

## 6 PRATIQUE CALCULATOIRE 2 : LIMITES ET DÉRIVÉES

### 6.1 Égalité sur les limites dans la droite réelle achevée

**Noti.**

La droite réelle achevée est l'ensemble  $\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . On note aussi cet ensemble  $[-\infty, +\infty]$ .

**Défi.** (Addition)

On étend l'addition entre les réels à  $\overline{\mathbb{R}}$  en posant :

- $x + (+\infty) = +\infty$  pour tout  $x \in ]-\infty, +\infty]$ .
- $x + (-\infty) = -\infty$  pour tout  $x \in [-\infty, +\infty[$ .
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$  et  $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ .

On résume cela par le tableau suivant :

$x \setminus y$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

**Prop.**

La limite de la somme est la somme des limites quand cette dernière est définie.

**Défi.**

La multiplication d'un élément  $x$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  par un réel  $r$  est définie par ce tableau :

$x \setminus r$	$r < 0$	$0$	$0 < r$
$-\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}$	$xr$	$0$	$xr$
$+\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$

**Prop.** (Combinaison linéaire)

Si  $f_1(x) \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$  et  $f_2(x) \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$ , alors pour tous réels  $r_1, r_2$  :

$$r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} r_1 l_1 + r_2 l_2.$$

**Défi.**

On définit le produit  $xy$  pour  $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$  comme suit :

$x \setminus y$	$-\infty$	$\begin{smallmatrix} y \in \mathbb{R} \\ y < 0 \end{smallmatrix}$	0	$\begin{smallmatrix} y \in \mathbb{R} \\ y > 0 \end{smallmatrix}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$	$-\infty$
$\begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R} \\ x < 0 \end{smallmatrix}$	$+\infty$	$xy$	0	$xy$	$-\infty$
0	Indét.	0	0	0	Indét.
$\begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{smallmatrix}$	$-\infty$	$xy$	0	$xy$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

**Prop.**

La limite du produit est égale au produit des deux limites lorsque ce dernier est défini.

**Déf.**

On considère  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ . On a le tableau suivant pour l'inverse  $1/x$  :

$x$	$-\infty$	$\begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R} \\ x < 0 \end{smallmatrix}$	$0^-$	0	$0^+$	$\begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R} \\ 0 < x \end{smallmatrix}$	$+\infty$
$1/x$	$0^-$	$1/x$	$-\infty$	Indéf.	$+\infty$	$1/x$	$0^+$

**Prop.**

- La limite d'un quotient est égale au quotient de la limite si cette dernière est définie.
- La limite de l'inverse est l'inverse de la limite si cette dernière est définie.

**Prop.** (Composition des limites)

Soient  $I, J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et de plus d'un point. Soient  $a \in \bar{I}$  et  $b \in \bar{J}$  (points ou extrémités). Soient  $\varphi: I \rightarrow J$  et  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supposons que

- ET  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ ;
- ET  $\lim_{y \rightarrow b} f(y)$  existe.

Alors la limite de la composée existe et

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ \varphi)(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(y).$$

**Prop.**

- Si pour tout  $x$  (dans l'ensemble de def.)  $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$  et si  $m(x)$  et  $M(x)$  admettent une seule et même limite réelle  $l$  quand  $x \rightarrow a$ , alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

- Si  $m(x) \leq f(x)$  et si  $m(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$  alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$$

- Si  $f(x) \leq M(x)$  et si  $M(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$  alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$$

**Prop.** (Croissance comparées)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- $\frac{x^n}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- $\frac{\ln(x)}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- $e^x x^n \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$
- $x^n \ln(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{x \rightarrow 0} 0$

**Méth.** (Levée d'indétermination)

- Forme  $\frac{\infty}{\infty}$  pour une fonction rationnelle en  $\pm\infty$  : on factorise par le terme de plus haut degré.

$$\frac{2x^2 - 3}{x - 2025} = \frac{2x^2(1 - \frac{3}{2x^2})}{x(1 - \frac{2025}{x})} = 2x \frac{1 - \dots}{1 - \dots} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- Forme  $\infty - \infty$  : factorisation. Ex :  $x^2 - x = x^2(1 - \frac{1}{x}) \rightarrow +\infty$ .

## 6.2 Inégalités sur les limites dans la droite réelle achevée

**Prop.**

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) < \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ , alors sur un certain voisinage de  $a$ ,  $f_1 \leq f_2$ .

**Prop.** (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Supposons que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$  existent. Ainsi,

- si pour tout  $x$  dans un certain voisinage de  $a$ ,  $f(x) \leq M$ , où  $M$  est une constante, alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq M$ , et on adapte pour «  $f(x) \geq m$  » ;
- si, pour tout  $x$  suffisamment proche de  $a$ ,  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ .

## 6.3 Dérivée

**Défi.**

On considère un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  possédant plus d'un point,  $a \in I$ , et une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit qu'un réel  $p$  est le *nombre dérivé* de la fonction  $f$  au point  $a$ , ou simplement de  $f$  en  $a$ , pour dire que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}]{} p.$$

Si un tel réel  $p$  existe, alors il est unique et on le note  $f'(a)$ .

**Prop.**

Dans les conditions ci-haut, si  $f'(a)$  existe alors la tangente à la courbe représentative dans un certain repère, au point  $A(a, f(a))$  admet une équation que voici :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

C'est-à-dire que c'est l'ensemble  $\{M(x, y) \mid y - f(a) = f'(a)(x - a)\}$ .

**Prop.** (Combinaison linéaire de fonctions dérivables en un point)

Soit un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  qui possède plus d'un point ;  $x_0 \in I$  ; puis  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x_0$  (i.e.  $f'(x_0)$  et  $g'(x_0)$  existent). Ainsi, pour tout  $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $rf + sg$  est dérivable en  $x_0$  et

$$(rf + sg)'(x_0) = rf'(x_0) + sg'(x_0).$$

**Prop.** (Produit de deux fonctions dérivables en un point)

Soit un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  possédant plus d'un point,  $x_0 \in I$ , et deux fonctions  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x_0$ . Ainsi, la fonction produit  $fg$  est dérivable en  $x_0$  et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

**Prop.** (Quotient de deux fonctions dérivables en un point)

Soit un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  possédant plus d'un point,  $x_0 \in I$ , et deux fonctions  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que

- ET pour tout  $x \in I$ ,  $g(x) \neq 0$  ;
- ET  $g$  est dérivable en  $x_0$  ;
- ET  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

Ainsi, la fonction quotient  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $x_0$  et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

**Prop.** (Dérivation composée)

Soit deux intervalles  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{R}$  qui possèdent plus d'un point ;  $x_0$  un point de  $J$  ; puis  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$  à valeurs dans  $I$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  (en sorte que  $f(\varphi(x))$  existe pour tout  $x \in J$ ). Supposons que

- ET  $\varphi'(x_0)$  existe ;
- ET  $f'(\varphi(x_0))$  existe.

Ainsi, la composée de  $\varphi$  suivi de  $f$ , ou composée de  $f$  suivant  $\varphi$ , est dérivable en  $x_0$  de nombre dérivé

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

**Prop.** (Dérivation en un point de la réciproque)

Soient  $I, J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et de plus d'un point. Soit  $f: I \rightarrow J$  et  $g: J \rightarrow I$  réciproque l'une de l'autre. Soit  $x_0 \in I$ . Supposons que

- ET  $f$  est dérivable en  $x_0$  ;
- ET  $f'(x_0) \neq 0$  ;
- ET  $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) = x_0$ .

Ainsi  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$  et  $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Défi.**

On considère un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  qui possède plus d'un point ;  $t_0 \in I$ , et  $\Phi: I \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que la fonction complexe  $\Phi$  est dérivable en  $t_0$  pour dire que les deux fonctions réelles  $\text{Re}(\Phi): I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \text{Re}(\Phi(t))$  et  $\text{Im}(\Phi): I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \text{Im}(\Phi(t))$  sont dérivables en  $t_0$  ; le cas échéant :

$$\Phi'(t_0) \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Re}(\Phi))'(t_0) + i(\text{Im}(\Phi))'(t_0).$$

**Déf.**

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , on pose

$$\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)).$$

**Prop.**

Soit  $u: I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $t \in I$ . Ainsi,

$$(\exp \circ u)'(t) = \exp(u(t))u'(t). \quad ((e^u)' = u'e^u).$$

*Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.*