

# 19 AL 1 : SYSTÈMES LINÉAIRES ET REPRÉSENTATIONS MATRICIELLES

## 19.1 Équivalence de systèmes linéaires

**Noti.**

On considère  $p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle *équation linéaire* (« EL » dans la suite) à  $p$  inconnues et à coefficients réels toute équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_p x_p = b$$

d'inconnue  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ , de *paramètres*  $a_1, \dots, a_p$  et  $b$ . Si  $b = 0$ , alors on parle d'*équation linéaire homogène* (« ELH » dans la suite).

**Exem.**

Voici une EL à 3 inconnues :

$$2x - 3y + 5z = 2026.$$

La liste de ses coefficients est  $(2; -3; 5)$  et son second membre est  $2026$ .

**Noti.** (Système linéaire)

On considère  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . On appelle *système de n EL à p inconnues*, ou simplement *système linéaire* de  $n$  équations à  $p$  inconnues, tout système d'équations de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

d'inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ .

La famille de coefficients est  $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ . On l'appelle (*table*) *matrice à n lignes et p colonnes* à coefficients réels, et on l'écrit visuellement

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}.$$

La table matrice  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  écrite  $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  est le *second membre*.

**Exem.**

Voici un système linéaire à 3 inconnues de 2 équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2025 \\ -5x - 6y - 7z = 2026. \end{cases}$$

La table matrice de ses coefficients est

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix},$$

et la table matrice de son second membre est

$$\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}.$$

Ici, le *système linéaire homogène associé* est celui où l'on remplace chaque coefficient du second membre par zéro ; dit autrement, on remplace le second membre par la table matrice nulle de même format (ou taille).

**Noti.**

La *matrice augmentée* d'un système linéaire (« SL » dans la suite) de matrice  $A$  et de second membre  $B$  est la matrice obtenue en joignant à la fin de chaque ligne le coefficient du second membre correspondant ; on la note  $(A|B)$ .

**Exem.**

La matrice augmentée du système linéaire ci-haut s'écrit

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{array} \right].$$

**Rema.**

Le SL

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2025 \\ -5x - 6y - 7z = 2026 \end{cases}$$

admet pour écriture matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}}_B,$$

ou encore  $AX = B$ .

**Rema.**

Le SL précédent est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 2025(-1) = 0 \\ -5x - 6y - 7z + 2026(-1) = 0 \end{cases}$$

lequel s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou encore

$$(A|B) \begin{pmatrix} X \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{2,1},$$

ou encore

$$\begin{cases} (A|B) \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} = 0_{2,1} \\ t = -1 \end{cases}.$$

### Défi. (Opérations (inversibles) élémentaires)

Voici les trois classes d'opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire d'une table matrice :

1. L'échange des lignes  $L_i$  et  $L_j$  (ligne d'indice  $i$  et ligne d'indice  $j$ ) avec  $i \neq j$  :  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
2. La multiplication (ou dilatation) de la ligne  $L_i$  par un scalaire  $\lambda \neq 0$  :  $L_i \leftarrow \lambda L_i$ .
3. L'ajout (ou transvection) à la ligne  $L_i$  du produit de  $L_j$  par  $\mu \in \mathbb{R}$ , avec  $i \neq j$  :  $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ .

### Exem.

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  donné. On a la chaîne d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + z = 2 \\ -x - y + 3z = -5 \end{array} \right. \\ \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ -x - y + 3z = -5 \\ 3x - y + z = 2 \end{array} \right. \\ \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ y + 2z = -2 \\ -7y + 4z = -7 \end{array} \right. \\ \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2]{} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ y + 2z = -2 \\ 18z = -21 \end{array} \right. \end{aligned}$$

### Défi. (Produit d'une matrice rectangulaire par une colonne)

On considère  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ; puis  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  une matrice et  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ . Ainsi, la matrice

de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (AX)_{i,1} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} X_{k,1} = A_{i,1} X_{1,1} + A_{i,2} X_{2,1} + \cdots + A_{i,p} X_{p,1}.$$

**Repr.**

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,1} \\ X_{2,1} \\ \vdots \\ X_{p,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} X_{1,1} + A_{1,2} X_{2,1} + \cdots + A_{1,p} X_{p,1} \\ A_{2,1} X_{1,1} + A_{2,2} X_{2,1} + \cdots + A_{2,p} X_{p,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} X_{1,1} + A_{n,2} X_{2,1} + \cdots + A_{n,p} X_{p,1} \end{bmatrix}$$

**Exem.**

Soit  $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -8 & 12 & -5 \end{bmatrix}$  et  $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ .

$$AX = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ -8 \cdot (-1) + 12 \cdot 4 - 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

**Défi.**

On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents au sens des opérations élémentaires* lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par un certain enchaînement d'opérations élémentaires sur les lignes.

**Rema.**

Si deux systèmes linéaires sont équivalents au sens des opérations élémentaires, alors ils sont équivalents au sens de la logique. La réciproque est vraie pour deux systèmes de même format.

**Prop.**

Deux systèmes linéaires équivalents admettent le même ensemble de solutions.

**Défi.**

Deux matrices sont *équivalentes en lignes* lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par un enchaînement d'opérations élémentaires sur les lignes.

**Rema.**

Deux systèmes linéaires sont équivalents si, et seulement si, leurs matrices augmentées sont équivalentes en lignes. Le cas échéant, les suites d'opérations élémentaires sont les mêmes.

**Appl.**

Posons

$$M = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -5 \end{array} \right].$$

C'est la matrice augmentée du dernier système. On a cette chaîne d'équivalences en lignes :

$$\begin{aligned}
 M &\sim_L \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 &\sim_L \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
 &\sim_L \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -21 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2.
 \end{aligned}$$

## 19.2 Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

**Exem.** (Résolution par substitutions)

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  donné.

1. On a

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \\
 \iff &\begin{cases} y = x^2 \\ 2x + x^2 = -1 \end{cases} \\
 \iff &\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \\
 \iff &\begin{cases} (x + 1)^2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \\
 \iff &\begin{cases} x = -1 \\ y = (-1)^2 \end{cases} \\
 \iff &(x, y) = (-1, 1).
 \end{aligned}$$

2. Avec un système linéaire cette fois,

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \\
 \iff &\begin{cases} x = y \\ 2y + y = -1 \end{cases} \\
 \iff &\begin{cases} x = y \\ y = -1/3 \end{cases} \\
 \iff &(x, y) = (-1/3, -1/3).
 \end{aligned}$$

**Exem.** (Résolution par combinaisons)

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  donné. On a

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\xrightleftharpoons[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1]{} \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3y = -1 \end{cases}$$

$$\xrightleftharpoons[L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2]{} \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = -1/3 \end{cases}$$

$$\xrightleftharpoons[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{} \begin{cases} -x = 1/3 \\ y = -1/3 \end{cases}$$

**Noti.**

On appelle *pivot* d'une matrice ligne qui n'est pas entièrement nulle son premier coefficient non nul (à partir de la gauche).

**Exem.**

Le pivot de la ligne  $[0 \ -2 \ 0 \ 2026]$  est égal à  $-2$ .

**Noti.** (Matrice échelonnée en lignes)

- Si une de ses lignes est entièrement nulle, alors chacune des lignes suivantes le sont aussi.
- À partir de la deuxième ligne, dans chacune des lignes non entièrement nulles, le pivot est à droite du pivot précédent.

**Exem.**

1. Voici une matrice non échelonnée en lignes :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

2. Voici une matrice échelonnée en lignes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

**Défi.**

On dit qu'une table matrice est *échelonnée réduite en lignes* lorsque chacun de ses pivots est égal à 1 et qu'il est l'unique coefficient non nul de sa colonne.

**Exem.**

1. Voici une matrice échelonnée réduite en lignes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Elle est obtenue à partir de la matrice précédente par la chaîne d'opérations élémentaires  $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$  puis  $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$ ).

### Prop.

Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une matrice échelonnée réduite en lignes, laquelle est unique.

**Méth.** (Trouver l'unique matrice échelonnée réduite en lignes associée à un système linéaire donné à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan)

On donne une matrice rectangulaire à coefficients réels. On demande de retourner une matrice équivalente à la matrice initiale qui soit échelonnée réduite en lignes.

a) On donne

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -11/2 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{-2}{11}L_2 \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_2 \end{aligned}$$

b) On donne

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -8 & -7 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} M &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & -9 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -47/3 & -31/3 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3}L_2 \quad [\text{Matrice échelonnée}] \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 8/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{-3}{47}L_3 \\ &\quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ &\quad L_1 \leftarrow \frac{-1}{3}L_1 \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 27/47 \\ 0 & 1 & 0 & -36/47 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{8}{3}L_3 \\ &\quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{3}L_3 \end{aligned}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/47 \\ 0 & 1 & 0 & -36/47 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - \left( \frac{-2}{3} \right) L_2 \quad [\text{Matrice échelonnée réduite}].$$

Voici un énoncé de la procédure suivie ci-dessus, d'après l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

#### Étape 1 : Échelonnement

Tant que la matrice à traiter est non vide :

1. Si la première colonne est nulle on traite la (sous-)matrice obtenue en supprimant cette colonne ;
2. Sinon, par un échange de lignes, on place le premier coeff non nul de cette première colonne en première ligne.
3. En ajoutant à chaque ligne autre que la première un multiple de la ligne 1, on place des zéros partout ailleurs sur la colonne 1. Puis on traite la (sous-)matrice obtenue en supprimant à la fois la première colonne et la première ligne.

Fin tant que.

#### Étape 2 : Réduction d'une matrice échelonnée en lignes

4. On multiplie chaque ligne non nulle par l'inverse de son pivot.
5. Pour chaque ligne non nulle, on ajoute un de ses multiples à toute ligne au-dessus en sorte que son pivot soit le seul coefficient non nul de sa colonne.

La matrice finale est la matrice cherchée.

## 19.3 Résolution d'un système linéaire

### Noti.

Soit  $x_1, x_2, x_3, x_4$  des inconnues variables de  $\mathbb{R}$ . Ainsi, pour le SL

$$(S) \begin{cases} 1x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 1x_2 - x_4 = 8 \end{cases}$$

$x_1$  et  $x_2$  sont les deux *inconnues principales* tandis que  $x_3$  et  $x_4$  sont les deux *inconnues secondaires*.

Résolvons ce système.

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 = 3 + 2s - 4t \\ x_2 = 8 + t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}; \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

De manière générale, les inconnues principales sont les inconnues de rangs des pivots de l'unique matrice échelonnée réduite en lignes.

### Prop.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ; puis un SL de matrice  $A$ . Si  $r \in \mathbb{N}$  le nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée réduite en lignes équivalente à  $A$ , alors  $r \leq n, p$  et le système admet  $r$  inconnues principales et  $p - r$  inconnues secondaires.

### Défi.

1. On appelle *rang* d'une matrice l'entier naturel égal au nombre de pivots de sa matrice

échelonnée réduite en lignes.

2. On appelle *rang* d'un système linéaire le rang de sa matrice.

### Exem.

1. Le rang de la matrice  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  est égal à 0.

2. D'après les calculs ci-dessus, la matrice  $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -8 & -7 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$  est de rang égal à 3.

3. On a

$$\text{rg} \left( \begin{bmatrix} 0 & 2025 & -2 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -2026 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2.$$

### Rema.

Toute matrice échelonnée en ligne est de rang égal à son nombre de lignes non nulles.

### Défi.

On dit qu'un système linéaire est *compatible* lorsqu'il admet au moins une solution. Sinon il est *incompatible*.

**Méth.** (Décider si un système linéaire est compatible en déterminant des conditions de compatibilité)

Soit le système

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 8 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

d'inconnues  $x, y \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & 3 \end{array} \right] \\ & \stackrel{L}{\sim} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 3 \end{array} \right] \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ & \stackrel{L}{\sim} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 7 & -29 \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & \stackrel{L}{\sim} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -82/5 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - 7/5L_2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(S) \iff \begin{cases} 1x - 1y = 8 \\ 0x + 5y = -9 \\ 0x + 0y = -82/5 \end{cases}.$$

Donc le système est incompatible à cause de sa dernière équation.

**Prop.** (Compatibilité d'un SL)

1. Soit un système échelonné de rang  $r$ , à  $n$  lignes. Il est compatible si, et seulement si, les seconds membres de ses  $n - r$  dernières équations sont nuls.
2. Pour deux systèmes équivalents, l'un est compatible si, et seulement si, l'autre est compatible.

**Appl.** (Second membre à paramètre)

Soit le SL

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y = a \\ x - y = b \\ 4x + 3y = c \end{cases}$$

d'inconnues  $x, y \in \mathbb{R}$  et de paramètres  $a, b, c$ .

Q : Condition nécessaire et suffisante sur  $a, b, c$  pour que  $(S)$  soit compatible ?

On a

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & a \\ 1 & -1 & b \\ 4 & 3 & c \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[L]{} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a \\ 4 & 3 & c \end{array} \right] \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ & \xrightarrow[L]{} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 0 & 5 & a - 2b \\ 0 & 7 & c - 4b \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & \xrightarrow[L]{} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 0 & 5 & a - 2b \\ 0 & 0 & \frac{7}{5}a - \frac{6}{5}b + c \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{5}L_2. \end{aligned}$$

R :  $(S)$  est compatible si, et seulement si,  $0 = \frac{7}{5}a - \frac{6}{5}b + c$ , si, et seulement si,  $-7a - 6b + 5c = 0$ .  
Pour  $(a, b, c) = (7, 8, 3)$ , le système est incompatible :  $-7(7) - 6(8) + 5(3) = -82$ .

**Rema.**

- $(S)$  est compatible si, et seulement si,  $0 = \frac{7}{5}a - \frac{6}{5}b + c$ .
- Pour  $(a, b, c) = (7, 8, 3)$ , on a :

$$-7(7) - 6(8) + 5(3) = -49 - 48 + 15 = -82 \neq 0.$$

Le système est donc incompatible.

**Prop.** (Structure de l'ensemble des solutions)

Étant donnée une solution particulière d'un système linéaire, on obtient toutes les solutions en lui ajoutant les solutions du système linéaire homogène associé.

**Prop.** (Rang et nombre de solutions)

- Si le rang est égal au nombre d'équations, alors il y a au moins une solution.

- Si le rang est égal au nombre d'inconnues, alors il y a au plus une solution.

### Rema.

C'est que la fonction  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $X \mapsto AX$  est surjective, injective ou bijective selon les cas.

**Prop.** (Système linéaire d'ordre 2 bien posé)

Soit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}),$$

puis un système linéaire de matrice  $A$ . Ainsi, ce système admet exactement une solution si, et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{i.e. } ad - bc \neq 0).$$

Auquel cas,  $\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

### Appl.

On souhaite résoudre le système suivant d'inconnues  $x, y$  en fonction des paramètres  $x', y'$  :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - 3y = x' \\ 5x + 4y = y' \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = \frac{1}{23}(4x' + 3y') \\ y = \frac{1}{23}(-5x' + 2y'). \end{cases} \end{aligned}$$

## 19.4 Liste de colonnes à $n$ lignes

### Objet

Mettre en œuvre l'étude des systèmes linéaires pour :

- Décider si plusieurs listes de réels sont linéairement dépendantes ou non.
- Décider si une liste de réels est combinaison linéaire de plusieurs listes données de réels.

### Défi.

Soit  $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille de  $p$  éléments de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle *combinaison linéaire* de cette famille  $\mathcal{F}$  tout vecteur  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^n$  qu'on peut écrire

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$$

pour une certaine famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  de  $p$  réels.

### Nota.

On note

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p\}.$$

**Défi.**

Soit  $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est *liée* lorsque

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \end{cases}.$$

**Rema.**

$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$  signifie

$$\exists i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lambda_{i_0} \neq 0.$$

**Rema.**

«  $\mathcal{F}$  libre » signifie «  $\mathcal{F}$  non liée », i.e.

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0).$$

**Prop.** (Dépendance linéaire et SL)

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Si  $A$  est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de  $p$  vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$  de  $\mathbb{R}^n$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) La liste de vecteurs  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$  est libre.
- b) Le système linéaire  $AX = 0$  admet pour seule solution la colonne nulle (solution triviale). Cela repose sur l'écriture vectorielle du système linéaire

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$