4 Décomposition en séries de Fourier

Principe

- Tout signal périodique peut s'écrire comme la somme d'une composante continue et d'une infinité de sinusoïdes (fondamental et harmoniques).
- La forme la plus pratique pour les calculs utilise les coefficients A_k et B_k (avec $k \in \mathbb{N}^*$) :

$$s(t) = S_{moy} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)\right).$$

- Les coefficients se calculent via les intégrales suivantes :

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \;; \qquad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

- On peut retrouver l'amplitude et la phase de chaque harmonique :

$$S_{k\_max} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \;; \qquad \varphi_k = \arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right).$$

Simplifications

L'étude préalable des symétries de la composante alternative permet de déterminer la nullité de certains coefficients et de réduire l'intervalle d'intégration.

- Fonction paire (symétrie axiale) : $s(t) = s(-t)$.
  - Les termes en sinus sont nuls : $B_k = 0$.
  - Le calcul des termes en cosinus peut se réduire à la demi-période :

$$A_k = 2 \cdot \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

- Fonction impaire (symétrie centrale) : $s(t) = -s(-t)$.
  - Les termes en cosinus sont nuls : $A_k = 0$.
  - Le calcul des termes en sinus peut se réduire à la demi-période :

$$B_k = 2 \cdot \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

- Symétrie de glissement (anti-périodicité de demi-période) : $s(t + T/2) = -s(t)$.
  - Le signal ne comporte que des harmoniques de rang impair ($k = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$).
  - Les coefficients pairs (A_{2p}, B_{2p}) sont nuls.
  - L'intégration peut s'effectuer sur la demi-période pour les coefficients impairs :

$$A_{2p+1} = 2 \cdot \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\cos((2p+1)\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

$$B_{2p+1} = 2 \cdot \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\sin((2p+1)\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

– Cumul des symétries.
  - Si une fonction est à la fois impaire et présente une symétrie de glissement, les simplifications s'additionnent.
  - Seuls les termes en sinus de rang impair subsistent (B_{2p+1}).
  - L'intervalle d'intégration peut alors se réduire au quart de la période :

$$B_{2p+1} = 4 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} s(t) \sin((2p+1)\omega t)\, \mathrm{d}t.$$

Relations

– La relation de Parseval généralisée permet de calculer la valeur efficace totale du signal à partir des valeurs efficaces de ses composantes :

$$S_{eff} = \sqrt{S_{moy}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} S_{k\_eff}^2}.$$

– Le taux de distorsion harmonique (THD) quantifie la « pollution » du signal par les harmoniques par rapport au fondamental. Plus il est proche de 0%, plus le signal est proche d'une sinusoïde pure.

$$td = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} S_{k\_eff}^2}}{S_{1\_eff}}.$$

Le numérateur correspond à la valeur efficace globale de tous les harmoniques sans le fondamental et sans la composante continue.

– Notons le lien étroit entre ces deux relations qui peut s'avérer très utile.