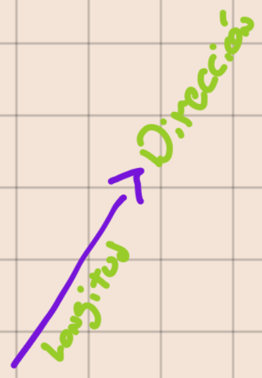
Día 1: Vectores

¿Que es un Vector?

- Una flecha en el espacio



- Una lista ordenada de numeros $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Cualquier cosa en donde se sume o multiplique un Vector.

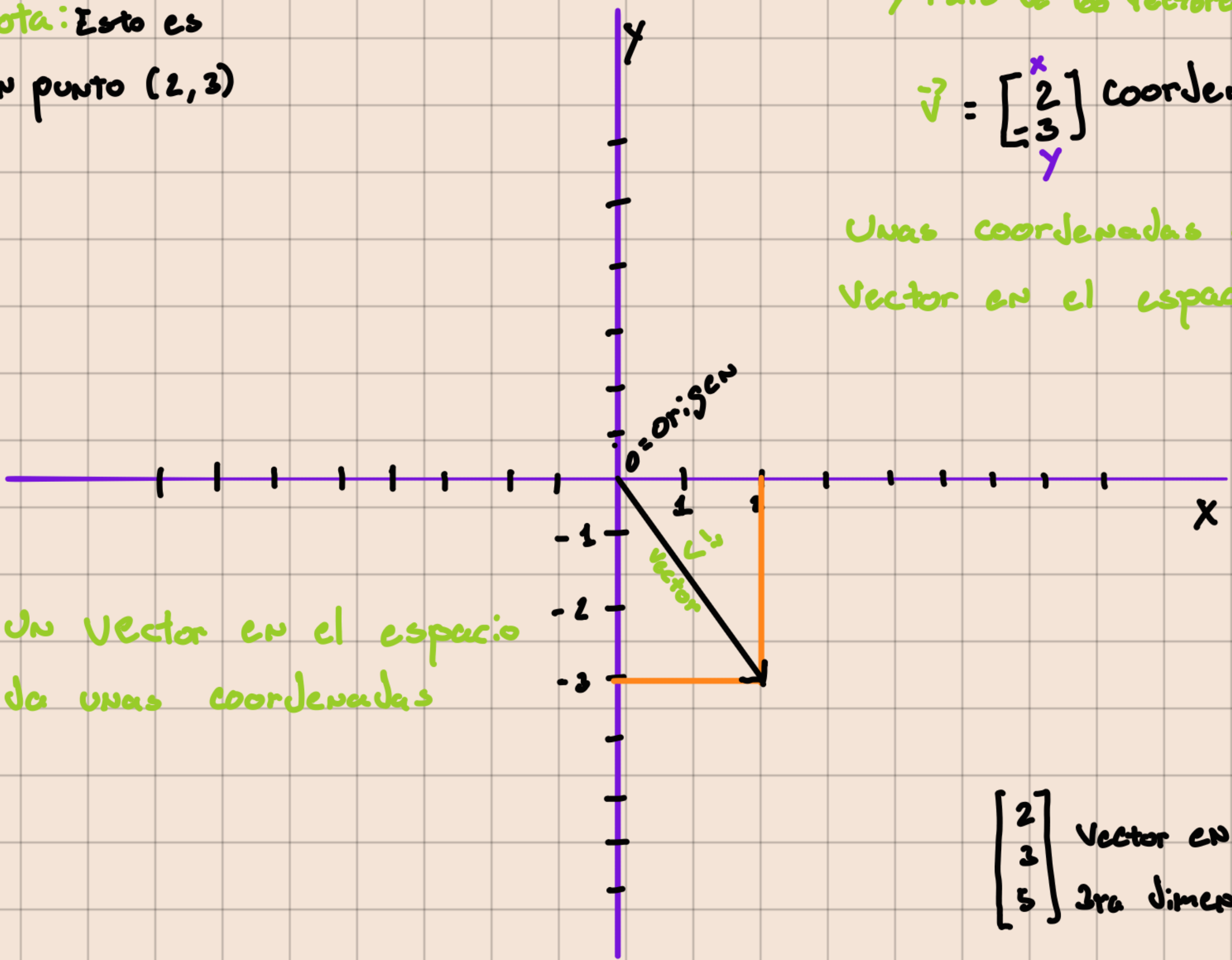
Sistema de Coordenadas

Origen: centro del espacio y raiz de los vectores

Nota: Esto es un punto (2,3)

$\vec{v} = \begin{array}{c} x \\ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ y \end{array}$ coordenadas

Unas coordenadas son un vector en el espacio



Un vector en el espacio da unas coordenadas

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ Vector en 3ra dimensión

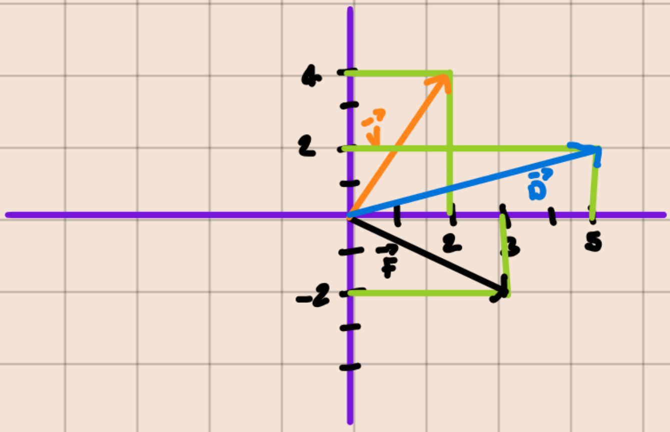
Suma de Vectores

· Es la suma de dos o más vectores.

$$\overset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}} + \overset{\vec{F}}{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}} = \overset{\vec{D}}{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}}$$ Vector resultante

Nota: es como si caminaras sobre los vectores, la suma es el atajo al final de ambos

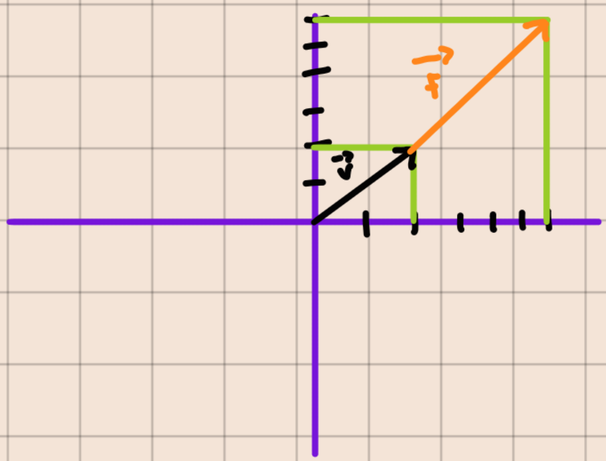
Graficamente



Multiplicación de Vectores

· Estirar, retraer, cambiar dirección a un vector por multiplicación. Este proceso se llama Escalar (Scaling)

· El numero que hace este proceso, se llama numero Escalar o Escalares.



Numero Escalar

$$3 \cdot \begin{array}{c} x \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \vec{v} \end{array} \; y$$ → Vector

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot x \\ 3 \cdot y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \overset{\vec{F}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}}$$ Vector Resultante

Vectores Base

$x \leftarrow \hat{\imath} \quad \hat{\jmath} \rightarrow y$

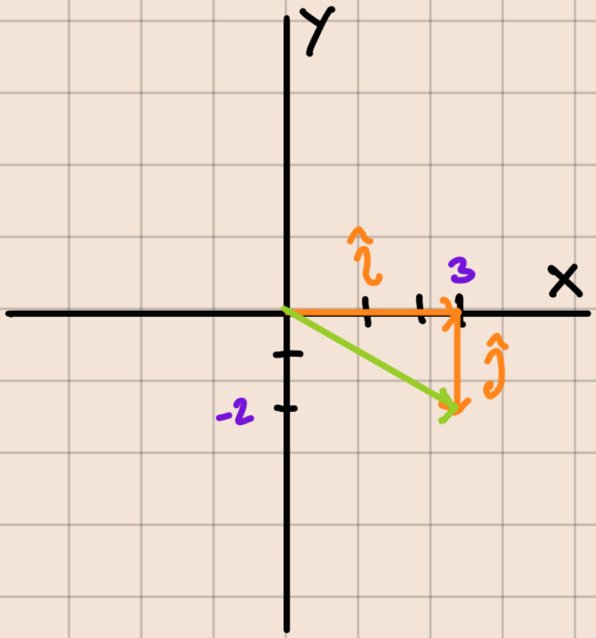
i sombrero — j sombrero

Llamados <u>vectores base</u> del sistema de coordenadas XY.

$$\begin{array}{c c} x & \\ & \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \vec{v} \\ y & \end{array}$$

Pensar en x y y como Numeros escalares que estiran $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ esto describe un vector que es la suma de dos vectores escalados.

$$(3)\hat{\imath} + (-2)\hat{\jmath}$$



¡Nuevo!

Vectores base Estandar

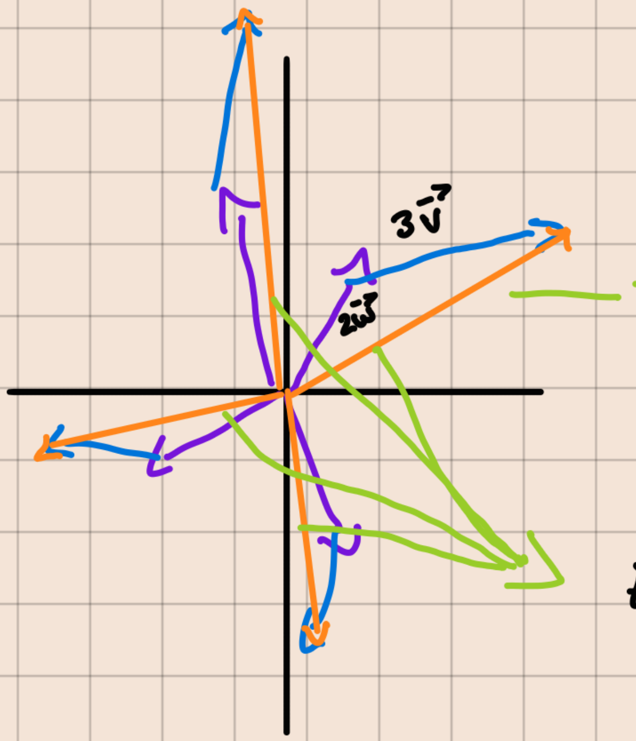
$$\hat{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Combinación Linear

- Cuando escalas dos vectores y los sumas es llamado **Combinación Linear**.

- **Espacio Generado**: son todas las posibles combinaciones lineares que se pueden conseguir.



Esta suma (o multiplicación) de los dos vectores escalados es la **Combinación Linear**.

$$\underbrace{a\vec{v} + b\vec{w}}_{\text{Escalares}} \quad \text{Vectores}$$

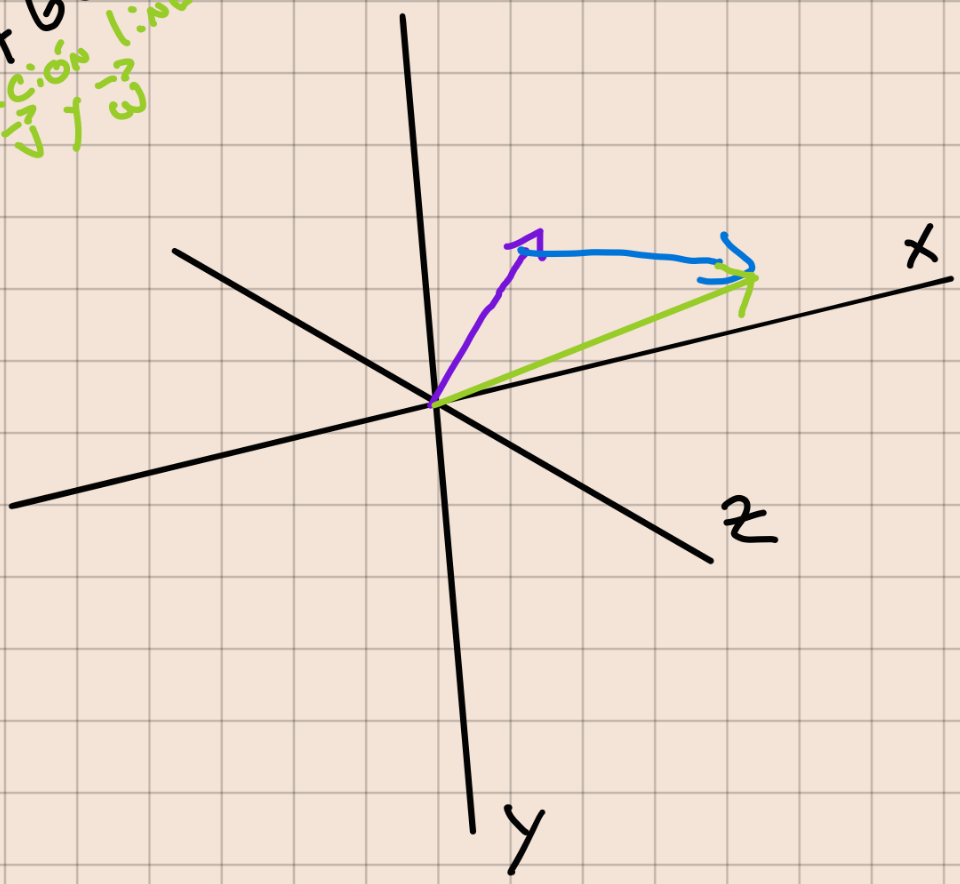
El **Espacio Generado** son todas las **Combinaciones Lineares** de esos vectores escalados en diferentes puntos del plano dimensional.

Los puntos se usan para representar la punta de la flecha sin tener que hacer toda la flecha. Para colección de vectores

Espacio Generado en 3D

$a\vec{v} + b\vec{w}$

combinación linear de $\vec{v}$ y $\vec{w}$



Espacio Generado

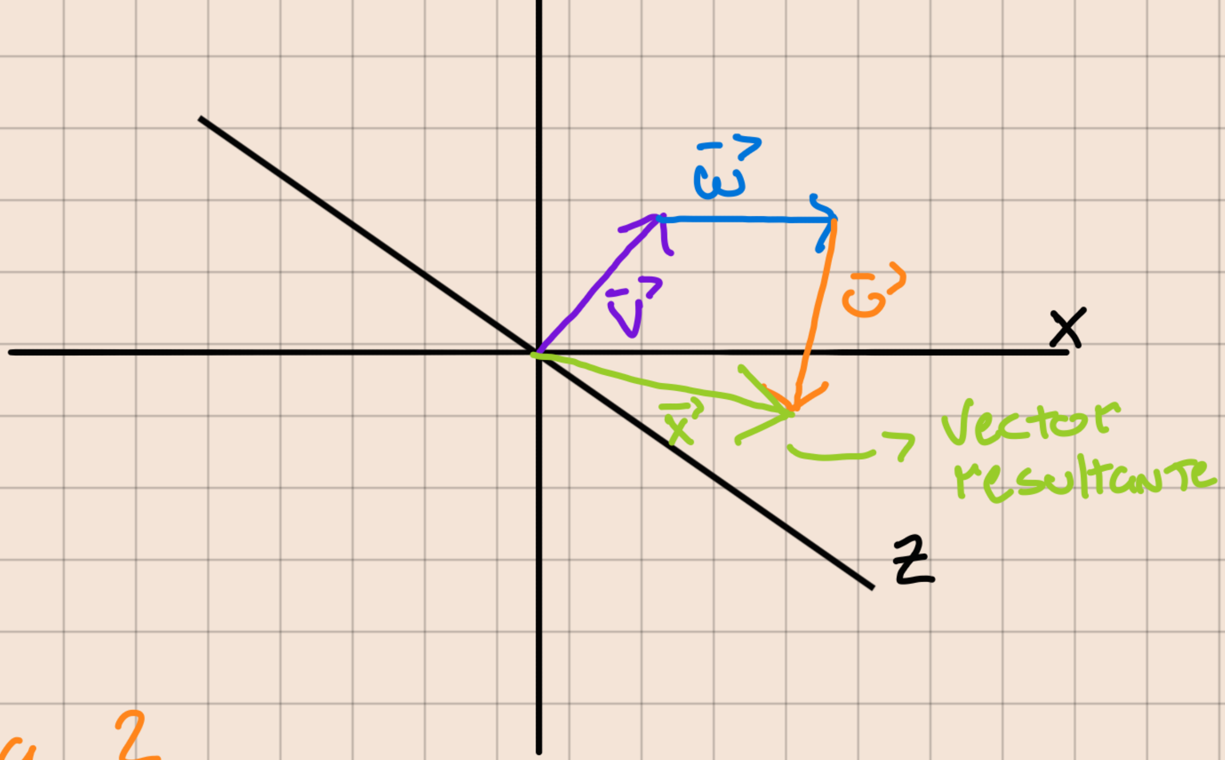
Es como ver una hoja plana donde se van dando cada una de las Combinaciones Lineares en un espacio 3D.

El conjunto de todos los vectores y puntas en esa hoja plana es su Espacio Generado.

Como se puede ver en el espacio de coordenadas, los dos vectores al ser escalados generan un Espacio Generado. Estos se mantienen en su hoja 2D.

¿Si agregamos un tercero?

$$a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{u}$$



Día 2

se dan dos casos:

- Si este nuevo vector ya esta en el Espacio Generado de los otros dos, no genera ningun cambio, no hay ningun vector nuevo.

¡¡INTERESANTE!!

- Pero, si no esta en el Espacio Generado, desbloquea el acceso a cualquier vector ¡TRIDIMENSIONAL!

- Se podría decir que la hoja en el Espacio Generado se va moviendo, ya no esta estatica.

Volviendo al caso de si estan los vectores alineados, esto es llamado, Linearmente Dependientes, es decir, si un nuevo vector No genera cambios y se puede quitar sin afectar nada, lo es

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$$

Por el otro lado, si en verdad genera otra dimensión al Espacio Generado, se les llama Linearmente Independiente.

$$\vec{u} \neq a\vec{v} + b\vec{w}$$

Transformación Linear

función

f(x)

Función / Transformación: A cada elemento de entrada se le asigna un elemento de salida.

Entrada		Salida
3		9
5	f(x)	25
2		8

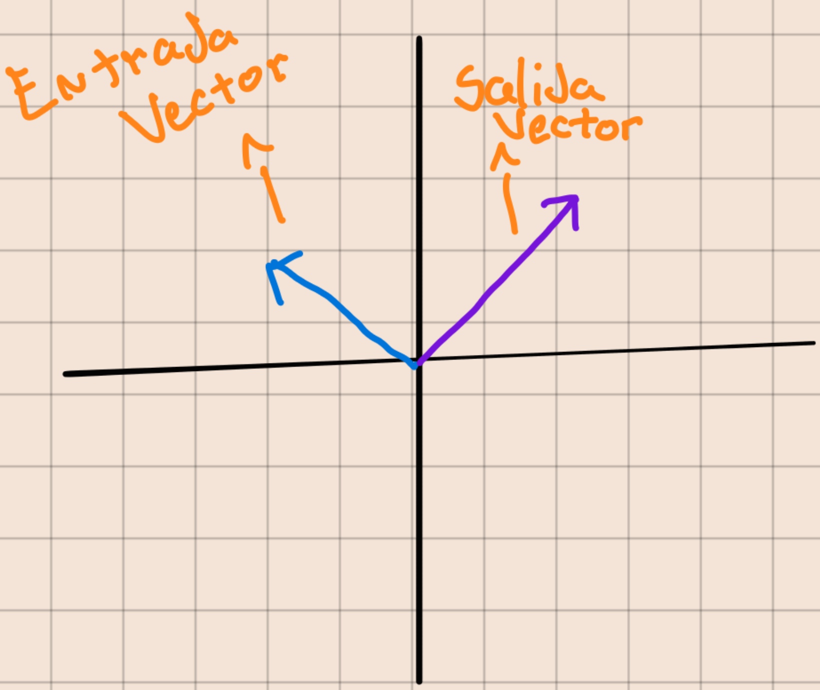
En vectores

Entrada Vector   Salida Vector

$$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} \quad L(\vec{v}) \quad \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

¿Por que transformación y no función?

Se usa transformación porque la idea es que lo veas como movimiento en el espacio de ese vector.



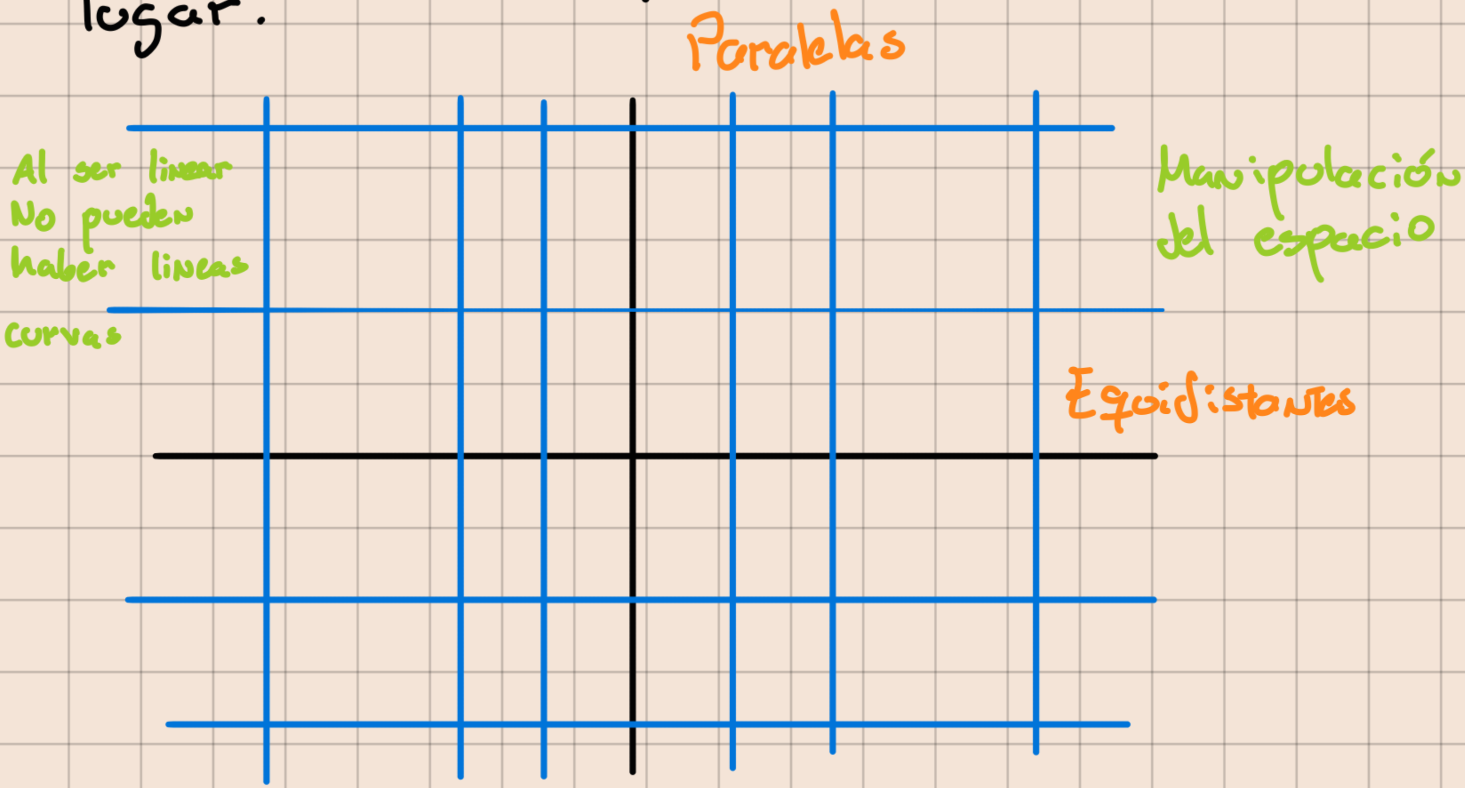
¿A que se refiere Linear?

Dos bases:

· Todas las lineas deben permanecer

rectas sin curvarse.

· El origen debe permanecer fijo en su lugar.

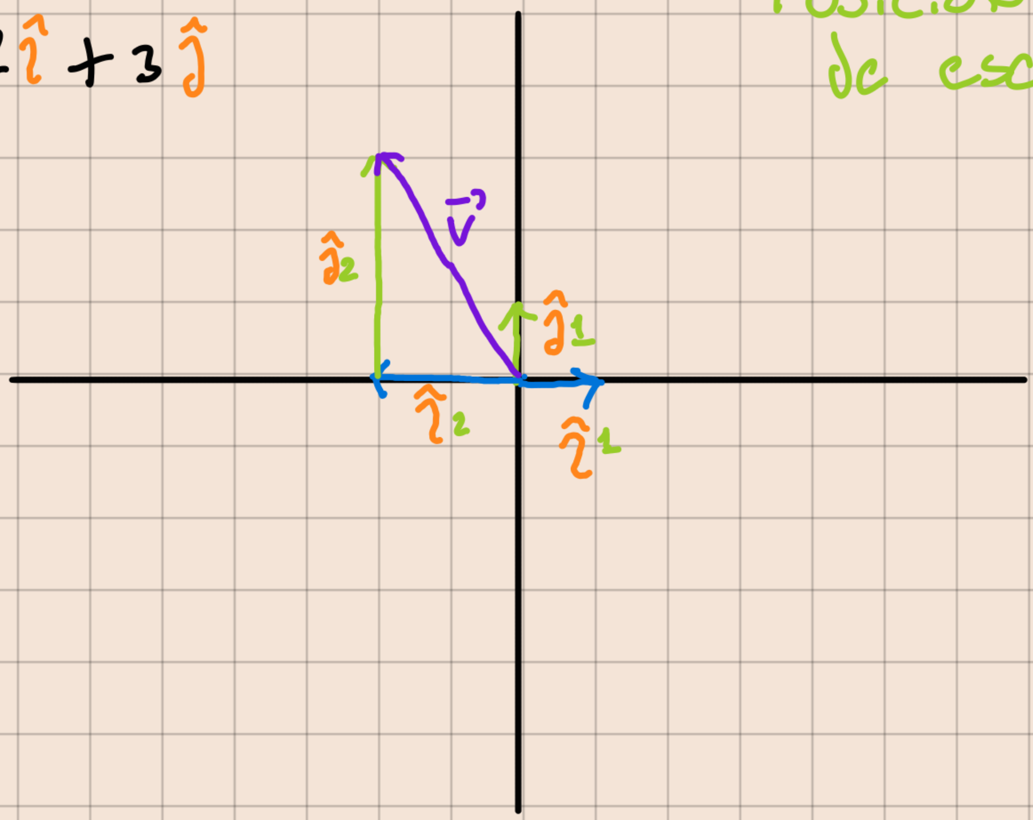


Estas son las lineas de una Transformación Linear, respeta las dos bases, pero existen muchas formas de que quede, Pueden rotar en el origen y muchas más cosas!

Practiquemos

$\vec{v} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

Posición después de escalar



Puedo saber a donde va $\vec{v}$, solo sabiendo a donde va $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$

$$\vec{v} = -2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{array}{c} x \\ \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \\ y \end{array}$$

Día 3

Ejercicio

$\vec{v} = -1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

$\vec{v}_{\text{transformada}} = -1\hat{\imath}_{\text{transformada}} + 2\hat{\jmath}_{\text{transformada}}$

$$= -1 \begin{array}{c} \hat{\imath} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \hat{\jmath} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} -1(1) + 2(3) \\ -1(-2) + 2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_{transformada} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

El vector del plano se puede escribir como:

$$\vec{V} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

Despues de un T (Transformación Lineal) se ve así.

$$T(\vec{V}) = xT(\hat{\imath}) + yT(\hat{\jmath})$$

Si conozco que hace T con los vectores base, automaticamente se que hace con todos los vectores.

Explicación de Transformación Linear segun mis palabras

En un inicio tenemos un vector que se ve determinado por sus vectores base $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

Cuando aplicamos una Transformación lineal (T), estos vectores base obtienen nuevos valores, lo que conlleva a que $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\vec{v}$ cambien de forma y dirección.

¿Como se ve todo esto sin ver el plano?

Al inicio tenemos:

Vectores base estandar

$$\hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \hat{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una vez transformados volvemos a calcular el vector

$$\vec{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \overset{\hat{\imath}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} + y \overset{\hat{\jmath}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \hat{\imath} & & \hat{\jmath} \end{array} \\ \begin{bmatrix} x & + & 3y \\ -2x & + & 0y \end{bmatrix} \end{array}$$

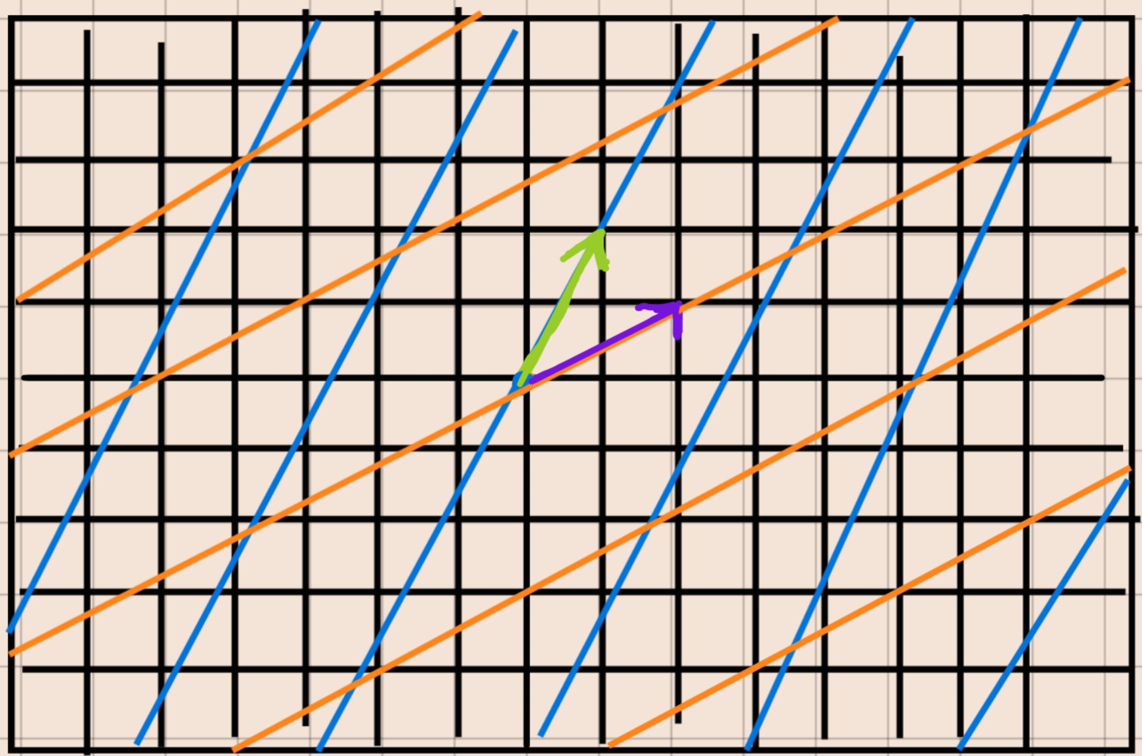
$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Matriz } 2\times 2 \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Caso General

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & D \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} x & y \end{array} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + Dy \end{bmatrix}$$

Plano Cartesiano de Vectores Base que lo mueven



El grid inicial muestra un plano Normal. Pero despues de la T se dio una Transformación del Espacio!

Esto gracias a $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Aplicar una matriz a un vector es como aplicar esa Transformación al vector.

Día 4

Una matriz es una Transformación en el espacio.

Si tengo dos Transformaciónes (Matrices), y se lo aplico a un Vector. Estos modificaran ese Vector y el espacio 2D. Pero ¿No es más fácil ver el resultado de esas dos matrices y aplicarla al Vector? Si se puede, se llama Composición. Hagamos un ejemplo.

$$\begin{array}{ccc} \text{Shear} & \text{Rotation} & x \\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix} \\ \text{Cizallamiento} & \text{Rotación} & y \end{array}$$

En este caso tenemos dos Transformaciones una es una Rotación y la otra un Cizallamiento, algo a tener en cuenta, es que, el Orden si importa. No es lo mismo aplicar un Cizallamiento y luego una Rotación, que al reves.

¡Veamoslo!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 + 0 \\ 0 + 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 + -3 \\ 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Compuesta $\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ Composición de Cizallamiento y Rotación.

Si yo aplico esta matriz compuesta a un vector, puedo hacer ambas transformaciones a la vez.

¡PERO!

Es importante tener en cuenta el orden. Veamoslo.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{a} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{b} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\xleftarrow{\text{se lee al reves}}$

Primero se aplica b, luego a el orden importa bastante.

La multiplicación de matrices, no es más que aplicar una transformación y luego otra.

Transformaciones lineales en 3D

Los fundamentos son los mismos que en dos dimensiones.

Pero, en tres dimensiones ya no solo estamos hablando de $\hat{i}$ y $\hat{j}$, ahora se agrega alguien más a esto $\hat{k}$. Ahora son tres vectores base unitario.

Ahora nuestras matrices pasan de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Donde cada columna sigue siendo un vector base, solo que ahora añadimos z a los ejes.

$$\begin{array}{cccc} & \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & a & b & c \\ y & d & e & f \\ z & g & h & i \end{array}$$

Ahora nuestras Transformaciones Lineales en el espacio 3D, se ven más como:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad L(\vec{v}) \quad \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entrada — Salida

Entonces nuestro vector ahora se ve como:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Nos queda una Combinación lineal de x, y y z.

$V_1 = 0x + y + 2z$

$V_2 = 3x + 4y + 5z$

$V_3 = 6x + 7y + 8z$

Si ahora aplicamos un vector a esto podremos Transformarlo.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$V_1 = 0(4) + (2) + 2(5)$

$V_2 = 3(4) + 4(2) + 5(5)$

$V_3 = 6(4) + 7(2) + 8(5)$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ 45 \\ 78 \end{bmatrix}$$

Vector Transformado

Ahora vamos con la multiplicación de dos matrices 3D

$$\begin{array}{c} a \\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Como hemos visto las dos matrices son una transforma-ción sobre otra.

$$\begin{array}{c} b \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$0 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = 0(0) + 3(-2) + 6(2) = 6$$
$$V_2 = 0(5) + 3(1) + 6(5) = 33$$
$$V_3 = 0(1) + 3(4) + 6(-1) = 6$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$1 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = 0 + (-8) + 14 = 6$$
$$V_2 = 5 + 4 + 35 = 44$$
$$V_3 = 1 + 16 + -7 = 10$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 0 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 8 \end{array}$$

Día 5 Transformación lineal en Python

Hoy trabajare en Python para visualizar como se ve una Transformación lineal en 2D y 3D.

Anotare aquí conceptos o cosas que crea qué son relevantes.

- La Norma es la longitud de un vector. Que tan largo es.
  - Si una Transformación mantiene la norma, es una Rotación Pura.
  - Si la cambia, hay Escala o deformación.
- El @ en Python es Producto Matricial