04 Solide en rotation autour d'un axe fixe

Rappels

- Un solide indéformable est un ensemble de points tel que la distance entre deux points quelconques du solide reste constante au cours du temps. Ce modèle est valide pour de nombreux systèmes mais exclut les objets mous ou élastiques.
- Pour repérer un solide dans l'espace, il faut six paramètres : trois coordonnées pour la position d'un point et trois angles pour l'orientation.
- Un solide S est en translation par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ si, à un instant t, les vecteurs vitesse de tous ses points sont identiques.
- On distingue la translation rectiligne et la translation circulaire (attention, l'orientation du solide ne change pas, comme la nacelle d'une grande roue).
- Un solide S est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur cet axe.
- Voici l'expression de la vitesse d'un point du solide, situé à une distance r de l'axe :

  $$v = r \cdot \dot{\theta} = r \cdot \omega.$$

  Contrairement à la translation, il existe ici un champ des vitesses : chaque point possède une vitesse différente selon sa distance à l'axe.

Moment cinétique scalaire

- Pour un solide en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour d'un axe fixe Δ, le moment cinétique scalaire $L_{\Delta/\mathcal{R}}$ ($\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$) est défini par la relation linéaire

  $$L_{\Delta/\mathcal{R}} = J_\Delta \dot{\theta}.$$

  Le moment cinétique joue pour la rotation le même rôle que la quantité de mouvement ($\vec{p} = m\vec{v}$) pour la translation.
- Le moment d'inertie J_Δ ($\mathrm{kg \cdot m^2}$), caractérise la répartition des masses autour de l'axe de rotation et quantifie la résistance du solide à un changement de mouvement de rotation. Plus la masse est éloignée de l'axe, plus le moment d'inertie est grand, et plus il est difficile de modifier la vitesse de rotation du solide.

Moment scalaire d'une force

- Le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M par rapport à un axe orienté Δ traduit la capacité de cette force à faire tourner le système autour de l'axe.

  $$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_\Delta,$$

  où O est un point quelconque de l'axe Δ, et $\vec{e}_\Delta$, son vecteur unitaire qui définit le sens positif de la rotation.
- Si la force est dans un plan perpendiculaire à l'axe, le moment se calcule simplement par

  $$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F \cdot d,$$

avec d, le bras de levier (distance orthogonale entre l'axe et la droite d'action de la force). Le signe est déterminé par le sens de rotation induit (attention au repère).

– Un couple est un ensemble de forces dont la résultante est nulle mais dont le moment résultant est non nul (ex. mains sur un volant de voiture).

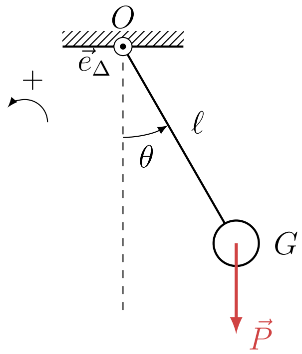
Théorème du moment cinétique

– Dans un référentiel galiléen, pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ, la dérivée temporelle du moment cinétique scalaire est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées au solide par rapport à cet axe.

$$\frac{dL_{\Delta/\mathcal{R}}}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

C'est l'analogue du PFD ($m\vec{a} = \sum \vec{F}$).

– Application au pendule pesant :
Considérons un pendule massif de masse m, dont le centre de gravité G est situé à une distance ℓ de l'axe de rotation Δ (point O). Le système est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction de l'axe $\vec{R}$, dont le moment est donc nul.



Le moment du poids s'écrit $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg\ell\sin(\theta)$. En appliquant le TMC, on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$J_\Delta \ddot{\theta} = -mg\ell\sin(\theta)\ ; \qquad \text{i.e.} \qquad \ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J_\Delta}\sin(\theta) = 0.$$

Dans le cas des petites oscillations ($\sin\theta \approx \theta$), on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J_\Delta}}$.

///// STOP EDIT ICI ///// *Document en cours de production.*

Aspects énergétiques et portrait de phase

– On peut définir une intégrale première du mouvement, correspondant à la conservation de l'énergie mécanique E_m (si frottements négligés) :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = \text{cte}$$

– Le portrait de phase (tracé de $\dot{\theta}$ en fonction de θ) permet de distinguer deux régimes :
  - **Mouvement libératoire (révolutif)** : L'énergie est suffisante pour faire des tours complets ($\dot{\theta}$ ne s'annule jamais).
  - **Mouvement oscillatoire (pendulaire)** : Le pendule oscille dans un puits de potentiel (trajectoires fermées autour de positions d'équilibre stable).

– La séparation entre ces régimes s'appelle la séparatrice (cas limite où le pendule atteint tout juste la position verticale haute).

Théorèmes énergétiques

Énergie cinétique de rotation

- L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

  C'est l'analogue de $\frac{1}{2}mv^2$ en translation.

Théorème de la puissance cinétique

- Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances des forces extérieures.

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}})$$

- Pour un solide en rotation, la puissance d'une force ou d'un couple s'exprime simplement à l'aide du moment :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta \cdot \dot{\theta}$$

- On retrouve ainsi le théorème du moment cinétique en dérivant l'énergie :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2\right) = J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta \dot{\theta} \implies J_\Delta \ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta$$

Systèmes déformables (Conservation du moment cinétique)

- Si la somme des moments des forces extérieures est nulle, le moment cinétique se conserve :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = 0 \implies L_\Delta = J_\Delta \omega = \text{constante}$$

- Cas du tabouret d'inertie (ou du patineur) : C'est un système déformable. Si l'individu rapproche les bras (modification de la répartition de masse), son moment d'inertie J_Δ diminue.
- Comme le produit $J_\Delta \omega$ doit rester constant, la vitesse angulaire ω augmente obligatoirement.

$$J_{\text{bras tendus}} > J_{\text{bras repliés}} \implies \omega_{\text{bras tendus}} < \omega_{\text{bras repliés}}$$

- Attention : L'énergie cinétique n'est pas conservée dans ce cas. Le travail des forces intérieures (muscles tirant les bras) est responsable de l'augmentation de l'énergie cinétique.