Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Modelos matemáticos (II-2022)
Tarea 5

Santiago Tovar Mosquera satovarmo@unal.edu.co
Juan David Carrrascal Ibañez jdcarrascali@unal.edu.co

1. Diagnosticando la Diabetes Mellitus

En este trabajo vamos a analizar las matemáticas que conducen a un modelo de ecuaciones diferenciales que nos permita detectar si un individuo padece o no la diabetes. El modelo se basa en los siguientes aspectos bien conocidos de la biologia

- Un aumento en la concentración de glucosa en la sangre provoca que las células del hígado absorban la mayoría de la glucosa y la almacenen en forma de glucogeno. En caso que la concentración de glucosa en la sangre caiga el proceso se revierte.
- Un aumento de insulina en la sangre permite a la glucosa pasar a las células prontamente, ocasionando una gran absorción de glucosa de la sangre.
- Una disminución en la concentración de glucosa en la sangre, reduce la tasa de producón de insulina del páncreas. Mientras, un incremento en la concentración de glucosa en la sangre estimula producir insulina a tasas más rápidas.
- La insulina producida por el páncreas, es constantemente degradada por el hígado.

Denotemos por $G(t)$ la concentración de glucosa en la sangre en el instante t y por $I(t)$ la concentración de insulina. Entonces el cambio de estas cantidades en el tiempo esta por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dG}{dt} = F_1(G, I) + J(t) \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = F_2(G, I) \tag{2}$$

donde $J(t)$ denota el incremento de la concentración de glucosa en la sangre por la toma de alimentos.

Problema 1. Un paciente en ayunas se acerca a un laboratorio clínico a realizarse una prueba de tolerancia de glucosa. En ese momento las concentraciones G y I han alcanzado valores de equilibrio óptimos G_0 y I_0. Suponiendo que G y I no difieren mucho de G_0 y I_0. Encuentre la correspondiente linealización del sistema al rededfedor del punto de equilibrio.

Solución Lo primero que debemos notar para el desarrollo del problema, es que dado que el paciente está en ayunas, entonces tenemos que $J(t) = 0$, mientras no se consuman alimentos. Por otro lado, dado que G_0 e I_0 son valores de equilibrio óptimos podemos deducir lo siguiente:

$$F_1(G_0, I_0) = 0 \qquad\qquad F_2(G_0, I_0) = 0$$

Puesto que según las ecuaciones 1 y 2 tenemos que tanto F_1 como F_2 representan el cambio de glucosa e insulina respectivamente, si G_0 e I_0 son valores de equilibrio, no hay cambio en las cantidades.

Con esto en mente podemos utilizar series de Taylor, evaluando F_1 y F_2 en el punto (G_0, I_0) para aproximarlas:

$$F_1(G, I) = F_1(G_0, I_0) + \frac{\partial F_1}{\partial G}(G_0, I_0)\,(G(t) - G_0) + \frac{\partial F_1}{\partial I}(G_0, I_0)\,(I(t) - I_0)$$
$$F_2(G, I) = F_2(G_0, I_0) + \frac{\partial F_2}{\partial G}(G_0, I_0)\,(G(t) - G_0) + \frac{\partial F_2}{\partial I}(G_0, I_0)\,(I(t) - I_0)$$

Dado lo anterior tenemos la siguiente linealización para el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= F_1(G, I) = C_1\,(G(t) - G_0) + C_2\,(I(t) - I_0) \\ \frac{dI}{dt} &= F_2(G, I) = C_3\,(G(t) - G_0) + C_4\,(I(t) - I_0) \end{aligned} \tag{3}$$

Problema 2. Determine los signos de los coeficientes del sistema lineal de ecuaciones obtenido anteriormente, refiriéndose a los principios relevantes conocidos de la biología.

Solución Para hallar los signos de los coeficientes del sistema 3 consideremos lo siguiente: Si el nivel de glucosa en la sangre es superior al punto de equilibrio ($G(t) > G_0$) entonces el hígado debe absorberla y almacenarla como glucógeno, estabilizándola y disminuyendo su concentración, es decir que $\frac{dG}{dt} < 0$. Para que esto suceda, la insulina debe ser superior al punto crítico, para facilitar la absorción de la insulina por parte de los demás tejidos, así que $I(t) > I_0$. De estas 3 desigualdades es fácil concluir que $C_1, C_2 < 0$ para que la primera ecuación del sistema tenga sentido.

Por otra parte, dado que el aumento en la concentración de glucosa estimula producir más insulina entonces $C_3 > 0$ pues si $G(t) > G_0$ entonces se produce insulina de manera más rápida. Finalmente dado que la insulina se ve degradada por el hígado, entonces $C_4 < 0$. Así, tomando $c_i > 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$ entonces nuestra linealización queda de la siguiente forma:

$$\frac{dG}{dt} = -c_1 \left(G(t) - G_0\right) - c_2 \left(I(t) - I_0\right)$$
$$\frac{dI}{dt} = c_3 \left(G(t) - G_0\right) - c_4 \left(I(t) - I_0\right)$$

Problema 3. Dado que en las pruebas de laboratorio sólo se mide la concentración de glucosa en la sangre, es necesario reducir el sistema lineal obtenido en el problema 2. como una sola ecuación diferencial de segundo orden para la concentración de glucosa. ¿Cuál es dicha ecuación?

Solución Queremos reducir el sistema del problema anterior a una ecuación que dependa únicamente de G, como se nos indica que es una ecuación diferencial de segundo orden; lo lógico es derivar por segunda vez la primera ecuación, obteniendo:

$$\frac{dG^2}{d^2t} = -c_1 \frac{dG}{dt} - c_2 \frac{dI}{dt}$$

Sin embargo, esta ecuación aun depende de I. Para quitar este témrino recordemos que:

$$\frac{dI}{dt} = c_3 \left(G(t) - G_0\right) - c_4 \left(I(t) - I_0\right)$$

Por otra parte, podemos usar la primera ecuación del sistema para despejar $-c_2(I(t) - I_0)$:

$$-c_2(I(t) - I_0) = \frac{dG}{dt} + c_1 \left(G(t) - G_0\right)$$

Así, combinando estas dos ecuaciones tenemos lo siguiente:

$$-c_2 \frac{dI}{dt} = -c_2 c_3 \left(G(t) - G_0\right) - c_4 \left(\frac{dG}{dt} + c_1(G(t) - G_0)\right)$$

Es decir:

$$-c_2 \frac{dI}{dt} = -(c_1 c_4 + c_2 c_3) \left(G(t) - G_0\right) - c_4 \frac{dG}{dt}$$

Donde obtenemos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{dG^2}{d^2t} + (c_1 + c_4) \frac{dG}{dt} + (c_1 c_4 + c_2 c_3) \left(G(t) - G_0\right) = 0 \tag{4}$$

Problema 4. Suponiendo que la ecuación característica de la ecuación diferencial no tiene raices reales (es decir tiene soluciones críticamente amortiguadas), deduzca que la solución puede escribirse de la forma

$$G(t) = G_0 + Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta)$$

con G_0, A, α, ω y δ parámetros dependientes de los coeficientes del sistema lineal de ecuaciones diferenciales. ¿ Por qué razón no es necesario considerar dos raíces reales distintas o una raíz real repetida de la ecuación característica?

Solución. Para resolver la ecuación 4 primero resolveremos la ecuación diferencial particular asociada:

$$G'' + (c_1 + c_4)G' + (c_1c_4 + c_2c_3)G = (c_1c_4 + c_2c_3)G_b$$

Como la función a la derecha es un polinomio de grado 0, supondremos que la solución particular $G_p = A$ es un polinomio constante., luego $G' = 0 = G''$, y así:

$$0 + (c_1 + c_4)0 + (c_1c_4 + c_2c_3)B = (c_1c_4 + c_2c_3)G_b$$

De donde:

$$(c_1c_4 + c_2c_3)B = (c_1c_4 + c_2c_3)G_b$$

Luego $G_p = G_b$. Ahora, para hallar la solución homogénea, supongamos que $G(t) = e^{rt}$, tenemos entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&r^2e^{rt} + (c_1 + c_4)re^{rt} + (c_1c_4 + c_2c_3)e^{rt} = 0\\
&(r^2 + (c_1 + c_4)r + (c_1c_4 + c_2c_3))e^{rt} = 0\\
&r^2 + (c_1 + c_4)r + (c_1c_4 + c_2c_3) = 0
\end{aligned}$$

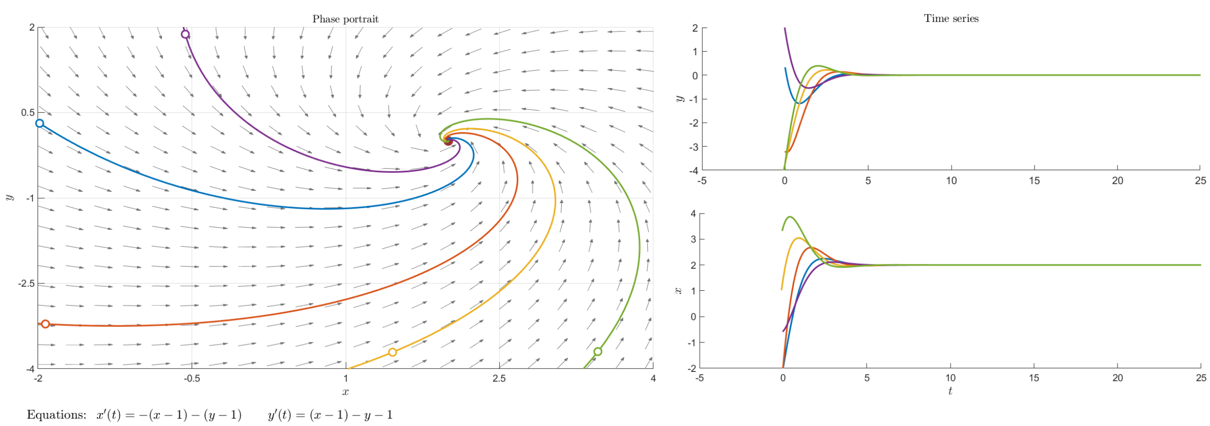
De donde

$$\begin{aligned}
r &= \frac{-(c_1+c_4) \pm \sqrt{(c_1+c_4)^2 - 4(c_1c_4+c_2c_3)}}{2} \\
&= \frac{-(c_1+c_4)}{2} \pm \frac{\sqrt{(c_1+c_4)^2 - 4(c_1c_4+c_2c_3)}}{2} \\
&= \frac{-(c_1+c_4)}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1+c_4)^2 - 4(c_1c_4+c_2c_3)}{4}} \\
&= -\frac{c_1+c_4}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1+c_4)^2}{4} - \frac{4(c_1c_4+c_2c_3)}{4}} \\
&= -\frac{c_1+c_4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_1+c_4}{4}\right)^2 - (c_1c_4+c_2c_3)} \\
&= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}
\end{aligned}$$

Donde $\alpha = \frac{c_1+c_4}{2}$ y $\omega_0 = \sqrt{c_1c_4+c_2c_3}$.
Así, la solución a la ecuación homogenea viene dada por:

$$G_h = a_1 e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2})t} + a_2 e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2})t}$$

Por otra parte, observando el retrato fase del sistema de ecuaciones (3) para algunos valores particulares notamos que los valores propios del sistema asociado deben ser complejos por lo cuál no es necesario considerar dos raices reales distintas o una raiz real repetida. Generamos el diagrama que se ecuentra a continuación haciendo uso de la herramienta pplane8 de MATLAB.



Esto tiene sentido con respecto a la realidad fisiológica pues debemos considerar que los niveles de glucosa en la sangre oscilan con respecto al tiempo: La glucosa es consumida mediante la realización de actividad física, la persona se alimenta y crecen los niveles de glucosa, para que luego sea absorbida y almacenada volviendo al punto de equilibrio. Por lo

tanto, la función que encontremos debe presentar un comportamiento periódico como sin y cos, funciones que solo aparecen en el desarrollo de la exponencial cuando el exponente es un número complejo, así que por ese motivo debemos considerar solo las soluciones de este tipo.
De esta manera podemos suponer que $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$. Tomemos $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Luego,por la definición de exponencial para números complejos:

$$\begin{aligned}
G_h &= a_1 e^{-\alpha t + i\omega t} + a_2 e^{-\alpha t - i\omega t} \\
&= a_1 e^{-\alpha t} e^{i\omega t} + a_2 e^{-\alpha} e^{-i\omega t} \\
&= a_1 e^{-\alpha t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + a_2 e^{-\alpha}(\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)) \\
&= a_1 e^{-\alpha t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + a_2 e^{-\alpha}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \\
&= e^{-\alpha t}(a_1\cos(\omega t) + a_1 i\sin(\omega t) + a_2\cos(\omega t) - a_2 i\sin(\omega t)) \\
&= e^{-\alpha t}((a_1 + a_2)\cos(\omega t) + (a_1 i - a_2 i)\sin(\omega t)) \\
&= e^{-\alpha t}(b_1\cos(\omega t) + b_2\sin(\omega t))
\end{aligned}$$

Sin embargo, nos gustaría que esta solución se vea lo más simplificada posible, por lo que usaremos la identidad para el coseno de la resta de ángulos:

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

tomemos $b_1 = A\cos(\delta)$ y $b_2 = A\sin(\delta)$ constantes, donde A y δ son constantes que dependen de los parámetros, luego tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
G_h &= e^{-\alpha t}(\cos(\omega t)A\cos(\delta) + \sin(\omega t)A\sin(\delta)) \\
&= e^{-\alpha t}A(\cos(\delta)\cos(\omega t) + \sin(\delta)\sin(\omega t)) \\
&= e^{-\alpha t}A\cos(\omega t - \delta)
\end{aligned}$$

Luego, la solución general es sumar la solución particular con la homogenea, y así:

$$G(t) = G_b + Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta) \tag{5}$$

Problema 5. Tres pacientes tras una noche de ayuno se realizan la prueba de tolerancia de glucosa. Despúes de haber ingerido una gran cantidad de glucosa se obtienen las siguientes concentraciones glucósicas en la sangre en (mg/ 100ml) cada 30 minutos.

t (min)	0	30	60	90	120	150	180
Paciente A	67.8000	129.5789	105.8170	50.2596	49.3466	71.1210	72.7567
Paciente B	78.7000	142.9923	108.5137	87.6735	83.9064	80.5915	80.8194
Paciente C	86.4000	173.7187	217.3713	215.5227	192.5889	145.1753	97.4866

Solución:

(a) Mediante la siguiente rutina en MATLAB, hacemos una estimación de los parámetros $G_0, A, \alpha, \omega, \delta$, con esta misma generaremos las gráficas de cada ajuste.

```
A=[67.8000,129.5789,105.8170,50.2596,49.3466,71.1210,72.7567;
   78.7000,142.9923,108.5137,87.6735,83.9064,80.5915,80.8194;
   86.4000,173.7187,217.3713,215.5227,192.5889,145.1753,97.4866];
T=array2table(A,"RowNames",{'Paciente A','Paciente B','Paciente C'},"VariableNames",{'0','30','60','90','120','150','180'});

r=linspace(0,20,300);
xdata=[0,30,60,90,120,150,180];
ydata=A(2,:); %Variar entre 1,2,3 para obtener la curva requerida
%x0=[0,0.4,0.2,0.1,0.1] %Val. iniciales paciente 1
x0=[0,0.8,0.3,0.1,0.1]; %Val. iniciales paciente 2
%x0=[80,0,0,0.1,0.1] %Val. iniciales paciente 3
fun=@(x,xdata)x(1)+x(2).*exp(-x(3).*xdata).*cos(x(4).*xdata-x(5));
x=lsqcurvefit(fun,x0,xdata,ydata)
times = linspace(xdata(1),300);
plot(xdata,ydata,'ko',times,fun(x,times),'b-')
legend('Data','Fitted exponential')
title('Data and Fitted Curve')
```

Las estimaciones obtenidas son las siguientes:

	G_b	A	α	ω	δ
Paciente 1	69.5713	99.1195	0.0128	0.0409	1.6017
Paciente 2	81.0276	-435	-0.0127	0.2144	-0.6473
Paciente 3	40.1920	-294.2066	0.0054	0.0136	17.1213

(b) Encuentre y grafique el comportamiento de la concentración de glucosa $G(t)$ en el tiempo para cada uno de los pacientes e insulina $I(t)$.

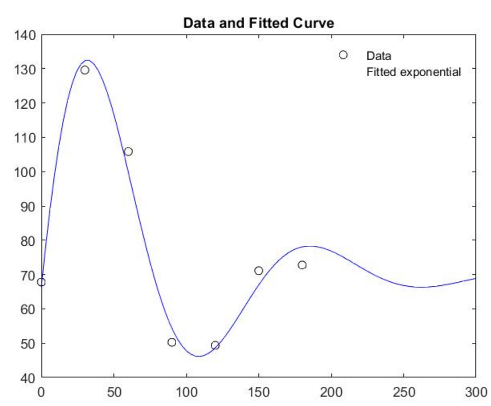


Figura 1: Nivel de glucosa en el paciente 1

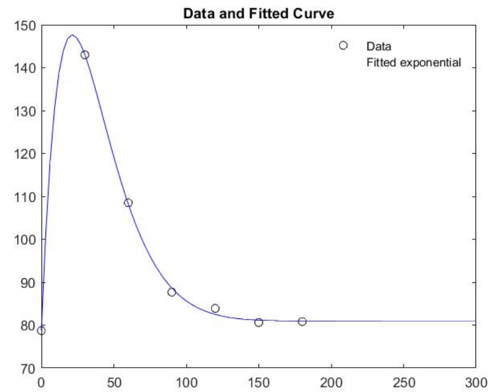


Figura 2: Nivel de glucosa en el paciente 2

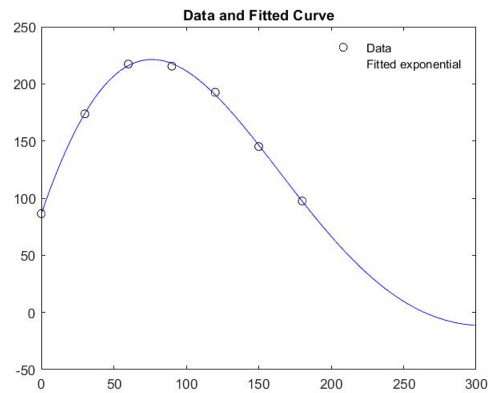


Figura 3: Nivel de glucosa en el paciente 3

(c) Con base en un análisis gráfico, podemos darnos cuenta que el paciente más propenso a tener la enfermedad es el tercero puesto que tarda bastante en eliminar la glucosa de su sangre. Por otra parte, observamos que el paciente 1 también puede tener problemas para metabolizar la glucosa pero no muestra señales de diabetes. Más adelante, corroboraremos estas hipótesis con una prueba más formal.
(d)Recordemos que la función que describe la cantidad de glucosa está dada por:

$$G(t) = G_b + Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta)$$

La cual tiene un comportamiento oscilatorio alrededor del punto de equilibrio, que es aportada por la componente $Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta)$. Este sumando corresponde a la solución de la ecuación (4), es críticamente amortiguada pues $\alpha > 0$ y podemos hacer una analogía con la ecuación masa resorte dada por $mx'' + cx' + kx = 0$. En el sistema masa-resorte el período de oscilación del viene dado por $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
Ahora bien, dado que asumimos que el ser humano se alimenta cada cuatro horas, las oscilaciones en los niveles de glucosa deben presentar un periodo de $T = 240$(medido en minutos) para personas que no padezcan la enfermedad. Construiremos el criterio para dictaminar

diabetes, solamente teniendo en cuenta el caso en el que la curva de un paciente tenga un periodo $T > 240$ pues esto indica que no produce suficiente insulina para contrarrestar el efecto de la glucosa.
$T \leq 240$ no indica presencia de la enfermedad en cuestión. Por otra parte,recordemos que $\omega_0^2 = \omega^2 + \alpha^2$. De esta forma:

$$\begin{aligned} T &> 240 \\ \frac{2\pi}{\omega_0} &> 240 \\ \frac{\pi}{120} &> \omega_0 \\ \frac{\pi}{120} &> \sqrt{\omega^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

Es decir, sí $\frac{\pi}{120} > \sqrt{\omega^2 + \alpha^2} = \omega_0$ el paciente presentará la enfermedad. Veamos que nuestras respuestas del punto c) son acordes a este criterio:

- Para el paciente 1, $\omega_0 = 0{,}0429 > 0{,}0262$. Por lo tanto, este paciente no padece diabetes.
- Para el paciente 2, $\omega_0 = 0{,}0488 > 0{,}0262$. Por lo tanto, este paciente no padece diabetes.
- Para el paciente 3, $\omega_0 = 0{,}0146 < 0{,}0262$. Por lo tanto, este paciente sí padece diabetes.

2. Manejo sostenible de la tierra

La conversión de hábitat es la principal amenaza para la biodiversidad. En particular, los bosques tropicales, junto con los bosques templados, las sabanas y las marismas costeras, se están convirtiendo en tierras para la agricultura, casas particulares, centros comerciales y ciudades. El lapso de tiempo que el hábitat permanece viable para usos agrícolas viene determinado por la duración de la productividad del suelo o por la tasa de acumulación de malas hierbas y otras especies de plagas y patógenos. Los datos procedentes de varios continentes sugieren que los bosques tropicales (y templados) están siendo destruidos a un ritmo anual de entre el 1 % y el 4 % de su superficie actual. Un efecto adicional significativo es que la conversión de hábitat en agricultura se produce en tierras que sólo conservan su utilidad como suelo agrícola durante tres o cinco años; luego se abandona cuando la invasión de malas hierbas o la erosión de la capa superficial del suelo reduce su viabilidad agrícola. Estas áreas degradadas se acumularán, porque aunque se producirá la colonización natural y restauración, el proceso puede ser lento y producir una fauna y flora considerablemente pobres.
Sea F el área cubierta por bosques, A el área dedicada a la agricultura, U el área de tierra

no utilizada, y P la población humana. Un modelo sencillo para la conversión de hábitat es

$$\begin{aligned} F' &= sU - dPF \\ A' &= dPF + bU - aA \\ U' &= aA - (b+s)U \\ P' &= rP\left(1 - \frac{h}{A}P\right) \end{aligned}$$

a) Interprete las constantes s, d, b, a y h en el modelo. En particular, ¿cuál es la capacidad de carga asumida de este entorno? ¿Cuál es la interpretación del término no lineal dPF? ¿Por qué es razonable incluir el área U en el modelo?

Solución. Veamos las interpretaciones para las constantes que aparecen en el modelo:

$$F' = sU - dPF$$

Vemos que el área de bosque aumenta con respecto al área no utilizada con un factor s, esta constante se interpreta como el factor en que se restaura la tierra no utilizada de manera natural, por lo que será un factor pequeño ya que este proceso suele ser lento. Por otro lado, la constante d es el porcentaje por el cual se disminuyen los bosques para uso agrícola; de hecho el término dFP representa este decrecimiento puesto que los bosques decrecen un porcentaje respecto a sí mismos que dependen de la población actual; dado que de esta población dependen cuantas hectareas deban usarse para la agricultura.

$$A' = dPF + bU - aA$$

La constante b representa el factor por el cual las tierras no utilizadas se restauran y vuelven a ser aptas para la agricultura, deshaciéndose de las plagas y malas hierbas. Por otro lado, a representa el factor por el que se van perdiendo las tierras, las mismas plagas y malas hierbas van acabando con la agricultura con cierta velocidad, de la que depende a.

$$P' = rP\left(1 - \frac{h}{A}P\right)$$

En esta ecuación vemos la intervención de la variable r, que en este caso representa la tasa de crecimiento de la población por unidad de tiempo $(1/t)$ pues esta relacionada directamente con P; así mismo tenemos la constante h que se relaciona inversamente a la capacidad de carga, esta constante (h) representa la taza de consumo de alimento que necesita una persona para sobrevivir. Como ya mencionamos tenemos la capacidad de carga (persistencia), ésta es el tamaño máximo de la población que el ambiente puede soportar; en este caso vemos que nuestra variable A afecta directamente por lo tanto notamos que nuestra capacidad de carga va a depender del área dedicada a la agricultura, pues de esto depende el sostenimiento de la población.

Es necesario incluir la variable U pues las tierras pueden volverse inutilizables después de un tiempo como tierras agrícolas. Sin embargo, estas no son pérdidas permanentes por que bajo ciertas condiciones estas tierras pueden o volver a ser agrícolas o volver a su estado natural; es un ciclo que se retroalimenta y es necesario tener en cuenta para que no haya pérdidas en el total de las tierras.

b) Para que este modelo tenga sentido, la superficie total de la región, T , debe ser constante. Demostrar que este es el caso de sistema de ED planteado arriba. Reducir el modelo a tres ecuaciones utilizando el hecho de que T es constante.

Solución. Supongamos que $T(t)$ representa la superficie total de la región, es decir que, como F, A y U representan regiones disyuntas de la regiones, entonces:

$$T(t) = F(t) + U(t) + A(t)$$

Veamos entonces como varía la superficie total con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} T'(t) &= F'(t) + U'(t) + A'(t) \\ &= (sU - dPF) + (dPF + bU - aA) + (aA - (b+s)U) \\ &= (s+b)U - (b+s)U - dPF + dPF - aA + aA \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, que en efecto el total del terreno no varía con respecto al tiempo, así que debe ser constante, luego $T(t) = T \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, tenemos la siguiente igualdad:

$$T = F(t) + U(t) + A(t)$$

Al derivar esta ecuación, dado que T es constante, tenemos que:

$$0 = F' + U' + A'$$

De donde podemos concluir que:

$$U' = -F' - A'$$

Luego, nuestro sistema de 4 ecuaciones se puede escribir como:

$$\begin{aligned} F' &= sU - dPF \\ A' &= dPF + bU - aA \\ -F' - A' &= aA - (b+s)U \\ P' &= rP\left(1 - \frac{h}{A}P\right) \end{aligned}$$

Sin embargo, es evidente que la tercera ecuación es combinación lineal de la primera y la segunda. Luego es redundante y no nos brinda nueva información, así que podemos omitirla. Reduciendo el modelo a solo 3 ecuaciones:

$$\begin{aligned} F' &= sU - dPF \\ A' &= dPF + bU - aA \\ P' &= rP\left(1 - \frac{h}{A}P\right) \end{aligned}$$

c) Encuentre las soluciones de equilibrio para este modelo para un área total determinada T y analice su estabilidad.

Solución: Para encontrar los puntos de equilibrio igualamos todas las derivadas a cero:

$$\begin{aligned} 0 &= sU - dPF \\ 0 &= dPF + bU - aA \\ 0 &= rP\left(1 - \frac{h}{A}P\right) \end{aligned}$$

Debemos determinar que valores satisfacen este sistema de ecuaciones[1]. Para ello consideremos los siguientes dos casos para la tercera ecuación:

- Si $P = 0$, por la primera ecuación del sistema, es evidente que $sU = 0$, sabemos que $s \neq 0$, por lo tanto debemos tener que $U = 0$. Luego por la segunda ecuación, dado que $P = U = 0$, se debe tener que $A = 0$; sin embargo esto contradice la tercera ecuación donde claramente debemos tener que $A \neq 0$, por lo tanto $P \neq 0$.

[1]Suponemos que todos los parámetros son estrictamente positivos, es decir mayores estrictos que 0

- Por otra parte, sí $\left(1-\frac{h}{A}P\right)=0$ entonces, nuestros puntos de equilibrio vienen dados por $P=\frac{A}{h}$. De esta forma, al sumar la primera ecuación con la segunda tenemos:

$$0 = sU + bU - aA \Rightarrow (s+b)U = aA \Rightarrow U = \frac{a}{s+b}A$$

Y al despejar F de la primera, obtenemos

$$0 = sU - dPF \Rightarrow d\frac{A}{h}F = s\frac{a}{(s+b)} \Rightarrow F = \frac{ahs}{d(s+b)}$$

Ahora bien, como $U+A+F=T$ entonces

$$T = \frac{aA}{(s+b)} + A + \frac{ahs}{d(s+b)}$$

$$\left(T - \frac{ahs}{d(s+b)}\right) = A\left(\frac{a}{s+b}+1\right)$$

$$A = \frac{\left(T-\frac{ahs}{d(s+b)}\right)}{\left(\frac{a}{s+b}+1\right)}$$

Tomaremos entonces nuestros puntos de equilibrio de la siguiente manera:

$$(\bar{F},\bar{U},\bar{A},\bar{P}) = \left(\frac{ahs}{d(s+b)}, \frac{\bar{A}a}{s+b}, \frac{\left(T-\frac{ahs}{d(s+b)}\right)}{\left(\frac{a}{s+b}+1\right)}, \frac{\bar{A}}{h}\right)$$

Evaluamos estos puntos en la matriz Jacobiana del sistema, la cuál calculamos haciendo uso del software *Mathematica*® :

```
In[1]:=  a1={s*U-d*F*P,-a*A+b*U+d*F*P,a*A-U*(b+s),P*r(1-h*P/A)};

         b1={F,A,U,P};

         J = Grad[a1, b1];

Out[1]=  {{-d P,0,s,-d F},{d P,-a,b,d F},{0,a,-b-s,0},

            h P^2 r           h P   h P r
         {0,-------,0,r (1- ---)- -----}}
             A^2               A     A
```

Dejamos expresado esta evaluación, manteniendo la notación que elegimos para los puntos de equilibrio :

$$\begin{pmatrix} -d\bar{P} & 0 & s & -d\bar{F} \\ d\bar{P} & -a & b & d\bar{F} \\ 0 & a & -b-s & 0 \\ 0 & \frac{h\bar{P}^2 r}{\bar{A}^2} & 0 & -\frac{h\bar{P}r}{\bar{A}} + \left(1-\frac{h\bar{P}}{\bar{A}}\right) r \end{pmatrix}$$

Con *Mathematica*® , hacemos uso de las funciones implementadas para obtener el polinomio característico de la matriz, y así mismo sus coeficientes:

```
In[2]:=  p(x_)=Expand[CharacteristicPolynomial[J,x]]
```

$$\text{Out[2]=}\quad \frac{2adhP^2rx}{A}+\frac{2ahPrsx}{A}+\frac{2ahPrx^2}{A}-adPrx+adPx^2-arsx-arx^2+asx^2+ax^3 -\frac{bdFhP^2rx}{A^2}-\frac{dFhP^2rsx}{A^2}-\frac{dFhP^2rx^2}{A^2}+\frac{2bdhP^2rx}{A}+\frac{2bhPrx^2}{A}+\frac{2dhP^2rsx}{A} +\frac{2dhP^2rx^2}{A}+\frac{2hPrsx^2}{A}+\frac{2hPrx^3}{A}-bdPrx+bdPx^2-brx^2+bx^3-dPrsx -dPrx^2+dPsx^2+dPx^3-rsx^2-rx^3+sx^3+x^4$$

Obtenemos ahora los coeficientes de dicho polinomio, considerando que usaremos el criterio de Routh-Hurtwiz.

```
In[3]:=  Reverse[CoefficientList[p(x),x]]
```

$$\text{Out[3]=}\quad \left\{1,a+\frac{2hPr}{A}+b+dP-r+s,\frac{2ahPr}{A}+adP-ar+as-\frac{dFhP^2r}{A^2}+\frac{2bhPr}{A}+\frac{2dhP^2r}{A}+\frac{2hPrs}{A} +bdP-br-dPr+dPs-rs,\frac{2adhP^2r}{A}+\frac{2ahPrs}{A}-adPr-ars-\frac{bdFhP^2r}{A^2}-\frac{dFhP^2rs}{A^2} +\frac{2bdhP^2r}{A}+\frac{2dhP^2rs}{A}-bdPr-dPrs,0\right\}$$

Ahora bien para analizar los puntos de estabilidad haremos uso del criterio de Routh-Hurtwiz,la fuente de la implementación usada puede encontrarse en [3]. Presentamos la evaluación que hace el algoritmo tomando diferentes valores para los parámetros. Así mismo. presentamos la salida de evaluar el algoritmo estos parámetros, donde podemos observar que todos los valores propios del sistema son negativos. Esto es, los puntos de equilibrio forman una fuente.

```
global s;
s=1;
global a;
a=0.05;
global b;
b=0.2;
```

```
global d;
d=0.00005;
global h;
h=0.9;
global r;
r=0.5;
global F;
F=a*h*s/(d*(s+b));
global A;
A=((10000-(a*h)/d)*(s/(s+b)))/(a/(s+b)+1);
global P;
P=A/h;
global U;
U=a*A/(b+s);
global W;
```

```
%Tabla Roth-Hurwitz
    0.0010    1.8501         0
    0.2009    2.9990         0
    1.8352         0         0
    2.9990         0         0
    0.0000         0         0
%Valores propios del sistema
         0
 -191.3250
   -7.4972
   -2.0908
```

	s	a	b	d	h	r	Estable
Estimación 1	1	0.05	0.2	0.05	0.9	0.5	Sí
Estimación 2	1	0.09	0.1	0.0001	0.07	0.6	Sí
Estimación 3	55	0.9	2.7	0.0008	4.03	0.8	Sí
Estimación 4	55	0.9	2.7	0.0008	12.03	10	No
Estimación 5	5	2	1.2	0.01	1.17	0.8	Sí

Tomaremos como condición inicial $P(0) = 50$ y $\frac{50}{A(0)} = 740$, es decir, $A(0) = \frac{50}{740} = 0{,}068$. Tomando $U(0) = \frac{a}{s+b}A(0)$, tenemos que $F(0) = 10000 - A(0) - U(0)$.

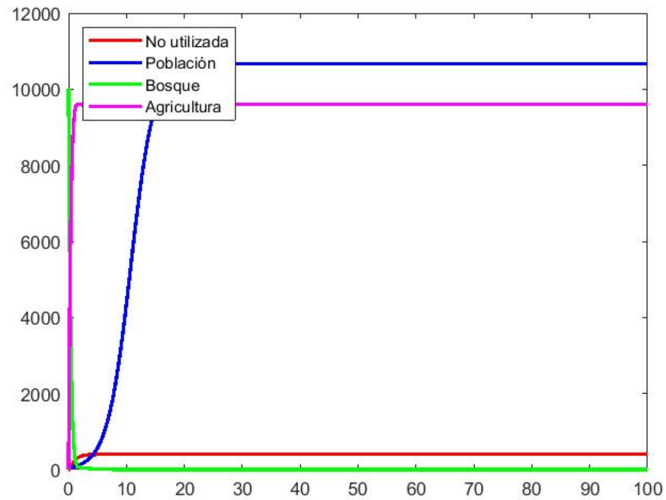


Figura 4: Estimación 1

Observamos como un factor muy grande en el desarrollo de la agricultura acaba rápidamente con los bosques pero deja un factor pequeño de tierras utilizadas y fomenta un rápido desarrollo de la población.

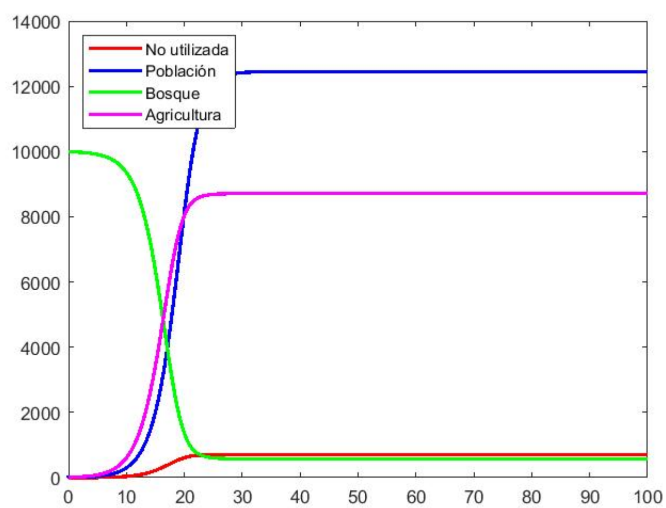


Figura 5: Estimación 2

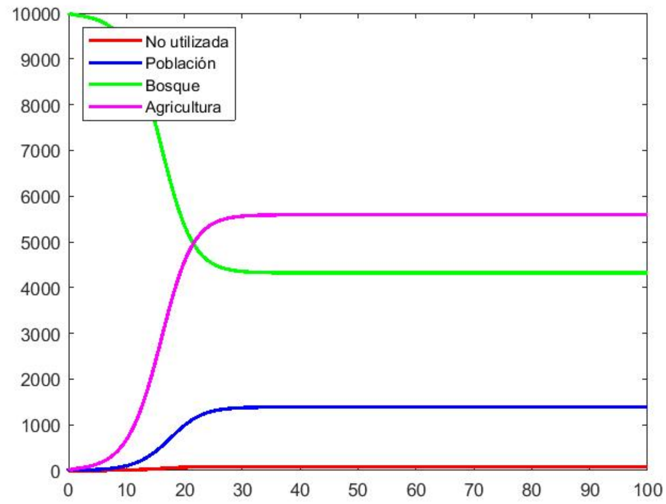


Figura 6: Estimación 3

Observamos cierta correlación entre la agricultura y el terreno que ocupa el bosque. De modo que sí hay más km^2 que personas. Este uso de los recursos permite mantener una fracción del terreno ocupado por el bosque sin afectar a la agricultura pero disminuyendo el ritmo de crecimiento de la población.

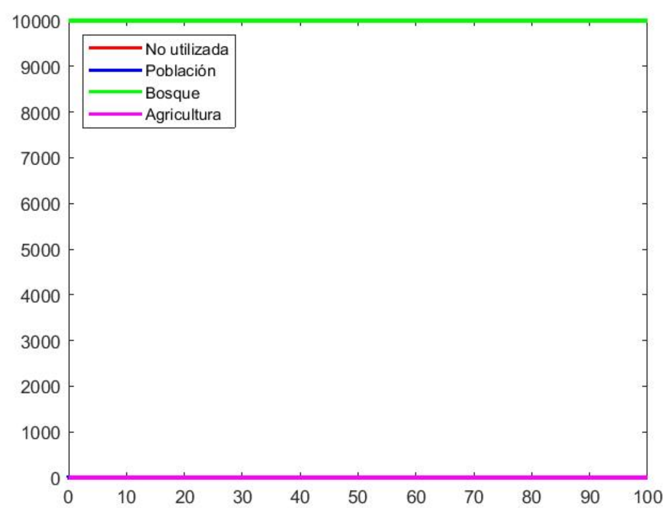


Figura 7: Estimación 4

Sí la agricultura es muy agresiva con el bosque y lo extingue. Es decir, va a haber mucha agricultura pero más que suficiente para la población que que qeremos Sí la tasa de cambio de consumo necesaria para que sobreviva un individuo es mayor a la tasa de crecimiento de la población, esta simplemente desaparece. De manera que el bosque ocupa prácticamente todo el territorio y tanto la agricultura como los terrenos no utilizados tienden a desaparecer. (Punto es inestable)

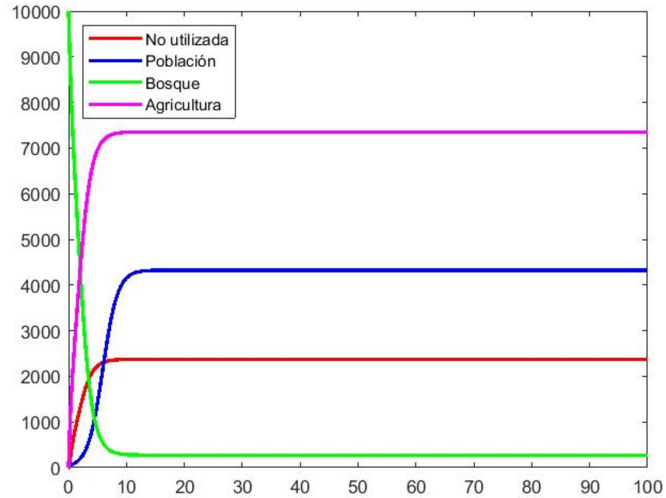


Figura 8: Estimación 5

d) Determine una relación entre los parámetros del modelo que sirvan para tomar una política para preservar al menos la tercera parte del bosque.
Solución: Suponiendo que en un momento inicial el bosque cubre la totalidad del área, tenemos que

$$F(0) = T$$

Luego, si queremos preservar un tercio del bosque debemos buscar que siempre se mantenga $T/3m^2$ de área para el bosque.
Esto se logra asegurando que el punto de equilibrio de nuestro bosque sea exactamente $T/3$, es decir:

$$\bar{F} = \frac{ahs}{d(s+b)} = \frac{T}{3}$$

La ecuación anterior, dado que T es una constante conocida, demuestra una relación entre todos los parámetros del modelo que nos permiten preservar la tercera parte del bosque.

e) Una investigación realizada en los años 70 por John Jeçons y la Organización de acción ecológica descubrió que unos 370 metros cuadrados de espacio de cultivo es suficiente para mantener a una persona con una dieta vegetariana durante un año, con otros 370 metros cuadrados para caminos de acceso y almacenamiento. Teniendo en cuenta lo anterior, determine una relación entre los parámetros del modelo que sirvan para tomar una política para preservar al menos la tercera parte del bosque y que el área cultivada sea suficiente para mantener el mayor número posible de habitantes. Usando valores de parámetros que satisfacen la relación encontrado presente la solución numérica del modelo para un período de tiempo de 0 a 100 años. Suponga que el territorio es de 10.000Km2 e inicialmente hay 50 colonos.

Solución: Primero debemos ver que, suponiendo a todas las personas vegetarianas, cada persona requiere de exactamente $740m^2$ para sobrevivir durante un año. Como queremos máximizar la cantidad de personas que podemos mantener con un área cultivada, es claro que tenemos la siguiente relación:

$$A(t) = 740P(t)$$

Es decir, el área de agricultura tiene que ser 740 por cada uno de los habitantes. Luego tenemos que:

$$\frac{A}{740} = P$$

Esta relación debe mantenerse en todo momento para alimentar al mayor número de habitantes, en particular se debe mantener al llegar al punto de equilibrio. Recordemos que este se da, para $P(t)$ cuando

$$\bar{P} = \frac{\bar{A}}{h}$$

Es decir

$$\bar{P} = \frac{\bar{A}}{h} = \frac{A}{740} \qquad \Rightarrow \qquad h = 740$$

Tenemos así uno de los parámetros despejados.

Por otra parte, por el inciso anterior recordemos que para que se preserve la tercera parte del bosque, como $T = 10000km^2$ debemos tener que:

$$\frac{740as}{d(s+b)} = \frac{10000}{3}$$

Luego

$$\frac{as}{d(s+b)} = 4{,}504504505$$

Hallaremos ahora algunos valores para a, al asumir los valores para b, d, s con base en la información que se nos presenta al inicio del ejercicio. Como por ejemplo que los bosques difícilmente surgen de nuevo en una tierra inutilizada; por lo mismo s tendrá valores bajos. Veamos la siguiente tabla:

Variable	Sup. 1	Sup. 2	Sup. 3	Sup. 4
h	740			
s	370	270	100	7300
d	3	3	0.3	0.3
b	370	470	7300	100
a	27,027	37,04	100	1,37

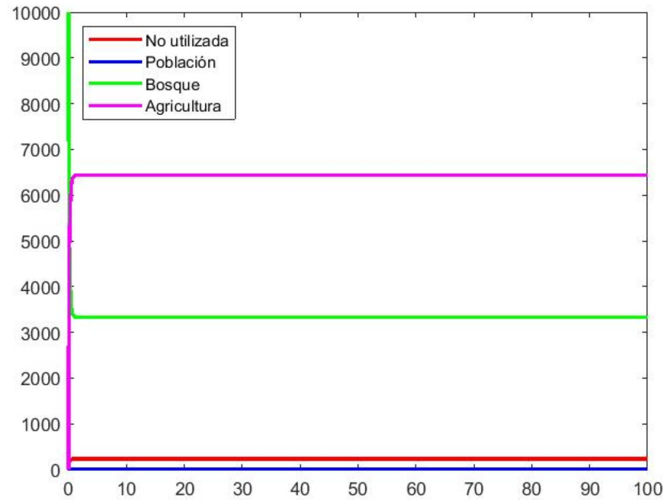


Figura 9: Sup1

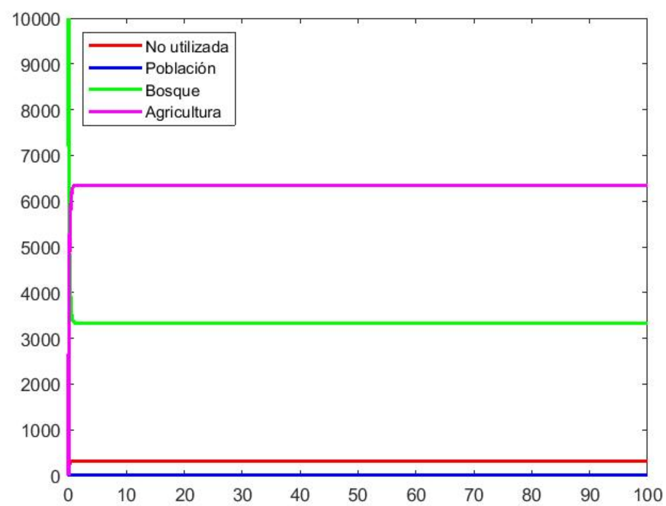


Figura 10: Sup2

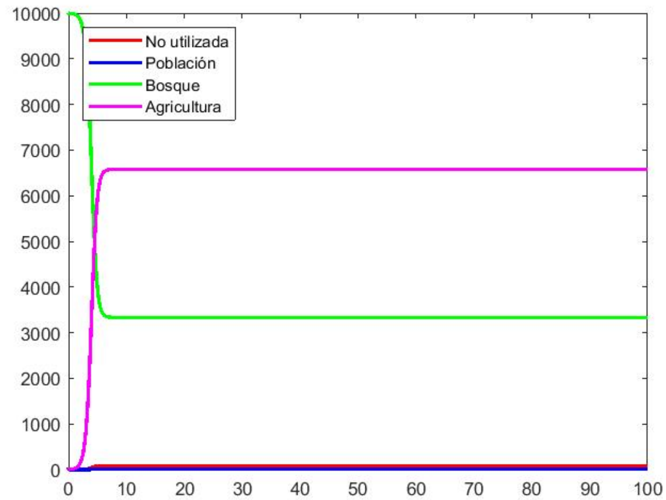


Figura 11: Sup3

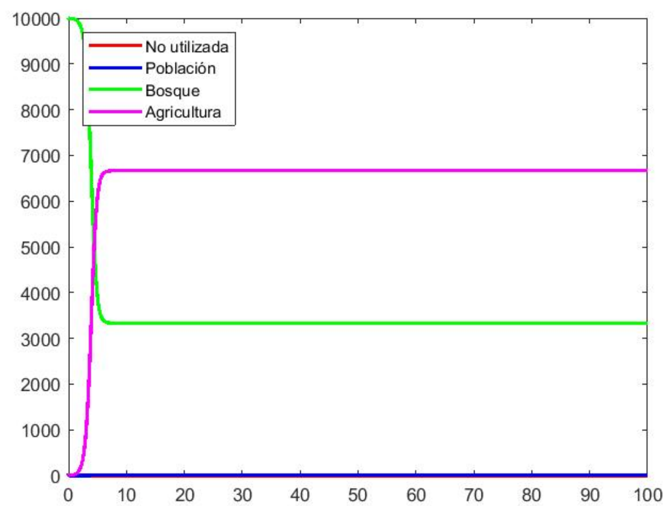


Figura 12: Sup4

Notamos que el intentar preservar la tercera hace que la población no pueda crecer y desaparezca muy rápido. Ante esto consideramos puede haber alguna deficiencia en la implementación del algoritmo o el mismo modelo pues esta situación no resulta sostenible. Presentamos el algoritmo usado para simular las dinamicas presentadas:

```
global s;
s=7300;
global a;
a=1.37;
global b;
```

```
b=100;
global d;
d=0.3;
global h;
h=740;
global r;
r=10;

%bosque y3,pobl. y2, dano y1, agricultura y4
y0 = [0.068*s/(s+b);50 ; 10000-0.068-0.068*s/(s+b);0.068];
tspan = [0 100];
M = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 1 0 0; 0 0 0 0];
f=@(t,y)[s*y(1)- d*y(2)*y(3);d*y(2)*y(3)+ b*y(1)-a*y(4);r*y(2)*(1-h*y(2)/y(4));y(1) + y(4) + y(3)-10000];
options = odeset('Mass',M,'RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-6 1e-10 1e-6 1e-6]);
[t,ys] = ode15s(f,tspan,y0,options);

%plot(t,ys(:,1),'r',t,ys(:,4),'b',t,ys(:,3),'g',t,ys(:,2),'LineWidth',2);
%bosque y3,pobl. y2, dano y1, agricultura y4
p1=plot(t,ys(:,1),'Color','r','LineWidth',2)
hold on
p2=plot(t,ys(:,2),'Color','b','LineWidth',2)
p3=plot(t,ys(:,3),'Color','g','LineWidth',2)
p4=plot(t,ys(:,4),'Color','magenta','LineWidth',2)
hold off
legend([p1 p2 p3 p4],{'No utilizada','Poblacion','Bosque','Agricultura'},'Location','northwest','NumColumns',1)
```

Referencias

[1] Nagle-Saff-Snider, Ecuaciones diferenciales con problemas de frontera

[2] Andy P. Dobson, A. D. Bradshaw, A. J. M. Baker,
Hopes for the Future: Restoration Ecology and Conservation Biology

[3] https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/17483-routh-hurwitz-stability-criterion

[4] Iván Alonso Cisneros ,Mathematical models for diabetes

[5] Ricardo Mejía-Zepeda,María del Consuelo Figueroa García,Caracterización de un modelo de diabetes tipo 2 en ratas Wistar hembra