

## 14. FONDEMENTS 5 : FONCTION ENTRE DEUX ENSEMBLES

### 14.1. Modes de définition d'une fonction, de son graphe

#### Noti.

Une fonction  $f$  partant d'un ensemble  $E$  et arrivant dans un ensemble  $F$  est un triplet constitué de l'ensemble de départ  $E$ , de l'ensemble d'arrivée  $F$ , et d'une relation qui, à tout élément  $x$  du départ, associe un unique élément  $y$  à l'arrivée, appelé image de  $x$  par  $f$  et noté  $f(x)$ .

On note :

- $f : E \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x);$
- $y = f(x)$  pour  $x \mapsto y;$
- $\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array};$
- $\mathcal{F}(E, F)$  pour l'ensemble des fonctions partant de  $E$  et arrivant dans  $F$ .

#### Défi. (Graphe)

On définit le graphe  $\Gamma_f$  d'une fonction  $f : E \rightarrow F$  comme la partie de  $E \times F$  telle que  $(x, y) \in \Gamma_f \iff y = f(x)$ .

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

#### Rema.

Deux fonctions ne sont égales que si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et la même relation fonctionnelle. Par exemple, les fonctions :

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^2$$

ne sont pas égales car leurs ensembles d'arrivée diffèrent.

En revanche,  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-, x \mapsto -x$  et  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-, t \mapsto 1 - (t + 1)$  sont égales.

#### Noti.

On peut définir une fonction de plusieurs manières :

- par une relation explicite,  
en ex.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y;$
- par une relation implicite,  
en ex.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto z;$
- par une relation de récurrence, en ex.

$$\begin{array}{rclcl} f & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & 0 & \mapsto & 1 \\ & & 1 & \mapsto & 1 \\ & & n \geq 2 & \mapsto & f(n-1) + f(n-2); \end{array}$$

- par un tableau de valeurs ( $E$  fini), en ex.  $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{C} :$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & i & 1-i & 2026 \end{array}.$$

## 14.2. Opérations générales sur les fonctions

### Défi. (Restriction)

On appelle restriction d'une fonction  $f : E \rightarrow F$  à une partie  $A$  de  $E$ , la fonction notée  $f|_A$  définie par :

$$\begin{array}{ccc} f|_A & : & A \rightarrow F \\ & & x \mapsto f(x) \end{array}$$

### Défi. (Prolongement)

On dit qu'une fonction  $g$  est un prolongement de la fonction  $f$  lorsque  $f$  est la restriction de  $g$  à l'ensemble de départ de  $f$ .

### Défi. (Image directe)

On appelle image directe par  $f : E \rightarrow F$  d'une partie  $A$  de  $E$  (du départ), l'unique partie de  $F$  (de l'arrivée) définie par :

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

### Prop. (Image directe, inclusion et opérations)

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$ .

1. Si  $A_1 \subset A_2$ , alors  $f(A_1) \subset f(A_2)$ .
2. En général, on ne peut pas comparer  $f(A_2 \setminus A_1)$  et  $f(A_2) \setminus f(A_1)$ .
3.  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ . En général, l'inclusion est stricte.
4.  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .

### Défi. (Image réciproque)

Étant donné une fonction  $f : E \rightarrow F$ , on appelle image réciproque d'une partie  $B$  de  $F$  (de l'arrivée), l'unique partie de  $E$  (du départ) égale à l'ensemble des antécédents par  $f$  des éléments de  $B$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

### Prop. (Image réciproque, inclusion et opérations)

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $B_1, B_2$  deux parties de  $F$ .

1. Si  $B_1 \subset B_2$ , alors  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ .
2.  $f^{-1}(B_2 \setminus B_1) = f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)$ .
3.  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .
4.  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .

### Prop. (Enchaînement image directe et réciproque)

Soit  $f : E \rightarrow F$ ,  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $B \in \mathcal{P}(F)$ .

1.  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .
2.  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

### Défi. (Composition)

Soient trois ensembles  $E, F, G$  et deux fonctions  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ . On appelle fonction composée de  $f$  suivie de  $g$  (ou composée de  $g$  suivant  $f$ ), notée  $g \circ f$ , l'unique fonction de  $E$

dans  $G$  définie par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Prop.** (Pseudo-associativité)

Si  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow H$ , alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**Défi.**

La fonction identité sur un ensemble  $E$  est définie par :

$$\text{id}_E : E \rightarrow E, \quad x \mapsto x.$$

**Prop.**

La fonction identité agit comme un élément neutre pour la composition :

1. Pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}(E, F)$ ,  $f = f \circ \text{id}_E$  (neutralité à droite).
2. Pour toute fonction  $e \in \mathcal{F}(F, E)$ ,  $\text{id}_E \circ e = e$  (neutralité à gauche).

### 14.3. Fonction indicatrice d'une partie

**Défi.**

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ . On appelle fonction indicatrice de  $A$  sur  $E$  la fonction notée  $1_A$  définie par :

$$\begin{aligned} 1_A &: E \rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

**Prop.**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

1.  $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$ .
2.  $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$ .
3. Si  $A \cap B = \emptyset$  (disjoints), alors  $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$ .
4. Si  $A \subset B$ , alors  $1_{B \setminus A} = 1_B - 1_A$ .