

9. FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE 1 : ÉTUDE GLOBALE

9.1. Généralités

Noti.

On appelle *fonction* d'une partie D de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} toute relation qui fait passer de tout nombre x de D à un unique nombre y de \mathbb{R} ; auquel cas, on note $y = f(x)$ si la fonction est appelée f .

Lorsque l'ensemble de départ n'est pas précisé, on appelle *ensemble de définition* de f l'ensemble des valeurs de la variable x dans \mathbb{R} pour lesquelles $f(x)$ existe.

Défi.

On considère une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dit que f est :

- a) *constante* quand : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) = c$;
- b) *croissante* quand : $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$;
- c) *strictement croissante* quand : $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;
- d) *décroissante* quand : $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$;
- e) *strictement décroissante* quand : $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Défi.

On dit qu'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est *monotone* quand f est croissante ou f est décroissante. On adapte pour la monotonie stricte.

Prop. (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit un intervalle I , une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, puis $v \in \mathbb{R}$. Si v est compris entre deux valeurs de f , alors v est aussi une valeur de f .

Prop. (Théorème de la bijection continue)

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} ; puis $f : I \rightarrow J$. Supposons que :

- ET f est continue;
- ET f est strictement monotone;
- ET la limite de f en l'extrémité inf. de I est égale à l'extrémité inf. de J ; de même avec les extr. sup. (ou inversement selon la monotonie).

Ainsi, $f : I \rightarrow J, x \mapsto y = f(x)$ admet une réciproque $g : J \rightarrow I, y \mapsto x \in I$ telle que $f(x) = y$.

Prop.

Si l'on connaît la représentation graphique de $f : x \mapsto f(x)$, on peut obtenir celles de certaines fonctions transformées de la manière suivante :

- La représentation graphique de $x \mapsto f(x - a)$ se déduit de celle de f par une translation horizontale de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x) + b$ se déduit de celle de f par une translation verticale de vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.
- La représentation de $x \mapsto f(2a - x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a$.

- La représentation de $x \mapsto 2b - f(x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = b$.
- La représentation de $x \mapsto f(\lambda^{-1}x)$, avec $\lambda > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de centre O et de rapport λ dans la direction horizontale.
- La représentation de $x \mapsto \mu f(x)$, avec $\mu > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de rapport μ dans la direction verticale.
- La représentation graphique de la fonction réciproque f^{-1} se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant, c'est-à-dire la droite $y = x$.

Défi.

On appelle (droite) *asymptote horizontale* de la courbe de f toute droite d'équation $y = \text{Cte}$ où $\text{Cte} \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{+\infty} f = \text{Cte}$ ou $\lim_{-\infty} f = \text{Cte}$.

Défi.

On appelle (droite) *asymptote verticale* toute droite d'équation $x = \text{Cte}$ telle que $\lim_{\text{Cte}} f = +\infty$ ou $\lim_{\text{Cte}} f = -\infty$.

Défi.

On considère $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *paire* quand :

- ET $\forall x \in D, -x \in D$
- ET $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

Défi.

On dit que f est *impaire* quand :

- ET $\forall x \in D, -x \in D$
- ET $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Défi.

On considère $T \in]0, +\infty[$. On dit que f est *T-périodique* ou que f admet T pour *période* quand :

- ET $\forall x \in D, x + T \in D$
- ET $\forall x \in D, f(x) = f(x + T)$

On parle de *la* période pour désigner la plus petite quand elle existe.

Défi.

Une *fonction périodique* est une fonction qui admet au moins une période ($T > 0$).

Défi.

On dit que f est :

- *majorée* par une constante $M \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D, f(x) \leq M$;
- *minorée* par une constante $m \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D, f(x) \geq m$;
- *bornée* par deux constantes $m \leq M$ quand $\forall x \in D, m \leq f(x) \leq M$.

Prop.

La fonction réelle $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ est bornée si, et seulement si, la fonction réelle positive $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)|$ est majorée par une constante.

Défi.

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un *minimum global* de f quand :

- ET $\forall x \in D, f(x) \geq m$
- ET $\exists x_0 \in D, f(x_0) = m$

On parle de *minimum local* en un point x_* quand on se restreint autour de x_* .

Adaptation pour un maximum.

Défi.

On parle d'*extremum* pour tout minimum ou tout maximum.

9.2. Dérivation et représentation graphique

Prop.

Soit un intervalle I de plus d'un point, puis $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que f est dérivable en tout point de I . Ainsi :

1. f est constante ssi f' est nulle.
2. f est croissante ssi f' est positive.
3. f est strictement croissante ssi :
 - ET f' est positive ;
 - ET l'ensemble des points d'annulation de f' ne contient pas d'intervalle de plus d'un point.

On adapte pour la décroissance.

Défi.

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *deux fois dérivable* quand f est dérivable et que f' est dérivable ; auquel cas, on note $f'' = (f')' : \text{dérivée seconde de } f$.

Prop.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et \mathcal{C} sa représentation graphique dans un r.o.n. $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Si f'' est positive, alors \mathcal{C} est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si f'' est négative, alors \mathcal{C} est en-dessous de chacune de ses tangentes.

9.3. Fonctions réelles de référence

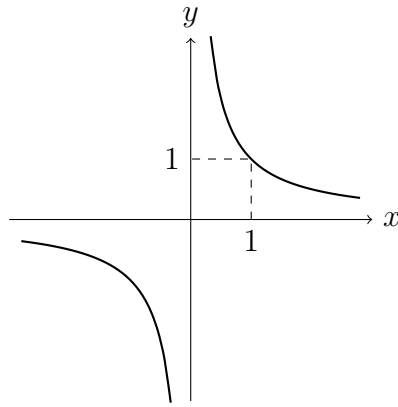
Voir dérivées sur la fiche dédiée.

FONCTIONS CONSTANTES

FONCTIONS AFFINES

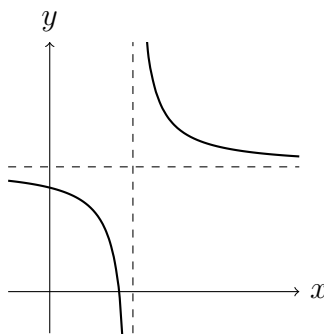
FONCTION INVERSE

Figu.



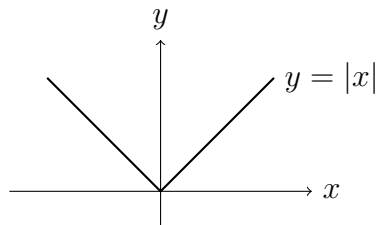
QUOTIENTS DE FONCTIONS AFFINES

Figu.



FONCTION VALEUR ABSOLUE

Figu.

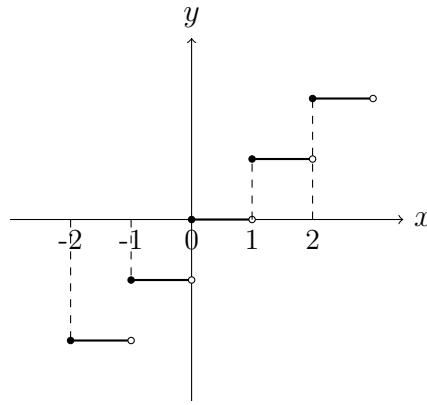


FONCTION PARTIE ENTIÈRE

Noti.

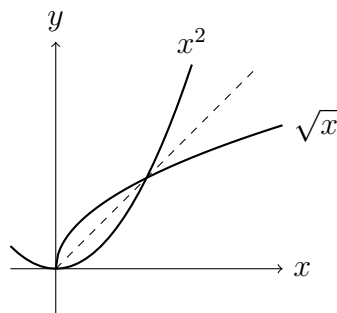
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$, où $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$.

Figu.



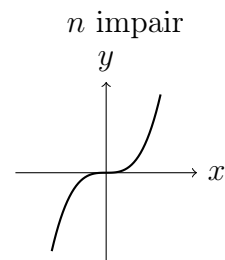
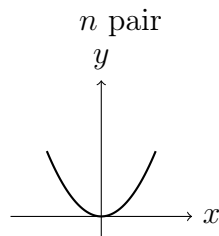
FONCTIONS CARRÉ ET RACINE CARRÉE

Figu.



PUISSANCE N-IÈME

Figu.

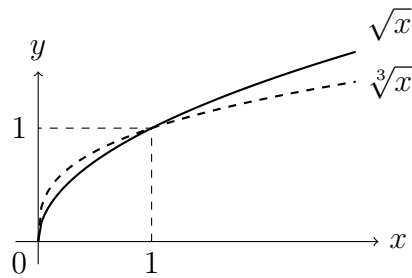


RACINES N-IÈMES

Défi.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine n-ième* de $x \geq 0$, notée $\sqrt[n]{x}$, l'unique réel positif dont la puissance n -ième vaut x .

Figu.



FONCTIONS POLYNOMIALES ET RATIONNELLES

Défi.

On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire de fonctions puissances entières.

Défi.

Une *fonction rationnelle* est le quotient de deux fonctions polynomiales.

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET RÉCIPROQUES

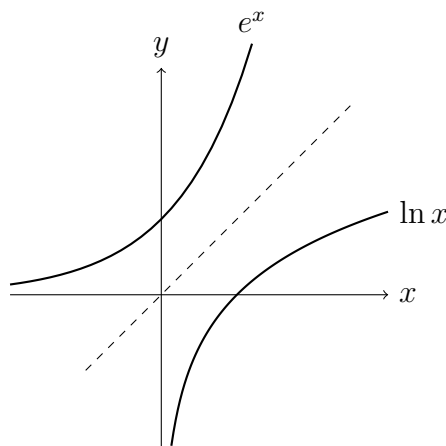
Défi.

\exp est l'unique fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , égale à sa dérivée et valant 1 en 0.

Défi.

Le *logarithme népérien* \ln est défini sur $]0, +\infty[$ comme la bijection réciproque de l'exponentielle. C'est que $\ln(y)$ est l'unique réel dont l'image par l'exponentielle donne y .

Figu.



Défi.

On considère $b \in]0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$, l'*exponentielle en base b* de x est

$$b^x \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(x \ln b).$$

- Le *logarithme en base b* de tout $y \in]0, +\infty[$ lorsque $b \neq 1$ est

$$\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}.$$

Rema.

Les fonctions \exp_b et \log_b sont réciproques l'une de l'autre.

FONCTION PUISSANCE RÉELLE DE DEGRÉ d **Défi.**

Pour $d \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, la puissance de degré d est définie par

$$x^d = \exp(d \ln x).$$

Prop. (Prolongement en 0)

- Si $d > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^d = 0$.
- Si $d < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^d = +\infty$.

Prop. (Croissances comparées)

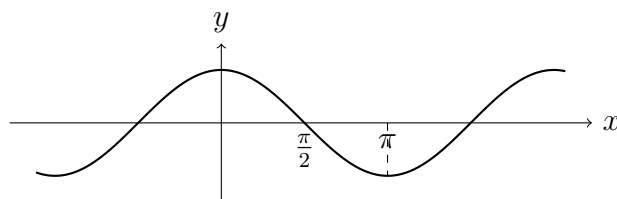
Soit $\alpha, \beta, \gamma \in]0, +\infty[$. Ainsi,

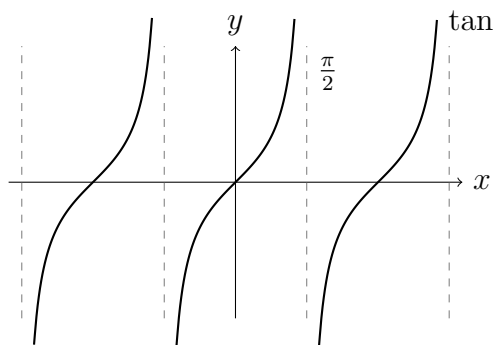
- $\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- $\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- $e^{\alpha y} |y|^\beta \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$
- $y^\beta |\ln y|^\gamma \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 0$

FONCTIONS CIRCULAIRES ET RÉCIPROQUES

Méth.

La construction de la courbe complète de \cos se fait par symétries successives (centrale puis axiale) à partir du segment $[0, \pi/2]$, puis par translations (périodicité).

Fig.**Fig.** (Tangente)



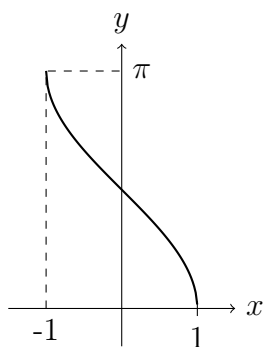
Défi.

$\forall x \in [-1, 1]$, on appelle *arccosinus* de x , noté $\text{Arccos}(x)$, l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal à x .

$$\begin{cases} \text{Arccos}(x) \in [0, \pi] \\ \cos(\text{Arccos } x) = x \end{cases}$$

(Attention aux deux "c" !)

Fig.

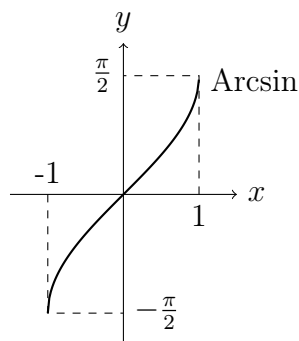


Défi.

$\forall x \in [-1, 1]$, on appelle *arcsinus* de x , noté $\text{Arcsin}(x)$, l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus est égal à x .

$$\begin{cases} \text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(\text{Arcsin } x) = x \end{cases}$$

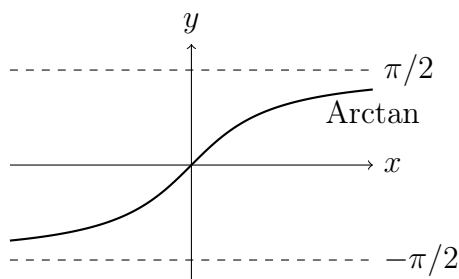
Fig.



Défi.

Pour tout x de $]-\infty, +\infty[$, on appelle *arctangente* de x , noté $\text{Arctan}(x)$, l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x .

$$\begin{cases} \text{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(\text{Arctan } x) = x \end{cases}$$

Figu.

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Défi.

Pour tout réel x , on appelle cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique les nombres réels :

$$\text{ch}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \text{sh}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Prop.

$$\begin{cases} \text{ch}(iz) = \cos(z) \\ \text{sh}(iz) = i \sin(z) \end{cases}$$

Prop.

$$\begin{cases} \text{ch}(-x) = \text{ch}(x) \\ \text{sh}(-x) = -\text{sh}(x) \end{cases}$$

Prop.

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

Prop.

$$\begin{cases} \text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x \\ \text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Figu.

