

## 01 Éléments de cinématique

### Description et paramétrage du mouvement d'un point

- Un point matériel est un objet sans dimension, caractérisé par sa masse  $m$  (grandeur scalaire invariante en kg). Son mouvement se déroule dans l'espace et le temps.
- En mécanique classique, on suppose que la vitesse des corps est très faible devant la célérité de la lumière ( $v \ll c$ ). Le temps et les distances sont absous.
- Le mouvement est relatif : il dépend de l'observateur. Il est donc nécessaire de définir un référentiel d'étude.
- Un référentiel est constitué de :
  - Un repère d'espace (ensemble de points dont les distances sont invariables, ex : solide de référence) pour situer une position.
  - Une horloge pour mesurer le temps.
- Exemples classiques : Référentiel terrestre (laboratoire), géocentrique (centre de la Terre), héliocentrique (Soleil).
- La position du point  $M$  à l'instant  $t$  par rapport à l'origine  $O$  du repère est donnée par le vecteur position :

$$\vec{r}(t) = \vec{OM}(t)$$

L'ensemble des positions successives constitue la trajectoire.

- Le vecteur vitesse instantanée est la dérivée temporelle du vecteur position :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$$

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire au point  $M(t)$ .

- Le vecteur accélération instantanée est la dérivée du vecteur vitesse :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}(t)}{dt^2}$$

- Lors d'un enregistrement vidéo (discret), on approxime ces vecteurs par des variations moyennes entre deux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$  séparés par  $\Delta t$  :

$$\bar{v}(t_i) \approx \frac{\vec{OM}(t_{i+1}) - \vec{OM}(t_i)}{\Delta t} \quad ; \quad \bar{a}(t_i) \approx \frac{\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_i)}{\Delta t}$$

### Cinématique en coordonnées cartésiennes

- On utilise un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Les vecteurs de base sont fixes dans le temps.
- Le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

La norme est  $\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

- En dérivant (les vecteurs de base étant constants), on obtient la vitesse et l'accélération. En notation pointée ( $\dot{x} = dx/dt$ ) :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

- On considère un mouvement rectiligne selon l'axe ( $Ox$ ) avec une accélération constante  $a_0$ .

$$\vec{a}(t) = a_0\vec{e}_x$$

- Par intégrations successives par rapport au temps :

- Vitesse :  $\vec{v}(t) = (a_0 t + v_0)\vec{e}_x$
- Position :  $O\vec{M}(t) = (\frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0)\vec{e}_x$   
où  $v_0$  et  $x_0$  sont les conditions initiales à  $t = 0$ .

- Si  $a_0$  et  $v_0$  sont de même signe, la vitesse augmente en norme. Si de signes opposés, le mobile freine.
- Considérons une accélération constante  $\vec{a} = -a_0\vec{e}_y$  (type chute libre) et une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$  (orthogonale à l'accélération).
- Les équations horaires s'obtiennent par intégration :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -a_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = -a_0 t \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{1}{2}a_0 t^2 + y_0 \end{cases}$$

- L'équation de la trajectoire  $y(x)$  s'obtient en éliminant le temps  $t = x/v_0$  :

$$y(x) = -\frac{1}{2}a_0 \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + y_0 = -\frac{a_0}{2v_0^2}x^2 + y_0$$

Il s'agit d'une parabole.

## Cinématique en coordonnées cylindriques et polaires

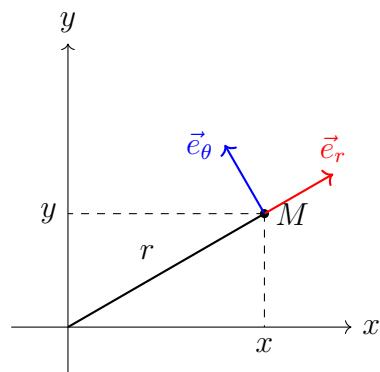
- Le repérage polaire est défini par la distance  $r = OM$  et l'angle  $\theta = (\vec{e}_x, O\vec{M})$ .
- On définit une base locale tournante  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  liée au point  $M$ .
- Relations avec la base cartésienne :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

- La dérivation des vecteurs de base donne :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$



- En coordonnées cylindriques, on ajoute simplement la cote  $z$  portée par  $\vec{e}_z$ .
- Vecteur position (cylindriques) :

$$O\vec{M}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z$$

- Vecteur vitesse (en dérivant et utilisant  $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ ) :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

En polaire pure (plan), le terme en  $z$  disparaît.

- Vecteur accélération (plus complexe, à savoir utiliser) :

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

- La trajectoire est un cercle de rayon  $R$  constant. Donc  $r = R$ ,  $\dot{r} = 0$ ,  $\ddot{r} = 0$ .
- Vecteur position :  $O\vec{M} = R\vec{e}_r$ .
- Vecteur vitesse :  $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v(t)\vec{e}_\theta$ . La vitesse est purement tangentielle.
- Mouvement circulaire uniforme ( $\dot{\theta} = \omega = \text{cste}$ ) : La norme de la vitesse est constante  $v = R\omega$ .

$$\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

L'accélération est purement radiale et dirigée vers le centre (centripète).

- Mouvement circulaire non-uniforme :

$$\vec{a}(t) = -\frac{v(t)^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$$

On retrouve une composante normale (centripète) liée à la courbure et une composante tangentielle liée à la variation de la norme de la vitesse.

## Introduction au mouvement des solides

- Un solide indéformable est un ensemble de points tel que la distance entre deux points quelconques du solide reste constante au cours du temps.
- Pour repérer un solide, il faut 6 paramètres : 3 coordonnées pour la position d'un point et 3 angles (Euler) pour l'orientation.
- Un solide est en translation si, à tout instant, les vecteurs vitesse de tous ses points sont identiques :  $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ .
- Types de translation :
  - Translation rectiligne : Les trajectoires des points sont des droites parallèles.
  - Translation circulaire : Les trajectoires sont des cercles de même rayon mais les axes liés au solide gardent une direction fixe (ex : nacelle de grande roue).
- Un solide est en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrées sur  $\Delta$ .
- La vitesse angulaire  $\omega = \dot{\theta}$  est la même pour tout le solide.
- La vitesse d'un point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'axe est portée par la tangente au cercle et vaut :
 
$$v = r\omega$$
- Contrairement à la translation, le champ des vitesses n'est pas uniforme : la vitesse dépend de la distance à l'axe.