Exercice 1 (Paramétrisation rationnelle du cercle unité)

1. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $w = (1+iv)/(1-iv) \Leftrightarrow v = -i(w-1)/(w+1)$.

Soit $v \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et $w \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
On part de l'égalité $w = (1+iv)/(1-iv)$. On cherche à exprimer v en fonction de w.
$w(1-iv) = 1+iv$
$w - iw v = 1 + iv$
$w - 1 = iv + iw v$
$w - 1 = i v (1+w)$

Comme $w \neq -1$, on a $w+1 \neq 0$, on peut donc diviser par $i(w+1)$:
$v = (w-1) / (i(w+1))$
Pour simplifier l'expression, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $-i$:
$v = -i(w-1) / (-i * i(w+1))$
$v = -i(w-1) / (-i^2(w+1))$
$v = -i(w-1) / (1 * (w+1))$
$v = -i(w-1)/(w+1)$

L'équivalence est donc démontrée, car chaque étape de calcul est réversible sous les conditions données.

2. Montrer géométriquement que $C(t) \in U$.

On note A le point d'affixe i, B le point d'affixe -i et P le point d'affixe t (P est sur l'axe des réels).
On veut montrer que $|C(t)| = 1$.
$|C(t)| = |(1+it)/(1-it)| = |i(-i+t)|/| -i(i+t)| = |i||t-i| / (|-i||t-(-i)|) = |t-i| / |t-(-i)|$
Or, $|t-i|$ est la distance PA, et $|t-(-i)|$ est la distance PB.
L'ensemble des points équidistants de A et B est la médiatrice du segment [AB]. Le segment [AB] est porté par l'axe des imaginaires purs. Sa médiatrice est donc l'axe des réels.
Comme P(t) est un point de l'axe des réels, il est équidistant de A(i) et B(-i).
On a donc PA = PB, soit $|t-i| = |t-(-i)|$.
Par conséquent, $|C(t)| = |t-i| / |t-(-i)| = 1$.
Ceci prouve que C(t) appartient au cercle unité U.

3. Montrer algébriquement que $C(t) \in U$.

Pour montrer que $C(t) \in U$, il suffit de montrer que $|C(t)| = 1$, ce qui est équivalent à $|C(t)|^2 = 1$.
$|C(t)|^2 = C(t) * C(t)$
$C(t) = (1+it)/(1-it)$. Comme t est réel, le conjugué de t est t.
$C(t) = (1-it)/(1+it) = 1 / C(t)$.
Ainsi, $|C(t)|^2 = C(t) * (1/C(t)) = 1$.
Comme le module est un nombre réel positif, $|C(t)| = 1$, donc $C(t) \in U$.

4. Montrer que $C(t) \in U \setminus \{-1\}$.

On a déjà montré que $C(t) \in U$. Il reste à montrer que $C(t) \neq -1$.
Supposons par l'absurde que $C(t) = -1$.
$(1+it)/(1-it) = -1$
$1+it = -(1-it)$
$1+it = -1+it$
$1 = -1$
Ceci est une contradiction. Donc l'hypothèse $C(t) = -1$ est fausse.
Par conséquent, $C(t) \in U \setminus \{-1\}$.

5. Donner la forme algébrique du complexe C(t).

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$C(t) = (1+it)/(1-it)$
On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :
$C(t) = (1+it)(1+it) / ((1-it)(1+it))$
$C(t) = (1 + 2it + (it)^2) / (1^2 - (it)^2)$
$C(t) = (1 + 2it - t^2) / (1 - (-t^2))$
$C(t) = (1 - t^2 + 2it) / (1 + t^2)$
$C(t) = (1-t^2)/(1+t^2) + i * (2t)/(1+t^2)$
La partie réelle est $Re(C(t)) = (1-t^2)/(1+t^2)$ et la partie imaginaire est $Im(C(t)) = (2t)/(1+t^2)$.

6. Supposons ici que $u \neq 1$. Montrer géométriquement que $H(u) \in i\mathbb{R}$.

Soit $u \in U \setminus \{-1, 1\}$. Soit M le point d'affixe u, A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe -1.
$H(u) = (u-1)/(u+1) = (u-1)/(u-(-1))$.
$arg(H(u)) = arg(u-1) - arg(u-(-1))\ [2\pi]$
$arg(H(u)) = (vec(e_1), vec(AM)) - (vec(e_1), vec(BM))\ [2\pi]$
$arg(H(u)) = (vec(BM), vec(AM))\ [2\pi]$
Les points M, A et B sont sur le cercle unité U. Le segment [AB] est un diamètre de ce cercle.
D'après le théorème de l'angle droit et du cercle, le triangle AMB est rectangle en M.
L'angle (vec(BM), vec(AM)) vaut donc $\pm\pi/2$.
Ainsi, $arg(H(u)) = \pm\pi/2\ [2\pi]$, ce qui signifie que H(u) est un nombre imaginaire pur non nul.
Donc $H(u) \in i\mathbb{R}$.

7. Montrer algébriquement que $H(u) \in i\mathbb{R}$.

Un complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z = -z$ (avec $z \neq 0$).
Calculons H(u).
$H(u) = ((u-1)/(u+1)) = (u-1)/(u+1)$
Comme $u \in U$, on a $|u|=1$, donc $u*u = 1$, d'où $u = 1/u$.
$H(u) = (1/u - 1) / (1/u + 1)$
$H(u) = ((1-u)/u) / ((1+u)/u)$
$H(u) = (1-u)/(1+u) = -(u-1)/(u+1) = -H(u)$
Comme $u \neq \pm 1$, H(u) n'est pas nul. La condition $H(u) = -H(u)$ prouve que H(u) est un imaginaire pur.

8. Montrer que pour tout $z \in U$, $z + 1 = 0 \Leftrightarrow Re(z) + 1 = 0$.

Soit $z \in U$. On pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $x^2+y^2=1$.
($\Rightarrow$) Supposons $z+1=0$, alors $z=-1$.
$Re(z) = Re(-1) = -1$. Donc $Re(z)+1 = -1+1 = 0$.
($\Leftarrow$) Supposons $Re(z)+1=0$, alors $Re(z)=x=-1$.
Comme $z \in U$, on a $x^2+y^2=1$.
En remplaçant x par -1, on a $(-1)^2+y^2=1$, soit $1+y^2=1$, ce qui implique $y^2=0$, donc $y=0$.
Le seul complexe de U ayant une partie réelle égale à -1 est $z = -1+0i = -1$.
Si $z=-1$, alors $z+1=0$.
L'équivalence est donc bien démontrée.

9. Donner la forme algébrique du complexe H(u).

Soit $u = x+iy$ avec $x^2+y^2=1$. $u \neq -1$ donc $x \neq -1$.
$H(u) = (u-1)/(u+1) = (x+iy-1)/(x+iy+1) = ((x-1)+iy)/((x+1)+iy)$
On multiplie par le conjugué du dénominateur :
$H(u) = [((x-1)+iy)((x+1)-iy)] / [((x+1)+iy)((x+1)-iy)]$
$H(u) = [(x-1)(x+1) - i(x-1)y + i(x+1)y + y^2] / [(x+1)^2 + y^2]$
$H(u) = [x^2-1+y^2 + iy(-x+1+x+1)] / [x^2+2x+1+y^2]$
Comme $x^2+y^2=1$, le numérateur devient $(1-1 + 2iy) = 2iy$.
Le dénominateur devient $(x^2+y^2+2x+1) = 1+2x+1 = 2x+2 = 2(Re(u)+1)$.
$H(u) = 2iy / (2(x+1)) = iy / (x+1)$
Ainsi, $Re(H(u)) = 0$ et $Im(H(u)) = y/(x+1) = Im(u)/(Re(u)+1)$.

10. Résoudre, géométriquement ou algébriquement, l'équation et l'inéquation...
Soit $z \in \mathbb{C}$.
a) $|(z-1)/(z+1)| = 1$
Pour $z \neq -1$, l'équation est équivalente à $|z-1| = |z+1|$.
Géométriquement, cela signifie que la distance du point M(z) au point A(1) est égale à la distance du point M(z) au point B(-1). L'ensemble des solutions est la médiatrice du segment [AB]. Le segment [AB] est sur l'axe des réels, sa médiatrice est donc l'axe des imaginaires purs.
Solution : L'ensemble des solutions est $i\mathbb{R}$.

b) $|(z-1)/(z+1)| \leq 1$
Pour $z \neq -1$, l'inéquation est équivalente à $|z-1| \leq |z+1|$.
Géométriquement, cela signifie que la distance de M(z) à A(1) est inférieure ou égale à la distance de M(z) à B(-1). L'ensemble solution est le demi-plan fermé contenant A(1) et délimité par la médiatrice de [AB] (l'axe $i\mathbb{R}$). Il s'agit du demi-plan des complexes à partie réelle positive ou nulle.
Solution : L'ensemble des solutions est $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$.

11. Même demande pour l'équation et l'inéquation :
Soit $z \in \mathbb{C}$.
a) $|(z-i)/(z+i)| = 1$
Pour $z \neq -i$, l'équation est équivalente à $|z-i| = |z+i| = |z-(-i)|$.
Géométriquement, l'ensemble des points M(z) équidistants de C(i) et D(-i) est la médiatrice du segment [CD]. Le segment [CD] est sur l'axe des imaginaires, sa médiatrice est donc l'axe des réels.
Solution : L'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

b) $|(z-i)/(z+i)| \leq 1$
Pour $z \neq -i$, l'inéquation est équivalente à $|z-i| \leq |z+i|$.
Géométriquement, l'ensemble solution est le demi-plan fermé contenant C(i) et délimité par la médiatrice de [CD] (l'axe des réels). Il s'agit du demi-plan des complexes à partie imaginaire positive ou nulle.
Solution : L'ensemble des solutions est $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

Exercice 2 (Différence symétrique de deux parties d'un ensemble)

1. Faire un dessin où l'on mettra en valeur la différence symétrique.

(Dans un diagramme de Venn, la différence symétrique $A \Delta B$ correspond à la réunion des zones qui sont dans A mais pas dans B, et dans B mais pas dans A. C'est l'union des deux ensembles à laquelle on a retiré leur intersection).

`![alt text](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/46/Venn0111.svg/300px-Venn0111.svg.png)`

La zone colorée représente $A \Delta B$.

2. Calculer les différences symétriques suivantes : $A \Delta E$, $A \Delta \varnothing$, $A \Delta A$, $A \Delta \bar{A}$.
$A \Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \bar{A}$.
$A \Delta \varnothing = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A \setminus \varnothing = A$.
$A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \varnothing$.
$A \Delta \bar{A} = (A \cup \bar{A}) \setminus (A \cap \bar{A}) = E \setminus \varnothing = E$.

3. Supposons $A \supset B$. Simplifier $A \Delta B$.
Si $A \supset B$, alors $A \cup B = A$ et $A \cap B = B$.
$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.

4. Montrer que $A \Delta B = B \Delta A$.
$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
$B \Delta A = (B \cup A) \setminus (B \cap A)$.
L'union ($\cup$) et l'intersection ($\cap$) sont des opérations commutatives, donc $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.

Par conséquent, $A\Delta B = B\Delta A$. La différence symétrique est commutative.

5. Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.
$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$
$= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$ (Loi de De Morgan)
$= [A \cap (\bar{A} \cup \bar{B})] \cup [B \cap (\bar{A} \cup \bar{B})]$ (Distributivité de $\cap$ sur $\cup$)
$= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B})$
$= \varnothing \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup \varnothing$
$= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$
Or, par définition, $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ et $B \setminus A = B \cap \bar{A}$.
Donc, $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. L'égalité est démontrée.

6. Calculer $\overline{A\Delta B}$.
On a $A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.
Calculons le complémentaire :
$\overline{A\Delta B} = \overline{((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B))}$
$= \overline{(A \cap \bar{B})} \cap \overline{(\bar{A} \cap B)}$ (Loi de De Morgan)
$= (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$ (Loi de De Morgan et involution)
$= [(\bar{A} \cup B) \cap A] \cup [(\bar{A} \cup B) \cap \bar{B}]$ (Distributivité)
$= (\bar{A} \cap A) \cup (B \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})$
$= \varnothing \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \varnothing$
$= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$.

7. Montrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
On montre l'égalité par analyse des éléments. Soit $x \in E$.
$x \in X\Delta Y$ si et seulement si x appartient à exactement un des deux ensembles X ou Y.
$x \in (A\Delta B)\Delta C \Leftrightarrow (x \in A\Delta B$ et $x \notin C)$ ou $(x \notin A\Delta B$ et $x \in C)$.

Cas 1 : $x \in A\Delta B$ et $x \notin C$.
$(x \in A, x \notin B, x \notin C)$ ou $(x \notin A, x \in B, x \notin C)$. Dans les deux cas, x appartient à exactement un des trois ensembles.

Cas 2 : $x \notin A\Delta B$ et $x \in C$.
$x \notin A\Delta B$ signifie que x est dans les deux ensembles (A et B) ou dans aucun.
$(x \in A, x \in B, x \in C)$ ou $(x \notin A, x \notin B, x \in C)$. Dans le premier sous-cas, x appartient aux trois ensembles. Dans le second, il appartient à un seul ensemble (C).

Conclusion : $x \in (A\Delta B)\Delta C$ si et seulement si x appartient à exactement un des ensembles A, B, C, ou aux trois en même temps.
Par commutativité de l'opération Δ, $A\Delta(B\Delta C) = (B\Delta C)\Delta A$. L'analyse pour $(B\Delta C)\Delta A$ est symétrique à la précédente en permutant les rôles de A, B, C, et mène donc à la même conclusion.
Ainsi, un élément x appartient à $A\Delta(B\Delta C)$ si et seulement si il appartient à un seul des ensembles ou aux trois.
Les deux ensembles $(A\Delta B)\Delta C$ et $A\Delta(B\Delta C)$ sont donc constitués des mêmes éléments.
L'égalité est prouvée, la différence symétrique est associative.

8. Trouver toutes les parties N de E telles que $\forall A \in P(E), A\Delta N = A$.
D'après la question 2, on a $A\Delta\varnothing = A$. Donc $N = \varnothing$ est une solution.
Montrons que c'est la seule.
Prenons le cas particulier $A=\varnothing$. L'équation devient $\varnothing\Delta N = \varnothing$.
Or, $\varnothing\Delta N = (\varnothing \cup N) \setminus (\varnothing \cap N) = N \setminus \varnothing = N$.
Donc $N = \varnothing$.
L'unique partie N vérifiant la condition est $N = \varnothing$ (élément neutre).

9. Soit $A \in P(E)$. Trouver toutes les parties S de E telles que $A\Delta S = \varnothing$.
D'après la question 2, $A\Delta A = \varnothing$. Donc $S = A$ est une solution.
Montrons que c'est la seule.
$A\Delta S = \varnothing \Leftrightarrow (A \cup S) \setminus (A \cap S) = \varnothing$.
Ceci signifie que $A \cup S = A \cap S$.
Or, on a toujours $A \cap S \subset A \cup S$. L'égalité implique donc $A \cup S \subset A \cap S$.
Soit $x \in A \cup S$. Alors $x \in A \cap S$.

Si $x \in A$, alors $x \in A \cup S$, donc $x \in A \cap S$, ce qui implique $x \in S$. Donc $A \subset S$.

Si $x \in S$, alors $x \in A \cup S$, donc $x \in A \cap S$, ce qui implique $x \in A$. Donc $S \subset A$.
Par double inclusion, on conclut que $S = A$.
L'unique partie S est $S = A$ (chaque élément est son propre symétrique).

10. Montrer que $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
On part du membre de droite :
$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = [(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap B)]$ (d'après Q5)
$= [(A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}] \cup [(A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)}]$
$= [(A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})] \cup [(A \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})]$
$= [A \cap B \cap (\bar{A} \cup \bar{C})] \cup [A \cap C \cap (\bar{A} \cup \bar{B})]$
$= (A \cap B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$
Comme $A \cap \bar{A} = \varnothing$, les premier et troisième termes sont nuls.
$= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$
On factorise par $A \cap$:
$= A \cap [(B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B})]$
$= A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)]$
$= A \cap (B \Delta C)$.
L'égalité est prouvée. L'intersection est distributive sur la différence symétrique.

11. Soit un élément x de E. Montrer que $1_{A\Delta B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) + 2r$ où r est un entier relatif.
On procède par disjonction de cas :

Cas 1 : $x \in A$ et $x \in B$ (i.e. $x \in A \cap B$).
Alors $x \notin A\Delta B$. Donc $1_{A\Delta B}(x) = 0$.
D'autre part, $1_A(x)=1$ et $1_B(x)=1$.
$1_A(x) + 1_B(x) = 1+1=2$.
On a bien $0 = 2 + 2r$ en choisissant $r = -1$.

Cas 2 : $x \in A$ et $x \notin B$ (i.e. $x \in A \setminus B$).
Alors $x \in A\Delta B$. Donc $1_{A\Delta B}(x) = 1$.
D'autre part, $1_A(x)=1$ et $1_B(x)=0$.
$1_A(x) + 1_B(x) = 1+0=1$.
On a bien $1 = 1 + 2r$ en choisissant $r = 0$.

Cas 3 : $x \notin A$ et $x \in B$ (i.e. $x \in B \setminus A$).
Alors $x \in A\Delta B$. Donc $1_{A\Delta B}(x) = 1$.
D'autre part, $1_A(x)=0$ et $1_B(x)=1$.
$1_A(x) + 1_B(x) = 0+1=1$.
On a bien $1 = 1 + 2r$ en choisissant $r = 0$.

Cas 4 : $x \notin A$ et $x \notin B$ (i.e. $x \notin A \cup B$).
Alors $x \notin A\Delta B$. Donc $1_{A\Delta B}(x) = 0$.
D'autre part, $1_A(x)=0$ et $1_B(x)=0$.
$1_A(x) + 1_B(x) = 0+0=0$.
On a bien $0 = 0 + 2r$ en choisissant $r = 0$.

Dans tous les cas, l'égalité est vérifiée pour un certain entier relatif r.
Cela revient à dire que $1_{A\Delta B}(x) \equiv 1_A(x) + 1_B(x)$ [mod 2].