

01 Éléments de cinématique

Description et paramétrage du mouvement d'un point

- Un point matériel est un objet sans dimension, caractérisé par sa masse m (grandeur scalaire invariante en kg). Son mouvement se déroule dans l'espace et le temps.
- En mécanique classique, on suppose que la vitesse des corps est très faible devant la célérité de la lumière ($v \ll c$). Le temps et les distances sont absolus.
- Le mouvement est relatif : il dépend de l'observateur. Il est donc nécessaire de définir un référentiel d'étude.
- Un référentiel est constitué de :
 - Un repère d'espace (ensemble de points dont les distances sont invariables, ex : solide de référence) pour situer une position.
 - Une horloge pour mesurer le temps.
- Exemples classiques : Référentiel terrestre (laboratoire), géocentrique (centre de la Terre), héliocentrique (Soleil).
- La position du point M à l'instant t par rapport à l'origine O du repère est donnée par le vecteur position :

$$\vec{r}(t) = O\vec{M}(t)$$

L'ensemble des positions successives constitue la trajectoire.

- Le vecteur vitesse instantanée est la dérivée temporelle du vecteur position :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{dO\vec{M}(t)}{dt}$$

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire au point $M(t)$.

- Le vecteur accélération instantanée est la dérivée du vecteur vitesse :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)}{dt} = \frac{d^2O\vec{M}(t)}{dt^2}$$

- Lors d'un enregistrement vidéo (discret), on approxime ces vecteurs par des variations moyennes entre deux instants t_i et t_{i+1} séparés par Δt :

$$\vec{v}(t_i) \approx \frac{O\vec{M}(t_{i+1}) - O\vec{M}(t_i)}{\Delta t} \quad ; \quad \vec{a}(t_i) \approx \frac{\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_i)}{\Delta t}$$

Cinématique en coordonnées cartésiennes

- On utilise un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les vecteurs de base sont fixes dans le temps.
- Le vecteur position s'écrit :

$$O\vec{M}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

La norme est $\|O\vec{M}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- En dérivant (les vecteurs de base étant constants), on obtient la vitesse et l'accélération. En notation pointée ($\dot{x} = dx/dt$) :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

- On considère un mouvement rectiligne selon l'axe (Ox) avec une accélération constante a_0 .

$$\vec{a}(t) = a_0\vec{e}_x$$

- Par intégrations successives par rapport au temps :

- Vitesse : $\vec{v}(t) = (a_0t + v_0)\vec{e}_x$

- Position : $\vec{OM}(t) = (\frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0)\vec{e}_x$

où v_0 et x_0 sont les conditions initiales à $t = 0$.

- Si a_0 et v_0 sont de même signe, la vitesse augmente en norme. Si de signes opposés, le mobile freine.
- Considérons une accélération constante $\vec{a} = -a_0\vec{e}_y$ (type chute libre) et une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ (orthogonale à l'accélération).
- Les équations horaires s'obtiennent par intégration :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -a_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = -a_0t \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = v_0t \\ y(t) = -\frac{1}{2}a_0t^2 + y_0 \end{cases}$$

- L'équation de la trajectoire $y(x)$ s'obtient en éliminant le temps $t = x/v_0$:

$$y(x) = -\frac{1}{2}a_0 \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 + y_0 = -\frac{a_0}{2v_0^2}x^2 + y_0$$

Il s'agit d'une parabole.

Cinématique en coordonnées cylindriques et polaires

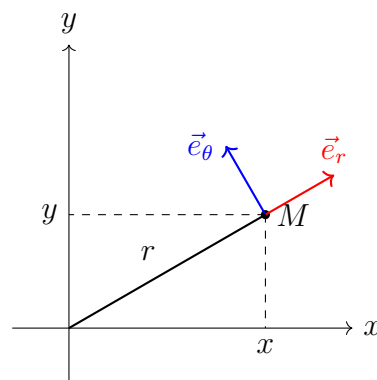
- Le repérage polaire est défini par la distance $r = OM$ et l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OM})$.
- On définit une base locale tournante $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ liée au point M .
- Relations avec la base cartésienne :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

- La dérivation des vecteurs de base donne :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$



- En coordonnées cylindriques, on ajoute simplement la cote z portée par \vec{e}_z .
- Vecteur position (cylindriques) :

$$\vec{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z$$

- Vecteur vitesse (en dérivant et utilisant $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$) :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

En polaire pure (plan), le terme en z disparaît.

- Vecteur accélération (plus complexe, à savoir utiliser) :

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

- La trajectoire est un cercle de rayon R constant. Donc $r = R$, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$.
- Vecteur position : $\vec{OM} = R\vec{e}_r$.
- Vecteur vitesse : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v(t)\vec{e}_\theta$. La vitesse est purement tangentielle.
- Mouvement circulaire uniforme ($\dot{\theta} = \omega = \text{cste}$) : La norme de la vitesse est constante $v = R\omega$.

$$\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

L'accélération est purement radiale et dirigée vers le centre (centripète).

- Mouvement circulaire non-uniforme :

$$\vec{a}(t) = -\frac{v(t)^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$$

On retrouve une composante normale (centripète) liée à la courbure et une composante tangentielle liée à la variation de la norme de la vitesse.

Introduction au mouvement des solides

- Un solide indéformable est un ensemble de points tel que la distance entre deux points quelconques du solide reste constante au cours du temps.
- Pour repérer un solide, il faut 6 paramètres : 3 coordonnées pour la position d'un point et 3 angles (Euler) pour l'orientation.
- Un solide est en translation si, à tout instant, les vecteurs vitesse de tous ses points sont identiques : $\vec{v}_A = \vec{v}_B$.
- Types de translation :
 - Translation rectiligne : Les trajectoires des points sont des droites parallèles.
 - Translation circulaire : Les trajectoires sont des cercles de même rayon mais les axes liés au solide gardent une direction fixe (ex : nacelle de grande roue).
- Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrées sur Δ .
- La vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ est la même pour tout le solide.
- La vitesse d'un point M situé à une distance r de l'axe est portée par la tangente au cercle et vaut :

$$v = r\omega$$

- Contrairement à la translation, le champ des vitesses n'est pas uniforme : la vitesse dépend de la distance à l'axe.