19 AL 1 : Systèmes linéaires et représentations matricielles

19.1 Équivalence de systèmes linéaires

Noti.
On considère $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *équation linéaire* (« EL » dans la suite) à p inconnues et à coefficients réels toute équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

d'inconnue $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, de *paramètres* $a_1, \ldots, a_p$ et b. Si $b = 0$, alors on parle d'*équation linéaire homogène* (« ELH » dans la suite).

Exem.
Voici une EL à 3 inconnues :

$$2x - 3y + 5z = 2026.$$

La liste de ses coefficients est $(2; -3; 5)$ et son second membre est 2026.

Noti. (Système linéaire)
On considère $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle *système de n EL à p inconnues*, ou simplement *système linéaire* de n équations à p inconnues, tout système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$.
La famille de coefficients est $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. On l'appelle *(table) matrice à n lignes et p colonnes* à coefficients réels, et on l'écrit visuellement

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}.$$

La table matrice $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ écrite $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ est le *second membre.*

Exem.
Voici un système linéaire à 3 inconnues de 2 équations :

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=2025 \\ -5x-6y-7z=2026. \end{cases}$$

La table matrice de ses coefficients est

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix},$$

et la table matrice de son second membre est

$$\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}.$$

Ici, le *système linéaire homogène associé* est celui où l'on remplace chaque coefficient du second membre par zéro ; dit autrement, on remplace le second membre par la table matrice nulle de même format (ou taille).

Noti.
La *matrice augmentée* d'un système linéaire (« SL » dans la suite) de matrice A et de second membre B est la matrice obtenue en joignant à la fin de chaque ligne le coefficient du second membre correspondant ; on la note $(A|B)$.

Exem.
La matrice augmentée du système linéaire ci-haut s'écrit

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{array}\right].$$

Rema.
Le SL

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=2025 \\ -5x-6y-7z=2026 \end{cases}$$

admet pour écriture matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}}_{B},$$

ou encore $AX=B$.

Rema.
Le SL précédent est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y+4z+2025(-1)=0 \\ -5x-6y-7z+2026(-1)=0 \end{cases}$$

lequel s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou encore

$$(A|B)\begin{pmatrix} X \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{2,1},$$

ou encore

$$\begin{cases} (A|B)\begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} = 0_{2,1} \\ t = -1 \end{cases}.$$

Défi. (Opérations (inversibles) élémentaires)
Voici les trois classes d'opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire d'une table matrice :
1. L'*échange* des lignes L_i et L_j (ligne d'indice i et ligne d'indice j) avec $i \neq j$: $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. La *multiplication* (ou *dilatation*) de la ligne L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. L'*ajout* (ou *transvection*) à la ligne L_i du produit de L_j par $\mu \in \mathbb{R}$, avec $i \neq j$: $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$.

Exem.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donné. On a la chaîne d'équivalences suivante :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + z = 2 \\ -x - y + 3z = -5 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -x - y + 3z = -5 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 2z = -2 \\ -7y + 4z = -7 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2}{\iff} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 2z = -2 \\ 18z = -21. \end{cases}$$

Défi. (Produit d'une matrice rectangulaire par une colonne)
On considère $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$; puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, la matrice

de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (AX)_{i,1} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} X_{k,1} = A_{i,1}X_{1,1} + A_{i,2}X_{2,1} + \cdots + A_{i,p}X_{p,1}.$$

Repr.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,1} \\ X_{2,1} \\ \vdots \\ X_{p,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}X_{1,1} + A_{1,2}X_{2,1} + \cdots + A_{1,p}X_{p,1} \\ A_{2,1}X_{1,1} + A_{2,2}X_{2,1} + \cdots + A_{2,p}X_{p,1} \\ \vdots \\ A_{n,1}X_{1,1} + A_{n,2}X_{2,1} + \cdots + A_{n,p}X_{p,1} \end{bmatrix}$$

Exem.

Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -8 & 12 & -5 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

$$AX = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ -8 \cdot (-1) + 12 \cdot 4 - 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Défi.

On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents au sens des opérations élémentaires* lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par un certain enchaînement d'opérations élémentaires sur les lignes.

Rema.

Si deux systèmes linéaires sont équivalents au sens des opérations élémentaires, alors ils sont équivalents au sens de la logique. La réciproque est vraie pour deux systèmes de même format.

Prop.

Deux systèmes linéaires équivalents admettent le même ensemble de solutions.

Défi.

Deux matrices sont *équivalentes en lignes* lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par un enchaînement d'opérations élémentaires sur les lignes.

Rema.

Deux systèmes linéaires sont équivalents si, et seulement si, leurs matrices augmentées sont équivalentes en lignes. Le cas échéant, les suites d'opérations élémentaires sont les mêmes.

Appl.

Posons

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right].$$

On a cette chaîne d'équivalences en lignes (notée $\sim_L$) :

$$M \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2}{\sim_L} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -21 \end{array}\right]$$

19.2 Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Exem. (Résolution par substitutions)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné.
1. On a

$$\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x^2 \\ 2x + x^2 = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = (-1)^2 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (-1, 1).$$

2. Avec un système linéaire cette fois,

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ 2y + y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ y = -1/3 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (-1/3, -1/3).$$

Exem. (Résolution par combinaisons)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné. On a

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} -x + y = 0 \\ \phantom{-x+{}} 3y = -1 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{\iff} \begin{cases} -x + y = 0 \\ \phantom{-x+{}} y = -1/3 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x = 1/3 \\ y = -1/3 \end{cases}$$

Noti.
On appelle *pivot* d'une matrice ligne qui n'est pas entièrement nulle son premier coefficient non nul (à partir de la gauche).

Exem.
Le pivot de la ligne $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2026 \end{bmatrix}$ est égal à -2.

Noti. (Matrice échelonnée en lignes)
- Si une de ses lignes est entièrement nulle, alors chacune des lignes suivantes le sont aussi.
- À partir de la deuxième ligne, dans chacune des lignes non entièrement nulles, le pivot est à droite du pivot précédent.