9. Fonction d'une variable réelle 1 : Étude globale

9.1. Généralités

Noti.
On appelle *fonction* d'une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute relation qui fait passer de tout nombre x de D à un unique nombre y de $\mathbb{R}$; auquel cas, on note $y = f(x)$ si la fonction est appelée f.
Lorsque l'ensemble de départ n'est pas précisé, on appelle *ensemble de définition* de f l'ensemble des valeurs de la variable x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles $f(x)$ existe.

Défi.
On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dit que f est :
a) *constante* quand : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) = c$;
b) *croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
c) *strictement croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;
d) *décroissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)$;
e) *strictement décroissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Défi.
On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *monotone* quand f est croissante ou f est décroissante.
On adapte pour la monotonie stricte.

Prop. (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit un intervalle I, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, puis $v \in \mathbb{R}$. Si v est compris entre deux valeurs de f, alors v est aussi une valeur de f.

Prop. (Théorème de la bijection continue)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$; puis $f : I \to J$. Supposons que :
- ET f est continue ;
- ET f est strictement monotone ;
- ET la limite de f en l'extrémité inf. de I est égale à l'extrémité inf. de J ; de même avec les extr. sup. (ou inversement selon la monotonie).

Ainsi, $f : I \to J, x \mapsto y = f(x)$ admet une réciproque $g : J \to I, y \mapsto x \in I$ telle que $f(x) = y$.

Prop.
Si l'on connaît la représentation graphique de $f : x \mapsto f(x)$, on peut obtenir celles de certaines fonctions transformées de la manière suivante :
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x - a)$ se déduit de celle de f par une translation horizontale de vecteur $\vec{u} = \binom{a}{0}$.
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x) + b$ se déduit de celle de f par une translation verticale de vecteur $\vec{v} = \binom{0}{b}$.
- La représentation de $x \mapsto f(2a - x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a$.

- La représentation de $x \mapsto 2b - f(x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = b$.
- La représentation de $x \mapsto f(\lambda^{-1}x)$, avec $\lambda > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de centre O et de rapport λ dans la direction horizontale.
- La représentation de $x \mapsto \mu f(x)$, avec $\mu > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de rapport μ dans la direction verticale.
- La représentation graphique de la fonction réciproque f^{-1} se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant, c'est-à-dire la droite $y = x$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote horizontale* de la courbe de f toute droite d'équation $y = \mathrm{Cte}$ où $\mathrm{Cte} \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{+\infty} f = \mathrm{Cte}$ ou $\lim_{-\infty} f = \mathrm{Cte}$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote verticale* toute droite d'équation $x = \mathrm{Cte}$ telle que $\lim_{\mathrm{Cte}} f = +\infty$ ou $\lim_{\mathrm{Cte}} f = -\infty$.

Défi.
On considère $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est *paire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$.

Défi.
On dit que f est *impaire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

Défi.
On considère $T \in\ ]0, +\infty[$. On dit que f est *T-périodique* ou que f admet T pour *période* quand :
- ET $\forall x \in D,\ x + T \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(x) = f(x + T)$

On parle de *la* période pour désigner la plus petite quand elle existe.

Défi.
Une *fonction périodique* est une fonction qui admet au moins une période ($T > 0$).

Défi.
On dit que f est :
- *majorée* par une constante $M \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$;
- *minorée* par une constante $m \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$;
- *bornée* par deux constantes $m \leqslant M$ quand $\forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Prop.
La fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ est bornée si, et seulement si, la fonction réelle positive $|f| : D \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)|$ est majorée par une constante.

Défi.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un *minimum global* de f quand :
- ET $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$
- ET $\exists x_0 \in D,\ f(x_0) = m$

On parle de *minimum local* en un point x_* quand on se restreint autour de x_*.
Adaptation pour un maximum.

Défi.
On parle d'*extremum* pour tout minimum ou tout maximum.

9.2. Dérivation et représentation graphique

Prop.
Soit un intervalle I de plus d'un point, puis $f : I \to \mathbb{R}$. Supposons que f est dérivable en tout point de I. Ainsi :
1. f est constante ssi f' est nulle.
2. f est croissante ssi f' est positive.
3. f est strictement croissante ssi :
   - ET f' est positive ;
   - ET l'ensemble des points d'annulation de f' ne contient pas d'intervalle de plus d'un point.

On adapte pour la décroissance.

Défi.
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *deux fois dérivable* quand f est dérivable et que f' est dérivable ; auquel cas, on note $f'' = (f')'$: *dérivée seconde* de f.

Prop.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un r.o.n. $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Si f'' est positive, alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si f'' est négative, alors $\mathcal{C}$ est en-dessous de chacune de ses tangentes.

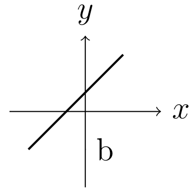
9.3. Fonctions réelles de référence

Prop. (Fonctions constantes)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction constante dérivable sur I.

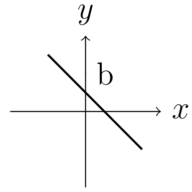
$$\forall x \in I,\ f'(x) = 0.$$

Prop. (Fonctions affines)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$.

$a > 0$



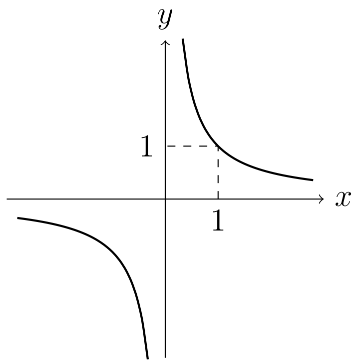
$a < 0$



$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a$.

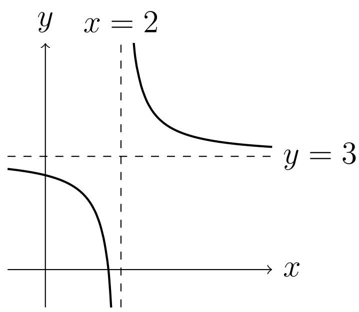
▷ La fonction inverse

Prop.
$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$.
- $\forall x \in D,\ -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$ (impaire).
- $\forall x \in D,\ f'(x) = \frac{-1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2}$.



▷ Les quotients de fonctions affines

Exem.
On a : $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$. $\forall x \in D,\ f(x) = \frac{3((x-2)+2)+1}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{7}x - \frac{2}{7}}$. La courbe est une hyperbole obtenue par translation.



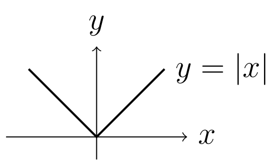
Prop.
Plus généralement : $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\}, \quad f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

▷ La fonction valeur absolue

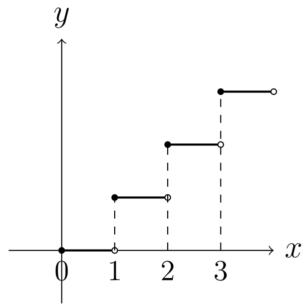
Prop.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$. (Paire).

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f'(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



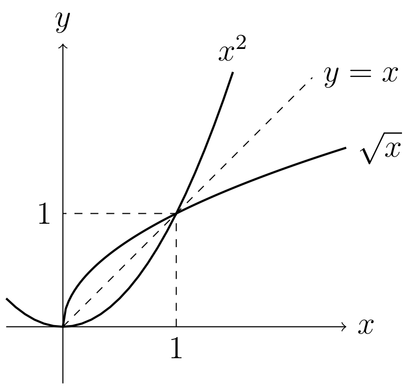
▷ La fonction partie entière

Défi.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$ où $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$. C'est l'unique entier e tel que $e \leqslant x < e+1$ (i.e. $x \in [e, e+1[$).



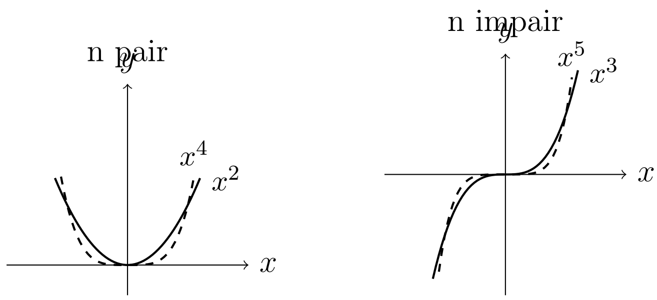
▷ Les fonctions carrés et racines carrées

Prop.
Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. (Forme canonique : parabole de sommet (α, β) et d'axe de symétrie $x = \alpha$).



▷ Puissance n-ième et racines n-ièmes

Prop.
Soit $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $1 < n < n'$.
- Si $n \equiv 0\ [2]$, alors $x \mapsto x^n$ est paire.
- Si $n \equiv 1\ [2]$, alors $x \mapsto x^n$ est impaire.



Défi.
On considère $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, on appelle *racine n-ième* de tout réel positif x, qu'on note $\sqrt[n]{x}$, l'unique réel positif dont la puissance n-ième est égale à x. Exemple : $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[4]{81} = 3$.

▷ Fonctions polynomiales et rationnelles

Défi.
On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire de fonctions puissances entières. Exemple : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x^1 + C_0x^0$ est définie par une liste de quatre constantes réelles.

Voca.
Ci-avant, quand $C_3 \neq 0$, on parle de fonction polynomiale du troisième degré (ou cubique) ; et quand $C_3 = 0$ et $C_2 \neq 0$, du second degré (quadratique) ; autrement, on retrouve les fonctions affines.

Défi.
On appelle *fonction rationnelle* tout quotient de deux fonctions polynomiales.

▷ Les fonctions exponentielles et réciproques

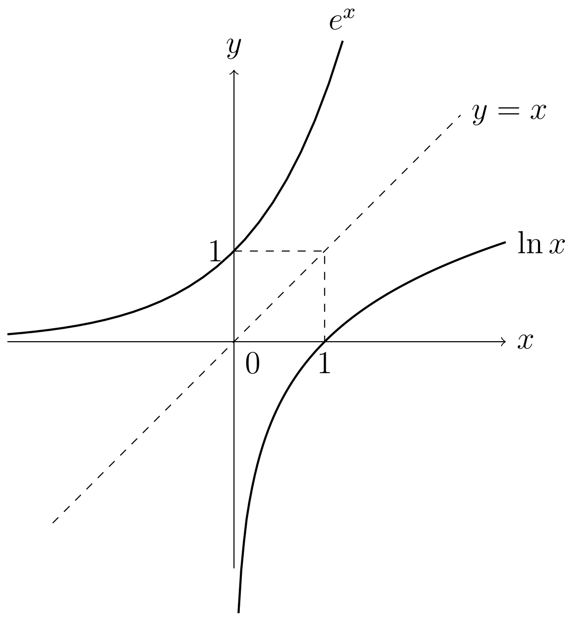
Défi.
exp est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est dérivable, de dérivée égale à elle-même et qui prend en 0 la valeur 1 :

$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

Défi.
Pour tout réel y de $]0, +\infty[$, on appelle *logarithme népérien* de y, qu'on note $\ln(y)$, l'unique réel dont l'image par l'exponentielle donne y.

Défi.
On considère $b \in]0, +\infty[$.
- Pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$, l'*exponentielle en base* b de x est $b^x \overset{\text{déf}}{=} \exp(x \ln b)$.
- Le *logarithme en base* b de tout $y \in]0, +\infty[$ est $\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ (lorsque $b \neq 1$).

Rema.
Les deux fonctions $\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\log_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sont réciproques l'une de l'autre.



▷ Fonction puissance réelle de degré d

Défi.
$d \in \mathbb{R}$. $\forall x \in]0,+\infty[,\ x^d \overset{\text{déf}}{=} \exp(d \ln x)$. C'est la puissance de degré d de x.

Prop. (Prolongement en 0)
- Si $d > 0,\ \lim_{x\to 0} x^d = 0$. (On pose $0^d = 0$).
- Si $d < 0,\ \lim_{x\to 0} x^d = +\infty$.

Remarque : $\forall x \in]0,+\infty[,\ x^0 = 1$. On pose $0^0 = 1$.

▷ Croissances comparées

Prop.
1. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in]0,+\infty[$. Ainsi :

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad ; \quad \frac{\ln(x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

2. Avec les notations de 1. :

$$e^{\alpha y}|y|^\beta \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0 \quad ; \quad y^\beta|\ln y|^\gamma \xrightarrow[y\to 0^+]{} 0.$$

▷ Fonctions circulaires et réciproques

Défi.
1. $\forall x \in [-1,1]$, on appelle *arccosinus* de x, qu'on note $\text{Arccos}(x)$, l'unique réel de $[0,\pi]$ dont le cosinus est égal à x.
$$\begin{cases} \text{Arccos}(x) \in [0,\pi] \\ \cos(\text{Arccos } x) = x \end{cases}$$
2. $\forall x \in [-1,1]$, on appelle *arcsinus* de x, noté $\text{Arcsin}(x)$, l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dont le sinus

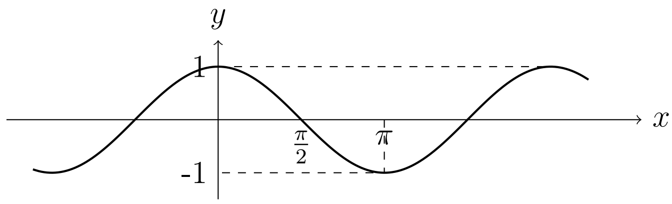
est égal à x.

$$\begin{cases} \text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(\text{Arcsin } x) = x \end{cases}$$

3. Pour tout x de $]-\infty, +\infty[$, on appelle *arctangente* de x, qu'on note $\text{Arctan}(x)$, l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x.

$$\begin{cases} \text{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(\text{Arctan } x) = x \end{cases}$$

Prop. (Représentation graphique dans un repère orthogonal)
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$. Donc cos est 2π-périodique. On peut restreindre son étude sur un segment de longueur 2π (ex : $[-\pi, \pi]$).
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)$. C'est que cos est paire. Ainsi on restreint à $[0, \pi]$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$. C'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 2 \times 0 - \cos(2\frac{\pi}{2} - x)$. Donc on peut restreindre l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.



Méth. (Construction de la courbe cosinus)
On récapitule la construction de la courbe de la fonction cosinus :
1. D'abord on cherche à connaître la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Une symétrie centrale par rapport au point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 0)$ donne la courbe sur $[0, \pi]$.
3. Une symétrie axiale par rapport à la droite des ordonnées (fonction paire) donne la courbe sur $[-\pi, \pi]$.
4. Enfin, des translations de vecteur $k \cdot 2\pi\vec{i}$ (la période), donnent la courbe sur $\mathbb{R}$.

Exem. (Calcul de parité)
Montrons que $g : s \mapsto \cos(\frac{\pi}{2} + s) - 0$ est impaire. Soit $s \in \mathbb{R}$.

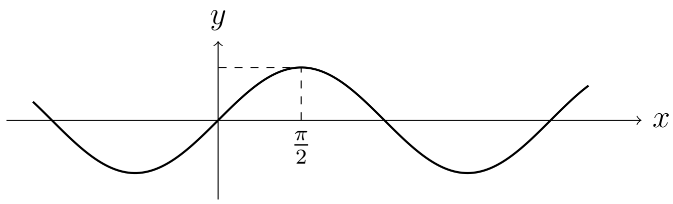
$$\begin{aligned} g(-s) &= \cos(\frac{\pi}{2} - s) \\ &= \cos(\frac{\pi}{2} - s) \\ &= \sin(s). \quad \text{(Cette réduction n'est pas suffisante, utilisons la propriété générale)} \end{aligned}$$

Reprenons la démonstration formelle : On sait que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$. Posons $\theta = \frac{\pi}{2} + s$. Alors $\pi - \theta = \pi - (\frac{\pi}{2} + s) = \frac{\pi}{2} - s$. Donc $\cos(\frac{\pi}{2} - s) = -\cos(\frac{\pi}{2} + s)$. Or $\cos(\frac{\pi}{2} - s) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - s))$ (parité du cosinus) $= \cos(s - \frac{\pi}{2})$. Le manuscrit montre directement : $\cos(\frac{\pi}{2} - s) = -\cos(\pi - (\frac{\pi}{2} - s)) = -\cos(\frac{\pi}{2} + s) = -g(s)$.

b. Les deux fonctions sinus et arcsinus

Prop.

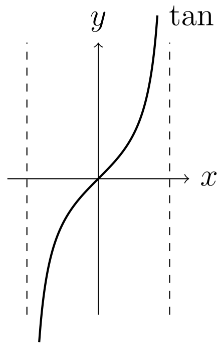
- La fonction sin est impaire et 2π-périodique. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.
- La fonction Arcsin est impaire, définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

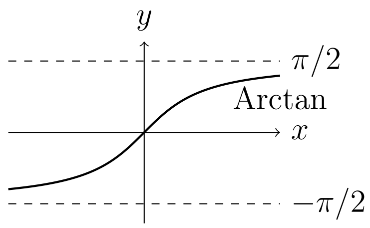


c. Les deux fonctions tangente et arctangente

Prop.
Notons $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On a :
- $\forall x \in D_{\tan},\ x \pm \pi \in D_{\tan}$ et $\tan(x \pm \pi) = \tan(x)$ (fonction π-périodique).
- $\forall x \in D_{\tan},\ -x \in D_{\tan}$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$ (fonction impaire).

Prop.
La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sa courbe admet deux asymptotes horizontales : $y = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$.





▷ Les fonctions hyperboliques

Défi.
Pour tout réel x, on appelle *cosinus hyperbolique* de x, noté $\mathrm{ch}(x)$, et *sinus hyperbolique* de x, noté $\mathrm{sh}(x)$, les réels :

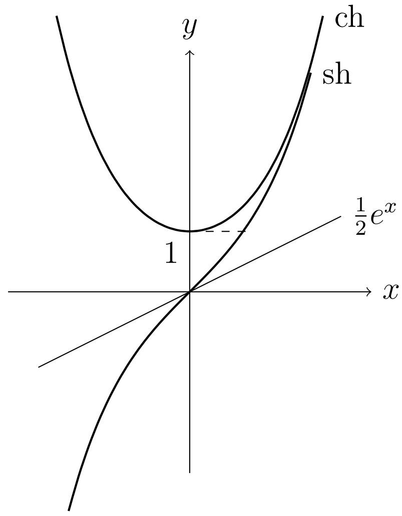
$$\mathrm{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Rema. (Analogie avec les complexes)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les formules d'Euler : $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. On observe alors les relations :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(iz) = \cos(z) \\ \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z) \end{cases}$$

Géométriquement, $(\cos t, \sin t)$ paramètre le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$. De même, $(\mathrm{ch}\ t, \mathrm{sh}\ t)$ paramètre la branche droite de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ (pour $x \geqslant 1$).

Prop.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Ainsi :
- $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$ (fonction paire).
- $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$ (fonction impaire).
- Relation fondamentale : $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.



Calc.
Preuve de la relation fondamentale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{2+2}{4} = 1 \quad (\text{car } e^x e^{-x} = 1).
\end{aligned}$$

Rema. (Parties paire et impaire)
On a les relations :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x} \end{cases}$$

ch et sh sont les uniques fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
- $\mathrm{ch} + \mathrm{sh} = \exp$
- ch est paire, sh est impaire.

On dit que ch et sh sont respectivement la *partie paire* et la *partie impaire* de l'exponentielle.