17 Fondements 6 : fonction et inversibilité

17.1 Surjectivité

Dans toute la suite, E et F désignent deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Défi.
On dit que la fonction f est *surjective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au moins un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de $b \in F$, on peut trouver au moins un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f.

$$\forall b \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = b.$$

Rema.
Dire que f est surjective revient à dire que $f(E) = F$.

Prop.
La composée de deux fonctions surjectives est elle-même une fonction surjective : étant donné trois ensembles E, F et G, puis deux fonctions $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$ est surjective.

Défi.
On dit qu'une fonction $e \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse à droite* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque

$$\forall b \in F, \quad f(e(b)) = b.$$

C'est que $f \circ e = \mathrm{id}_F$.
On dit alors que f est *inversible à droite* lorsqu'elle admet un inverse à droite.

Exem.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Alors les deux fonctions $e_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto \sqrt{y}$ et $e_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto -\sqrt{y}$ sont deux inverses à droite de f.

Prop.
Une fonction est inversible à droite si et seulement si elle est surjective.

Méth. (Vérifier si une fonction est surjective)
Pour étudier la surjectivité de $f\colon E \to F$, on s'intéresse à l'équation $y = f(x)$, où $y \in F$ est un paramètre et $x \in E$ est l'inconnue.

- Pour montrer que f est surjective : on fixe un $y \in F$ quelconque et on montre que l'équation $f(x) = y$ admet toujours au moins une solution $x \in E$ (on cherche à exprimer x en fonction de y, ou à prouver son existence).
- Pour montrer que f n'est pas surjective : on cherche un contre-exemple. Il suffit d'exhiber

une valeur particulière $y_0 \in F$ qui n'admet aucun antécédent dans E (l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution).

17.2 Injectivité

Défi.
On dit que la fonction f est *injective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au plus un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de $b \in F$, on peut trouver au plus un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f.

$$\forall b \in F, \quad \forall x_1, x_2 \in E, \quad (f(x_1) = b \wedge f(x_2) = b) \implies x_1 = x_2.$$

$$\text{i.e.} \qquad \forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Prop.
La composée de deux fonctions injectives est une fonction injective.

Défi.
On dit qu'une fonction $g \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse à gauche* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque

$$\forall x \in E, \quad g(f(x)) = x.$$

Rema.
C'est que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Rema.
Si g est un inverse à gauche de f, alors pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ admet au plus $g(b)$ pour solution.

Prop.
Toute fonction est inversible à gauche si, et seulement si elle est injective.

Méth. (Vérifier si une fonction est injective)
Soit $f\colon \mathbb{R} \to]1, +\infty[, \ x \mapsto e^{-x} + 1$. Cette fonction est-elle injective ?
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, puis $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &\iff e^{-x} + 1 = e^{-x_0} + 1 \\ &\iff e^{-x} = e^{-x_0} \\ &\iff -x = -x_0 \\ &\iff x = x_0. \end{aligned}$$

Elle est donc injective !
(Sinon, il aurait suffit de trouver deux réels distincts ne donnant pas la même image par f.)

17.3 Bijectivité

Défi.
On dit que la fonction f est *bijective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'exactement un élément du départ : quel que soit le choix de $b \in F$, il existe exactement un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f.

$$\forall b \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = b.$$

Rema.
1. Une fonction bijective est une fonction à la fois surjective et injective.
2. Une fonction $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est bijective lorsqu'elle établit une correspondance un à un entre les éléments de E d'un côté et les éléments de F de l'autre côté.

Défi.
On considère une fonction bijective $f : E \to F$. On appelle *fonction réciproque* de f, qu'on note f^{-1}, l'unique fonction de F dans E qui à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f : pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément de E dont l'image par f est égale à y.

Prop.
La composée de deux fonctions bijectives est bijective.

Défi.
On dit que $h \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque quel que soit le choix de $b \in F$ et $x \in E$, $f(h(b)) = b$ et $x = h(f(x))$.
C'est que $f \circ h = \mathrm{id}_F$ et $\mathrm{id}_E = h \circ f$.

Défi.
On dit que f est *inversible* pour dire que f admet un inverse.

Prop. (Unicité)
Toute fonction admet au plus un inverse.

Nota.
Si f est inversible, son inverse est notée f^{-1}.

Rema.
Dire que $f \in \mathcal{F}(E, F)$ admet f^{-1} pour inverse signifie que pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ admet exactement $f^{-1}(b)$ pour solution.

Prop.
Toute fonction est inversible si, et seulement si elle est bijective.

Méth. (Vérifier si une fonction est bijective en exprimant sa réciproque le cas échéant)
Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\},\ x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.
Que soit donné $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ quelconque fixé.
Est-ce que l'équation $f(x) = b$ d'inconnue x variant dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, admet exactement une solution ?

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ quelconque. On a

$$\begin{aligned} & f(x) = b \\ \iff & 2x + 1 = b(x-1) \\ \iff & (2-b)x = -b-1 \\ \iff & x = \frac{-b-1}{2-b} \quad (\text{car } 2-b \neq 0). \end{aligned}$$

La fonction f est bijective et sa réciproque est la fonction

$$f^{-1} \colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\},\ b \mapsto \frac{-b-1}{2-b} = \frac{b+1}{b-2}.$$