

18. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 3 : L'ESPACE

18.1. Produit vectoriel dans l'espace orienté

Défi.

On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de \vec{u} par \vec{v} , qu'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'unique vecteur de l'espace défini comme suit :

- Si (\vec{u}, \vec{v}) est libre, alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k},$$

où \vec{k} désigne l'unique vecteur unitaire directement orthogonal à (\vec{u}, \vec{v}) .

- Si (\vec{u}, \vec{v}) est lié, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Prop.

Le produit vectoriel est :

1. bilinéaire :

a. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{E}$,

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}; \end{cases}$$

b. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}); \end{cases}$$

2. antisymétrique :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Prop.

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soient $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs. Alors $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ admet pour coordonnées

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$