10. Plan Complexe 3 : Équations polynomiales

10.1. Équation polynomiale dans $\mathbb{C}$

Noti.
Une *équation polynomiale*, dite aussi *algébrique*, est une équation qui met en jeu des fonctions polynomiales. En voici un exemple : $2z^2 - z + i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Toute solution d'une équation algébrique est appelée *racine* de cette équation. C'est aussi une racine, ou un zéro, de la fonction polynomiale associée.

Prop.
Soit $a, z \in \mathbb{C}$. Ainsi :
- $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$;
- $z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + za + a^2)$.

Prop.
Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$. Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) - P(a) = (z-a)Q(z).$$

Prop.
Si a est une racine de P (c'est-à-dire $P(a) = 0$), alors on peut factoriser $P(z)$ par $(z-a)$:

$$P(z) = (z-a)Q(z).$$

Prop.
Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k z^k$ une fonction polynomiale. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{C_k}(\overline{z})^k.$$

En particulier, si tous les coefficients C_k sont réels (i.e. P est à coefficients réels), alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{P(z)} = P(\overline{z}).$$

Prop.
Si un nombre complexe est racine d'une fonction polynomiale à coefficients réels, alors son conjugué l'est aussi.

$$\big(P \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad P(z) = 0\big) \implies P(\overline{z}) = 0.$$

10.2. Racines carrées d'un complexe

Défi.
Soit $a \in \mathbb{C}$. Les *racines carrées complexes* de a sont les solutions d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ de l'équation algébrique
$$z^2 = a.$$

Rema.
Il convient de ne pas confondre les racines carrées complexes d'un nombre avec l'unique racine carrée réelle positive d'un réel positif.

Exem.
- Les complexes i et $-i$ sont les racines carrées complexes de -1.
- Le complexe $2+i$ est une racine carrée complexe de $3+4i$.

Prop.
On a $\forall z \in \mathbb{C}$:
- $z^2 = 0 \iff z \in \{0\}$;
- $z^2 = 1 \iff z \in \{-1; +1\}$.

Prop.
Soit $w \in \mathbb{C}^*$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que $z_0^2 = w$. Ainsi,
- $z_0 \neq 0$;
- $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 = w \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 1$;
- $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 = w \iff z \in \{\pm z_0\}$.

Prop.
Soit $w \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, si $w > 0$, alors
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm\sqrt{w}\}.$$
Si $w < 0$, alors
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm i\sqrt{-w}\}.$$

Prop. (Forme exponentielle des racines carrées)
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel que $re^{i\theta} = w$. Ainsi,
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}\}.$$

Prop. (Forme algébriques des racines carrées)
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $a + ib = w$. Ainsi,
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm z_0\}$$
où
- $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ si $w \notin \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Re}(z_0) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ si $w \in \mathbb{R}$.

10.3. Discriminant d'une fonction polynomiale du second degré

Prop.
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Ainsi,
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
- $\frac{a^2+b^2}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

Prop.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. Ainsi, il existe exactement un triplet $(C, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = C(z-\alpha)^2 + \beta.$$

Voca.
La forme $z \mapsto az^2 + bz + c$ est la forme *développée réduite*, et la forme $z \mapsto C(z-\alpha)^2 + \beta$ est la forme *canonique* de la fonction polynomiale.

Rema.
$C = a$.

Défi.
On appelle *discriminant* d'une fonction polynomiale complexe du second degré $z \mapsto az^2 + bz + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le complexe

$$b^2 - 4ac.$$

Prop. (Équation du second degré, cas réel)
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Ainsi,
1. si $\Delta > 0$, alors l'ensemble S des solutions de l'éq. alg. $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est constitué des éléments

$$S = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}.$$

2. Si $\Delta < 0$, alors $S = \emptyset$.
3. Si $\Delta = 0$, alors $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$.

En somme, si $\Delta < 0$, alors $S = \emptyset$. Sinon $S = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$.

Prop. (Équation du second degré, cas complexe)
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Ainsi, l'ensemble des racines complexes de $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az^2 + bz + c$ est

$$S = \left\{ \frac{-b \pm \delta}{2a} \right\}$$

où δ est une des racines carrées complexes de Δ, arbitrairement choisie.

Rema.
Ci-avant, si $\Delta = 0$, alors S possède exactement un élément ($\delta = 0$). Sinon S possède exactement deux éléments.

Appl. (Équation complexe et calcul de δ)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z : $z^2 - (1+i)z + i = 0$.

1. Calcul du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1+i)^2 - 4(1)(i) = (1 + 2i - 1) - 4i = -2i.$$

2. Recherche d'une racine carrée δ de Δ
On cherche $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = -2i$.

- Voie algébrique (Système)
Posons $\delta = x + iy$. On a les équivalences :

$$\delta^2 = -2i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & \text{(Re)} \\ 2xy = -2 & \text{(Im)} \\ x^2 + y^2 = |-2i| = 2 & \text{(Mod)} \end{cases}$$

Par somme et différence des lignes (1) et (3), on obtient $2x^2 = 2$ et $2y^2 = 2$, d'où $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$. La ligne (2) impose que x et y soient de signes contraires ($xy = -1$). On choisit (arbitrairement) le couple $(1, -1)$.

$$\delta = 1 - i.$$

- Voie géométrique (Exponentielle)
On écrit Δ sous forme exponentielle :

$$\Delta = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Les racines carrées sont donc $\pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Choisissons celle avec le signe $+$:

$$\delta = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i.$$

3. Conclusion
Les solutions sont $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$:

$$z_1 = \frac{(1+i) - (1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i \quad ; \quad z_2 = \frac{(1+i) + (1-i)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$S = \{1, i\}.$$

10.4. Formes d'un polynôme du second degré

Voca.
1. Voici deux exemples de *formes factorisées* :
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_1(z) = 2(z-1)(z+2)$
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_2(z) = 3(z+4)(z-5)$
2. Voici deux exemples de *formes canoniques* :
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_1(z) = 2(z + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{2}$
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_2(z) = 3(z - \frac{1}{2})^2 - \frac{243}{4}$
3. Voici deux exemples de *formes développées réduites* :
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_1(z) = 2z^2 + 2z - 4$
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_2(z) = 3z^2 - 3z - 60$

Rema.
Si on ne travaille qu'avec des nombres réels, alors la fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ n'admet pas de forme factorisée (comme produit de fonctions polynomiales de degré 1) car elle n'admet pas de racine réelle. Plus généralement, il n'y a pas de forme factorisée (dans $\mathbb{R}$) si et seulement si le discriminant est strictement négatif.

Prop. (Relation entre coefficients et racines)
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az^2 + bz + c$. Notons z_- et z_+ les deux racines complexes de P. Ainsi

$$z_- + z_+ = -\frac{b}{a}$$

$$z_- z_+ = \frac{c}{a}$$

10.5. Racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$

Défi.
On considère $n \in [\![1, +\infty[\![$ et $w \in \mathbb{C}$. On dit qu'un nombre complexe z est une des *racines n-ièmes complexes* de w quand

$$z^n = w.$$

Exem.
1. Le complexe 2 est une racine troisième de 8.
2. Le complexe i est une des racines 4-ièmes de 1.

Nota.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Exem.
- $\mathbb{U}_1 = \{1\}$
- $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{j^0, j^1, j^2\}$; $j = e^{i2\pi/3}$.
- $\mathbb{U}_4 = \{+1, -1, +i, -i\} = \{1, i, i^2, i^3\} = \{i^0, i^1, i^2, i^3\}$.

Prop.
On a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n = 0 \iff z = 0.$$

Prop.
$\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Prop. (Produit et quotient)
$\mathbb{U}_n \neq \emptyset$ car $1 \in \mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{C}^*$ car $0^n \neq 1$ ($n \geqslant 1$). Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$. Ainsi,

$$\begin{cases} z_1 z_2 \in \mathbb{U}_n \\ \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}_n \end{cases}.$$

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $z^{-1} \in \mathbb{U}_n$ et $\overline{z} \in \mathbb{U}_n$.

Rema.
Si $z \in \mathbb{U}$, alors $\overline{z} = z^{-1}$ ($z\overline{z} = |z|^2$).

Prop.
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que $z_0^n = w$. Ainsi, $z_0 \neq 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = w \iff \exists \xi \in \mathbb{U}_n, \quad z = \xi z_0.$$

Prop. (Description de $\mathbb{U}_n$)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U}_n \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right).$$

C'est que

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Prop. (Racines n-ièmes de $w \in \mathbb{C}^*$)
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. On a :
1. w admet au moins une racine n-ième ;
2. si z_0 est une racine n-ième (particulière) de w alors l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de w est constitué de $z_0\xi_k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, où $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \xi_k = \exp(i\frac{2\pi k}{n})$;
3. les racines n-ièmes de w sont au nombre de n.

Appl.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z : $z^3 = i$.

<u>Pas 1°</u> Posons

$$z_0 \overset{\text{def}}{=} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

Ainsi,

$$z_0^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Donc, comme le complexe i est <u>non nul</u>, z_0 est <u>une des trois racines troisièmes</u> de ce complexe.

<u>Pas 2°</u> Or l'ensemble des trois racines troisièmes de l'unité est :

$$\mathbb{U}_3 = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$$

où, pour tout $k \in \{0; 1; 2\}$, $\xi_k = e^{i\frac{2\pi k}{3}}$.

Commentaire. C'est-à-dire que

$$\begin{cases} \xi_0 = e^{i2\pi\cdot\frac{0}{3}} = 1, \\ \xi_1 = e^{i2\pi\cdot\frac{1}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \xi_2 = e^{i2\pi\cdot\frac{2}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Fin de commentaire.

Pas 3° Donc, d'après les connaissances communes de référence, l'ensemble des solutions, c'est-à-dire des trois racines troisièmes du complexe i, est

$$S = \{z_0\xi_0, z_0\xi_1, z_0\xi_2\}.$$

C'est-à-dire

$$S = \left\{\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i\right\}.$$