

## 18. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 3 : L'ESPACE

### 18.1. Produit vectoriel dans l'espace orienté

#### Défi.

On considère deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$ , qu'on note  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , l'unique vecteur de l'espace défini comme suit :

- Si  $(\vec{u}, \vec{v})$  est libre, alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k},$$

où  $\vec{k}$  désigne l'unique vecteur unitaire directement orthogonal à  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

- Si  $(\vec{u}, \vec{v})$  est lié, alors  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

#### Prop.

Le produit vectoriel est :

1. bilinéaire :

- a.  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{E}$ ,

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}; \end{cases}$$

- b.  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}); \end{cases}$$

2. antisymétrique :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

#### Prop.

L'espace est muni d'une base orthonormée directe  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Soient  $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$  et  $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$  deux vecteurs. Alors  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$  admet pour coordonnées

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$