligned}$$

   de donde, $R = \sqrt{2}$ y $k = 0, 1, 2, 3$. De esta forma las raices de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ están dadas por,

$$z = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right],$$

   explícitamente, tenemos

$$\begin{array}{lll} k = 0 \;\rightarrow & z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] & = 1 + i \\ k = 1 \;\rightarrow & z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] & = -1 + i \\ k = 2 \;\rightarrow & z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] & = -1 - i \\ k = 3 \;\rightarrow & z_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] & = 1 - i \end{array}$$

   Como podemos observar las raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ forman un cuadrado, como se muestra en la figura.

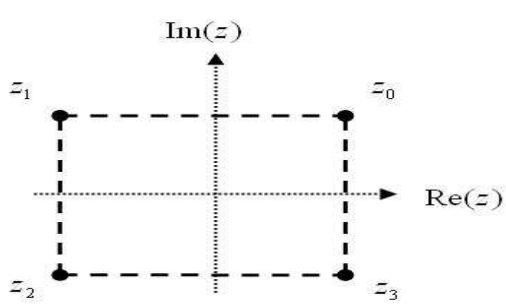


Figura 2.2: Raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$.

2.3. mapeos

5. La transformación $w = \alpha z + \beta$ (donde α y β son números complejos constantes) mapea el punto $z = 1 + j$ en el punto $w = j$ y el punto $z = 1 - j$ en el punto $w = -1$.

   a) Determine α y β.

   b) Encuentre e indique la región en el plano w correspondiente a la parte $Re(z) \geq 0$ en el plano z.

   c) Encuentre y grafique la región en el plano w correspondiente a $|z| < 1$ en el plano z.

   Solución:

   a) Si el complejo $z = 1 + j$ se mapea en $w = j$, entonces

   $$j = \alpha(1 + j) + \beta \quad \rightarrow \quad (a)$$

   asimismo, si $z = 1 - j$ se mapea en $w = -1$, entonces

   $$-1 = \alpha(1 - j) + \beta \quad \rightarrow \quad (b)$$

   es decir, tenemos 2 ecuaciones con 2 incognitas, a saber α y β. Restando la ec. (b) de la ec. (a), obtenemos

   $$j + 1 = 2\alpha,$$

   es decir, $\alpha = \frac{1}{2j}(1 + j)$ o también, $\alpha = \frac{1}{2}(1 - j)$. Sustituyendo α en la ec. (a) obtenemos,

   $$j = \frac{1}{2}(1 - j)(1 + j) + \beta = 1 + \beta,$$

   es decir, $\beta = j - 1$. De esta forma el mapeo original se puede escribir de la forma,

   $$w = f(z) = \frac{1}{2}(1 - j) + (j - 1) = (1 - j)(z/2 - 1).$$

   b) Debemos de expresar las partes real e imaginaria de z (x y y) en términos de las partes real e imaginaria de w (u y v); para así poder encontrar la imagen de las curvas o regiones específicas en el plano w a las correspondientes del plano z. Por lo tanto, si $z = x + jy$ y $w = u + jv$, entonces

   $$u + jv = (1 - j)\left[(x + jy)/2 - 1\right],$$

haciendo un poco de álgebra,

$$\begin{aligned}
\frac{u+jv}{1-j}\left(\frac{1+j}{i+j}\right) &= \frac{1}{2}(x+jy)-2 \\
\frac{1}{2}(u+jv)(1+j) &= \frac{1}{2}(x+jy)-1 \\
(u-v)+(u+v)j &= (x-2)+jy,
\end{aligned}$$

de tal forma que igualando la partes real e imaginaria, obtenemos

$$\begin{aligned}
u-v &= x-2 \\
u+v &= y,
\end{aligned}$$

La primera de éstas últimas ecuaciones es la que nos sirve para ver como los puntos $Re(z) = x > 0$ del plano z se mapean en el plano w. Obsérvese que dichos puntos son aquellos que satisfacen la desigualdad $u - v + 2 \geq 0$, es decir; $u - v \geq -2$, que es la región acotada por la recta $u - v = -2$ como se muestra en la figura en el plano w.

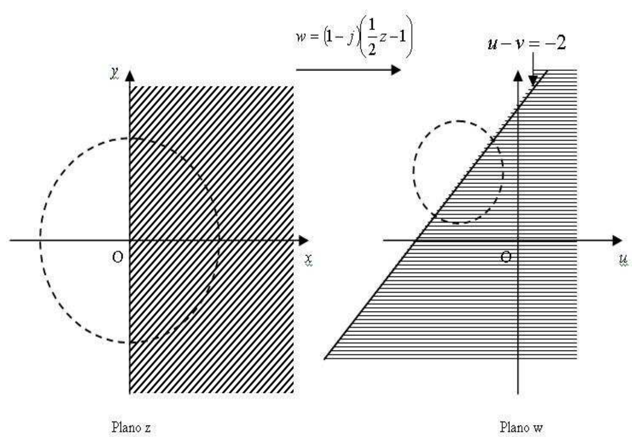


Figura 2.3: Raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$.

c) Para ver los puntos en el plano w correspondientes al interior del círculo $|z| = 1$, $(x^2 + y^2 = 1)$, en el plano z, sustituimos los valores de x y y en función de u y v encontrados en el inciso (b), es decir;

$$(u-v+2)^2 + (u+v)^2 = 1$$

haciendo un poco de álgebra,

$$\begin{aligned}
2u^2+2v^2+4u-4v+4 &= 1 \\
u^2+v^2+2u-2v+3/2 &= 0,
\end{aligned}$$

finalmente completando cuadrados obtenemos,

$$(u+1)^2 + (v-1)^2 = \frac{1}{2},$$

que es un círculo con centro en $(-1, 1)$ y radio $\sqrt{1/2}$. De esta forma, si $x^2 + y^2 < 1$ entonces $(u+1)^2 + (v-1)^2 < \frac{1}{2}$. Así la región dentro del círculo en el plano z corresponde a la región dentro de su círculo imagen en el plano w, como se muestra en la figura.

2.4. Aplicaciones del Teorema de De Moivre

6. Mostrar que la ecuación de una circunferencia en el plano z se puede escribir de la forma,

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0,$$

donde α y γ son constantes reales, mientras que β puede ser una constante compleja.

Solución:

Recordemos que la ecuación general de una circunferencia en el plano xy está dada por

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0,$$

por otro lado, si

$$\begin{aligned} z &= x + y \\ \overline{z} &= x - iy \end{aligned}$$

entonces, $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$, por lo tanto

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left[\frac{1}{2}(z + \overline{z})\right]^2 + \left[\frac{1}{2i}(z - \overline{z})\right]^2 \\ &= \left[\frac{1}{4}\left(z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2\right) - \frac{1}{4}\left(z^2 - 2z\overline{z} + \overline{z}^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}z\overline{z} + \frac{1}{2}z\overline{z} \\ &= z\overline{z} \end{aligned}$$

así, sustituyendo en la ecuación de la circunferencia,

$$A(z\overline{z}) + B\left[\frac{1}{2}(z + \overline{z})\right] + C\left[\frac{1}{2i}(z - \overline{z})\right] + D = 0,$$

reordenando términos,

$$A(z\overline{z}) + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)z + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)\overline{z} + D = 0,$$

de esta forma, si identificamos a las constantes

$$\begin{aligned} \alpha &= z\overline{z} \\ \beta &= \frac{B}{2} + \frac{C}{2i} \\ \overline{\beta} &= \frac{B}{2} - \frac{C}{2i} \\ \gamma &= D, \end{aligned}$$

la ecuación de la circunferencia se puede escribir finalmente de la forma,

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0,$$

7. Probar la siguiente identidad triginométrica de Lagrange

$$\sum_{j=1}^{n} \cos(j\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$

Solución:

Para este problema hacemos uso de la Identidad,

$$\sum_{j=0}^{n} z^j = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

que es válida si $z \neq 1$.

Sea $z = \cos\theta + j\sin\theta$, obtenemos:

$$1+(\cos\theta+j\sin\theta)+(\cos\theta+j\sin\theta)^2+\ldots+(\cos\theta+j\sin\theta)^n = \frac{1-(\cos\theta+j\sin\theta)^{n+1}}{1-(\cos\theta+j\sin\theta)}$$

utilizando el Teorema de De Moivre que establece que:

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

La expresión anterior se puede escribir de la forma,

$$1 + \cos\theta + j\sin\theta + \ldots + \cos n\theta + j\sin n\theta = \frac{1-\cos(n+1)\theta - j\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta - j\sin\theta}$$

pero el lado derecho de a ecuación se puede escribir de la forma,

$$\frac{1-\cos(n+1)\theta - j\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta - j\sin\theta} = \frac{1-\cos(n+1)\theta - j\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta - j\sin\theta}\left(\frac{1-\cos\theta + j\sin\theta}{1-\cos\theta + j\sin\theta}\right)$$

simplificando el lado derecho de la ecuación, e identificando a esta parte como Ω, tenemos

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{1}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}[(1-\cos\theta)(1-\cos(n+1)\theta) + \sin\theta\sin(n+1)\theta] \\
&+ j[\sin\theta(1-\cos(n+1)\theta) - (1-\cos\theta)\sin(n+1)(n+1)\theta] \\
&= \frac{1-\cos\theta - \cos(n+1)\theta + \cos(n+1)\theta\cos\theta + \sin(n+1)\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} \\
&+ j\left[\frac{\sin\theta - \sin(n+1)\theta + \sin(n+1)\theta\cos\theta - \cos(n+1)\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right]
\end{aligned}$$

así, igualando las partes real e imaginaria obtenemos;

$$\begin{aligned}
1+\cos\theta+\ldots+\cos n\theta &= \frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos(n+1)\theta\cos\theta+\sin(n+1)\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\\
\sin\theta+\ldots+\sin n\theta &= \frac{\sin\theta-\sin(n+1)\theta+\sin(n+1)\theta\cos\theta-\cos(n+1)\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}
\end{aligned}$$

utilizando la suma del coseno de 2 angulos;

$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$$

donde $A=(n+1)\theta$ y $B=\theta$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta &= \frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos[(n+1)\theta-\theta]}{2(1-\cos\theta)}\\
&= \frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos n\theta}{2(1-\cos\theta)}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)}
\end{aligned}$$

utilizando la igualdad $\cos A-\cos B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)$
con $B=(n+1)\theta$ y $A=n\theta$ obtenemos:

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{2\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]\sin\frac{\theta}{2}}{2(1-\cos\theta)}$$

por otro lado, sabemos que,

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

es decir,

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\theta\right)$$

de donde,

$$2(1-\cos\theta)=4\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta &= \frac{1}{2}+\frac{2\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]\sin\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

En forma análoga, utilizando la identidad del seno de la suma de 2 ángulos,

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B,$$

con $A = (n+1)\theta$ y $B = \theta$ obtenemos;

$$\begin{aligned} \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta &= \frac{\sin\theta - \sin(n+1)\theta + \sin[(n+1)\theta - \theta]}{2(1-\cos\theta)} \\ &= \frac{\sin\theta - \sin(n\theta) - \sin(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)} \end{aligned}$$

y utilizando la siguiente identidad,

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

donde,

$$\begin{aligned} A &= n\theta \\ B &= (n+1)\theta \end{aligned}$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} A+B &= (2n+1)\theta \\ A-B &= n-(n+\theta)\theta = -\theta \end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \sin(j\theta) &= \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta \\ &= \frac{\sin\theta + 2\cos\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)}{2(1-\cos\theta)} \\ &= \frac{\sin\theta - 2\cos\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2(1-\cos\theta)}. \end{aligned}$$

2.5. Derivación Compleja

2.5.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

8. *a*) Defina el concepto de función analítica y función armónica.

   b) Pruebe que $\phi = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1$ puede ser la parte real de una función analítica.

   c) Determine la función imaginaria de la función analítica.

Solución:

a) Se dice que una función $f(z)$ es analítica en z_0 si $f'(z)$ no sólo existe en z_0, sino en todo punto de alguna vecindad de z_0; es decir, existe un número R tal que $f'(z)$ existe para toda z en $|z - z_0| < R$.

Se dice que una función es armónica en un dominio si satisface la ecuación de Laplace en dicho dominio.

b) Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica, las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de C-R:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x, \end{aligned}$$

diferenciando la primera ecuación con respecto a x y la segunda ecuación con respecto a y se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

si las segundas derivadas parciales son continuas, se demuestra del cálculo que

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

por lo tanto, de las ecuaciones anteriores se demuestra que,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

En forma análoga se demuestra que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Es decir, la parte real y la parte imaginaria de una función analítica deben satisfacer una ecuación de Laplace de la forma;

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

En este caso para la función dada $\phi = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= 12xy^2 - 4x^3 - 1 \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= 12x^2 - 4y^3 + 1
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= 12y^2 - 12x^2 \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 12x^2 - 12y^2
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

c) Para determinar la parte imaginaria de la función analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, aplicamos las ecuaciones de C-R, dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned}$$

si identificamos a $u(x,y) = \phi(x,y) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1$, aplicando la primera ecuación de C-R, obtenemos;

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 12xy^2 - 4x^3 - 1,$$

si integramos parcialmente con respecto a y obtenemos:

$$v(x,y) = 4xy^3 - 4x^3y - y + f(x),$$

de donde,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4y^3 - 12x^2y + \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

y aplicando la segunda ecuación de C-R obtenemos:

$$12x^2y - 4y^3 + 1 = -4y^3 + 12x^2y - \frac{\partial f}{\partial x},$$

integrando nuevamente, obtenemos $f(x) = -x + cte$. Por lo tanto, la parte imaginaria de la función analítica $f(z) = u + iv$ está dada por:

$$v(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y - x - y + cte.$$

9. *a*) Demostrar que $u = 2x(1-y)$ es armónica.

   b) Encontrar una función v tal que $w = f(z) = u + iv$ sea analítica.

Solución:

a) Para mostrar que la función $u = 2x\,(1-y)$ es armónica debemos mostrar que satisface la ecuación de Laplace dada por

$$\bigtriangledown^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

de donde:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,(1-y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

por tanto cumple $\bigtriangledown^2 u = 0$.

b) Para encontrar v tal que $w = u + iv$ sea analítica, apliquemos las condiciones de Cauchy-Riemann (C-C-R) que están definidas de la forma:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ v_x &= -u_y \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial u}{\partial y} = 2\,(1-y)$ aplicando la primera C-C-R, e integrando parcialmente con respecto a y, obtenemos

$$v = 2\left(y - \frac{y^2}{2}\right) + g\,(x)\,,$$

de donde, derivando parcialmente con respecto a x, obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g(x)}{\partial x}.$$

Asimismo, si aplicamos la segunda C-C-R e integramos obtenemos

$$g(x) = x^2,$$

finalmente se tiene,

$$v(x,y) = 2y - y^2 + x^2 + cte.$$

la constante de integración depende de las condiciones iniciales, en este caso podemos suponer que es igual a cero. Por lo tanto, la función analítica $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ estará dada por:

$$f(x,y) = 2x(1-y) + i\left[2y - y^2 + x^2\right].$$

Si hacemos $y = 0$ en la ecuación anterior, obtenemos,

$$f(x) = u(x,0) + iv(x,0) = 2x + ix^2,$$

de donde reemplazando x por z;

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = 2z + iz^2.$$

Obsérvese que si $z = x + iy$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= 2(x+iy) + i(x^2 - y^2 + 2xyi) \\ &= 2x(1-y) + i(y - y^2 + x^2) \end{aligned}$$

10. Aplique las ecuaciones de Cauchy-Riemann para,

a) Demostrar que la función $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ es armónica.

b) Encontrar v tal que $f(z) = u + iv$ sea analítica.

c) Expresar $f(z)$ en términos de z.

Solución:

a) Debemos verificar que la función u satisface la ecuación de Laplace, de la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

de esta forma, si $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$, calculando las derivadas parciales con respecto a x y y, obtenemos

$$\begin{aligned} u_x = \frac{\partial u}{\partial x} &= -e^{-x}(x \sin y - y \cos y) + e^{-x} \sin y \\ &= e^{-x}[(1-x)\sin y - y \cos y], \end{aligned} \tag{2.1}$$

de donde,

$$\begin{aligned} u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -e^{-x}[(1-x)\sin y - y \cos y] - e^{-x} \sin y \\ &= e^{-x}[(x-2)\sin y - y \cos y], \end{aligned} \tag{2.2}$$

En forma análoga derivando parcialmente con respecto a y

$$\begin{aligned} u_y = \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{-x}(x \cos y - \cos y + y \sin y) \\ &= e^{-x}[(x-1)\cos y + y \sin y], \end{aligned} \tag{2.3}$$

de donde,

$$\begin{aligned} u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -e^{-x}[-(x-1)\sin y + y \sin y + y \cos y] \\ &= e^{-x}[(2-x)\sin y + y \cos y], \end{aligned} \tag{2.4}$$

de las ecuaciones (2.2) y (2.4), vemos inmediatamente que se cumple

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

b) Para encontrar la función v conjugada de u tal que $f(z) = u + jv$ sea analítica aplicamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, dadas por

$$u_x = v_y \quad \rightarrow \quad (a)$$

$$v_x = -u_y \quad \rightarrow \quad (b)$$

Aplicando la primera ecuación de Cauchy-Riemann (ver ecuaciones (2.3) y (a)), obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-x}[(1-x)\sin y - y\cos y]$$

integrando parcialmente con respecto a y, obtenemos

$$\begin{aligned} v = &= -e^{-x}[(x-1)\cos y - y\sin y - \cos y] + g(x) \\ &= e^{-x}(y\sin y + x\cos y) + g(x), \end{aligned} \tag{2.5}$$

derivando parcialmente con respecto a x, obtenemos

$$\begin{aligned} v_x = \frac{\partial v}{\partial x} &= -e^{-x}(x\cos y - y\sin y) + e^{-x}\cos y) + g'(x) \\ &= e^{-x}[(1-x)\cos y - y\sin y] + g'(x), \end{aligned} \tag{2.6}$$

aplicanco la segunda condición de Cauchy Riemann (comparando las ecuaciones (2.4) y (2.7)), obtenemos inmediatamente que

$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = cte$$

finalmente de la ecuación (16), la función v está dada por,

$$v = e^{-x}(y\sin y + x\cos y) + cte.$$

c) De los incisos anteriores la función analítica está dada por,

$$\begin{aligned} f(z) = f(x+jy) &= u(x,y) + jv(x,y) \\ &= e^{-x}\left(x\sin y - y\cos y\right) + j\left[e^{-x}(y\sin y + x\cos y) + g(x)\right] \end{aligned}$$

Una forma de representar a la función en términos de la variable z por ejemplo si,

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = u(x,0) + jv(x,0)$$

y hacemos el cambio x por z, de tal forma que,

$$f(z) = u(z,0) + jv(z,0)$$

pero

$$\begin{aligned} u(z,0) &= 0 \\ v(z,0) &= ze^{-z} \end{aligned}$$

finalmente obtenemos,

$$f(z) = jze^{-z}$$

salvo una constante aditiva arbitraria.

11. *a*) Sean $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, donde r y θ son las variables polares comunes. Deducir la forma polar de las C-C-R.

b) A partir de las C-C-R en coordenadas polares, demostrar que u y v satisfecen la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0,$$

que es la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

Solución:

a) Como:

$$\begin{aligned} u &= u\,(x,y) \\ v &= v\,(x,y) \end{aligned}$$

y a su vez,

$$\begin{aligned} x &= x\,(r,\theta) \\ y &= y\,(r,\theta) \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} u &= u\,(x\,(r,\theta)\,,y\,(r,\theta)) \\ v &= v\,(x\,(r,\theta)\,,y\,(r,\theta)) \end{aligned}$$

aplicando regla de la cadena obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.7}$$

y usando las coordenadas polares,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r}\cos\theta$$

por lo tanto las ecuaciones (2.8) se transforman en:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta \tag{2.9}$$

en forma análoga a las ecuaciones (2.8) obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta \tag{2.11}$$

aplicando las ecuaciones de C-R, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ de las ecuaciones (4) y (7), obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta$$

de donde,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sin\theta = 0 \tag{2.12}$$

análogamente aplicando $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, y usando las ecuaciones (5) y (7), obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta = -\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta$$

de donde,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\sin\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta = 0. \tag{2.13}$$

Así, multiplicando la ecuación (2.12) por $\cos\theta$ y la ecuación (2.13) por $\operatorname{sen}\theta$, y sumando las ecuaciones obtenemos finalmente:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

o también,

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta. \tag{2.14}$$

En forma análoga multiplicando la ecuación (2.12) por $-\operatorname{sen}\theta$ y la ecuación (2.13) por $\cos\theta$, y sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

es decir,

$$v_r = -\frac{1}{r}u_\theta. \tag{2.15}$$

Las ecuaciones (2.14) y (2.15), son la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

b) Del inciso anterior, si diferenciamos la (2.14) con respecto a r y la ecuación (2.15) con respecto a θ, obtenemos;

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \tag{2.17}$$

Por otro lado, del resultado del cálculo elemental, suponiendo que las segundas derivadas son continuas, entonces:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r},$$

por lo tanto de las ecuaciones (2.16) y (2.17), obtenemos

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

o también,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{2.18}$$

Análogamente, las ecuaciones de C-R se pueden escribir de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \tag{2.20}$$

diferenciando la ecuación (2.19) con respecto a r y a la ecuación (2.20) con respecto a θ obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{\partial v}{\partial r} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \tag{2.22}$$

suponiendo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r},$$

de las ecuaciones (2.21) y (2.22), obtenemos:

$$-r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{2.23}$$

Obsérvese que las ecuaciones (2.18) y (2.23) satisfacen una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0,$$

que es la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

2.6. Integración Compleja

2.6.1. Integrales de contorno

12. Evalue la integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

donde γ está dado por $|z-a| = R$.

a) Si n es cualquier entero distinto de 1.

b) Si $n = 1$.

Solución:
Sabemos que la trayectoria γ en forma paramétrica se puede representar de la forma,

$$z(\theta) = a + Re^{i\theta},$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. De la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} z(\theta) - a &= Re^{i\theta}, \\ dz(\theta) &= iRe^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo en la integral pedida,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z-a)^n \, dz &= \int_0^{2\pi} \left(Re^{i\theta}\right)^n iRe^{i\theta} d\theta \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= \frac{iR^{n+1}}{i(n+1)} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\left(i\left(n+1\right)\theta\right) \\ &= \frac{R^{n+1}}{n+1} \left[e^{i(n+1)\theta} \, |_0^{2\pi}\right] \\ &= \frac{R^{n+1}}{n+1} \left[e^{2\pi(n+1)i} - 1\right]. \end{aligned}$$

Así, de la última ecuación; si n es cualquier entero entonces,

$$\int_{\gamma} (z-a)^n \, dz = 0,$$

ya que $e^{2\pi(n+1)i} = 1$, para cualquier entero n. Asimismo, si $n = -1$ entonces,

$$\int_{\gamma} (z-a)^n \, dz = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i R^{n+1}$$

13. Si γ es la elipse $z(t) = a\cos t + ib \operatorname{sen} t$, para $0 \leq t \leq 2\pi$ calcular:

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Solución:

Obsérvese que la integral pedida se puede escribir de la forma,

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)\, dt}{\sqrt{1-[z(t)]^2}},$$

y de la ecuación de la elipse se tiene que,

$$z'(t) = -a \operatorname{sen} t + ib\cos t,$$

de donde obtenemos,

$$z'(t)^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t - b^2\cos^2 t - 2abi \operatorname{sen} t \cos t. \tag{2.24}$$

Así también tenemos que,

$$1 - z(t)^2 = 1 - \left[a^2\cos^2(t) - b^2 \operatorname{sen}^2(t) + 2abi \operatorname{sen} t\cos t\right]$$

y además como $a^2 - b^2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} 1 - z(t)^2 &= a^2 - b^2 - a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t - 2abi \operatorname{sen} t \cos t \\ &= a^2\left(1-\cos^2 t\right) - b^2\left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right) - 2abi \operatorname{sen} t\cos t \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 t - b^2 \cos^2 t - 2abi \operatorname{sen} t\cos t, \end{aligned} \tag{2.25}$$

así de las ecuaciones (20) y (21) obtenemos,

$$1 - z(t)^2 = z'(t)^2,$$

finalmente la integral resulta ser,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} &= \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)\, dt}{\sqrt{z'(t)^2}} \\ &= \pm \int_0^{2\pi} dt \\ &= \pm 2\pi. \end{aligned}$$

2.6.2. Teorema de Cauchy

14. Calcule la siguiente integral,

$$\oint_\gamma \frac{zdz}{(9-z^2)^2(z+i)^2}.$$

Solución: Aplicando la fórmula integral de Cauchy para derivadas superiores que establece: Si $f(z)$ es analítica a lo largo de un contorno cerrado simple γ así como en su interior y z_0 es un punto del interior de γ, entonces

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

si aplicamos la expresión anterior con $n = 1$, $z_0 = -i$ y además identificamos a $f(z) = \frac{z}{(9-z^2)^2}$, podemos escribir la expresión de la forma,

$$f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i}\oint_\alpha \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz. \tag{2.26}$$

Por lo tanto la integral original se reescribe de la forma,

$$\oint_\gamma \frac{zdz}{(9-z^2)^2(z+i)^2} = \oint_\gamma \frac{\frac{z}{(9-z^2)^2}}{(z+i)^2}dz.$$

por lo tanto, aplicando la ecuación (22) obtenemos,

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{zdz}{(9-z^2)^2(z+i)^2} &= 2\pi i\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(9-z^2)^2}\right]|_{z=-i} \\
&= 2\pi i\left[\frac{(9-z^2)^2 - z\left[2(9-z^2)(-27)\right]}{(9-z^2)^4}\right]|_{z=-i} \\
&= 2\pi i\left[\frac{(9-z^2)\left[(9-z^2)+47\right]}{(9-z^2)^4}\right]|_{z=-i} \\
&= 2\pi i\left[\frac{-z^2+4z+9}{(9-z^2)^3}\;|_{z=-i}\right] \\
&= 2\pi i\left[\frac{-(-i)^2+48-i)+9}{(9-(-i)^2)^3}\right] = \left[\frac{1+4i+9}{10^3}\right]2\pi i \\
&= \frac{2\pi i}{1000}\left[10-4i\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$\oint_\alpha \frac{zdz}{(9-z^2)^2(z+i)^2} = \frac{\pi}{500}[4+10i]$$

2.6.3. Teorema del Residuo

15. Calcule la siguiente integral

$$\oint_{\gamma} \frac{zdz}{(9-z^2)(z+i)^2}$$

donde γ esta definida por $|z| = 2$, en sentido positivo.

Solución:

de

$$f(z) = \frac{z}{(9-z^2)(z+i)^2}$$

nos damos cuenta que tenemos puntos singulares en:

$$\begin{aligned} z_{01} &= 3i \\ z_{02} &= -3i \\ z_{03} &= -i \end{aligned}$$

pero nuestro γ es $|z| = 2$ por lo tanto z_{01} y z_{02} están fuera de nuestro contorno de integración.

También podemos observar que tenemos un polo de orden 2, así que para calcular el residuo utilizamos la siguiente fórmula.

$$Res_{z=z_o} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to zo} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [z - z_o]^m f(z) \right\}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} Res_{z_o=-i} f(z) &= \lim_{z \to -i} \left[\frac{d}{dz} (z+i)^2 \frac{z}{(9-z^2)(z+i)^2} \right] \\ &= \lim_{z \to -i} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{z}{9-z^2} \right) \right] \\ \ldots \\ &= \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del residuo, obtenemos

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_k res_{z=zk} f(z)$$

finalmente,

$$\oint_{\gamma} \frac{zdz}{(9-z^2)(z+i)^2} = 2\pi i \left(-\frac{1}{10} \right) = -\frac{\pi i}{5} = \frac{\pi}{5i}$$

16. Calcular la integral,

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2},$$

donde γ, es el círculo $|z| = 2$ en sentido positivo.

Solución:
Obsérvese que la función del integrando,

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2},$$

es analítica sobre y dentro del contorno γ, excepto en el punto singular $z = 1$, y de acuerdo al teorema del residuo, el valor de la integral anterior será igual a $2\pi i$ veces el residuo de $f(z)$ en $z = 1$, es decir,

$$\oint_\gamma \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \left[res_{z=1} f(z)\right]$$

Para calcular este residuo podemos proceder de dos formas:

a) Haciendo un desarrollo en serie de Laurent en potencias de $(z-1)$ de la siguiente forma:

Aplicando la serie de Taylor de $f(z) = e^{-z}$ alrededor de $z = 1$ (ver ejemplo 1 de desarrollo de funciones en series de Taylor), y haciendo un sencillo manipuleo algebraico de la función para obtener el siguiente desarrollo en serie de Laurent,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-[(z-1)+1]}}{(z-1)^2} \\ &= e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(z-1)^2} = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-2} \\ &= e^{-1} \left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 - \ldots, \right] \end{aligned}$$

que es válida para la región $0 < |z-1| < \infty$. Obsérvese en la expresión anterior, que el residuo de $f(z)$ en $z = 1$, que es el primer coeficiente de la primera potencia negativa, es $-e^{-1}$.

b) Podemos aplicar la expresión general para calcular el residuo de un polo de orden m, dada por

$$Res_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[z - z_0\right]^m f(z) \right\},$$

en este caso, $z_0 = 1$, es un polo de orden 2, por lo que el cálculo del residuo está dado por

$$\begin{aligned} Res_{z_0=1} f(z) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 1} \left[\frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} \right] \\ &= \lim_{z \to 1} \left[\frac{d}{dz} \left(e^{-z} \right) \right] \\ &= \lim_{z \to 1} \left(-e^{-z} \right) \\ &= -\frac{1}{e}, \end{aligned}$$

por lo tanto la integral pedida resulta ser,

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = -\frac{2\pi i}{e}.$$

Este problema ilustra lo importante de saber expander una función en serie de Laurent alrededor de cualquier singularidad, o más propiamente dicho, en cualquier región del plano complejo, para algunas veces poder identificar los coeficientes de la series (residuos).

Obsérvese que en este problema también podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy dada por la expresión

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

en este caso $n = 1$, usando la fórmula anterior la integral pedida se puede calcular de la forma,

$$\oint_\gamma \frac{e^{-z}}{(z-1)^{1+1}} dz = \frac{2\pi i}{1!} f^1(z_0 = 1),$$

de donde, si

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-z} \\ f^1(z) &= -e^{-z} \end{aligned}$$

entonces,

$$f^1(z=1) = -\frac{1}{e}$$

por lo tanto,

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = -\frac{2\pi i}{e}.$$

17. Calcule la siguiente integral

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^3 - z^4}$$

donde γ esta definida por $|z| = \frac{1}{2}$.

Solución a) Teorema del residuo:

Para este caso vemos que la función dada tiene un polo de orden 3 en $z = 0$, puesto que donde $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3(1-z)}$, por lo que la integral dada se puede calcular de la forma,

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^3 - z^4} = 2\pi i \left[Res_{z=z0} f(z) \right]$$

usando la fórmula para oncontrar los residuos, en este caso con $m = 3$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
[Res_{z=0} f(z)] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \left(\frac{1}{z^3 (1-z)} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1}{1-z} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(1-z)^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \longrightarrow 0} \left[\frac{2}{(1-z)^3} \right] \\
&= 1,
\end{aligned}$$

por lo tanto, el resultado de la integral dada es,

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^3 - z^4} = 2\pi i.$$

Solución b) Expansión en series de Laurent

Obsérvese que,

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^3 - z^4} = \oint_\gamma \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{1-z} \right),$$

tiene puntos singulares en $z = 0$ y $z = 1$. De esta forma $z = 1$ está fuera de nuestro contorno de integración γ, por lo que carece de nuestro interés para el problema, por lo que debemos encontrar la serie de Laurent para $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$ en el dominio $0 < |z| < 1$. De esta forma obtenemos,

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3},$$

obsérvese que hicimimos uso de la convergencia de la serie geométrica. Escribiendo algunos términos de la serie obtenemos,

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

de donde obtenemos que el residuo $b_1 = 1$. Por lo tanto, la integral resulta ser,

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^3 - z^4} = 2\pi i Res_{z=0} f(z) = 2\pi i.$$

Solución c) Fórmula integral de Cauchy:

Usando la fórmula integral de Cauchy dada por la expresión

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

en este caso $n = 2$, usando la fórmula anterior la integral pedida se puede calcular de la forma,

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \frac{dz}{z^3 - z^4} &= \oint_\gamma \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{1 - z} \right) \\ &= \oint_\gamma \frac{\frac{1}{1-z}}{z^{2+1}} dz \\ &= \frac{2\pi i}{2!} f^2(z_0 = 0), \end{aligned}$$

de donde, si

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1 - z} \\ f^1(z) &= \frac{1}{(1 - z)^2} \\ f^2(z) &= \frac{2}{(1 - z)^3} \end{aligned}$$

entonces,

$$f^2(z = 0) = 2$$

por lo tanto,

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^3 - z^4} = 2\pi i.$$

2.7. Series Complejas

2.7.1. Convergencia de Series de potencias

18. Dada la siguiente serie de potencias,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)(z-i)^n,$$

encontrar su radio de convergencia.
Solución:
Para este problema, recordemos que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ debe converger para $|z-z_0|<R$ y diverger para $|z-z_0|>R$, es decir; la serie de potencias convergeen un disco abierto con centro en z_0 y diverger en el exterior de este disco, este disco se llama *disco de convergencia* de la serie de potencias y su radio R, se llama *radio de convergencia* de la serie de potencias.

Aplicando el criterio de la razón que establece que:

Si una serie z_1, z_2, ... , con $z \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots,)$ es tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$$

entonces,

a) si $L<1$, la serie converge absolutamente,
b) si $L>1$, la serie diverge absolutamente,
c) si $L=1$, no es aplicable el criterio.

Para este caso tenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}(z-i)^{n+1}}{\frac{n^n}{n!}(z-i)^n}\right| &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n}(z-i)\right| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n+1}\frac{1}{n^n}(z-i)\right| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(z-1)\right| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n|z-i| \\
&= e|z-i|.
\end{aligned}$$

Este límite es menor que 1 si $e|z-i| < 1$, es decir; si $|z-i| < \frac{1}{e}$. Por lo tanto la serie de potencias converge para $|z-i| < \frac{1}{e}$, y diverge si $|z-i| > \frac{1}{e}$. Asimismo, el radio de convergencia es $R = \frac{1}{e}$ y el disco de convergencia es el disco de radio $\frac{1}{e}$ con centro en i, como se muestra en la siguiente figura.

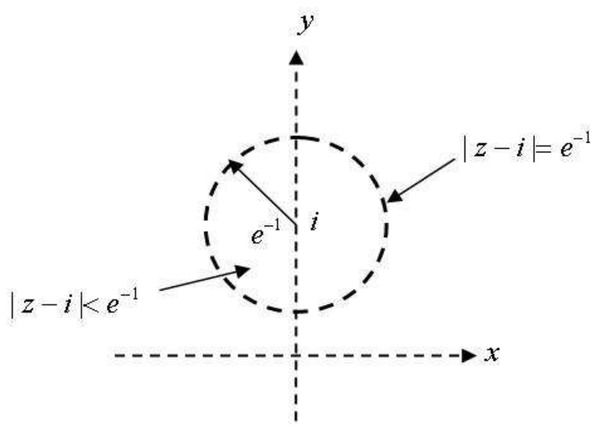


Figura 2.4: Región de convergencia, $|z-i| < \frac{1}{e}$.

2.7.2. Series de Mc Laurin

19. Encontrar la serie de Maclaurin para $f(z) = \operatorname{sen} z$ y $f(z) = \cos z$.

Solución:

Las series de Maclaurin tendrán la forma

$$f(z) = \sum a_n (z-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde los coeficientes de la serie estarán dados por $a_n = \frac{f^n(z=0)}{n!}$, encontremos los coeficientes de la serie. Si $f(z) = \operatorname{sen} z$, entonces

$$\begin{aligned}
f^{I}(z) &= \cos z \\
f^{III} &= -\cos z \\
f^{V}(z) &= \cos z \\
f^{VII}(z) &= -\cos z \\
&\dots \\
f^{2n+1}(z) &= (-1)^n cos z
\end{aligned}$$

&

$$\begin{aligned}
f^{II}(z) &= -\sin z \\
f^{IV}(z) &= \sin z \\
f^{VI}(z) &= -\sin z \\
f^{VIII}(z) &= \sin z \\
&\dots \\
f^{2n}(z) &= (-1)^n \sin z
\end{aligned}$$

$\forall n = 0, 1, 2 \dots,$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{f^{2n+1}(z=0)}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \\
a_{2n} &= \frac{f^{2n}(z=0)}{(2n)!} = 0.
\end{aligned}$$

Así, la serie de Maclaurin para $f(z) = \operatorname{sen} z$ está dada por:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Para $|z| < \infty$. En forma análoga, si $f(z) = \cos z$, entonces

$$\begin{aligned} f^{I}(z) &= -\sin z \\ f^{III} &= \sin z \\ f^{V}(z) &= -\sin z \\ f^{VII}(z) &= \sin z \\ &\dots \\ f^{2n+1}(z) &= (-1)^n \sin z \end{aligned}$$

&

$$\begin{aligned} f^{II}(z) &= -\cos z \\ f^{IV}(z) &= \cos z \\ f^{VI}(z) &= -\cos z \\ f^{VIII}(z) &= \cos z \\ &\dots \\ f^{2n}(z) &= (-1)^n \cos z \end{aligned}$$

$\forall n = 0, 1, 2 \dots,$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{f^{2n+1}(z=0)}{(2n+1)!} = 0 \\ a_{2n} &= \frac{f^{2n}(z=0)}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Así, la serie de Maclaurin para $f(z) = \cos z$ está dada por:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

para $|z| < \infty$.

20. Encontrar la serie de potencias, en la forma indicada, que representa la función $f(z) = \frac{1}{z-3}$ en las tres regiones siguientes:

a) $|z| < 3$,
b) $|z-2| < 1$,
c) $|z| > 3$

Solución:

Obsérvese que las series pedidas tendrán la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ respectivamente. Para encontrar las series pedidas podemos proceder manipulando algebraicamente la función dada y aplicar la convergencia de la serie geométrica, que como se sabe,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

si $|z| < 1$.

a) Para esta región manipulamos algebraicamente la función de la forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-3} &= -\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{z}{3}} \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \\ &= -\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+\dots\right) \end{aligned}$$

finalmente, si $|z| < 3$, la serie para la función dada es de la forma,

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} - \frac{z}{9} - \frac{z^2}{27} - \frac{z^3}{81} + \dots$$

b) Para este caso, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-3} &= \frac{1}{(z-2)-1} \\ &= -\frac{1}{1-(z-2)} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n, \end{aligned}$$

es decir, si $|z-2|<1$, entonces

$$\frac{1}{z-3} = -1-(z-2)-(z-2)^2-(z-2)3-\ldots$$

c) En forma análoga,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}\\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n,\end{aligned}$$

finalmente, si $\left|\frac{3}{z}\right|<1$, ó $|z|>3$, la serie está dada por

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^3}+\frac{27}{z^4}-\ldots$$

La región de convergencia, para las tres series dadas se ilustran enla siguiente figura.

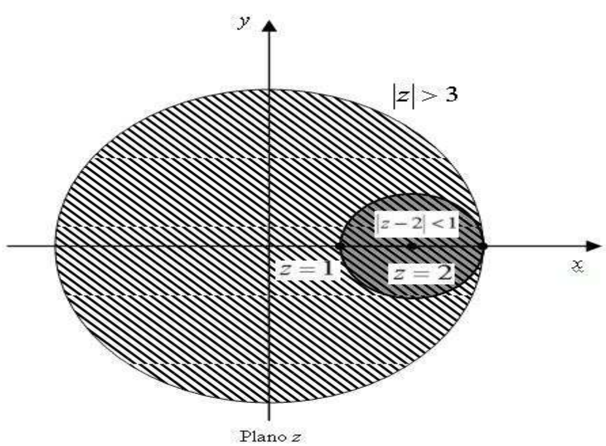


Figura 2.5: Regiones de convergencia, $|z|<3$, $|z-2|<1$, $|z|>3$.

2.7.3. Series de Taylor

21. *a*) Expresar a la función $f(z) = e^z$ en serie de Taylor alrededor de $z = 0$.
    b) Encontrar la serie de Maclaurin para $f(z) = z^2 e^{3z}$.
    c) Encontrar la serie de Taylor de $f(z) = e^z$ alrededor de $z_0 = i$.

Solución:

a) Como $f(z) = e^z$ es una función entera (analítica en todo el plano complejo), tiene un arepresentación en serie de Taylor (Maclaurin) valida para toda z, por lo tanto, como se cumpe que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^z \\ f''(z) &= e^z \\ f'''(z) &= e^z \\ &\vdots \\ f^n(z) &= e^z, \end{aligned}$$

entonces,

$$f^n(z=0) = e^{z=0} = 1,$$

por lo tanto, los coeficentes de Taylor están dados por:

$$a_n = \frac{f^n(z=0)}{n!} = \frac{1}{n!},$$

finalmente la serie de Maclaurin para $f(z) = e^z$ está dada por:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

para $|z| < \infty$.

b) Nótese que la forma más fácil de obtener la serie de $f(z)$, es sustituyendo z por $3z$ en el resultado del inciso anterior, y después multiplicar la expresión resultante por la función z^2, es decir;

$$e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z)^n}{n!},$$

de donde,

$$\begin{aligned} z^2 e^{3z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2 (3z)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} z^{n+2}, \end{aligned}$$

finalmente, sustituyendo n por $n-2$ obtenemos,

$$z^2e^{3z} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!} z^n.$$

c) La serie buscada debe tener la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$. Del inciso a), sabemos que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

alrededor de $z = 0$, en forma análoga al inciso b) si sustituimos z por $z - i$ en la ecuación anterior obtenemos

$$e^{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!},$$

pero $e^{z-i} = e^z e^{-i}$, por lo tanto, $e^z = e^i e^{z-i}$, así de la ecuación anterior obtenemos,

$$e^z = e^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^i}{n!}(z-i)^n.$$

Oosérvese que la serie de Taylor de e^z alrededor de $z_0 = i$ converge para toda z, es decir; para $|z - i| < \infty$.

22. Encontrar la serie de Taylor para $f(z) = \frac{1}{1+z}$ alrededor de $z_0 = -2i$.

Solución:

La serie bucada debe tener la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+2i)^n$. Manipulando algebraicamente la función dada de la forma,

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+z+2i-2i} = \frac{1}{(1-2i)+(z+2i)} = \frac{1}{1-2i}\left[\frac{1}{1+\frac{z+2i}{1-2i}}\right],$$

obsérvese que el manipuleo algebraico siempre se hace con el objetivo de tener las potencias deseadas, que en este caso es en potencias de $z+2i$. Así, usando la serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

si $|z| < 1$, de esta forma,

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1-2i}\left[\frac{1}{1+\frac{z+2i}{1-2i}}\right] = \frac{1}{1-2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z+2i}{1-2i}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1-2i)^{n+1}}(z+2i)^n, \end{aligned}$$

si $\left|\frac{z+2i}{1-2i}\right| < 1$, es decir; si $|z+2i| < |1-2i|$. Pero como $|1-2i| = \sqrt{5}$, es decir; el desarrollo de Taylor de $f(z) = \frac{1}{1+z}$ es en el disco de radio $\sqrt{5}$ con centro en $2i$. Obsérvese que $\sqrt{5}$ es la distancia de $2i$ a -1 como se observa en la siguiente figura, y -1 es el punto más cercano a $2i$ donde $f(z) = \frac{1}{1+z}$ no es analítica.

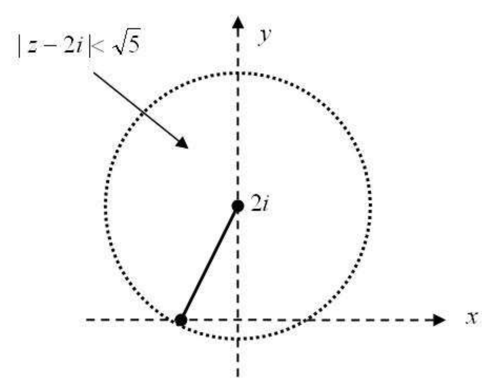


Figura 2.6:

2.7.4. Series de Laurent

23. La función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ es analítica en todo el plano complejo excepto en el origen, es decir; es analítica en el anillo $0 < |z| < \infty$. Como se vió anteriormente, $f(z) = e^z$ tiene una representación en serie de Maclaurin para todo z de la forma,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

entonces el desarrollo de Laurent para $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ está dado por,

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

24. Encontrar la serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{z^5} \cos z$ en el anillo $0 < |z| < \infty$.

Solución:

Recordemos que la serie de Maclaurin para $f(z) = \cos z$ está dado por,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

en $|z| < \infty$. De este modo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^5} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) \frac{z^{2n}}{z^5} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-5} \\ &= \frac{1}{0!} \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z} - \frac{1}{6!} z + \frac{1}{8!} z^3 - \dots \end{aligned}$$

es el desarrollo de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z^5} \cos z$ en el anillo $0 < |z| < \infty$.

25. Encuentre la serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ alrededor de $z_0 = i$.

Solución:

La serie pedida tendrá la forma $\sum a_n(z+i)^n$, aplicando fracciones parciales la función dada se puede escribir de la forma,

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i},$$

0bsérvese que el primer término ya está en potencias $z+i$, por lo que manipulemos algebraicamente el segundo término de la forma,

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\frac{1}{z-i} &= \frac{i}{2}\frac{1}{z-i+i-i} \\ &= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{-2i\left(1-\frac{z+i}{2i}\right)}\right] \end{aligned}$$

aplicando la convergencia de la serie geométrica, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\frac{1}{z-i} &= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n\right] \\ &= \frac{-i}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^n\right]. \end{aligned}$$

Nótese que $\left|\frac{z+i}{2i}\right| < 1$ es equivalente a $|z+i| < 2$, por lo tanto el desarrollo de Laurent para $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ en el anillo $0 < |z+i| < 2$ está dado por,

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^n.$$

Obsérvese que esta serie para $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ es de la forma $f(z) = g(z)+h(z)$ donde,

$$g(z) = \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^n,$$

es analítica en el disco $|z+i| < 2$ (desarrollo de Taylor), y

$$h(z) = \frac{i}{2}\frac{1}{z+i},$$

es analítica en $|z+i| > 0$. Por lo tanto, $0 < |z+i|$ y $|z+i| < 2$ forman el anillo $0 < |z+i| < 2$. Obsérvese también que la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ es analítica en el anillo $0 < |z+i| < 2$ que corresponde a la distancia desde el complejo $-i$ hasta el otro punto i donde la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ no es analítica.

26. Dada la función,

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2},$$

Analizar los dominios de validez y encuentre sus series de potencias en tales dominios.

Solución:

Obsérvese que la función tiene dos puntos singulares $z_0 = 1$ y $z_0 = 2$, entonces $f(z)$ es analítica en los dominios $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ y $2 < |z| < \infty$, y en cada uno de estos dominios $f(z)$ tiene representaciones en series de potencias de z. Denotemos a dichos dominios por D_1, D_2 y D_3 respectivamente como se ilustra en la siguiente figura.

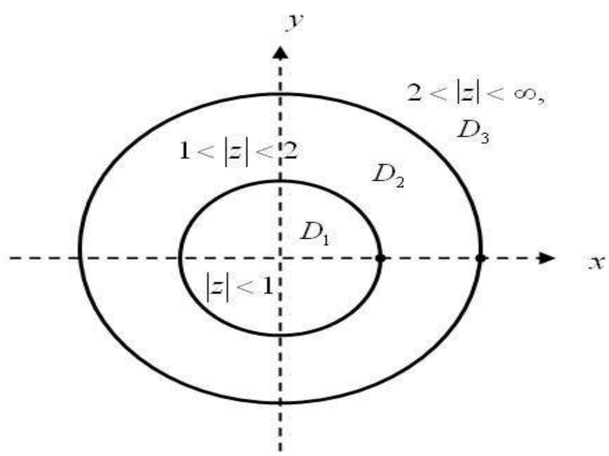


Figura 2.7: Regiones de convergencia, de la función $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$.

Para el dominio D_1 tenemos que es una serie de Maclaurin, para hallarla escribimos a la función de la forma, $f(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}$, y aplicamos la serie convergente (geométrica) dada por $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ que es válida para $|z| < 1$. Nótese que $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ también caé en el dominio D_1, de esta forma;

$$-\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

y

$$\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}},$$

por lo tanto, en D_1, $f(z)$ tiene la siguiente representación en serie de potencias de z,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-n-1} - 1\right) z^n.$$

Para el dominio D_2, manipulamos algebraicamente la función $f(z)$ de la forma

$$f(z) = \frac{1}{2-z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right],$$

y aplicando nuevamente la serie geométrica,

$$\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}},$$

válida para $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, es decir; para $|z| > 1$, y en forma análoga

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}},$$

válida para $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, es decir; para $|z| < 2$. Por lo tanto, la serie de potencias para $f(z)$ en D_2 tiene la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}},$$

para $1 < |z| < 2$, que es una serie de Laurent. Obsérvese que $f(z)$ se puede escribir de la forma,

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n},$$

que tiene la misma forma que el enunciado de Laurent. Finalmente, para el dominio D_3 vemos que también corresponde a una serie de Laurent, ahora reescribimos la función dada de la forma, $f(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}$, y observamos nuevamente que $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ y $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ si $2 < |z| < \infty$, y aplicando nuevamente la serie geométrica tenemos que la serie de potencias para la función dada en el dominio D_3, es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{n+1}}.$$

para el dominio $2 < |z| < \infty$.

27. Dada la función,

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1+z)},$$

encuentre la expansión en serie de Laurent alrededor de,

a) $z = 0$,

b) $z = -1$.

En casa caso, determine la región en donde es válida.

Solución:

a) En este caso $z_0 = 0$, entonces necesitamos una serie de potencias de z. Usando la convergencia de la serie geométrica obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(1+z)} &= \frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{1+z}\right] = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \\ &= \frac{1}{z^2}\left[1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots\right]\end{aligned}$$

la serie anterior es válida para $0 < |z| < 1$, obsérvese que el el valor de $z = 0$ debe excluirse debido a los dos primeros términos de la serie. De esta forma la expansión en serie de Laurent es,

$$\frac{1}{z^2(1+z)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - \ldots$$

b) Para este caso, necesitamos una serie de potencias de la forma $(z+1)$, por lo que manipulamos un poco la función dada de la forma,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1}{z+1}(z+1-1)^2 = \frac{1}{z+1}\left[1-(z+1)\right]^{-2} \\ &= \frac{1}{z+1}\left[1 + 2(z+1) + 3(z+1)^2 + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{z+1} + 2 + 3(z+1) + 4(z+1)^2 + \ldots\end{aligned}$$

que es válida también para $0 < |z| < 1$. Obsérvese también que en el resultado anterior hicimos uso de la expansión de la serie binomial,

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}z^k,$$

La mayoría de las veces cuando se le llegara a dificultar el manipuleo algebraico de la función dada, siempre puede recurrir a la expansión binomial anterior.

28. Desarrolle la función
$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$
en una serie de Laurent válida para

a) $1 < |z| < 2$,
b) $|z| > 2$,
c) $|z-1| > 1$,
d) $0 < |z-2| < 1$.

Solución:

Primero apliquemos fracciones parciales a la función,
$$\frac{z}{(z-)(2-z)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{2-z}$$

$$A(2-z) + B(z-1) = z$$

$$\begin{aligned} 2A - B &= 0, \\ B - A &= 1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene inmediatamente que $A = 1$ y $B = 2$, por lo tanto
$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z}$$

a) Para el dominio $1 < |z| < 2$, manipulemos algebraicamente la función y apliquemos la convergencia de la serie geométrica
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$
que es válida para $|q| < 1$, de esta forma para el primer término de $f(z)$
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$
que es válida si $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, es decir, si $|z| > 1$, y para el segunto término,
$$\frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

válida para $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, es decir; para $|z| < 2$, por lo tanto, la serie de potencias de $f(z)$ en $1 < |z| < 2$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{z}{2} + \frac{1}{z^3} + \frac{z^2}{4} + \cdots \\
&= \cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots
\end{aligned}
$$

b) Para $|z| > 2$, tenemos que de (a) el primer término

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

válido para $|z| > 1$. Ahora, sólo manipulamos el segundo término $f(z)$ de la forma

$$\frac{2}{2-z} = -\frac{2}{z-2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{2}{1-\frac{2}{z}}\right] = -\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}$$

válida para $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, es decir $|z| > 2$, por lo tanto la serie de potencias de $f(z)$ para $|z| > 2$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-2^{n+1}\right)\frac{1}{z^{n+1}} \\
&= -\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} - \frac{7}{z^3} - \frac{15}{z^4} - \cdots
\end{aligned}
$$

c) para $|z-1| > 1$, obsérvese que el primer término de $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z}$ ya está en potencias de $(z-1)$, así que sólo manipulemos el segundo término

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{z-2} &= \frac{2}{z-1-1} = \frac{2}{z-1}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{1-z}}\right] \\
&= \frac{2}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}
\end{aligned}
$$

por lo tanto, la serie de potencias de $f(z)$ para $|z-1|>1$ es de la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1}+\frac{2}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} \\ &= \frac{1}{z-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}+\cdots \end{aligned}$$

d) Para $0<|z-2|<1$, obsérvese que ahora el segundo término de $f(z)$ ya está en potencias de $(z-2)$, es decir, $\frac{2}{2-z}=-\frac{2}{z-2}$, así que sólo manipulemos el primer término de la forma:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

por lo tanto, la serie de potencias de $f(z)$ en potencias de $(z-2)$ esta dada por:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{2}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n \\ &= -\frac{2}{z-2}+1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+\cdots \end{aligned}$$

Capítulo 3

Problemas de Análisis de Fourier

En esta segunda parte del presente problemario, presentamos algunos problemas de...

3.1. Series de Fourier

29. Escribir la serie de Fourier de $f(x) = x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución:

Primeramente calculemos los coeficientes de Fourier. Po definición si f es una función integrable en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Los coeficiente de Fourier de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$ son los números:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \tag{3.1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx, \tag{3.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx. \tag{3.3}$$

La serie de Fourier de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$ es la serie:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos(nx) + b_n sen(nx)\right], \tag{3.4}$$

aplicando la ecuaciones (23),(24) y (25) obtenemos,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \left[\frac{1}{4\pi}x^2\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xcos(kx)dx = \left[\frac{x}{n\pi}sen(nx) + \frac{1}{\pi n^2}cos(nx)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xsen(kx)dx &= \left[-\frac{x}{\pi n}cos(nx) + \frac{1}{\pi n^2}sen(nx)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n}cos(n\pi) - \frac{1}{n}cos(n\pi) \\ &= -\frac{2}{n}cos(n\pi) \\ &= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo los coeficientes a_0, a_n y b_n en la ecuación (26), la serie de Fourier de $f(x) = x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ está dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} sen(nx)$$

En la siguiente figura se muestra la la función y su serie de Fourier.

Figura 3.1: Gráfica de $f(x) = x$ y su serie de Fourier para $n = 15$.

30. Encontrar la serie de Fourier de la función definida por,

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{si } -\pi < x < 0 \\ k & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solución:

En forma análoga al problema anterior, el lector puede verificar inmediatamente que el coeficiente $a_0 = 0$, de la ecuación (24), el coeficiente a_n está dado por,

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} kcos(nx)dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-k\frac{sennx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + k\frac{sennx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

el resultado anterior se sigue del hecho de que $sen(nx) = 0$ en $-\pi$, 0 y π, para tada $n = 1, 2, 3, \ldots$. En forma análoga, de la ecuación (25), el coeficiente b_n está dado por,

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)sen(nx)dx + \int_{0}^{\pi} ksen(nx)dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[k\frac{cosnx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - k\frac{cosnx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{k}{n\pi}[cos(0) - cos(-n\pi) - cos(n\pi) + cos(0)] \\ &= \frac{2k}{n\pi}\left[1 - cos(n\pi)\right], \end{aligned}$$

sustituyendo los coeficientes a_n y b_n en la ecuación (26), la serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ está dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2k}{n\pi}(1 - cos(n\pi))\right] sen(nx).$$

Obsérvese que los coeficientes de b_n se hacen cero para cuando n es par, puesto que $cos(n\pi) = (-1)^n$, por lo tanto, la serie final se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{4k}{(2n-1)\pi}\right) sen[(2n-1)x]\right] \\ &= \left(\frac{4k}{\pi}\right)\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right] \end{aligned}$$

En la siguiente figura se muestra la la función y su serie de Fourier para el caso $k = 1$.

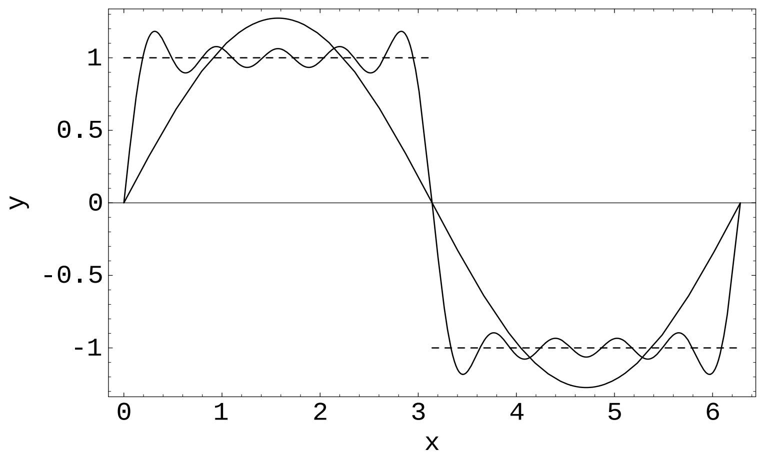


Figura 3.2: Gráfica de $f(x)$ y su serie de Fourier para $n = 1$ y $n = 5$.

Obsérvese también que en los ejemplos anteriores, los coeficientes a_0 y a_n resultaron ser iguales a cero, esto se debe a la paridad e imparidad de las funciones que analizaremos en otra sección.

Observación:
Los problemas anteriores se refieren a series de Fourier de funciones definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Podemos extender el cálculo de las series para series de Fourier en cualquier intervalo $[-L, L]$ simplemente cambiando de escala, al hacer el cambio de variable $t = \frac{\pi x}{L}$, como se ilustra en los siguiente problemas.

31. Dada la función,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -3 \leq x \leq 0 \\ x & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Encontrar la serie de Fourier de f en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución:
Si f es una función integrable en el intervalo $[-L, L]$. Los coeficiente de Fourier de f en el intervalo $[-L, L]$ son los números:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx. \tag{3.5}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \tag{3.6}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \tag{3.7}$$

La serie de Fourier de f en el intervalo $[-L, L]$ es la serie:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{3.8}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde los números $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, b_n$ son los coeficientes de Fourier de f en el intervalo $[-L, L]$. Calculemos primeramente los coeficientes con $L = 3$, aplicando la ecuación (27) obtenemos,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2(3)} \int_{-3}^{3} f(x)dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{-3}^{0} f(x)dx + \frac{1}{6} \int_{0}^{3} f(x)dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{0}^{3} xdx \\ &= \left[\frac{x^2}{12}\right]\Big|_0^3 \\ &= \frac{9}{12}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$a_0 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Asimismo, de la ecuación (28) obtenemos

$$a_n = \frac{1}{3}\int_0^3 xcos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx,$$

esta integral se resuelve por el método de integración por partes: si hacemos $u = x$, entonces $du = dx$, así también si $dv = cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx$, entonces $v = \frac{3}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi}{3}\right)x$, de esta forma obtenemos,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3}\left[x\frac{3}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi}{3}x\right) - \frac{3}{n\pi}\int_0^3 sen\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{3x}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi}{3}x\right) + \frac{9}{n^2\pi^2}cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\right]\Bigg|_0^3 \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{3(3)}{n\pi}sen(n\pi) + \frac{9}{n^2\pi}cos(4\pi)\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{9}{n^2\pi^2}\right] \\ &= \left[\frac{3}{n^2\pi^2}\right]cos(n\pi) - \frac{3}{n^2\pi^2}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$a_n = \frac{3}{n^2\pi^2}[cos(n\pi) - 1].$$

En forma análoga para el coeficiente b_n, de la ecuación (29) obtenemos,

$$b_n = \frac{1}{3}\int_0^3 xsen\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx,$$

análogamente, aplicando el método de integración por partes; si hacemos $u = x$,entonces $du = dx$, así también si $dv = sen\left(\frac{n\pi}{3}\right)x$, entonces $v = -\frac{3}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)x$, de esta forma obtenemos,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3}\left[-x\frac{3}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right) + \frac{3}{n\pi}\int_0^3 cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx\right] \\ &= \left[-\frac{x}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right) + \frac{3}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\right]\Bigg|_0^3 \\ &= -\frac{3}{n\pi}cos(n\pi) + \frac{3}{n^2\pi}sen(n\pi) - \left[\frac{0}{n\pi}cos(0) + \frac{3}{n^2\pi^2}sen(0)\right] \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$b_n = -\frac{3}{n\pi}cos(n\pi),$$

finalmente, sustituyendo los valores de los coeficientes a_0, a_n y b_n en la ecuación (30), la serie de Fourier de f en el intervalo $[-3, 3]$ está dada por,

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\right)cos\left(\frac{n\pi}{3}x\right) - \left(\frac{3}{n\pi}(-1)^{n+1}\right)sen\left(\frac{n\pi}{3}x\right)\right].$$

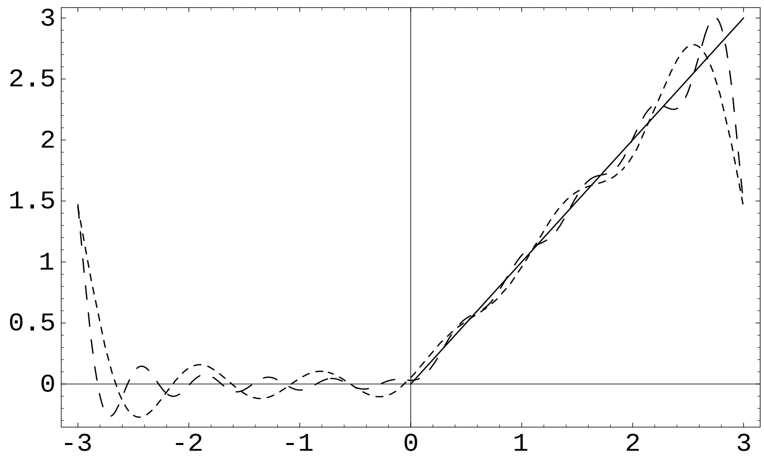


Figura 3.3: Gráfica de $f(x) = x$ y su serie de Fourier para $n = 5$ y $n = 10$.

Obsérvese que $cos(n\pi) = (-1)^n$ y $-cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$. La siguiente figura muestra la función y su serie de Fourier.

En algunos casos podemos ahorrarnos trabajo al calcular los coeficientes de Fourier observando las propiedades de la función dada, dependiendo de la paridad e imparidad de la misma, como se ilustra en los siguientes problemas.

32. Calcule las series de Fourier de las siguientes funciones y en los intervalos indicados:

  a) $f(x) = |x|$, para el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.
  b) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)$, para el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.
  c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, para el intervalo $0 \leq x \leq \pi$

  Solución:

  a) Como $f(x) = |x|$ es una función par en el intervalo $[-\pi, \pi]$, entonces de la ecuación (31) su serie de Fourier estará dada (con $L = \pi$) por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx),$$

y de las ecuaciones (32) y (33) con $L = \pi$, los coeficientes a_0 y a_n están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)cos(nx)dx,$$

sustituyendo el valor de la función f, obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

en forma análoga, para el coeficiente a_n sustituyendo el valor de la función tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} sen(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx \right], \end{aligned}$$

en donde aplicamos el método de integración por partes, al hacer los cambios de variable $u = x$, de donde $du = dx$, y también, $dv = cos(nx)dx$, de donde $v = \frac{1}{n}sen(nx)$. Obsérvese que al evaluar en los límites, la primera integral resulta ser igual a cero, por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx \\ &= \left[\frac{2}{\pi n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}\right] \\ &= \frac{2}{\pi n}(\cos(n\pi)-1) \\ &= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ está dada por:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx)\right]$$

En la siguiente figura se muestra la la función y su serie de Fourier.

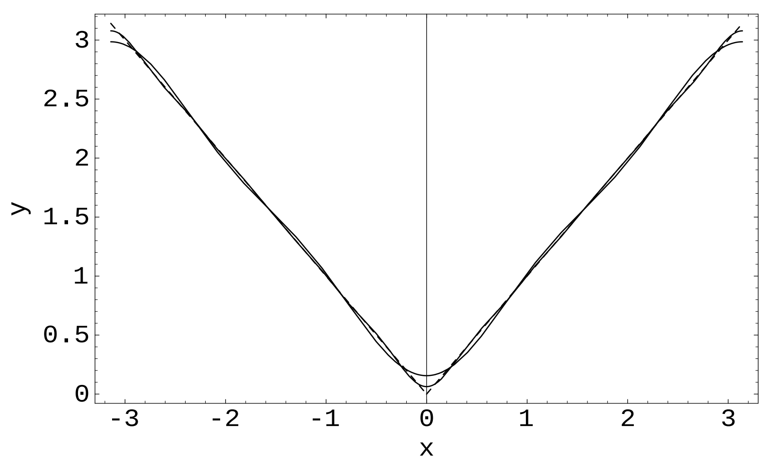


Figura 3.4: Gráfica de $f(x) = |x|$ y su serie de Fourier para $n = 3$ y $n = 10$.

b) Para este caso, observese que la función $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ no es par ni impar, por lo que su serie de Fourier estará dada por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

donde los coeficeintes están dados por,

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,$$

Calculando los coeficientes con $L = \pi$, obtenemos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)\right]dx \\ &= \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\cos(x)}{\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) + (cos(\pi) - cos(-\pi))\right], \end{aligned}$$

de esta forma,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}.$$

donde se aplicó el hecho de que $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$ y también $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$. Asimismo, para el coeficiente a_n obtenemos,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)\right]\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)dx - \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(x)\cos(nx)dx\right], \end{aligned}$$

la segunda integral es cero debido a la ortogonalidad de las funciones seno y coseno. Para resolver la primera integral hacemos uso de la identidad trigonométrica del coseno de la suma y diferencia de 2 ángulos;

$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B,$$

que para este caso tenemos,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2}+nx\right) &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}(nx)\\ \cos\left(\frac{x}{2}-nx\right) &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}(nx),\end{aligned}$$

de donde obtenemos,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x+2nx}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-2nx}{2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1+2n}{2}\right)x+\cos\left(\frac{1-2n}{2}\right)x\right]\end{aligned}$$

por lo tanto la integral para el coeficiente a_n resulta ser

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1+2n}{2}\right)x+\cos\left(\frac{1-2n}{2}\right)x\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{1+2n}\operatorname{sen}\left(\frac{1+2n}{2}\right)x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{1-2n}\operatorname{sen}\left(\frac{1-2n}{2}\right)x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{4}{1+2n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right)+\frac{4}{1-2n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)\right)\right]\end{aligned}$$

usando nuevamente la siguiente identidad,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\pm n\pi\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\pi)\mp\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(n\pi)=\cos(n\pi)=(-1)^n,$$

finalmente obtenemos la expresión para el coeficiente a_n,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{4}{1+2n}(-1)^n+\frac{4}{1-2n}(-1)^n\right]\\ &= \frac{4}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\right].\end{aligned}$$

Con un procedimiento similar al cálculo del coeficiente a_n, el lector puede verificar que $b_n=0$. De esta forma, la serie de Fourier para la función $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}(x)$, en el intervalo $-\pi\leq x\leq\pi$ está dada por,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos(nx).$$

En la siguiente figura se muestra la la función y su serie de Fourier.

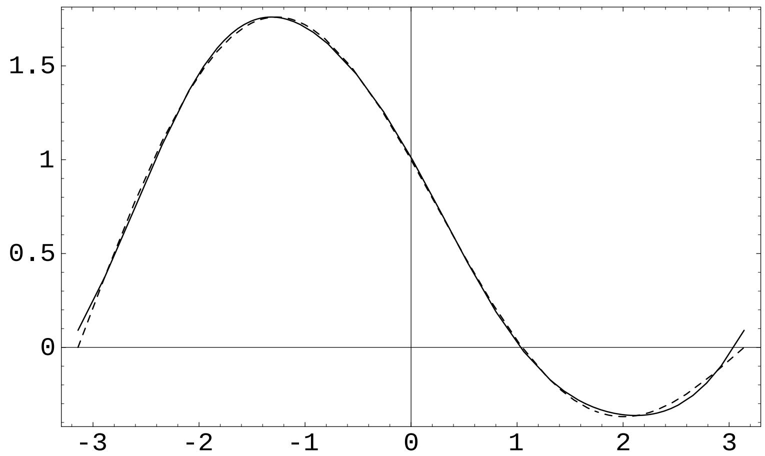


Figura 3.5: Gráfica de $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)$ (línea punteada) y su serie de Fourier para $n = 3$, (línea continua).

c) En este caso, como la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es impar, entonces su serie de Fourier tendrá la forma,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

donde el coeficiente b_n está dado por,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

en este caso,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(nx)dx,$$

de un procedimiento análogo al inciso anterior, obtenemos

$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\right],$$

por lo qu ela integral para el coeficiente b_n se transforma como,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\right] dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos(1-n)xdx - \int_0^{\pi}\cos(1+n)xdx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(1-n)}\operatorname{sen}(1-n)x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{(1+n)}\operatorname{sen}(1+n)x\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

¡como era de esperarse!, el lector puede revisar un poco la teoría para que no le sorprenda la afirmación anterior.

33. Dada la función,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi \le x < 1 \\ 1 & \text{para } 1 \le x < 2 \\ 3 & \text{para } 2 \le x < \pi. \end{cases}$$

a) Analizar la convergencia de la serie de Fourier.

b) Calcular la serie de Fourier de $f(x)$.

Solución:

a) Aplicando las condiciones de la convergencia de la serie de Fourier, la serie de Fourier de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$ converge a,

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{para } -\pi \le x < 1 \\ 1 & \text{para } 1 \le x < 2 \\ 3 & \text{para } 2 \le x < \pi. \end{array}$$

También en $x_0 = 1$, $f(1^-) = 0$ y $f(1^+) = 0$, por lo tanto la serie converge en $x_0 = 1$ a

$$\frac{1}{2}\left[f(1^-) + f(1^+)\right] = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2},$$

por otro lado en $x = 2$, $f(2^-) = 1$ y $f(2^+) = 3$, por lo tanto la serie converge en $x_0 = 2$ a

$$\frac{1}{2}\left[f(2^-) + f(2^+)\right] = \frac{1}{2}[1+3] = 2,$$

asimismo, en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se tiene que $f(-\pi^+) = 0$ y $f(-\pi^-) = 3$, por lo tanto la serie converge a

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi^+) + f(-\pi^-)\right] = \frac{1}{2}[0+3] = \frac{3}{2}.$$

b) Calculemos primeramente los coeficientes con $L = \pi$; aplicando la ecuación (27) obtenemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{1} 0dx + \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{2} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{2}^{\pi} 3dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{1}^{2} dx + \int_{2}^{\pi} 3dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}[x|_1^2 + 3x|_2^\pi] = \frac{1}{2\pi}[1+3(\pi-2)],
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}[3\pi - 5].$$

Asimismo, de la ecuación (28) obtenemos

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{1} 0cos(nx)dx + \int_{1}^{2} cos(nx)dx + \int_{2}^{\pi} 3cos(nx)dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}sen(nx)\bigg|_1^2 + \frac{3}{n}sen(nx)\bigg|_2^\pi\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(sen2n - sen(n)) + \frac{3}{n}(sen(n\pi) - sen(2n))\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}sen(2n) - \frac{1}{n}sen(n) - \frac{3}{n}sen(2n)\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n}(sen(2n) + sen(n))\right]$$

en forma análoga para el coeficiente b_n, de la ecuación (29) obtenemos,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{1} 0sen(nx)dx + \int_{1}^{2} sen(nx)dx + 3\int_{2}^{\pi} sen(nx)dx\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}cos(nx)\Big|_1^2 - \frac{3}{n}cos(nx)\Big|_2^\pi\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(cos2n - cosn) - \frac{3}{n}(cosn\pi - cos2n)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}cos(2n) + \frac{1}{n}cos(n) - \frac{3}{n}cos(n\pi) + \frac{3}{n}cos(2n)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}cos(2n)(3-1) + \frac{1}{n}cos(n) - \frac{3}{n}(-1)^n\right],
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\left[2cos(2n) - 3(-1)^n + cos(n)\right]$$

finalmente, sustituyendo los valores de los coeficientes a_0, a_n y b_n en la ecuación (30) la serie de Fourier de f está dada por,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}[3\pi - 5] - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n}(sen(2n) + sen(n))\right]cos(nx) \\
&- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[2cos(2n) - 3(-1)^n + cos(n)\right]sen(nx).
\end{aligned}$$

3.2. Series de Fourier en Senos y Cosenos

34. Encuentre la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución:

Recordemos del Cálculo elemental los siguientes resultados para funciones pares e impares, considerando que f es una función integrable en el intervalo $[-L, L]$:

a) Si f es par entonces,

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx.$$

b) Si f es impar entonces,

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0,$$

de lo enterior, si f es par, entonces la serie de Fourier de f en el intervalo $[-L, L]$ está dada por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{3.9}$$

donde los coeficientes a_0 y a_n están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx. \tag{3.10}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \tag{3.11}$$

Como la función $f(x) = x^2$ es una función par, entonces de la ecuación (31) la serie de Fourier de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$ estará dada (con $L = \pi$) por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx),$$

y de las ecuaciones (32) y (33) con $L = \pi$, los coeficientes a_0 y a_n están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cos(nx)dx,$$

sustituyendo el valor de la función f, obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3},$$

en forma análoga, para el coeficiente a_n sustituyendo el valor de la función tenemos

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}sen(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} xsen(nx)dx\right],
\end{aligned}$$

en donde aplicamos el método de integración por partes, al hacer los cambios de variable $u = x^2$, de donde $du = 2xdx$, y también, $dv = cos(nx)dx$, de donde $v = \frac{1}{n}sen(nx)$, aplicando nuevamente el método de integración por partes, haciendo ahora $u = x$ y $dv = sen(nx)dx$, obtenemos $du = dx$ y $v = -\frac{1}{n}cos(nx)$ respectivamente, de tal forma que la integral anterior resulta,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}sen(nx)\Big|_0^{\pi} - \left(\frac{x}{n}cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} cos(nx)\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x^2}{n}sen(nx)\right)\Big|_0^{\pi} - \left(\frac{2x}{n^2}cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} - \left(\frac{2}{n^3}sen(nx)\right)\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n^2}cos(n\pi)\right] \\
&= \frac{4}{n^2}cos(n\pi) \\
&= (-1)^n\frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación (31) la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{4}{n^2} cos(nx) \right] \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4 \left[-cosx + \frac{cos2x}{4} - \frac{cos3x}{9} + \ldots \right].
\end{aligned}
$$

En la siguiente figura se muestra la función $y = x^2$ y su serie de Fourier.

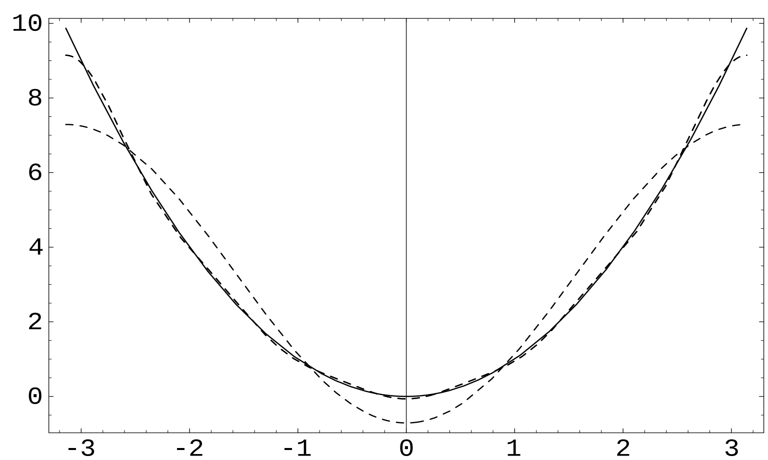


Figura 3.6: Gráfica de $f(x) = x^2$ (línea continua) y su serie de Fourier para $n = 1, 3, 5$, (líneas punteadas).

35. Calcular las series de Fourier en cosenos y senos para la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 2 & \text{para } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Solución:

Aplicando la paridad e imparidad de las funciones tenemos las siguientes definición:

Definición:

Si f es integrable en $[0, L]$, entonces

a) La serie de Fourier en cosenos de f en $[0, L]$ está dada por,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

donde los coeficientes a_0 y a_n están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \end{aligned}$$

b) La serie de Fourier en senos de f en $[0, L]$ está dada por,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde el coeficiente b_n está dado por:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Así, para la serie de Fourier en cosenos, de las expresiones dadas en la definición anterior obtenemos,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)cos(nx)dx \end{aligned}$$

por lo tanto, obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

también,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(nx)dx + \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}sen(nx)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n}sen(nx)\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n}sen(n\pi) - \frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
&= -\frac{2}{\pi n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

De esta forma, la serie de Fourier en cosenos de f en $[0, \pi]$ está dada por:

$$\frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] cos(nx).$$

En la expresión anterior, nótese que $sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ si n es un entero positivo, por lo tanto necesitamos quedarnos únicamente con los términos que contengan n impar, por lo que la serie estará dada por:

$$\frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi(2n-1)}sen\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)\right] cos(2n-1)x$$

además, si aplicamos la siguiente identidad trigonométrica

$$sen(A \pm B) = senAcosB \pm cosAsenB$$

obtenemos,

$$\begin{aligned}
sen\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) &= sen(n\pi)cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - cos(n\pi)sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -cos(n\pi) = -(-1)^n = (-)^{n+1}
\end{aligned}$$

y además como $-(-1)^{n+1} = (-1)^n$, la serie de Fourier estará dada por:

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n-1)} \right] cos(2n-1)x$$

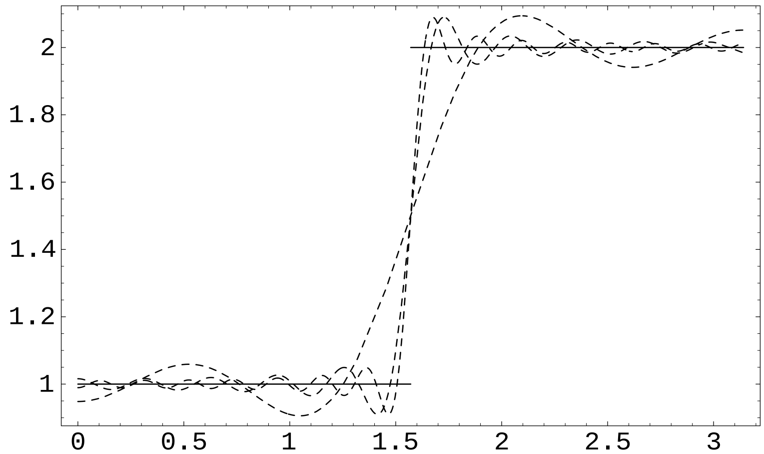


Figura 3.7: Gráfica de la función del ejemplo anterior (línea continua) y su serie de Fourier para $n = 3$ $n = 10$ y $n = 5$, (líneas punteadas).

De la misma forma para la serie de Fourier en senos, de las expresiones dadas en la definición anterior obtenemos,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx) dx$$

y de la definición de la función dada obtenemos,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} sen(nx) dx + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen(nx) dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{n} \right) cos(nx) \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{2}{n} \right) cos(nx) \right] \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{n} \right) cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \frac{1}{n} - \frac{2}{n} cos(n\pi) + \frac{2}{n} cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \\
&= \frac{2}{n\pi} \left[1 + cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] - \frac{4}{n\pi} cos(n\pi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier en senos de f en el intervalo $[0, \pi]$ está dada por:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1+cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-2(-)^n\right]sen(nx).$$

obsérvese que $cos(n\pi) = (-1)^n$.

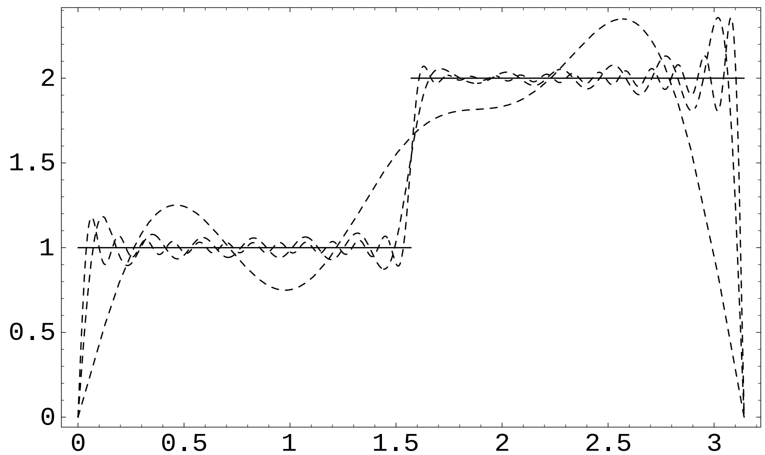


Figura 3.8: Gráfica de la función del ejemplo anterior (línea continua) y su serie de Fourier para $n = 5$ $n = 25$ y $n = 50$, (líneas punteadas).

3.3. Series de Fourier de funciones periódicas

36. Sea g una función periódica definida por $g(t) = t^2$ para el intervalo $0 < t < 3$ y $g(t+3) = g(t)$ para todo t, encontrar la forma de ángulo de fase o forma armónica de la función $g(t)$.

Solución:

Si la función $g(t)$ es periódica de periodo T, de la expresión para los coeficientes de Fourier las integrales se pueden tomar sobre cualquier intervalo de longitud T, por lo tanto, para todo número real a, se pueden escribir los coeficientes de Fourier de la forma:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} g(t)dt. \tag{3.12}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} g(t)cos\left(nw_0t\right)dt, \tag{3.13}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} g(t)sen\left(nw_0t\right)dt. \tag{3.14}$$

Los resultados anteriores para la serie de Fourier se pueden escribir en una forma más compacta, que se le llama la forma de ángulo de fase o forma armónica,

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n cos\left(nw_0t + \delta\right). \tag{3.15}$$

donde,

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \delta_n &= \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right). \end{aligned}$$

se denominan respectivamente la **Amplitud armónica** y el **Ángulo de fase**. La ecuación anterior muestra que para toda función g que sea periódica (con ciertas propiedades de continuidad) se puede escribir como una suma de ondas cosenoidales (o senoidales). Para nuestro problema, como la función es periódica de periodo 3, podemos integrar sobre cualquier intervalo de longutid 3, por conveniencia integramos de 0 a 3 aplicando las ecuaciones (34), (35) y (36), los coeficientes de Fourier, que el lector puede verificar resolviendo las integrales, están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_0^3 t^2 dt = 3$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 t^2 cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right) dt = \frac{9}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(t) sen\left(\frac{2n\pi}{3}t\right) dt = -\frac{9}{n\pi}.$$

sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación (37), la serie de Fourier para $g(t)$ está dada por,

$$g(t) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2\pi^2} cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) - \frac{9}{n\pi} sen\left(\frac{2n\pi t}{3}\right).$$

De los resultados anteriores, la **Amplitud armónica** y el **Ángulo de fase** están dados por:

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{9}{n\pi}\right)^2} = \left(\frac{9}{n^2\pi^2}\right)\sqrt{1 + n^2\pi^2} \\ \delta_n &= \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{9}{n\pi}}{\frac{9}{n^2\pi^2}}\right) = tan^{-1}(n\pi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma de ángulo de fase o forma armónica de la representación de Fourier de la función g está dada por,

$$g(t) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{n^2\pi^2}\right)\sqrt{1 + n^2\pi^2} cos\left(\frac{2n\pi t}{3} + tan^{-1}(n\pi)\right).$$

El espectro de amplitud para esta función está formado por los puntos $(nw_0, c_n/2)$, donde $nw_0 = 2\pi n/3$. Asimismo, el espectro de amplitud permite visualizar la longitud de cada una de las armónicas en las que se descompone la función periódica.

37. Determinar la serie compleja de la función $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \frac{3}{4}t,$$

para $0 < t < 8$, y $f(t+8) = f(t)$.

Solución:

La **serie de Fourier Compleja** de una función periódica, con periodo T, está dada por:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t}, \tag{3.16}$$

donde $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ y los coeficientes c_n están dados por,

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-inw_0 t}dt, \tag{3.17}$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, etc.$ Los números c_n se llaman coeficientes de Fourier complejos de f. La gráfica de la magnitud de los coeficientes c_n en la serie de Fourier compleja de $f(t)$ versus la frecuencia w (frecuencia angular) se denomina **Espectro de Amplitud** de la función periódica $f(t)$. Así también, la gráfica del angulo de fase δ_n versus la frecuencia w se denomina **Espectro de Fase** de $f(t)$. Como el índice n sólamente toma valores enteros, los espectros de Amplitud y de Fase no son curvas continuas, sino que aparecen en la variable discreta nw_0, por consiguiente, se les denomina **ESPECTROS DE FRECUENCIA DISCRETA O ESPECTROS DE LÍNEA**. Obsérvese que la representación de los coeficientes complejos c_n versus la variable discreta nw_0, especifica la función periódica $f(t)$ en el dominio de la frecuencia, así como $f(t)$ versus t, especifica la función en el dominio del tiempo.
Para este problema tenemos que $T = 8$, por lo tanto, $w_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. De la ecuación (3.17), obtenemos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{8}\int_0^8 \frac{3}{4}te^{-\frac{in\pi}{4}t}dt \\ &= \frac{3}{32}\int_0^8 te^{-inw_0 t}dt \end{aligned}$$

Obsérvese que podemos integrar en cualquier intervalo de longitud igual al periodo. La integral anterior se resuelve aplicando el método de integración por partes, al hacer los cambios de variable $u = t$, de donde $du = dt$, y también, si $dv = e^{-i\frac{n\pi}{4}t}dt$, de donde $v = -\frac{4}{in\pi}e^{-i\frac{n\pi}{4}t}$, al sustituir estos cambios, obtenemos

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{3}{32}\left[-\frac{4}{in\pi}\, te^{-\frac{in\pi}{4}t}\Big|_0^8 + \frac{4}{in\pi}\int_0^8 e^{-\frac{in\pi}{4}t}dt\right] \\
&= \frac{3}{8}\left[-\frac{1}{in\pi}\, te^{-\frac{in\pi}{4}t}\Big|_0^8 + \frac{16}{n^2\pi^2}\, e^{-\frac{in\pi}{4}t}\Big|_0^8\right] \\
&= \frac{3}{8}\left[-\frac{8}{in\pi}e^{-i2n\pi} + 0 + \frac{16}{n^2\pi^2}\left(e^{-i2n\pi} - 1\right)\right] \\
&= \frac{3i}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Lo anterior se sigue del hecho de que $e^{-i2n\pi} = cos(2n\pi) - isen(2n\pi) = 1$, para cualquier entero n. Obsérvese también, que el resultado anterior se cumple para $n \neq 0$, así para calcular el coeficiente c_0 aplicamos la ecuación (33), puesto que $c_0 = a_0$, de esta forma obtenemos,

$$
c_0 = \frac{1}{8}\int_0^8 \frac{3}{4}tdt = \frac{3}{32}\frac{t^2}{2}\Big|_0^8 = \frac{3}{84}(8)^2 = 3.
$$

Por lo tanto, la serie de Fourier compleja de la función $f(t) = \frac{3}{4}t$, para $0 < t < 8$ y de periodo $T = 8$, está dada por:

$$
f(t) = 3 + \frac{3i}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}e^{n\pi it/4}.
$$

La gráfica de la función y su espectro de frecuencias se muestran en la siguiente figura.

38. Encontrar la serie de Fourier trigonométrica para la función $f(t) = \frac{A}{T}t$, a partir del resultado del problema anterior.

Solución

Del problema anterior, en general se tiene para una función definida por $f(t) = \frac{A}{T}t$, para $0 < t < T$ de periodo T que se conoce como **función Diente de Sierra**, se tiene que

$$c_n = i\frac{A}{nw_0T} = i\frac{A}{2\pi n}$$

$\forall\, n \neq 0$, y para $n = 0$ obtenemos,

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T tdt = \frac{A}{T^2}\frac{t^2}{2}\bigg|_0^T = \frac{A}{2},$$

por lo tanto, la serie de Fourier compleja para la **función Diente de Sierra** está dada por:

$$f(t) = \frac{A}{2} + i\frac{A}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}e^{inw_0t}.$$

De la forma compleja de la Serie de Fourier de una función $f(t)$ periódica de periodo T dada por la ecuación,

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0t},$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-inw_0t}dt,$$

se puede obtener fácilmente la forma trigonométrica de la Serie de Fourier de $f(t)$ de la siguiente manera:
De las ecuaciones anteriores obtenemos,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}a_0 \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \end{aligned}$$

$$c_{-n} = \mathbf{c_n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),$$

es decir;

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ 2c_n &= a_n - ib_n \\ 2\mathbf{c_n} &= a_n + ib_n, \end{aligned}$$

de donde obtenemos,

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + \mathbf{c_n} \\ b_n &= i(c_n - \mathbf{c_n}) \end{aligned}$$

es decir;

$$\begin{aligned} a_n &= 2\Re(c_n) \\ b_n &= -2\Im(c_n). \end{aligned}$$

De esta forma, para el problema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} a_0 &= A \\ a_n &= 0 \\ b_n &= -\frac{A}{n\pi}, \end{aligned}$$

y como la serie de Fourier Trigonométrica está dada por:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos\,(nw_0t) + b_n sen\,(nw_0t)]$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} f(t) &= A - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} sen\,(nw_0t) \\ &= A - \frac{A}{\pi}\left(sen(w_0t) + \frac{1}{2}sen(2w_0t) + \frac{1}{3}sen(3w_0t) + \ldots\right) \end{aligned}$$

39. Determinar la series de Fourier compleja y trigonométrica de la función $f(t) = e^t$, en el intervalo $(0, 2\pi)$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$.

Solución:

Por definición, de la ecuación (38)la serie de Fourier compleja de una función $f(t)$ está dada por,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t}$$

donde $w_0 = \frac{2\pi}{T}$, $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-inw_0 t}dt$ y T es el periodo de la función, que en este caso $T = 2\pi$, de donde $w_0 = 1$. De esta forma, los coeficientes de Fourier c_n están dados por,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} f(t)e^{-inw_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}dt$$

En forma análoga al problema anterior, podemos integrar en cualquier intervalo de longitud igual al periodo, es decir, podemos calcular a los coeficientes c_n de la forma,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-in)t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}e^{(1-in)t}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left[e^{(1-in)2\pi} - 1\right] \end{aligned}$$

en la ecuación anterior obsérvese que,

$$e^{(1-in)2\pi} = e^{2\pi}e^{-i2\pi n} = e^{2\pi}[cos(2\pi n) - sen(2\pi n)] = e^{2\pi}$$

De esta forma, los coeficientes de Fourier están dados por,

$$c_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1 - in)}.$$

Por lo tanto, la serie de Fourier compleja de la función $f(t) = e^t$, en el intervalo $(0, 2\pi)$ está dada por,

$$\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi(1-in)}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-in}e^{inw_0t}.$$

Para pasar a la forma trigonométrica empleamos la siguientes relaciones de los coeficientes de Fourier, (ver problema anterior).

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2c_0 \\
a_n &= c_n+\mathbf{c_n} \\
b_n &= i(c_n-\mathbf{c_n})
\end{aligned}$$

de la expresión que se obtuvo para los coeficientes c_n tenemos que,

$$c_0=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi},$$

de donde,

$$a_0=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi},$$

asimismo para los coeficientes a_n y b_n obtenemos,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}+\frac{1}{1+in}\right] \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left[\frac{1+in+1-in}{1+n^2}\right] \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left[\frac{2}{1+n^2}\right] \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{1+n^2}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= i\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}-\frac{1}{1+in}\right] \\
&= i\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left[\frac{1+in-1+in}{1+n^2}\right] \\
&= i\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\left[\frac{2in}{1+n^2}\right] \\
&= \frac{1-e^{2\pi}}{\pi}\left[\frac{n}{1+n^2}\right].
\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores de los coeficientes en la serie de Fourier trigonométrica, obtenemos

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\,(nw_0 t) + b_n sen\,(nw_0 t)\right] \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{1+n^2}\right) cos\,(nw_0 t) + \frac{1-e^{2\pi}}{\pi}\left(\frac{n}{1+n^2}\right) sen\,(nw_0 t)\right] \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}(cosnt - nsennt)\right]
\end{aligned}
$$

3.4. Espectros de Frecuencia

40. Encontrar y graficar los espectros de frecuencia para la función periódica $f(t)$ que se muestra en la siguiente figura. De la figura, la función $f(t)$ se puede definir por la forma:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{d}{2} \\ A & \text{para } -\frac{d}{2} \leq t < -\frac{d}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{d}{2} \leq t < \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Solución:
Para graficar los espectros de frecuencia (espectro de amplitud, -$|c_n|$ vs nw_0- y el espectro de fase -δ_n vs nw_0-) debemos calcular los coeficientes de la serie de Fourier Compleja. De la definición de la función dada y de la ecuación (3.15), el coeficiente de Fourier c_n está dado por:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} Ae^{-inw_0t}dt,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{A}{T}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-inw_0t}dt = \frac{A}{T}\left[-\frac{1}{inw_0}\, e^{-inw_0t}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\right] \\ &= -\frac{2A}{T}\frac{1}{inw_0}\left(\frac{e^{inw_d/2} - e^{-inw_d/2}}{2}\right) \\ &= \frac{2A}{T}\frac{1}{nw_0}\left(\frac{e^{inw_d/2} - e^{-inw_d/2}}{2i}\right) \\ &= \frac{Ad}{T}\left[\frac{sen\left(\frac{nw_0d}{2}\right)}{\left(\frac{nw_0d}{2}\right)}\right], \end{aligned}$$

también, como $\frac{nw_0d}{2} = \frac{n\left(\frac{2\pi}{T}\right)d}{2} = \frac{n\pi d}{T}$, la expresión anterior se puede escribir de la forma:

$$c_n = \frac{Ad}{T}\left[\frac{sen\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}\right]$$

En este caso, nótese que c_n es real, por consiguiente el espectro de fase es cero. El espectro de Amplitud se obtiene al graficar una de las ecuaciones anteriores

vs la frecuencia discreta nw_0, es decir el espectro de frecuencias es una función discreta y existe sólamente cuando,

$$w = 0, \pm\frac{2\pi}{T}, \pm\frac{4\pi}{T}, \ldots,$$

Tomando algunos valores específicos para d y T, por ejemplo, si $d = \frac{1}{20}$ y $T = \frac{1}{4}$, entonces $w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$. por lo tanto el espectro de amplitud existe cuando $w = 0, \pm 8\pi, \pm 16\pi, \ldots,$ además como $\frac{d}{T} = \frac{1/20}{1/4} = \frac{1}{5}$, entonces $\frac{n\pi d}{T} = n\pi\frac{1}{5} = m\pi$, para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$ es decir el espectro de amplitud se hace cero en el valor de nw_0 para el cual,

$$nw_0\frac{d}{2} = m\pi,$$

o también,

$$n\pi\frac{d}{T} = m\pi,$$

para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$ es decir cuando $w = \pm 5w_0 = \pm 40\pi, \pm 10w_0 = \pm 80\pi, \pm 15w_0 = \pm 120\pi, \ldots,$ como lo muestra la siguiente figura.
Asimismo, si tomamos por ejemplo, $d = \frac{1}{20}$ y $T = \frac{1}{2}$ de segundo, entonces $w_0 = 4\pi$ y $\frac{d}{T} = \frac{1}{10}$, por consiguiente el espectro de amplitud existe cuando $w = 0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \ldots,$ y se hace cero en el valor de nw_0 para el cual $nw_0\frac{d}{2} = m\pi$ o $\frac{n\pi d}{T} = n\pi\left(\frac{1}{10}\right) = m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots,)$ es decir cuando $w = \pm 10w_0 = 40\pi, \pm 20w_0 = \pm 80\pi, \pm 30w_0 = 120\pi, \ldots$, etc.

41. Encontrar los espectros de frecuencia de la función periódica que se muestra en la siguiente figura.

Solución

Obsérvese la similitud de esta función con la función del ejemplo anterior, esta gráfica se encuentra desplazada una distancia $d/2$. Procediendo de la misma forma que en el ejemplo anterior, de la ecuación (39), el coeficiente de Fourier c_n está dado ahora por:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^d Ae^{-inw_0t}dt,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{A}{T}\int_0^d e^{-inw_0t}dt \\ &= -\frac{A}{T}\left(\frac{1}{inw_0}\right) e^{-inw_0t}\Big|_0^d \\ &= -\frac{A}{T}\left(\frac{1}{inw_0}\right)\left(e^{-inw_0d} - 1\right) \\ &= \frac{A}{T}\left(\frac{1}{inw_0}\right)\left(1 - e^{-inw_0d}\right) \end{aligned}$$

Manipulando algebráicamente la ecuación anterior, utilizando el hecho de que $1 = e^{inw_0d/2}e^{-inw_0d/2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{A}{T}\left(\frac{1}{inw_0}\right)\left(1 - e^{-inw_0d/2}\right)\left(e^{inw_0d/2} - e^{-inw_0d/2}\right) \\ &= \frac{A}{T}\left(\frac{1}{inw_0/d}\right)\left(\frac{e^{inw_0d/2} - e^{-inw_0d/2}}{2i}\right)e^{-inw_0d/2} \\ &= \frac{Ad}{T}\left[\frac{sen\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}\right]e^{-inw_0d/2}. \end{aligned}$$

La expresión anterior se puede escribir de la forma:

$$c_n = |c_n|e^{i\delta_n}$$

donde:

$$|c_n| = \frac{Ad}{T}\left[\frac{sen\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}\right],$$

y

$$\delta_n = -\frac{nw_0 d}{2}.$$

Por lo tanto, el espectro de amplitud es exactamente el mismo que el ejemplo anterior y no se ve afectado por el cambio de origen, pero el espectro de fase es ahora igual a $-\frac{nw_0 d}{d} = -n\pi\frac{d}{T}$ radianes.
En general, si $f(t)$ es una función periódica con periodo T, y su serie de Fourier está dada por:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t}$$

de la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} f(t-\tau) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0(t-\tau)} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t} e^{-inw_0\tau} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inw_0 t} \end{aligned}$$

donde $C_n = c_n e^{-inw_0\tau}$. Así mismo, del ejemplo anterior el coeficiente c_n estaba dado por $c_n = |c_n|e^{i\delta_n}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} C_n &= |c_n|e^{i\delta_n}e^{-inw_0\tau} \\ &= |c_n|e^{i(\delta_n - nw_0\tau)}. \end{aligned}$$

La ecuación anterior indica que el espectro de amplitud de $f(t)$ y $f(t-\tau)$ es el mismo; sin embargo, las fases son diferentes. El desplazamiento de una función $f(t)$ en un tiempo τ produce un atraso de $nw_0\tau$ radianes en la componente de la frecuencia nw_0.

3.5. Transformada de Fourier

42. Calcular la Transformada de Fourier de la función $g(t) = te^{-2t}f(t)$ donde,

$$f(t) = \lambda \left[u\left(t+a\right) - u\left(t-a\right) \right].$$

Solución:

Por definición, la TF de una función g(t) está dada por:

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-jwt}dt,$$

de esta forma,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g(t)] &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} te^{-2t}[u(t+a) - u(t-a)]e^{-jwt}dt \\
&= \lambda \int_{-a}^{a} te^{-(2+jw)t}dt \\
&= \lambda \int_{-a}^{a} te^{-\beta t}dt,
\end{aligned}$$

donde $\beta = 2+jw$. Resolviendo la integral por partes, identificando a las variables de la forma $u = t$ y $dv = e^{-\beta t}dt$, de donde

$$\begin{aligned}
du &= dt, \\
v &= -\frac{1}{\beta}e^{-\beta T}.
\end{aligned}$$

Así, la integral resulta ser de la forma,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g(t)] &= \lambda \left[t\left(-\frac{1}{\beta}e^{-\beta t}\right)\Big|_{-a}^{a} + \frac{1}{\beta}\int_{-a}^{a} e^{-\beta t}dt \right] \\
&= \lambda \left[-\frac{t}{\beta}\, e^{-\beta t}\big|_{-a}^{a} + \frac{1}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}\right) e^{-\beta}\big|_{-a}^{a} \right] \\
&= \lambda \left[-\frac{a}{\beta}e^{-\beta a} + \frac{a}{\beta}e^{\beta a} - \frac{1}{\beta^2}\left(e^{-\beta a} - e^{\beta a}\right) \right] \\
&= \lambda \left[\frac{a}{\beta}\left(e^{\beta a} - e^{-\beta a}\right) + \frac{1}{\beta^2}\left(e^{\beta a} - e^{-\beta a}\right) \right] \\
&= \lambda \left[\left(\frac{a}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(e^{\beta a} - e^{-\beta a}\right) \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[g(t)] = \lambda \left[2 \sinh\left(\beta a\right)\right] \left[\frac{a}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right],$$

finalmente, sustituyendo el valor de $\beta = 2 + jw$ obtenemos,

$$\mathcal{F}[Te^{-2T}\lambda \left[u(T+a) - u(T-a)\right]] = 2\lambda \left(\frac{a}{2+jw} + \frac{1}{(2+jw)^2}\right) \sinh(2+jw)a.$$

43. Dada la función,

$$f(t) = \begin{cases} \beta e^{-\alpha t} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0, \end{cases}$$

encontrar la Transformada de Fourier de $f(t)$, donde α y β son constantes positivas.

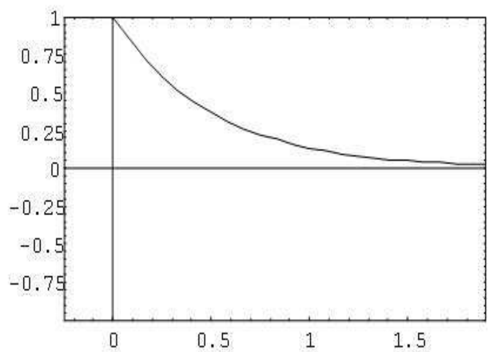


Figura 3.9: Función exponencial, $\beta = 1$ y $\alpha = 2$.

Solución:

Por definición, la transformada de Fourier de $f(t)$ está dada por,

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt.$$

sustituyendo el valor de la función dada, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{-jwt} dt + \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt \\ &= \int_{0}^{\infty} \beta e^{-\alpha t} e^{-jwt} dt \\ &= \beta \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + jw)t} dt \\ &= \beta \left[-\frac{1}{\alpha + jw} \right] e^{-(\alpha + jw)t} \Big|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{\beta}{\alpha + jw}. \end{aligned}$$

Para identificar la parte real e imaginaria de esta transformada, multiplicamos y dividimos por el complejo conjugado de $\alpha + jw$, de tal forma que obtenemos,

$$F(w) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{\beta(\alpha - jw)}{(\alpha + jw)(\alpha - jw)} = \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + w^2} - j\frac{\beta w}{\alpha^2 + w^2},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} R(w) &= \frac{\beta\alpha}{\alpha^2 + w^2} \\ \chi(w) &= -\frac{\beta w}{\alpha^2 + w^2}, \end{aligned}$$

asimismo, los espectros de Amplitud y de fase, $|F(w)|$ y $\phi(w)$ de la función $f(t)$ están dados por:

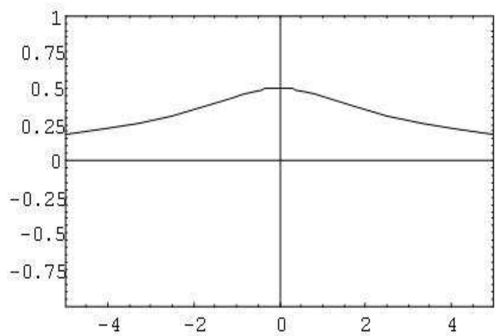


Figura 3.10: Transformada de Fourier de la función exponencial, $\beta = 1$ y $\alpha = 2$.

$$\begin{aligned} |F(w)| &= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + w^2}} \\ \phi(w) &= tan^{-1}\left[-\frac{w}{\alpha}\right]. \end{aligned}$$

44. Dada la función,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < -a \\ k & \text{para } -a \leq t < a \\ 0 & \text{para } t > a. \end{cases}$$

donde a y k son números positivos, encontrar la Transformada de Fourier de $f(t)$. Como se muestra en la figura, esta función se puede representar como la diferencia de dos funciones de Heaviside $H(t)$, que analizaremos posteriormente en la seción de transformadas de Fourier de funciones generalizadas (funciones simbólicas).

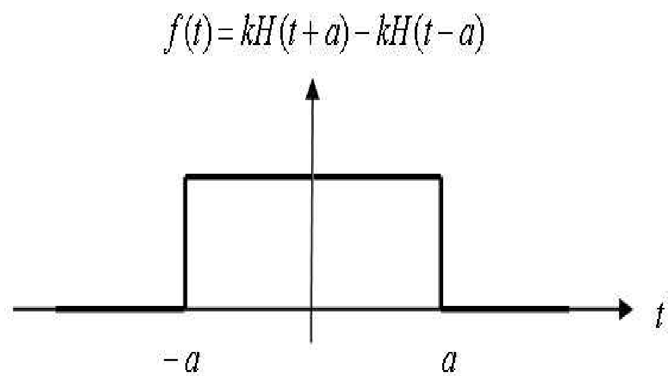


Figura 3.11: Función pulso rectangular.

Solución:

En forma análoga al problema anterior, sustituyendo el valor de la función dada en la definición para la transformada de Fourier obtenemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{-a} f(t)e^{-jwt}dt + \int_{-a}^{a} f(t)e^{-jwt}dt + \int_{a}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt \\
&= k\int_{-a}^{a} e^{-jwt}dt = k\,\frac{-1}{jw}e^{-jwt}\Big|_{-a}^{a} \\
&= -\frac{k}{jw}\left[e^{-jwa} - e^{jwa}\right] \\
&= \frac{2k}{w}\left(\frac{e^{jwa} - e^{-jwa}}{2j}\right).
\end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2ka\left[\frac{\sin(wa)}{wa}\right]$$

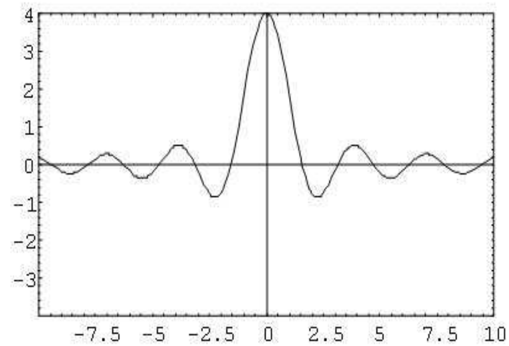
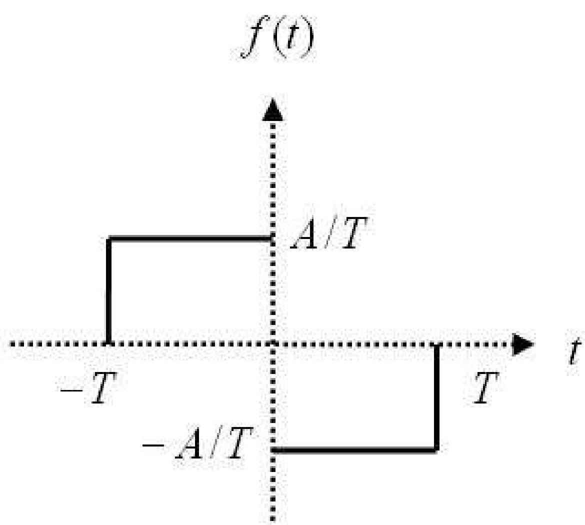


Figura 3.12: Transformada de Fourier de un pulso rectangular.

45. Determinar la transformada de Fourier de la función que se muestra en la siguiente figura,



Solución:

Aplicando la definición de la transformada de Fourier obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-T}^{0} \frac{A}{T} e^{-jwt} dt + = \int_{0}^{T} \left(-\frac{A}{T}\right) e^{-jwt} dt \\
&= \frac{A}{T}\left(-\frac{1}{jw}\right) e^{-jwt}\Big|_{-T}^{0} - \frac{A}{T}\left(-\frac{1}{jw}\right) e^{-jwt}\Big|_{0}^{T} \\
&= -\frac{A}{jwT}\left[1 - e^{jwT}\right] + \frac{A}{jwT}\left[e^{-jwT} - 1\right] \\
&= \frac{A}{jwT}\left[e^{jwT} + e^{jwT} - 2\right],
\end{aligned}
$$

por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{wT}{2}\right) &= \sin\left(\frac{wT}{2}\right)\sin\left(\frac{wT}{2}\right)\\ &= \left(\frac{e^{jwT}-e^{-jwT}}{2j}\right)\left(\frac{e^{jwT}-e^{-jwT}}{2j}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left[e^{jwT}+e^{-jwT}-2\right]\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$-4\sin^2\left(\frac{wT}{2}\right) = e^{jwT}+e^{-jwT}-2,$$

finalmente, la Transformada de Fourier de un pulso (ver figura) está dado por,

$$\mathcal{F}[f(t)] = -\frac{4A}{jwT}\sin^2\left(\frac{wT}{2}\right)$$

también, como $\sin^2\left(\frac{wT}{2}\right) = \frac{1}{2}[1-\cos(wT)]$ entonces,

$$\mathcal{F}[f(t)] = -\frac{2A}{jwT}[1-\cos(wT)].$$

46. Determinar la Transformada de Fourier del pulso triangular definido por la función,

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & \text{para } |t| < \tau \\ 0 & \text{para } |t| > \tau, \end{cases}$$

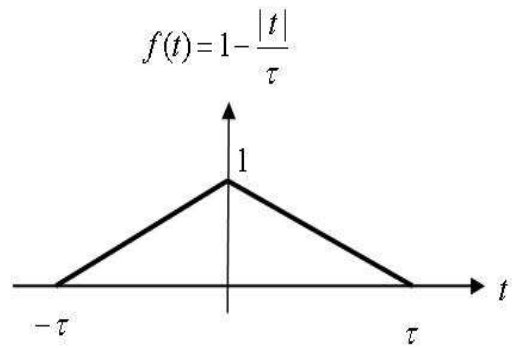


Figura 3.13: Pulso triangular.

Aplicando la definición de la transformada de Fourier obtenemos,

$$\mathcal{F}[1 - \frac{|t|}{\tau}] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{|t|}{\tau}\right] e^{-jwt} dt = \int_{-\tau}^{\tau} \left[1 - \frac{|t|}{\tau}\right] e^{-jwt} dt$$

aplicando la definición del valor absoluto, resutan 4 integrales de la forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1 - \frac{|t|}{\tau}] &= \int_{-\tau}^{0} \left[1 + \frac{t}{\tau}\right] e^{-jwt} dt + \int_{0}^{\tau} \left[1 - \frac{t}{\tau}\right] e^{-jwt} dt \\ &= \int_{-\tau}^{0} e^{-jwt} dt + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{0} te^{-jwt} dt + \int_{0}^{\tau} e^{-jwt} dt - \frac{1}{\tau} \int_{0}^{\tau} te^{-jwt} dt \end{aligned}$$

integrando por partes la segunda y cuarta integral, haciendo el cambio de variable $t = u$ y $dv = e^{-jwt}dt$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1 - \frac{|t|}{\tau}] &= -\frac{i}{jw} e^{-jwt} \Big|_{-\tau}^{0} + \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{w^2} e^{-jwt} \Big|_{-\tau}^{0} - \frac{t}{jw} e^{-jwt} \Big|_{-\tau}^{0} \right] \\ &= -\frac{1}{jw} e^{-jwt} \Big|_{0}^{\tau} - \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{w^2} e^{-jwt} \Big|_{0}^{\tau} - \frac{t}{jw} e^{-jwt} \Big|_{0}^{\tau} \right] \end{aligned}$$

evaluando las integrales,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1 - \frac{|t|}{\tau}] &= -\frac{1}{jw} \left(1 - e^{jw\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{w^2} \left(1 - e^{jw\tau}\right) - \frac{\tau}{jw} e^{jw\tau} \right] \\ &= -\frac{1}{jw} \left(e^{-jw\tau} - 1\right) - \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{w^2} \left(e^{-jw\tau} - 1\right) - \frac{\tau}{jw} e^{-jw\tau} \right] \\ &= \frac{2}{\tau w^2} + \frac{1}{\tau w^2} e^{jw\tau} - \frac{1}{\tau w^2} e^{-jw\tau} \\ &= \frac{1}{\tau w^2} \left[2 + e^{jw\tau} - e^{-jw\tau}\right], \end{aligned}$$

por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{w\tau}{2}\right) &= \sin\left(\frac{w\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{w\tau}{2}\right) \\ &= \left(\frac{e^{jw\tau}-e^{-jw\tau}}{2j}\right)\left(\frac{e^{jw\tau}-e^{-jw\tau}}{2j}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[2+e^{jw\tau}-e^{-jw\tau}\right]\end{aligned}$$

finalmente, la Transformada de Fourier de un pulso triangular está dada por (ver figura),

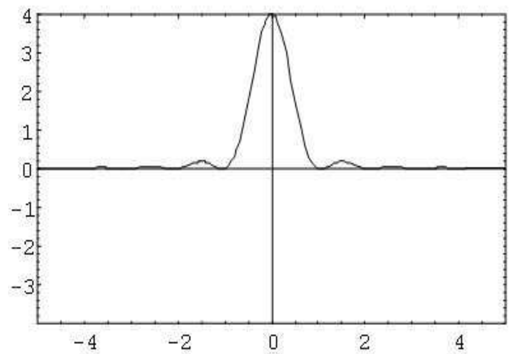


Figura 3.14: Transformada de Fourier de un pulso triangular.

$$\mathcal{F}[1-\frac{|t|}{\tau}] = \tau\frac{\sin^2\left(\frac{w\tau}{2}\right)}{\left(\frac{w\tau}{2}\right)^2} = \tau\left[Sa\left(\frac{w\tau}{2}\right)\right]^2$$

donde la función $Sa\left(\frac{w\tau}{2}\right)$ es la función de muestreo. Obsérvese la analogía con el problema anterior, donde la Transformada de Fourier de un pulso rectangular está dada por la función de muestreo.

47. Encontrar la Transformada de Fourier y dibujar el espectro de frecuencias de la función,

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ -1 & \text{para } -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{para } |t| > 1. \end{cases}$$

Solución:

Aplicando la definición de la Transformada de Fourier, y la definición de la función dada, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt \\
&= \int_{-1}^{0} e^{-jwt}dt + \int_{0}^{1} e^{-jwt}dt \\
&= -\frac{1}{-jw}e^{-jwt}\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{-jw}e^{-jwt}\Big|_{-1}^{0} \\
&= -\frac{1}{jw}\left(e^{-jw} - 1\right) + \frac{1}{jw}\left(1 - e^{jw}\right) \\
&= \frac{1}{jw}\left(2 - e^{-jw} - e^{jw}\right) \\
&= \frac{1}{jw}\left[2 - 2\left(\frac{e^{-jw} + e^{jw}}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{2}{jw}[1 - cosw]$$

y su espectro de frecuencias está dado por:

$$\begin{aligned}
|F(w)| &= \sqrt{\left(\frac{2}{w}\right)^2 (1 - cosw)^2} \\
&= \frac{2}{w}(1 - cosw)
\end{aligned}$$

En el cálculo de las transformadas de Fourier de ciertas funciones, algunas veces el procedimiento de obtención de las mismas se simplifica mucho aplicando algunas propiedades de la Transformada de Fourier que describimos a continuación.

3.6. Propiedades de la Transformada de Fourier

48. Determinar la constante de valor complejo λ necesaria para que sea válido el siguiente par de Trasnsformadas.

$$\mathcal{F}[e^{j\pi t f(t-1/2)}] = \lambda e^{\frac{-jw}{2}F(w-\pi)}$$

Solución:

Aplicando la definición de la Transformada de Fourier, tenemos que,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{j\pi t f(t-1/2)}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi t f(t-1/2)} e^{-jwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-1/2) e^{-j(w-\pi)t} dt.\end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $x = t - 1/2$, entonces $t = x + 1/2$, por lo tanto;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{j\pi t f(t-1/2)}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j(w-\pi)(x+1/2)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(w-\pi)/2} f(x) e^{-j(w-\pi)x} dx \\ &= e^{-j(w-\pi)/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j(w-\pi)x} dx.\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento en la frecuencia dada por la ecuación (41) obtenemos,

$$\mathcal{F}[e^{j\pi t f(t-1/2)}] = e^{-jw/2} e^{j\pi/2} F(w-\pi),$$

Finalmente, comparando con el problema original del par de Transformadas obtenemos,

$$\lambda = e^{j\pi/2} = cos(\pi/2) + jsen(\pi/2)$$

es decir,

$$\lambda = j$$

49. Si $F(w) = \mathcal{F}[f(t)]$, hallar la Transformada de Fourier de $f(t)cos(w_0t)$.

Solución:

Sabemos que $cos(w_0t) = \frac{1}{2}\left(e^{jw_0t} + e^{-jw_0t}\right)$, entonces

$$\mathcal{F}[f(t)cos(w_0t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}e^{jw_0t} + \frac{1}{2}e^{-jw_0t}\right].$$

Si aplicamos las propiedades de linealidad y desplazamiento en la frecuencia de la Transformada de Fourier dadas por las ecuaciones

$$\mathcal{F}\left[a_1f_1(t) + a_2f_2(t)\right] = a_1F_1(w) + a_2F_2, \tag{3.18}$$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-jw_0t}] = F(w - w_0), \tag{3.19}$$

obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)cos(w_0t)] &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[f(t)e^{jw_0t}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[f(t)e^{-jw_0t}\right] \\ &= \frac{1}{2}[F(w - w_0) + F(w + w_0)]. \end{aligned}$$

50. Para ilustrar la propiedad de linealidad, consideremos las siguientes funciones, $f_1(t) = k$ y $f_2(t) = Acos(w_0 t)$ y calculemos su respectiva transformada de Fourier:
Solución:
Aplicando la definición de la Transformada de Fourier para la función $f_1(t)$ obtenemos,

$$\begin{aligned} F_1(w) = \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-jwt} dt = k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt} dt \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} cos(wt) dt - jk \int_{-\infty}^{\infty} sen(wt) dt \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} cos(wt) dt \\ &= k\delta(w). \end{aligned}$$

En forma análoga para la Transformada de Fourier de $f_2(t)$ obtenemos,

$$\begin{aligned} F_2(w) = \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} Acos(w_0 t) e^{-jwt} dt \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t} \right) e^{-jwt} dt \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(w-w_0)t} dt + \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(w+w_0)t} dt \\ &= \frac{A}{2}\delta(w - w_0) + \frac{A}{2}\delta(w + w_0). \end{aligned}$$

En los cálculos anteriores aplicamos la expresión para la funció δ definida por,

$$\delta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} cos(wt) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwt} dt,$$

que demostraremos posteriormente cuando analizemos la Transformada de Fourier de algunas funciones especiales, como la función delta δ. En resumen, el par de transformadas, de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se representan de la forma,

$$\begin{array}{ccc} f_1(t) = k & \Leftrightarrow & F_1(w) = k\delta(w) \\ f_2(t) = Acos(w_0 t) & \Leftrightarrow & F_2(w) = \frac{A}{2}\delta(w - w_0) + \frac{A}{2}\delta(w + w_0). \end{array}$$

De esta forma, aplicando la propiedad de linealidad dada por la ecuación (40) obtenemos,

$$f_1(t) + f_2(t) = k + Acos(w_0 t) \;\; \Leftrightarrow \;\; F_1(w) + F_2(w) = k\delta(w) + \delta(w - w_0) + \tfrac{A}{2}\delta(w + w_0).$$

En la siguiente figura se ilustran las gráficas de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, así como sus espectros de amplitud.

51. Hallar la Transformada de Fourier de la función coseno de duración finita igual a d dada por la función $f(t) = f_d(t)cos(w_0 t)$, donde f_d está dada por,

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < \frac{d}{2} \\ 0 & \text{para } |t| > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Solución:
En este problema podemos usar el resultado anterior dada por la expresión,

$$\mathcal{F}[f(t)cos(w_0 t)] = \frac{1}{2}[F(w - w_0) + F(w + w_0)],$$

si conocemos la transformada de Fourier de $f(t)$, que es una consecuencia de la propiedad de desplazamiento en la frecuencia, por lo tanto debemos de calcular primeramente la Transformada de Fourier de $f_d(t)$, de esta forma, aplicando la definición de la Transformada de Fourier, obtenemos

$$\mathcal{F}[f_d(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_d(t)e^{-jwt}dt,$$

y aplicando la definición de la función $f_d(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_d(t)] &= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-jwt}dt \\ &= -\frac{1}{jw}e^{-jwt}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \\ &= -\frac{1}{jw}\left[e^{-j\frac{wd}{2}} - e^{j\frac{wd}{2}}\right] \\ &= \frac{2}{w}\left[\frac{e^{-j\frac{wd}{2}} - e^{j\frac{wd}{2}}}{2j}\right] \end{aligned}$$

finalmente, obtenemos

$$\mathcal{F}[f_d(t)] = \frac{2}{w}sen\left(\frac{wd}{2}\right),$$

de esta forma, aplicando la prpiedad de desplazamiento en la frecuencia obtenemos,

$$\mathcal{F}[f_d(t)cos(w_0 t)] = \frac{1}{w - w_0}\left[sen\frac{1}{2}(w - w_0)d\right] + \frac{1}{w + w_0}\left[sen\frac{1}{2}(w + w_0)d\right].$$

La siguiente figura muestra las gráficas de la función coseno de duración finita y su repectivo espectro de amplitud (función de densidad espectral).

3.7. Convolución de funciones

52. Si las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ están definidas por,

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0, \end{cases}$$

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{en-otro-caso,} \end{cases}$$

encontrar la Convoluvión de $f_1(t)$ y $f_2(t)$.

Solución:

Por definición, la convolución de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ está dada por,

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$

en este caso, de la definición de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se tiene que,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \sin(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau, \tag{3.20}$$

si $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. O también,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau, \tag{3.21}$$

si $t \geq \frac{\pi}{2}$. O también,

$$f_1(t) * f_2(t) = 0, \tag{3.22}$$

si $t \leq 0$.

Si tiene duda del porque lo anterior, recuerde que los límites inferiores y superiores en la convolución se toman generalmente siguiendo la regla :

Limite inferior = max $[L_{1,} L_2]$ $=$ máximo de los dos límites inferiores y,

Limite superior = min $[U_1, U_2]$ $=$ mínimo de los dos límites superiores.

Por lo tanto, de la ecuación (42), integrando por partes haciendo los cambios de variable $u = \sin(\tau)$, de donde $du = \cos(\tau) d\tau$, y también, $dv = e^{\tau} d\tau$, de donde

$v = e^{\tau}$, la integral anterior resulta,

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= e^{-t} \int_0^t \sin(\tau) e^{\tau} d\tau \\ &= e^{-t} \left[\sin(\tau) e^{\tau}\big|_0^t - \int_0^t e^{\tau} \cos(\tau) d\tau \right] \\ &= e^{-t} \left[\sin(\tau) e^{\tau} - \left(e^{\tau} \cos(\tau)\big|_0^t + \int_0^t \sin(\tau) e^{\tau} d\tau \right) \right], \end{aligned}$$

integrando nuevamente por partes haciendo los mismos cambios de variable variable ($u = \sin(\tau)$, de donde $du = \cos(\tau) d\tau$, y también, $dv = e^{\tau} d\tau$, de donde $v = e^{\tau}$), después de hacer un poco de álgebra obtenemos,

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= e^{-t} \left[\frac{\sin(t) e^t - \cos(t) e^t + 1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin(t) - \cos(t) + e^{-t} \right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

En forma análoga de la ecuación (43), obtenemos

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\tau) e^{\tau} d\tau, \end{aligned}$$

asimismo, integrando por partes haciendo los cambios de variable $u = \sin(\tau)$, de donde $du = \cos(\tau) d\tau$, y también, $dv = e^{\tau} d\tau$, de donde $v = e^{\tau}$, la integral anterior resulta,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\tau) e^{\tau} d\tau &= \sin(\tau) e^{\tau}\big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\tau) e^{\tau} d\tau \\ &= \sin(\tau) e^{\tau}\big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\cos(\tau) e^{\tau}\big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\tau) e^{\tau} d\tau \right), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\tau) e^{\tau} d\tau &= \frac{1}{2} \left[e^{\tau} \left[\sin(\tau) - \cos(\tau) \right]\big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right] \end{aligned}$$

en donde se integró nuevamente por parte haciendo los cambios $u = \sin(\tau)$ y $dv = e^{\tau} d\tau$. De esta forma, obtenemos

$$
\begin{aligned}
f_1(t) * f_2(t) &= e^{-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\tau) e^{\tau} d\tau \\
&= \frac{e^{-t}}{2} \left[e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right].
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Finalmente, de las ecuaciones (44), (45) y (46), la convolución de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, está dada por:

$$
f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}}{2} \left[e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right] & \text{para } t \geq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} [\sin(t) - \cos(t) + e^{-t}] & \text{para } 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{para } t \leq 0. \end{cases}
$$

53. Graficar y calcular todos los pasos del proceso de convolucionar las siguientes funciones:

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 < t < 3 \\ 0 & \text{para } t < 0 \& t > 3 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{para } t < -1 \& t > 1 \end{cases}$$

Primero enumeremos paso a paso las operaciones necesarias, descritas anterior-

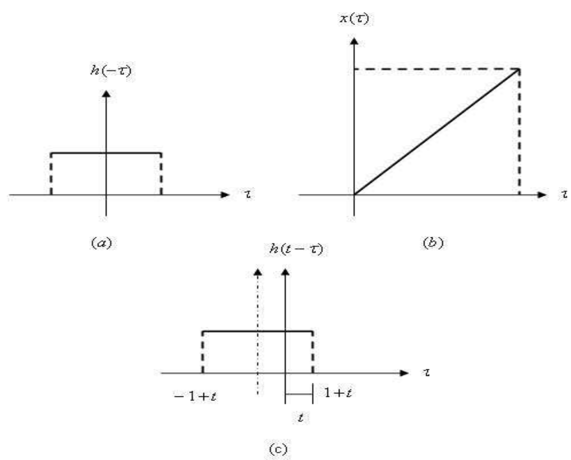


Figura 3.15: Espectro de frecuencias de la función de Heaviside.

mente:

1.- Se reemplaza la variable t por la variable τ en $x(t)$ y $h(t)$; asimismo se refleja la función $h(t)$, como se ilustra en la figura incisos, partes (a) y (b).

2.- Transladamos todo el sistema de referencia de la función $h(-\tau)$ mediante una cantidad t, como se ilustra en la figura parte (c). Obsérvese que la cantidad de translación t es la diferencia entre el sistema de refencia móvil y el fijo, de tal forma que la función transladada es de la forma:

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1+t < \tau < 1+t \\ 0 & \text{para } \tau < -1+t \& \tau > 1+t \end{cases}$$

obsérvese también que el origen del sistema móvil está en $\tau = t$, mientras que el origen del sistema fijo está en $t = 0$.

3.- Finalmente, para cualquier desplazamiento relativo entre los ejes de referencia, debe hallarse el área bajo el producto de las dos funciones. Para esto tendremos que dividir las regiones de integración que dependerá principalmente del como se vaya desplazando la función $h(t-\tau)$ para convolucionar con la función

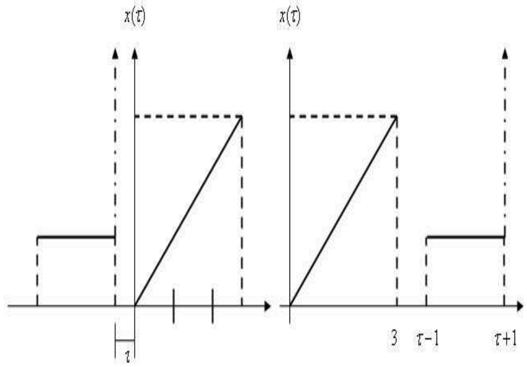


Figura 3.16: primera y última región de convolución.

$x(\tau)$. Para nuestro ejemplo tenemos 5 regiones: $-\infty < \tau < -1$, $-1 < \tau < 1$, $1 < \tau < 2$, $2 < \tau < 4$ y $4 < \tau < \infty$. Como se ilustra en las figuras,la convulución para la primera y quinta region es cero. Por definición, la convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$ está dada por la integral,

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

para la segunda región, la convolución estará dada por (ver la figura para entender mejor los límites de integración):

$$x(t) * h(t) = \int_{0}^{t+1} \tau d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_{0}^{t+1} = \frac{(t+1)^2}{2}.$$

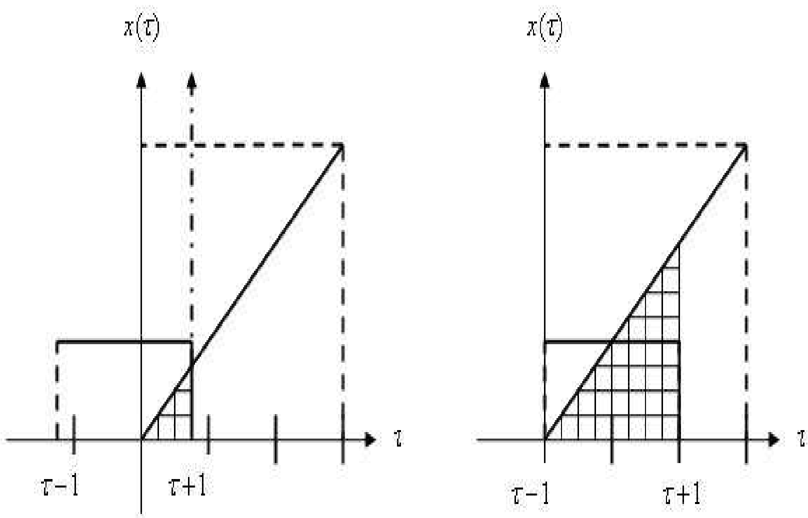


Figura 3.17: Segunda y tercera regiones de convolución.

En forma análoga, para la tercera región, la convolución estará dada por:

$$x(t) * h(t) = \int_{t-1}^{t+1} \tau d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_{t-1}^{t+1} = \frac{1}{2}\left[(t+1)^2 - (t-1)^2\right] = 2t$$

y finalmente, para la cuarta región (ver figura),

$$x(t) * h(t) = \int_{t-1}^{3} \tau d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_{t-1}^{3} = \frac{1}{2}\left[9 - (t-1)^2\right] = 4 + t - t^2/2.$$

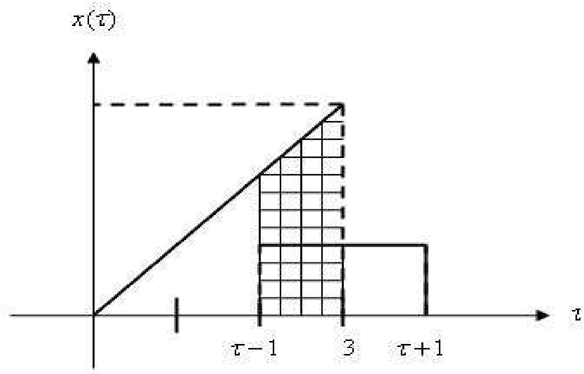


Figura 3.18: Cuarta región de convolución.

A continuación presentamos los resultados para las cinco regiones:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < \tau < -1, \\ \frac{(t+1)^2}{2} & \text{para } -1 < \tau < 1, \\ 2t & \text{para } 1 < \tau < 2, \\ 4 + t - t^2/2 & \text{para } 2 < \tau < 4, \\ 0 & \text{para } 4 < \tau < \infty. \end{cases}$$

En la siguiente figura se ilustra la convolución de las funciones juntando los resultados en las distintas regiones.

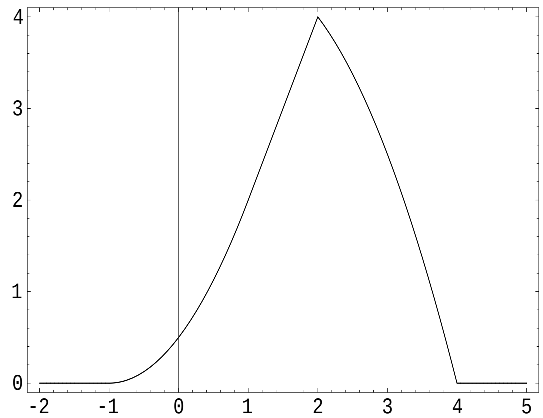


Figura 3.19: Convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$.

54. En este problema mostramos la convolución de dos pulsos unitarios definidos por,

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{para } t < 0 \& t > 1 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{para } t < 0 \& t > 1 \end{cases}$$

este ejemplo nos sirve también para ilustrar la propiedad conmutativa de la convolución de dos funciones. En la figura se muestran las cuatro regiones de convolución: la primera y última región cuando lo convolución de los pulsos es cero (ver partes (a) y (b) respectivamente), que corresponde a los intervalos $-\infty < \tau < 0$ y $2 < \tau < \infty$, antes y despues de juntarse los pulsos.

Para la segunda región, que corresponde al intervalo $0 < \tau < 1$ (ver figura (c), la convolución estará dada por:

$$x(t) * h(t) = \int_0^t \tau d\tau = t,$$

y finalmente, para la tercera región que corresponde al intervalo $1 < \tau < 2$, (ver figura (d)),

$$x(t) * h(t) = \int_{t-1}^1 \tau d\tau = 2 - t.$$

A continuación presentamos los resultados para las cuatro regiones:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < \tau < 0, \\ t & \text{para } 0 < \tau < 1, \\ 2 - t & \text{para } 1 < \tau < 2, \\ 0 & \text{para } 2 < \tau < \infty. \end{cases}$$

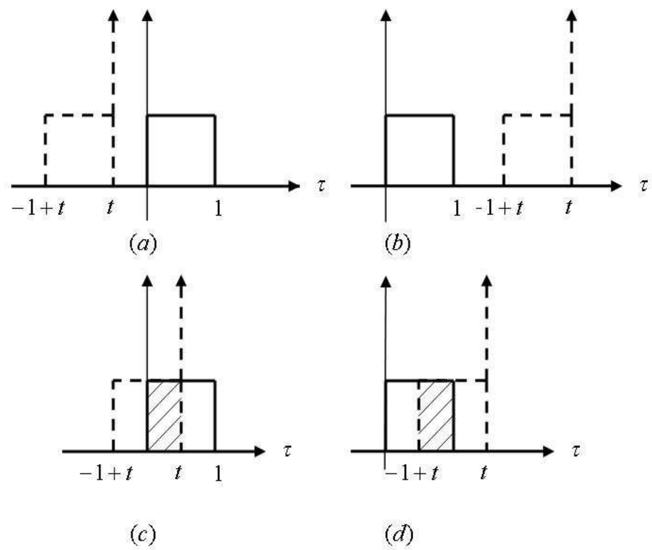


Figura 3.20: Ilustración gráfica de la Convolución de dos pulsos unitarios.

En la siguiente figura se ilustra la convolución de las funciones juntando los resultados en las distintas regiones.

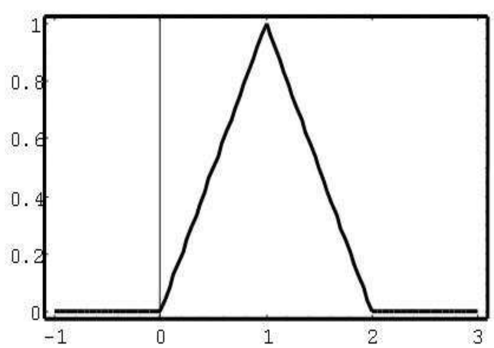


Figura 3.21: función de convolución de dos pulsos unitarios

55. Hallar la convolución de las siguientes funciones,

$$\begin{aligned} x(t) &= H(t) - 2H(t-2) + H(t-5) \\ h(t) &= e^{2t}H(1-t). \end{aligned}$$

Las funciones H's, son las funciones de Heaviside repectivamente. Las funciones $h(t)$ y $x(t)$ se muestran en la siguiente figura, en donde se ha cambiado la variable t por la variable τ.

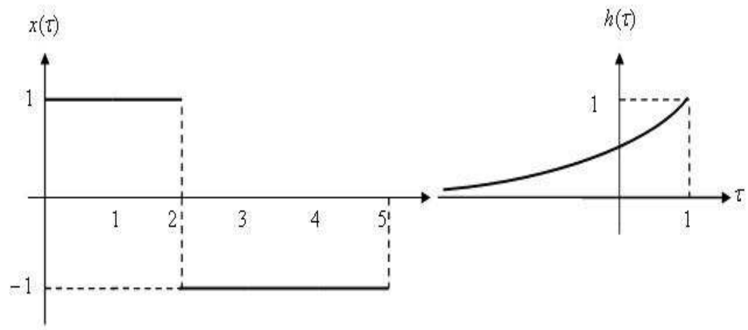


Figura 3.22: funciones $x(\tau)$ y $h(\tau)$.

Solución:

Siguiendo paso a paso el proceso de convolución, en la siguiente figura se muestra la reflexión de la función $x(\tau)$ así como el desplazamiento de ésta mediante una cantidad t, para obtener la función $x(t-\tau)$.

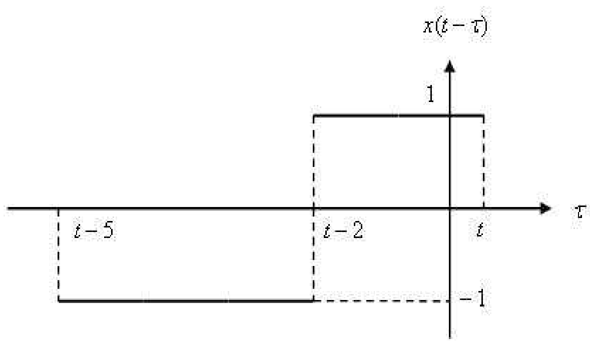


Figura 3.23: función *móvil* $x(t-\tau)$.

De esta forma, para realizar la convolución de las funciones $h(t)$ y $x(t)$, como en los ejemplos anteriores, debemos de analizar las distintas regiones en los que el sistema *móvil* $(x(t-\tau))$ se va desplazando sobre el sistema *fijo* $(h(\tau))$, y debemos hallar el área bajo el producto de las dos funciones para cada región.

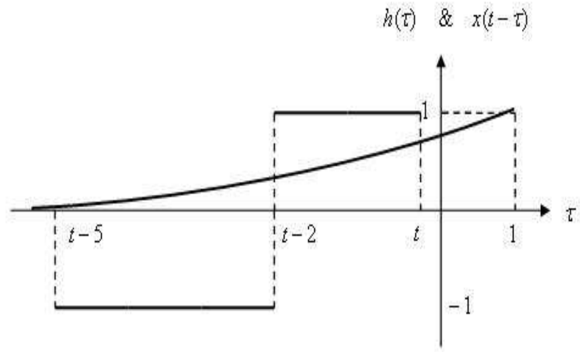


Figura 3.24: Primera región de convolución de las funciones $h(\tau)$ y $x(\tau)$, intervalo $t < 1$.

Para la primera región, en este caso para el intervalo $t < 1$, como se muestra en la figura, tenemos:

$$\begin{aligned} h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{t-5}^{t-2} e^{2\tau}(-1)d\tau + \int_{t-2}^{t} e^{2\tau}(1)d\tau \\ &= -\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{t-5}^{t-2} + \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{t-2}^{t} = -\frac{1}{2}\left[e^{2(t-2)} - e^{2(t-5)}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{2t} - e^{2(t-2)}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{2t}\left[1 + e^{-10} - 2e^{-4}\right]. \end{aligned}$$

Para la segunda región, como se muestra en la figura, tenemos:

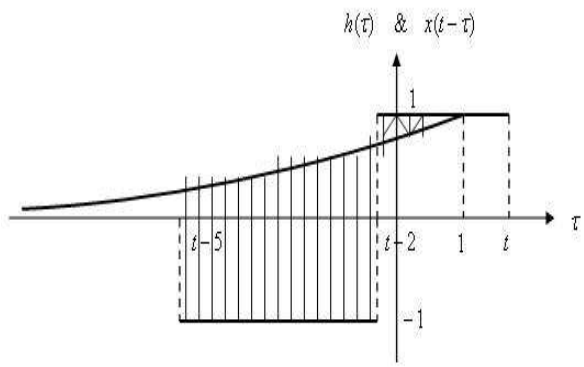


Figura 3.25: Segunda región de convolución de las funciones $h(\tau)$ y $x(\tau)$, intervalo $1 \leq t < 3$.

$$\begin{aligned} h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{t-5}^{t-2} e^{2\tau}(-1)d\tau + \int_{t-2}^{1} e^{2\tau}(1)d\tau \\ &= -\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{t-5}^{t-2} + \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{t-2}^{1} = -\frac{1}{2}\left[e^{2(t-2)} - e^{2(t-5)}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{2(t-2)}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{2t}\left[e^{-10} - 2e^{-4}\right] + \frac{1}{2}e^{2}. \end{aligned}$$

De la misma forma, como se muestra en la figura para el intervalo $3 \leq t < 6$, la convolución en esta región está dada por,

$$\begin{aligned} h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{t-5}^{1} e^{2\tau}(-1)d\tau \\ &= -\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{t-5}^{1} = -\frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{2(t-5)}\right] = \frac{1}{2}e^{2(t-5)} - \frac{1}{2}e^{2}. \end{aligned}$$

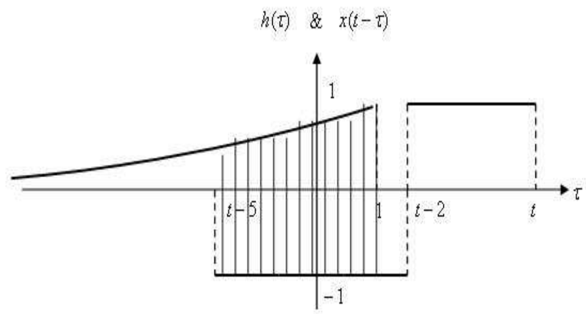


Figura 3.26: Tercera región de convolución de las funciones $h(\tau)$ y $x(\tau)$, intervalo $3 < t < 6$.

Finalmente, para la región que corresponde al intervalo $t \geq 6$, como se observa en la figura el producto de las dos funciones es cero, es decir,

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = 0$$

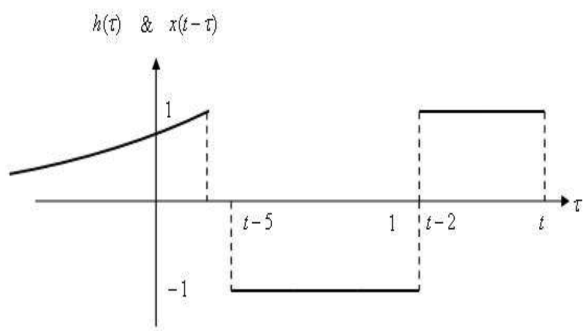


Figura 3.27: Cuarta región de convolución de las funciones $h(\tau)$ y $x(\tau)$, intervalo $6 \leq t < \infty$.

A continuación presentamos los resultados para las cuatro regiones:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2t}\left[1 + e^{-10} - 2e^{-4}\right] & \text{para } t < 1, \\ \frac{1}{2}e^{2t}\left[e^{-10} - 2e^{-4}\right] + \frac{1}{2}e^{2} & \text{para } 1 \leq t < 3, \\ \frac{1}{2}e^{2(t-5)} - \frac{1}{2}e^{2} & \text{para } 3 \leq t < 6, \\ 0 & \text{para } 6 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Obsérvese que en este problema se puede tomar como sistema *móvil* a la función $h(t-\tau)$ y se desplaza ésta sobre el sistema *fijo* que sería la función $x(\tau)$, debido a que la convolución satisface la propiedad de conmutatividad. Lo anterior se deja como ejercicio para el lector.

56. Aplique el teorema de convolución para encontrar la Transformada Inversa de Fourier (TIF) de la función,

$$G(w) = \frac{\sin(3w)}{w(2+jw)}$$

Solución:

Para encontrar la TIF, reescribimos la función de la siguiente manera,

$$G(w) = \frac{\text{sen}(3w)}{w(2+jw)} = \left[\frac{\sin(3w)}{w}\right]\left[\frac{1}{2+jw}\right] = F_1(w)F_2(w),$$

De esta forma podemos emplear los siguientes resultados de pares de Transformadas de Fourier (que el lector puede mostrar fácilmente aplicando la definición de la transformada de Fourier.

$$\mathcal{F}\left[e^{-bt}H(t)\right] = \frac{1}{b+jw}, \tag{3.25}$$

y

$$\mathcal{F}\left[kH(t+a) - kH(t-a)\right] = \frac{2k\sin(aw)}{w}, \tag{3.26}$$

donde las funciones H's, son las funciones de Heaviside que se muestran en la siguiente figura.

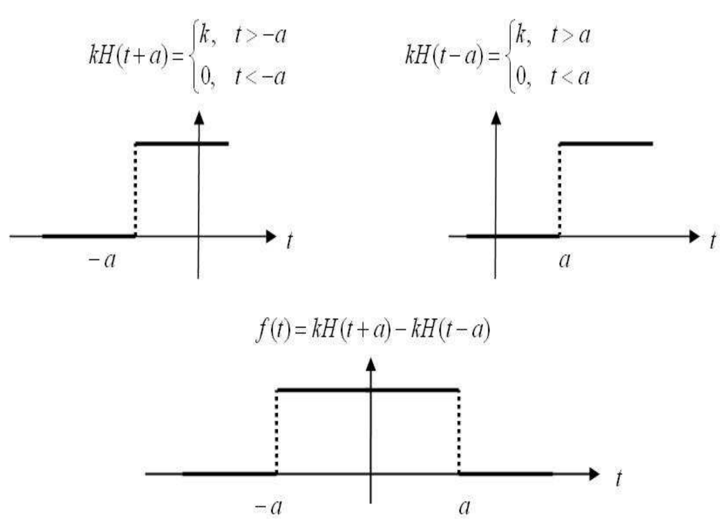


Figura 3.28: Funciones de Heavside.

Por lo tanto, la TIF de la función $G(w)$ está dada por,

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(w)] = \mathcal{F}^{-\infty}\left[\left(\frac{\sin(3w)}{w}\right)\left(\frac{1}{2+jw}\right)\right], \tag{3.27}$$

de esta forma, aplicando las transformadas dadas por las ecuaciones (47) y (48) con $a = 3$, $b = 2$ y $k = 1$, obtenemos

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[H(t+3) - H(t-3)\right] \times \mathcal{F}\left[e^{-2t}H(t)\right]\right]. \tag{3.28}$$

En esta parte aplicamos el teorema de Convolución que establece que:
Si

$$\mathcal{F}\left[f_1(t)\right] = F_1(w)$$

y

$$\mathcal{F}\left[f_2(t)\right] = F_2(w)$$

entonces,

$$\mathcal{F}\left[f_(t) * f_2(t)\right] = F_1(w)F_2(w) \tag{3.29}$$

así, de las ecuaciones (50) y (51) obtenemos

$$g(t) = \frac{1}{2}\left[H(t+3) - H(t-3)\right] * \left[e^{-2t}H(t)\right].$$

Ahora, aplicando la Convolución de dos funciones f_1 y f_2 definida por:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

obtenemos,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H(\tau+3) - H(\tau-3)\right]\left[e^{-2(t-\tau)}H(t-\tau)\right]d\tau \\ &= \frac{e^{-2t}}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau+3)H(t-\tau)e^{2\tau}d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau-3)H(t-\tau)e^{2\tau}d\tau\right]. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Para resolver las integrales anteriores, analicemos las funciones de Heaviside involucradas en dichas integrales.

$$H(\tau+3) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau > -3 \\ 0 & \text{si } \tau < -3 \end{cases}$$

$$H(\tau-3) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau > 3 \\ 0 & \text{si } \tau < 3 \end{cases}$$

$$H(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > \tau \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases}$$

de donde,

$$H(\tau+3)H(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } -3 < \tau < t \\ 0 & \text{si } \tau < -3 \;\&\; \tau > t \end{cases}$$

y

$$H(\tau-3)H(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } 3 < \tau < t \\ 0 & \text{si } \tau < 3 \;\&\; \tau > t \end{cases}$$

Por lo tanto, las integrales de la ecuación (52) resultan ser de la forma,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau+3)H(t-\tau)e^{2\tau}d\tau &= \begin{cases} \int_{-3}^{t} e^{2\tau} & \text{si } \tau > -3 \\ 0 & \text{si } \tau < -3 \end{cases} \\ &= \int_{-3}^{t} e^{2\tau}d\tau H(t+3) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau-3)H(t-\tau)e^{2\tau}d\tau &= \begin{cases} \int_{3}^{t} e^{2\tau} & \text{si } \tau > 3 \\ 0 & \text{si } \tau < 3 \end{cases} \\ &= \int_{3}^{t} e^{2\tau}d\tau H(t-3). \end{aligned}$$

De esta forma, de la ecuación (52) obtenemos,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{e^{-2t}}{2}\left[\int_{-3}^{t} e^{2\tau}d\tau H(t+3) - \int_{3}^{t} e^{2\tau}d\tau H(t-3)\right] \\ &= \frac{e^{-2t}}{2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{2\tau}\Big|_{-3}^{t}\right)H(t+3) - \frac{1}{2}\left(e^{2\tau}\Big|_{3}^{t}\right)H(t-3)\right] \\ &= \frac{e^{-2t}}{2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{2t}-e^{-6}\right)H(t+3) - \frac{1}{2}\left(e^{2t}-e^{6}\right)H(t-3)\right] \end{aligned}$$

Finalmente, la TIF de la función $G(w)$ está dada por:

$$g(t) = \frac{1}{4}\left[\left(1-e^{-2(t+3)}\right)H(t+3) - \left(1-e^{-2(t-3)}\right)H(t-3)\right].$$

57. Determinar la transformada de Fourier de la señal

$$g(t) = e^{(-t)}H(t) * e^{(-2t)}H(t).$$

a) Efectuando primero la convolución y transformando después el resultado.

b) Tomando la transformada de cada término y multiplicando después.

Solución:

a) Por definición, la convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$ está dada por,

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

en este caso;

$$\begin{aligned}
g(t) &= e^{-t}H(t) * e^{-2t}H(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}H(\tau)e^{-2(t-\tau)}H(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}e^{-2\tau}e^{2\tau}H(\tau)H(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}e^{\tau}H(\tau)H(t-\tau)d\tau \\
&= e^{-2t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}H(\tau)H(t-\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

pero:

$$H(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < 0 \\ 1 & \text{si } \tau > 0 \end{cases}$$

y

$$H(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau \\ 1 & \text{si } t > \tau \end{cases}$$

por lo tanto,

$$H(\tau)H(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau \\ 1 & \text{si } 0 < \tau < t \end{cases}$$

Por lo que,

$$e^{-2t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}H(\tau)H(t-\tau)d\tau = \begin{cases} e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$e^{-2t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} H(\tau)H(t-\tau)d\tau = \begin{cases} e^{-2t}\left(e^{t}-1\right) & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$$

es decir;

$$g(t) = (e^{-t} - e^{-2t}H(t).$$

Ahora "transformamos" el resultado, calculamos la Transformada de Fourier de $g(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) H(t)$.

Por definición:

$$\mathcal{F}[g(t)] = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) H(t) e^{-jwt} dt.$$

haciendo un poco de álgebra, obtenemos

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+jw)t} H(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2+jw)t} H(t)dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(1+jw)t} dt - \int_{0}^{\infty} e^{-(2+jw)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{1+jw} e^{-(1+jw)t}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{1}{2+jw} e^{-(2+jw)}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1+jw} - \frac{1}{2+jw} \\ &= \frac{2+jw-1-jw}{(1+jw)(2+jw)} \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$\mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{2 - w^2 + 3jw}$$

b) Aplicando el teorema de convolución

$$F\left\{e^{-t}H\left(t\right) * e^{-2t}H\left(t\right)\right\} = F\left(w\right) G\left(w\right)$$

donde:

$$F\left(w\right) = F\left\{e^{-t}H\left(t\right)\right\}$$

y

$$G\left(w\right) = F\left\{e^{-2t}H\left(t\right)\right\}$$

es decir,

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} H(t)\, e^{-jwt} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+jw)t} H(t)\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(1+jw)t} dt \\
&= \left[\frac{1}{1+jw} e^{-(1+jw)t} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{1+jw}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
G(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} H(t)\, e^{-jwt} dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(2+jw)t} dt \\
&= \left[-\frac{1}{2+jw} e^{-(2+jw)t} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2+jw}
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos;

$$
F\left\{ e^{-t} H(t) * e^{-2t} H(t) \right\} = \left(\frac{1}{1+jw} \right) \left(\frac{1}{2+jw} \right) = \frac{1}{2 - w^2 + 3jw}
$$

3.8. Transformada de Fourier de funciones especiales

58. Hallar la Transformada de Fourier de la función impulso (delta de Dirac) desplazada, $\delta(t-t_0)$.

Solución:

Aplicando la definición de la TF y propiedades de la función delta (ver ecuaciones en términos de la función de prueba), obtenemos

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-jwt}dt = e^{-jwt}\Big|_{t=t_0},$$

es decir,

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-jwt_0}$$

de donde.

$$|F(w)| = 1.$$

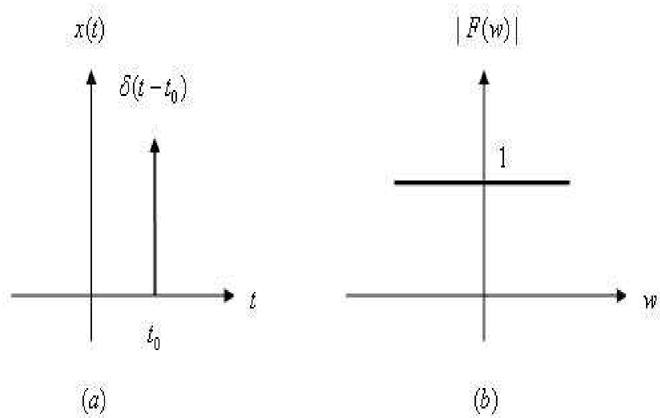


Figura 3.29: Función delta de Dirac dezplazada y su transformada de Fourier.

El resultado anterior indica que el espectro de frecuencias tiene un espectro de amplitud uniforme en todo el intervalo de frecuencias, como si ilustra en la figura.

59. Hallar la Transformada de Fourier de una función constante, $f(t) = A$.

Solución:

Obsérvese que esta función no satisface la condición de integrabilidad absoluta, ver ecuación (3.22). Aplicando la definición de la TF tenemos,

$$\mathcal{F}[A] = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwt}dt$$

utilizando la ecuación de la función delta, (ver ecuación (**??**), haciendo $x = t$ y $y = -w$) obtenemos inmediatamente,

$$\mathcal{F}[A] = 2\pi A\delta(-w),$$

asimismo, en la ecuación anterior podemos hacer uso de la propiedad de la delta $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$, haciendo $a = -1$ obtenemos $\delta(-w) = \frac{1}{|-1|}\delta(w)$, de donde finalmente obtenemos,

$$F(w) = \mathcal{F}[A] = 2\pi A\delta(w).$$

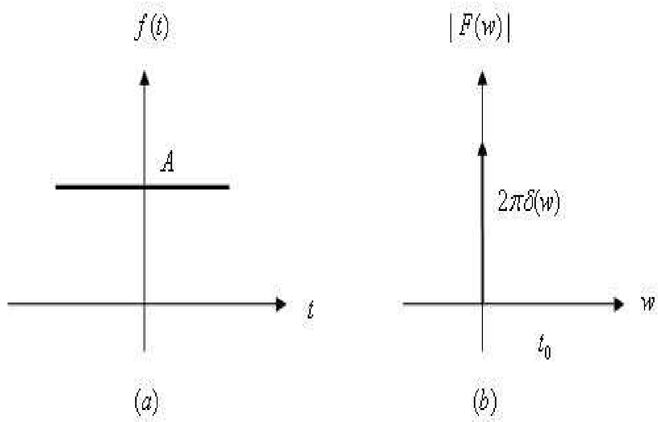


Figura 3.30: Función constante y su transformada de Fourier.

Obsérvese que si $A = 1$, entonces $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(w)$. Este ejemplo muestra que cuando una función $f(t)$ es constante, contiene solamente una componente de frecuencia $w = 0$, como era de esperarse ya que una señal constante de corriente directa $(w = 0)$, no contiene alguna otra componente de frecuencia. Obsérvese también en este ejemplo que la transformada de Fourier de una función constante A es la transformada de Fourier de una función pulso rectangular cuando el periodo tiende a infinito.

60. Hallar la Transformada de Fourier de las funciones $f(t) = \cos(w_0 t)$ y $f(t) = \sin(w_0 t)$

Solución:

Para la función $f(t) = \cos(w_0 t)$ (ver figura)tenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(w_0 t)] &= \mathcal{F}[\frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}[e^{jw_0 t}] + \mathcal{F}[e^{-jw_0 t}]\right] \end{aligned}$$

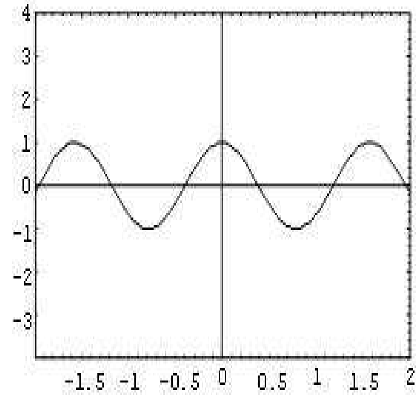


Figura 3.31: Función Coseno de duración finita.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{jw_0t}e^{-jwt}dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jw_0t}e^{-jwt}dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(w-w_0)t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(w+w_0}tdt\right]
\end{aligned}
$$

obsérvese que se aplicó la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier. Finalmente, aplicando la propiedad de la delta, ver ecuación (**??**), obtenemos

$$\mathcal{F}[\cos(w_0t)] = \pi\delta(w-w_0) + \pi\delta(w+w_0),$$

la función $f(t) = \cos(w_0t)$ y su transformada de Fourier se muestran en la figura.

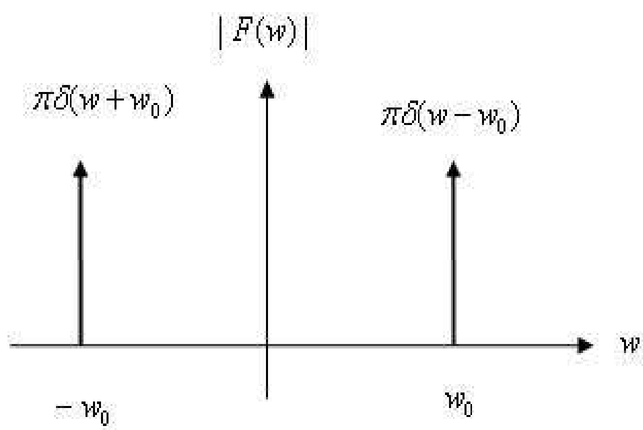


Figura 3.32: Transformada de Fourier de la función Coseno de duración finita.

De un procedimiento análogo el lector puede mostrar que,

$$\mathcal{F}[\sin(w_0t)] = -j\pi\delta(w-w_0) + j\pi\delta(w+w_0).$$

61. *a*) Calcule la transformada de Fourier de la función Signo definida por:

$$Sgn(t) = \frac{|t|}{t}.$$

Sugerencia: Obsérvese que esta función no es absolutamente integrable.

b) Aplique el resultado obtenido en el inciso a) para encontrar la Transformada de Fourier de la función de Heaviside.

c) Dibuje el espectro de frecuencia (función de densidad espectral) de la función de Heaviside.

Solución:

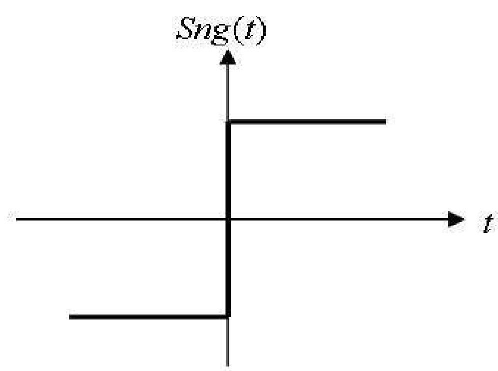


Figura 3.33: Función Signo.

a) Explícitamente la función Signo (ver figura), está dada por

$$Sng(t) = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t = 0 \\ -1 & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

Como se observa, esta función no es absolutamente integrable, es decir; no cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 \, dt < \infty,$$

de esta forma, se multiplica esta función por $e^{-a|t|}$ para que sea absolutamente integrable, y después sea toma el limite cuando $a \to 0$.

$$\mathcal{F}\left[Sng(t)\right] = \mathcal{F}\left[\lim_{a\to 0} e^{-a|t|} Sng(t)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{a\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} Sgn(t) e^{-jw} dt\right] \\
&= \lim_{a\to 0}\left[-\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-jw} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-jwt} dt\right] \\
&= \lim_{a\to 0}\left[-\int_{-\infty}^{0} e^{(a-jw)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+jw)t} dt\right].
\end{aligned}
$$

Evaluando las integrales, que son inmediatas obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[Sng(t)\right] &= \lim_{a\to 0}\left[-\frac{1}{a-jw} e^{-(a-jw)t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+jw} e^{-(a+jw)t}\Big|_{0}^{\infty}\right] \\
&= \lim_{a\to 0}\left[-\frac{1}{a-jw} + \frac{1}{a+jw}\right],
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
\mathcal{F}\left[Sng(t)\right] = \lim_{a\to 0}\left[\frac{-2jw}{a^2+w^2}\right] = \left[\frac{2}{jw}\right].
$$

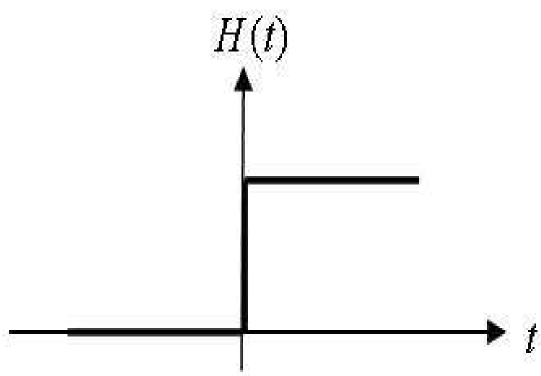


Figura 3.34: Función de Heaviside.

b) Por definición, como se observa en la figura, la función de Heaviside está dada por:

$$
H(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}
$$

Obsérvese de las definiciones de la función Signo y de Heaviside (ver figuras anteriores) que:

$$
Sgn(t) = 2H(t) - 1
$$

de donde,

$$H(t) = \frac{1}{2}\left[1 + Sgn(t)\right]$$

por lo que aplicando la propiedad de linealidad de la Transformada de Fourier, obtenemos

$$\begin{aligned} F(w) = \mathcal{F}[H(t)] &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}[1] + \mathcal{F}[Sng(t)]\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(w) + \frac{2}{jw}\right] \\ &= \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}. \end{aligned}$$

c) La siguiente figura muestra el espectro de frecuencias (función de densidad espectral) de la función de Heaviside.

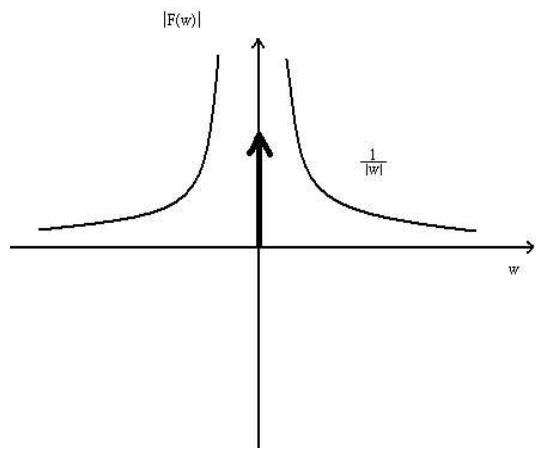


Figura 3.35: Espectro de frecuencias de la función de Heaviside.

Nota: El lector puede consultar una deducción alternativa de la transformada de Fourier de la función de Heaviside en cualquier libro tradicional de métodos matemáticos, en donde generalmente se usa de la derivada de una función generalizada, explícitamente que la derivada de la función de Heaviside es igual a la función δ, ver la ecuación (**??**).

3.9. Aplicaciones de la Transformada de Fourier

62. Resolver la siguiente ecuación diferencial,

$$y' + y = H(t)e^{-t}$$

Solución:

Para resolver la ecuación diferencial haremos uso de algunas propiedades de la Transformada de Fourier así como el uso de algún par de Trasformadas, para finalmente aplicar el teorma de Convolución. Si aplicamos la Transformada de Fourier a la ecuación diferencial obtenemos,

$$\mathcal{F}[y'] + \mathcal{F}[y] = \mathcal{F}\left[H(t)e^{-t}\right]$$

si escribimos,

$$\mathcal{F}[y] = F(w)$$

y aplicando la propedad de derivación de la Transformada de Fourier obtenemos,

$$jwY(w) + Y(w) = \frac{1}{1+jw}$$

es decir,

$$Y(w) = \frac{1}{(1+jw)^2} = \frac{1}{(1+jw)} \times \frac{1}{(1+jw)}$$

de donde,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}[Y(w)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[H(t)e^{-t}\right] \times \mathcal{F}\left[H(t)e^{-t}\right]\right] \end{aligned}$$

obsérvese que en la ecuación anterior aplicamos el par de transformadas

$$\mathcal{F}\left[e^{-bt}H(t)\right] = \frac{1}{b+jw}.$$

De esta forma al aplicar convolución obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[H(t)e^{-t} * H(t)e^{-t}\right]\right] \\ &= H(t)e^{-t} * H(t)e^{-t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)e^{-\tau}H(t-\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)H(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Para resolver la integral anterior, analicemos las funciones de Heaviside en el integrando.

$$H(\tau)=\begin{cases} 1 & \text{si } \tau>0 \\ 0 & \text{si } \tau<0 \end{cases}$$

$$H(t-\tau)=\begin{cases} 1 & \text{si } t>\tau \\ 0 & \text{si } t<\tau \end{cases}$$

de donde,

$$H(\tau)H(t-\tau)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0<\tau<t \\ 0 & \text{si } \tau<0 \,\&\, \tau>t \end{cases}$$

Por lo tanto, las integrales de la ecuación (52) resultan ser de la forma,

$$y(t)=e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)H(t-\tau)d\tau=\begin{cases} e^{-t}\int_0^t d\tau & \text{si } \tau>0 \\ 0 & \text{si } \tau<0 \end{cases}$$

es decir,

$$y(t)=e^{-t}\int_0^t d\tau H(t).$$

Finalmente al resolver la integral, la solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$y(t)=e^{-t}\int_0^t d\tau H(t).$$

o también,

$$y(t)=\begin{cases} te^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$$