Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Modelos matemáticos (II-2022)
Tarea 2

Santiago Tovar Mosquera satovarmo@unal.edu.co
Juan David Carrrascal Ibañez jdcarrascali@unal.edu.co

1. Vibración libre de un cuerpo en un resorte sin peso:
Un cuerpo de masa m, suspendido sobre un resorte sin peso, vibra libremente en dirección vertical. Determinar la frecuencia de esta vibración, mediante análisis dimensional.

Solución:

- Masa del cuerpo: $[M] = kg$
- Cambio de longitud del resorte: $[L] = m$
- Constante de elasticidad: $[K] = \frac{N}{m}$
- Gravedad: $[g] = \frac{m}{s^2}$
- Fuerza: $[\omega] = kg * \frac{m}{s^2}$
- Frecuencia: $[T] = \frac{1}{s}$

Ahora que conocemos las magnitudes la relacionaremos:

$$\begin{aligned}
[F] &= kg^{\alpha_1}\left(\frac{N}{m}\right)^{\alpha_2} \\
\frac{1}{s} &= kg^{\alpha_1}\left(\frac{(kg*m)/s^2}{m}\right)^{\alpha_2} \\
s^{-1} &= kg^{\alpha_1+\alpha_2}s^{-2\alpha_2}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el sistema (masa-resorte) se encuentra en equilibrio, tenemos que el peso $(m * g)$ debe ser igual a la fuerza del resorte para reincorporarse a su posición .ºriginal"(es decir $K * l$, donde l es la medida de cuánto se alargó el resorte y K es la constante de elasticidad); por lo que K depende tanto de la gravedad como de la longitud mencionada, por ello estas magnitudes no se tomaran en cuenta.

$$\begin{aligned}
M: &\quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\
T: &\quad -2\alpha_2 = -1
\end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\alpha_2 = 1/2$$
$$\alpha_1 = -1/2$$

Finalmente:

$$F = C\ M^{-1/2} K^{1/2}$$

Donde C es una posible constante de proporcionalidad. Luego

$$F = C\ \sqrt{\frac{K}{M}}$$

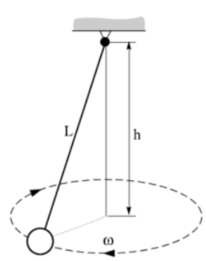
Lo cual es coherente con el análisis de dimensiones:

$$[F] = \frac{1}{\sqrt{kg}}\ \sqrt{\frac{kg}{s^2}}$$

$$[F] = \frac{1}{s}$$

2. Período de un péndulo cónico.

Un péndulo cónico consiste en una pequeña esfera de masa m sostenida por un hilo, de peso desprecialble y longitud L, que gira sin fric ción, alrededor del eje vertical a una velocidad angular constante ω, como se ve en la figura. Con la ayuda del análisis dimensional, y los datos experimentales de la tabla, determine una ecuación general para el período T del péndulo.



Datos dados			Medición
L	g	h	T
1	9.81	0.1	0.634
1	9.81	0.2	0.897
1	9.81	0.3	1.099
1	9.81	0.4	1.269
1	9.81	0.5	1.419

Solución:

Primero, identificamos los paramétros del modelo y sus unidades de medida:

- Masa de la esfera: $[M] = kg$
- Longitud del hilo: $[[L]] = m$
- Altura del péndulo: $[h] = m$

- Gravedad: $[g] = m/s^2$
- Velocidad angular: $[\omega] = rad/s$
- Período: $[T] = s$

Debemos encontrar una expresión funcional para describir el período del péndulon en función de estas variables, esto es, encontrar f tal que $T = f(L, h, g)$; de manera que sus unidades de medida seguirán el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned} [T] &= m^{\alpha_1} m^{\alpha_2} (m/s^2)^{\alpha_3} \\ s &= m^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} s^{-2\alpha_3} \end{aligned}$$

Lo que nos conduce al siguiente sistema matricial:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathsf{M} \\ \mathsf{L} \\ \mathsf{T} \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Cuya solución está dada por $\alpha_3 = -1/2$ y $\alpha_1 = 1/2 - \alpha_2$.Con est presente podemos hacer la siguiente descomposición:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos así que, $T = KL^{1/2-\alpha} h^{\alpha} g^{-1/2}$ donde T es una constante de proporcionalidad. Es decir, $T = K\sqrt{L/g} \cdot (h/L)^{\alpha}$. Linealizamos este sistema aplicando logaritmo a ambos lados y resolviendo el sistema:

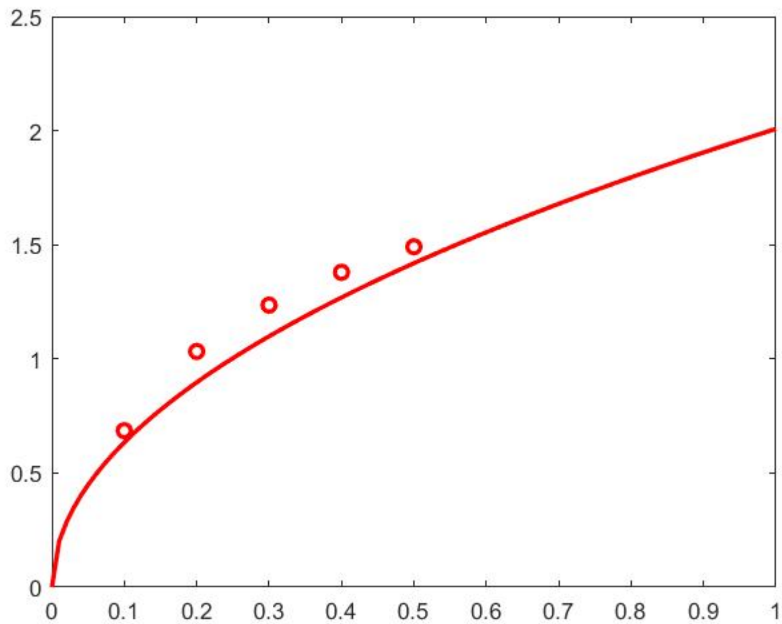
$$\ln(T) - \ln(\sqrt{L/g}) = \ln(K) + \alpha \ \ln(h/L)$$

Encontramos que $K = 19{,}7015$ y $\alpha = 0{,}5006$ mediante el siguiente script en MATLAB. Además presentamos evidencia gráfica de esto:

```
Datos=[0.1 0.634;
    0.2 0.897;
    0.3 1.099;
    0.4 1.269;
    0.5 1.419;];
a=Datos(:,1);
```

```
b=Datos(:,2);
t=log(a/9.8);
pt=log(b)-log(sqrt(1/9.8));
Al=vander(a);
Al=Al(:,end-1:end);
Ac=vander(t);
Ac=Ac(:,end-1:end);
aa=linspace(0,1,100);

%Ajuste
c=inv(Ac'*Ac)*Ac'*pt;
y=exp(c(2))*sqrt(1/9.8)*(aa/9.8).^(c(1));
 figure
 plot(a,pt,'ro','LineWidth',2)
 hold on
 plot(aa,y,'LineWidth',2,'Color','r')
 exp(c(2)) %Valor K=19.7
 c(1)      %Valor alpha=0.5
```



De esta manera, la ecuación del péndulo estará dada por:

$$T = 19{,}7 \left(\frac{h}{L}\right)^{0{,}5} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = 19{,}7 \sqrt{\frac{h}{g}}$$

3. Artículos de supermercado.

Los artículos en los supermercados típicamente vienen en varios tamaños y el costo por unidad es menor para artículos grandes generalmente. Realiza un modelos del costo por unidad de peso considerando superposición de proporciones debido al costo de producción, empaque y transporte del producto. ¿Cuáles predicciones puede hacer de este modelo?

Solución:

Supongamos que el crecimiento del precio por unidad de peso en el arroz se ve afectado de manera lineal por la cantidad de arroz, en kilogramos, que se está vendiendo. Lo cual podemos concluir con base en el crecimiento que se evidencia en la información presentada en la tabla 1.

Kilogramos empacados	Precio total
1_{kg}	\$3890
3_{kg}	\$11590
5_{kg}	\$18590
10_{kg}	\$36890

Cuadro 1: Precio por gramo de arroz

Adicionalmente, recordemos que debemos tener en cuenta los costos de de producción, empaque y transporte; los cuales también podemos suponer que crecen de manera lineal con respecto al peso del producto.

Encontramos así 3 ecuaciones dependientes del peso, donde α, β y γ son constantes reales y positivos:

$$\begin{aligned} P(x) =& \alpha\ x && \text{Función asociada a la producción} \\ E(x) =& \beta\ x && \text{Función asociada al empaquetado} \\ T(x) =& \gamma\ x && \text{Función asociada al transporte} \end{aligned}$$

Dado que el coste total será la suma de los costes anteriores, tenemos entonces un modelo de la siguiente forma:

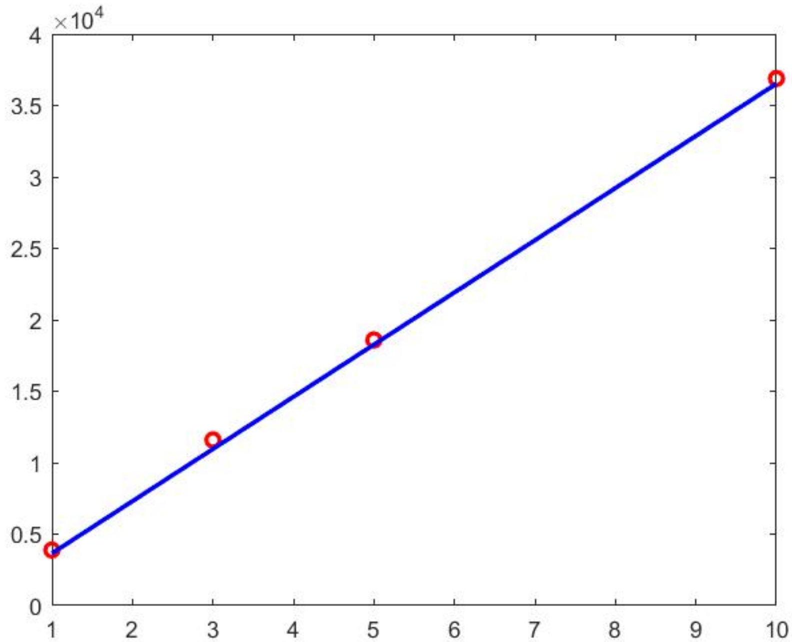
$$y(x) = K\ x \qquad\qquad \text{Donde } K = \alpha + \beta + \gamma$$

Finalmente, para hallar el valor de K haremos uso del método de mínimos cuadrados.

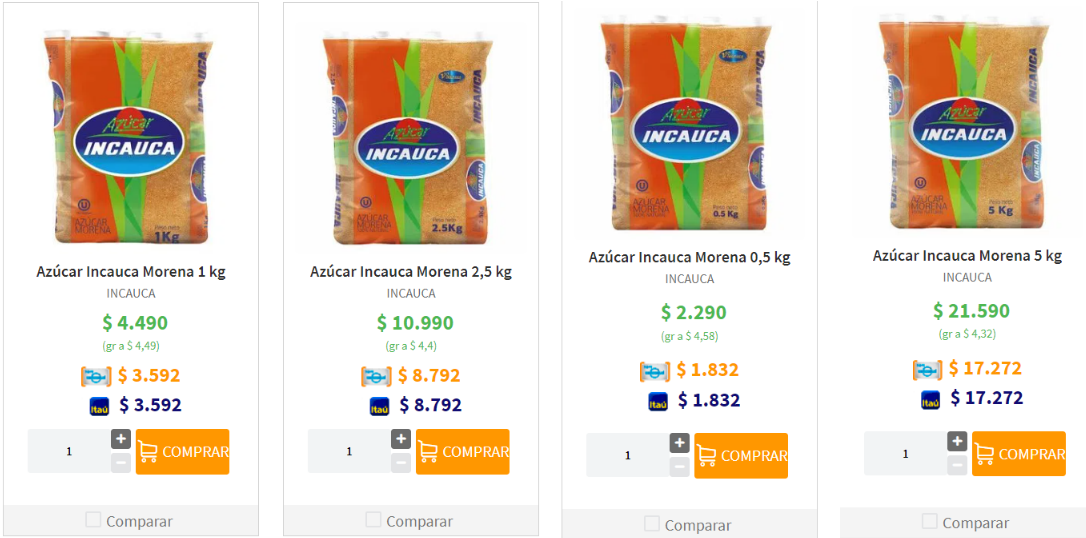
```
Datos=[1 3890;
    3 11590;
    5 18590;
    10 36890;
    ];
```

```
a=Datos(:,1);
b=Datos(:,2);
Al=vander(a);
Al=Al(:,end-1:end);
aa=linspace(1,10,100);

c=inv(Al'*Al)*Al'*b;
y=c(1)*aa;
figure
  plot(a,b,'ro','LineWidth',2)
  hold on
  plot(aa,y,'LineWidth',2,'Color','b')
  hold off
```



Análogamente podemos hacer uso de la siguiente información con otro producto y razonar para obtener un modelo similar:



Kilogramos empacados	Precio total
$0{,}5_{kg}$	\$2290
1_{kg}	\$4490
$2{,}5_{kg}$	\$10990
5_{kg}	\$21590

Cuadro 2: Precio por paquete de azúcar

```
Datos=[0.5 2290;
    1 4490;
    2.5 10990;
    5 21590;
    ];
a=Datos(:,1);
b=Datos(:,2);
Al=vander(a);
Al=Al(:,end-1:end);
aa=linspace(1,10,100);

c=inv(Al'*Al)*Al'*b;
y=c(1)*aa;
figure
  plot(a,b,'ro','LineWidth',2)
  hold on
  plot(aa,y,'LineWidth',2,'Color','b')
  hold off
```

4. Identificación de números manuscritos

Este ejercicio utiliza la base de datos de dígitos manuscritos del MNIST, que contiene un conjunto de entrenamiento de 60.000 números y un conjunto de prueba de 10.000 nmeros. Cada dígito de la base de datos se colocó en una imagen de escala de grises de 28×28 de tal manera que el centro de masa de sus píxeles está en el centro de la imagen. Para cargar la base de datos, descárguela de la página web del curso y escriba load baseMNIST.mat en MATLAB. Escriba whos para ver las variables que contienen los números dígitos de entrenamiento (train0, ..., train9) y dígitos de prueba (prueba0, ..., prueba9). Encontrará dígitos destinados a entrenar un algoritmo para reconocer un 0 manuscrito en la matriz train0, que tiene 5923 filas y 784 columnas. Cada fila corresponde a un cero manuscrito. Para visualizar la primera imagen en esta matriz, escriba

```
digit = train0(1,:);
digitImage = reshape(digit,28,28);
image(rot90(flipud(digitImage),-1)),
colormap(gray(256)), axis square tight off;
```

a) Cree una matriz T de 10 por 784 cuya fila i contenga los valores promedios de píxeles sobre todas las imágenes de entrenamiento del número $i-1$. Por ejemplo, la primera fila de T se puede formar escribiendo T(1,:)=media(train0); . Visualice estos dígitos medios utilizando el comando de subplot como se ve a continuación:

Solución: Generamos la matriz y el respectivo subplot mediante el siguiente script:

```
load baseMNIST.mat
whos;

%Ejercicio 1
T0=[mean(train0)];
T1=[mean(train1)];
T2=[mean(train2)];
T3=[mean(train3)];
T4=[mean(train4)];
T5=[mean(train5)];
T6=[mean(train6)];
T7=[mean(train7)];
T8=[mean(train8)];
T9=[mean(train9)];
T=[T0;T1;T2;T3;T4;T5;T6;T7;T8;T9];

for k=1:10
subplot(1,10,k);
digitImage = reshape(T(k,:),28,28);
image(rot90(flipud(digitImage),-1)),
colormap(gray(256)), axis square tight off;
end
```

b) Una forma sencilla de identificar un dígito de prueba es comparar sus píxeles con los de cada fila de T y determinar cual fila se parece más al dígito de prueba. Establezca d como el primer dígito de ensayo en test0 escribiendo d = doble (test0 (1,:));. Para cada fila $i = 1, ..., 10$, calcule la norma de $T(i,:) - d$, y determine para qué valor de i la norma es la más pequeña; lo que implicaria que d probablemente es el dígito $i - 1$. Pruebe también con los otros dígitos y presente sus resultados.

Incluiremos la rutina usada para calcular estas normas:

```
d = double (test1 (1,:));
for k=1:10
  n(k,1)=norm(T(k,:)-d);
end
m=min(n);
for k=1:10
    if norm(T(k,:)-d)==m
        w=k;
    end
end
w %Devuelve el valor m s probable
[m norm(T(w,:)-d)] %Comprobaci n norma minima
```

Presentamos los resultados para otros test de dígitos evaluados en la misma columna (la primera):

Test	Norma mínima	i obtenido
0	0.00156	1
1	897.925	2
2	0.00204	3
3	0.00223	4
4	0.00153	5
5	0.00205	6
6	0.00199	7
7	0.00122	8
8	0.00185	9
9	0.00166	10

Cuadro 3: Datos

Notemos que en el test 1 obtenemos una norma muy grande, a pesar de esto sigue siendo más probable obtener un "1" como posible resultado. Si evaluamos en otra columna el test 1 obtendremos valores más pequeños para la norma $T(i,:) - d$.