17. Fondements 6 : Fonction et inversibilité

17.1. Surjectivité

Dans toute la suite, E et F désignent deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Défi.
On dit que la fonction f est *surjective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au moins un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de $b \in F$, on peut trouver au moins un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f.

$$\forall b \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = b.$$

Rema.
Dire que f est surjective revient à dire que $f(E) = F$.

Prop.
La composée de deux fonctions surjectives est elle-même une fonction surjective : étant donné trois ensembles E, F et G, puis deux fonctions $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$ est surjective.

Défi.
On dit qu'une fonction $e \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse à droite* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque

$$\forall b \in F, \quad f(e(b)) = b.$$

C'est que $f \circ e = \mathrm{id}_F$.
On dit alors que f est *inversible à droite* lorsqu'elle admet un inverse à droite.

Exem.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Alors les deux fonctions $e_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto \sqrt{y}$ et $e_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto -\sqrt{y}$ sont deux inverses à droite de f.

Prop.
Une fonction est inversible à droite si et seulement si elle est surjective.

Méth. (Vérifier si une fonction est surjective)
Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$. Est-ce que f est surjective ?
Que soit donné $b \in \mathbb{R}$. L'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet au moins une solution.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ quelconque.
Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons que $f(x) = b$.

$$\frac{2x+1}{x-1} = b$$
$$\frac{2x+1}{x-1} - b = 0$$
$$\frac{2x+1-b(x-1)}{x-1} = 0$$
$$2x+1-(bx-b) = 0$$
$$(2-b)x+1+b = 0$$
$$(2-b)x = -1-b$$

Si $b = 2$, alors $0 = -3$. Or $0 \neq -3$ donc $b \neq 2$.
CN : pour que $f(x) = b$, il est nécessaire que $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Synthèse : Pour le choix $b = 2$, l'équation n'admet aucune solution.
En réponse, la fonction f n'est pas surjective.

17.2. Injectivité

Défi.
On dit que la fonction f est *injective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au plus un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de $b \in F$, on peut trouver au plus un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f.

$$\forall b \in F, \quad \forall x_1, x_2 \in E, \quad (f(x_1) = b \wedge f(x_2) = b) \implies x_1 = x_2.$$
$$\text{i.e.} \qquad \forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$