7. Plan Complexe 2 : Exponentielle et Trigonométrie

En cours d'édition

7.1. Exponentielle complexe

Défi.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit l'exponentielle du complexe z par :

$$\exp(z) \overset{\text{déf}}{=} \exp(\mathrm{Re}(z))\big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))\big).$$

Nota.
On note $e^z = \exp(z)$.

Prop.
Pour tous réels x et y :

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \quad \text{et} \quad e^{i(x-y)} = \frac{e^{ix}}{e^{iy}}.$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\iff z \in i2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = i2k\pi. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$e^z = e^{z_0} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = z_0 + i2k\pi.$$

Prop.
L'exponentielle transforme la somme en produit. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

On a aussi $e^{z_1} \neq 0$ et :

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

Exem.
Calculons le module de e^{a+ib} :

$$|e^{a+ib}| = |e^a| \times |e^{ib}| = e^a \times 1 = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

7.2. Nombres complexes de module 1

Prop.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi :

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad (a, b) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous avons l'équivalence :

$$|z| = 1 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} z = a + ib \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}.$$

Noti.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Géométriquement, c'est le cercle unité (cercle trigonométrique) du plan complexe.

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\theta}.$$

C'est que $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Rema.
Rappelons que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Prop.
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Ainsi :
1. Le produit est stable : $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$.
2. L'inverse est stable : $\frac{1}{z_1} \in \mathbb{U}$.
3. Le quotient est stable : $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{U}$. Ainsi :

$$\frac{1}{z} = \bar{z}.$$

De manière générale, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Exem.
Si $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Prop.
Pour tout complexe z, il existe un couple $(s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+$ tel que :

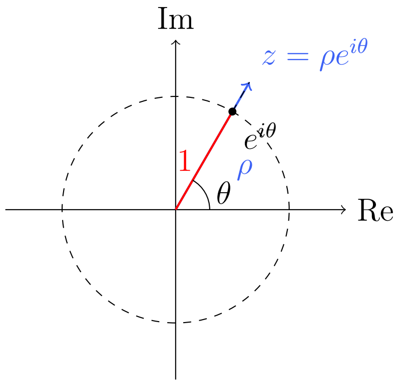
$$z = sr.$$

Si de plus $z \neq 0$, alors ce couple est unique.

Défi.
On considère $z \in \mathbb{C}$. On appelle **forme exponentielle** de z toute expression $e^{i\theta}\rho$ égale à z, pour $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Rema.
En toute rigueur, on parle plutôt des couples $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. D'après la proposition précédente, tout complexe admet au moins une forme exponentielle. Si $z \neq 0$, le module ρ est unique ($\rho = |z|$), mais l'angle θ ne l'est pas.

Figu. (Forme exponentielle)



Défi.
On considère $a \in \mathbb{R}^*$ fixé. On dit qu'un réel y est congru à un réel x modulo a, lorsque :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = x + ka.$$

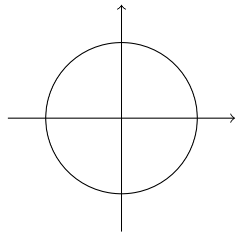
On note $y \equiv x \pmod{a}$ ou $y \equiv x[a]$.

Prop.
Soit $(\theta_0, \rho_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (fixé) et $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (variable). Ainsi :

$$e^{i\theta}\rho = e^{i\theta_0}\rho_0 \iff \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta \equiv \theta_0[2\pi] \end{cases}.$$

7.3. Trigonométrie circulaire

Prop.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi :
- $(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi)) = (-\cos\theta, -\sin\theta)$.
- $(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta)) = (-\cos\theta, \sin\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2} + \theta), \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta), \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)) = (\sin\theta, \cos\theta)$.



Dém.
On utilise l'exponentielle complexe.

$$e^{i(\theta+\pi)} = e^{i\theta}e^{i\pi} = e^{i\theta}(-1) = -\cos\theta - i\sin\theta.$$

De même, $e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = i(\cos\theta + i\sin\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta$.

Prop. (Formules d'addition)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

Et pour la différence (en remplaçant b par $-b$) :
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = -\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$ (attention au signe : $\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$)

Prop. (Formules de duplication)
Soit $a \in \mathbb{R}$.
1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
2. $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.

Prop. (Formule de Moivre)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Méth. (Linéarisation et développement)
Pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$:
1. On développe $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ avec le binôme de Newton.
2. On applique la formule de Moivre : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
3. On identifie les parties réelles et imaginaires.

Exemple pour $n = 2$:

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\cos\theta\sin\theta).$$

D'où $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.
Exemple pour $n = 3$:

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Appl.
Calcul de la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$. On sait que $\cos(2 \cdot \frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Or $\cos(2x) =$

$2\cos^2(x) - 1$.

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\frac{\pi}{12} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, le cosinus est positif :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$