

Notes de cours de
PYTHON 3

CPGE TSI – 2027

People who are doing things for fun do things the right way by themselves.
– LINUS TORVALDS

JEAN DECROOCQ

Communiquer une anomalie : jeandecroocq@hotmail.com

TABLE DES MATIÈRES

1	Fondements	4
1.1	Variables et types	4
1.2	Fonctions	4
1.3	Algorithmique et programmation	5
1.4	Modules	6
2	Listes Python et chaînes de caractères	7
2.1	Tableaux et listes Python	7
2.2	Chaînes de caractères	8
3	Dictionnaires ///	9
3.1	Création et modification d'un dictionnaire	9
3.2	Commandes principales	9
4	Méthodes de programmation	10
4.1	Spécification d'une fonction	10
4.2	Assertion	10
4.3	Génération de test	10
5	Lecture de fichiers de données ///	12
5.1	Lecture d'un fichier texte de données	12
6	Numpy ///	13
6.1	Notion	13
6.2	Tableaux numpy	13
6.3	Opérations sur les tableaux numpy	15
7	Matplotlib	16
7.1	Tracé de courbes	16
8	Récurtivité ///	17
8.1	Principe des fonctions récursives	17
8.2	Analyse des fonctions récursives	17
9	Matrices de pixels et images	19
9.1	Formats de représentation d'image	19
9.2	Manipulation des matrices de pixels	19
9.3	Transformation d'images	19
9.4	Modification par convolution : filtrage	20
9.5	Détection de contours	20
10	Algorithmes gloutons et dichotomiques ///	22
10.1	Algorithmes gloutons et optimisation	22
10.2	Algorithmes dichotomiques	22

11 Algorithmes de tri	24
11.1 Introduction	24
11.2 Tri par sélection	24
11.3 Tri par insertion	25
11.4 Tri par fusion	25
11.5 Tri par comptage	26
11.6 Tri rapide	26
12 Compléments	28
12.1 Compléments en vrac :)	28

1 FONDEMENTS

1.1 Variables et types

- Une variable constitue une référence vers un objet stocké en mémoire. L'affectation, réalisée via le signe `=`, lie un identifiant à une valeur. Le typage est dynamique : la nature de la variable est déterminée par la valeur qu'elle reçoit au moment de l'exécution, ce qui peut se vérifier avec `type(x)` qui renvoie le type de `x`. Enfin `print(x)` permet d'afficher la valeur de `x` dans la console.
- Les nombres entiers (`int`) supportent les opérations classiques `+`, `-`, `*`, `/` ainsi que la division euclidienne `//`, le modulo `%` et l'exponentiation `**`.
- Les nombres flottants (`float`) représentent les réels approximativement pour certaines valeurs décimales. Ils peuvent s'écrire en notation scientifique : `1.5e4` pour $1,5 \times 10^4$.
- Les booléens (`bool`) ne peuvent prendre que deux états : `True` ou `False`. Ils sont le résultat d'opérations de comparaison (`==`, `!=`, `<`, `>=`) et se combinent à l'aide des connecteurs logiques `not`, `and` et `or`.
- Les chaînes de caractères (`str`) sont des séquences immuables. On ne peut modifier un caractère directement (`s[0] = 'a'` lève une erreur). La concaténation s'effectue avec `+` et la répétition avec `*`.
- Les listes (`list`) sont des séquences mutables, ordonnées et hétérogènes, définies entre crochets. L'accès aux éléments se fait par un indice entier.

```
1 L = [10, 20, 30]
2 L[0] = 5          # Modification : L vaut [5, 20, 30]
3 dernier = L[-1]  # Accede au dernier element (30)
```

- Il est possible de convertir une valeur d'un type vers un autre (casting).
 - `int(x)` : Convertit en entier.
Un flottant et tronqué : `int(3.9)` donne `3`, `int(-2.7)` donne `-2`.
Une chaîne doit représenter un entier : `int("42")` donne `42`, sinon une `ValueError` est levée : `int("3.5")` échoue.
 - `float(x)` : Convertit en flottant : `float("1e-4")` donne `0.0001`.
 - `str(x)` : Transforme n'importe quel objet en sa représentation textuelle, ce qui est indispensable pour l'affichage ou la concaténation.
 - `bool(x)` : Convertit en booléen. En Python, la plupart des valeurs sont considérées comme vraies (`True`), sauf les valeurs "vides" ou nulles qui valent `False` : le nombre `0`, `0.0`, la chaîne vide `""`, les listes vides `[]`, et la valeur `None`.

1.2 Fonctions

- Une fonction encapsule un bloc d'instructions afin de le rendre réutilisable. Elle est définie par le mot-clé `def`, suivi de son nom et de ses paramètres entre parenthèses. Le bloc d'instructions constituant le corps de la fonction doit impérativement être indenté.
- L'instruction `return` interrompt l'exécution de la fonction et renvoie la valeur spécifiée à l'endroit où la fonction a été appelée. Une fonction sans instruction `return` (ou avec un `return` vide) renvoie implicitement la valeur `None`.

```
1 def f(x, a):
2     y = x ** 2 + a
```

```
3     return y
```

- Les variables définies à l'intérieur d'une fonction ont une portée locale : elles n'existent que durant l'exécution de celle-ci et sont détruites ensuite. Elles ne peuvent pas modifier directement une variable globale immuable, sauf usage explicite (et déconseillé) du mot-clé `global`.

1.3 Algorithmique et programmation

- L'instruction conditionnelle dirige le flot d'exécution. Si la condition du `if` est fausse, le programme teste les éventuels `elif` successifs. Si aucune condition n'est vérifiée, le bloc `else` est exécuté.

```
1 if x > 0:
2     signe = 1
3 elif x < 0:
4     signe = -1
5 else:
6     signe = 0
```

- La boucle bornée `for` est utilisée pour parcourir un itérable (liste, chaîne, tuple) ou réaliser un nombre d'itérations déterminé. On l'associe souvent au générateur `range(start, stop, step)`.
 - `range(5)` génère : 0, 1, 2, 3, 4.
 - `range(1, 5)` génère : 1, 2, 3, 4.
 - `range(0, 10, 2)` génère : 0, 2, 4, 6, 8.

```
1 # Moyenne d'une liste
2 L = [8, 2026, 18, 190]
3 s = 0
4 for val in L:
5     s += val
6 m = s/len(L)
```

```
1 # Somme des termes d'une suite géométrique
2 u0 = 1
3 q = 3
4 s = 0
5 for n in range(5):
6     u = u0 * q**n # formule explicite, utilise n
7     s += u # de u0 à u4
8
9 # Variante pour illustrer les boucles
10 u = 1
11 s = 0
12 for n in range(5):
13     s += u # de u0 à u4
14     u = u * q # formule recursive, sans n
15 # u5 calculé mais non sommé
```

- La boucle non bornée `while` répète un bloc d'instructions tant qu'une condition booléenne reste vraie.

```
1 n = 0
2 while n < 10:
3     print(n)
4     n = n + 1 # Indispensable pour que la condition devienne fausse
```

1.4 Modules

- Un module est une bibliothèque contenant un ensemble de fonctions et de variables pré-définies, permettant d'étendre les fonctionnalités natives de Python. Des modules standards comme `math`, `random` ou `time` sont disponibles immédiatement, tandis que d'autres comme `numpy` ou `matplotlib` doivent être installés.
- L'importation d'un module peut se faire de plusieurs manières. La méthode recommandée est l'import global, éventuellement avec un alias pour alléger l'écriture.

```
1 import math
2 y = math.cos(math.pi)
3
4 import numpy as np      # alias
5 T = np.array([1, 2, 3])
```

- Il est possible d'importer spécifiquement certaines fonctions dans l'espace de nommage courant avec `from ... import ...`. En revanche, l'importation totale via `from module import *` est fortement déconseillée car elle pollue l'espace de noms et peut créer des conflits (aliasing) difficiles à déboguer.
- La fonction `help(module)` ou `help(fonction)` permet d'accéder à la documentation intégrée, décrivant les paramètres attendus et le type de retour.

2 LISTES PYTHON ET CHAÎNES DE CARACTÈRES

2.1 Tableaux et listes Python

- Les listes Python (`list`) sont des structures de données mutables, ordonnées et hétérogènes. Bien que souvent appelées "listes", elles sont implémentées sous forme de tableaux dynamiques contenant des références vers les objets.
- La construction d'une liste peut se faire par extension ou, de manière plus élégante et performante, par compréhension.

```
1 L1 = [0, 1, 4, 9, 16] # Par extension
2 L2 = [k**2 for k in range(5)] # Par compréhension (identique à L1)
3 L3 = [x for x in L1 if x % 2 == 0] # Avec filtrage (nombres pairs)
```

- Lorsqu'une liste contient une autre liste, on accède à ses éléments ainsi : `L[a][b]`.
- Le mécanisme de tranchage (*slicing*) permet d'extraire une sous-partie de la liste en créant une nouvelle liste (copie). La syntaxe générale est `L[debut:fin:pas]`.
 - `L[i:j]` : sélectionne les éléments de l'indice *i* inclus à *j* exclu.
 - `L[i:]` : sélectionne de l'indice *i* jusqu'à la fin.
 - `L[:j]` : sélectionne du début jusqu'à l'indice *j* exclu.
 - `L[::-1]` : crée une copie renversée de la liste.
- Les listes étant mutables, elles disposent de méthodes agissant *in-place* (modifiant l'objet sans le renvoyer). Les plus courantes sont :
 - `L.append(x)` : ajoute l'élément *x* à la fin de la liste.
 - `L.pop()` : supprime et renvoie le dernier élément. `L.pop(i)` supprime l'élément à l'indice *i*.
 - `L.sort()` : trie la liste en place.
 - `L.reverse()` : inverse l'ordre des éléments en place.
- Voici quelques opérations usuelles :
 - `L1 + L2`, `L * n` : concaténation, répétition.
 - `len(L)` : longueur/nombre d'éléments.
 - `max(L)`, `min(L)` : maximum, minimum.
 - `sum(L)` : somme des éléments.
 - `x in L` : test d'appartenance.
- Un point de vigilance majeur concerne l'aliasing. L'instruction `L2 = L1` ne copie pas la liste, mais crée une seconde référence vers le même objet en mémoire :

```
1 L1 = [1, 2, 3]
2 L2 = L1
3 L2[0] = 99
4 print(L1) # Affiche [99, 2, 3], L1 est modifiée aussi !
```

Pour obtenir une copie indépendante, il faut utiliser le tranchage complet `L[:]` ou la méthode `L.copy()` :

```
1 L1 = [1, 2, 3]
2 L2 = L1[:] # ou L2 = L1.copy()
3 L2[0] = 99
4 print(L1) # Affiche [1, 2, 3], L1 reste inchangée
```

2.2 Chaînes de caractères

- Les chaînes de caractères (`str`) sont des séquences ordonnées de caractères Unicode. Contrairement aux listes, elles sont immuables : il est impossible de modifier un caractère par affectation directe (`ch[0] = 'a'` lève une erreur `TypeError`).
- On définit une chaîne de caractère en l'entourant de guillemets simples, doubles, ou trois guillemets simples ou doubles. L'utilisation de guillemets simple permet d'utiliser des guillemets doubles dans la chaîne et vice-versa.
- La syntaxe de tranchage (*slicing*) et les fonctions universelles de séquences (`len()`, `in`) fonctionnent exactement comme pour les listes. La conversion d'un objet en chaîne se fait via le constructeur `str()`.
- Le langage propose des méthodes spécifiques pour la manipulation de texte :
 - `s.find(motif)` : renvoie l'indice de la première occurrence du motif (ou -1 si absent).
 - `s.count(motif)` : compte le nombre d'occurrences du motif.
 - `s.strip()` : retire les espaces (et caractères invisibles) en début et fin de chaîne.
 - `s.replace(old, new)` : remplace toutes les occurrences de la sous-chaîne `old` par `new`.
- Deux méthodes sont essentielles pour passer du type `str` au type `list` et inversement :
 - `sep.join(liste)` : concatène les éléments d'une liste de chaînes en les séparant par la chaîne `sep`.
 - `s.split(sep)` : découpe la chaîne `s` en une liste de sous-chaînes, en utilisant `sep` comme délimiteur.

```
1 phrase = "Sciences du Numerique"
2 mots = phrase.split(" ") # ['Sciences', 'du', 'Numerique']
3 reconst = "-".join(mots) # "Sciences-du-Numerique"
```


3 DICTIONNAIRES ///

3.1 Création et modification d'un dictionnaire

- Le type `dict` (dictionnaire ou table d'association) permet de stocker des couples clé-valeur. Contrairement aux listes indexées par des entiers, les dictionnaires sont indexés par des clés appartenant à un ensemble C , associées à des valeurs d'un ensemble V .
- Une contrainte fondamentale concerne les clés : elles doivent être de type hachable (immuable), comme les `int`, `float`, `str` ou `tuple`. Les valeurs, en revanche, peuvent être de n'importe quel type et sont mutables.
- L'intérêt majeur de cette structure (implémentée par table de hachage) est l'efficacité : l'accès à une valeur via sa clé se fait en temps constant moyen $O(1)$, quelle que soit la taille du dictionnaire.
- La création s'effectue via des accolades `{}` ou le constructeur `dict()`. On peut définir un dictionnaire par extension ou par compréhension.

```
1 d1 = {} # Dictionnaire vide
2 d2 = {'argent': 'silver', 'or': 'gold'} # Par extension
3 d3 = {x: x**2 for x in range(5)} # Par compréhension
4 # d3 vaut {0: 0, 1: 1, 2: 4, 3: 9, 4: 16}
```

- L'ajout ou la modification d'une entrée utilise la syntaxe d'affectation `d[cle] = valeur`. Si la clé existe déjà, l'ancienne valeur est écrasée (unicité des clés). Si elle n'existe pas, une nouvelle entrée est créée.

3.2 Commandes principales

- La fonction `len(d)` renvoie le nombre de paires clé-valeur stockées.
- Le test d'appartenance `k in d` vérifie si la clé `k` est présente dans le dictionnaire (opération très rapide). Attention, cela ne teste pas la présence des valeurs.
- Pour parcourir un dictionnaire, on dispose de trois méthodes renvoyant des *vues* (objets itérables dynamiques) :
 - `d.keys()` : itère sur les clés (comportement par défaut d'une boucle `for k in d`).
 - `d.values()` : itère sur les valeurs.
 - `d.items()` : itère sur les couples (clé, valeur).

```
1 d = {'pomme': 2, 'poire': 5}
2 for k, v in d.items():
3     print(k, "->", v) # Affiche "pomme -> 2" etc.
```

- Pour récupérer une valeur, deux approches existent :
 - `d[k]` : renvoie la valeur associée à `k`, mais lève une erreur `KeyError` si la clé est absente.
 - `d.get(k)` : renvoie la valeur si elle existe, ou `None` (ou une valeur par défaut spécifiée) sinon, sans provoquer d'erreur.
- La suppression d'une entrée se fait via la méthode `d.pop(k)`, qui supprime la clé `k` et renvoie la valeur associée. Si la clé n'existe pas, une erreur est levée.

4 MÉTHODES DE PROGRAMMATION

4.1 Spécification d'une fonction

- La lisibilité et la maintenabilité d'un code reposent sur une spécification claire des fonctions. Cela passe d'abord par le choix de noms explicites pour les variables et les fonctions, évitant les dénominations génériques (type `x`, `fct`, `res`).
- La *signature* d'une fonction définit ses entrées et ses sorties. Depuis Python 3.5, il est possible d'utiliser des annotations de type pour indiquer les types attendus des arguments et de la valeur de retour. Ces annotations sont purement indicatives et n'empêchent pas l'exécution en cas de non-respect.
- La documentation fonctionnelle s'insère via une chaîne de caractères spécifique, nommée *docstring*, placée entre triples guillemets juste après la signature. Elle décrit le rôle de la fonction, ses paramètres et ce qu'elle retourne. Elle est accessible via la commande `help(fonction)`.

```

1 def distance_euclidienne(p1: list, p2: list) -> float: # annot. de type
2     """
3     Calcule la distance euclidienne entre deux points.
4     Entrées : p1 et p2 (list) contiennent les coordonnees (floats).
5     Sortie : distance (float).
6     """ # fin documentation fonctionnelle
7
8     d_carre = 0
9     for i in range(len(p1)):
10         d_carre += (p1[i] - p2[i])**2
11     return d_carre**0.5

```

4.2 Assertion

- La validation des entrées permet de s'assurer que les arguments fournis respectent les pré-conditions nécessaires au bon fonctionnement de l'algorithme (types cohérents, dimensions compatibles, domaines de définition).
- L'instruction `assert condition, "message"` évalue une expression booléenne. Si celle-ci est fausse, le programme s'interrompt immédiatement en levant une `AssertionError` et affiche le message associé. Cela permet de détecter les bugs au plus tôt lors du développement.

```

1 def division(a, b):
2     # Precondition : le denominateur ne doit pas etre nul
3     assert b != 0, "Division par zero impossible"
4     return a / b
5
6 # exemple avec la fonction distance précédente
7 def distance_euclidienne(p1, p2):
8     assert type(p1) == list and type(p2) == list, "Arguments invalides"
9     assert len(p1) == len(p2), "Points de dimensions differentes"
10    # ... suite du calcul ...

```

4.3 Génération de test

- Pour valider empiriquement qu'une fonction produit le résultat attendu, on rédige des tests unitaires. Un test consiste à appeler la fonction sur un cas connu et à comparer le résultat obtenu avec le résultat théorique attendu.

- Pour les nombres flottants, l'égalité stricte `==` est à proscrire en raison des erreurs d'arrondi inhérentes à la représentation binaire. On vérifie plutôt si l'écart entre la valeur calculée et la valeur attendue est inférieur à une précision arbitraire.

```
1 def test_distance():
2     # cas nominal : triplet Pythagoricien 3, 4, 5
3     assert abs(distance_euclidienne([0, 0], [3, 4]) - 5.0) < 1e-9, "Echec
        test nominal"
4
5     # cas limite : points confondus
6     assert abs(distance_euclidienne([1, 2], [1, 2])) < 1e-9, "Echec test
        nul"
7
8     print("Tests validés !")
9
10 test_distance()
```

5 LECTURE DE FICHIERS DE DONNÉES ///

5.1 Lecture d'un fichier texte de données

- La gestion de l'encodage est primordiale lors de l'ouverture d'un fichier texte. Bien que la norme actuelle soit l'UTF-8 (compatible Unicode), des formats hérités (ASCII) ou propriétaires (Windows CP1252) persistent. Pour éviter les erreurs d'interprétation des accents, il convient de préciser systématiquement l'argument `encoding="utf-8"`.
- Le format CSV (*Comma Separated Values*) est un standard de fichier texte où les données sont séparées par un délimiteur (ex. virgule, point-virgule ou tabulation).
- La lecture « naïve » en Python pur s'effectue avec l'instruction `with open(...) as f:`, qui garantit la fermeture du fichier après lecture. On utilise ensuite `f.readlines()` pour obtenir une liste de chaînes, qu'il faut nettoyer (`.strip()`) et découper (`.split()`).
- Le module `csv` simplifie cette démarche grâce à l'objet `csv.reader`, qui gère automatiquement le découpage selon un délimiteur donné. Cependant, les données lues restent des chaînes de caractères qu'il faut convertir explicitement (en `float` ou `int`).
- La méthode avancée (et recommandée pour le calcul scientifique) repose sur la fonction `np.loadtxt` de Numpy. Elle charge directement les données dans un tableau, gère la conversion de type, et permet de sélectionner les colonnes ou d'ignorer les en-têtes.

```
1 import numpy as np
2
3 # Chargement direct dans des tableaux (unpack=True)
4 t, v = np.loadtxt(
5     "data.csv",
6     delimiter=";",      # séparateur
7     skiprows=1,         # ignore la 1ere ligne (en-tetes)
8     usecols=(0, 2),     # selectionne colonnes 0 et 2
9     encoding="utf-8",
10    unpack=True          # transpose pour separer les vecteurs
11 )
```

6 NUMPY ///

DEBUT DEJA REPRIS

6.1 Notion

- Le module `numpy` est essentiel pour le calcul scientifique nécessitant la manipulation de grandes quantités de données. Il repose sur trois principes d'efficacité : le stockage sous forme de tableaux `ndarray`, la limitation des copies mémoire, et l'utilisation de fonctions vectorialisées pour éviter les boucles.
- Ces optimisations imposent des contraintes : les tableaux sont constitués d'éléments de même type (homogènes, souvent `np.float` ou `np.int64`) et leur taille est fixée à la création.
- Le chargement du module se fait traditionnellement via l'instruction : `import numpy as np`.

6.2 Tableaux numpy

- La création basique se fait via `np.array()` à partir d'une liste. L'attribut `.dtype` indique le type commun (ex. `int64`), différent des listes Python.

```

1 import numpy as np
2
3 a = np.array([1, 2, 3])
4 print(a)
5 # [1 2 3]
6
7 b = np.array([[1, 2, 3],
8               [2, 3, 4],
9               [0, 1, 0]])
10 print(b)
11 # [[1 2 3]
12 #  [2 3 4]
13 #  [0 1 0]]
14
15 print(type(a))
16 # <class 'numpy.ndarray'>
17 print(a.dtype)
18 # int64

```

- Pour les vecteurs (1D), on utilise `np.arange(start, stop, step)` qui accepte des pas flottants, ou `np.linspace(start, stop, num)` pour obtenir `num` points équitablement répartis (bornes incluses).

```

1 a = np.arange(0, 10, 2)
2 print(a)
3 # [0 2 4 6 8]
4
5 b = np.linspace(0, 10, 6)
6 print(b)
7 # [0. 2. 4. 6. 8. 10.]

```

- Le module `numpy` redéfinit un certain nombre de fonctions mathématiques. Ainsi, pour tracer la courbe de la fonction $\sin(x)$ sur l'intervalle $[0, 10]$ on peut procéder ainsi :

```

1 x = np.linspace(0, 10, 1000)
2 y = np.sin(x)

```

```
3 plt.plot(x, y)
```

- Découvrons les trois fonctions spéciales : `np.ones`, `np.zeros`, `np.eye`, ainsi que la fonction `np.diag`.

```
1 a = np.ones((3, 5)) # Matrice de 1 3x5
2 # [[1. 1. 1. 1. 1.]
3 #   [1. 1. 1. 1. 1.]
4 #   [1. 1. 1. 1. 1.]]
5
6 b = np.ones((3, 5), np.int)
7 # [[1 1 1 1 1]
8 #   [1 1 1 1 1]
9 #   [1 1 1 1 1]]
10
11 c = np.zeros((3, 5)) # Matrice de 0 3x5
12 # [[0. 0. 0. 0. 0.]
13 #   [0. 0. 0. 0. 0.]
14 #   [0. 0. 0. 0. 0.]]
15
16 d = np.zeros((3, 5), dtype=np.bool)
17 # [[False False False False False]
18 #   [False False False False False]
19 #   [False False False False False]]
20
21 e = np.eye(3) # Matrice diagonale de 1 de taille 3x3
22 # [[1. 0. 0.]
23 #   [0. 1. 0.]
24 #   [0. 0. 1.]]
25
26 f = np.diag([1, 2, 3]) # Création d'une matrice diagonale 3x3
27 # [[1 0 0]
28 #   [0 2 0]
29 #   [0 0 3]]
```

- Tableaux aléatoires :

```
1 # Tirage uniforme d'entiers dans [0, 10[
2 a = np.random.randint(0, 10, size=(2, 5))
3 print(a)
4 # [[8 2 6 2 7]
5 #   [4 3 5 5 5]]
6
7 # (2, 5) échantillons suivant une distribution binomiale (10, .3)
8 b = np.random.binomial(10, .3, (2, 5))
9 print(b)
10 # [[1 1 2 3 3]
11 #   [1 2 4 2 1]]
12
13 # 5 échantillons suivant une distribution geometrique (.3)
14 c = np.random.geometric(.3, 5)
15 print(c)
16 # [1 1 1 3 3]
17
18 # 5 échantillons suivant une distribution de poisson (4.3)
19 d = np.random.poisson(4.3, 5)
20 print(d)
21 # [2 6 6 3 3]
```

FIN REPRISE ICI

- Un tableau possède des attributs clés : `dtype`, `size` (nombre d'éléments), `shape` (tuple des

dimensions) et `ndim`. L'attribut `shape` est mutable : on peut redimensionner un tableau via la méthode `reshape()`.

- Le stockage en mémoire est contigu. L'attribut `dtype` est immuable pour garantir la cohérence de l'espace mémoire.
- Le *slicing* (tranchage) s'étend à plusieurs dimensions (ex : `T[:, 0]` pour la première colonne). Attention : le slicing renvoie une vue et non une copie. Modifier une tranche modifie le tableau d'origine. Pour copier, il faut utiliser `.copy()`.
- Les masques (indexation booléenne) permettent de filtrer un tableau. Si `b` est un tableau de booléens de même format que `a`, alors `a[b]` extrait les éléments où `b` est `True`.

6.3 Opérations sur les tableaux numpy

- Les opérations arithmétiques usuelles (`+`, `*`, `**...`) s'appliquent terme à terme. C'est la vectorisation.
- Il ne faut pas faire de copies inutiles de grands tableaux. Les opérations se font souvent au travers de vues.
- Les fonctions universelles s'appliquent aussi terme à terme. On peut vectoriser une fonction personnelle avec `np.vectorize`.
- Des méthodes statistiques sont disponibles : `max`, `min`, `sum`, `prod`, `mean` (moyenne arithmétique), `var` (variance), `std` (écart-type).
- Pour l'algèbre linéaire, le produit matriciel se fait avec `np.dot(a, b)`. Le produit scalaire canonique utilise `np.vdot` et le produit vectoriel `np.cross`. La transposée s'obtient avec `.T` ou `.transpose()`.
- Le sous-module `np.linalg` fournit des outils avancés : `solve` (résolution de système), `inv` (inverse), `det` (déterminant), `norm` (norme) et `eig` (éléments propres).
- La classe `Polynomial` (du module `numpy.polynomial`) permet de manipuler formellement des polynômes (racines, dérivées, primitives) définis par leurs coefficients.

7 MATPLOTLIB

7.1 Tracé de courbes

- La bibliothèque `matplotlib` et son sous-module `pyplot` est l'outil standard pour la représentation graphique.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 plt.figure() # Creation d'une nouvelle fenetre
4 # Trace de la vitesse en fonction du temps
5 plt.plot(t, v, label="Vitesse (m/s)", color="blue")
6
7 plt.title("Evolution de la vitesse")
8 plt.xlabel("Temps (s)")
9 plt.ylabel("Vitesse (m/s)")
10 plt.grid() # Affiche la grille
11 plt.legend() # Affiche la legende definie dans plot()
12 plt.show() # Bloque l'execution et affiche la fenetre
```

Ici, les variables `t` et `v` doivent être des itérables numériques 1D (listes, tableaux numpy, etc.) de même longueur : `t` contient les instants (abscisse) et `v` les valeurs associées (ordonnée).

- D'autres types de tracés sont disponibles pour des besoins spécifiques : `plt.semilogx` et `plt.loglog` pour les échelles logarithmiques, `plt.scatter` pour les nuages de points, ou `plt.hist` pour les histogrammes...

8 RÉCURSIVITÉ ///

8.1 Principe des fonctions récursives

- Une fonction est dite récursive si son corps contient un ou plusieurs appels à elle-même. C'est une méthode de résolution de problèmes consistant à décomposer un problème complexe en sous-problèmes de même nature mais de taille réduite.
- Pour qu'une fonction récursive soit valide et se termine, deux conditions sont impératives :
 - L'existence d'un ou plusieurs cas de base (ou conditions d'arrêt) qui sont traités sans appel récursif.
 - Une progression stricte des appels récursifs vers ce cas de base (souvent via un paramètre entier décroissant ou la taille d'une liste qui diminue).
- L'exemple canonique est le calcul de la factorielle $n! = n \times (n - 1)!$ avec $0! = 1$.

```

1 def factorielle(n):
2     if n == 0:                # Cas de base
3         return 1
4     else:                    # Appel récursif
5         return n * factorielle(n - 1)

```

8.2 Analyse des fonctions récursives

- **Gestion des appels (Pile d'exécution)** : Lorsqu'une fonction s'appelle elle-même, l'interpréteur suspend l'exécution courante et empile le contexte (variables locales, paramètres, adresse de retour) dans une structure de données appelée *pile d'exécution* (call stack). Lorsque le cas de base est atteint, les résultats sont renvoyés successivement ("dépilés") lors de la remontée. Si la profondeur de récursion est trop importante, on risque une erreur de type `RecursionError` (débordement de pile ou *stack overflow*).
- **Récursivité terminale** : Une fonction est dite récursive terminale si l'appel récursif est la toute dernière instruction exécutée (aucune opération n'est effectuée sur le résultat renvoyé par l'appel). Cette forme est théoriquement optimisable par le compilateur pour ne pas consommer de pile (ce n'est cependant pas le cas en Python standard).
- **Complexité** : La complexité temporelle se calcule souvent en établissant une relation de récurrence sur le nombre d'opérations $C(n)$. Par exemple, pour la factorielle, $C(n) = C(n - 1) + O(1)$, ce qui conduit à une complexité linéaire $O(n)$. Pour une dichotomie, la division de la taille du problème par 2 à chaque étape mène à une complexité logarithmique $O(\log n)$.
- **Récursif vs Itératif** : Tout programme récursif peut être transformé en version itérative (avec des boucles).
 - *Avantages du récursif* : Code souvent plus élégant, lisible et proche de la définition mathématique (ex : suites, structures arborescentes).
 - *Inconvénients* : Coût mémoire (pile) et surcoût temporel lié aux appels de fonctions. L'itératif est généralement plus efficace en Python.
- **Exemple : Suite de Fibonacci** : La définition mathématique est $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. L'implémentation récursive "naïve" est extrêmement inefficace (complexité exponentielle) car elle recalcule de nombreuses fois les mêmes termes.

```

1 def fibo_rec(n):
2     if n < 2: return n
3     return fibo_rec(n-1) + fibo_rec(n-2)

```

Une version itérative (ou utilisant la mémorisation) est indispensable pour calculer des termes de rang élevé.

9 MATRICES DE PIXELS ET IMAGES

9.1 Formats de représentation d'image

- Il existe deux modes de codage numérique. Le mode vectoriel décrit les formes par des propriétés mathématiques (zoom infini sans perte, ex : PDF, SVG). Le mode matriciel (ou *bitmap*) repose sur une grille de pixels (ex : PNG, JPEG).
- Une image matricielle se caractérise par sa définition (nombre de pixels), sa résolution (nombre de pixels par unité de longueur, en dpi ou ppp) et aussi par sa quantification des couleurs exprimée en bits par pixel (ex : noir et blanc equivaut à 1bpp ; 256 nuances de gris equivaut à 8bpp ; 256 nuances dans les trois composantes equivaut à 24bpp...).
- Généralement, la colorimétrie utilise le modèle RVB (Rouge, Vert, Bleu). Chaque couleur est codée sur un octet (de 0 à 255). Un pixel est ainsi un triplet (R, V, B) . Le noir correspond à $(0, 0, 0)$ et le blanc à $(255, 255, 255)$.

9.2 Manipulation des matrices de pixels

- En Python, une image est traitée comme un tableau Numpy de dimension 3 (hauteur, largeur, composantes). On utilise `matplotlib.image` (alias `img`) pour la lecture et `pyplot` pour l'affichage.

```
1 import matplotlib.image as img
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 im = img.imread("image.png") # Chargement et stockage dans la variable
5 plt.imshow(im) # Preparation de l'affichage
6 plt.show() # Affichage
7
8 im.shape # Envoi des 3 dimensions de l'image
9 print(im) # Affichage du contenu de la variable
10
11 image = np.zeros((1920, 1080, 3)) # Création d'une image vide
12 image[342, 135] = [100, 50, 12] # Accès et modification d'un pixel
```

9.3 Transformation d'images

- Symétrie axiale

```
1 H, L, C = im.shape
2 im_sym = np.zeros((H, L, C))
3
4 # Methode iterative
5 for i in range(H):
6     for j in range(L):
7         im_sym[i, j] = im[i, L - 1 - j]
8
9 # Methode par slicing
10 im_sym = im[:, ::-1]
```

- Rotation (90°)

```
1 im_rot = np.zeros((L, H, C)) # Dimensions inversees
2
3 # Methode iterative
```

```

4 for i in range(H):
5     for j in range(L):
6         im_rot[L - 1 - j, i] = im[i, j]

```

- Passage en niveau de gris (par moyenne pondérée)

```

1 H, L, C = im.shape
2 im_gris = np.zeros((H, L)) # Tableau 2D (pas de 3eme dimension)
3
4 # Methode iterative
5 for i in range(H):
6     for j in range(L):
7         r, v, b = im[i, j] # Si C = 3
8         im_gris[i, j] = 0.2125*r + 0.7154*v + 0.0721*b # Norme 709 de la
9             CIE
10            # Sinon, (r+v+b)/3
11 # Affichage d'une image en niveau de gris
12 plt.imshow(im_gris, cmap='gray')

```

9.4 Modification par convolution : filtrage

- Le filtrage consiste à modifier la valeur d'un pixel en fonction de ses voisins grâce à une petite matrice.
- Le nouveau pixel est obtenu par un filtre (ou produit de convolution) permettant pour chaque pixel de modifier sa valeur en fonction des valeurs des pixels avoisinants, affectées de coefficients. Pour conserver la luminosité, on divise souvent le résultat par la somme des coefficients du filtre.
- Pour un pixel en bordure, certains voisins manquent. Une solution consiste à ignorer les bords de l'image (balayage de la ligne 1 à $h - 1$).
- On peut appliquer un filtre sur une zone spécifique en utilisant une matrice masque (image binaire). Le résultat final est une combinaison : $I_{finale} = M \cdot I_{floue} + (1 - M) \cdot I_{initiale}$.
- Flou (Moyenneur)

```

1 n = 3
2 H, L, C = im.shape
3 b = n//2 # bordure
4
5 im_flou = np.zeros((H, L, C))
6
7 for i in range(b, H - b):
8     for j in range(b, L - b):
9         for c in range(C):
10             s=0
11             for k in range(n):
12                 for l in range(n):
13                     s = s + im[i+k-n//2, j+l-n//2, c]
14             im_flou[i, j, c]=s/(n*n)
15 return im_flou

```

9.5 Détection de contours

- La détection de contour repose sur l'identification des changements brutaux de couleur ou de contraste entre pixels voisins.

- On calcule pour chaque pixel une « distance » euclidienne par rapport à ses voisins directs de valeurs p_1 , p_2 , p_3 et p_4 (image en niveau de gris pour avoir une seule valeur). Une formule courante est la distance euclidienne des différences : $d = \sqrt{(p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_4)^2}$.
- On compare cette distance à une valeur seuil : si $d > seuil$, le pixel appartient à un contour et est tracé en blanc ; sinon, il est laissé en noir.

10 ALGORITHMES GROUTONS ET DICHOTOMIQUES ///

10.1 Algorithmes gloutons et optimisation

- Les algorithmes gloutons s'inscrivent dans le cadre de la résolution de problèmes d'optimisation. Un problème d'optimisation consiste à choisir, parmi un ensemble de solutions possibles, celle qui maximise un gain (fonction-objectif) ou minimise un coût (fonction-coût).
- L'ensemble des solutions qui respectent les contraintes imposées par le problème est appelé l'ensemble admissible. Une solution qui répond au critère d'optimisation (le meilleur score possible) est une solution globale.
- Quelques exemples classiques de problèmes d'optimisation :
 - Le problème du sac à dos (maximiser la valeur des objets emportés sous contrainte de poids).
 - Le problème du rendu de monnaie (minimiser le nombre de pièces pour atteindre une somme).
 - Le problème du voyageur de commerce (minimiser la distance pour visiter un ensemble de villes).
- Le principe d'un algorithme glouton est de faire, à chaque étape, le choix qui semble le meilleur localement (le choix optimal à l'instant t), sans jamais revenir sur une décision prise, dans l'espoir que cette suite de choix locaux mène à l'optimum global. Notez que cela ne garantit pas toujours de trouver la solution optimale absolue, mais fournit souvent une solution approchée acceptable rapidement.

10.2 Algorithmes dichotomiques

- La méthode dichotomique (du grec "couper en deux") est une stratégie de recherche efficace qui consiste à réduire de moitié l'espace de recherche à chaque étape. Elle s'applique principalement dans deux contextes : la recherche dans une liste **triée** et la recherche de racine d'une fonction monotone.
- **Recherche dans une liste triée** : On cherche un élément x_0 dans une liste L triée. On compare x_0 avec l'élément central de la liste. Si x_0 est plus petit, on ne cherche que dans la moitié gauche ; s'il est plus grand, dans la moitié droite. On répète le processus jusqu'à trouver l'élément ou épuiser la liste.
- Cette méthode est beaucoup plus efficace qu'une recherche séquentielle : sa complexité est logarithmique ($O(\log_2 n)$).

```

1 def recherche_dichotomie(L, x0):
2     """ Recherche x0 dans une liste L triee. Renvoie un boolean. """
3     g = 0                # Indice gauche
4     d = len(L) - 1       # Indice droit
5     found = False
6
7     while g <= d and not found:
8         m = (g + d) // 2  # Indice milieu (division entiere)
9         if x0 == L[m]:
10             found = True
11         elif x0 < L[m]:
12             d = m - 1     # On cherche a gauche
13         else:

```

```

14         g = m + 1          # On cherche a droite
15
16     return found

```

- **Recherche de racine (Méthode de la bisection)** : Il s'agit de trouver une solution approchée de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a, b]$. Le principe repose sur le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI). Si f est continue et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés ($f(a) \cdot f(b) < 0$), alors il existe au moins une racine dans l'intervalle.
- L'algorithme calcule le milieu $m = \frac{a+b}{2}$. Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires, la racine est dans $[a, m]$, sinon elle est dans $[m, b]$. On réduit ainsi la taille de l'intervalle par 2 à chaque itération jusqu'à ce que sa largeur soit inférieure à une précision ϵ donnée.

```

1 def zero_dichotomie(f, a, b, epsilon):
2     """ Trouve une racine de f dans [a, b] avec precision epsilon """
3     val_g = a
4     val_d = b
5     while (val_d - val_g) > epsilon:
6         m = (val_g + val_d) / 2
7         if f(val_g) * f(m) <= 0: # Changement de signe a gauche
8             val_d = m
9         else:                    # Changement de signe a droite
10            val_g = m
11    return (val_g + val_d) / 2

```

- La bibliothèque `scipy` propose une implémentation optimisée de cet algorithme via la fonction `bisect`.

```

1 import scipy.optimize as spo
2 # Recherche de la racine de f entre 1 et 2
3 racine = spo.bisect(f, 1, 2)

```

11 ALGORITHMES DE TRI

11.1 Introduction

- Un algorithme de tri a pour vocation d'ordonner les éléments d'une liste selon une relation d'ordre préétablie.
- Un algorithme est dit *en place* (in-place) s'il opère directement sur la structure séquentielle en mémoire, ne requérant qu'un espace supplémentaire constant, indépendamment de la taille des données traitées. Pour ces fonctions de tri, il n'est donc pas nécessaire de renvoyer la liste d'entrée, et il faut en prévoir en amont une copie si besoin.
- Un tri *comparatif* fonde sa logique exclusivement sur la comparaison des éléments deux à deux.
- La *stabilité* désigne la propriété de préserver l'ordre relatif initial des éléments considérés comme égaux.
- Le langage Python propose deux méthodes natives de tri :

```

1 L = [3, 1, 2]
2 L.sort() # L est modifiée en place et devient [1, 2, 3]
3 L = [3, 1, 2]
4 L_triee = sorted(L) # L reste [3, 1, 2], L_triee est [1, 2, 3]

```

`L.sort()` est une méthode réservée aux listes, alors que `sorted(L)` est une fonction universelle qui accepte n'importe quel itérable (liste, tuple, chaîne de caractères, dictionnaire).

- L'efficacité d'un algorithme s'évalue par sa *complexité temporelle*, notée $O(f(n))$. Cela représente l'ordre de grandeur du nombre d'opérations nécessaires pour trier une liste de taille n . Concrètement, un tri en $O(n^2)$ sera très lent pour de grandes listes (si n double, le temps est multiplié par 4), tandis qu'un tri en $O(n \log n)$ restera performant.
- Dans la suite, on se focalisera sur le tri dans l'ordre croissant d'entiers.

11.2 Tri par sélection

- Le principe consiste, à chaque étape i , à parcourir la partie non triée de la liste (à droite) pour identifier le minimum, puis à l'échanger avec l'élément situé à la position i . La sous-liste triée croît ainsi progressivement de la gauche vers la droite.
- Ce tri est en place et par nature instable, bien qu'il puisse devenir stable au prix d'un léger surcoût.

```

1 def tri_selection(L):
2     for i in range(len(L) - 1):
3         i_min = i
4
5         # recherche d'un meilleur candidat
6         for k in range(i + 1, len(L)):
7             if L[k] < L[i_min]:
8                 i_min = k
9
10        # échange
11        if L[i_min] != L[i]: # facultatif (pour la stabilité)
12            if i_min != i: # facultatif (échange sur place inutile)
13                L[i], L[i_min] = L[i_min], L[i]

```


- La complexité temporelle est quadratique, soit $O(n^2)$, quel que soit l'arrangement initial des données (pire, meilleur et moyen cas), car le parcours intégral de la sous-liste restante est systématique.

11.3 Tri par insertion

- Analogue au tri manuel d'un jeu de cartes, cet algorithme parcourt la liste de gauche à droite. L'élément courant (la clé) est inséré à sa position légitime dans la sous-liste gauche déjà triée, après décalage des éléments supérieurs.
- Ce tri est en place et stable.

```

1 def tri_insertion(L):
2     for i in range(1, len(L)):
3         cle = L[i]
4         k = i - 1
5
6         # décalage des éléments plus grands que la cle
7         while k >= 0 and L[k] > cle:
8             L[k + 1] = L[k]
9             k -= 1
10
11        # insertion
12        L[k + 1] = cle

```

- La complexité dans le pire cas (liste triée à l'envers) est quadratique en $O(n^2)$. Dans le meilleur cas (liste déjà triée), elle devient linéaire en $O(n)$, car la boucle de décalage n'est jamais exécutée.

11.4 Tri par fusion

- Cet algorithme applique le paradigme « diviser pour régner ». La liste est scindée en deux moitiés égales, triées récursivement, puis fusionnées pour constituer la liste finale ordonnée.
- Ce tri est stable, mais ne s'effectue généralement pas en place (nécessité de mémoire auxiliaire pour la fusion).

```

1 def fusion(L1, L2):
2     """ Fusionne deux listes triées en une seule """
3     res = []
4     i, j = 0, 0
5     while i < len(L1) and j < len(L2):
6         if L1[i] <= L2[j]:
7             res.append(L1[i])
8             i += 1
9         else:
10            res.append(L2[j])
11            j += 1
12    return res + L1[i:] + L2[j:] # Ajout des restes
13
14 def tri_fusion(L):
15     if len(L) <= 1:
16         return L
17     else:
18         m = len(L) // 2
19         g = tri_fusion(L[:m])
20         d = tri_fusion(L[m:])
21         return fusion(g, d)

```

- La complexité temporelle est toujours en $O(n \log n)$, la profondeur de récursion étant logarithmique et le coût de la fusion linéaire.

11.5 Tri par comptage

- Ce tri se distingue car il ne compare pas les éléments entre eux mais compte leurs occurrences. Il nécessite de connaître au préalable le maximum des valeurs de la liste.
- Le tri par comptage ne s'effectue pas en place.
- Dans le cas général, il est efficace uniquement si les valeurs sont des entiers positifs compris dans un intervalle raisonnable.

```

1 def tri_comptage(L, m):
2     L_tr = [0] * len(L) # création liste de sortie
3     f = [0] * (m+1) # création liste de freq.
4     for i in L:
5         f[i] += 1 # comptage
6
7     # détermination des premiers rangs grâce aux fréquences
8     p = [0] * (m+1) # liste des premiers rangs
9     rg = 0 # rang de départ
10    for i in range(m + 1):
11        n = f[i] # nombre d'emplacements nécessaires pour cette valeur
12        p[i] = rg # premier rang où placer i dans L_tr
13        rg += n # rang du prochain emplacement disponible
14
15    for i in L: # pour chaque valeur de la liste initiale
16        L_tr[p[i]] = i # on la place à son emplacement
17        p[i] += 1 # et si on recroise la valeur, elle se placera à côté
18
19    return L_tr
20
21 # f et p peuvent être la même liste, séparées ici par souci de clarté

```

- La complexité est linéaire en $O(n + m)$, où n est la taille de la liste et m la valeur maximale. C'est extrêmement rapide si m est proche de n , mais catastrophique si m est très grand.

11.6 Tri rapide

- Également basé sur la dichotomie, cet algorithme choisit un élément nommé *pivot*. Une fonction de partitionnement réorganise la liste : les éléments inférieurs au pivot passent à gauche, les supérieurs à droite. Le pivot est alors définitivement placé.
- C'est un tri en place mais généralement instable.

```

1 def partition(L, g, d):
2     """ Range les elements par rapport au pivot """
3     pivot = L[g] # première valeur
4     front = g # frontière entre les inf. et les sup. au pivot
5
6     # parcours de la zone de g+1 jusqu'à d-1
7     for i in range(g + 1, d):
8         if L[i] < pivot: # si plus petit
9             front += 1 # décalage du rang de la frontière
10            # placement à gauche de la frontière
11            L[i], L[front] = L[front], L[i]
12
13    # positionnement du pivot à sa place définitive : front

```

```
14     L[g], L[front] = L[front], L[g]
15     return front # renvoie la position du pivot
16
17 def tri_rapide(L, g=0, d=None): # g et d ne sont pas requis initialement
18     """ Fonction principale recursive """
19     # au premier appel, on travaille sur toute la liste
20     if d is None:
21         d = len(L)
22
23     # s'il reste au moins 2 elements à trier dans la zone
24     if g < d - 1:
25         piv = partition(L, g, d) # placement du pivot
26         tri_rapide(L, g, piv)    # trie de la partie gauche
27         tri_rapide(L, piv + 1, d) # trie de la partie droite
```

- La complexité moyenne est excellente en $O(n \log n)$. Cependant, dans le pire cas (si le pivot est mal choisi, par exemple le minimum sur une liste déjà triée), elle dégrade en $O(n^2)$.

12 COMPLÉMENTS

12.1 Compléments en vrac :)

- Pour insérer des valeurs de variables au sein d’une chaîne de caractères, il suffit de placer la lettre `f` juste avant les guillemets et d’écrire les noms des variables (ou même des expressions) entre accolades `{}` à l’intérieur de la chaîne.

```
1 value = 10
2 print(f"Valeur mesurée : {value}") # Insertion simple
3 print(f"Résultat : {value + value/3}") # Operations dans les accolades
```

- La fonction `input(message)` permet de mettre le programme en pause et de demander à l’utilisateur de saisir du texte au clavier. Le `message` est affiché pour guider l’utilisateur. La fonction `input` renvoie toujours une chaîne de caractères (`str`), même si l’utilisateur tape des chiffres. Il est donc impératif de convertir (caster) le résultat si l’on attend un nombre.

```
1 nom = input("Quel est votre nom ? ") # Renvoie un str
2 age_str = int(input("Quel est votre age ? ")) # Renvoie un int
```

- Le module `random` de la bibliothèque standard est utilisé pour générer des nombres aléatoires scalaires (uniques). Il s’importe via `import random`. Voici quelques fonctions notables :
 - `random.random()` : Renvoie un flottant x tel que $0.0 \leq x < 1.0$ (avec beaucoup de digits).
 - `random.randint(a, b)` : Renvoie un entier n tel que $a \leq n \leq b$ (bornes incluses!).
 - `random.choice(seq)` : Renvoie un élément choisi au hasard dans une séquence non vide (liste, chaîne...).
 - `random.shuffle(liste)` : Mélange les éléments d’une liste sur place (ne renvoie rien).

```
1 import random
2 de = random.randint(1, 6) # Simule un de a 6 faces
3 piece = random.choice(["Pile", "Face"])
```

Document en cours d’édition jusqu’en avril 2027.