8. Fondements 3 : Modes de raisonnements

En cours d'édition

8.1. Raisonnement par disjonction de cas

Exem.
Montrons que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)$ est divisible par 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1 : Supposons que n est pair.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k'$ avec $k' = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$. Donc $n(n+1)$ est pair dans ce cas.

Cas 2 : Supposons que n est impair.
Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2l+1$. Alors $n(n+1) = (2l+1)(2l+2) = 2(2l+1)(l+1) = 2l'$ avec $l' = (2l+1)(l+1) \in \mathbb{Z}$. Donc $n(n+1)$ est pair dans ce cas également.

Bilan : En somme, $n(n+1)$ est pair dans tous les cas.

Exem.
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrons que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
Raisonnons par disjonction de cas pour tout $x \in E$.
1. **Cas 1** : $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$. L'égalité est vérifiée.
2. **Cas 2** : $x \in A$ et $x \notin B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ car $x \notin A \cap B$. $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 0 = 0$. L'égalité est vérifiée.
3. **Cas 3** : $x \notin A$ et $x \in B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 \times 1 = 0$.
4. **Cas 4** : $x \notin A$ et $x \notin B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 \times 0 = 0$.

Bilan : Dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

8.2. Raisonnement par (l'implication) contraposée

Prop.
Le raisonnement par contraposée s'appuie sur l'équivalence logique :

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P).$$

Pour démontrer $P \implies Q$, on peut choisir de démontrer que si Q est fausse, alors P est fausse.

Exem.
Montrons que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \neq 0 \implies (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$.
Raisonnons par contraposée. Supposons $\neg(a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$, c'est-à-dire $(a = 0 \text{ ou } b = 0)$. Alors $ab = 0$. La contraposée est démontrée.

Exem.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrons que si ab est pair, alors a est pair ou b est pair.

Raisonnons par contraposée. Supposons que $\neg(a$ pair ou b pair$)$, c'est-à-dire que a est impair ET b est impair. Alors il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2l + 1$.

$$ab = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1.$$

Donc ab est impair. La propriété est démontrée.

Exem.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q}$.
Raisonnons par contraposée. Supposons $1 + x \in \mathbb{Q}$. Alors $x = (1 + x) - 1$. Comme $\mathbb{Q}$ est stable par soustraction (différence de deux rationnels), $x \in \mathbb{Q}$. On a montré $1 + x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{Q}$, ce qui conclut la preuve.

8.3. Raisonnement par l'absurde

Prop.
Pour démontrer une proposition P, on suppose $\neg P$ (la négation de P) et on cherche à aboutir à une contradiction (absurdité).

Exem.
Montrons que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et la fraction est irréductible ($\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$).
En élevant au carré : $2 = \frac{a^2}{b^2} \implies a^2 = 2b^2$. Donc a^2 est pair, ce qui implique que a est pair.
On écrit $a = 2a'$ avec $a' \in \mathbb{N}^*$.
L'équation devient : $(2a')^2 = 2b^2 \implies 4a'^2 = 2b^2 \implies 2a'^2 = b^2$. Donc b^2 est pair, ce qui implique que b est pair.
Ainsi a et b sont tous deux pairs, donc la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible (simplifiable par 2).
C'est absurde par rapport à l'hypothèse de départ. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exem.
Les complexes 1 et i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $a{\cdot}1+b{\cdot}i = 0$.
Supposons par l'absurde que $b \neq 0$. Alors $i = -\frac{a}{b}$. Or $a, b \in \mathbb{R}$, donc $-\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$. Cela signifierait que $i \in \mathbb{R}$, or $i^2 = -1$ (impossible pour un réel). Absurde. Donc $b = 0$.
Puis $a + 0 \cdot i = 0 \implies a = 0$. On a montré que $a = 0$ et $b = 0$.

8.4. Raisonnement par analyse et synthèse

Défi.
- On dit qu'une proposition N est une **condition nécessaire** à une proposition P quand $P \implies N$.
- On dit qu'une proposition S est une **condition suffisante** à P quand $S \implies P$.
- On parle de **Condition Nécessaire et Suffisante** (CNS) lorsque $P \iff S$.

Stru.
Le raisonnement par analyse-synthèse sert souvent à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème ou à prouver l'existence et l'unicité.

1. Analyse (Unicité / Condition Nécessaire) : On suppose que le problème admet une solution x. On déduit des propriétés sur x pour réduire le champ des possibles (trouver des candidats).

$$\text{Solution} \implies \text{Candidat}$$

2. Synthèse (Existence / Condition Suffisante) : On vérifie si les candidats trouvés sont effectivement solutions.

$$\text{Candidat} \implies \text{Solution}$$

Exem.
On cherche l'ensemble des réels x tels que $x^2 = 1$.

Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution. $x^2 = 1 \implies x^2 - 1 = 0 \implies (x-1)(x+1) = 0$. Donc $x = 1$ ou $x = -1$. Les seuls candidats possibles sont 1 et -1.

Synthèse :
- Si $x = 1$, alors $x^2 = 1^2 = 1$. Ça marche.
- Si $x = -1$, alors $x^2 = (-1)^2 = 1$. Ça marche.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.

Exem.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe un unique couple $(s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $z = sr$.

Analyse : Supposons qu'un tel couple existe. On a $z = sr$. En passant au module : $|z| = |sr| = |s||r|$. Comme $s \in \mathbb{U}$, $|s| = 1$. Comme $r \in \mathbb{R}_+^*$, $|r| = r$. Donc $r = |z|$. L'égalité $z = sr$ devient $z = s|z|$, d'où $s = \frac{z}{|z|}$ (possible car $z \neq 0$). Le seul couple candidat est $(s, r) = \left(\frac{z}{|z|}, |z|\right)$.

Synthèse : Posons $r_0 = |z|$ et $s_0 = \frac{z}{|z|}$. On a bien $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifions que $s_0 \in \mathbb{U}$: $|s_0| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$. Enfin, $s_0 r_0 = \frac{z}{|z|} \times |z| = z$. Le couple convient.

Exem.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (s, a) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} f = s + a \\ s \text{ est paire} \\ a \text{ est impaire} \end{cases}$$

Analyse : Supposons que le couple (s, a) existe. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} s(x) + a(x) = f(x) \\ s(-x) + a(-x) = f(-x) \end{cases}$$

Comme s est paire, $s(-x) = s(x)$. Comme a est impaire, $a(-x) = -a(x)$. Le système devient :

$$\begin{cases} s(x) + a(x) = f(x) \quad (L_1) \\ s(x) - a(x) = f(-x) \quad (L_2) \end{cases}$$

En faisant $(L_1) + (L_2)$, on obtient $2s(x) = f(x) + f(-x)$, soit $s(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. En faisant $(L_1) - (L_2)$, on obtient $2a(x) = f(x) - f(-x)$, soit $a(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Synthèse : Posons les fonctions $s_0 : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $a_0 : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

- Somme : $s_0(x) + a_0(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$.
- Parité de s_0 : $s_0(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = s_0(x)$. Donc s_0 est paire.
- Parité de a_0 : $a_0(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -a_0(x)$. Donc a_0 est impaire.

Conclusion : Le couple existe et est unique.