

## 17. FONDEMENTS 6 : FONCTION ET INVERSIBILITÉ

### 17.1. Surjectivité

Dans toute la suite,  $E$  et  $F$  désignent deux ensembles et  $f \in \mathcal{F}(E, F)$ .

#### Défi.

On dit que la fonction  $f$  est *surjective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au moins un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de  $b \in F$ , on peut trouver au moins un élément  $x \in E$  qui admet  $b$  pour image par  $f$ .

$$\forall b \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = b.$$

#### Rema.

Dire que  $f$  est surjective revient à dire que  $f(E) = F$ .

#### Prop.

La composée de deux fonctions surjectives est elle-même une fonction surjective : étant donné trois ensembles  $E$ ,  $F$  et  $G$ , puis deux fonctions  $f \in \mathcal{F}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{F}(F, G)$ . Si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$  est surjective.

#### Défi.

On dit qu'une fonction  $e \in \mathcal{F}(F, E)$  est un *inverse à droite* de  $f \in \mathcal{F}(E, F)$  lorsque

$$\forall b \in F, \quad f(e(b)) = b.$$

C'est que  $f \circ e = \text{id}_F$ .

On dit alors que  $f$  est *inversible à droite* lorsqu'elle admet un inverse à droite.

#### Exem.

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ . Alors les deux fonctions  $e_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \sqrt{y}$  et  $e_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto -\sqrt{y}$  sont deux inverses à droite de  $f$ .

#### Prop.

Une fonction est inversible à droite si et seulement si elle est surjective.

#### Méth. (Vérifier si une fonction est surjective)

Soit  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$ . Est-ce que  $f$  est surjective ?

Que soit donné  $b \in \mathbb{R}$ . L'équation  $f(x) = b$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  admet au moins une solution.

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  quelconque.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons que  $f(x) = b$ .

$$\frac{2x+1}{x-1} = b$$

$$\frac{2x+1}{x-1} - b = 0$$

$$\frac{2x+1 - b(x-1)}{x-1} = 0$$

$$2x+1 - bx + b = 0$$

$$(2-b)x + 1 + b = 0$$

$$(2-b)x = -1 - b$$

Si  $b = 2$ , alors  $0 = -3$ . Or  $0 \neq -3$  donc  $b \neq 2$ .

CN : pour que  $f(x) = b$ , il est nécessaire que  $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Synthèse : Pour le choix  $b = 2$ , l'équation n'admet aucune solution.

En réponse, la fonction  $f$  n'est pas surjective.

## 17.2. Injectivité

**Défi.**

On dit que la fonction  $f$  est *injective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au plus un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de  $b \in F$ , on peut trouver au plus un élément  $x \in E$  qui admet  $b$  pour image par  $f$ .

$$\forall b \in F, \quad \forall x_1, x_2 \in E, \quad (f(x_1) = b \wedge f(x_2) = b) \implies x_1 = x_2.$$

$$\text{i.e.} \quad \forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

**Prop.**

La composée de deux fonctions injectives est une fonction injective.

**Défi.**

On dit qu'une fonction  $g \in \mathcal{F}(F, E)$  est un *inverse à gauche* de  $f \in \mathcal{F}(E, F)$  lorsque

$$\forall x \in E, \quad g(f(x)) = x.$$

**Rema.**

C'est que  $g \circ f = \text{id}_E$ .

**Rema.**

Si  $g$  est un inverse à gauche de  $f$ , alors pour tout  $b \in F$ , l'équation  $f(x) = b$  d'inconnue  $x \in E$  admet au plus  $g(b)$  pour solution.

**Prop.**

Toute fonction est inversible à gauche si, et seulement si elle est injective.

## 17.3. Bijectivité

**Défi.**

On dit que la fonction  $f$  est *bijective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'exactement un élément du départ : quel que soit le choix de  $b \in F$ , il existe exactement un élément  $x \in E$  qui admet  $b$  pour image par  $f$ .

$$\forall b \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = b.$$

**Rema.**

1. Une fonction bijective est une fonction à la fois surjective et injective.
2. Une fonction  $f \in \mathcal{F}(E, F)$  est bijective lorsqu'elle établit une correspondance un à un entre les éléments de  $E$  d'un côté et les éléments de  $F$  de l'autre côté.

**Défi.**

On considère une fonction bijective  $f: E \rightarrow F$ . On appelle *fonction réciproque* de  $f$ , qu'on note  $f^{-1}$ , l'unique fonction de  $F$  dans  $E$  qui à tout  $y \in F$  associe son unique antécédent par  $f$  : pour tout  $y \in F$ ,  $f^{-1}(y)$  est l'unique élément de  $E$  dont l'image par  $f$  est égale à  $y$ .

**Prop.**

La composée de deux fonctions bijectives est bijective.

**Défi.**

On dit que  $h \in \mathcal{F}(F, E)$  est un *inverse* de  $f \in \mathcal{F}(E, F)$  lorsque quel que soit le choix de  $b \in F$  et  $x \in E$ ,  $f(h(b)) = b$  et  $x = h(f(x))$ .

C'est que  $f \circ h = \text{id}_F$  et  $\text{id}_E = h \circ f$ .

**Défi.**

On dit que  $f$  est *inversible* pour dire que  $f$  admet un inverse.

**Prop. (Unicité)**

Toute fonction admet au plus un inverse.

**Nota.**

Si  $f$  est inversible, son inverse est notée  $f^{-1}$ .

**Rema.**

Dire que  $f \in \mathcal{F}(E, F)$  admet  $f^{-1}$  pour inverse signifie que pour tout  $b \in F$ , l'équation  $f(x) = b$  d'inconnue  $x \in E$  admet exactement  $f^{-1}(b)$  pour solution.

**Prop.**

Toute fonction est inversible si, et seulement si elle est bijective.

**Méth.** (Vérifier si une fonction est bijective en exprimant sa réciproque le cas échéant)

Soit  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,  $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$ .

Que soit donné  $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  quelconque fixé.

Q : Est-ce que l'équation  $f(x) = b$  d'inconnue  $x$  variant dans  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , admet exactement une solution ?

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  quelconque. On a  $f(x) = b$  ;

$$\text{ce quand } 2x + 1 = b(x - 1)$$

$$\text{ce quand } (2 - b)x = -b - 1$$

$$\text{ce quand } x = \frac{-b - 1}{2 - b} \quad (\text{car } 2 - b \neq 0).$$

R : La fonction  $f$  est bijective et sa réciproque est la fonction

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad b \mapsto \frac{-b - 1}{2 - b} = \frac{b + 1}{b - 2}.$$