11. Fondements 4 : Entiers naturels et récurrence

11.1. Ensemble ordonné des entiers naturels

Noti. (Énumération des entiers naturels)
- Le nombre zéro (0) est le plus petit des entiers naturels ;
- le nombre un (1) est le plus petit des entiers naturels autre que zéro ;
- et pour tout entier naturel n, le nombre $n+1$ est le plus petit des entiers naturels strictement supérieurs à n.

Prop. (Primitive du plus petit élément dans $\mathbb{N}$)
Si une partie des entiers naturels est non vide, alors elle possède un plus petit élément (le premier dans l'ordre ascendant).

Prop. (Propriété du plus grand élément dans $\mathbb{N}$)
Si une partie des entiers naturels est non vide et majorée, alors elle possède un plus grand élément, lequel est unique (le dernier dans l'ordre ascendant).

Prop. (Principe de récurrence dans $\mathbb{N}$)
Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si :
- ET $0 \in A$;
- ET $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in A \implies n+1 \in A$;

alors $A = \mathbb{N}$.

Prop. (Raisonnement par récurrence)
On considère une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendante d'une variable entière naturelle n. Ainsi, si :
- ET $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
- ET pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, quel que soit $n \in \mathbb{N}$;

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

11.2. Raisonnement par récurrence simple

Méth.
On souhaite montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$. Pour ce faire, raisonnons par récurrence :

- Initialisation
  On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (calcul, observation...). Donc l'initialisation est établie.
- Hérédité
  Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - On part de la définition au rang $n+1$ ou de l'expression à atteindre.
  - On utilise l'hypothèse de récurrence pour transformer l'expression.
  - On démontre l'égalité ou l'inégalité souhaitée pour le rang $n+1$.

  L'hérédité est établie.

- Conclusion
  En vertu du principe de récurrence sur l'ensemble ordonné des entiers naturels, l'objectif est atteint.

11.3. Raisonnement par récurrence double

Prop. (Principe de récurrence double)
Étant donné une suite de propositions $(\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2) \ldots)$. Si :
- ET $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies ;
- ET $\forall n \in [\![0, +\infty[\![, \quad \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$;

alors : $\forall n \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{P}(n)$.

Note
Pour une récurrence double, l'initialisation nécessite de vérifier la propriété aux deux premiers rangs (n_0 et $n_0 + 1$). L'hérédité consiste à supposer la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ pour la démontrer au rang $n+2$.

11.4. Complément : raisonnement par récurrence « forte »

Prop.
La proposition $\forall n \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{P}(n)$ veut dire aussi :

$$\forall m \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{Q}(m)$$

où pour tout $m \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{Q}(m)$ signifie « toutes les prop. $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots,$ et $\mathcal{P}(m)$ sont vraies ».

Note
Dans une récurrence forte, pour démontrer $\mathcal{P}(n+1)$ (ou $\mathcal{P}(m)$ selon la notation), on suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers inférieurs ou égaux à n (ou $m-1$), et non pas seulement pour le précédent immédiat.