6. Pratique calculatoire 2 : limites et dérivées

6.1. Égalité sur les limites dans la droite réelle achevée

Noti.
La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On note aussi cet ensemble $[-\infty, +\infty]$.

Défi. (Addition)
On étend l'addition entre les réels à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :
- $x + (+\infty) = +\infty$ pour tout $x \in]-\infty, +\infty]$.
- $x + (-\infty) = -\infty$ pour tout $x \in [-\infty, +\infty[$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

On résume cela par le tableau suivant :

$x \setminus y$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

Prop.
La limite de la somme est la somme des limites quand cette dernière est définie.

Défi.
La multiplication d'un élément x de $\overline{\mathbb{R}}$ par un réel r est définie par ce tableau :

$x \setminus r$	$r < 0$	0	$0 < r$
$-\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}$	xr	0	xr
$+\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$

Prop. (Combinaison linéaire)
Si $f_1(x) \to l_1 \in \mathbb{R}$ et $f_2(x) \to l_2 \in \mathbb{R}$, alors pour tous réels r_1, r_2 :

$$r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} r_1 l_1 + r_2 l_2.$$

Défi.
On définit le produit xy pour $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ comme suit :

$x \setminus y$	$-\infty$	$\substack{y\in\mathbb{R}\\y<0}$	0	$\substack{y\in\mathbb{R}\\y>0}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$	$-\infty$
$\substack{x\in\mathbb{R}\\x<0}$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	Indét.	0	0	0	Indét.
$\substack{x\in\mathbb{R}\\x>0}$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

Prop.
La limite du produit est égale au produit des deux limites lorsque ce dernier est défini.

Défi.
On considère $x \in \overline{\mathbb{R}}$. On a le tableau suivant pour l'inverse $1/x$:

x	$-\infty$	$\substack{x\in\mathbb{R}\\x<0}$	0^-	0	0^+	$\substack{x\in\mathbb{R}\\0<x}$	$+\infty$
$1/x$	0^-	$1/x$	$-\infty$	Indéf.	$+\infty$	$1/x$	0^+

Prop.
- La limite d'un quotient est égale au quotient de la limite si cette dernière est définie.
- La limite de l'inverse est l'inverse de la limite si cette dernière est définie.

Prop. (Composition des limites)
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et de plus d'un point. Soient $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{J}$ (points ou extrémités). Soient $\varphi\colon I \to J$ et $f\colon J \to \mathbb{R}$.
Supposons que
- ET $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$;
- ET $\lim\limits_{y\to b} f(y)$ existe.

Alors la limite de la composée existe et

$$\lim_{x\to a} (f \circ \varphi)(x) = \lim_{y\to b} f(y).$$

Prop.
- Si pour tout x (dans l'ensemble de def.) $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ et si $m(x)$ et $M(x)$ admettent une seule et même limite réelle l quand $x \to a$, alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$

- Si $m(x) \leqslant f(x)$ et si $m(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$$

- Si $f(x) \leqslant M(x)$ et si $M(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$$

Prop. (Croissance comparées)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\dfrac{x^n}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
- $\dfrac{\ln(x)}{x^n} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
- $e^x x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$
- $x^n \ln(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x>0}]{} 0$

Méth. (Levée d'indétermination)
- Forme $\frac{\infty}{\infty}$ pour une fonction rationnelle en $\pm\infty$: on factorise par le terme de plus haut degré.

$$\frac{2x^2-3}{x-2025} = \frac{2x^2(1-\frac{3}{2x^2})}{x(1-\frac{2025}{x})} = 2x\frac{1-\dots}{1-\dots} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

- Forme $\infty - \infty$: factorisation. Ex : $x^2 - x = x^2(1-\frac{1}{x}) \to +\infty$.

6.2. Inégalités sur les limites dans la droite réelle achevée

Prop.
Si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) < \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$, alors sur un certain voisinage de a, $f_1 \leqslant f_2$.

Prop. (Passage à la limite dans les inégalités larges)
Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)$ existent. Ainsi,
- si pour tout x dans un certain voisinage de a, $f(x) \leqslant M$, où M est une constante, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant M$, et on adapte pour « $f(x) \geqslant m$ » ;
- si, pour tout x suffisamment proche de a, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) \leqslant \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$.

6.3. Dérivée

Défi.
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant plus d'un point, $a \in I$, et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit qu'un réel p est le *nombre dérivé* de la fonction f au point a, ou simplement de f en a, pour dire que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} p.$$

Si un tel réel p existe, alors il est unique et on le note $f'(a)$.

Prop.
Dans les conditions ci-haut, si $f'(a)$ existe alors la tangente à la courbe représentative dans un certain repère, au point $A(a, f(a))$ admet une équation que voici :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

C'est-à-dire que c'est l'ensemble $\{M(x,y) \mid y - f(a) = f'(a)(x-a)\}$.

Prop. (Combinaison linéaire de fonctions dérivables en un point)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point ; $x_0 \in I$; puis $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que f et g sont dérivables en x_0 (i.e. $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$ existent). Ainsi, pour tout $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $rf + sg$ est dérivable en x_0 et

$$(rf + sg)'(x_0) = rf'(x_0) + sg'(x_0).$$

Prop. (Produit de deux fonctions dérivables en un point)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant plus d'un point, $x_0 \in I$, et deux fonctions $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que f et g sont dérivables en x_0. Ainsi, la fonction produit fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Prop. (Quotient de deux fonctions dérivables en un point)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant plus d'un point, $x_0 \in I$, et deux fonctions $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que
- ET pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$;
- ET g est dérivable en x_0 ;
- ET f est dérivable en x_0.

Ainsi, la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Prop. (Dérivation composée)
Soit deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ qui possèdent plus d'un point ; x_0 un point de J ; puis $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ à valeurs dans I et $f\colon I \to \mathbb{R}$ (en sorte que $f(\varphi(x))$ existe pour tout $x \in J$). Supposons que
- ET $\varphi'(x_0)$ existe ;
- ET $f'(\varphi(x_0))$ existe.

Ainsi, la composée de φ suivi de f, ou composée de f suivant φ, est dérivable en x_0 de nombre dérivé

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

Prop. (Dérivation en un point de la réciproque)
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et de plus d'un point. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to I$ réciproque l'une de l'autre. Soit $x_0 \in I$. Supposons que
- ET f est dérivable en x_0 ;
- ET $f'(x_0) \neq 0$;
- ET $\lim\limits_{y \to f(x_0)} g(y) = x_0$.

Ainsi g est dérivable en $f(x_0)$ et $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Défi.
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point ; $t_0 \in I$, et $\Phi\colon I \to \mathbb{C}$. On dit que la fonction complexe Φ est dérivable en t_0 pour dire que les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(\Phi)\colon I \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{Re}(\Phi(t))$ et $\mathrm{Im}(\Phi)\colon I \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{Im}(\Phi(t))$ sont dérivables en t_0 ; le cas échéant :

$$\Phi'(t_0) \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Re}(\Phi))'(t_0) + i(\mathrm{Im}(\Phi))'(t_0).$$

Défi.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose
$$\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Prop.
Soit $u\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable en $t \in I$. Ainsi,
$(\exp \circ u)'(t) = \exp(u(t))u'(t)$. $\quad ((e^u)' = u'e^u)$.

Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.