22 AL 2 : Calcul matriciel : opérations avec les matrices

22.1 Combinaisons linéaires

Défi.
On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute fonction de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.

Voca.
Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, l'image par la matrice M du couple (i,j) est appelée *coefficient* d'indice (ou de position) (i,j) de la matrice M ; il est noté de l'une de ces façons :

$$M_{i,j}\ ;\qquad (M)_{i,j}\ ;\qquad [M]_{i,j}.$$

Repr.

$$M=\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \cdots & M_{1,p}\\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & \cdots & M_{2,p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ M_{n,1} & M_{n,2} & M_{n,3} & \cdots & M_{n,p}\end{bmatrix}$$

On peut aussi employer des parenthèses.

Défi.
On appelle *taille* ou *format* d'une matrice l'unique couple (n,p) où n désigne le nombre de ses lignes et p le nombre de ses colonnes.

Exem.
La matrice $\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$ est de taille, ou de format $(3,1)$; elle est un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

Défi.
On parle de *matrice ligne* ou simplement de *ligne* lorsque la matrice ne comporte qu'une seule ligne. On adapte pour les colonnes.

Défi. (Somme d'un couple de matrices de <u>même taille</u>)
On considère un couple (A,B) de matrices de même taille $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle *matrice somme* de (A,B), qu'on note $A+B$, l'unique matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\quad (A+B)_{i,j}=(A)_{i,j}+(B)_{i,j}.$$

Exem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 1 & 11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Défi. (Produit par un scalaire)
Le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'unique matrice $\lambda \cdot A$ ou $A \cdot \lambda$, définie comme suit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda (A)_{i,j} = (A)_{i,j} \lambda = (A \cdot \lambda)_{i,j}.$$

Exem.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Nota.
On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tout coefficient est égal à 0.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (0_{n,p})_{i,j} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Noti.
Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on calcule avec l'addition interne « + » et la multiplication par les nombres « . » comme on calcule dans notre espace naturel $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$. On dit que l'ensemble structuré $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un *espace vectoriel* sur $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Prop. (Règles de calcul dans $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$)
1. L'addition entre les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
   a. est associative :
   $$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (A+B)+C = A+(B+C) \ ;$$
   b. admet la matrice nulle $0_{n,p}$ pour unique élément neutre :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A + 0_{n,p} = A = 0_{n,p} + A \ ;$$
   c. admet pour toute matrice A un unique opposé noté $-A$:
   $$-A + A = 0_{n,p} = A + (-A) \ ;$$
   d. est commutative :
   $$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A + B = B + A.$$
2. La multiplication des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par les nombres :
   a. est distributive sur l'addition entre les nombres :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \ ;$$
   b. est distributive sur l'addition entre les matrices :
   $$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \ ;$$
   c. est compatible avec la multiplication entre les nombres :
   $$\begin{cases} \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad 1 \cdot A = A \\ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A \end{cases}.$$

Rema.
Si $(M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(\ell)})$ est une liste de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors on définit sa somme

$$\sum_{k=1}^{\ell} M^{(k)} = M^{(1)} + M^{(2)} + \cdots + M^{(\ell)}$$

comme pour les nombres et les vecteurs.

Défi. (Symbole de Kronecker)
Étant donné un couple (a, b) d'éléments d'un ensemble E, on pose

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b \\ 1 & \text{si } a = b \end{cases}.$$

Exem.
$\delta_{2,3} = 0$; $\quad \delta_{2,3-1} = 1$.

Défi. (Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
On considère $(a, b) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. On appelle *matrice élémentaire* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de position (a, b), qu'on note $E_{a,b}$, la matrice définie comme suit :

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad (E_{a,b})_{i,j} &= \delta_{(a,b),(i,j)} \\ &= \delta_{a,i}\, \delta_{b,j} \\ &= \delta_{i,a}\, \delta_{b,j} \end{aligned}$$

C'est que tous ses coefficients sont égaux à 0 sauf celui de position (a, b) qui est égal à 1.

Exem.
Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{1,2}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{2,2}.$$

Cependant, dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, $\quad E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rema.
$E_{a,b} = [\delta_{i,a}\, \delta_{j,b} : (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]] = [\delta_{i,a}\, \delta_{j,b}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Intr.
Soit $a, b \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + 0 \\ 0 + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a\times 1 \\ a\times 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\times 0 \\ b\times 1 \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= aE_{1,1} + bE_{2,1}.
\end{aligned}
$$

Cette décomposition dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ se généralise à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme ci-après.

Prop. (Décomposition linéaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ainsi, la famille de $((M)_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ de np éléments éléments de $\mathbb{K}$ est la seule telle que

$$M = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} (M)_{i,j}E_{i,j}.$$

Rema.
On dit que la famille de np matrices $(E_{a,b})_{\substack{1\leq a\leq n\\1\leq b\leq p}}$ est une base (de décomposition linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ des éléments) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est la *base canonique* de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Rema.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = a_{1,1}E_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + a_{2,1}E_{2,1} + a_{2,2}E_{2,2}.$$

22.2 Produit

Défi. (Produit d'un couple de matrices de tailles adéquates)
On considère un couple (A, B) de matrices avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (le nb de col. de la première, « sa largeur », est égal au nombre de lignes de la seconde, « sa hauteur »). On appelle *matrice produit* de (A, B) qu'on note $A \times B$, l'unique matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A\times B)_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}(B)_{j,k}.$$

Exem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 & 68 \\ 32 & 77 & 122 & 167 \end{pmatrix}$$

Prop. (Pseudo-associativité du produit matriciel)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Ainsi,

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{dans } \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})).$$