12. Géométrie élémentaire 2 : Le plan

12.1. Déterminant dans une base orthonormée directe

Noti.
On considère un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Pour tout couple de vecteurs non nuls $(\vec{u}, \vec{v})$, la notation $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne aussi une des mesures de l'angle orienté qui porte de la demi-droite $[O, \vec{u})$ à la demi-droite $[O, \vec{v})$. Ces mesures sont égales modulo 2π.

Prop.
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \underset{2\pi}{=} (\vec{u}, \vec{w});$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{2\pi}{=} -(\vec{v}, \vec{u}).$$

Défi. (Déterminant d'un couple de vecteur à l'aide d'une projection orthogonale)
Dans un plan orienté muni d'une b.o.n.d., on appelle *déterminant* du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ l'unique réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) \overset{\text{nota}}{=} [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

Prop.
Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où K est le projeté orthogonal de C sur la perpendiculaire à (AB) en A.

Prop.
Ci-avant, la valeur absolue du $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ est égale à l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Prop.
Le déterminant est :
1. bilinéaire :
   a. pour tout vecteur $\vec{u}$,
   $$\forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$$
   b. pour tout vecteur $\vec{v}$,
   $$\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v}).$$
2. antisymétrique :
   $$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

Prop.
Soit un plan muni d'une b.o.n.d. Soient $\vec{v}_1 \binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{v}_2 \binom{x_2}{y_2}$. Ainsi,

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Prop.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

12.2. Droites du plan

Défi.
On considère un point A et un vecteur non nul $\vec{v}$. L'unique droite passant par A et dirigée par $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \in \mathbb{R}\vec{v}$ où $\mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Prop.
Soit (D) une droite du plan muni d'un r.o.n.d. Ainsi,
1. Il existe au moins un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la droite (D) admet pour équation :
$$ax + by = c$$
avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On parle d'équation cartésienne.
2. Réciproquement, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, la partie du plan dont une équation est $ax + by = c$ est une droite, laquelle est dirigée par le vecteur $\vec{v}\binom{-b}{a}$.

Prop. (Systèmes d'équations paramétriques / paramétrisation)
Soit (D) une droite du plan.
1. On peut trouver au moins un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout point $M\binom{x}{y}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$
2. Réciproquement, étant donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, l'ensemble
$$\left\{ M\begin{pmatrix} x_0 + t\alpha \\ y_0 + t\beta \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$
est la droite passant par $A\binom{x_0}{y_0}$ et dirigée par $\vec{v}\binom{\alpha}{\beta}$.

Méth. (Passage d'une équation à une paramétrisation)
Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère le sous-ensemble d'équation :
$$4x - 12y = -3.$$
C'est une droite (D) car $(4, -12) \neq (0, 0)$.
Donnons-en une paramétrisation.
1. Les choix $y = 0$ puis $x = -3/4$ montrent que le point $A\binom{-3/4}{0}$ appartient à (D).
2. Le vecteur $\vec{v}\binom{-(-12)}{4}$ dirige la droite (D).
3. Enfin, (D) admet pour paramétrisation :
$$\begin{cases} x = -3/4 + 12t \\ y = 0 + 4t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Méth. (Passage d'une paramétrisation à une équation)
Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère le sous-ensemble qui admet pour paramétrisation :
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$
Donnons-en une équation.

Voie 1 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, puis $M\binom{x}{y}$. On a :

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - \sqrt{2} = t(-5) \\ y - 8 = t \cdot 3 \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \vec{AM} = t \cdot \vec{v}$$

$$\iff \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{AM} \text{ colinéaire à } \vec{v}$$

$$\iff \det(\vec{AM}, \vec{v}) = 0$$

$$\iff 3(x - \sqrt{2}) - (-5)(y - 8) = 0$$

$$\iff 3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}.$$

Voie 2 : D'abord, comme $(-5, 3) \neq (0, 0)$, le vecteur $\vec{v}\binom{-5}{3}$ dirige la droite. Ainsi, la droite admet une équation de la forme :

$$3x + 5y = c, \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

Or $A\binom{\sqrt{2}}{8}$ appartient à la droite. Donc :

$$3 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 8 = c.$$

D'où une des équations :

$$3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}.$$

Méth. (Intersection de deux droites sachant une paramétrisation de l'une et une équation de l'autre)
Soient deux droites définies par :

$$(D_1) : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (D_2) : 4x + 6y = -3.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, puis $M\binom{x}{y}$.
Ainsi, $M \in (D_1) \cap (D_2)$

$$\iff \begin{cases} 4x + 6y = -3 \\ \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 4x + 6y = -3 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 4(-1 + 2t) + 6(2 + 3t) = -3 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 + 2 \cdot \frac{-11}{26} = \frac{-13-11}{13} = -\frac{24}{13} \\ y = 2 + 3 \cdot \frac{-11}{26} = \frac{2 \cdot 26 - 33}{26} = \frac{19}{26}. \end{cases}$$

Donc le seul point d'intersection de (D_1) et (D_2) est $M_0\left(-\frac{24}{13}; \frac{19}{26}\right)$.

Défi.
On considère une droite (D) d'un plan, puis un point M quelconque du même plan. On appelle *projeté orthogonal* de M sur (D) l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à (D) qui passe par M.