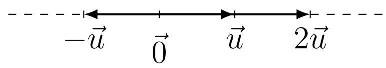
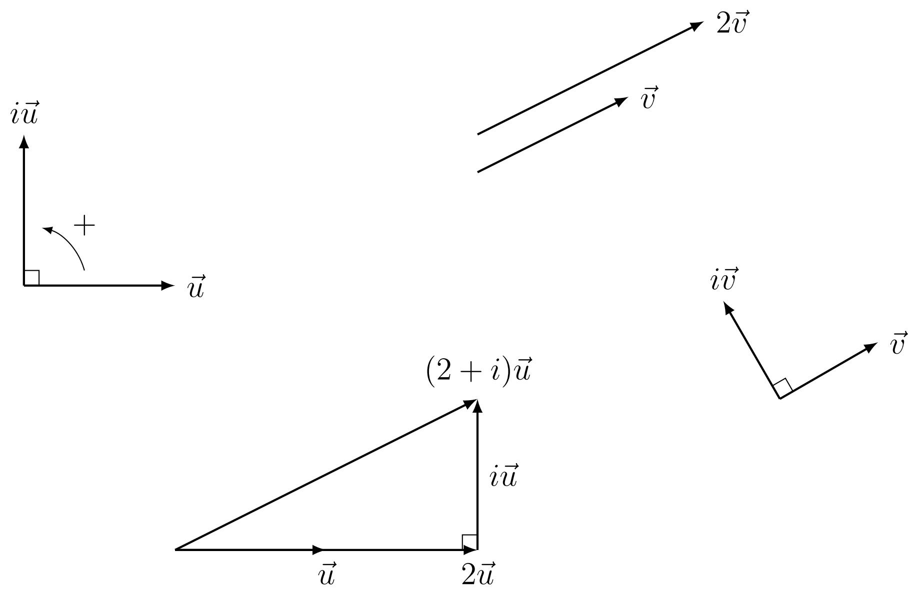
4 Plan complexe 1 : $\mathbb{C}, +, \times, |\cdot|$

4.1 Nombres complexes et vecteurs du plan orienté

Noti.
Les nombres réels peuvent être regardés comme des multiplicateurs pour passer des vecteurs non nuls de la droite à tous les vecteurs de cette même droite.



Dans le plan orienté, on imagine un « nombre » par lequel la multiplication a pour effet de réaliser le quart de tour direct.



Noti. (Le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, extension du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$)
1. Les nombres réels sont des nombres complexes.
2. L'addition entre les nombres complexes :
   a. est associative : $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall z_3 \in \mathbb{C}, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
   b. est commutative : $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
   c. admet le nombre 0 pour unique élément neutre : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z + 0 = z = 0 + z$;
   d. admet pour tout nombre complexe z, un unique opposé noté $-z$: $(-z)+z = 0 = z+(-z)$.
3. La multiplication entre les nombres complexes est :
   a. associative ;
   b. est commutative ;
   c. admet le nombre 1 pour unique élément neutre ;
   d. admet pour tout nombre complexe z non nul, un unique inverse noté z^{-1}.
4. Par rapport à l'addition entre les complexes, la multiplication entre les complexes est doublement distributive.
5. Il existe au moins un nombre complexe dont le carré (le produit du nombre par lui-même) est égal à -1. Notons i un tel nombre dans toute la suite.
6. Pour tout nombre complexe, on peut l'exprimer comme la somme :
   - du produit de 1 par un réel,
   - et du produit de i par un réel.

C'est que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \exists b \in \mathbb{R}, \quad z = 1a + ib.$$

4.2 Nombres réels partie réelle et partie imaginaire d'un complexe

Prop.
Pour tous réels x et y, si $x + iy = 0$, alors $x = 0$ et $y = 0$.

Prop. (Unicité de la forme algébrique d'un complexe)
Soit un nombre complexe z. Ainsi, il existe exactement un couple (x, y) de réels tel que $x+iy = z$.

Défi. (Partie réelle et partie imaginaire)
On considère un complexe z. On appelle *partie réelle* et *partie imaginaire* de z qu'on note respectivement $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$, les nombres réels tels que :
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = z \\ \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prop.
Soient deux complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, où $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.
- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Prop. (Linéarité sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{Re}(\cdot)$ et $\mathrm{Im}(\cdot)$)
Pour tous complexes z_1 et z_2, pour tous réels r_1 et r_2 :
$$\mathrm{Re}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \mathrm{Re}(z_1) + r_2 \mathrm{Re}(z_2)$$
$$\mathrm{Im}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \mathrm{Im}(z_1) + r_2 \mathrm{Im}(z_2)$$

Prop.
L'inverse de i est égal à son opposé : $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\left(\frac{z}{i}\right) = \mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}\left(\frac{z}{i}\right) = -\mathrm{Re}(z). \end{cases}$$

Prop. (Caractérisation des réels parmi les complexes)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
a. $z \in \mathbb{R}$
b. $\mathrm{Im}(z) = 0$
c. $z = \mathrm{Re}(z)$

Prop. (Caractérisation des imaginaires purs)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
a. $z \in i\mathbb{R}$
b. $\mathrm{Re}(z) = 0$
c. $z = i\mathrm{Im}(z)$

Rema.
$z \in i\mathbb{R} \iff \frac{z}{i} \in \mathbb{R}$.

4.3 Nombre complexe conjugué d'un complexe

Défi.
Le nombre complexe *conjugué* de z, noté $\bar{z}$, est défini par $\bar{z} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z = \bar{\bar{z}}$.

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- si $z_1 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \frac{\bar{z}+z}{2} \\ \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \end{cases}$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

4.4 Nombre réel module d'un complexe

Défi.
Le nombre réel *module* de z, noté $|z|$, est $|z| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \in \mathbb{R}_+$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :
- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- $z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

Prop. (Formule algébrique d'un quotient)
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tq $z_1 \neq 0$. Alors
$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)}{|z_1|^2} \\ \mathrm{Im}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2)}{|z_1|^2} \end{cases}$$

Méth. (pour écrire un quotient sous forme algébrique)
Exemple :
$$\frac{1}{1+i} = \frac{(1-i)\times 1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- Si $z_1 \neq 0$, $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$.

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,
- $|r| = r$;
- $|r \cdot z| = r|z|$.

Prop.
On considère un nombre complexe z. Ainsi,
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.
- Si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}$ alors $|\mathrm{Re}(z)| = |z|$.
- $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
- Si, et seulement si, $z \in i\mathbb{R}$ alors $|\mathrm{Im}(z)| = |z|$.

Prop. (Inégalité triangulaire pour les complexes)
Soit deux complexes z_1 et z_2. Ainsi,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- Si $(z_1 = 0) \vee (\exists r \in \mathbb{R}_+, z_2 = rz_1)$ alors $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ainsi $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Défi. (Disque)
On considère un complexe a et un réel positif r. On appelle *disque* fermé de centre a et de rayon r, l'ensemble des complexes z tels que $|z - a| \leq r$.

4.5 Nombres complexes et géométrie du plan orienté

Défi.
On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. À tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ du plan, on associe le nombre complexe
$$z = x + iy,$$
appelé *affixe* de $\vec{v}$.
Réciproquement, à tout complexe $z = x + iy$, on associe le vecteur
$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j},$$
appelé *vecteur image* de z.
2. L'*affixe* d'un point M est l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.
Réciproquement, le *point image* d'un complexe $z = x + iy$ est le point M de coordonnées (x, y), que l'on note $M(z)$.

Prop.
Soit $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ deux vecteurs, z_1 et z_2 deux complexes et r_1 et r_2 deux réels. Si $\vec{v_1}$ admet pour affixe z_1 et $\vec{v_2}$ admet pour affixe z_2, alors $r_1\vec{v_1} + r_2\vec{v_2}$ admet pour affixe $r_1z_1 + r_2z_2$.

Prop.
Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan, d'affixe z dans un repère orthonormé. Alors $\|\vec{v}\| = |z|$.

Prop.
Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2 dans un repère orthonormé. Alors $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
En particulier, soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan. Alors A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Prop.
Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2 dans un repère orthonormé. Alors
$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \iff \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}.$$

Prop.
Soit un vecteur $\vec{b}(b)$. Soit un point $M(z)$. Soit un point $M'(z')$. Ainsi, $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par translation de vecteur $\vec{b}$ si et seulement si $z' = z + b$.

Prop.
Soit un réel θ. Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre l'origine et d'angle θ si et seulement si $z' = z(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Prop.
Par suite, $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ si et seulement si $z' - \omega = (z - \omega)(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Prop.
Soit un réel non nul k.

- $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre l'origine et de rapport k si et seulement si $z' = zk\ (= kz)$.
- $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k si et seulement si $z' - \omega = (z - \omega)k$.

Prop.
$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie orthogonale par rapport au premier axe du repère si et seulement si $z' = \bar{z}$.
$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie orthogonale par rapport au second axe du repère si et seulement si $z' = -\bar{z}$.