7 Plan Complexe 2 : exponentielle et trigonométrie

7.1 Exponentielle complexe

Défi.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\exp(z) \overset{\text{déf}}{=} \exp(\mathrm{Re}(z))\big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))\big).$$

Prop.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors
$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \quad \text{et} \quad e^{i(x-y)} = \frac{e^{ix}}{e^{iy}}.$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Ainsi,
$$\begin{aligned} e^z = 1 &\iff z \in i2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = i2k\pi. \end{aligned}$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ (variable). Ainsi,
$$e^z = e^{z_0} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = z_0 + i2k\pi.$$

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$
Puis, si $e^{z_2} \neq 0$:
$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

7.2 Nombres complexes de module 1

Prop.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi,
$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad (a, b) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous avons l'équivalence
$$|z| = 1 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} z = a + ib \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}.$$

Noti.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\theta}.$$

C'est que $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Rema.
Rappelons que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Prop.
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Ainsi,
- $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$.
- $\frac{1}{z_1} \in \mathbb{U}$.
- $z_1 \neq 0$, $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{U}$. Ainsi,
- $\frac{1}{z} = \bar{z}$;
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Exem.
Si $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
1.
$$\exists (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$
2. Supposons que $z \neq 0$. Ainsi,
$$\exists! (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

Défi.
On considère $z \in \mathbb{C}$. On appelle *forme exponentielle* de z toute expression $e^{i\theta}\rho$ égale à z, pour $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Défi.
On considère $a \in \mathbb{R}^*$ fixé. On dit qu'un réel y est *congru* à un réel x *modulo* a, lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = x + ka,$$

que l'on note $y \equiv x[a]$.

Prop.
Soit $(\theta_0, \rho_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (fixé) et $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (variable). Ainsi,

$$e^{i\theta}\rho = e^{i\theta_0}\rho_0 \iff \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta \equiv \theta_0 [2\pi] \end{cases} .$$

Prop. (Équation $\exp(z) = w$)
Soit $w \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z \in \mathbb{C}$ (variable). Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. $\exp(z) = w$
2. $w \in \mathbb{C}^*$ et
$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln(\rho) + i\theta + i2\pi k$$
   où $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est tel que $e^{i\theta}\rho = w$.

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\arg(rz) = \arg(z) \quad [2\pi].$$

Défi.
On dit qu'un réel θ est un des *arguments* d'un complexe z non nul quand

$$\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{i\theta}\rho = z.$$

Rema.
C'est dire que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$.

Nota.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $\arg(z)$ pour un des arguments de z et $\mathrm{Arg}(z)$ pour celui qui tombe dans $]-\pi, \pi]$.

Exem.
- $\arg(0 + 3i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- $\arg(2 + 2\sqrt{3}\, i) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] = 60°\ [360°]$.
- $\mathrm{Arg}(4 - 4i) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0\ [\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Prop. (Arguments d'un produit, d'un quotient)
Si $z_1 = e^{i\theta_1}\rho_1$ et $z_2 = e^{i\theta_2}\rho_2$ (non nuls). Alors

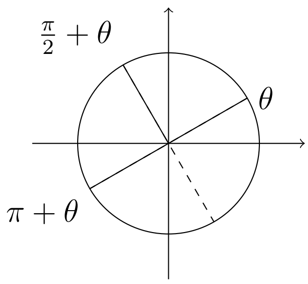
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi];$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi].$$

On a aussi
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.

7.3 Trigonométrie circulaire

Prop.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $(\cos(\theta+\pi), \sin(\theta+\pi)) = (-\cos\theta, -\sin\theta)$.
- $(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta)) = (-\cos\theta, \sin\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2}+\theta), \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta), \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)) = (\sin\theta, \cos\theta)$.



Prop. (Formules d'addition)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ainsi, d'une part,
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

D'autre part,
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = -\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

Meth. (Retrouver les formules d'addition)
1. $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$
2. $e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$

En égalisant ces expressions, on obtient promptement par identification ce que l'on cherche.
Pour les formules avec $(a-b)$, il suffit de remplacer b par $-b$.

Prop. (Formule de duplication)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.

Prop. Formule de Moivre
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Prop. (Puissance n-ième d'une somme, pour n petit)
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Ainsi,
- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = 1a + 1b$
- $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
- $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Figu. Triangle de Pascal
On retrouve les coefficients binomiaux précédents à l'aide du tableau suivant :

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Prop. Formules d'Euler
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Prop. (Formules de linéarisation)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

Prop. (Formules de factorisation)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Méth. (Technique de l'arc moitié)
Pour factoriser une somme d'exponentielles $e^{ia} + e^{ib}$, on met en facteur l'exponentielle de la moyenne des angles ($e^{i\frac{a+b}{2}}$).

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

De même :

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Méth. (Transformation de $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$)
On considère $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. On veut écrire $f(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t-\varphi)$.

1. On factorise par le module $A=\sqrt{a^2+b^2}$:

$$f(t)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\omega t)\right).$$

2. On identifie un angle φ. Comme $(\frac{a}{A})^2+(\frac{b}{A})^2=1$, il existe φ tel que :

$$\cos(\varphi)=\frac{a}{A}\quad\text{et}\quad\sin(\varphi)=\frac{b}{A}.$$

3. On applique la formule d'addition :

$$f(t)=A(\cos(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\omega t)\sin(\varphi))=A\cos(\omega t-\varphi).$$

Le nombre φ est un argument du complexe $a+ib$.

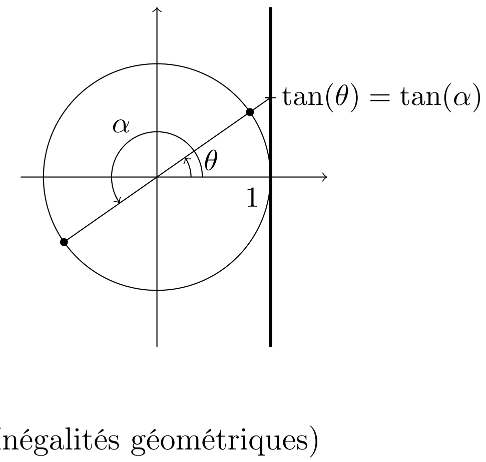
Défi. (Tangente)
On considère un réel θ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. On définit ainsi la *tangente* de θ comme suit :

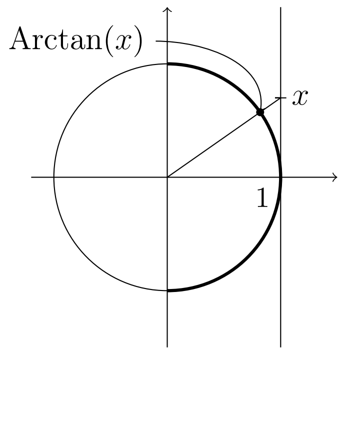
$$\tan(\theta)\overset{\text{déf}}{=}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Défi. (Arctangente)
Pour tout réel x, on appelle *arctangente* de x, noté $\operatorname{Arctan}(x)$, l'unique réel θ tel que

$$\begin{cases}\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ \tan(\theta)=x.\end{cases}$$

Figu.





Prop. (Inégalités géométriques)
Soit $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$\sin(\theta)<\theta<\tan(\theta).$$