

15 PRATIQUE CALCULATOIRE 4 : PRIMITIVES ET INTÉGRALES

15.1 Primitives

Défi.

On considère un intervalle I de \mathbb{R} qui possède plus d'un point, puis une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle *primitive* de la fonction f toute fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable et de fonction dérivée égale à f .

Prop.

Soit un intervalle I de \mathbb{R} qui possède plus d'un point. Ainsi, parmi les fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I , les fonctions constantes sont celles de dérivées nulles.

Dans la suite, I désigne un intervalle de \mathbb{R} qui possède plus d'un point.

Prop.

Toute fonction continue de I dans \mathbb{R} admet des primitives.

Prop.

Si deux fonctions de I dans \mathbb{R} sont dérivables et de dérivées égales, alors elles diffèrent d'une constante.

Prop.

Une primitive sur l'intervalle I étant donnée, on obtient toute primitive en lui ajoutant une certaine fonction constante.

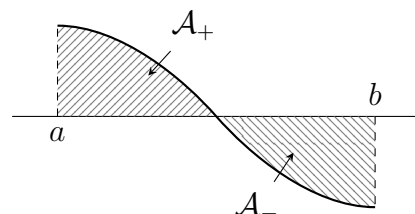
15.2 Primitives et somme intégrale

Noti.

On considère deux réels $a < b$; puis $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$. On appelle *somme intégrale* de f sur le segment $[a, b]$, qu'on note $\int_{x \in [a, b]} f(x) dx$ l'unique nombre réel qui associe l'aire « sous la courbe de f » à l'aire du rectangle unité défini par le repère.

Figu.

$$\int_{x \in [a, b]} f(x) dx = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-$$

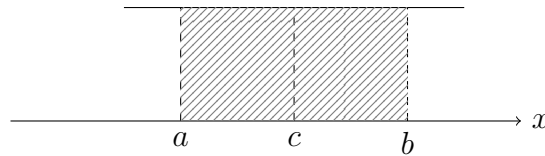


Rema.

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ est constante, alors

$$\int_{x \in [a, b]} f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

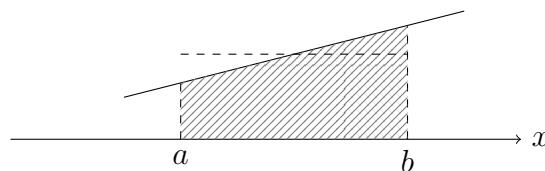
où c est arbitrairement choisi dans $[a, b]$.

**Rema.**

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ est affine, alors

$$\int_{x \in [a, b]} f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)$$

$$2 \int_{x \in [a, b]} f(x) dx = (f(a) + f(b)) \cdot (b - a)$$

**Défi.**

On considère $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, puis $x, y \in I$. Ainsi, on appelle *somme intégrale*, depuis x jusqu'à y , de la fonction f , l'unique nombre réel

$$\int_{t=x}^y f(t) dt := F(y) - F(x) = [F(t)]_{t=x}^y$$

où F est une des primitives de f sur I , arbitrairement choisie. C'est que la somme intégrale depuis x jusqu'à y d'une fonction continue f est égale à la variation d'une primitive, arbitrairement choisie, depuis la borne inférieure x de la somme jusqu'à la borne supérieure y .

Prop. Théorème fondamental du calcul différentiel

Si f est continue, alors

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x f(t) dt \right) = f(x);$$

si f est continûment dérivable alors

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

15.3 Techniques de calcul

Prop. Relation de Chasles

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $x, y, z \in I$. Ainsi

$$\int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt = \int_x^z f(t)dt.$$

Rema.

1. Si $a < c < b$, $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{[a,c]} f(t)dt + \int_{[c,b]} f(t)dt$.
- 2.

$$\int_x^y f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ \int_{[x,y]} f(t)dt & \text{si } x < y \\ -\int_{[y,x]} f(t)dt & \text{si } y < x \end{cases}$$

Prop. (Linéarité de l'intégrale)

Soit $u_1, u_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues, puis $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi,

1. La fonction $C_1u_1 + C_2u_2$ est continue.
2. On a $\forall x \in I, \forall y \in I$,

$$\int_x^y (C_1u_1(t) + C_2u_2(t)) = C_1 \int_x^y u_1(t)dt + C_2 \int_x^y u_2(t)dt.$$

Prop. (Positivité et croissance de l'intégrale)

Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.

1. Si f est à valeurs positives sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f(t)dt \in \mathbb{R}_+$:

$$[\forall x \in [a, b], \quad f(x) \in \mathbb{R}_+] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)dx \in \mathbb{R}_+ \right].$$

2. On a

$$[\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq g(x)] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)dx \leq \int_{[a,b]} g(x)dx \right].$$

Prop. (Primitivation « produit »)

Soit $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables. Ainsi,

$$\forall x \in I, \quad u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$

Prop. (Intégration par parties)

Soit $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables. Ainsi, pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\int_x^y u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_{t=x}^y - \int_x^y u'(t)v(t)dt.$$

Prop. (Primitivation « composée »)

Soit $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $G: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\varphi(I) \subset J$. Ainsi, $\forall x \in I$, $G'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(G(\varphi(x)))$. Par conséquent, on a la formule d'intégration par changement de variable :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \quad \int_x^y G'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} G'(s)ds$$

(« $s = \varphi(t)$ et $\frac{ds}{dt} = \varphi'(t)$, donc $ds = \varphi'(t)dt$ »).

15.4 Somme intégrale et invariance

Prop.

Soit un réel $a > 0$, puis une fonction $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue.

1. Si f est paire, alors

$$\int_{[-a,0]} f(x) dx = \int_{[0,a]} f(x) dx ;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x) dx = 2 \int_{[0,a]} f(x) dx .$$

2. Si f est impaire alors

$$-\int_{[0,a]} f(x) dx = \int_{[-a,0]} f(x) dx;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x) dx = 0.$$

Prop.

Soit $T \in]0, +\infty[$, puis une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue. Si f est T -périodique, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt.$$

15.5 Fonctions particulières

Ci-après, pour tout intervalle I de l'ensemble D , la fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, est une primitive de la fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$.

| D | $\forall x \in I, F(x) =$ | $\forall x \in I, f(x) =$ |
|------------------------------------|----------------------------|--|
| \mathbb{R} | C | 0 |
| \mathbb{R} | $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ | $x^n, n \in \mathbb{N}$ |
| $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$ | $\frac{1}{s+1}x^{s+1} + C$ | $x^s, s \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ |
| $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$ | $\ln(x) + C$ | $\frac{1}{x}$ |
| $]0, +\infty[$ | $\frac{1}{d+1}x^{d+1} + C$ | $x^d, d \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |
| \mathbb{R} | $\exp(x) + C$ | $\exp(x)$ |

| | | |
|--|---------------------|----------------|
| $]0, +\infty[$ | $x \ln(x) - x + C$ | $\ln(x)$ |
| \mathbb{R} | $\text{sh}(x) + C$ | $\text{ch}(x)$ |
| \mathbb{R} | $\text{ch}(x) + C$ | $\text{sh}(x)$ |
| \mathbb{R} | $\sin(x) + C$ | $\cos(x)$ |
| \mathbb{R} | $-\cos(x) + C$ | $\sin(x)$ |
| $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ | $-\ln \cos x + C$ | $\tan(x)$ |

Méth.

On demande les primitives de Arctan. Soit une variable dans \mathbb{R} . Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \text{Arctan}(x) &= 1 \cdot \text{Arctan}(x) \\
 &= \frac{d}{dx}(x) \cdot \text{Arctan}(x) \\
 &= \frac{d}{dx}(x) \cdot \text{Arctan}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\text{Arctan}(x)) - x \frac{d}{dx}(\text{Arctan}(x)) \\
 &= \frac{d}{dx}(x \text{ Arctan}(x)) - \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} \\
 &= \frac{d}{dx}(x \text{ Arctan}(x)) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(\ln(1+x^2)) \\
 &= \frac{d}{dx} \left(x \text{ Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right)
 \end{aligned}$$