9. Fonction d'une variable réelle 1 : Étude globale

9.1. Généralités

Noti.
On appelle *fonction* d'une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute relation qui fait passer de tout nombre x de D à un unique nombre y de $\mathbb{R}$; auquel cas, on note $y = f(x)$ si la fonction est appelée f.
Remarque : Lorsque l'ensemble de départ n'est pas précisé, on appelle *ensemble de définition* de f l'ensemble des valeurs de la variable x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles $f(x)$ existe.

Voca.
On dit qu'une fonction f possède une propriété sur une partie A quand sa *restriction* à A possède cette même propriété.

Défi.
On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dit que f est :
a) *constante* quand : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) = c$.
b) *croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
c) *strictement croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
On adapte pour la décroissance et la décroissance stricte (en changeant le sens de l'inégalité sur les images).

Défi.
On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *monotone* quand f est croissante ou f est décroissante. On adapte pour la monotonie stricte.

Prop. (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit un intervalle I, puis une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, puis $v \in \mathbb{R}$. Si v est compris entre deux valeurs de f, alors v est aussi une valeur de f.

Prop. (Théorème de la bijection continue)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$; puis $f : I \to J$. Supposons que :
- ET f est continue ;
- ET f est strictement monotone ;
- ET la limite de f en l'extrémité inf. de I est égale à l'extrémité inf. de J ; de même avec les extr. sup. (ou inversement selon la monotonie).

Ainsi, $f : I \to J, x \mapsto y = f(x)$ admet une réciproque $g : J \to I, y \mapsto x \in I / f(x) = y$.

Prop.
Représentations graphiques, à partir de celle de $f : x \mapsto f(x)$:
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x - a)$ est obtenue par translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{0}$.
- Celle de $x \mapsto f(x) + b$ est obtenue par translation de vecteur $\vec{v}\binom{0}{b}$.

Prop.
- On obtient la représentation graphique de $x \mapsto f(2a-x)$ dans un r.o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en effectuant une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a$.
- Par analogie, pour $y = b$ (symétrie verticale) avec $x \mapsto 2b - f(x)$.

Prop.
- Pour $x \mapsto f(\lambda^{-1}x)$, on effectue une dilatation de centre O, de rapport $\lambda > 0$ et de direction $(O, \vec{i})$.
- Pour $x \mapsto \mu f(x)$, on effectue une dilatation de rapport μ dans la direction « verticale ».

Prop.
Pour obtenir la représentation graphique de la fonction réciproque, on effectue la symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

Méth.
Méthode pour résoudre graphiquement une équation ou une inéquation. Soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes de f et g.
1. $f(x) = g(x)$ admet pour ensemble de solutions les abscisses des points d'intersection.
2. $f(x) \leqslant g(x)$ admet pour ensemble de solutions les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.
3. $f(x) \geqslant g(x)$ admet pour ensemble de solutions les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote horizontale* de la courbe de f toute droite d'équation $y = \text{Cte}$ où $\text{Cte} \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{+\infty} f = \text{Cte}$ ou $\lim_{-\infty} f = \text{Cte}$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote verticale* toute droite d'équation $x = \text{Cte}$ telle que $\lim_{\text{Cte}} f = +\infty$ ou $\lim_{\text{Cte}} f = -\infty$.

Défi.
On considère $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est *paire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$

C'est que les deux fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(2 \times 0 - x)$ sont égales (symétrie axiale d'axe $x = 0$).

Défi.
On dit que f est *impaire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$

La composée de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale.

Défi.
On considère $T \in\ ]0, +\infty[$. On dit que f est T*-périodique* ou que f admet T pour *période* quand :

- ET $\forall x \in D,\ x+T \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(x) = f(x+T)$

On parle de *la* période pour désigner la plus petite quand elle existe.

Défi.
Une *fonction périodique* est une fonction qui admet au moins une période ($T > 0$).

Défi.
- On dit que f est *majorée* par une constante $M \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$.
- ... est *minorée* par une constante $m \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$.
- ... *bornée* par deux constantes $m \leqslant M$ quand $\forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Prop.
La fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ est bornée (par deux constantes) si, et seulement si, la fonction réelle positive $|f| : D \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)|$ est majorée par une constante.

Défi.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un *minimum global* de f quand :
- ET $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$
- ET $\exists x_0 \in D,\ f(x_0) = m$

On parle de *minimum local* en un point x_* quand on se restreint autour de x_*. Adaptation pour un maximum.

Défi.
On parle d'*extremum* pour tout minimum ou tout maximum.

9.2. Dérivation et représentation graphique

Prop.
Soit un intervalle I de plus d'un point, puis $f : I \to \mathbb{R}$. Supposons que f est dérivable (en tout point de I). Ainsi :
1. f est constante ssi f' est nulle.
2. f est croissante ssi f' est positive.
3. f est décroissante ssi f' est négative.
4. f est strictement croissante ssi :
   - ET f' est positive ;
   - ET l'ensemble des points d'annulation de f' ne contient pas d'intervalle de plus d'un point.
5. f est strictement décroissante ssi (on adapte).

Appli.
On demande les variations de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 8x + 2025$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 5 \cdot 2 \cdot x^1 + 8 = 2(3x^2 - 5x + 4)$. Puis $A = x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{3} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{48}{36} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2 \geqslant \frac{23}{36} > 0$. Donc f' est positive sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et l'ensemble de ses points d'annulation ne contient pas d'intervalle de plus d'un point (il est vide). Donc f est strictement

croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

Rema.
La fonction $\operatorname{sgn} :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ est dérivable de dérivée nulle mais n'est pas constante. La propriété ne s'applique pas car $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle (« de temps »).

Défi.
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *deux fois dérivable* quand f est dérivable et que f' est dérivable ; auquel cas, on note $f'' = (f')'$: *dérivée seconde* de f.

Prop.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un r.o.n. $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Si f'' est positive, alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si f'' est négative, alors $\mathcal{C}$ est en-dessous de chacune de ses tangentes.

Exem. (Études de fonctions)
1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x - 1 + \sqrt{x^2 + 2025}$.
1° Sens de variation
Méthode 1 (par composition) : Lorsque $x \in \mathbb{R}_+$ croît, d'une part $x^2 + 2025$ croît dans $\mathbb{R}_+$, donc $\sqrt{x^2 + 2025}$ également ; d'autre part $x - 1$ croît. Donc $f(x)$ croît. Cela reste valable pour des variations strictes.
Méthode 2 (par définition) : Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ quelconques. Supposons que $x_1 < x_2$. Ainsi, d'une part $x_1^2 < x_2^2$ car $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, puis $0 < x_1^2 + 2025 < x_2^2 + 2025$, puis $\sqrt{x_1^2 + 2025} < \sqrt{x_2^2 + 2025}$ (1). D'autre part, $x_1 - 1 < x_2 - 1$ (2). Donc en additionnant (1) et (2) membre à membre, $f(x_1) < f(x_2)$.
2° Limites aux bornes : $f(0) = -1 + \sqrt{2025}$. Ensuite, d'après les propriétés des opérations sur les limites, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{1}{x}$.
1° Limites aux bornes
- Quand $x \to 0$, $g(x) \to +\infty$ en vertu des prop. des op. sur les limites.
- De manière semblable, $\lim_{+\infty} g = +\infty$.

2° Sens de variations On a : $\forall x \in]0, +\infty[,\ g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. Ainsi, $\forall x \in]0, +\infty[,\ g'(x) \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant 1 \iff x \in [1, +\infty[$.
3° Valeur en 1 : $g(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.
4° Tableau de variations

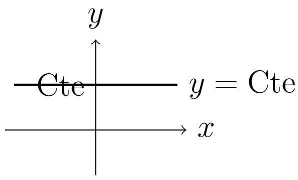
x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

5° Sens de courbure (position par rapport aux tangentes) On a $\forall x \in]0, +\infty[,\ g''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$. La courbe est au-dessus de ses tangentes.

9.3. Fonctions réelles de référence

▷ Les fonctions constantes

Prop.
$g = f(x) = \text{Cte}$. $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.



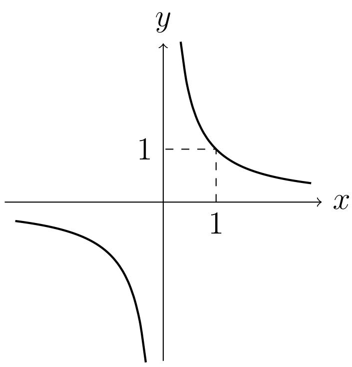
▷ Les fonctions affines

Prop.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a$.

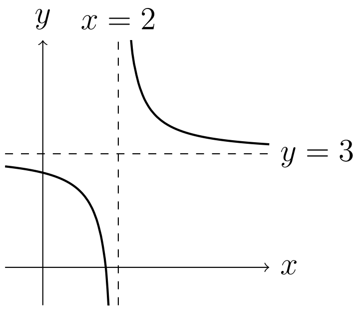
▷ La fonction inverse

Prop.
$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$.
- $\forall x \in D,\ -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$ (impaire).
- $\forall x \in D,\ f'(x) = \frac{-1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2}$.



▷ Les quotients de fonctions affines

Exem.
On a : $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$. $\forall x \in D,\ f(x) = \frac{3((x-2)+2)+1}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{7}x - \frac{2}{7}}$. La courbe est une hyperbole obtenue par translation.



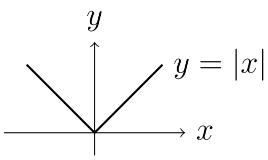
Prop.
Plus généralement : $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{-d}{c}\}, \quad f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

▷ La fonction valeur absolue

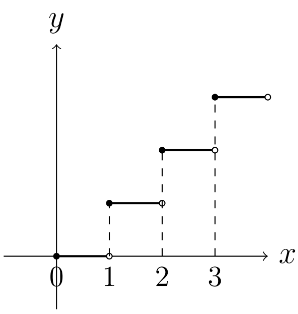
Prop.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$. (Paire).

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f'(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



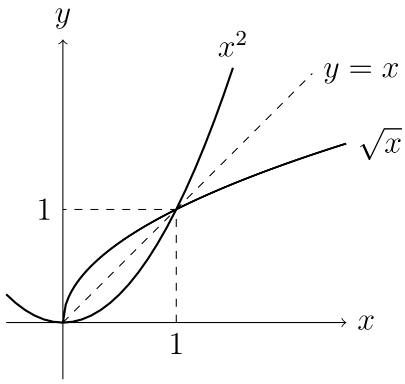
▷ La fonction partie entière

Défi.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$. C'est l'unique entier e tel que $e \leqslant x < e+1$ (i.e. $x \in [e, e+1[$).



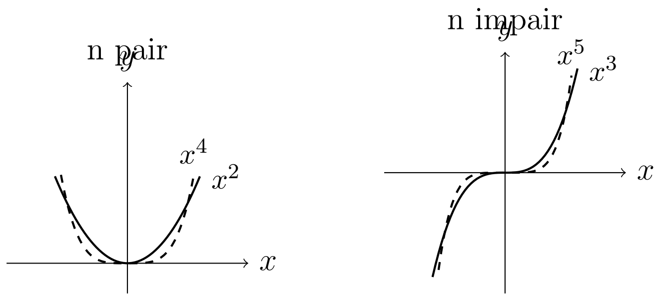
▷ Les fonctions carrés et racines carrées

Prop.
Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. (Forme canonique : parabole de sommet (α, β) et d'axe de symétrie $x = \alpha$).



▷ Puissance n-ième et racines n-ièmes

Prop.
Soit $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $1 < n < n'$.
- Si $n \equiv 0$ [2], alors $x \mapsto x^n$ est paire.
- Si $n \equiv 1$ [2], alors $x \mapsto x^n$ est impaire.



Défi.
On considère $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, on appelle *racine n-ième* de tout réel positif x, qu'on note $\sqrt[n]{x}$, l'unique réel positif dont la puissance n-ième est égale à x. Exemple : $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[4]{81} = 3$.

▷ Fonctions polynomiales et rationnelles

Défi.
On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire de fonctions puissances entières. Exemple : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x^1 + C_0x^0$ est définie par une liste de quatre constantes réelles.

Voca.
Ci-avant, quand $C_3 \neq 0$, on parle de fonction polynomiale du troisième degré (ou cubique) ; et quand $C_3 = 0$ et $C_2 \neq 0$, du second degré (quadratique) ; autrement, on retrouve les fonctions affines.

Défi.
On appelle *fonction rationnelle* tout quotient de deux fonctions polynomiales.

▷ Les fonctions exponentielles et réciproques

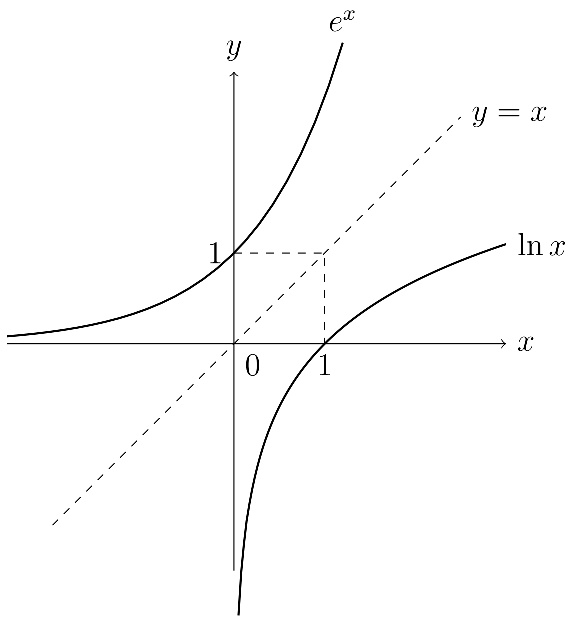
Défi.
exp est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est dérivable, de dérivée égale à elle-même et qui prend en 0 la valeur 1 :

$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

Défi.
Pour tout réel y de $]0, +\infty[$, on appelle *logarithme népérien* de y, qu'on note $\ln(y)$, l'unique réel dont l'image par l'exponentielle donne y.

Défi.
On considère $b \in]0, +\infty[$.
- Pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$, l'*exponentielle en base* b de x est $b^x \overset{\text{déf}}{=} \exp(x \ln b)$.
- Le *logarithme en base* b de tout $y \in]0, +\infty[$ est $\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ (lorsque $b \neq 1$).

Rema.
Les deux fonctions $\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\log_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sont réciproques l'une de l'autre.



▷ Fonction puissance réelle de degré d

Défi.
$d \in \mathbb{R}$. $\forall x \in]0, +\infty[, \ x^d \overset{\text{déf}}{=} \exp(d \ln x)$. C'est la puissance de degré d de x.

Prop. (Prolongement en 0)
- Si $d > 0, \ \lim_{x \to 0} x^d = 0$. (On pose $0^d = 0$).
- Si $d < 0, \ \lim_{x \to 0} x^d = +\infty$.

Remarque : $\forall x \in]0, +\infty[, \ x^0 = 1$. On pose $0^0 = 1$.

▷ Croissances comparées

Prop.
1. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in]0, +\infty[$. Ainsi :

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad ; \quad \frac{\ln(x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

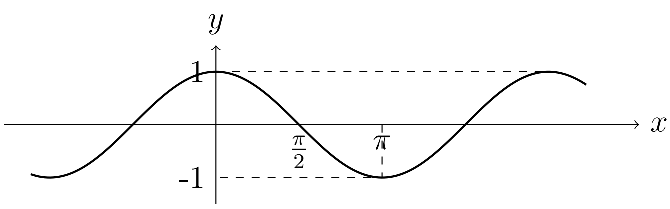
2. Avec les notations de 1. :

$$e^{\alpha y}|y|^\beta \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0 \quad ; \quad y^\beta|\ln y|^\gamma \xrightarrow[y\to 0^+]{} 0.$$

▷ Fonctions circulaires et réciproques

Défi.
1. $\forall x \in [-1, 1]$, on appelle *arccosinus* de x, qu'on note $\operatorname{Arccos}(x)$, l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal à x.
$$\begin{cases} \operatorname{Arccos}(x) \in [0, \pi] \\ \cos(\operatorname{Arccos} x) = x \end{cases}$$
2. $\forall x \in [-1, 1]$, on appelle *arcsinus* de x, noté $\operatorname{Arcsin}(x)$, l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus est égal à x.
$$\begin{cases} \operatorname{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x \end{cases}$$
3. Pour tout x de $]-\infty, +\infty[$, on appelle *arctangente* de x, qu'on note $\operatorname{Arctan}(x)$, l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x.
$$\begin{cases} \operatorname{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(\operatorname{Arctan} x) = x \end{cases}$$

Prop. (Représentation graphique dans un repère orthogonal)
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$. Donc cos est 2π-périodique. On peut restreindre son étude sur un segment de longueur 2π (ex : $[-\pi, \pi]$).
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)$. C'est que cos est paire. Ainsi on restreint à $[0, \pi]$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$. C'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 2 \times 0 - \cos(2\frac{\pi}{2} - x)$. Donc on peut restreindre l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.



Méth. (Construction de la courbe cosinus)
On récapitule la construction de la courbe de la fonction cosinus :
1. D'abord on cherche à connaître la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Une symétrie centrale par rapport au point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 0)$ donne la courbe sur $[0, \pi]$.
3. Une symétrie axiale par rapport à la droite des ordonnées (fonction paire) donne la courbe sur $[-\pi, \pi]$.
4. Enfin, des translations de vecteur $k \cdot 2\pi\vec{i}$ (la période), donnent la courbe sur $\mathbb{R}$.

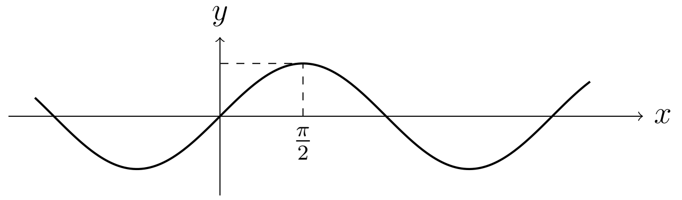
Exem. (Calcul de parité)
Montrons que $g : s \mapsto \cos(\frac{\pi}{2} + s) - 0$ est impaire. Soit $s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(-s) &= \cos(\frac{\pi}{2} - s) \\ &= \cos(\frac{\pi}{2} - s) \\ &= \sin(s). \quad \text{(Cette réduction n'est pas suffisante, utilisons la propriété générale)} \end{aligned}$$

Reprenons la démonstration formelle : On sait que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$. Posons $\theta = \frac{\pi}{2} + s$. Alors $\pi - \theta = \pi - (\frac{\pi}{2} + s) = \frac{\pi}{2} - s$. Donc $\cos(\frac{\pi}{2} - s) = -\cos(\frac{\pi}{2} + s)$. Or $\cos(\frac{\pi}{2} - s) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - s))$ (parité du cosinus) $= \cos(s - \frac{\pi}{2})$. Le manuscrit montre directement : $\cos(\frac{\pi}{2} - s) = -\cos(\pi - (\frac{\pi}{2} - s)) = -\cos(\frac{\pi}{2} + s) = -g(s)$.

b. Les deux fonctions sinus et arcsinus

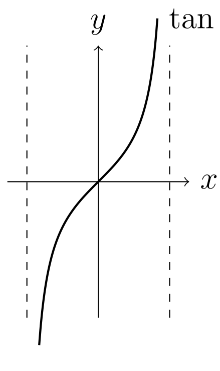
Prop.
- La fonction sin est impaire et 2π-périodique. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.
- La fonction Arcsin est impaire, définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

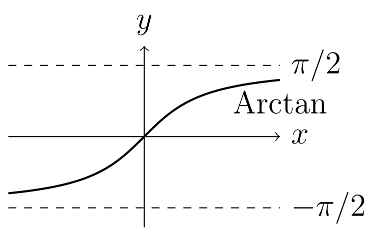


c. Les deux fonctions tangente et arctangente

Prop.
Notons $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On a :
- $\forall x \in D_{\tan},\ x \pm \pi \in D_{\tan}$ et $\tan(x \pm \pi) = \tan(x)$ (fonction π-périodique).
- $\forall x \in D_{\tan},\ -x \in D_{\tan}$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$ (fonction impaire).

Prop.
La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sa courbe admet deux asymptotes horizontales : $y = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$.





▷ Les fonctions hyperboliques

Défi.
Pour tout réel x, on appelle *cosinus hyperbolique* de x, noté $\mathrm{ch}(x)$, et *sinus hyperbolique* de x, noté $\mathrm{sh}(x)$, les réels :

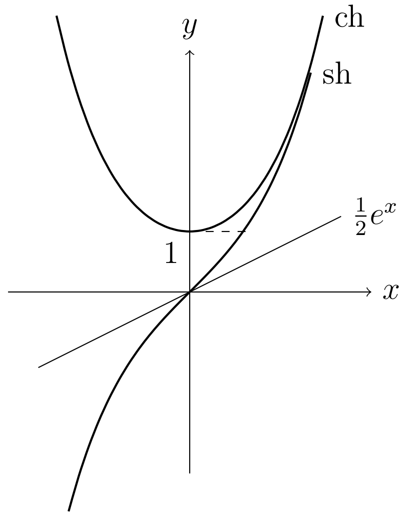
$$\mathrm{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Rema. (Analogie avec les complexes)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les formules d'Euler : $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. On observe alors les relations :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(iz) = \cos(z) \\ \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z) \end{cases}$$

Géométriquement, $(\cos t, \sin t)$ paramètre le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$. De même, $(\mathrm{ch}\ t, \mathrm{sh}\ t)$ paramètre la branche droite de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ (pour $x \geqslant 1$).

Prop.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Ainsi :
- $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$ (fonction paire).
- $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$ (fonction impaire).
- Relation fondamentale : $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.



Calc.
Preuve de la relation fondamentale :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{2+2}{4} = 1 \quad (\text{car } e^x e^{-x} = 1). \end{aligned}$$

Rema. (Parties paire et impaire)
On a les relations :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x} \end{cases}$$

ch et sh sont les uniques fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
- $\mathrm{ch} + \mathrm{sh} = \exp$
- ch est paire, sh est impaire.

On dit que ch et sh sont respectivement la *partie paire* et la *partie impaire* de l'exponentielle.