18 Géométrie élémentaire 3 : l'espace

18.1 Produit vectoriel dans l'espace orienté

Défi.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, qu'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'unique vecteur de l'espace défini comme suit :
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, alors
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})\, \vec{k},$$
où $\vec{k}$ désigne l'unique vecteur unitaire directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est lié, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Prop.
Le produit vectoriel est :
1. bilinéaire :
   a. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{E}$,
$$\begin{cases} (\vec{u}+\vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}; \end{cases}$$
   b. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}); \end{cases}$$
2. antisymétrique :
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Prop.
L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Soient $\vec{v_1}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v_2}(x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs. Alors $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$ admet pour coordonnées
$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Appl.
Dans une b.o.n.d. de l'espace, on considère $\vec{v_1} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v_2} \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Alors,
$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Prop. (Produit vectoriel et colinéarité)
Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si, et seulement si, le produit vectoriel de l'un par l'autre est égal au vecteur nul :
$$\vec{u} // \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

18.2 Déterminant dans une b.o.n.d

Défi. (Déterminant en dimension 3)
Le *déterminant* de tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace est le nombre réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Nota.
On note souvent $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exem.
On considère en b.o.n.d $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -14 \times 7 - 10 \times 2 - 2 \times 6 = -130.$$

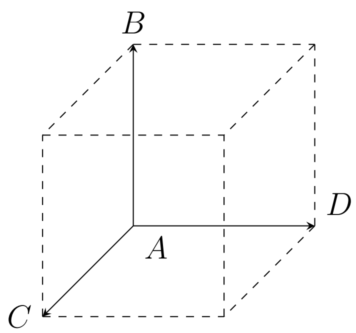
Prop. (Produit vectoriel et mesure)
La valeur absolue $|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$ mesure le volume du parallélépipède d'arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Rema.
1. On ne demande pas à ce que le parallélépipède le soit au sens strict.
2. Pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ on peut choisir A quelconque puis B, C et D tels que

$$\begin{cases} A + \vec{u} = B \\ A + \vec{v} = C \\ A + \vec{w} = D \end{cases}$$

pour interpréter $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

Figu.



Prop. (Multilinéarité et antisymétrie)
Le déterminant (en dim. 2 ou 3) est linéaire par rapport à chaque place et antisymétrique.

Rema.
« Bi- » et « tri- » linéaires.

Exem.
Si $\vec{v} = \mu_1 \vec{v_1} + \mu_2 \vec{v_2}$, alors

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \mu_1 [\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{w}] + \mu_2 [\vec{u}, \vec{v_2}, \vec{w}],$$

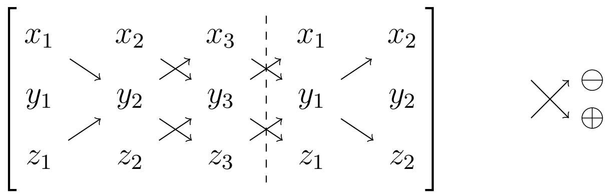
et semblablement, si $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2}$ ou si $\vec{w} = \nu_1 \vec{w_1} + \nu_2 \vec{w_2}$.

Prop. (Déterminant et coordonnées)
Considérons $\vec{v_1} \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{v_2} \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v_3} \left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)$ dans une b.o.n.d.

$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad [\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}] &= y_1 z_2 x_3 - z_1 y_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_1 z_2 y_3 + x_1 y_2 z_3 - y_1 x_2 z_3 \\ &= (x_1 y_2 z_3 + z_1 x_2 y_3 + y_1 z_2 x_3) - (z_1 y_2 x_3 + x_1 z_2 y_3 + y_1 x_2 z_3). \end{aligned}$$

Figu.



Nota.
Comme pour la notation $ab - cd = \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$, la somme ci-avant se note

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et développement)
En développant par rapport à la troisième colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Rema.
Un échange permet de placer toute colonne en troisième position.

Rema.
Comme pour la relation $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$, la transposition conserve le déterminant (en dim. 2 ou 3) ;

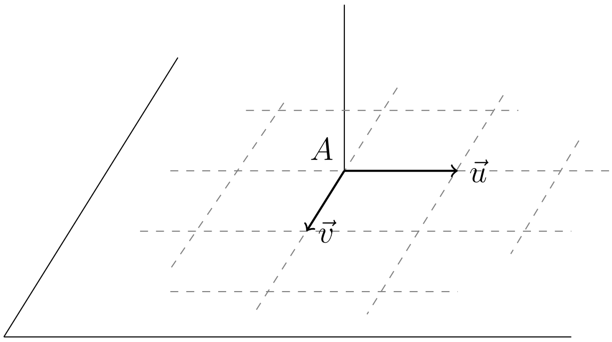
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et dépendance linéaire)
Un triplet de vecteurs de l'espace est lié si, et seulement si, son déterminant est égal à zéro.

18.3 Plans de l'espace

Noti. (Plan de l'espace)
On décrit primitivement un plan par la donnée d'un point A qu'il possède et d'un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs linéairement indépendants qui le dirigent.

Figu.



Prop. (Paramétrisation)
1. Le plan $\mathcal{P}$ passant par $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et dirigé par $\vec{v_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases} \quad ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Réciproquement, une telle paramétrisation, avec $\vec{v_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ linéairement indépendants, définit le plan passant par $M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dirigé par $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Appl.
Que dire de la partie de l'espace définie par le système de trois éqn. paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = 2k + 3l \\ y = -1 + 3k \\ z = -5 - 2k + l \end{cases} \quad ; \quad (k, l) \in \mathbb{R}^2 \quad ?$$

Posons $M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, puis $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre ? Soit, est-ce que $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} \neq$

$\vec{0}$?
Oui car l'abscisse est égale à : $3 \times 1 - (-2) \times 0 = 3$ et $3 \neq 0$. Cette partie est le plan passant par M_0 et dirigé par $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Prop. (Équation cartésienne)
Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.

1. On peut trouver au moins un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation :
$$ax + by + cz = d.$$
De plus, si le repère est orthonormé, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. Réciproquement, toute partie de l'espace d'équation $ax+by+cz = d$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est un plan, dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si le repère est orthonormé.

Méth. (Passer d'une paramétrisation à une équation et inversement)

1. On considère le plan de paramétrisation
$$\begin{cases} x = 2k + 3l \\ y = -1 + 3k \\ z = 5 - 2k + l \end{cases} \quad ; \quad (k, l) \in \mathbb{R}^2.$$
Soit $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ un couple de vecteurs qui dirige le plan. On a $\vec{v_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$.
Donc $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $3x - 8y - 9z = d$ où $d \in \mathbb{R}$.
Or $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ (obtenu par $(k, l) = (0, 0)$).
Donc $3 \times 0 - 8(-1) - 9 \times 5 = d$.
Enfin, $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne
$$3x - 8y - 9z = -37.$$
2. On demande une paramétrisation du plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne
$$3x - 8y - 9z = -37.$$
<u>Voie géométrique</u>
Choisissons deux points de $\mathcal{P}$. $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 37/9 \end{pmatrix}$ et $M_1\begin{pmatrix} 0 \\ 37/8 \\ 0 \end{pmatrix}$ conviennent.
Trouvons un couple libre $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ qui dirige $\mathcal{P}$.
Posons $\vec{v_1} = \vec{M_0M_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 37/8 \\ -37/9 \end{pmatrix}$.
Posons $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$ puis $\vec{v_2} = \vec{n} \wedge \vec{v_1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} \alpha = 37 \cdot \frac{8}{9} + \frac{9}{8} \\ \beta = 37 \cdot \frac{3}{9} \\ \gamma = 37 \cdot \frac{3}{8} \end{cases}$.
D'où la paramétrisation
$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \frac{37}{8}s + \beta t \\ z = \frac{37}{9} - \frac{37}{9}s + \gamma t \end{cases}$$
<u>Voie algébrique</u>
$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad 3x - 8y - 9z = -37 \iff 9z = 3x - 8y + 37$$

$$\iff \begin{cases} x = p \\ y = q \\ z = 37 + 3p - 8q \end{cases} \quad ; \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2.$$

Défi. (Projeté orthogonal sur un plan)
Considérons un plan $\mathcal{P}$. On appelle *projeté orthogonal* de tout point M sur le plan $\mathcal{P}$ l'unique point H d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M. C'est que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{MH} \perp \vec{v} \end{cases}.$$

Rema.
Si $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est une base de vecteurs de $\mathcal{P}$, alors

$$(\forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{MH'} \perp \vec{v}) \iff (\vec{MH'} \perp \vec{v_1}) \wedge (\vec{MH'} \perp \vec{v_2}).$$

Défi.
La *distance* du point M au plan $\mathcal{P}$ est $\min\limits_{P \in \mathcal{P}} MP$.

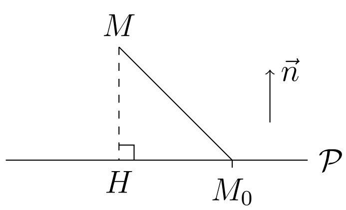
Nota.
Aussi, $\mathrm{dist}(M, \mathcal{P}) = \min\{MP : P \in \mathcal{P}\}$.

Figu.
C'est le rayon de la plus petite sphère de centre M établissant un contact ponctuel avec le plan.

Prop.
Si H est le projeté orthogonal du point M sur $\mathcal{P}$ alors

$$\mathrm{dist}(M, \mathcal{P}) = MH.$$

Méth. (Calculer la distance d'un point à un plan)
On suppose qu'on dispose d'un point $M_0 \in \mathcal{P}$ et d'un vecteur normal $\vec{n}$ de ce même plan. On demande la distance de tout point M donné au plan $\mathcal{P}$.



On écrit $\vec{M_0M} = \vec{M_0H} + \vec{HM}$.
Or $\vec{M_0H} \perp \vec{n}$; donc $\vec{M_0H} \cdot \vec{n} = 0$.
Donc $\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = \vec{M_0H} \cdot \vec{n} + \vec{HM} \cdot \vec{n} = \vec{HM} \cdot \vec{n}$.
Or $\vec{HM} // \vec{n}$, donc $|\vec{HM} \cdot \vec{n}| = \|\vec{HM}\| \times \|\vec{n}\|$.

Donc
$$\mathrm{dist}(M,\mathcal{P}) = \frac{|\vec{n}\cdot \overrightarrow{M_0M}|}{\|\vec{n}\|}.$$
Par conséquent, si $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $ax+by+cz=d$, alors la distance de tout point $M\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ à $\mathcal{P}$ est
$$\mathrm{dist}\left(M\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\mathcal{P}\right) = \frac{|ax+by+cz-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

18.4 Droites de l'espace

Noti.
Une droite $\mathcal{D}$ est définie par la donnée d'un point $M_0\in\mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur $\vec{v}\neq\vec{0}$.

Prop. (Paramétrisation)
Si $M_0\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}\in\mathcal{D}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ admet la paramétrisation que voici :
$$\begin{cases} x = x_0+\alpha t\\ y = y_0+\beta t \quad ; \quad t\in\mathbb{R},\\ z = z_0+\gamma t\end{cases}$$
et réciproquement.

Prop. (Mise en équation)
Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont deux vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ linéairement indépendants et si $M_0\in\mathcal{D}$, alors tout point $M\in\mathcal{E}$ est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si
$$\begin{cases} \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{M_0M} = 0\\ \vec{n_2}\cdot\overrightarrow{M_0M} = 0.\end{cases}$$
Ainsi, la droite $\mathcal{D}$ admet un système de deux équations cartésiennes
$$\begin{cases} ax+by+cz=d\\ a'x+b'y+c'z=d'\end{cases}$$
avec $\vec{n_1}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix} a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$ linéairement indépendants.

Rema.
Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont deux vecteurs normaux linéairement indépendants alors le vecteur $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$ est directeur de la droite.

Méth. (Passer d'une paramétrisation d'une droite à une mise en équation et inversement)
1. Soit $\mathcal{D}$ de paramétrisation
$$\begin{cases} x = 3+9t\\ y = 4-6t\\ z = 8+4t\end{cases}.$$

$M_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{D}} \setminus \{\vec{0}\}$.

Posons $\vec{n_1} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} = \vec{v} \wedge \vec{n_1}$. Alors $\vec{n_1} \neq \vec{0}$ et $\vec{n_1} \perp \vec{v}$ (car $\vec{v} \cdot \vec{n_1} = 9 \times 6 - 6 \times 9 + 4 \times 0 = 0$).

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} -36 \\ 24 \\ 127 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont deux vecteurs normaux linéairement indépendants, donc $\mathcal{D}$ admet pour système

$$\begin{cases} 6x + 9y + 0z = d \\ -36x + 24y + 117z = d' \end{cases} \qquad \text{où } (d, d') \in \mathbb{R}^2.$$

Les coordonnées de M_0 vérifient ce système ; ce qui donne d et d'.

2. On considère $\mathcal{D}$ définie par le système

$$\begin{cases} 6x + 9y = 44 \\ -12x + 8y + 39z = 308 \end{cases}.$$

On veut une paramétrisation. Posons $\vec{n_1} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 39 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 351 \\ -234 \\ 156 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

Donc $(\vec{n_1}, \vec{n_2})$ est libre, puis $\mathcal{D}$ est bien une droite ; elle est dirigée par $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$. Enfin, une solution particulière $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ du système conduit à une paramétrisation.

Défi. (Distance à une droite)
La *distance* du point M à la droite $\mathcal{D}$ est la plus petite distance séparant M d'un point de la droite :

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}.$$

Défi. (Projeté orthogonal sur une droite)
Considérons une droite $\mathcal{D}$ dirigée par un vecteur $\vec{v}$. On appelle *projeté orthogonal* du point M sur la droite $\mathcal{D}$ l'unique point H tel que :

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \vec{MH} \perp \vec{v} \end{cases}.$$

Prop.

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = MH$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Méth. (Calculer la distance de tout point donné à une droite)
Supposons qu'on dispose de $M_0 \in \mathcal{D}$ et de $\vec{v}$ directeur de $\mathcal{D}$.
On écrit : $\vec{M_0M} = \vec{M_0H} + \vec{HM}$.
Donc

$$\vec{v} \wedge \vec{M_0M} = \vec{v} \wedge \vec{M_0H} + \vec{v} \wedge \vec{HM}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v} \wedge \vec{M_0M}\| &= \|\vec{v} \wedge \vec{HM}\| \quad (\text{car } \vec{M_0H} // \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{HM}\| \quad (\text{car } \vec{v} \perp \vec{HM}).\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{M_0M}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Production en cours.