

5 Oscillateurs libres et forcés

1 OSCILLATEURS HARMONIQUES

Notions

- Un oscillateur harmonique à un degré de liberté est un système physique dont l'évolution au cours du temps, en l'absence d'amortissement et d'excitation, est régie par l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_{eq}; \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_{eq}.$$

- ω_0 : pulsation propre de l'oscillateur harmonique.
- X_{eq} : position finale d'équilibre qu'atteindrait le système en présence d'amortissement.

- Avec un changement de variable adapté $X = x - X_{eq}$, il est toujours possible de se ramener à une équation homogène : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$.

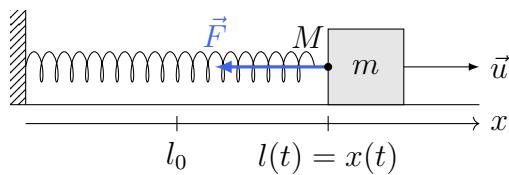
Système masse-ressort horizontal

Système

- On considère une masse m ramenée à son centre d'inertie, accrochée à un ressort et posée sur un support plan horizontal. Le ressort est idéal et le mouvement se fait sans frottement.
- Le ressort est caractérisé par sa longueur à vide l_0 et sa raideur k (en $N \cdot m^{-1}$). Ainsi, lorsque qu'il est déformé par une extrémité M , il exerce une force de rappel donnée par

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u} = -k\Delta l\vec{u},$$

avec \vec{u} le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur.



- Le système subit trois forces : le poids \vec{P} , la réaction normale \vec{R} et la force de rappel \vec{F} .
- À l'équilibre, le PFS donne $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, puis, en projetant sur \vec{e}_x , $-k(l - l_0) = 0$ d'où $X_{eq} = l_0$.

Mise en équation

- Le PFD appliqué à la masse en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen donne

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

- Il vient alors $m\ddot{x} = -k(x - l_0)$, i.e.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0.$$

- Par identification avec la forme canonique,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad X_{eq} = l_0.$$

Résolution de l'équation différentielle

- Solution homogène de $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$:

$$f_1(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

On préférera la première forme lorsque l'une des deux conditions initiales est nulle.

- Solution particulière (constante) de l'équation complète : $f_2(t) = X_{eq} = l_0$.
- Solution générale : $x(t) = f_1(t) + f_2(t)$.
- Les constantes se déterminent grâce aux conditions initiales. Par exemple, si on lâche la masse sans vitesse initiale ($v_0 = 0$) depuis la position X_0 ,

$$x(t) = (X_0 - l_0) \cos(\omega_0 t) + l_0.$$

Approche énergétique

- L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et potentielle :

$$E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2.$$

- Pour un système conservatif, l'énergie mécanique est constante (TEM) :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0.$$

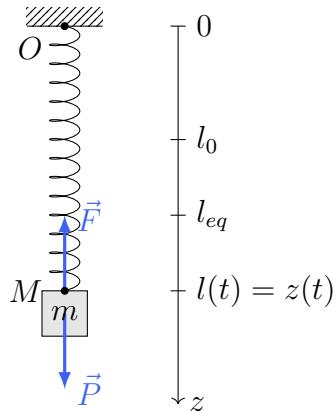
- Dérivons l'expression de l'énergie :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 \right) = m\dot{x}\ddot{x} + k(x - l_0)\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + k(x - l_0)) = 0.$$

En supposant $\dot{x} \neq 0$, on retrouve l'équation différentielle : $m\ddot{x} + kx = kl_0$.

Oscillateur harmonique vertical

- Considérons une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide l_0 . On se munit d'un axe vertical descendant $O\vec{e}_z$.



- Le bilan des forces révèle le poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$ et la force de rappel $\vec{F} = -k(l(t) - l_0)\vec{e}_z$.
- À l'équilibre, la masse est immobile. Ainsi, $mg - k(l_{eq} - l_0) = 0$ d'où

$$Z_{eq} = l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

- Le PFD donne $m\ddot{z} = mg - k(z - l_0)$ i.e.

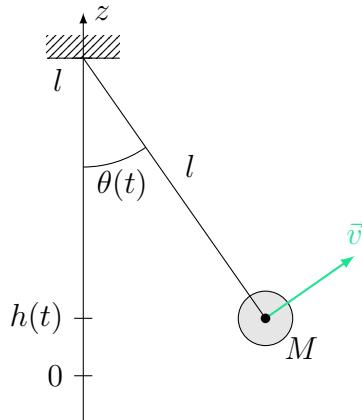
$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m} \left(l_0 + \frac{mg}{k} \right).$$

On identifie la forme canonique $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 Z_{eq}$ avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

Pendule simple

- On considère une masse m accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur l . La position angulaire de la masse est repérée par l'angle orienté $\theta(t)$ que fait le fil avec la verticale. On choisit un axe vertical ascendant pour repérer l'altitude $h(t)$ de la masse.



- On étudie ici une approche énergétique bien qu'un raisonnement dynamique (anologue aux précédents) aboutisse au même résultat.
- On a $E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$. En utilisant les relations $v = l\dot{\theta}$ et $h = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta)$, on obtient

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta).$$

- Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à ce système conservatif permet d'écrire $\frac{dE_m}{dt} = 0$. En utilisant la formule de dérivation $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u'$, on obtient

$$\frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0 ;$$

d'où, après division par $ml^2\dot{\theta}$, vient l'équation différentielle non linéaire que voici :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

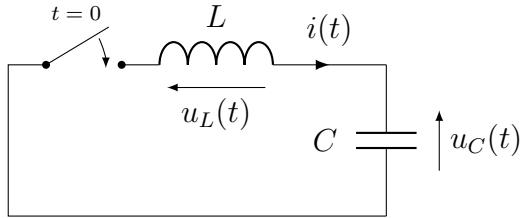
- Pour de faibles amplitudes angulaires, on peut approximer $\sin\theta \approx \theta$. On obtient alors l'équation différentielle du second ordre homogène

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

que l'on peut identifier à la forme canonique $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ en définissant la pulsation propre qui vient.

Oscillateur harmonique électrique LC

- On étudie un circuit composé d'un condensateur de capacité C (initialement chargé sous la tension E) et d'une bobine d'inductance L idéale, que l'on relie à l'instant initial $t = 0$.



- La loi des mailles permet d'écrire $u_C(t) + u_L(t) = 0$. En utilisant la loi fondamentale de l'inductance $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ et en y reportant la loi fondamentale du condensateur $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$, on aboutit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0.$$

On reconnaît une équation différentielle harmonique homogène dont la pulsation propre des oscillations est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

- Les conditions initiales imposent la continuité de l'énergie emmagasinée dans les composants, ce qui se traduit par $u_C(0) = E$ et $i(0) = 0$, soit $\dot{u}_C(0) = 0$. La solution s'écrit sous la forme $u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. La première condition évaluée à $t = 0$ fixe la valeur de $A = E$. Après avoir calculé la dérivée $\dot{u}_C(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$, la seconde condition évaluée à $t = 0$ donne $B\omega_0 = 0$, ce qui impose $B = 0$. C'est que

$$u_C(t) = E \cos(\omega_0 t); \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

- À tout instant, l'énergie totale de l'oscillateur est la somme de l'énergie stockée dans le condensateur et de celle emmagasinée dans la bobine :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2.$$

En réutilisant les expressions temporelles trouvées précédemment et la relation $LC\omega_0^2 = 1$, on montre aisément

$$E_{tot} = \frac{1}{2}CE^2.$$

L'énergie totale du circuit est bien constante au cours du temps.

2 OSCILLATEURS AMORTIS

Équations différentielles de l'oscillateur amorti

- Le modèle de l'oscillateur amorti prend en considération les pertes d'énergie liées à des frottements. Il peut se mettre sous les différentes formes suivantes dans lesquelles on retrouve la pulsation propre ω_0 et un second paramètre (positif) variant selon la forme employée :

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 F_\infty$$

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 F_\infty$$

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 F_\infty$$

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 F_\infty$$

Le facteur de qualité Q est élevé si le système présente peu de frottements. On retrouve l'oscillateur harmonique si Q tend vers l'infini.

Un système avec peu de frottement possède un temps caractéristique τ de la durée du régime transitoire qui tend vers l'infini. Le temps τ diminue lorsque les frottements augmentent.

- On passe aisément d'une forme à l'autre grâce aux relations que voici :

$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{\omega_0 \cdot \tau}{2} ; \quad m = \frac{1}{2Q} ; \quad \lambda = m \cdot \omega_0 ; \quad \tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}.$$

Méthode pour résoudre l'équation différentielle amortie

- La solution homogène de l'équation différentielle dépend de l'amortissement du système. Pour la choisir, on commence par calculer le facteur de qualité Q qui permet de choisir entre les trois régimes suivants.
- Régime pseudo-périodique si $Q > 1/2$: L'amortissement est faible. La solution homogène est :

$$f_1(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_p t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

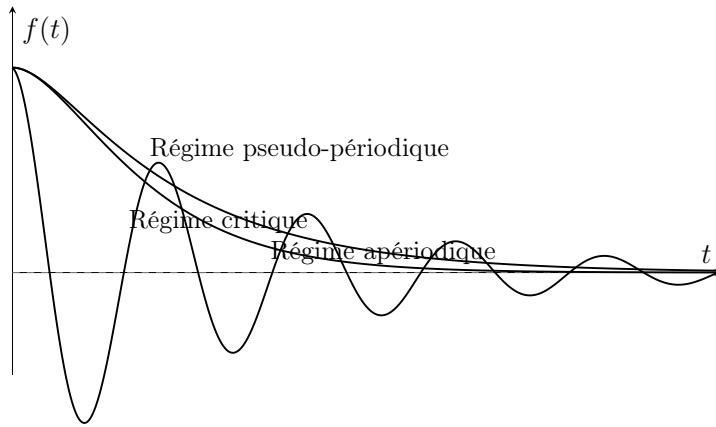
- Régime critique si $Q = 1/2$: La solution homogène est :

$$f_1(t) = (At + B)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Régime apériodique si $Q < 1/2$: L'amortissement est fort. La solution homogène est la somme de deux exponentielles réelles :

$$f_1(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

- On donne ensuite l'expression de la solution particulière de l'équation avec second membre. Ce dernier étant constant, on choisira toujours la valeur finale comme solution particulière $f_2(t) = F_\infty$.
- On en déduit la solution générale comme la somme des deux précédentes solutions. On utilise enfin les deux conditions initiales du problème pour en déduire les constantes d'intégration.



Décrément logarithmique

- Pour une variable évoluant en régime pseudo-périodique, on définit le décrément logarithmique, grandeur qui permet de quantifier l'énergie perdue à chaque oscillation, par la relation :

$$\delta = \ln \left(\frac{f(t) - F_\infty}{f(t + T_p) - F_\infty} \right)$$

- En utilisant l'expression de la solution du régime pseudo-périodique, on montre que le décrément logarithmique est relié au facteur de qualité par la relation :

$$\delta = \frac{T_p}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

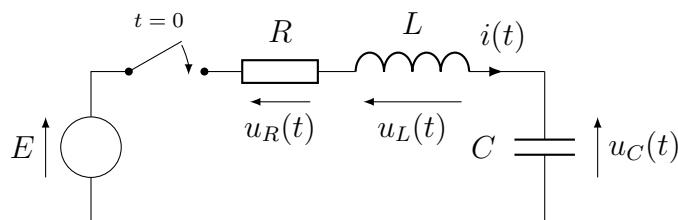
- Lorsque le facteur de qualité est élevé, cette formule se simplifie et devient :

$$\delta \approx \frac{\pi}{Q}$$

La mesure graphique du décrément logarithmique permet ainsi d'estimer aisément la valeur du facteur de qualité.

Oscillateur électrique RLC série

- On considère un circuit RLC série pour lequel le condensateur est initialement déchargé. On ferme l'interrupteur à l'instant initial sur un générateur de tension continue E .



- La tension $u_C(t)$ vérifie une équation différentielle du second ordre. La loi des mailles fournit $E - u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) = 0$.
- L'utilisation de la loi d'Ohm et de la loi fondamentale de l'inductance permet d'écrire :

$$E - L \frac{di(t)}{dt} - Ri(t) - u_C(t) = 0$$

- La loi fondamentale du condensateur permet ensuite d'obtenir l'équation régissant la tension :

$$LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E$$

- Après division par LC , on identifie la forme canonique :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{E}{LC}$$

On en déduit l'expression de la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et du facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Oscillateur mécanique amorti vertical

- On étudie le même système masse-ressort vertical que précédemment, mais en ajoutant une force de frottement fluide de l'air sur la masse $\vec{f} = -\alpha\vec{v}(t)$, avec α le coefficient de frottement.
- La position d'équilibre est identique à celle de l'oscillateur harmonique vertical : $Z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$.
- La seconde loi de Newton projetée sur l'axe vertical fournit la relation :

$$m\ddot{z} = mg - k(z - l_0) - \alpha\dot{z}$$

- En remplaçant les termes, on obtient l'équation différentielle du mouvement amorti :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

- Par identification avec la forme canonique, on en déduit la pulsation propre des oscillations $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$.

Étude énergétique de l'oscillateur amorti

- Diminution de l'énergie mécanique du système amorti masse-ressort horizontal. L'énergie mécanique s'écrit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - X_{eq})^2$. Il est aisément de calculer sa dérivée par rapport au temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + k(x - X_{eq}))$$

En utilisant l'équation différentielle du mouvement $m\ddot{x} + k(x - X_{eq}) = -\alpha\dot{x}$, on a alors :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\alpha\dot{x}^2 < 0$$

L'énergie mécanique de l'oscillateur amorti décroît au cours du temps.

- Diminution de l'énergie du système électrique RLC en régime libre. L'énergie totale de cet oscillateur est la somme de l'énergie électrostatique stockée dans le condensateur et de l'énergie magnétique stockée dans l'inductance : $E_{tot} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2$. On peut calculer sa dérivée :

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = Li\frac{di}{dt} + Cu_C\frac{du_C}{dt} = i\left(L\frac{di}{dt} + u_C\right)$$

En utilisant la loi des mailles en régime libre $L\frac{di}{dt} + u_C = -Ri$, on a alors :

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = -Ri^2 < 0$$

L'énergie électrique de l'oscillateur amorti décroît au cours du temps. La puissance perdue correspond à l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.

3 SYSTÈMES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

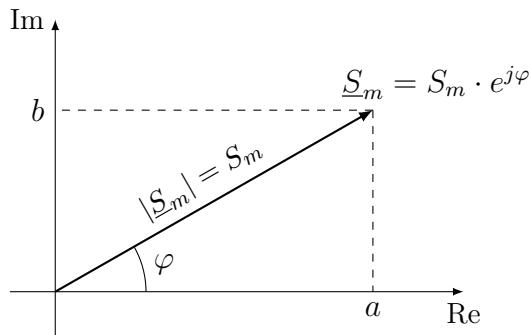
Représentation complexe

- En sciences physiques, il est d'usage d'écrire j au lieu de i et par convention, les grandeurs complexes sont toujours soulignées.
- On associe à $s(t) = S_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ la grandeur complexe

$$\underline{s}(t) = S_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S}_m \cdot e^{j\omega t}$$

avec l'amplitude complexe $\underline{S}_m = S_m \cdot e^{j\varphi}$. On identifie ainsi $|\underline{S}_m| = S_m$ et $\text{Arg}(\underline{S}_m) = \varphi$.

- Il est possible de représenter l'amplitude complexe \underline{S}_m associée à la grandeur sinusoïdale $s(t)$ dans le plan complexe :



- Le passage de la forme polaire $(S_m e^{j\varphi})$ à la forme cartésienne $(a+jb)$ se fait par $a = S_m \cos \varphi$ et $b = S_m \sin \varphi$. Inversement, $S_m = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \arctan(b/a)$ si $a > 0$; (sinon (rare) $\varphi = \arctan(b/a) + \pi$).
- La grandeur complexe associée à la somme de deux signaux sinusoïdaux est la somme de leurs grandeurs complexes associées, ce qui permet de traiter simplement les combinaisons linéaires de fonctions sinusoïdales (avec des signaux de même pulsation).

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \iff \underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t) = (\underline{S}_{1m} + \underline{S}_{2m}) e^{j\omega t} = \underline{S}_m e^{j\omega t}.$$

- Pour dériver une grandeur complexe, il suffit de la multiplier par $j\omega$:

$$\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d\underline{S}_m}{dt} = j\omega \cdot \underline{S}_m.$$

L'intégration correspond à une division par $j\omega$:

$$\int \underline{s}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \int \underline{S}_m dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{S}_m.$$

Impédance complexe

- L'impédance Z d'un dipôle, exprimée en ohms (Ω), relie l'amplitude du courant traversant le dipôle à la tension présente à ses bornes :

$$U = ZI, \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}.$$

- On définit le déphasage entre u et i comme étant la différence $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

- On appelle impédance complexe d'un dipôle la grandeur

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_{eff}}{\underline{I}_{eff}} = \frac{\underline{U}_m e^{j\varphi_u}}{\underline{I}_m e^{j\varphi_i}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

On a donc $Z = |\underline{Z}|$ et $\varphi = \text{Arg}(\underline{Z})$.

- On définit également l'admittance complexe \underline{Y} (S ou Ω^{-1}) comme l'inverse de l'impédance : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I}{U}$.
- Impédances des dipôles élémentaires :

Dipôle	Impédance	Déphasage
Résistance	$\underline{Z}_R = R$	0
Inductance	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$+\frac{\pi}{2}$
Condensateur	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

- Associations :
 - Série : l'impédance complexe équivalente est la somme des impédances. $\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}_i$.
 - Parallèle : l'impédance complexe équivalente vérifie $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_i} = \sum \underline{Y}_i$.
- Toutes les méthodes utilisées pour la résolution des circuits en continu (noeuds, mailles, ponts, Millman, etc.) peuvent être réutilisées en RSF à condition d'utiliser les amplitudes complexes et les impédances.

Circuits du second ordre en régime sinusoïdal forcé

- Un système excité périodiquement présente une résonance pour une grandeur physique lorsque l'amplitude de celle-ci admet un maximum pour une fréquence particulière de l'excitation appelée fréquence de résonance.
- Pour un circuit RLC série alimenté par $e(t) = E_m \cos(\omega t)$, l'impédance complexe totale est

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right).$$

On obtient aisément le module et le déphasage de la tension par rapport au courant en vertu de leurs formules respectives.

- La partie imaginaire s'annule pour la pulsation propre $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$ i.e. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
 - Si $\omega = \omega_0$, le circuit est purement résistif ($\varphi = 0$).
 - Si $\omega < \omega_0$, le circuit est capacitif (tension en retard sur le courant ; $\varphi < 0$).
 - Si $\omega > \omega_0$, le circuit est inductif (tension en avance sur le courant ; $\varphi > 0$).
- Étude asymptotique : dans chacun des cas, on remplace les condensateurs et les inductances par un interrupteur fermé (impédance nulle) ou par un interrupteur ouvert (impédance vers l'infini). On laisse les résistances inchangées.
 - B.F. ($\omega \rightarrow 0$) : l'inductance se comporte comme un fil et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Le courant est donc nul, tout comme la tension aux bornes de la résistance. C'est que $i_{BF}(t) = 0$, $u_L|_{BF}(t) = 0$ et $u_C|_{BF}(t) = e_{BF}(t)$.
 - H.F. ($\omega \rightarrow \infty$) : l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. De même, le courant tend vers 0. C'est que $i_{HF}(t) = 0$, $u_L|_{HF}(t) = e_{HF}(t)$ et $u_C|_{HF}(t) = 0$.

Résonance d'intensité des circuits RLC série

- On choisit $e(t)$ comme origine des phases. On peut alors écrire $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ puis en notation complexe $\underline{e}(t) = E_m \cdot e^{j\omega t}$.

En utilisant les amplitudes complexes, on peut déterminer l'intensité complexe du courant :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}.$$

En factorisant par R , on obtient l'expression suivante :

$$\underline{I}_m = \frac{\frac{E_m}{R}}{1 + j(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega})}.$$

En posant $I_m = \frac{E_m}{R}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on peut mettre le résultat sous la forme canonique suivante :

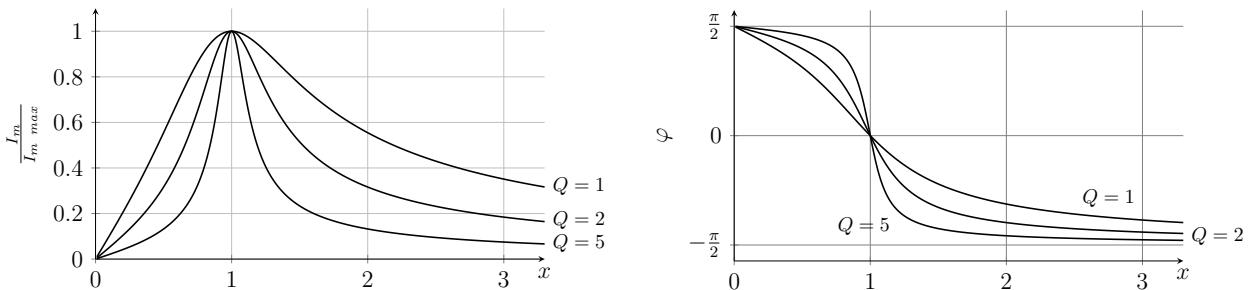
$$\underline{I}_m = \frac{I_m}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} = \frac{I_m \cdot \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}.$$

En remplaçant x par $\frac{\omega}{\omega_0}$, l'identification de la forme canonique $\underline{I}_m = \frac{I_m \cdot \frac{j\omega}{Q}}{1 + \frac{j\omega}{Q} + (j\omega)^2}$ avec

la relation électrique $\underline{I}_m = \frac{\frac{E_m}{R} \cdot jRC\omega}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}$ est plus aisée. Les expressions sont équivalentes à condition que $\frac{1}{\omega_0^2} = LC$, que $I_m = \frac{E_m}{R}$ et que $RC = \frac{1}{Q\omega_0}$. On en déduit les relations

$$I_m = \frac{E_m}{R}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

- Il y a résonance en intensité lorsque la pulsation ω est égale à la pulsation propre ω_0 ($x = 1$). Pour cette pulsation, l'impédance Z est minimale ($Z = R$) et l'intensité est maximale : $I_{m \max} = \frac{E_m}{R}$. Cette résonance est systématique quel que soit Q , et courant et tension y sont en phase.



- La bande passante d'un filtre est l'intervalle des fréquences $\Delta\omega$ (ou des pulsations Δf) pour lesquelles le signal de sortie vérifie

$$S \geq \frac{S_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

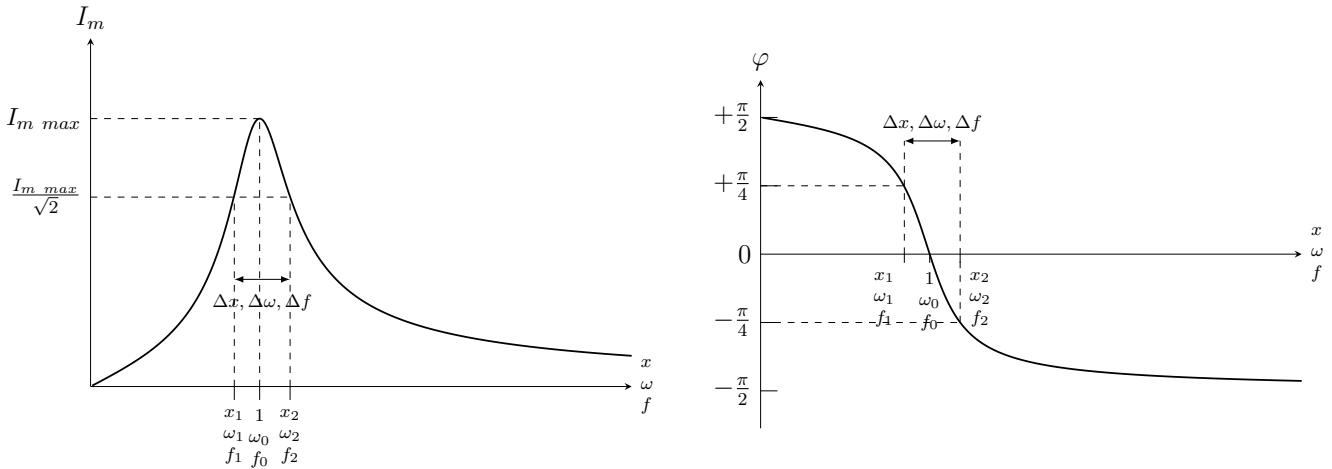
- Le facteur de qualité d'un circuit résonnant en intensité vérifie la relation

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{\Delta x}.$$

- Si le facteur de qualité est élevé, la bande passante est étroite : on dit que la résonance est aiguë.

Si le facteur de qualité est faible, la bande passante est large : on dit que la résonance est floue.

- On peut également déterminer la bande passante à l'aide de la courbe de phase. En effet, pour les pulsations réduites x_1 et x_2 correspondant aux bornes de la bande passante, le déphasage vaut $\pm\frac{\pi}{4}$.



Résonance en tension (aux bornes du condensateur) du circuit RLC série

- On choisit toujours la tension $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t)$ du générateur comme référence des phases.
On étudie la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.
En utilisant le pont diviseur de tension, on détermine l'amplitude complexe

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}.$$

En multipliant par l'admittance du condensateur $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}$, on obtient

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{1}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}.$$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on peut mettre le résultat sous la forme canonique suivante :

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{1}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}.$$

Il est alors possible de déterminer l'amplitude maximale de la tension aux bornes du condensateur :

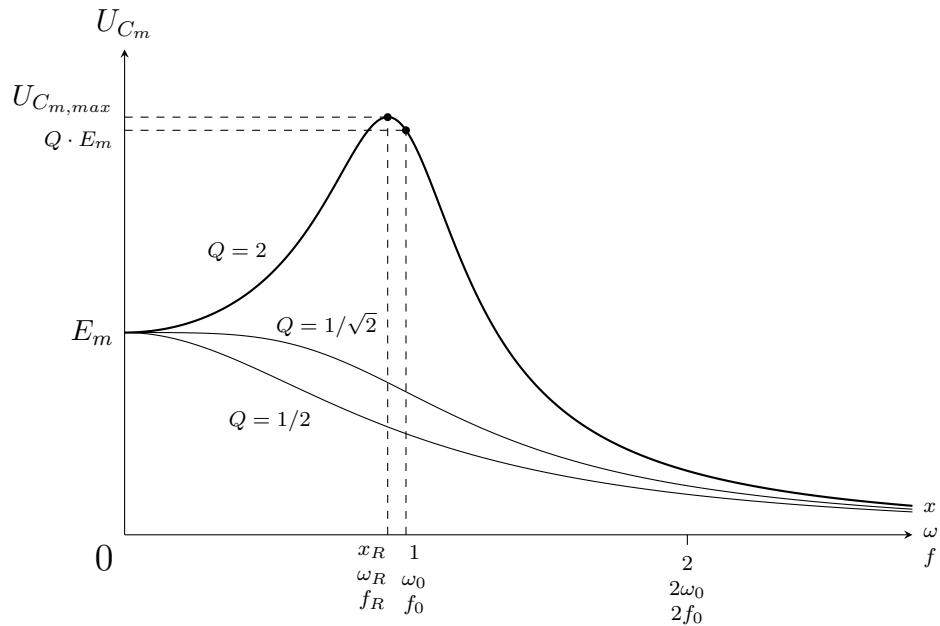
$$U_{C_m} = |\underline{U}_{C_m}| = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}.$$

- Quelle que soit la valeur du facteur de qualité, à la pulsation propre on a $U_{C_m}(x = 1) = Q \cdot E_m$.
- Le phénomène de résonance en tension n'apparaît que si le facteur de qualité est suffisamment élevé, lorsque $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sinon la courbe est décroissante (pas de pic).
- La résonance en tension apparaît pour la pulsation de résonance en tension $\omega_R < \omega_0$:

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

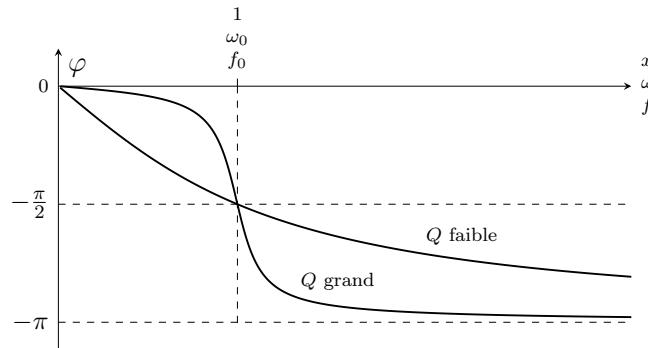
L'amplitude maximale vaut alors

$$U_{C_{m,max}} = \frac{Q \cdot E_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$



Si le facteur de qualité est très élevé ($Q > 5$), $\omega_R \approx \omega_0$ et $U_{C_{m,max}} \approx Q \cdot E_m$. Q est alors appelé coefficient de surtension.

- La courbe de phase en tension correspond à la courbe de phase en intensité translatée de $-\frac{\pi}{2}$.



Système mécanique du second ordre en régime sinusoïdal forcé

- On modélise le système par un point matériel de masse m accroché à un ressort et un système excitateur qui assure un mouvement rectiligne sinusoïdal $z_A(t) = A \cos(\omega t)$.
On établit la relation de longueur $\ell(t) = \ell_{eq} + z(t) - z_A(t)$.
Bilan des forces :
 - poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$,
 - force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\Delta\ell\vec{u} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_z = -k(z(t) - z_A(t) + \frac{mg}{k})\vec{e}_z$,
 - force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\dot{z}\vec{e}_z$.
- Le PFD projeté sur l'axe $O\vec{z}$ donne $-k(z(t) - z_A(t) + \frac{mg}{k})\vec{e}_z + mg\vec{e}_z - \alpha\dot{z}\vec{e}_z = m\ddot{z}\vec{e}_z$ i.e. $m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = k z_A(t)$, soit encore

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_A(t).$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$, on obtient la forme canonique

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_A(t).$$

Résonances en amplitude

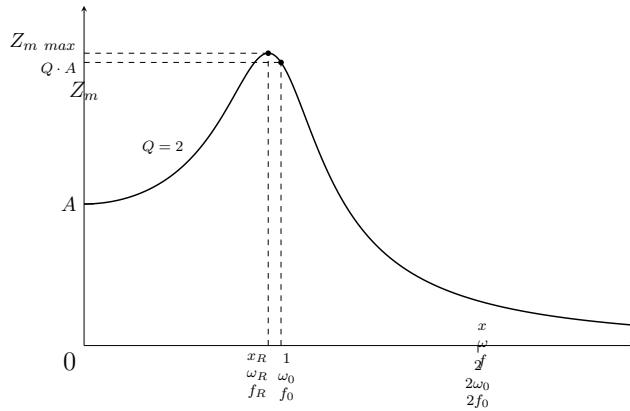
- En notation complexe, l'excitation est $\underline{z}_A(t) = Ae^{j\omega t}$. On cherche $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$. L'équation devient : $-\omega^2 \underline{z} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} = \omega_0^2 A$. On obtient l'amplitude complexe

$$\underline{Z}_m = A \cdot \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Voici alors le module (amplitude des oscillations) :

$$Z_m = |\underline{Z}_m| = \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}.$$

- C'est la même forme mathématique que la résonance en tension du circuit RLC. De même, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance en élongation et la pulsation de résonance est $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. L'amplitude maximale est $Z_{m \max} = \frac{Q \cdot A}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.



- La courbe de phase est identique à celle en tension.

Résonances en vitesse

- On s'intéresse à la vitesse $v(t) = \dot{z}(t)$. En complexe,

$$\underline{V}_m = j\omega \cdot \underline{z}(t) = j\omega \cdot \underline{Z}_m = \frac{j\omega A}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}.$$

En factorisant pour faire apparaître la forme canonique (analogue à l'intensité),

$$\underline{V}_m = \frac{Q A \omega_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

- Il y a résonance en vitesse lorsque la pulsation est égale à la pulsation propre ($x = 1$). Pour cette pulsation, la vitesse est maximale et vaut $V_{m,\max} = Q A \omega_0$. Ce phénomène est observable systématiquement (pour tout Q).

