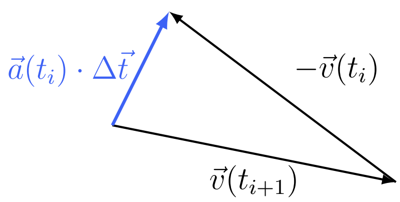
01 Éléments de cinématique

Description et paramétrage du mouvement d'un point

- Un point matériel est un objet sans dimension, caractérisé par sa masse (grandeur scalaire invariante en kg). Son mouvement se déroule dans l'espace et le temps.
- En mécanique classique, on suppose que la vitesse des corps est très faible devant la célérité de la lumière (sinon il faut utiliser la relativité). De plus, la taille des systèmes étudiés est très grande devant celle de l'atome (sinon il faut utiliser la mécanique quantique). Ainsi, le temps et les distances sont absolus.
- Le mouvement est relatif : il dépend de l'observateur. Il est donc nécessaire de définir un référentiel d'étude.
- Un référentiel est constitué d'un repère d'espace pour situer une position et d'une horloge pour mesurer le temps.
- Cas usuels : référentiel terrestre (laboratoire), géocentrique (centre de la Terre), héliocentrique (Soleil).
- La position du point M à l'instant t par rapport à l'origine O du repère est donnée par le vecteur position
$$\vec{r}(t) = \vec{OM}(t).$$
L'ensemble des positions successives constitue la trajectoire.
- Le vecteur vitesse instantanée est la dérivée temporelle du vecteur position :
$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}.$$
Il est toujours tangent à la trajectoire au point $M(t)$.
- Le vecteur accélération instantanée est la dérivée du vecteur vitesse :
$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}(t)}{dt^2}.$$
Il est toujours orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.
- Lors d'un enregistrement vidéo (discret), on approxime ces vecteurs par des variations moyennes entre deux instants t_i et t_{i+1} séparés par Δt :
$$\vec{v}(t_i) = \frac{\vec{OM}(t_{i+1}) - \vec{OM}(t_i)}{\Delta t} \quad ; \quad \vec{a}(t_i) = \frac{\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_i)}{\Delta t}.$$
Graphiquement, on détermine la direction et le sens de $\vec{a}(t_i)$ en construisant la différence vectorielle $\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_i)$.



Cinématique en coordonnées cartésiennes

- On se place dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- Le vecteur position s'écrit

$$\vec{r}(t) = \vec{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

  Sa norme est $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- En dérivant le vecteur position on obtient le vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

- De même, le vecteur accélération s'obtient par une nouvelle dérivation :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d^2\vec{OM}(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

Mouvement rectiligne à accélération constante

- Considérons un point matériel défini par une vitesse initiale $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ et par une accélération $\vec{a}_0$ constante colinéaire au vecteur vitesse initial dans le référentiel lié au sol.
- On choisit le système de coordonnées cartésiennes pour simplifier les calculs de sorte que :

$$\vec{OM}(0) = \vec{0}\ ; \qquad \vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{a}(t) = \vec{a}_0 = a_0\vec{e}_x.$$

- L'accélération est imposée par l'extérieur, mais dépend aussi de la définition des coordonnées cartésiennes : $\vec{a}(t) = a_0\vec{e}_x = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$. Cette équation peut être vue sous forme de vecteur colonne :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

  Par identification, on trouve les équations du mouvement :

$$\ddot{x}(t) = a_0\ ; \qquad \ddot{y}(t) = 0\ ; \qquad \ddot{z}(t) = 0.$$

- On doit intégrer une fois le vecteur accélération pour obtenir le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} a_0 t + v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix},$$

  où v_{0x}, v_{0y} et v_{0z} sont trois constantes d'intégration que l'on détermine en utilisant la condition initiale $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x = \left(\begin{smallmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
  On obtient ainsi

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} a_0 t + v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

– En intégrant le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$, on obtient le vecteur position :

$$O\vec{M}(t) = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

où x_0, y_0 et z_0 sont trois constantes d'intégration déterminées par la position initiale $O\vec{M}(0) = \vec{0}$.
On obtient finalement

$$O\vec{M}(t) = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mouvement courbe uniformément accéléré

– Considérons un point matériel défini par une vitesse initiale $\vec{v}(0)$ et par une accélération constante cette fois orthogonale au vecteur vitesse initial.

– On se place en coordonnées cartésiennes de sorte que :

$$O\vec{M}(0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{a}(t) = \vec{a}_0 = a_0\vec{e}_y.$$

– Équations du mouvement :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \ddot{x}(t) = 0 \ ; \quad \ddot{y}(t) = a_0 \ ; \quad \ddot{z}(t) = 0.$$

– Obtention du vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{e}_x + a_0t\vec{e}_y = \begin{pmatrix} v_0 \\ a_0t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

– Obtention du vecteur position :

$$O\vec{M}(t) = \vec{r}(t) = v_0t\vec{e}_x + \frac{1}{2}a_0t^2\vec{e}_y = \begin{pmatrix} v_0t \\ \frac{1}{2}a_0t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

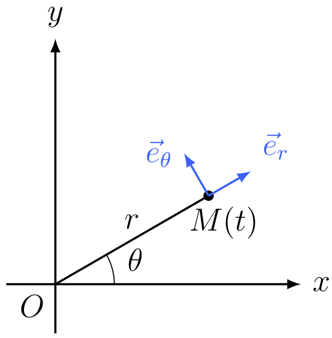
– La trajectoire dans le plan (x, y) est donnée par $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0t \\ \frac{1}{2}a_0t^2 \end{pmatrix}$.
Pour obtenir l'équation de la courbe $y = f(x)$, il faut faire disparaître le temps de l'expression de y pour faire apparaître x. On exprime le temps t en fonction de x, ce qui donne $t = \frac{x}{v_0}$.
On injecte ce temps dans l'expression de y, ce qui donne

$$y(x) = \frac{1}{2}a_0\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{a_0}{v_0^2}x^2.$$

Il s'agit d'une trajectoire parabolique.

Cinématique en coordonnées cylindriques et polaires

Coordonnées polaires



- En coordonnées polaires, un point $M(t)$ du plan est repéré par les variables r et θ telles que :
  - le rayon $r = OM \in [0, +\infty[$;
  - l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OM}) \in [0, 2\pi]$.

  Le lien avec les coordonnées cartésiennes est immédiat : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
- On définit la base locale orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Il s'agit d'une base mobile rattachée au point M (contrairement à la base cartésienne qui est fixe).
- Les vecteurs de base dépendent de l'angle θ. Voici comment on les dérive :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r.$$

- L'expression du vecteur position est très simple en coordonnées polaires :

$$\vec{r}(t) = \vec{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) = r\vec{e}_r.$$

  Comme ci-haut, simplifions par la suite, les notations des variables.
- Le vecteur vitesse s'obtient en dérivant le vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \ ;$$

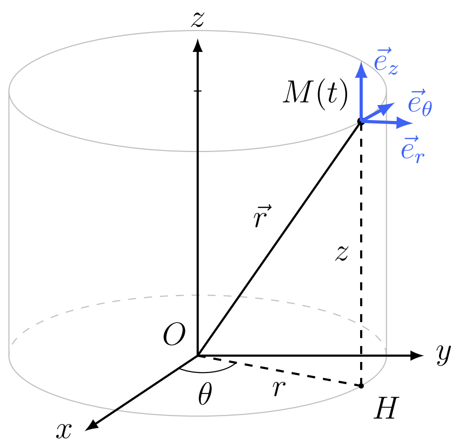
- Le vecteur accélération s'obtient en dérivant le vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) = \frac{d\dot{r}\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr\dot{\theta}\vec{e}_\theta}{dt} = \Big(\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta\Big) + \Big(\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r\Big).$$

  En regroupant les termes selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, on obtient :

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

Coordonnées cylindriques

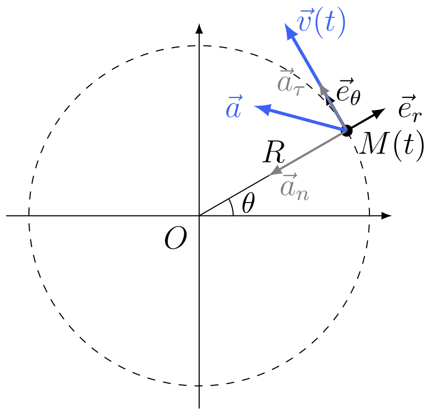


- Il s'agit de la généralisation des coordonnées polaires pour les mouvements en trois dimensions.
- Si on note H le projeté de M dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, on définit :
  - le rayon polaire $r = OH$;
  - l'angle polaire $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OH})$;
  - la cote z (comme en coordonnées cartésiennes) ;
  - le vecteur radial $\vec{e}_r$;
  - le vecteur orthoradial $\vec{e}_\theta$.
- La base locale cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ suit le mouvement de M.
- Les expressions des vecteurs cinématiques se déduisent des coordonnées polaires en ajoutant la composante verticale :
  - position : $\vec{OM}(t) = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$;
  - vitesse : $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$;
  - accélération : $\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Mouvement circulaire uniforme

- Un point M possède un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle de rayon constant $r(t) = R$. Si le mouvement est uniforme, la norme du vecteur vitesse est constante.
- La vitesse angulaire est constante : $\dot{\theta}(t) = \Omega$. On a alors la relation $v = \|\vec{v}\| = R\Omega$.
- Vecteur accélération : en remplaçant $r(t)$ par R et $\ddot{\theta}$ par 0 dans l'expression générale, il ne reste que le terme radial :
$$\vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$
On dit que cette accélération est centripète (dirigée vers le centre de la trajectoire).

Mouvement circulaire non uniforme



- Dans ce cas, la trajectoire reste un cercle de rayon R, mais la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ varie au cours du temps.
- Le vecteur position vérifie $O\vec{M}(t) = R\vec{e}_r$.
- Le vecteur vitesse est purement tangentiel :
$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v(t)\vec{e}_\theta.$$
- En simplifiant le vecteur accélération des coordonnées polaires, deux composantes apparaissent :
$$\vec{a}(t) = \underbrace{-R\dot{\theta}^2\vec{e}_r}_{\vec{a}_n} + \underbrace{R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta}_{\vec{a}_\tau} = -\frac{v(t)^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_\theta.$$
- On définit ainsi :
  - l'accélération normale $\vec{a}_n$, dirigée selon $-\vec{e}_r$, liée à la courbure de la trajectoire ;
  - l'accélération tangentielle $\vec{a}_\tau$, dirigée selon $\vec{e}_\theta$, liée à la variation de la norme de la vitesse.

Introduction au mouvement des solides

- Un solide indéformable est un ensemble de points tel que la distance entre deux points quelconques du solide reste constante au cours du temps.
- Un solide est en translation si, à tout instant, les vecteurs vitesse de tous ses points sont identiques.
- Types de translation :
  - rectiligne : les trajectoires des points sont des droites parallèles ;
  - circulaire : les trajectoires sont des cercles de même rayon mais les axes liés au solide gardent une direction fixe (ex : nacelle de grande roue).
- Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrées sur Δ.
- La vitesse d'un point M situé à une distance r de l'axe est portée par la tangente au cercle et vaut :
$$v = r\omega$$
où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du solide. Contrairement à la translation, le champ des vitesses n'est pas uniforme : la vitesse dépend de la distance à l'axe.