

## 11. FONDEMENTS 4 : ENTIERS NATURELS ET RÉCURRENCE

### 11.1. Ensemble ordonné des entiers naturels

**Noti.** (Énumération des entiers naturels)

- Le nombre zéro (0) est le plus petit des entiers naturels ;
- le nombre un (1) est le plus petit des entiers naturels autre que zéro ;
- et pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $n + 1$  est le plus petit des entiers naturels strictement supérieurs à  $n$ .

**Prop.** (Primitive du plus petit élément dans  $\mathbb{N}$ )

Si une partie des entiers naturels est non vide, alors elle possède un plus petit élément (le premier dans l'ordre ascendant).

**Prop.** (Propriété du plus grand élément dans  $\mathbb{N}$ )

Si une partie des entiers naturels est non vide et majorée, alors elle possède un plus grand élément, lequel est unique (le dernier dans l'ordre ascendant).

**Prop.** (Principe de récurrence dans  $\mathbb{N}$ )

Soit  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Si :

- ET  $0 \in A$
- ET  $\forall n \in \mathbb{N}, n \in A \implies n + 1 \in A$ ,

alors  $A = \mathbb{N}$ .

**Prop.** (Raisonnement par récurrence)

On considère une proposition  $\mathcal{P}(n)$  dépendante d'une variable entière naturelle  $n$ . Ainsi, si

- ET  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie ;
  - ET pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie implique que  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$  ;
- alors  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$ .

### 11.2. Raisonnement par récurrence simple

**Méth.**

On souhaite montrer qu'une propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ . Pour ce faire, raisonnons par récurrence :

• Initialisation

On vérifie que  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie (calcul, observation...). Donc l'initialisation est établie.

• Hérédité

Soit  $n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$  quelconque. Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.

- On part de la définition au rang  $n + 1$  ou de l'expression à atteindre.
- On utilise l'hypothèse de récurrence pour transformer l'expression.
- On démontre l'égalité ou l'inégalité souhaitée pour le rang  $n + 1$ .

L'hérédité est établie.

- Conclusion

En vertu du principe de récurrence sur l'ensemble ordonné des entiers naturels, l'objectif est atteint.

### 11.3. Raisonnement par récurrence double

**Prop.** (Principe de récurrence double)

Étant donné une suite de propositions  $(\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2) \dots)$ . Si :

- ET  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  sont vraies ;
- ET  $\forall n \in \llbracket 0, +\infty \llbracket, \quad \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$  ;

alors :  $\forall n \in \llbracket 0, +\infty \llbracket, \mathcal{P}(n)$ .

**Note**

Pour une récurrence double, l'initialisation nécessite de vérifier la propriété aux deux premiers rangs ( $n_0$  et  $n_0 + 1$ ). L'hérédité consiste à supposer la propriété vraie aux rangs  $n$  et  $n + 1$  pour la démontrer au rang  $n + 2$ .

### 11.4. Complément : raisonnement par récurrence « forte »

**Prop.**

La proposition  $\forall n \in \llbracket 0, +\infty \llbracket, \mathcal{P}(n)$  veut dire aussi :

$$\forall m \in \llbracket 0, +\infty \llbracket, \mathcal{Q}(m)$$

où pour tout  $m \in \llbracket 0, +\infty \llbracket, \mathcal{Q}(m)$  signifie « toutes les prop.  $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots$ , et  $\mathcal{P}(m)$  sont vraies ».

**Note**

Dans une récurrence forte, pour démontrer  $\mathcal{P}(n+1)$  (ou  $\mathcal{P}(m)$  selon la notation), on suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers inférieurs ou égaux à  $n$  (ou  $m - 1$ ), et non pas seulement pour le précédent immédiat.