5. Fondements 2 : ensembles

5.1. Égalité

Prop.
La relation d'égalité est :
- réflexive : toute expression est égale à elle-même ;
- symétrique : si $\mathrm{expr}_1 = \mathrm{expr}_2$ alors $\mathrm{expr}_2 = \mathrm{expr}_1$;
- transitive : si $\mathrm{expr}_1 = \mathrm{expr}_2$ et $\mathrm{expr}_2 = \mathrm{expr}_3$ alors $\mathrm{expr}_1 = \mathrm{expr}_3$.

Prop. (Principe de substitution)
Si une première expression est égale à une dernière, alors toute formule comprenant la première expression est égale à la même formule dans laquelle on a substitué la dernière expression à une occurrence de la première.

5.2. L'ensemble et ses éléments

Noti.
Les constituants d'un ensemble sont ses éléments. Si e est un élément de l'ensemble E, on dit que :
- e appartient à E, noté $e \in E$;
- E possède e, noté $E \ni e$.

Noti.
L'ensemble vide est celui qui ne possède aucun élément. On le note $\emptyset$.

Défi.
Un *singleton* est un ensemble qui possède exactement un élément.

Défi.
On dit que deux ensembles E et F sont égaux pour dire que

$$\forall x, \quad x \in E \iff x \in F.$$

Défi.
On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F pour dire que

$$\forall x, \quad x \in E \Rightarrow x \in F.$$

C'est que,

$$\forall x \in E, \quad x \in F.$$

Noti.
On note $E \subset F$ et on dit que E est un *sous-ensemble*, ou une *partie*, de F.

Méth. (pour montrer que deux ensembles sont égaux)
On utilise ce que

$$E = F \iff (E \subset F) \wedge (F \subset E).$$

Défi. (Disjoints)
On dit que deux ensembles E et F sont *disjoints* pour dire qu'ils n'ont pas d'éléments en commun.

$$\forall x, \quad \neg(x \in E \wedge x \in F).$$

5.3. Deux modes de définition d'un ensemble

Défi.
Un ensemble peut être défini de deux manières :
- *en intension*, c'est-à-dire en spécifiant une propriété caractéristique vérifiée par tous ses éléments :
$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\};$$
- *en extension*, c'est-à-dire en décrivant explicitement les éléments de l'ensemble, soit par énumération, soit par un procédé de construction :
$$\{-1; 1\} \quad \text{ou encore} \quad \{x + y \mid x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}.$$

5.4. Opérations sur les parties d'un ensemble

Dans la suite, E désigne un ensemble, A et B des parties de E.

Nota.
L'ensemble constitué de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exem.
Soit $E = \{1, 2\}$. Ainsi,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Rema.
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ signifie $\mathbb{R} \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$.
- $\{1\} \subset \{1, 2\}$ signifie $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$.

Défi.
On appelle *partie complémentaire* dans E de A, l'ensemble $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} \overset{\text{not.}}{=} \overline{A}$.

Défi.
On appelle l'*intersection* de A et B l'ensemble :

$$A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Prop.
L'intersection entre les parties de E :
- est associative : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- est commutative : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \cap B = B \cap A$;
- admet E pour unique élément neutre : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cap E = A = E \cap A$.

Rema.
$\emptyset$ est absorbant par $\cap$. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cap \emptyset = \emptyset$.

Défi.
On appelle la *réunion* de A et B l'ensemble :

$$A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Prop.
La réunion entre les parties de E :
- est associative ;
- est commutative ;
- admet $\emptyset$ pour unique élément neutre : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cup \emptyset = A$.

Prop.
L'intersection est distributive sur la réunion, et la réunion est distributive sur l'intersection. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

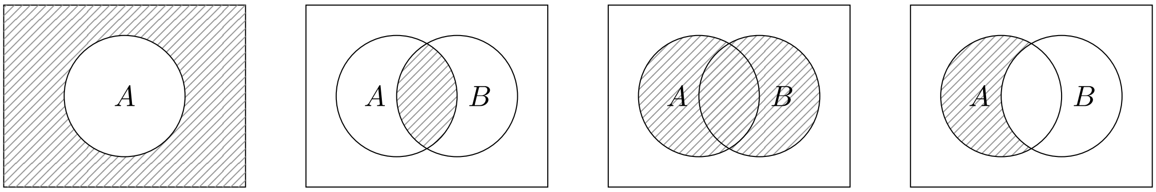
Défi.
On considère un ensemble I et des parties A_i de E pour $i \in I$.
1. L'intersection « en vrac » des A_i est $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$.
2. La réunion « en vrac » des A_i est $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$.

Défi.
On appelle la *différence* dans A de la partie B :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Rema.
Si $A \supset B$, alors $A \backslash B$ est égal au complémentaire dans A de B. Dans tous les cas : $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

Figu.



$E \setminus A$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \cup B$ $\quad$ $A \setminus B$

Prop.
Le complémentaire de l'intersection est la réunion des complémentaires :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Le complémentaire de la réunion est l'intersection des complémentaires :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

5.5. Produit cartésien d'ensembles

Noti.
Étant donnés une suite de deux ensembles E puis F, l'ensemble *produit cartésien* de E par F est :

$$E \times F \overset{\text{déf.}}{=} \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Noti.
Étant donné un entier $n \geq 2$, et une suite de n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, on appelle produit cartésien de la suite :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in E_i\}.$$

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on note l'ensemble E^n.

5.6. Mises en parties d'un ensemble

Défi.
On appelle *recouvrement* d'un ensemble E tout ensemble de parties de E dont la réunion est égale à E tout entier.

Exem.
Soit $E = \{1, 2, 3\}$. On pose $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$. On a $A \cup B = \{1, 2, 3\} = E$. La famille $\{A, B\}$ est un recouvrement de E.

Défi.
On appelle *recouvrement disjoint* de E tout ensemble de parties de E dont la réunion est égale à E tout entier et tel que ces ensembles sont disjoints deux à deux.

Exem.
L'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}^*$, est recouvert de manière disjointe par l'ensemble des strictement négatifs et l'ensemble des strictement positifs :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \sqcup \mathbb{R}_+^*.$$

Défi.
On appelle *partition* de E tout recouvrement disjoint de E par des parties non vides.

Exem.
L'ensemble des entiers relatifs est partitionné par les entiers pairs et les entiers impairs :

$$\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \sqcup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Défi.
On appelle *système de représentants* d'une partition de E, tout ensemble d'éléments de E tel que :
- ET tout élément de cet ensemble appartient exactement à une composante de la partition ;
- ET toute composante de la partition possède exactement un élément de cet ensemble.

Exem.
Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. On le découpe en deux paquets (partition) : $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Pour former un système de représentants, il faut choisir une seule lettre dans le premier paquet et une seule dans le second. Par exemple, l'ensemble $\{a, c\}$ est un système de représentants. L'ensemble $\{b, d\}$ en est un autre.

5.7. Nombre indicateur de l'appartenance à une partie

Défi.
On considère une partie A de E, et un élément x de E. On définit le nombre indicateur $\mathbb{1}_A(x)$ par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Prop.
Soit un ensemble E. Soit deux parties A et B de E.
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- Si $A \supset B$, alors $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$

Prop.
- $A \subset B \iff \forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.
- $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.