16 Fonction d'une variable réelle 2 : EDO

Introduction
L'intervalle I possède plus d'un point. On traite ici d'*Équations Différentielles Ordinaires Scalaires Normalisées Linéaires* (EDOSNL) sur un intervalle I :

- et du premier ordre : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - a\,x(t) = b(t)$ sur I.
- et du second ordre : $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)) - s\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) + p\,x(t) = b(t)$ sur I.

Exem.
1. La fonction exp est solution de l'ED linéaire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - x(t) = 0$.
2. La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \theta \mapsto \cos(2026\,\theta)$ est solution de l'ED linéaire $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)) + 2026^2\,x(t) = 0$.
3. La fonction $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan(x)$ est solution de l'ED $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y(x)) - (y(x))^2 = 1$ (qu'on peut écrire $y' - y^2 = 1$). Notez que celle-ci n'est pas linéaire.

Rema.
C'est à dire que :
1. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp'(t) - \exp(t) = 0$;
2. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}(\cos(2026\theta)) + 2026^2\cos(2026\theta) = 0$;
3. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan'(x) - (\tan(x))^2 = 1$.

16.1 Liminaires

Rema.
Chercher les primitives de $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, c'est résoudre sur I l'ED $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - 0 \cdot x(t) = b(t)$.

Nota.
$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ désigne la classe des fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ qui sont infiniment dérivables.

Prop. (Stabilité)
L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ est stable par dérivation et par combinaison linéaire.

Exem.
Toute fonction polynomiale est infiniment dérivable.

Prop.
Pour les deux classes d'ED de ce cours, si le second membre est infiniment dérivable, alors toute solution est infiniment dérivable.

Prop. (Théorème de structure)
Une solution particulière étant donnée, on obtient toutes les solutions en lui ajoutant les solu-

tions de l'équation différentielle linéaire homogène associée (i.e. avec second membre nul).

Prop. (Principe de superposition)
Si x_1 et x_2 sont deux solutions particulières associées aux seconds membres b_1 et b_2 respectivement, alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est une solution particulière associée au second membre $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Prop. (Trouver une solution particulière)
Soit $B \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. Pour toute fonction $k \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et tout $r \in \mathbb{K}$, la fonction $t \mapsto e^{rt} k(t)$ est solution sur I de l'ED

$$x'(t) - a\, x(t) = e^{rt} B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k'(t) + (r-a)k(t) = B(t).$$

De plus, elle est solution de l'ED

$$x''(t) - s\, x'(t) + p\, x(t) = e^{rt} B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k''(t) + (2r - s)k'(t) + (r^2 - sr + p)k(t) = B(t).$$

Prop. (Indépendance linéaire)
Soient r_- et r_+ dans $\mathbb{C}$ tels que $r_- \neq r_+$. Ainsi, les deux fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ que sont $t \mapsto e^{r_- t}$ et $t \mapsto e^{r_+ t}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

$$\forall (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{C}^2, \quad \left(\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda_- e^{r_- t} + \lambda_+ e^{r_+ t} = 0\right) \implies (\lambda_-, \lambda_+) = (0, 0).$$

16.2 Premier ordre à coefficients constants

Prop.
Les solutions de l'EDL homogène $x'(t) - a\, x(t) = 0$ sont les fonctions

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{K} \\ t &\mapsto Ce^{at} \end{aligned}$$

pour C parcourant $\mathbb{K}$.

Rema. (Généralisation bonus)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \colon I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Les solutions de l'équation homogène $x'(t) - a(t)x(t) = 0$ sur I sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto Ce^{A(t)}$$

où A est une primitive de a sur I et $C \in \mathbb{K}$.

Appl.
Les solutions sur $]0, 2026]$ de l'ED $3x'(t) - 2x(t) = 0$ sont les fonctions $]0, 2026] \to \mathbb{R},\ t \mapsto Ce^{\frac{2}{3}t}$ pour C parcourant $\mathbb{R}$.

Prop.
Les solutions de l'EDL avec second membre $x'(t) - a\,x(t) = b(t)$ existent et ce sont les fonctions

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{K} \\ t &\mapsto \varphi_0(t) + Ce^{at} \end{aligned}$$

pour C parcourant $\mathbb{K}$, où φ_0 est une solution particulière arbitrairement choisie.

Rema.
Les solutions de cette équation $x'(t) + a\,x(t) = 0$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-at}$.

Méth.
1. Avec $b\colon t \mapsto Ae^{\lambda t}$ où $(A, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Résolvons sur $\mathbb{R}$, $x'(t) - 2x(t) = 7$.

   Étape 1 : Les solutions de l'EDL homogène associée sont les fonctions

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto Ce^{2t} \end{aligned} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

   Étape 2 : [Cherchons une solution particulière parmi les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto k$ pour $k \in \mathbb{R}$.] On trouve pour solution particulière

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

   Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{2} + Ce^{2t} \end{aligned} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

   b) Résolvons sur $\mathbb{R}$, $x'(t) - 2x(t) = 7e^{-4t}$.

   Étape 1 : Fait ! (Il s'agit de la même équation homogène $x' - 2x = 0$).

   Étape 2 : [Cherchons une solution particulière parmi les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto k(t)e^{-4t}$ où k est une fonction polynomiale.] Soit $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale. $t \mapsto k(t)e^{-4t}$ convient comme solution particulière si et seulement si la fonction k est solution de

   $$k'(t) - 6k(t) = 7.$$

   Ainsi on trouve pour solution particulière

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{6}e^{-4t}. \end{aligned}$$

   Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{6}e^{-4t} + Ce^{2t}, \end{aligned} \quad C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

2. Avec $b\colon t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

a) Résolvons $x'(t) - 2x(t) = 7\cos(4t)$ i.e. $x'(t) - 2x(t) = 7\mathrm{Re}(e^{i4t})$. [Pour ce faire, on peut chercher $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifie $z'(t) - 2z(t) = 7e^{i4t}$, puis choisir $\varphi_0\colon t \mapsto \mathrm{Re}(z(t))$. En posant $z(t) = ke^{i4t}$, on obtient $(i4-2)k = 7$, d'où $k = \frac{7}{-2+i4}$. $k = \frac{7(-2-i4)}{(-2+i4)(-2-i4)} = \frac{-14-i28}{4+16} = -\frac{7}{10} - i\frac{14}{10}$. $z(t) = \left(-\frac{7}{10} - i\frac{14}{10}\right)(\cos(4t) + i\sin(4t))$.]

<u>Étape 1</u> : Fait !

<u>Étape 2</u> : L'équation admet pour solution particulière $t \mapsto -\frac{7}{10}\cos(4t) + \frac{14}{10}\sin(4t)$.

<u>Étape 3</u> : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{10}\cos(4t) + \frac{14}{10}\sin(4t) + Ce^{2t} \end{aligned} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

b) Résolvons $x'(t) - 2x(t) = 7\cos(4t) + 2\sin(4t)$.

<u>Étape 1</u> : Fait !

<u>Étape 2</u> : On trouve une solution de la même forme $t \mapsto C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)$.

<u>Étape 3</u> : On répond.

Prop. (Problème de Cauchy d'ordre 1)
Rappel : $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Pour tout couple (t_0, x_0) de $I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy sur I

$$\begin{cases} x'(t) - a\,x(t) = b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet exactement une solution.

Prop. (Partition de $I \times \mathbb{R}$)
Les courbes intégrales de l'ED, i.e. les parties $\{(t, x(t)) \mid t \in I\}$ pour x parcourant les solutions, constituent une partition de l'ensemble produit $I \times \mathbb{K}$: pour tout point passe exactement une courbe intégrale.

Méth.
Résolvons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = 7 \\ x(1) = 8. \end{cases}$$

<u>Étapes 1, 2, 3</u> : Fait ! (Nous avons déterminé précédemment que la solution générale est $x(t) = -\frac{7}{2} + Ce^{2t}$).

<u>Étape 4</u> : [Parmi les fonctions qui vérifient l'ED, lesquelles respectent la CI $x(1) = 8$?
$\left[-\frac{7}{2} + Ce^{2t}\right]_{t=1} = 8 \implies -\frac{7}{2} + Ce^2 = 8 \implies e^2C = \frac{23}{2} = 11{,}5.$]
Ainsi, voici une solution

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -3{,}5 + 11{,}5e^{2(t-1)}. \end{aligned}$$

Par existence et unicité dans le problème de Cauchy, c'est l'unique solution. [Toute autre solution lui est égale].

16.3 Second ordre à coefficients constants

Prop. (EDOL homogène d'ordre 2 à coefficient constant)
Rappel : $(s,p) \in \mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des racines complexes de la fonction polynomiale complexe

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^2 - sz + p. \end{aligned}$$

1. Si $\mathcal{R} = \{r_-, r_+\}$ avec $r_-, r_+ \in \mathbb{R}$, $r_- \neq r_+$, alors les solutions de l'ED $x''(t) - s\,x'(t) + p\,x(t) = 0$ sont les combinaisons linéaires des fonctions réelles

$$t \mapsto e^{r_- t} \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{r_+ t}.$$

2. Si $\mathcal{R} = \{r_0, \overline{r_0}\}$ avec $r_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors les deux fonctions ci-haut sont remplacées par

$$t \mapsto e^{\mathrm{Re}(r_0)t} \cos(\mathrm{Im}(r_0)t) \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{\mathrm{Re}(r_0)t} \sin(\mathrm{Im}(r_0)t).$$

3. Si $\mathcal{R} = \{r_0\}$ avec $r_0 \in \mathbb{R}$, alors les deux fonctions sont remplacées par

$$t \mapsto e^{r_0 t} \quad \text{et} \quad t \mapsto t e^{r_0 t}.$$

Rema.
Ce sont les fonctions $t \mapsto C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ pour (C_1, C_2) parcourant $\mathbb{R}^2$.

Prop. (Problème de Cauchy d'ordre 2)
Pour tout couple $(t_0, (x_0, v_0)) \in I \times \mathbb{K}^2$, il y a exactement une solution, c'est-à-dire une unique, au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - s\,x'(t) + p\,x(t) = b(t) \\ \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$