

21 DROITE RÉELLE ET SUITES NUMÉRIQUES 1

21.1 Droite réelle achevée totalement ordonnée

Noti. (Ensembles de nombres)

Les ensembles de nombres usuels sont supposés connus et maîtrisés, ils respectent la chaîne d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

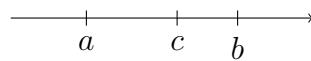
À titre d'exemple, on peut identifier l'appartenance spécifique de certains éléments :

- $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
- $\frac{1}{10} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$;
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (ensemble des irrationnels).

Prop. (Ordre sur \mathbb{R})

La relation d'ordre \leq sur la droite réelle \mathbb{R} possède les propriétés fondamentales suivantes :

1. L'ordre est *total* : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $a \leq b$ ou $b \leq a$. Plus précisément, pour tout couple de réels, une et une seule des trois situations suivantes est réalisée : $a = b$, $a < b$ ou $a > b$.
2. L'ensemble \mathbb{Q} est *dense* dans \mathbb{R} : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, il existe au moins un nombre rationnel $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$.



Prop. (Rangement d'une suite finie)

Toute suite finie (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de la droite réelle peut être rangée par ordre croissant (respectivement décroissant). Il existe une unique suite (y_1, y_2, \dots, y_n) qui soit croissante (respectivement décroissante) et qui partage les mêmes éléments que la suite initiale, en tenant compte de leurs occurrences respectives.

Noti. (Droite réelle achevée)

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite réelle achevée. La relation d'ordre \leq y est étendue de sorte que :

- $-\infty \leq +\infty$ et $-\infty \neq +\infty$;
- $-\infty$ et $+\infty$ n'appartiennent pas à \mathbb{R} ;
- $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$.

Défi. (Distance et valeur absolue)

On appelle *distance* entre deux réels a et b le réel positif noté $|a - b|$, défini par :

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a - b \geq 0 \\ b - a & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut également écrire cette relation sous la forme : $|a - b| = \max(a, b) - \min(a, b)$.

21.2 Majorants, minorants et bornes

Défi. (Majorant et minorant d'une partie)

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

- On dit qu'un réel M est un *majorant* de A si : $\forall a \in A, a \leq M$.
- On dit qu'un réel m est un *minorant* de A si : $\forall a \in A, a \geq m$.

$$\frac{M}{A}$$

Défi. (Majorant et minorant d'une fonction)

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Un réel M est un *majorant* de f s'il est un majorant de l'ensemble de ses valeurs $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$. Autrement dit :

$$\forall x \in E, f(x) \leq M.$$

De même, un réel m est un *minorant* de f si : $\forall x \in E, f(x) \geq m$.

Prop. (Stabilité de la majoration)

Si M est un majorant d'une partie A , alors tout réel $M' \geq M$ est également un majorant de A . Cette propriété est analogue pour les minorants.

Défi. (Maximum et minimum)

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . On dit qu'un réel a^+ est le *maximum* de A si :

$$\begin{cases} \forall a \in A, a \leq a^+ \\ a^+ \in A. \end{cases}$$

L'unicité du maximum est garantie par l'antisymétrie de la relation d'ordre. On définit de manière analogue le *minimum* d'une partie.

Pour une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, on définit son maximum comme le maximum de l'ensemble de ses valeurs. Il est noté :

$$\max A, \quad \max\{f(x) : x \in I\}, \quad \max_{x \in I} f(x), \quad \max_I f \quad \text{ou} \quad \max f.$$

Défi. (Borne supérieure)

On dit qu'un réel M^* est la *borne supérieure* d'une partie non vide A de \mathbb{R} si M^* est le plus petit des majorants de A . Cela se traduit par :

- $\forall a \in A, a \leq M^*$ (M^* est un majorant) ;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, (\forall a \in A, a \leq \mu) \implies \mu \geq M^*$ (c'est le plus petit).