

6. PRATIQUE CALCULATOIRE 2 : LIMITES ET DÉRIVÉES

6.1. Égalité sur les limites dans la droite réelle achevée

Noti.

La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On note aussi cet ensemble $[-\infty, +\infty]$.

Défi. (Addition)

On étend l'addition entre les réels à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

- $x + (+\infty) = +\infty$ pour tout $x \in]-\infty, +\infty]$.
- $x + (-\infty) = -\infty$ pour tout $x \in [-\infty, +\infty[$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

On résume cela par le tableau suivant :

$x \setminus y$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

Prop.

La limite de la somme est la somme des limites quand cette dernière est définie.

Défi.

La multiplication d'un élément x de $\overline{\mathbb{R}}$ par un réel r est définie par ce tableau :

$x \setminus r$	$r < 0$	0	$0 < r$
$-\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}$	xr	0	xr
$+\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$

Prop. (Combinaison linéaire)

Si $f_1(x) \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ et $f_2(x) \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$, alors pour tous réels r_1, r_2 :

$$r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} r_1 l_1 + r_2 l_2.$$

Défi.

On définit le produit xy pour $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ comme suit :

$x \setminus y$	$-\infty$	$\begin{smallmatrix} y \in \mathbb{R} \\ y < 0 \end{smallmatrix}$	0	$\begin{smallmatrix} y \in \mathbb{R} \\ y > 0 \end{smallmatrix}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$	$-\infty$
$\begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R} \\ x < 0 \end{smallmatrix}$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	Indét.	0	0	0	Indét.
$\begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{smallmatrix}$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

Prop.

La limite du produit est égale au produit des deux limites lorsque ce dernier est défini.

Déf.

On considère $x \in \overline{\mathbb{R}}$. On a le tableau suivant pour l'inverse $1/x$:

x	$-\infty$	$\begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R} \\ x < 0 \end{smallmatrix}$	0^-	0	0^+	$\begin{smallmatrix} x \in \mathbb{R} \\ 0 < x \end{smallmatrix}$	$+\infty$
$1/x$	0^-	$1/x$	$-\infty$	Indéf.	$+\infty$	$1/x$	0^+

Prop.

- La limite d'un quotient est égale au quotient de la limite si cette dernière est définie.
- La limite de l'inverse est l'inverse de la limite si cette dernière est définie.

Prop. (Composition des limites)

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} et de plus d'un point. Soient $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{J}$ (points ou extrémités). Soient $\varphi : I \rightarrow J$ et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que

- ET $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$;
- ET $\lim_{y \rightarrow b} f(y)$ existe.

Alors la limite de la composée existe et

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ \varphi)(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(y).$$

Prop.

- Si pour tout x (dans l'ensemble de def.) $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$ et si $m(x)$ et $M(x)$ admettent une seule et même limite réelle l quand $x \rightarrow a$, alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

- Si $m(x) \leq f(x)$ et si $m(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$$

- Si $f(x) \leq M(x)$ et si $M(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$$

Prop. (Croissance comparées)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\frac{x^n}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- $\frac{\ln(x)}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- $e^x x^n \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$
- $x^n \ln(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{x \rightarrow 0} 0$

Méth. (Levée d'indétermination)

- Forme $\frac{\infty}{\infty}$ pour une fonction rationnelle en $\pm\infty$: on factorise par le terme de plus haut degré.

$$\frac{2x^2 - 3}{x - 2025} = \frac{2x^2(1 - \frac{3}{2x^2})}{x(1 - \frac{2025}{x})} = 2x \frac{1 - \dots}{1 - \dots} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- Forme $\infty - \infty$: factorisation. Ex : $x^2 - x = x^2(1 - \frac{1}{x}) \rightarrow +\infty$.

6.2. Inégalités sur les limites dans la droite réelle achevée

Prop.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) < \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, alors sur un certain voisinage de a , $f_1 \leq f_2$.

Prop. (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ existent. Ainsi,

- si pour tout x dans un certain voisinage de a , $f(x) \leq M$, où M est une constante, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq M$, et on adapte pour « $f(x) \geq m$ » ;
- si, pour tout x suffisamment proche de a , $f_1(x) \leq f_2(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$.

6.3. Dérivée

Défi.

On considère un intervalle I de \mathbb{R} possédant plus d'un point, $a \in I$, et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'un réel p est le *nombre dérivé* de la fonction f au point a , ou simplement de f en a , pour dire que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}]{} p.$$

Si un tel réel p existe, alors il est unique et on le note $f'(a)$.

Prop.

Dans les conditions ci-haut, si $f'(a)$ existe alors la tangente à la courbe représentative dans un certain repère, au point $A(a, f(a))$ admet une équation que voici :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

C'est-à-dire que c'est l'ensemble $\{M(x, y) \mid y - f(a) = f'(a)(x - a)\}$.

Prop. (Combinaison linéaire de fonctions dérivables en un point)

Soit un intervalle I de \mathbb{R} qui possède plus d'un point ; $x_0 \in I$; puis $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que f et g sont dérivables en x_0 (i.e. $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$ existent). Ainsi, pour tout $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $rf + sg$ est dérivable en x_0 et

$$(rf + sg)'(x_0) = rf'(x_0) + sg'(x_0).$$

Prop. (Produit de deux fonctions dérivables en un point)

Soit un intervalle I de \mathbb{R} possédant plus d'un point, $x_0 \in I$, et deux fonctions $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que f et g sont dérivables en x_0 . Ainsi, la fonction produit fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Prop. (Quotient de deux fonctions dérivables en un point)

Soit un intervalle I de \mathbb{R} possédant plus d'un point, $x_0 \in I$, et deux fonctions $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que

- ET pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$;
- ET g est dérivable en x_0 ;
- ET f est dérivable en x_0 .

Ainsi, la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Prop. (Dérivation composée)

Soit deux intervalles I et J de \mathbb{R} qui possèdent plus d'un point ; x_0 un point de J ; puis $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs dans I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (en sorte que $f(\varphi(x))$ existe pour tout $x \in J$). Supposons que

- ET $\varphi'(x_0)$ existe ;
- ET $f'(\varphi(x_0))$ existe.

Ainsi, la composée de φ suivi de f , ou composée de f suivant φ , est dérivable en x_0 de nombre dérivé

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

Prop. (Dérivation en un point de la réciproque)

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} et de plus d'un point. Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow I$ réciproque l'une de l'autre. Soit $x_0 \in I$. Supposons que

- ET f est dérivable en x_0 ;
- ET $f'(x_0) \neq 0$;
- ET $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) = x_0$.

Ainsi g est dérivable en $f(x_0)$ et $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Défi.

On considère un intervalle I de \mathbb{R} qui possède plus d'un point ; $t_0 \in I$, et $\Phi : I \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que la fonction complexe Φ est dérivable en t_0 pour dire que les deux fonctions réelles $\text{Re}(\Phi) : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \text{Re}(\Phi(t))$ et $\text{Im}(\Phi) : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \text{Im}(\Phi(t))$ sont dérivables en t_0 ; le cas échéant :

$$\Phi'(t_0) \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Re}(\Phi))'(t_0) + i(\text{Im}(\Phi))'(t_0).$$

Déf.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose

$$\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)).$$

Prop.

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $t \in I$. Ainsi,

$$(\exp \circ u)'(t) = \exp(u(t))u'(t). \quad ((e^u)' = u'e^u).$$

Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.