

## 5 FONDEMENTS 2 : ENSEMBLES

### 5.1 Égalité

**Prop.**

La relation d'égalité est :

- réflexive : toute expression est égale à elle-même ;
- symétrique : si  $\text{expr}_1 = \text{expr}_2$  alors  $\text{expr}_2 = \text{expr}_1$  ;
- transitive : si  $\text{expr}_1 = \text{expr}_2$  et  $\text{expr}_2 = \text{expr}_3$  alors  $\text{expr}_1 = \text{expr}_3$ .

**Prop.** (Principe de substitution)

Si une première expression est égale à une dernière, alors toute formule comprenant la première expression est égale à la même formule dans laquelle on a substitué la dernière expression à une occurrence de la première.

### 5.2 L'ensemble et ses éléments

**Noti.**

Les constituants d'un ensemble sont ses éléments. Si  $e$  est un élément de l'ensemble  $E$ , on dit que :

- $e$  appartient à  $E$ , noté  $e \in E$  ;
- $E$  possède  $e$ , noté  $E \ni e$ .

**Noti.**

L'ensemble vide est celui qui ne possède aucun élément. On le note  $\emptyset$ .

**Défi.**

Un *singleton* est un ensemble qui possède exactement un élément.

**Défi.**

On dit que deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux pour dire que

$$\forall x, \quad x \in E \iff x \in F.$$

**Défi.**

On dit qu'un ensemble  $E$  est inclus dans un ensemble  $F$  pour dire que

$$\forall x, \quad x \in E \Rightarrow x \in F.$$

C'est que,

$$\forall x \in E, \quad x \in F.$$

**Noti.**

On note  $E \subset F$  et on dit que  $E$  est un *sous-ensemble*, ou une *partie*, de  $F$ .

**Méth.** (pour montrer que deux ensembles sont égaux)

On utilise ce que

$$E = F \iff (E \subset F) \wedge (F \subset E).$$

**Défi.** (Disjoints)

On dit que deux ensembles  $E$  et  $F$  sont *disjoints* pour dire qu'ils n'ont pas d'éléments en commun.

$$\forall x, \quad \neg(x \in E \wedge x \in F).$$

### 5.3 Deux modes de définition d'un ensemble

**Défi.**

Un ensemble peut être défini de deux manières :

- *en intension*, c'est-à-dire en spécifiant une propriété caractéristique vérifiée par tous ses éléments :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\};$$

- *en extension*, c'est-à-dire en décrivant explicitement les éléments de l'ensemble, soit par énumération, soit par un procédé de construction :

$$\{-1; 1\} \quad \text{ou encore} \quad \{x + y \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

### 5.4 Opérations sur les parties d'un ensemble

Dans la suite,  $E$  désigne un ensemble,  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ .

**Nota.**

L'ensemble constitué de toutes les parties de  $E$  est noté  $\mathcal{P}(E)$ .

**Exem.**

Soit  $E = \{1, 2\}$ . Ainsi,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

**Rema.**

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  signifie  $\mathbb{R} \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ .
- $\{1\} \subset \{1, 2\}$  signifie  $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$ .

**Défi.**

On appelle *partie complémentaire* dans  $E$  de  $A$ , l'ensemble  $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} \stackrel{\text{not.}}{=} \overline{A}$ .

**Défi.**

On appelle l'*intersection* de  $A$  et  $B$  l'ensemble :

$$A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

**Prop.**

L'intersection entre les parties de  $E$  :

- est associative :  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  ;
- est commutative :  $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \cap B = B \cap A$  ;
- admet  $E$  pour unique élément neutre :  $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cap E = A = E \cap A$ .

**Rema.**

$\emptyset$  est absorbant par  $\cap$ .  $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cap \emptyset = \emptyset$ .

**Défi.**

On appelle la *réunion* de  $A$  et  $B$  l'ensemble :

$$A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

**Prop.**

La réunion entre les parties de  $E$  :

- est associative ;
- est commutative ;
- admet  $\emptyset$  pour unique élément neutre :  $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cup \emptyset = A$ .

**Prop.**

L'intersection est distributive sur la réunion, et la réunion est distributive sur l'intersection.

$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ ,

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  ;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

**Défi.**

On considère un ensemble  $I$  et des parties  $A_i$  de  $E$  pour  $i \in I$ .

1. L'intersection « en vrac » des  $A_i$  est  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ .
2. La réunion « en vrac » des  $A_i$  est  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$ .

**Défi.**

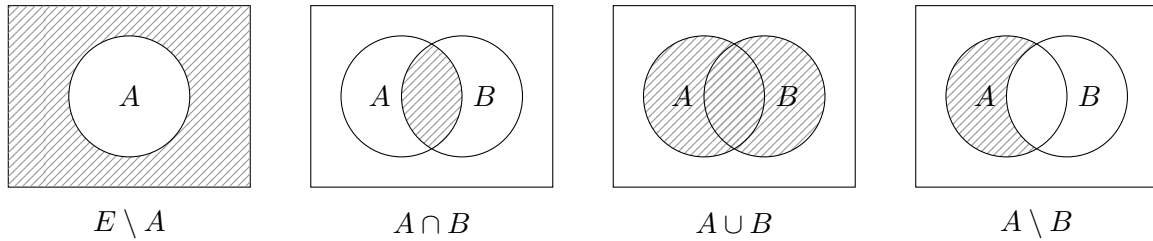
On appelle la *différence* dans  $A$  de la partie  $B$  :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

**Rema.**

Si  $A \supset B$ , alors  $A \setminus B$  est égal au complémentaire dans  $A$  de  $B$ . Dans tous les cas :  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ .

**Fig.**



**Prop.**

Le complémentaire de l'intersection est la réunion des complémentaires :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Le complémentaire de la réunion est l'intersection des complémentaires :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

## 5.5 Produit cartésien d'ensembles

**Noti.**

Étant donné une suite de deux ensembles  $E$  puis  $F$ , l'ensemble *produit cartésien* de  $E$  par  $F$  est :

$$E \times F \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

**Noti.**

Étant donné un entier  $n \geq 2$ , et une suite de  $n$  ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , on appelle produit cartésien de la suite :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in E_i\}.$$

Si  $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$ , on note l'ensemble  $E^n$ .

## 5.6 Mises en parties d'un ensemble

**Défi.**

On appelle *recouvrement* d'un ensemble  $E$  tout ensemble de parties de  $E$  dont la réunion est égale à  $E$  tout entier.

**Exem.**

Soit  $E = \{1, 2, 3\}$ . On pose  $A = \{1, 2\}$  et  $B = \{2, 3\}$ . On a  $A \cup B = \{1, 2, 3\} = E$ . La famille  $\{A, B\}$  est un recouvrement de  $E$ .

**Défi.**

On appelle *recouvrement disjoint* de  $E$  tout ensemble de parties de  $E$  dont la réunion est égale à  $E$  tout entier et tel que ces ensembles sont disjoints deux à deux.

**Exem.**

L'ensemble des réels non nuls,  $\mathbb{R}^*$ , est recouvert de manière disjointe par l'ensemble des strictement négatifs et l'ensemble des strictement positifs :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \sqcup \mathbb{R}_+^*.$$

**Défi.**

On appelle *partition* de  $E$  tout recouvrement disjoint de  $E$  par des parties non vides.

**Exem.**

L'ensemble des entiers relatifs est partitionné par les entiers pairs et les entiers impairs :

$$\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \sqcup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Défi.**

On appelle *système de représentants* d'une partition de  $E$ , tout ensemble d'éléments de  $E$  tel que :

- ET tout élément de cet ensemble appartient exactement à une composante de la partition ;
- ET toute composante de la partition possède exactement un élément de cet ensemble.

**Exem.**

Soit l'ensemble  $E = \{a, b, c, d\}$ . On le découpe en deux paquets (partition) :  $\{a, b\}$  et  $\{c, d\}$ . Pour former un système de représentants, il faut choisir une seule lettre dans le premier paquet et une seule dans le second. Par exemple, l'ensemble  $\{a, c\}$  est un système de représentants. L'ensemble  $\{b, d\}$  en est un autre.

## 5.7 Nombre indicateur de l'appartenance à une partie

**Défi.**

On considère une partie  $A$  de  $E$ , et un élément  $x$  de  $E$ . On définit le nombre indicateur  $\mathbb{1}_A(x)$  par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

**Prop.**

Soit un ensemble  $E$ . Soit deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$ .

- $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- Si  $A \supset B$ , alors  $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$

**Prop.**

- $A \subset B \iff \forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x).$
- $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B.$