

## 12. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 2 : LE PLAN

### 12.1. Déterminant dans une base orthonormée directe

**Noti.**

On considère un plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Pour tout couple de vecteurs non nuls  $(\vec{u}, \vec{v})$ , la notation  $(\vec{u}, \vec{v})$  désigne aussi une des mesures de l'angle orienté qui porte de la demi-droite  $[O, \vec{u})$  à la demi-droite  $[O, \vec{v})$ . Ces mesures sont égales modulo  $2\pi$ .

**Prop.**

Pour tous vecteurs non nuls  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \underset{2\pi}{=} (\vec{u}, \vec{w});$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{2\pi}{=} -(\vec{v}, \vec{u}).$$

**Défi.** (Déterminant d'un couple de vecteurs)

Dans un plan orienté muni d'une b.o.n.d., on appelle *déterminant* du couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  l'unique réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

**Prop.**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où  $K$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur la perpendiculaire à  $(AB)$  en  $A$ .

**Prop.**

Ci-avant, la valeur absolue du  $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$  est égale à l'aire du parallélogramme de côtés  $[AB]$  et  $[AC]$ .

**Prop.**

Le déterminant est :

1. Bilinéaire :

a. Pour tout vecteur  $\vec{u}$ ,

$$\forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$$

b. Pour tout vecteur  $\vec{v}$ ,

$$\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v}).$$

2. Antisymétrique :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

**Prop.**

Soit un plan muni d'une b.o.n.d. Soient  $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

**Prop.**

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

## 12.2. Droites du plan

**Défi.**

On considère un point  $A$  et un vecteur non nul  $\vec{v}$ . L'unique droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{v}$  est l'ensemble des points  $M$  tels que :

$$A\vec{M} \in \mathbb{R}\vec{v} \quad \text{où} \quad \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

**Prop.**

Soit  $(D)$  une droite du plan muni d'un r.o.n.d. Ainsi :

1. Il existe au moins un triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que la droite  $(D)$  admette pour équation :

$$ax + by = c$$

avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ . On parle d'équation cartésienne.

2. Réciproquement, pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(a, b) \neq (0, 0)$ , la partie du plan dont une équation est  $ax + by = c$  est une droite, laquelle est dirigée par le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

**Prop. (Paramétrisation)**

Soit  $(D)$  une droite du plan.

1. On peut trouver au moins un couple  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et un couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que pour tout point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

2. Réciproquement, étant donné  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , l'ensemble

$$\left\{ M \begin{pmatrix} x_0 + t\alpha \\ y_0 + t\beta \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

est la droite passant par  $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et dirigée par  $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .

**Méth. (Passage d'une équation à une paramétrisation)**

Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère le sous-ensemble d'équation :

$$4x - 12y = -3.$$

C'est une droite  $(D)$  car  $(4, -12) \neq (0, 0)$ . Donnons-en une paramétrisation.

1. Les choix  $y = 0$  puis  $x = -3/4$  montrent que le point  $A \begin{pmatrix} -3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$  appartient à  $(D)$ .
2. Le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} -(-12) \\ 4 \end{pmatrix}$  dirige la droite  $(D)$ .

3. Enfin,  $(D)$  admet pour paramétrisation :

$$\begin{cases} x = -3/4 + 12t \\ y = 0 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Méth.** (Passage d'une paramétrisation à une équation)

Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère le sous-ensemble qui admet pour paramétrisation :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donnons-en une équation.

Voie 1 : Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , puis  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . On a :

$$\begin{aligned} & \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases} \\ \iff & \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - \sqrt{2} = t(-5) \\ y - 8 = t \cdot 3 \end{cases} \\ \iff & \exists t \in \mathbb{R}, A\vec{M} = t \cdot \vec{v} \\ \iff & \vec{v} \neq \vec{0} \text{ et } A\vec{M} \text{ colinéaire à } \vec{v} \\ \iff & \det(A\vec{M}, \vec{v}) = 0 \\ \iff & 3(x - \sqrt{2}) - (-5)(y - 8) = 0 \\ \iff & 3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Voie 2 : D'abord, comme  $(-5, 3) \neq (0, 0)$ , le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$  dirige la droite. Ainsi, la droite admet une équation de la forme :

$$3x + 5y = c, \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

Or  $A \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 8 \end{pmatrix}$  appartient à la droite. Donc :

$$3 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 8 = c.$$

D'où une des équations :

$$3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}.$$

**Méth.** (Intersection de deux droites)

Soient deux droites définies par :

$$(D_1) : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (D_2) : 4x + 6y = -3.$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , puis  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $M \in (D_1) \cap (D_2)$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} 4x + 6y = -3 \\ \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 4x + 6y = -3 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} 4(-1 + 2t) + 6(2 + 3t) = -3 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -1 + 2 \cdot \frac{-11}{26} = \frac{-13-11}{13} = -\frac{24}{13} \\ y = 2 + 3 \cdot \frac{-11}{26} = \frac{2 \cdot 26 - 33}{26} = \frac{19}{26}. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le seul point d'intersection de  $(D_1)$  et  $(D_2)$  est  $M_0 \left( -\frac{24}{13}; \frac{19}{26} \right)$ .

**Défi.** (Projeté orthogonal sur une droite)

On considère une droite  $(D)$  d'un plan, puis un point  $M$  quelconque du même plan. On appelle *projeté orthogonal* de  $M$  sur  $(D)$  l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à  $(D)$  qui passe par  $M$ .