

12. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 2 : LE PLAN

12.1. Déterminant dans une base orthonormée directe

Noti.

On considère un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé direct (r.o.n.d.) $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Pour tout couple de vecteurs non nuls (\vec{u}, \vec{v}) de \mathcal{P} , la notation (\vec{u}, \vec{v}) désigne aussi une des mesures de l'angle orienté qui porte de la demi-droite $[O, \vec{u}]$ à la demi-droite $[O, \vec{v}]$. Ces mesures sont égales modulo 2π .

Prop.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de \mathcal{P} :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \underset{2\pi}{=} (\vec{u}, \vec{w});$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{2\pi}{=} -(\vec{v}, \vec{u}).$$

Défi. (Déterminant d'un couple de vecteurs)

Dans un plan orienté muni d'une base orthonormée directe, on appelle *déterminant* du couple (\vec{u}, \vec{v}) l'unique réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

Prop.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où K est le projeté orthogonal de C sur la perpendiculaire à (AB) en A .

Prop.

Ci-avant, la valeur absolue du $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ est égale à l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Prop.

Le déterminant est :

1. bilinéaire :

a. pour tout vecteur \vec{u} ,

$$\forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$$

b. pour tout vecteur \vec{v} ,

$$\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v});$$

2. antisymétrique :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

Prop.

Soit \mathcal{P} un plan muni d'une b.o.n.d. Soient deux vecteurs $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Prop.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

12.2. Droites du plan

Défi.

Dans un plan \mathcal{P} , on considère un point A et un vecteur non nul \vec{v} . L'unique droite passant par A et dirigée par \vec{v} est l'ensemble des points M tels que :

$$A\vec{M} \in \mathbb{R}\vec{v} \quad \text{où} \quad \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Prop.

Soit \mathcal{D} une droite du plan muni d'un r.o.n.d. Ainsi :

1. Il existe au moins un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la droite \mathcal{D} admette pour équation :

$$ax + by = c$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On parle d'équation cartésienne.

2. Réciproquement, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, la partie du plan dont une équation est $ax + by = c$ est une droite, laquelle est dirigée par le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Prop. (Paramétrisation)

Soit \mathcal{D} une droite du plan.

1. On peut trouver au moins un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

2. Réciproquement, étant donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, l'ensemble

$$\left\{ M \begin{pmatrix} x_0 + t\alpha \\ y_0 + t\beta \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

est la droite passant par $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Méth. (Passage d'une équation à une paramétrisation)

Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère le sous-ensemble d'équation :

$$4x - 12y = -3.$$

C'est une droite \mathcal{D} car $(4, -12) \neq (0, 0)$. Donnons-en une paramétrisation.

1. Les choix $y = 0$ puis $x = -3/4$ montrent que le point $A \begin{pmatrix} -3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à \mathcal{D} .
2. Le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -(-12) \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige la droite \mathcal{D} .

3. Enfin, \mathcal{D} admet pour paramétrisation :

$$\begin{cases} x = -3/4 + 12t \\ y = 0 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Méth. (Passage d'une paramétrisation à une équation)

Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère la droite définie par :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Voie 1 : Soit $M(x, y)$. $M \in \mathcal{D} \iff \vec{AM}$ colinéaire à $\vec{v}(-5, 3)$, avec $A(\sqrt{2}, 8)$.

$$\det(A\vec{M}, \vec{v}) = 0 \iff 3(x - \sqrt{2}) - (-5)(y - 8) = 0.$$

On développe et réduit pour obtenir : $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

Voie 2 : Le vecteur $\vec{v}(-5, 3)$ dirige la droite. Une équation est de la forme $3x + 5y = c$. Comme $A(\sqrt{2}, 8) \in \mathcal{D}$, on a $c = 3\sqrt{2} + 40$. D'où une équation : $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

Méth. (Intersection de deux droites)

Soient deux droites définies par :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : 4x + 6y = -3.$$

Soit $M(x, y)$. On cherche $M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ en injectant les expressions paramétriques de \mathcal{D}_1 dans l'équation cartésienne de \mathcal{D}_2 :

$$4(-1 + 2t) + 6(2 + 3t) = -3.$$

La résolution de cette équation d'inconnue t donne $t = -11/26$. En reportant cette valeur dans le système paramétrique, on obtient les coordonnées du point d'intersection :

$$M_0 \left(-\frac{24}{13}; \frac{19}{26} \right).$$

Défi. (Projeté orthogonal sur une droite)

On considère une droite \mathcal{D} d'un plan, puis un point M quelconque du même plan. On appelle *projeté orthogonal* de M sur \mathcal{D} l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à \mathcal{D} qui passe par M .

Méth. (Coordonnées d'un projeté orthogonal)

Soit la droite \mathcal{D} d'équation $4x + 6y = -3$ et le point $M(-3, 2)$. Cherchons le projeté orthogonal $M'(-3', 2')$ de M sur \mathcal{D} .

- $M' \in \mathcal{D}$;
- $\vec{M}M' \perp \vec{u}(-6, 4)$ où $\vec{u}(-6, 4)$ dirige \mathcal{D} .

La condition d'orthogonalité $\vec{MM'} \cdot \vec{u} = 0$ et l'appartenance à la droite mènent au système :

$$\begin{cases} -6x' + 4y' = 26 \\ 4x' + 6y' = -3 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne les coordonnées de M' .

Défi. (Distance à une droite)

On considère un point M du plan et une droite \mathcal{D} . On dit qu'un réel positif d est égal à la distance du point M à la droite \mathcal{D} lorsque d est la plus petite des distances entre M et les points de \mathcal{D} :

- $\exists P \in \mathcal{D}, MP = d$;
- $\forall P \in \mathcal{D}, MP \geq d$.

On peut noter $\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}$.

Prop.

Si H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} , alors :

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = MH.$$

Défi. (Vecteur normal)

Un vecteur \vec{n} est dit *normal* à une droite \mathcal{D} s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de \mathcal{D} .

Prop. (Distance à l'aide d'un vecteur normal)

Soit \vec{n} un vecteur normal de \mathcal{D} . Pour tout point $A \in \mathcal{D}$ et tout point $M \in \mathcal{P}$:

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Prop. (Vecteur normal et équation cartésienne)

Si \mathcal{D} admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, alors le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{D} .

Form.

Si \mathcal{D} admet pour équation $ax + by + c = 0$, alors pour tout $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

12.3. Cercles du plan

Défi.

Dans un plan \mathcal{P} , on appelle cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble :

$$\mathcal{C}(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M = r\}.$$

Rema.

- Le rayon du cercle est un nombre, tandis que les « rayons » désignent aussi les segments $[\Omega M]$.
- L'unique cercle de centre O passant par A est $\mathcal{C}(O, OA)$.
- L'unique cercle de diamètre $[AB]$ est $\mathcal{C}\left(I, \frac{AB}{2}\right)$ où I est le milieu de $[AB]$.

Prop. (Équation cartésienne)

1. Dans un r.o.n.d., le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ a pour équation :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2.$$

2. Réciproquement, pour l'ensemble d'équation $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + ax + by = c$, si $A \neq C$ ou si $B \neq 0$, ce n'est pas un cercle.

Méth. (Vérification d'une équation de cercle)

Question : Est-ce que l'ensemble $(\Gamma) : 2x^2 + 2y^2 + 3x - 6y - 2 = 0$ est un cercle ?

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On normalise l'équation en divisant par 2 :

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - 3y - 1 = 0.$$

On reconnaît le début d'identités remarquables (mise sous forme canonique) :

- $x^2 + \frac{3}{2}x = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$;
- $y^2 - 3y = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

L'équation devient :

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0.$$

En isolant les carrés, on obtient :

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = K$$

avec $K = \frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+36+16}{16} = \frac{61}{16}$.

Conclusion : Comme $K > 0$, l'ensemble (Γ) est bien un cercle de centre $\Omega(-3/4; 3/2)$ et de rayon $R = \sqrt{K} = \frac{\sqrt{61}}{4}$.

Prop. (Paramétrisation d'un cercle)

Le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ admet pour paramétrisation :

$$\begin{cases} x = x_\Omega + r \cos(\theta) \\ y = y_\Omega + r \sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$