05. Oscillateurs libres et forcés

Le présent document constitue une version initiale non définitive ; il fera l'objet de révisions, d'ajustements et d'optimisations ultérieures.

Oscillateurs harmoniques

Définition de l'oscillateur harmonique

– Un oscillateur harmonique à un degré de liberté est un système physique dont l'évolution au cours du temps, en l'absence d'amortissement et d'excitation, est régie par l'équation différentielle linéaire
$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_{eq},$$
avec la pulsation propre de l'oscillateur harmonique ω_0 (en rad·s^{-1}) la position finale d'équilibre qu'atteindrait le système en présence d'amortissement X_{eq} et la position à un instant t $x(t)$.

– Puisque l'on dérive par rapport au temps, on peut utiliser la notation pointée
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_{eq}.$$

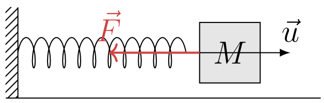
– La période propre de l'oscillateur se calcule par la relation :
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \quad \text{soit} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

– Avec un changement de variable adapté $X = x - X_{eq}$, il est toujours possible de se ramener à une équation homogène (sans second membre) : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$.

Système masse-ressort horizontal

– On considère une masse m accrochée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, sur un plan horizontal sans frottement.

– Modélisation de la force de rappel d'un ressort (loi de Hooke) : La force exercée par un ressort est proportionnelle à son allongement.
$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u} = -k\Delta l\vec{u}$$
Si le ressort est étiré ($\Delta l > 0$), la force rappelle vers la position de repos. Si comprimé, elle repousse.



Ressort étiré

– **Position d'équilibre :** Le P.F.S. projeté sur l'axe horizontal donne $0 = 0$, car le poids et la réaction se compensent verticalement et aucune force horizontale ne s'applique à l'équilibre (ressort au repos). La position d'équilibre est donc la longueur à vide : $X_{eq} = l_0$.

– **Mise en équation :** Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le P.F.D. projeté sur l'axe (Ox) donne :
$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

Soit l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$$

Par identification avec la forme canonique, on déduit la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

- **Méthode de résolution :** La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + X_{eq}$$

Ou sous forme amplitude/phase : $x(t) = X_{eq} + C\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Les constantes A et B se déterminent grâce aux conditions initiales (position et vitesse à $t = 0$).

- **Équation horaire (exemple) :** Si la masse est lâchée sans vitesse initiale à $x(0) = X_0$, alors :

$$x(t) = (X_0 - l_0)\cos(\omega_0 t) + l_0$$

- **Conservation de l'énergie mécanique :** L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et potentielle.

$$E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 = \text{constante}$$

On retrouve l'équation différentielle en dérivant l'énergie mécanique par rapport au temps : $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.

Oscillateur harmonique vertical

- On considère une masse suspendue à un ressort vertical.
- **Position d'équilibre :** À l'équilibre, le poids compense la tension du ressort.

$$mg - k(l_{eq} - l_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} = Z_{eq}$$

Le ressort est allongé à l'équilibre par l'action du poids.

- **Mise en équation :** Le P.F.D. projeté sur l'axe vertical descendant donne : $m\ddot{z} = mg - k(z - l_0)$.

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

On identifie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$.

Pendule simple

- Masse m au bout d'un fil inextensible de longueur ℓ. Repérage par l'angle θ.
- **Équation différentielle :** Théorème du moment cinétique ou conservation de l'énergie ($E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta)$). On obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

Dans l'approximation des petites oscillations ($\sin\theta \approx \theta$), l'équation devient linéaire :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Oscillateur harmonique électrique LC

- Circuit composé d'un condensateur C (initialement chargé) et d'une bobine idéale L.
- **Mise en équation :** Loi des mailles : $u_L + u_C = 0$. Avec $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, on obtient :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

  La pulsation propre est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
- **Conditions initiales :** La continuité de l'énergie impose la continuité de u_C (énergie dans le condensateur) et de i (énergie dans la bobine).
- **Solution :** $u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)$ (si chargé à E et courant nul à $t = 0$). $i(t) = -CE\omega_0\sin(\omega_0 t)$.
- **Analyse énergétique :** L'énergie totale se conserve :

$$E_{tot} = E_L + E_C = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2 = \text{constante}$$

Analogie entre oscillateurs électriques et mécaniques

Grandeur Mécanique	**Symbole**	**Grandeur Électrique**	**Symbole**
Position	x	Charge	q
Vitesse	$v = \dot{x}$	Intensité	$i = \dot{q}$
Masse	m	Inductance	L
Raideur	k	Inverse capacité	$1/C$
Énergie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	Énergie magnétique	$\frac{1}{2}Li^2$
Énergie potentielle	$\frac{1}{2}kx^2$	Énergie électrique	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

Oscillateurs amortis

Équations différentielles de l'oscillateur amorti

- Prise en compte des pertes d'énergie (frottements fluides, résistance).
- Formes canoniques de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 f = \omega_0^2 F_\infty$$

  ou avec le temps de relaxation τ ou le coefficient d'amortissement λ :

$$\ddot{f} + 2\lambda\dot{f} + \omega_0^2 f = \omega_0^2 F_\infty \quad \text{ou} \quad \ddot{f} + \frac{2}{\tau}\dot{f} + \omega_0^2 f = \omega_0^2 F_\infty$$

  Avec Q le facteur de qualité. Plus Q est élevé, moins l'amortissement est fort.

Méthode pour résoudre l'équation différentielle amortie

La nature de la solution dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique, donc de la valeur de Q.

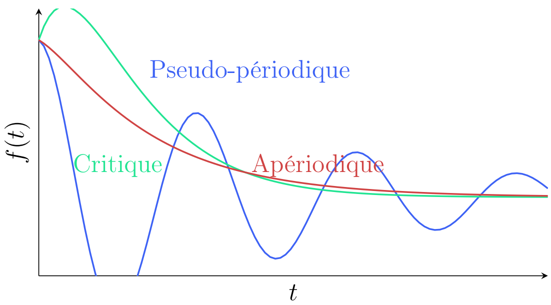
- **Régime pseudo-périodique** (Si $Q > 1/2$) : Amortissement faible. Oscillations dont l'amplitude décroît exponentiellement. Solution homogène :

$$f_1(t) = Ce^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega_p t + \varphi)$$

  La pseudo-pulsation est $\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. La pseudo-période est $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$.

- **Régime critique** (Si $Q = 1/2$) : Retour à l'équilibre le plus rapide, sans dépassement (ou un seul). Solution homogène :
$$f_1(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$
- **Régime apériodique** (Si $Q < 1/2$) : Amortissement fort. Retour lent à l'équilibre sans oscillation. Solution homogène (somme d'exponentielles réelles) :

$$f_1(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$



Décrément logarithmique

- En régime pseudo-périodique, grandeur quantifiant la perte d'énergie par oscillation :

$$\delta = \ln\left(\frac{f(t)}{f(t+T_p)}\right)$$

- Lien avec le facteur de qualité :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \approx \frac{\pi}{Q} \quad \text{(si } Q \text{ élevé)}$$

Oscillateur électrique RLC série

- Circuit R, L, C en série.
- Loi des mailles et loi d'Ohm :
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = E$$
En fonction de la tension u_C :

$$LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C = E \quad \Longrightarrow \quad \ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$$

- Identification canonique : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Oscillateur mécanique amorti vertical

- Ajout d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ au système masse-ressort.
- P.F.D. :
$$m\ddot{z} = -k(z - l_{eq}) - \alpha\dot{z}$$
- Équation différentielle :
$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}l_{eq}$$
On identifie $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$.

Étude énergétique de l'oscillateur amorti

– L'énergie mécanique (ou totale électrique) n'est plus conservée. Elle décroît.
– **Mécanique :**
$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -\alpha v^2 < 0$$
La puissance dissipée par les frottements est toujours négative.
– **Électrique (RLC) :**
$$\frac{\mathrm{d}E_{tot}}{\mathrm{d}t} = -Ri^2 < 0$$
La puissance est dissipée par effet Joule dans la résistance.

Systèmes linéaires en régime sinusoïdal forcé

Présentation expérimentale du phénomène de résonance

– Lorsqu'un système oscillant est excité par un signal sinusoïdal, il finit par osciller à la fréquence de l'excitateur (régime forcé).
– L'amplitude de la réponse peut passer par un maximum pour une certaine fréquence : c'est la résonance.

Rappel concernant les signaux sinusoïdaux

– Signal type : $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$.
  • S_m : Amplitude.
  • $\omega = 2\pi f$: Pulsation.
  • φ : Phase à l'origine.
– Valeur efficace : $S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$.

Représentation complexe

– On associe à $s(t)$ la grandeur complexe $\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t+\varphi)}$.
– **Amplitude complexe :** $\underline{S}_m = S_m e^{j\varphi}$. Elle contient l'information sur l'amplitude et la phase.
– **Dérivation :** Dériver équivaut à multiplier par $j\omega$.
– **Intégration :** Intégrer équivaut à diviser par $j\omega$.

Impédance complexe

– Définition (loi d'Ohm généralisée) : $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$.
– Tableau des impédances élémentaires :

Dipôle	**Impédance complexe $\underline{Z}$**	**Déphasage $\varphi = \arg(\underline{Z})$**
Résistance R	R	0 (en phase)
Bobine L	$jL\omega$	$+\pi/2$ (tension en avance)
Condensateur C	$\frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}$	$-\pi/2$ (tension en retard)

– Association série (additivité des impédances) : $\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}_k$.
– Association parallèle (additivité des admittances $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$) : $\underline{Y}_{eq} = \sum \underline{Y}_k$.

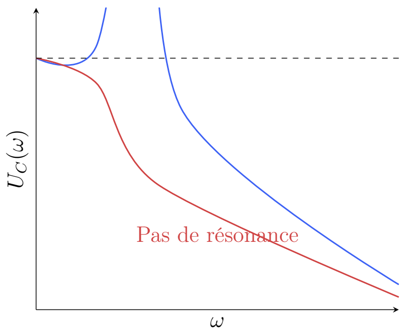
Circuits du second ordre en régime sinusoïdal forcé

– **Résonance d'intensité du circuit RLC série :** Impédance totale : $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. L'intensité est maximale lorsque l'impédance est minimale (partie imaginaire nulle).
  - La résonance d'intensité a toujours lieu à la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
  - À la résonance, le circuit est purement résistif, $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase.
  - Facteur de qualité : $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$.
  - Bande passante à -3dB : $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}$.
  - Si Q est grand, la résonance est **aiguë** (sélective). Si Q est faible, elle est **floue**.

– **Résonance en tension (aux bornes du condensateur) :** Étude de la fonction de transfert $H(\omega) = \frac{\underline{U_C}}{\underline{E}}$. La tension aux bornes du condensateur peut présenter un maximum supérieur à la tension d'entrée (phénomène de surtension).
  - Condition d'existence : La résonance en tension n'existe que si l'amortissement est faible, c'est-à-dire :

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  - La pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. Elle est toujours inférieure à ω_0.
  - Amplitude maximale : $U_{C_{max}} = \frac{QE_m}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$.
  - Si Q est très grand, $\omega_r \approx \omega_0$ et $U_{C_{max}} \approx QE_m$ (Surtension).



– **Analogie électromécanique :**
  - Résonance en vitesse (méca) $\leftrightarrow$ Résonance en intensité (élec) : toujours à ω_0.
  - Résonance en élongation (méca) $\leftrightarrow$ Résonance en tension (élec) : condition sur Q.