

13. PRATIQUE CALCULATOIRE 3 : SOMMES ET PRODUITS

13.1. Somme et produit d'une suite finie de complexes

Défi.

On considère m et n dans \mathbb{N} , puis $(z_k)_{k \in \llbracket m, n \rrbracket}$ une liste de complexes (élément de $\mathbb{C}^{\llbracket m, n \rrbracket}$). Ainsi, on définit par récurrence la somme de la liste de complexes $(z_k)_{k \in \llbracket m, n \rrbracket}$ comme suit :

$$\sum_{k=m}^n z_k = \begin{cases} z_m & \text{si } n = m \\ \left(\sum_{k=m}^{n-1} z_k \right) + z_n & \text{si } n > m \end{cases} \quad (n \in \llbracket m+1, +\infty \rrbracket)$$

On adapte cela pour le produit :

$$\prod_{k=m}^n z_k$$

Rema.

Dans la définition, on a sous-entendu que $m \leq n$. On convient que

$$\sum_{k=m}^n z_k = 0 \quad \text{si } n < m.$$

Prop. (Associativité générale ou invariance par groupement)

Soit une suite de complexes $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p < q < r$, on a :

$$\left(\sum_{k=p}^{q-1} z_k \right) + \left(\sum_{k=q}^r z_k \right) = \sum_{k=p}^r z_k.$$

Prop. (Succession d'évolution et variation globale)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, puis (d_1, d_2, \dots) une suite dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite $(z_k)_{k \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket}$ comme suit :

$$z_k = z_{k-1} + d_k.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = z_0 + \sum_{k=1}^n d_k.$$

Prop. (Somme télescopique)

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$, on a

$$z_n - z_m = \sum_{k=m+1}^n (z_k - z_{k-1}).$$

Ou encore

$$z_n - z_m = \sum_{\ell=m}^{n-1} (z_{\ell+1} - z_\ell).$$

Rema.

C'est que

$$(z_n - z_{n-1}) + (z_{n-1} - z_{n-2}) + \cdots + (z_{m+2} - z_{m+1}) + (z_{m+1} - z_m) = z_n - z_m.$$

Prop. (Succession d'évolution et multiplicateur global)

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Supposons que

$$\forall n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket, \quad z_n = z_{n-1} \cdot q_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket, \quad z_n = z_0 \cdot \prod_{k=1}^n q_k.$$

Prop. (Produit télescopique)

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq 0$. Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{z_n}{z_m} &= \prod_{k=m+1}^n \frac{z_k}{z_{k-1}} \\ &= \prod_{\ell=m}^{n-1} \frac{z_{\ell+1}}{z_\ell} \\ &= \frac{z_n}{z_{n-1}} \cdot \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}} \cdots \frac{z_{m+2}}{z_{m+1}} \cdot \frac{z_{m+1}}{z_m} \end{aligned}$$

Prop. (Commutativité générale et invariance par permutation)

On ne varie pas la somme d'une liste quelconque de nombres complexes si on permute ses éléments. Il en est de même pour le produit.

Prop. (Somme nulle)

Soit $n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$, puis $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Supposons que

- ET p_1, \dots, p_n sont positifs,
- ET $p_1 + \cdots + p_n = 0$.

Ainsi, chacun des p_i est nul.

Défi. (Suite arithmétique)

On dit qu'une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes est *arithmétique* quand il existe au moins un réel r , appelé *raison*, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = z_n + r.$$

Prop. (Terme général d'une suite arithmétique)

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons la suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad z_n = z_m + (n - m)r.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0 + nr.$$

Prop.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \underbrace{\frac{a_m + a_n}{2}}_{\substack{\text{moyenne} \\ \text{des extrêmes}}} \cdot \underbrace{(1 + n - m)}_{\substack{\text{nombre de termes}}}.$$

Prop.

Soit une suite géométrique $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de raison $q \in \mathbb{C}$. Ainsi, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^n g_k = \begin{cases} g_m(1 + n - m) & \text{si } q = 1 \\ g_m \cdot \frac{q^{1+n-m} - 1}{q - 1} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Prop. (Sommes de puissances d'entiers)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$1. \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$