Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Modelos matemáticos (II-2022)
Tarea 1

Santiago Tovar Mosquera satovarmo@unal.edu.co
Juan David Carrrascal Ibañez jdcarrascali@unal.edu.co

1. **¿Cuántos restaurantes hay en Colombia?** Es evidente que es imposible, para efectos prácticos, encontrar la respuesta correcta ya que los restaurantes abren y cierran todos los días. Primero establezca un rango de error aceptable para su respuesta y luego intente responder a esta pregunta. Puede consultar cualquier fuente de información (como el tamaño de la población o el número de ciudades) con excepción de todo lo que se refiera directamente a la pregunta en cuestión. Indique claramente las suposiciones que está teniendo en cuenta. A continuación, encuentra una fuente que establezca el número de restaurantes que hay. Compare su respuesta con dicha información. Tenga en cuenta de que cualquier número oficial es también una estimación y no la verdad, ¿En cuál respuesta confía usted más y por qué?

Solución:
Solo tendremos en cuenta a los restaurantes que se pueden mantener abiertos al satisfacer la demanda de la población de personas empleadas en Colombia.

Para construir la función de demanda haremos uso de una correlación natural. Los potenciales clientes de los restaurantes son personas que no tienen tiempo para cocinar, por ello asumiremos que dichos clientes son personas empleadas que usan el transporte público. Además tendremos en cuenta los restaurantes que proporciona el sector turístico, analizando cifras oficiales de la cantidad de turistas registrados en hoteles.

Con información obtenida de [1],[2],[3] construimos una pequeña base de datos que mide el comportamiento de estas variables durante los últimos 15 años. Implementaremos un modelo de regresión lineal mediante la siguiente rutina en R:

```r
library(tidyverse)
library(readxl)
library(car)
library(boot)
```

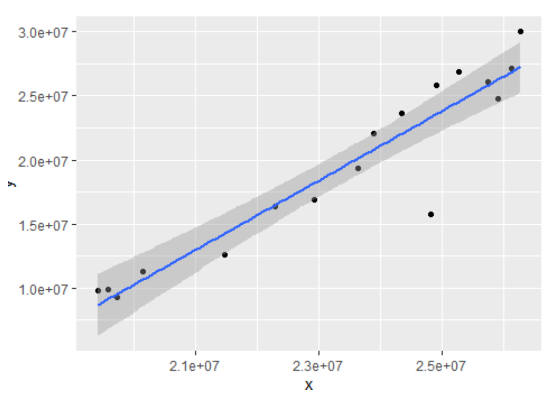
```r
library(QuantPysc)
library(ggplot2)

attach(Datos)

Datos1 <- as.data.frame(t(Datos))
Datos1<-Datos1[-1,]
x<- as.numeric(Datos1$V1)
z<- as.numeric(Datos1$V2)
y<- as.numeric(Datos1$V3)
modelo1=lm(x~y,data=Datos1,na.action = na.exclude)
summary(modelo1)
```

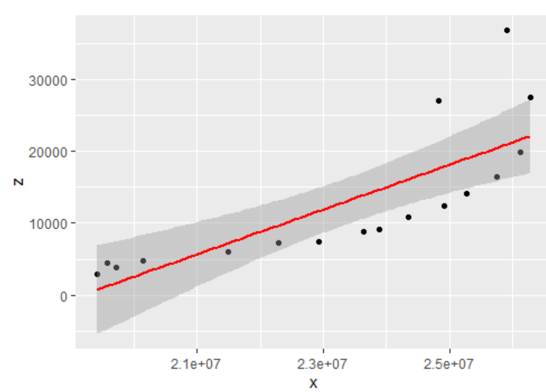
Obtenemos la siguientes salidas para los modelos 1 y 2 respectivamente:

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.701e+07  6.140e+05   27.70 2.70e-14 ***
y           3.279e-01  3.003e-02   10.92 1.55e-08 ***
```

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 2.077e+07  6.443e+05  32.230 2.88e-15 ***
z           1.980e+02  4.024e+01   4.921 0.000185 ***
```

De esta manera obtenemos los siguientes modelos de regresión con sus respectivos gráficos y diagramas de dispersión:





$$y = (1{,}7e + 07) + (3{,}3e - 01) * x \qquad z = (2{,}1e + 0{,}7) + (1{,}9e - 0{,}2) * x$$

Ahora bien, para estimar la proporción de restaurantes por número de personas tomaremos como ejemplo un restaurante común con medidas de 13 metros de largo y 7 metros de ancho. Teniendo en cuenta que cada cliente ocupa $1m^2$ como mínimo y un espacio de $20cm^2$ para realizar movimientos en espacios comunes asumiremos que cada cliente ocupa $1{,}20m^2$. Ahora bien, esto nos permite determinar que la capacidad máxima de clientes que puede atender un restaurante estará dada por:

$$\text{Capacidad Física} = \frac{\text{Area Restaurante}}{\text{Area Cliente}} = \frac{13m \times 7m}{1{,}20m^2} = 75{,}83 \approx 76$$

Ahora bien, si tomamos en cuenta el tiempo obtendremos el siguiente valor para la capacidad productiva del restaurante, esto es, la capacidad del restaurante de atender a sus clientes durante el periodo del almuerzo:

$$\begin{aligned}\text{Capacidad Productiva} &= \frac{CapacidadProductiva \times TiempoAlmuerzo}{TiempoPromedio}\\ &= \frac{76 \times 210}{75}\\ &= 212{,}8\\ &\approx 213\end{aligned}$$

Multiplicamos por un factor de conversión de 0.85 para tener en cuenta que no todos los restaurantes operan a su máxima capacidad todo el tiempo.
Esto es, Capacidad Productiva= 181. Haciendo uso de la estimación dada por el DANE para la cifra de personas empleadas para el año 2022 en (1) obtenemos que

$$\frac{[(1{,}7 * 10^7) + (3{,}3 * 10^-1) * (21680469)]}{181} = 133450{,}57$$

Para el segundo modelo usaremos que cerca de un 15 % de la población trabajadora viaja en vacaciones y por ello debemos multiplicar por un factor de .15

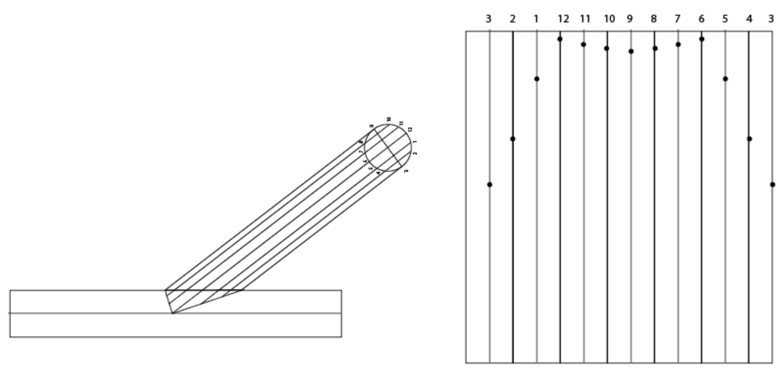
$$\frac{[(2{,}1 * 10^7) + (1{,}9 * 10^{-2}) * 21680469 * 0{,}05]}{213} = 116135{,}89$$

De esta maenra, sumando estas dos cantidades estimamos que el número de restaurantes en Colombia es de 249586.46.
Según Acodres, en el país hay aproximadamente 167.000 establecimientos gastronómicos registrados. Confiamos más en la cifra oficial pues las metodologías usadas permiten hacer uso de herramientas más precisas para la recopilación de información de otras variables que no pudimos tener en cuenta para hacer esta estimación.

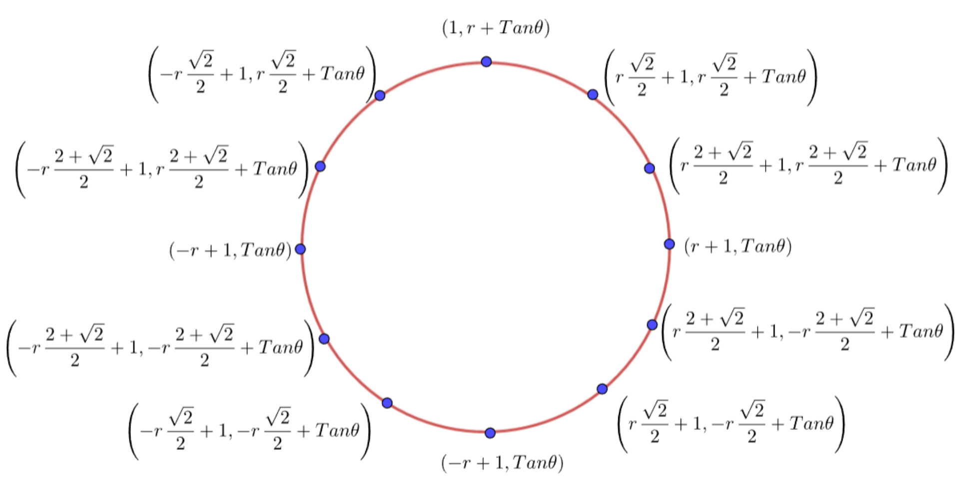
2. Una industria de metal mecánica desea automatizar el proceso de soldadura de tubos. Especialemte está interesada en controlar la antorcha de un brazo de robot de soldadura en el empalme de dos tubos a un ángulo determinado. Este tipo de inserciones son comúnmente llamadas boca de pescado, la cual puede ser de igual diámetro o de diámetros desiguales. En una boca de pescado el tubo base que es el tubo vertical

(figura b) se traza con su diámetro exterior y el tubo injerto que es el tubo horizontal (figura a) se puede trazar con su diámetro interior o exterior dependiendo la aplicación. Esta clase de intersecciones son las más usadas dentro de todo el sistema operacional de cualquier complejo industrial, hidroeléctrico, termoeléctrico y procesos similares.

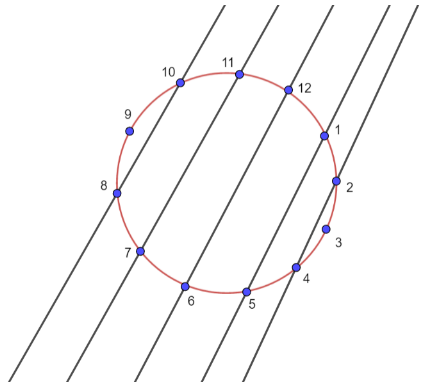
Solución: a) En uno de los vídeos se explica como hacer el molde para la boca de pescado dado cualquier ángulo. La idea usada en dicho vídeo consiste en usar técnicas de geometría proyectiva para generar los moldes adecuados. Para nuestros propósitos esta idea resulta bastante útil pues podemos hacer uso de herramientas básicas de precalculo para describir el movimiento que debe hacer el brazo robótico, únicamente describiendo las coordenadas de los puntos por los cuales debe pasar. La idea del artesano que genera el molde es ubicar una circunferencia con el radio del tubo en la dirección del ángulo de inclinación entre los dos tubos a soldar, como se indica en la figura:



Luego mide las distancias de algunos puntos a una a la recta $y = r$ de la figura y con esto construye el molde que usará. Podemos dividir la circunferencia en 12 partes iguales ubicando coordenadas como se indica en la figura:



Así, númeramos los puntos y debemos encontrar las rectas que indicamos en el siguiente gráfico:



A modo de ejemplo, hallaremos la ecución que pasa por los puntos 2 y 4:

$$y_1 - Tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(x-(r+1))$$
$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}x-(r+1))\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + Tan\theta$$

Luego encontramos la intersección con la recta $y = r$

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}x-(r+1))\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + Tan\theta = r$$
$$x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} * [r+(r+1))\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - Tan\theta]$$

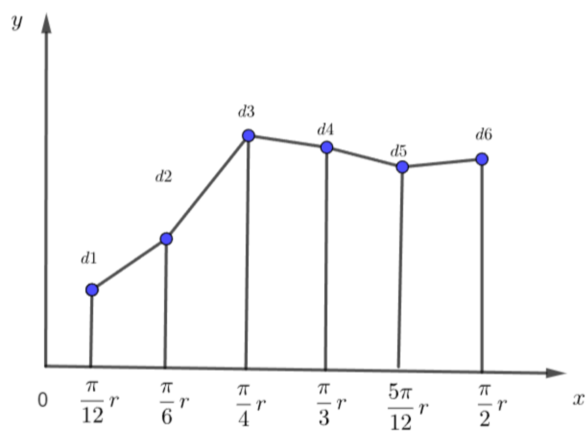
Análogamente, debemos encontrar rectas y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 y puntos x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 de intersección con la recta $y = r$. Ahora bien, debemos calcular las distancias $d(x_1, 4), d(x_2, 5), d(x_3, 6)$, $d(x_4, 7), d(x_5, 8)$, con esto ya encontramos las coordenadas por donde debe pasar el brazo robótico. Estas son:

- $\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}+1, r\frac{\sqrt{2}}{2}+Tan\theta, d(x_2,5)\right)$ y $\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}+1, -r\frac{\sqrt{2}}{2}+Tan\theta, d(x_2,5)\right)$
- $\left(r\frac{2+\sqrt{2}}{2}+1, r\frac{2-\sqrt{2}}{2}+Tan\theta, d(x_1,4)\right)$ y $\left(r\frac{2+\sqrt{2}}{2}+1, -r\frac{2-\sqrt{2}}{2}+Tan\theta, d(x_1,4)\right)$
- $(1, r+Tan\theta, d(x_3,6))$ y $(1, -r+Tan\theta, d(x_3,6))$
- $\left(-r\frac{\sqrt{2}}{2}+1, r\frac{\sqrt{2}}{2}+Tan\theta, d(x_4,7)\right)$ y $\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}+1, -r\frac{\sqrt{2}}{2}+Tan\theta, d(x_4,7)\right)$
- $\left(-r\frac{2+\sqrt{2}}{2}+1, -r\frac{2-\sqrt{2}}{2}+Tan\theta, d(x_5,8)\right)$ y $\left(-r\frac{2+\sqrt{2}}{2}+1, r\frac{2-\sqrt{2}}{2}+Tan\theta, d(x_5,8)\right)$

Es de aclarar que nosotros particionamos la circunferencia en 12 partes iguales, sin embargo si particionamos en más partes obtendremos un mejor molde y por tanto una mejor soldadura.

b) Determine la longitud de la junta de soldadura (”costo”)

La longitud de la curva del molde para el corte será igual a la longitud de la junta de soldadura. Para calcular esta longitud de curva podríamos interpolar estos puntos con splines y posteriormente usar una integral numérica. Sin embargo, dado que este fenómeno está en función de θ y por ello no conocemos estas distancias, aproximaremos esta longitud de arco simplemente hallando las distancias entre los puntos guía como se indica en la figura.Esto claro, dividiendo la longitud del tubo a cortar en 12 partes iguales (por simetría, basta considerar la mitad).



Así,

$$Longitud\ arco = \|\left(\frac{\pi}{12}r, d1\right)\|_2 + \|\left(\frac{\pi}{6}r, d2\right)\|_2 + \|\left(\frac{\pi}{4}r, d3\right)\|_2 + \|\left(\frac{\pi}{3}r, d4\right)\|_2 + \|\left(\frac{\pi}{3}r, d5\right)\|_2$$

La longitud de la junta de soldadura será 2*($Longitud\ arco$). c) Encuentre el ángulo ≪óptimo≫ en el que debe matenerse la antorcha para minimizar la interferencia con las superficies de los tubos. Nos restringiremos a minimizar únicamente una de las 5 distancias, puesto que si se reduce una de ellas las otras también lo harán. Determinamos, con la ecuación punto-pendiente que el punto de intersección de la recta que pasa por el punto 6 y la recta $y = r$ está dado por $(\frac{-r^2+r}{Tan\theta}, r)$. Calculamos la distancia d_3 de este punto al punto 6 con:

$$\begin{aligned}
d_3 =& \sqrt{(\frac{-r^2+r}{Tan\theta} - (-r+1))^2 + (r - Tan\theta)^2} \\
=& \sqrt{(\frac{r - Tan\theta}{Tan\theta} - (-r+1))^2 + (r - Tan\theta)^2} \\
=& \sqrt{(\frac{r - Tan\theta}{Tan\theta})^2((-r+1)^2 + 1)} \\
=& \frac{r - Tan\theta}{Tan\theta}\sqrt{(-r+1)^2 + 1} \\
=& (rCot\theta - 1)\sqrt{(-r+1)^2 + 1}
\end{aligned}$$

Vemos que d_3 se minimiza cuando $d_3 \approx 0$. Esto es,

$$rCot\theta \approx 1$$
$$Cot\theta \approx \frac{1}{r}$$
$$\theta \approx Cot^{-1}(\frac{1}{r})$$

Bajo nuestros supuestos θ es el ángulo que minimiza la interferencia con las superficies de los tubos.

Referencias

[1] MINCIT - Dirección de Análisis Sectorial y RNT, $https://www.citur.gov.co/estadisticas/df_prestadores_historico/all/41gsc.tab = 0$

[2] Colombia-Banco Mundial, $https://datos.bancomundial.org/indicator/SL.TLF.TOTL.IN?end = 2021\&locations = CO\&start = 2000\&view = chart$