18 Géométrie élémentaire 3 : l'espace

Rema.
Pour décrire une partie de l'espace,
- une paramétrisation permet d'accéder directement à tout point de la partie ;
- une mise en équations permet de décider si un point donné de l'espace tout entier est de la partie.

18.1 Produit vectoriel dans l'espace orienté

Défi.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, qu'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'unique vecteur de l'espace défini comme suit :
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, alors
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})\, \vec{k},$$
où $\vec{k}$ désigne l'unique vecteur unitaire directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est lié, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Prop.
Le produit vectoriel est :
1. bilinéaire :
   a. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{E}$,
$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}; \end{cases}$$
   b. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}); \end{cases}$$
2. antisymétrique :
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Prop.
L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Soient $\vec{v_1}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v_2}(x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs. Alors $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$ admet pour coordonnées
$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Appl.
Dans une b.o.n.d. de l'espace, on considère $\vec{v_1} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v_2} \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Alors,
$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Prop. (Produit vectoriel et colinéarité)
Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si, et seulement si, le produit vectoriel de l'un par l'autre est égal au vecteur nul :

$$\vec{u} // \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

18.2 Déterminant dans une b.o.n.d

Défi. (Déterminant en dimension 3)
Le *déterminant* de tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace est le nombre réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Nota.
On note souvent $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exem.
On considère en b.o.n.d $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -14 \times 7 - 10 \times 2 - 2 \times 6 = -130.$$

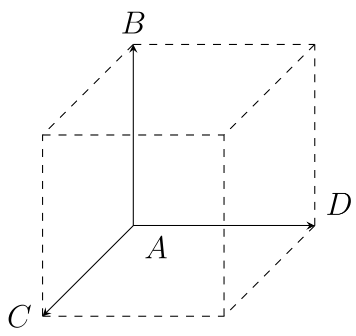
Prop. (Produit vectoriel et mesure)
La valeur absolue $|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$ mesure le volume du parallélépipède d'arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Rema.
1. On ne demande pas à ce que le parallélépipède le soit au sens strict.
2. Pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ on peut choisir A quelconque puis B, C et D tels que

$$\begin{cases} A + \vec{u} = B \\ A + \vec{v} = C \\ A + \vec{w} = D \end{cases}$$

pour interpréter $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

Figu.



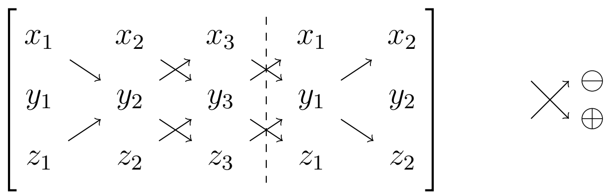
Prop. (Multilinéarité et antisymétrie)
Le déterminant (en dim. 2 ou 3) est linéaire par rapport à chaque place et antisymétrique.

Rema.
« Bi- » et « tri- » linéaires.

Exem.
Si $\vec{v} = \mu_1\vec{v_1} + \mu_2\vec{v_2}$, alors
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \mu_1[\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{w}] + \mu_2[\vec{u}, \vec{v_2}, \vec{w}],$$
et semblablement, si $\vec{u} = \lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2}$ ou si $\vec{w} = \nu_1\vec{w_1} + \nu_2\vec{w_2}$.

Prop. (Déterminant et coordonnées)
Considérons $\vec{v_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ et $\vec{v_3}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$ dans une b.o.n.d.
$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix}y_1z_2 - z_1y_2\\z_1x_2 - x_1z_2\\x_1y_2 - y_1x_2\end{pmatrix}.$$
$$\begin{aligned}\text{Donc}\quad [\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}] &= y_1z_2x_3 - z_1y_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_1z_2y_3 + x_1y_2z_3 - y_1x_2z_3\\ &= (x_1y_2z_3 + z_1x_2y_3 + y_1z_2x_3) - (z_1y_2x_3 + x_1z_2y_3 + y_1x_2z_3).\end{aligned}$$

Figu.



Nota.
Comme pour la notation $ab - cd = \begin{vmatrix}a & d\\c & b\end{vmatrix}$, la somme ci-avant se note
$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\y_1 & y_2 & y_3\\z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et développement)
En développant par rapport à la troisième colonne, on obtient
$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\y_1 & y_2 & y_3\\z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}y_1 & y_2\\z_1 & z_2\end{vmatrix}x_3 + \begin{vmatrix}z_1 & z_2\\x_1 & x_2\end{vmatrix}y_3 + \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\y_1 & y_2\end{vmatrix}z_3.$$

Rema.
Un échange permet de placer toute colonne en troisième position.

Rema.
Comme pour la relation $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$, la transposition conserve le déterminant (en dim. 2 ou 3) ;

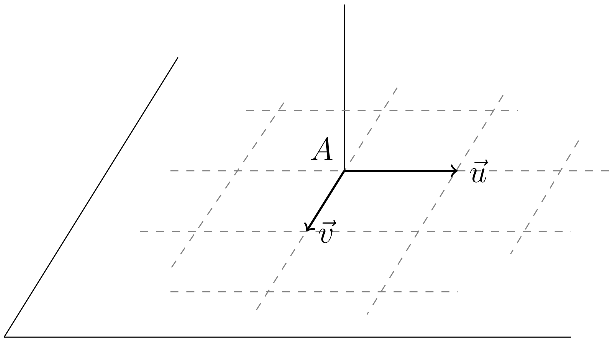
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et dépendance linéaire)
Un triplet de vecteurs de l'espace est lié si, et seulement si, son déterminant est égal à zéro.

18.3 Plans de l'espace

Noti. (Plan de l'espace)
On décrit primitivement un plan par la donnée d'un point A qu'il possède et d'un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs linéairement indépendants qui le dirigent.

Figu.



Prop. (Paramétrisation)
1. Le plan $\mathcal{P}$ passant par $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et dirigé par $\vec{v_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases} \quad ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Réciproquement, une telle paramétrisation, avec $\vec{v_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ linéairement indépendants, définit le plan passant par $M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dirigé par $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Appl.
Que dire de la partie de l'espace définie par le système de trois éqn. paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = 2k + 3l \\ y = -1 + 3k \\ z = -5 - 2k + l \end{cases} \quad ; \quad (k, l) \in \mathbb{R}^2 \quad ?$$

Posons $M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, puis $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre ? Soit, est-ce que $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} \neq$

$\vec{0}$?
Oui car l'abscisse est égale à : $3 \times 1 - (-2) \times 0 = 3$ et $3 \neq 0$. Cette partie est le plan passant par M_0 et dirigé par $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Prop. (Équation cartésienne)
Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.

1. On peut trouver au moins un quadruplet $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tel que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation :
$$ax + by + cz = d.$$
De plus, si le repère est orthonormé, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. Réciproquement, toute partie de l'espace d'équation $ax+by+cz = d$, où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, est un plan, dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si le repère est orthonormé.

Méth. (Passer d'une paramétrisation à une équation et inversement)

1. On considère le plan de paramétrisation
$$\begin{cases} x = 2k + 3l \\ y = -1 + 3k \\ z = 5 - 2k + l \end{cases} \quad ; \quad (k,l) \in \mathbb{R}^2.$$
Soit $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ un couple de vecteurs qui dirige le plan. On a $\vec{v_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$.
Donc $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $3x - 8y - 9z = d$ où $d \in \mathbb{R}$.
Or $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ (obtenu par $(k,l) = (0,0)$).
Donc $3 \times 0 - 8(-1) - 9 \times 5 = d$.
Enfin, $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne
$$3x - 8y - 9z = -37.$$
2. On demande une paramétrisation du plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne
$$3x - 8y - 9z = -37.$$
<u>Voie géométrique 1</u>
Choisissons deux points de $\mathcal{P}$. $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 37/9 \end{pmatrix}$ et $M_1\begin{pmatrix} 0 \\ 37/8 \\ 0 \end{pmatrix}$ conviennent.
Trouvons un couple libre $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ qui dirige $\mathcal{P}$.
Posons $\vec{v_1} = \vec{M_0M_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 37/8 \\ -37/9 \end{pmatrix}$.
Posons $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$ puis $\vec{v_2} = \vec{n} \wedge \vec{v_1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} \alpha = 37 \cdot \frac{8}{9} + \frac{9}{8} \\ \beta = 37 \cdot \frac{3}{9} \\ \gamma = 37 \cdot \frac{3}{8} \end{cases}$.
D'où la paramétrisation
$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \frac{37}{8}s + \beta t \\ z = \frac{37}{9} - \frac{37}{9}s + \gamma t \end{cases} \quad ; \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Voie géométrique 2

On identifie un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$.

On cherche un premier vecteur directeur $\vec{v_1}$ orthogonal à $\vec{n}$ (i.e. $\vec{n}\cdot\vec{v_1}=0$) en choisissant des coordonnées simples.

$\vec{v_1}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient car $3(8)-8(3)-9(0)=0$.

On fabrique le second vecteur directeur par produit vectoriel :

$$\vec{v_2}=\vec{n}\wedge\vec{v_1}=\begin{pmatrix} 27 \\ -72 \\ 73 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en choisissant le point $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 37/9 \end{pmatrix}$, on obtient la paramétrisation

$$\begin{cases} x = 8s+27t \\ y = 3s-72t \\ z = 37/9+73t \end{cases} \quad ; \quad (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Voie algébrique

$$\begin{aligned}\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\quad 3x-8y-9z=-37 &\iff 9z=3x-8y+37 \\ &\iff \begin{cases} x=p \\ y=q \\ z=37+3p-8q \end{cases} \quad ; \quad (p,q)\in\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Méth. (Déterminer l'intersection de deux plans)
On considère deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. On étudie le système formé par leurs équations cartésiennes.

Cas 1 :

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=-5 \\ 5x-2y+3z=4 \end{cases}$$

Les vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}=\begin{pmatrix} 17 \\ 14 \\ -19 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$. L'intersection est donc une droite dirigée par $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}$. On cherche un point particulier, par exemple en fixant $z=0$ et en résolvant le système, ce qui donne $M_0\begin{pmatrix} 2/19 \\ -33/19 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donc

$$\begin{cases} x=2/19+17t \\ y=-33/19+14t \\ z=-19t \end{cases} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}.$$

Cas 2 :

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=-5 \\ -6x-9y-12z=10 \end{cases}.$$

On remarque que $-3\times(2x+3y+4z)=-6x-9y-12z$. Les plans ont des vecteurs normaux colinéaires, ils sont parallèles. (Peut aussi se traiter avec le produit vectoriel.) Cependant, $15\neq 10$. Le système est incompatible. L'intersection est vide.

Cas 3 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -5 \\ -6x - 9y - 12z = 15 \end{cases}$$

La seconde équation est exactement le produit de la première par -3. Les deux équations sont équivalentes. L'intersection est le plan $\mathcal{P}_1$ lui-même. N'oublions pas d'en donner une paramétrisation, à partir d'une des équations, pour répondre au problème.

Défi. (Projeté orthogonal sur un plan)
Considérons un plan $\mathcal{P}$. On appelle *projeté orthogonal* de tout point M sur le plan $\mathcal{P}$ l'unique point H d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M. C'est que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{MH} \perp \vec{v}. \end{cases}$$

Rema.
Si $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est une base de vecteurs de $\mathcal{P}$, alors

$$(\forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{MH'} \perp \vec{v}) \iff (\vec{MH'} \perp \vec{v_1}) \wedge (\vec{MH'} \perp \vec{v_2}).$$

Défi.
La *distance* du point M au plan $\mathcal{P}$ est $\min\limits_{P \in \mathcal{P}} MP$.

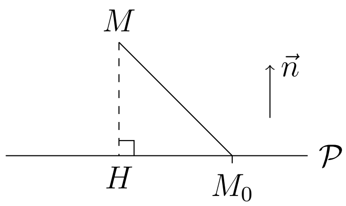
Nota.
Aussi, $\mathrm{dist}(M, \mathcal{P}) = \min\{MP : P \in \mathcal{P}\}$.

Figu.
C'est le rayon de la plus petite sphère de centre M établissant un contact ponctuel avec le plan.

Prop.
Si H est le projeté orthogonal du point M sur $\mathcal{P}$ alors

$$\mathrm{dist}(M, \mathcal{P}) = MH.$$

Méth. (Calculer la distance d'un point à un plan)
On suppose qu'on dispose d'un point $M_0 \in \mathcal{P}$ et d'un vecteur normal $\vec{n}$ de ce même plan. On demande la distance de tout point M donné au plan $\mathcal{P}$.



On écrit $\vec{M_0M} = \vec{M_0H} + \vec{HM}$.
Or $\vec{M_0H} \perp \vec{n}$; donc $\vec{M_0H} \cdot \vec{n} = 0$.
Donc $\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = \vec{M_0H} \cdot \vec{n} + \vec{HM} \cdot \vec{n} = \vec{HM} \cdot \vec{n}$.

Or $\vec{HM} // \vec{n}$, donc $|\vec{HM} \cdot \vec{n}| = \|\vec{HM}\| \times \|\vec{n}\|$.
Donc

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{M_0M}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Par conséquent, si $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + cz = d$, alors la distance de tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à $\mathcal{P}$ est

$$\operatorname{dist}\left(M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathcal{P}\right) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

18.4 Droites de l'espace

Noti.
Une droite $\mathcal{D}$ est définie par la donnée d'un point $M_0 \in \mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Prop. (Paramétrisation)
Si $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ admet la paramétrisation que voici :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

et réciproquement.

Prop. (Mise en équation)
Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont deux vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ linéairement indépendants et si $M_0 \in \mathcal{D}$, alors tout point $M \in \mathcal{E}$ est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \vec{n_1} \cdot \vec{M_0M} = 0 \\ \vec{n_2} \cdot \vec{M_0M} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, la droite $\mathcal{D}$ admet un système de deux équations cartésiennes

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

avec $\vec{n_1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ linéairement indépendants.

Rema.
Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont deux vecteurs normaux linéairement indépendants alors le vecteur $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$ est directeur de la droite.

Méth. (Passer d'une paramétrisation d'une droite à une mise en équation et inversement)

1. Soit $\mathcal{D}$ de paramétrisation
$$\begin{cases} x = 3 + 9t \\ y = 4 - 6t \\ z = 8 + 4t \end{cases}.$$
$M_0 \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{D}$ et $\vec{v} \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ -6 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \in \vec{\mathcal{D}} \setminus \{\vec{0}\}$.
Posons $\vec{n_1} \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{n_2} = \vec{v} \wedge \vec{n_1}$. Alors $\vec{n_1} \neq \vec{0}$ et $\vec{n_1} \perp \vec{v}$ (car $\vec{v} \cdot \vec{n_1} = 9 \times 6 - 6 \times 9 + 4 \times 0 = 0$).
$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} -36 \\ 24 \\ 127 \end{pmatrix}.$$
Ainsi $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont deux vecteurs normaux linéairement indépendants, donc $\mathcal{D}$ admet pour système
$$\begin{cases} 6x + 9y + 0z = d \\ -36x + 24y + 117z = d' \end{cases} \qquad \text{où } (d, d') \in \mathbb{R}^2.$$
Les coordonnées de M_0 vérifient ce système ; ce qui donne d et d'.
2. On considère $\mathcal{D}$ définie par le système
$$\begin{cases} 6x + 9y = 44 \\ -12x + 8y + 39z = 308 \end{cases}.$$
On veut une paramétrisation. Posons $\vec{n_1} \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{n_2} \left(\begin{smallmatrix} -12 \\ 8 \\ 39 \end{smallmatrix}\right)$. Ainsi, $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 351 \\ -234 \\ 156 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.
Donc $(\vec{n_1}, \vec{n_2})$ est libre, puis $\mathcal{D}$ est bien une droite ; elle est dirigée par $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$. Enfin, une solution particulière $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ du système conduit à une paramétrisation.

Méth. (Déterminer l'intersection de deux droites)
On considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ données par leurs représentations paramétriques. On cherche à déterminer s'il existe un couple (t, k) tel que $M(t) = M(k)$.
Prenons l'exemple suivant :
$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 - k \\ z = 1 + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$
On résout le système formé par l'égalité des coordonnées :
$$(S) : \begin{cases} 1 + t = 2 + k \quad (L_1) \\ -2 + t = 3 - k \quad (L_2) \\ 3t = 1 + 2k \quad (L_3). \end{cases}$$
On extrait un sous-système de deux équations pour trouver les candidats (t, k). En utilisant (L_1) et (L_2) :
$$\begin{cases} t - k = 1 \\ t + k = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 6 \implies t = 3 \\ k = 5 - 3 = 2. \end{cases}$$
On vérifie si ce couple candidat est solution de la troisième équation (L_3) :
$$3t = 3(3) = 9 \quad \text{et} \quad 1 + 2k = 1 + 2(2) = 5.$$

On constate que $9 \neq 5$. L'équation (L_3) n'est pas vérifiée.
Le système est incompatible, l'intersection est vide.
Si la troisième équation avait été vérifiée, les droites auraient été sécantes au point obtenu en injectant $t = 3$ dans $\mathcal{D}_1$. Enfin, si le système avait eu une infinité de solutions, les droites auraient été confondues.

Méth. (Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan)
On considère la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ définis par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P} : x + y - z - 5 = 0.$$

On cherche le paramètre t pour lequel le point de la droite appartient au plan en injectant les expressions paramétriques dans l'équation cartésienne.
On a

$$\begin{aligned} (1+t) + (2-2t) - (3t) - 5 &= 0 \\ 1 + 2 - 5 + t - 2t - 3t &= 0 \\ -2 - 4t &= 0 \\ t &= -0,5. \end{aligned}$$

La droite et le plan sont sécants.
On reporte t dans la paramétrisation de $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} x = 1 + (-0,5) = 0,5 \\ y = 2 - 2(-0,5) = 3 \\ z = 3(-0,5) = -1,5. \end{cases}$$

Le point d'intersection est $M(0,5\ ;\ 3\ ;\ -1,5)$.
Si l'équation en t aboutit à une suppression de l'inconnue t :
- $0 = k$ (avec $k \neq 0$) : Impossible. La droite est strictement parallèle au plan.
- $0 = 0$: Toujours vrai. La droite est incluse dans le plan.

Défi. (Distance à une droite)
La *distance* du point M à la droite $\mathcal{D}$ est la plus petite distance séparant M d'un point de la droite :

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}.$$

Défi. (Projeté orthogonal sur une droite)
Considérons une droite $\mathcal{D}$ dirigée par un vecteur $\vec{v}$. On appelle *projeté orthogonal* du point M sur la droite $\mathcal{D}$ l'unique point H tel que :

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \vec{MH} \perp \vec{v} \end{cases}.$$

Prop.

$$\mathrm{dist}(M, \mathcal{D}) = MH$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Méth. (Calculer la distance de tout point donné à une droite)
Supposons qu'on dispose de $M_0 \in \mathcal{D}$ et de $\vec{v}$ directeur de $\mathcal{D}$.
On écrit : $\vec{M_0 M} = \vec{M_0 H} + \vec{HM}$.
Donc

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{M_0 M} &= \vec{v} \wedge \vec{M_0 H} + \vec{v} \wedge \vec{HM} \\ \|\vec{v} \wedge \vec{M_0 M}\| &= \|\vec{v} \wedge \vec{HM}\| \quad (\text{car } \vec{M_0 H} // \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{HM}\| \quad (\text{car } \vec{v} \perp \vec{HM}). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{M_0 M}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

18.5 Sphère de l'espace

Défi.
Dans l'espace $\mathcal{E}$, on appelle *sphère* de centre $\Omega \in \mathcal{E}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble

$$\mathcal{S}(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{E} \mid \Omega M = r\}.$$

Prop. (Équation cartésienne d'une sphère)
Soit un point Ω de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans un r.o.n. puis $r \in [0, +\infty[$.
La sphère $\mathcal{S}(\Omega, r)$ admet pour équation cartésienne

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2.$$

Rema.
Dans la propriété ci-avant, le membre de gauche admet pour forme développée

$$1x^2 + 1y^2 + 1z^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z.$$

Méth. (Vérification d'une équation de sphère et caractéristiques)
Question : Est-ce que l'ensemble (Γ) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ est une sphère ?
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On regroupe les termes et on reconnaît le début d'identités remarquables (mise sous forme canonique) :
- $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$;
- $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$;
- $z^2 - 6z = (z-3)^2 - 9$.

L'équation devient :

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 5 = 0.$$

En isolant les carrés, on obtient :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Ceci est de la forme $X^2 + Y^2 + Z^2 = K$ avec $K = 9$.
Conclusion : Comme $K > 0$, l'ensemble (Γ) est bien une sphère de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et de rayon $R = \sqrt{9} = 3$.

Prop. (Paramétrisation d'une sphère)
La sphère $\mathcal{S}(\Omega, r)$ avec $\Omega\begin{pmatrix}x_\Omega\\y_\Omega\\z_\Omega\end{pmatrix}$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_\Omega + r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y = y_\Omega + r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z = z_\Omega + r\sin(\varphi) \end{cases} \quad , \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Méth. (Intersection d'une sphère et d'un plan)
Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{P}$ un plan.
Pour étudier l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$, on calcule d'abord la distance du centre au plan :

$$d = \mathrm{dist}(\Omega, \mathcal{P}).$$

Trois cas se présentent :
1. Si $d > R$, l'intersection est vide.
2. Si $d = R$, l'intersection est réduite à un point unique H (le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$). Le plan est tangent à la sphère.
3. Si $d < R$, l'intersection est un cercle de centre H (projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$) et de rayon $r_{cercle} = \sqrt{R^2 - d^2}$ (Théorème de Pythagore).