

12. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 2 : LE PLAN

12.1. Déterminant dans une base orthonormée directe

Noti.

On considère un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Pour tout couple de vecteurs non nuls (\vec{u}, \vec{v}) , la notation (\vec{u}, \vec{v}) désigne aussi une des mesures de l'angle orienté qui porte de la demi-droite $[O, \vec{u})$ à la demi-droite $[O, \vec{v})$. Ces mesures sont égales modulo 2π .

Prop.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) &\stackrel{2\pi}{=} (\vec{u}, \vec{w}); \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\stackrel{2\pi}{=} -(\vec{v}, \vec{u}). \end{aligned}$$

Défi. (Déterminant d'un couple de vecteur à l'aide d'une projection orthogonale)

Dans un plan orienté muni d'une b.o.n.d., on appelle *déterminant* du couple (\vec{u}, \vec{v}) l'unique réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) \stackrel{\text{nota}}{=} [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

Prop.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où K est le projeté orthogonal de C sur la perpendiculaire à (AB) en A .

Prop.

Ci-avant, la valeur absolue du $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ est égale à l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Prop.

Le déterminant est :

1. bilinéaire :

a. pour tout vecteur \vec{u} ,

$$\forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$$

b. pour tout vecteur \vec{v} ,

$$\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v}).$$

2. antisymétrique :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

Prop.

Soit un plan muni d'une b.o.n.d. Soient $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Prop.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

12.2. Droites du plan