12. Géométrie élémentaire 2 : Le plan

12.1. Déterminant dans une base orthonormée directe

Noti.
On considère un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Pour tout couple de vecteurs non nuls $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{P}$, la notation $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne aussi une des mesures de l'angle orienté qui porte de la demi-droite $[O, \vec{u})$ à la demi-droite $[O, \vec{v})$. Ces mesures sont égales modulo 2π.

Prop.
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathcal{P}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \underset{2\pi}{=} (\vec{u}, \vec{w});$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{2\pi}{=} -(\vec{v}, \vec{u}).$$

Défi.
([Déterminant d'un couple de vecteurs)] Dans un plan orienté muni d'une base orthonormée directe, on appelle *déterminant* du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ l'unique réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

Prop.
Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où K est le projeté orthogonal de C sur la perpendiculaire à (AB) en A.

Prop.
Ci-avant, la valeur absolue du $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ est égale à l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Prop.
Le déterminant est :
1. bilinéaire :
   a. pour tout vecteur $\vec{u}$,

$$\forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$$

   b. pour tout vecteur $\vec{v}$,

$$\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v});$$

2. antisymétrique :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

Prop.
Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'une b.o.n.d. Soient deux vecteurs $\vec{v}_1\binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{v}_2\binom{x_2}{y_2}$. Ainsi,

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Prop.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

12.2. Droites du plan

Défi.
Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère un point A et un vecteur non nul $\vec{v}$. L'unique droite passant par A et dirigée par $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\vec{AM} \in \mathbb{R}\vec{v} \quad \text{où} \quad \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Prop.
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan muni d'un r.o.n.d. Ainsi :
1. Il existe au moins un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la droite $\mathcal{D}$ admette pour équation :

$$ax + by = c$$

   avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On parle d'équation cartésienne.
2. Réciproquement, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, la partie du plan dont une équation est $ax + by = c$ est une droite, laquelle est dirigée par le vecteur $\vec{v}\binom{-b}{a}$.

Prop. (Paramétrisation)
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan.
1. On peut trouver au moins un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout point $M\binom{x}{y}$,

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

2. Réciproquement, étant donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, l'ensemble

$$\left\{ M\begin{pmatrix} x_0 + t\alpha \\ y_0 + t\beta \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

   est la droite passant par $A\binom{x_0}{y_0}$ et dirigée par $\vec{v}\binom{\alpha}{\beta}$.

Méth. (Passage d'une équation à une paramétrisation)
Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère le sous-ensemble d'équation :

$$4x - 12y = -3.$$

C'est une droite $\mathcal{D}$ car $(4, -12) \neq (0, 0)$. Donnons-en une paramétrisation.
1. Les choix $y = 0$ puis $x = -3/4$ montrent que le point $A\binom{-3/4}{0}$ appartient à $\mathcal{D}$.
2. Le vecteur $\vec{v}\binom{-(-12)}{4} = \binom{12}{4}$ dirige la droite $\mathcal{D}$.

3. Enfin, $\mathcal{D}$ admet pour paramétrisation :

$$\begin{cases} x = -3/4 + 12t \\ y = 0 + 4t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Méth. (Passage d'une paramétrisation à une équation)
Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère la droite définie par :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

<u>Voie 1</u> : Soit $M\binom{x}{y}$. $M \in \mathcal{D} \iff \vec{AM}$ colinéaire à $\vec{v}\binom{-5}{3}$, avec $A(\sqrt{2}, 8)$.

$$\det(\vec{AM}, \vec{v}) = 0 \iff 3(x - \sqrt{2}) - (-5)(y - 8) = 0.$$

On développe et réduit pour obtenir : $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

<u>Voie 2</u> : Le vecteur $\vec{v}\binom{-5}{3}$ dirige la droite. Une équation est de la forme $3x + 5y = c$. Comme $A\binom{\sqrt{2}}{8} \in \mathcal{D}$, on a $c = 3\sqrt{2} + 40$. D'où une équation : $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

Méth. (Intersection de deux droites)
Soient deux droites définies par :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : 4x + 6y = -3.$$

Soit $M\binom{x}{y}$. On cherche $M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ en injectant les expressions paramétriques de $\mathcal{D}_1$ dans l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_2$:

$$4(-1 + 2t) + 6(2 + 3t) = -3.$$

La résolution de cette équation d'inconnue t donne $t = -11/26$. En reportant cette valeur dans le système paramétrique, on obtient les coordonnées du point d'intersection :

$$M_0 \left(-\frac{24}{13}; \frac{19}{26} \right).$$

Défi. (Projeté orthogonal sur une droite)
On considère une droite $\mathcal{D}$ d'un plan, puis un point M quelconque du même plan. On appelle *projeté orthogonal* de M sur $\mathcal{D}$ l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ qui passe par M.

Méth. (Coordonnées d'un projeté orthogonal)
Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $4x + 6y = -3$ et le point $M\binom{-3}{2}$. Cherchons le projeté orthogonal $M'\binom{x'}{y'}$ de M sur $\mathcal{D}$.

- $M' \in \mathcal{D}$;
- $\vec{MM'} \perp \vec{u}$ où $\vec{u}\binom{-6}{4}$ dirige $\mathcal{D}$.

La condition d'orthogonalité $\vec{MM'} \cdot \vec{u} = 0$ et l'appartenance à la droite mènent au système :

$$\begin{cases} -6x' + 4y' = 26 \\ 4x' + 6y' = -3 \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire donne les coordonnées de M'.

Défi. (Distance à une droite)
On considère un point M du plan et une droite $\mathcal{D}$. On dit qu'un réel positif d est égal à la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ lorsque d est la plus petite des distances entre M et les points de $\mathcal{D}$:
- $\exists P \in \mathcal{D},\ MP = d$;
- $\forall P \in \mathcal{D},\ MP \geqslant d$.

On peut noter $\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}$.

Prop.
Si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, alors :

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = MH.$$

Défi. (Vecteur normal)
Un vecteur $\vec{n}$ est dit *normal* à une droite $\mathcal{D}$ s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Prop. (Distance à l'aide d'un vecteur normal)
Soit $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{D}$. Pour tout point $A \in \mathcal{D}$ et tout point $M \in \mathcal{P}$:

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Prop. (Vecteur normal et équation cartésienne)
Si $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, alors le vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$ est normal à $\mathcal{D}$.

Form.
Si $\mathcal{D}$ admet pour équation $ax + by + c = 0$, alors pour tout $M\binom{x}{y}$:

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

12.3. Cercles du plan

Défi.
Dans un plan $\mathcal{P}$, on appelle cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble :

$$\mathcal{C}(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M = r\}.$$

Rema.
- Le rayon du cercle est un nombre, tandis que les « rayons » désignent aussi les segments $[\Omega M]$.
- L'unique cercle de centre O passant par A est $\mathcal{C}(O, OA)$.
- L'unique cercle de diamètre $[AB]$ est $\mathcal{C}\left(I, \frac{AB}{2}\right)$ où I est le milieu de $[AB]$.

Prop. (Équation cartésienne)
1. Dans un r.o.n.d., le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec $\Omega\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$ a pour équation :
$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2.$$
2. Réciproquement, pour l'ensemble d'équation $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + ax + by = c$, si $A \neq C$ ou si $B \neq 0$, ce n'est pas un cercle.

Méth. (Vérification d'une équation de cercle)
Question : Est-ce que l'ensemble (Γ) : $2x^2 + 2y^2 + 3x - 6y - 2 = 0$ est un cercle ?
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On normalise l'équation en divisant par 2 :
$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - 3y - 1 = 0.$$
On reconnait le début d'identités remarquables (mise sous forme canonique) :
- $x^2 + \frac{3}{2}x = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$;
- $y^2 - 3y = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

L'équation devient :
$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0.$$
En isolant les carrés, on obtient :
$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = K$$
avec $K = \frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+36+16}{16} = \frac{61}{16}$.
Conclusion : Comme $K > 0$, l'ensemble (Γ) est bien un cercle de centre $\Omega(-3/4; 3/2)$ et de rayon $R = \sqrt{K} = \frac{\sqrt{61}}{4}$.

Prop. (Paramétrisation d'un cercle)
Le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec $\Omega\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$ admet pour paramétrisation :
$$\begin{cases} x = x_\Omega + r\cos(\theta) \\ y = y_\Omega + r\sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$