21 Droite réelle et suites numériques 1

21.1 Droite réelle achevée totalement ordonnée

Noti.
Les ensembles de nombres usuels sont supposés connus et maîtrisés, ils respectent la chaîne d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

À titre d'exemple,
- $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
- $1/10 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$;
- $1/3 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Prop.
Toute suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de la droite réelle peut être rangée par ordre croissant (respectivement décroissant) : il existe une unique suite $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ qui est croissante (respectivement décroissante) et qui partage les mêmes éléments, en tenant compte de leurs occurrences.

Noti.
On appelle *distance* entre deux réels a et b le réel positif

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a-b \geq 0 \\ b-a & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut également écrire $|a-b| = \max(a,b) - \min(a,b)$.

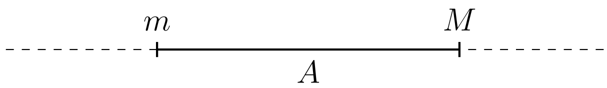
Défi.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- On dit qu'un réel M est un *majorant* de A si

$$\forall a \in A, \quad a \leq M.$$

- On dit qu'un réel m est un *minorant* de A si

$$\forall a \in A, \quad a \geq m.$$

Figu.



Défi.
Soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un réel M est un *majorant* de f s'il est un majorant de l'ensemble de ses valeurs $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$. Autrement dit,

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leq M.$$

De même, un réel m est un *minorant* de f si : $\forall x \in E, \quad f(x) \geq m$.

Exem.
- La fonction cos admet 1 pour majorant ; elles majorée par 1.
- La fonction réelle ln n'est pas majorée.

Rema.
Si M est un majorant d'une partie A, alors tout réel $M' \geq M$ est également un majorant de A. Cette propriété est analogue pour les minorants.

Défi.
On dit qu'un réel a^+ est le *maximum* d'une partie A non vide de $\mathbb{R}$ pour dire que

$$\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq a^+ \\ a^+ \in A. \end{cases}$$

Défi.
On adapte pour le *minimum.*

Défi.
On adapte pour la partie de $\mathbb{R}$ que constitues les valeurs d'une fonction.

Nota.

$$\max(A) \ ; \qquad \max\{f(x) : x \in I\} \ ; \qquad \max_{x \in I} f(x) \ ; \qquad \max_I f.$$

Exem.
Le nombre 2026 est un majorant de $[0, 2026[$ qui n'est pas un maximum, et 0 est le minimum de l'ensemble.

Défi.
On dit qu'un réel M^- est la *borne supérieure* d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ si M^- est le plus petit des majorants de A :
- $\forall a \in A, \quad a \leq M^-$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad (\forall a \in A, \quad a \leq \mu) \implies \mu \geq M^-$.

Rema.
Dans la pratique, on considère le plus souvent la contraposée de l'implication ci-haut :
- $\forall a \in A, \quad a \leq M^-$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu < M^- \implies (\exists a \in A, \quad a > \mu)$.

Exem.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\max(\cos(x)) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\min(x^2 + x + 1) = \frac{3}{4}$.

Rema.
La borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours définie : il est nécessaire que A soit à la fois non vide et majorée.

Nota.
- $\sup A, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
- $\sup\{f(x) : x \in I\} = \sup\limits_{x\in I} f(x) = \sup\limits_{I} f, \quad f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ou $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ avec $I \subset E$;
- $\sup f = \sup\limits_{E} f$ pour $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

Exem.
1. $0 = \sup]-\infty, 0] = \max]-\infty, 0]$.
2. $0 = \sup]-\infty, 0[$; partie sans maximum.
3. Soit $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$. Ainsi, $1 = \sup f = \max f$, et $0 = \inf f = \min f$.

Défi.
On dit qu'un réel m^+ est la *borne inférieure* d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ pour dire que m^+ est le plus grand des minorants de A :
- $\forall a \in A, \quad a \geq m^+$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad (\forall a \in A, \quad a \geq \mu) \implies \mu \leq m^+$.

Rema.
C'est que :
- $\forall a \in A, \quad a \geq m^+$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu > m^+ \implies (\exists a \in A, \quad a < \mu)$.

Rema.
Soit $m^+, M^- \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$.
- $M^- = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq M^- \\ \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu < M^- \implies (\exists a \in A, \quad \mu < a \leq M^-). \end{cases}$
- $m^+ = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \geq m^+ \\ \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu > m^+ \implies (\exists a \in A, \quad m^+ \leq a < \mu). \end{cases}$

Prop. Axiome de la borne supérieure dans $(\mathbb{R}, \leq)$
Si une partie des nombres réels est non vide et majorée alors elle admet une borne supérieure.

Prop. Axiome de la borne inférieure dans $(\mathbb{R}, \leq)$
Si une partie des nombres réels est non vide et minorée alors elle admet une borne inférieure.

Rema.
On a :

- si $\sup A$ existe, alors $-\sup A = \inf(-A)$;
- si $\inf A$ existe, alors $-\inf A = \sup(-A)$.

Prop. (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)
Toute partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si,

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad x \leq y \implies [x,y] \subset A.$$

Prop. (Propriété d'Archimède)
Si $0 < a \leq b$ alors on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $b/n < a$ et $b < na$.

Défi.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \max\{e \in \mathbb{Z} \mid e \leq x\} = \max(]-\infty, x] \cap \mathbb{Z})$.

Prop. (Partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, les propositions que voici sont équivalentes :
- $e = \lfloor x \rfloor$;
- $e \leq x < e+1$;
- $\exists f \in [0,1[, \quad x = e + f$.

Prop.
Soit $x \in \mathbb{R}$ puis $p \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, il existe un unique nombre décimal D_p tel que $D_p \leq x < D_p + 10^{-p}$ avec $10^p D_p \in \mathbb{Z}$. C'est la valeur approchée décimale par défaut, à précision 10^{-p}, du réel x.

Rema.
Plus bas, $x = \lim\limits_{p \to +\infty} D_p$; tout réel peut s'obtenir comme la limite d'une suite de nombres décimaux.

21.2 Généralités sur les suites réelles

Défi.
Une *suite* dans $\mathbb{R}$ est une fonction de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.

Nota.
$[\![n_0, +\infty[\![\to \mathbb{R}, \quad n \mapsto u_n$; $(u_n : n \in [\![n_0, +\infty[\![)$; $(u_n)_{n \in [\![n_0, +\infty[\![}$; $(u_n)_{n \geq n_0}$.

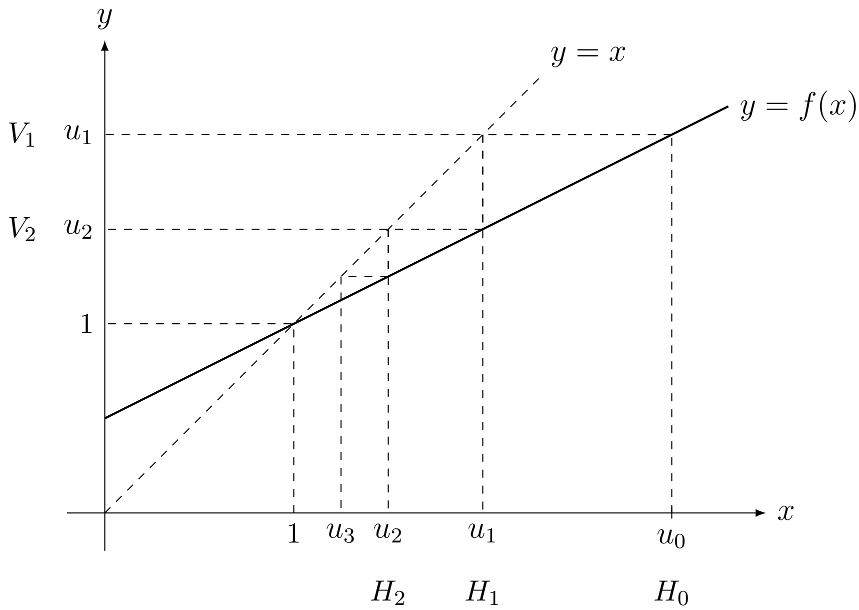
Nota.
L'ensemble des suites dans $\mathbb{R}$ indexées par $\mathbb{N}$ est notée $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exem.
$(n^2)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Nota.
$(n^2)_{n\geq 0} = (0^2, 1^2, 2^2, \dots)$.

Méth. (Représenter graphiquement des termes d'une suite)
Représentation des premiers termes de l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2} \end{cases}.$$



Procédure pour placer les points $H_n(u_n, 0)$:
Ayant placé $H_n(u_n, 0)$, on place le point $V_{n+1}(0, u_{n+1})$ sur l'axe des ordonnées à l'aide de la courbe d'équation $y = f(x)$ sachant que $u_{n+1} = f(u_n)$; puis on place sur l'axe des abscisses $H_{n+1}(u_{n+1}, 0)$ à l'aide de la droite d'équation $y = x$.

Défi.
On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Défi.
Une suite réelle *croissante* définie à partir d'un rang n_0 est une fonction de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante. On adapte pour la croissance stricte, la décroissance et la décroissance stricte.

Prop.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite est :
- croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$;
- strictement croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$;
- décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$;
- strictement décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$.

Rema.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La proposition $(\forall k \in [\![0, n]\!], \quad u_k \leq u_n)$ signifie $(\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n \implies u_k \leq u_n)$.

Exer. (Étudier la monotonie)
Suite : $\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Posons $u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2^{-(n+1)} - u_n = 2^{-(n+1)} > 0.$$

Ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite est strictement croissante.

Exer.
Étudions la monotonie de la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1 - 2^{-k})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Posons $v_n = \prod_{k=1}^{n}(1 - 2^{-k})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'abord, $\forall k \in [\![1, n]\!], 1 - 2^{-k} > 0$.
Donc $v_n > 0$.
Ensuite, $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{v_n \cdot (1-2^{-(n+1)})}{v_n} - 1 = -2^{-(n+1)} < 0$.
D'où la suite est strictement décroissante.

Méth. (Étudier la monotonie d'une suite réelle en comparant deux termes consécutifs quelconques)
- Si le terme général se prête à des additions, alors on peut comparer les accroissements à 0.
- Si le terme général se prête à des multiplications et qu'il est strictement positif, alors on peut comparer les accroissements relatifs à 1.

Prop.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par deux constantes si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée par une constante.

Prop.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$. On a ainsi,
- si $a = 0$, (u_n) est constante ;
- si $a > 0$, (u_n) est strictement croissante ;
- si $a < 0$, (u_n) est strictement décroissante.

Dans tous les cas, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = u_p + a \cdot (n - p)$.

Prop.
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et si
- $q - 1 = 0$ alors (u_n) est constante ;
- $q - 1 > 0$ alors (u_n) est strictement croissante ;
- $q - 1 < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Par ailleurs, on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = u_p \cdot q^{n-p}$.

Défi.
On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Prop. (Terme général d'une suite arithmético-géométrique)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - au_n = b$. Supposons $a \neq 1$. Ainsi on peut trouver une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \omega + ca^n$ où ω est l'unique constante telle que $\omega - a\omega = b$.

Exer.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2} \end{cases}$
On demande u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Étape 1 : On a $\{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n = 0\} = \{c(\frac{1}{2})^n : c \in \mathbb{R}\}$.
Étape 2 : La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{2}$.
Étape 3 : En conclusion, pour $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_0 = 1 + c \cdot (\frac{1}{2})^0$, i.e. $c = 1$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$.

21.3 Limite, finie ou infinie, d'une suite réelle

Défi.
On appelle *voisinage* dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ d'un élément ℓ comme une partie contenant au moins :
1. un intervalle centré $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, si ℓ est fini ;
2. une section finissante $[m, +\infty]$, où $m \in \mathbb{R}$, si $\ell = +\infty$;
3. une section commençante $[-\infty, M]$, où $M \in \mathbb{R}$, si $\ell = -\infty$.