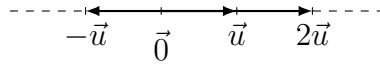


4. PLAN COMPLEXE 1 : $\mathbb{C}, +, \times, |\cdot|$

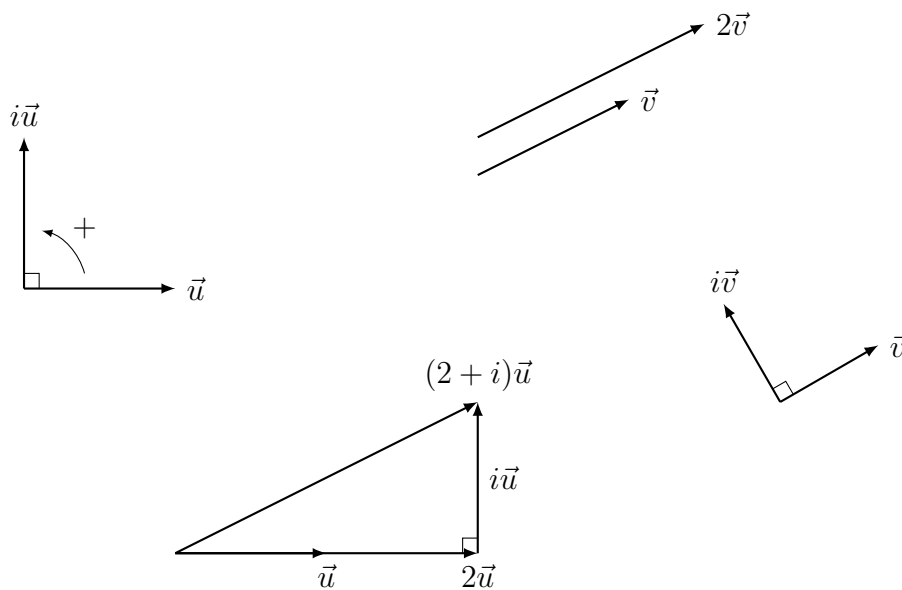
4.1. Nombres complexes et vecteurs du plan orienté

Noti.

Les nombres réels peuvent être regardés comme des multiplicateurs pour passer des vecteurs non nuls de la droite à tous les vecteurs de cette même droite.



Dans le plan orienté, on imagine un « nombre » par lequel la multiplication a pour effet de réaliser le quart de tour direct.



Noti. (Le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, extension du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$)

1. Les nombres réels sont des nombres complexes.
2. L'addition entre les nombres complexes :
 - a. est associative : $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
 - b. est commutative : $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
 - c. admet le nombre 0 pour unique élément neutre : $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = z = 0 + z$;
 - d. admet pour tout nombre complexe z , un unique opposé noté $-z$: $(-z) + z = 0 = z + (-z)$.
3. La multiplication entre les nombres complexes est :
 - a. associative;
 - b. est commutative;
 - c. admet le nombre 1 pour unique élément neutre;
 - d. admet pour tout nombre complexe z non nul, un unique inverse noté z^{-1} .
4. Par rapport à l'addition entre les complexes, la multiplication entre les complexes est doublement distributive.
5. Il existe au moins un nombre complexe dont le carré (le produit du nombre par lui-même) est égal à -1 . Notons i un tel nombre dans toute la suite.
6. Pour tout nombre complexe, on peut l'exprimer comme la somme :
 - du produit de 1 par un réel,
 - et du produit de i par un réel.

C'est que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \exists b \in \mathbb{R}, \quad z = 1a + ib.$$

4.2. Nombres réels partie réelle et partie imaginaire d'un complexe

Prop.

Pour tous réels x et y , si $x + iy = 0$, alors $x = 0$ et $y = 0$.

Prop. (Unicité de la forme algébrique d'un complexe)

Soit un nombre complexe z . Ainsi, il existe exactement un couple (x, y) de réels tel que $x + iy = z$.

Défi. (Partie réelle et partie imaginaire)

On considère un complexe z . On appelle *partie réelle* et *partie imaginaire* de z qu'on note respectivement $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$, les nombres réels tels que :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = z \\ \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prop.

Soient deux complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, où $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Prop. (Linéarité sur \mathbb{R} de $\operatorname{Re}(\cdot)$ et $\operatorname{Im}(\cdot)$)

Pour tous complexes z_1 et z_2 , pour tous réels r_1 et r_2 :

$$\operatorname{Re}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \operatorname{Re}(z_1) + r_2 \operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \operatorname{Im}(z_1) + r_2 \operatorname{Im}(z_2)$$

Prop.

L'inverse de i est égal à son opposé : $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$.

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{z}{i}\right) = \operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}\left(\frac{z}{i}\right) = -\operatorname{Re}(z). \end{cases}$$

Prop. (Caractérisation des réels parmi les complexes)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $z \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{Im}(z) = 0$
- $z = \operatorname{Re}(z)$

Prop. (Caractérisation des imaginaires purs)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a. $z \in i\mathbb{R}$
- b. $\operatorname{Re}(z) = 0$
- c. $z = i\operatorname{Im}(z)$

Rema.

$$z \in i\mathbb{R} \iff \frac{z}{i} \in \mathbb{R}.$$

4.3. Nombre complexe conjugué d'un complexe

Défi.

Le nombre complexe *conjugué* de z , noté \bar{z} , est défini par $\bar{z} \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$.

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z = \bar{\bar{z}}$.

Prop.

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
- si $z_1 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$.

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \frac{\bar{z} + z}{2} \\ \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

4.4. Nombre réel module d'un complexe

Défi.

Le nombre réel *module* de z , noté $|z|$, est $|z| \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \in \mathbb{R}_+$.

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$.

Prop. (Formule algébrique d'un quotient)

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tq $z_1 \neq 0$. Alors

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) = \frac{\operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2)}{|z_1|^2} \\ \operatorname{Im} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) = \frac{\operatorname{Im}(\overline{z_1} z_2)}{|z_1|^2} \end{cases}$$

Méth. (pour écrire un quotient sous forme algébrique)

Exemple :

$$\frac{1}{1+i} = \frac{(1-i) \times 1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Prop.

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- Si $z_1 \neq 0$, $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$.

Prop.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,

- $|r| = r$;
- $|r \cdot z| = r|z|$.

Prop.

On considère un nombre complexe z . Ainsi,

- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.
- Si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}$ alors $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$.
- $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- Si, et seulement si, $z \in i\mathbb{R}$ alors $|\operatorname{Im}(z)| = |z|$.

Prop. (Inégalité triangulaire pour les complexes)

Soit deux complexes z_1 et z_2 . Ainsi,

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- Si $(z_1 = 0) \vee (\exists r \in \mathbb{R}_+, z_2 = r z_1)$ alors $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Prop.

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ainsi $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Défi. (Disque)

On considère un complexe a et un réel positif r . On appelle *disque* fermé de centre a et de rayon r , l'ensemble des complexes z tels que $|z - a| \leq r$.

4.5. Nombres complexes et géométrie du plan orienté

Défi.

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. À tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ du plan, on associe le nombre complexe

$$z = x + iy,$$

appelé *affiche* de \vec{v} .

Réciproquement, à tout complexe $z = x + iy$, on associe le vecteur

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

appelé *vecteur image* de z .

2. L'*affiche* d'un point M est l'afixe du vecteur \vec{OM} .

Réciproquement, le *point image* d'un complexe $z = x + iy$ est le point M de coordonnées (x, y) , que l'on note $M(z)$.

Prop.

Soit \vec{v}_1 et \vec{v}_2 deux vecteurs, z_1 et z_2 deux complexes et r_1 et r_2 deux réels. Si \vec{v}_1 admet pour affixe z_1 et \vec{v}_2 admet pour affixe z_2 , alors $r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2$ admet pour affixe $r_1z_1 + r_2z_2$.

Prop.

Soit \vec{v} un vecteur du plan, d'afixe z dans un repère orthonormé. Alors $\|\vec{v}\| = |z|$.

Prop.

Soient \vec{v}_1 et \vec{v}_2 deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2 dans un repère orthonormé. Alors \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.

En particulier, soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan. Alors A , B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Prop.

Soient \vec{v}_1 et \vec{v}_2 deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2 dans un repère orthonormé. Alors

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \iff \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}.$$

Prop.

Soit un vecteur $\vec{b}(b)$. Soit un point $M(z)$. Soit un point $M'(z')$. Ainsi, $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par translation de vecteur \vec{b} si et seulement si $z' = z + b$.

Prop.

Soit un réel θ . Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre l'origine et d'angle θ si et seulement si $z' = z(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Prop.

Par suite, $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ si et seulement si $z' - \omega = (z - \omega)(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Prop.

Soit un réel non nul k .

- $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre l'origine et de rapport k si et seulement si $z' = zk$ ($= kz$).
- $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k si et seulement si $z' - \omega = (z - \omega)k$.

Prop.

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie orthogonale par rapport au premier axe du repère si et seulement si $z' = \bar{z}$.

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie orthogonale par rapport au second axe du repère si et seulement si $z' = -\bar{z}$.