Estimadores M

Juan David Carrascal Ibañez

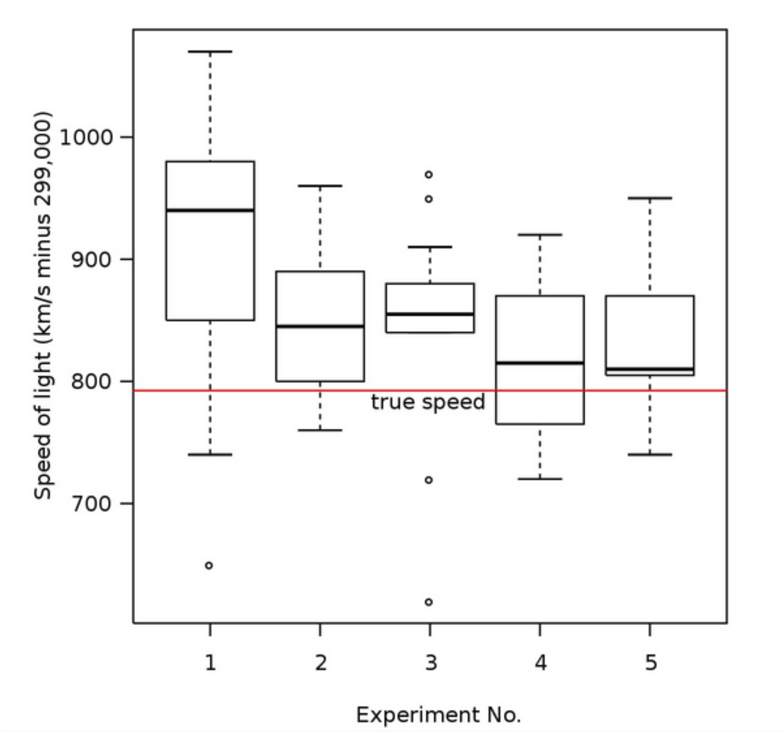
Estadística robusta

II

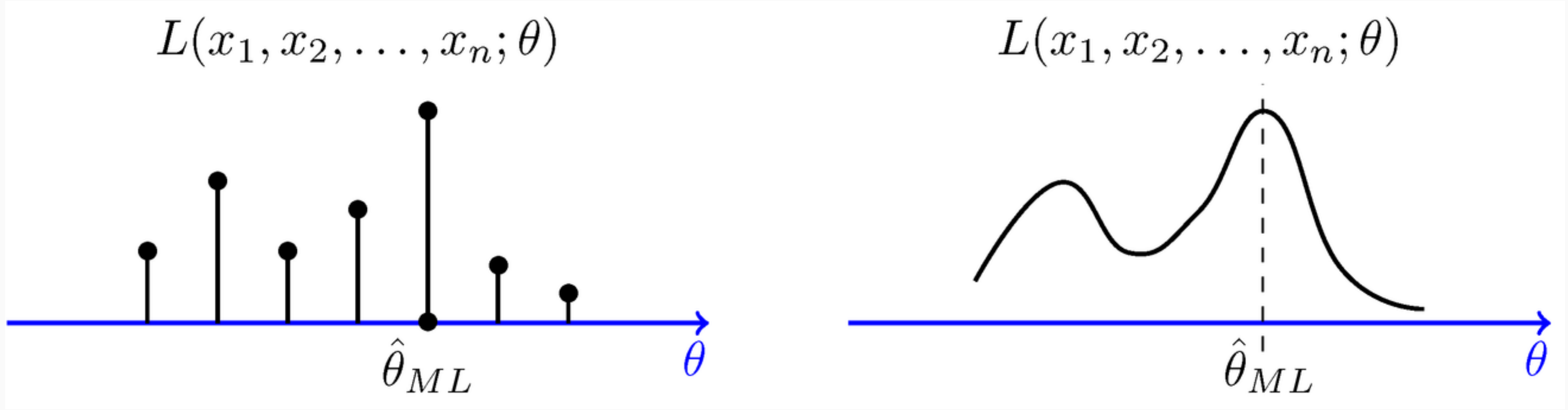
Su objetivo principal es construir estadísticas eficientes construidas a partir de una familia amplia de funciones de distribución de probabilidad.

Los métodos estadísticos robustos fueron concebidos para estimar parámetros de ubicación, escala y de regresión.

Dichos métodos son menos sensibles ante la presencia de datos atípicos.



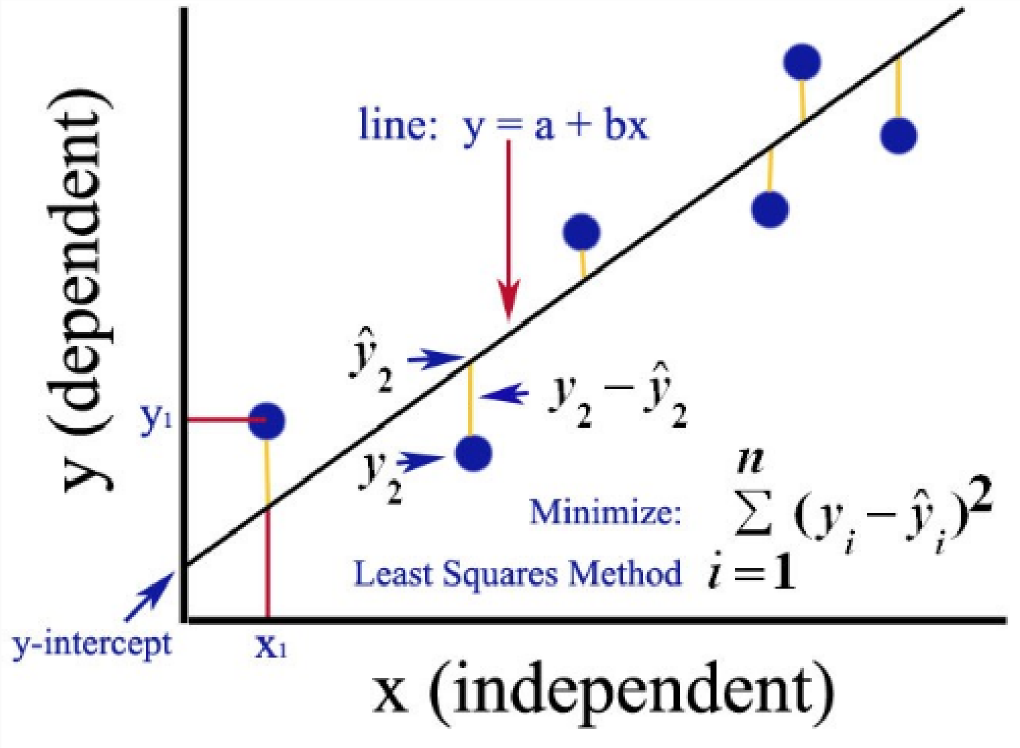
Estimador tipo L



Estimador de máxima verosimilitud

III

Ejemplos conocidos



Método de mínimos cuadrados

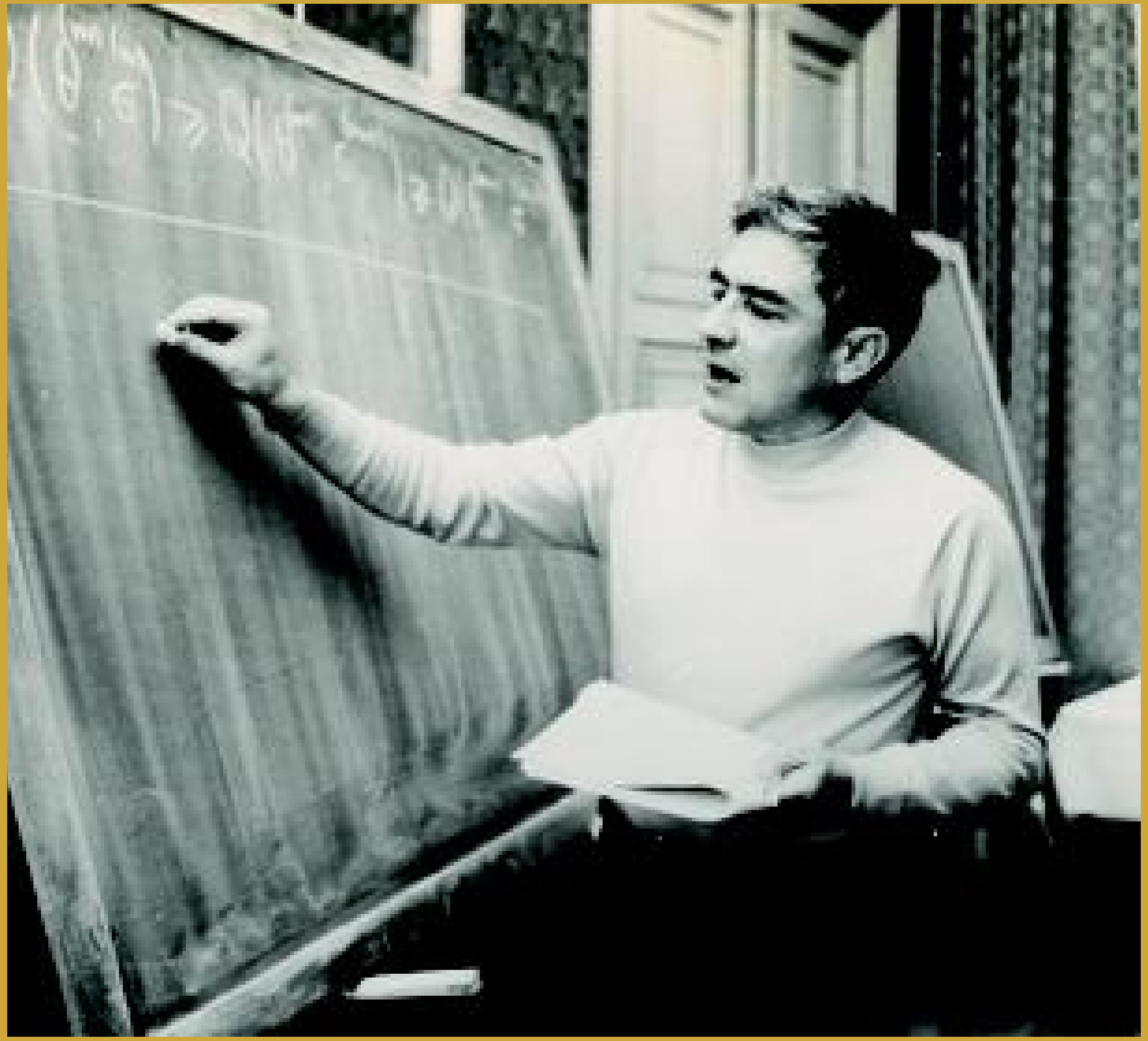
$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \right)$$

Método de máxima verosimilitud

Peter Huber fue un estadístico suizo quien propusó generalizar el método de máxima verosimilitud. Su propuesta consiste en encontrar las soluciones de

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, \theta) \right)$$

Estas soluciones son llamadas estimadores M. Aquí p cumple algunas condiciones que describiremos a continuación.



Peter Huber

V

$$\rho : \mathcal{X} \times \Theta \to \mathbb{R}$$

Aquí, p debe ser una función medible y los espacios $(\mathcal{X}, \Sigma)$ y $(\Theta \subset \mathbb{R}^r, S)$ deben ser medibles

A partir de esto se clasifican los estimadores M en dos clases:

T será un estimador de tipo p si dada una distribución de probabilidad F $(F, T(F))$ existe y minimiza a $\int_{\mathcal{X}} \rho(x,\theta) dF(x)$, esto es:

$$T(F) := \arg\min_{\theta \in \Theta} \int_{\mathcal{X}} \rho(x,\theta) dF(x)$$

Para MLE: $\rho(x,\theta) = -\log(f(x,\theta))$ con $f(x,\theta) = \dfrac{\partial F(x,\theta)}{\partial x}$

V

Tipo ψ

Si p es diferenciable respecto a θ el cálculo de $\hat{\theta}$ será mucho más fácil de realizar

Se definen los estimadores tipo ψ mediante la función $\psi : \mathcal{X} \times \Theta \to \mathbb{R}^r$

Diremos que T un estimador es de tipo si $(F, T(F))$ existe y satisface las ecuaciones

$$\int_{\mathcal{X}} \psi(x,\theta)\, dF(x) = 0$$

$$\int_{\mathcal{X}} \psi(x,T(F))\, dF(x) = 0$$

- Para MLE: $\psi(x,\theta) = \left(\frac{\partial \log(f(x,\theta))}{\partial \theta^1}, \ldots, \frac{\partial \log(f(x,\theta))}{\partial \theta^p}\right)^{\mathrm{T}}$ con $f(x,\theta) = \frac{\partial F(x,\theta)}{\partial x}$

Referencias

- https://en.wikipedia.org/wiki/M-estimator
- https://www.youtube.com/watch?v=DCfsG9XRT2E&ab_channel=DylanSpicker