

9 FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE 1 : ÉTUDE GLOBALE

9.1 Généralités

Noti.

On appelle *fonction* d'une partie D de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} toute relation qui fait passer de tout nombre x de D à un unique nombre y de \mathbb{R} ; auquel cas, on note $y = f(x)$ si la fonction est appelée f .

Lorsque l'ensemble de départ n'est pas précisé, on appelle *ensemble de définition* de f l'ensemble des valeurs de la variable x dans \mathbb{R} pour lesquelles $f(x)$ existe.

Défi.

On considère une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dit que f est :

- a) *constante* quand : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) = c$;
- b) *croissante* quand : $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$;
- c) *strictement croissante* quand : $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;
- d) *décroissante* quand : $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$;
- e) *strictement décroissante* quand : $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Défi.

On dit qu'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est *monotone* quand f est croissante ou f est décroissante. On adapte pour la monotonie stricte.

Prop. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit un intervalle I , une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, puis $v \in \mathbb{R}$. Si v est compris entre deux valeurs de f , alors v est aussi une valeur de f .

Prop. Théorème de la bijection continue

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} ; puis $f : I \rightarrow J$. Supposons que :

- ET f est continue;
- ET f est strictement monotone;
- ET la limite de f en l'extrémité inf. de I est égale à l'extrémité inf. de J ; de même avec les extr. sup. (ou inversement selon la monotonie).

Ainsi, $f : I \rightarrow J, x \mapsto y = f(x)$ admet une réciproque $g : J \rightarrow I, y \mapsto x \in I$ telle que $f(x) = y$.

Prop.

Si l'on connaît la représentation graphique de $f : x \mapsto f(x)$, on peut obtenir celles de certaines fonctions transformées de la manière suivante :

- La représentation graphique de $x \mapsto f(x - a)$ se déduit de celle de f par une translation horizontale de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x) + b$ se déduit de celle de f par une translation verticale de vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.
- La représentation de $x \mapsto f(2a - x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a$.
- La représentation de $x \mapsto 2b - f(x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport

à la droite d'équation $y = b$.

- La représentation de $x \mapsto f(\lambda^{-1}x)$, avec $\lambda > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de centre O et de rapport λ dans la direction horizontale.
- La représentation de $x \mapsto \mu f(x)$, avec $\mu > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de rapport μ dans la direction verticale.
- La représentation graphique de la fonction réciproque f^{-1} se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant, c'est-à-dire la droite $y = x$.

Défi.

On appelle (droite) *asymptote horizontale* de la courbe de f toute droite d'équation $y = C$ où $C \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = C$.

Défi.

On appelle (droite) *asymptote verticale* toute droite d'équation $x = C$ telle que $\lim_{x \rightarrow C} f = \pm\infty$.

Défi.

On considère $D \subset \mathbb{R}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *paire* quand :

- ET $\forall x \in D, -x \in D$
- ET $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

Défi.

On dit que f est *impaire* quand :

- ET $\forall x \in D, -x \in D$
- ET $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Défi.

On considère $T \in]0, +\infty[$. On dit que f est *T-périodique* ou que f admet T pour *période* quand :

- ET $\forall x \in D, x + T \in D$
- ET $\forall x \in D, f(x) = f(x + T)$

On parle de *la* période pour désigner la plus petite quand elle existe.

Défi.

Une *fonction périodique* est une fonction qui admet au moins une période ($T > 0$).

Défi.

On dit que f est :

- *majorée* par une constante $M \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D, f(x) \leq M$;
- *minorée* par une constante $m \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D, f(x) \geq m$;
- *bornée* par deux constantes $m \leq M$ quand $\forall x \in D, m \leq f(x) \leq M$.

Prop.

La fonction réelle $f: D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ est bornée si, et seulement si, la fonction réelle positive $|f|: D \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)|$ est majorée par une constante.

Défi.

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un *minimum global* de f quand :

- ET $\forall x \in D, f(x) \geq m$
- ET $\exists x_0 \in D, f(x_0) = m$

On parle de *minimum local* en un point x_* quand on se restreint autour de x_* .

Adaptation pour un maximum.

Défi.

On parle d'*extremum* pour tout minimum ou tout maximum.

9.2 Dérivation et représentation graphique

Prop.

Soit un intervalle I de plus d'un point, puis $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que f est dérivable en tout point de I . Ainsi :

1. f est constante ssi f' est nulle.
2. f est croissante ssi f' est positive.
3. f est strictement croissante ssi :
 - ET f' est positive ;
 - ET l'ensemble des points d'annulation de f' ne contient pas d'intervalle de plus d'un point.

On adapte pour la décroissance.

Défi.

On dit qu'une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est *deux fois dérivable* quand f est dérivable et que f' est dérivable ; auquel cas, on note $f'' = (f')'$: *dérivée seconde* de f .

Prop.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et \mathcal{C} sa représentation graphique dans un r.o.n. $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Si f'' est positive, alors \mathcal{C} est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si f'' est négative, alors \mathcal{C} est en-dessous de chacune de ses tangentes.

9.3 Fonctions réelles de référence

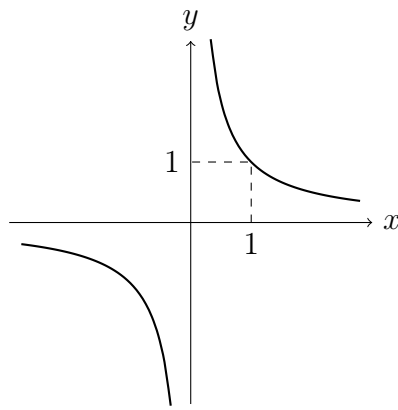
Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.

9.3.1 Fonctions constantes

9.3.2 Fonctions affines

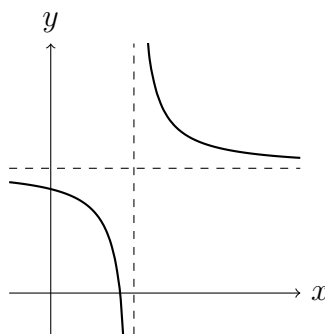
9.3.3 Fonction inverse

Figu.



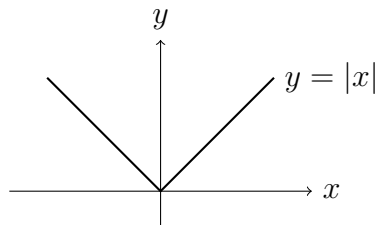
9.3.4 Quotients de fonctions affines

Fig.



9.3.5 Fonction valeur absolue

Fig.

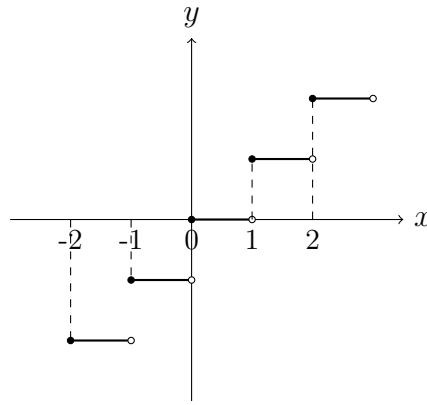


9.3.6 Fonction partie entière

Noti.

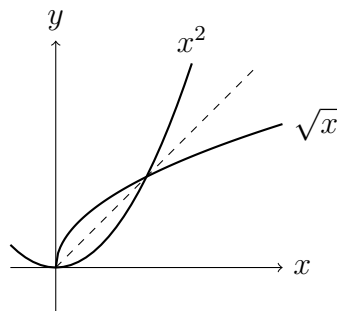
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$, où $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$.

Fig.



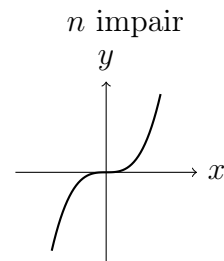
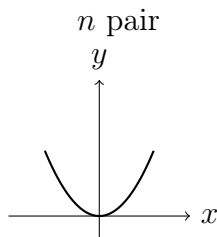
9.3.7 Fonctions carré et racine carrée

Figu.



9.3.8 Puissance n-ième

Figu.

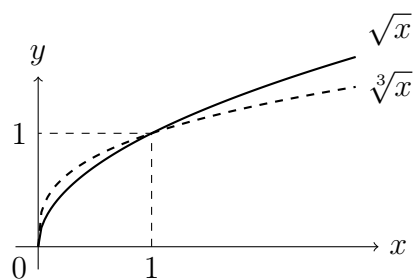


9.3.9 Racines n-ièmes

Défi.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine n-ième* de $x \geq 0$, notée $\sqrt[n]{x}$, l'unique réel positif dont la puissance n -ième vaut x .

Figu.



9.3.10 Fonctions polynomiales et rationnelles

Défi.

On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire de fonctions puissances entières.

Défi.

Une *fonction rationnelle* est le quotient de deux fonctions polynomiales.

9.3.11 Fonctions exponentielles et réciproques

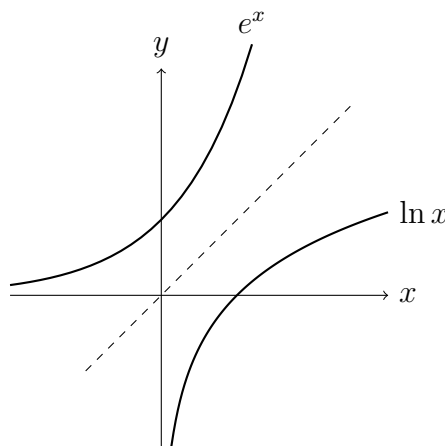
Défi.

\exp est l'unique fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , égale à sa dérivée et valant 1 en 0.

Défi.

Le *logarithme népérien* \ln est défini sur $]0, +\infty[$ comme la bijection réciproque de l'exponentielle. C'est que $\ln(y)$ est l'unique réel dont l'image par l'exponentielle donne y .

Figu.



Défi.

On considère $b \in]0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$, l'*exponentielle en base b* de x est

$$b^x \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(x \ln b).$$

- Le *logarithme en base b* de tout $y \in]0, +\infty[$ lorsque $b \neq 1$ est

$$\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}.$$

Rema.

Les fonctions \exp_b et \log_b sont réciproques l'une de l'autre.

9.3.12 Fonction puissance réelle de degré d

Déf.

Pour $d \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, la puissance de degré d est définie par

$$x^d = \exp(d \ln x).$$

Prop. (Prolongement en 0)

- Si $d > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^d = 0$.
- Si $d < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^d = +\infty$.

Prop. Théorème des croissances comparées

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in]0, +\infty[$.

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

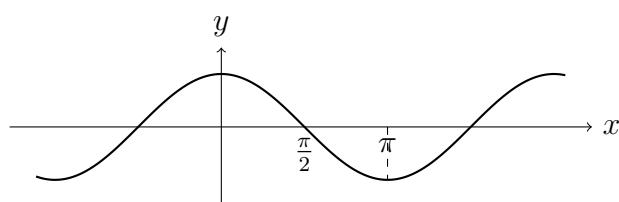
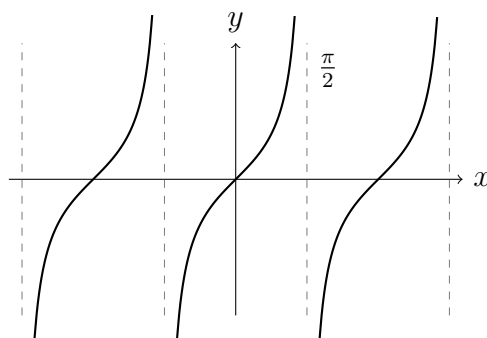
$$\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$e^{\alpha y} |y|^\beta \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$$

$$y^\beta |\ln y|^\gamma \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 0$$

9.3.13 Fonctions circulaires et réciproques**Méth.**

La construction de la courbe complète de cos se fait par symétries successives (centrale puis axiale) à partir du segment $[0, \pi/2]$, puis par translations (périodicité).

Fig.**Fig.** (Tangente)

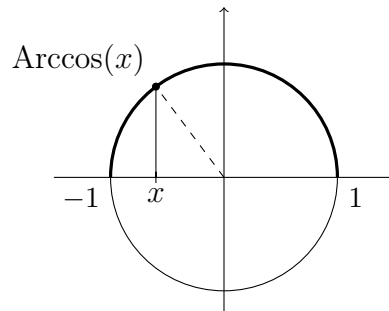
Défi.

$\forall x \in [-1, 1]$, on appelle *arccosinus* de x , noté $\text{Arccos}(x)$, l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal à x .

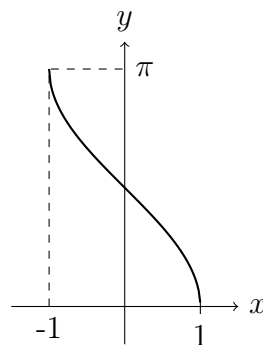
$$\begin{cases} \text{Arccos}(x) \in [0, \pi] \\ \cos(\text{Arccos } x) = x \end{cases}$$

(Attention aux deux "c" !)

Figu.



Figu.



Défi.

$\forall x \in [-1, 1]$, on appelle *arcsinus* de x , noté $\text{Arcsin}(x)$, l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus est égal à x .

$$\begin{cases} \text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(\text{Arcsin } x) = x \end{cases}$$

Figu.

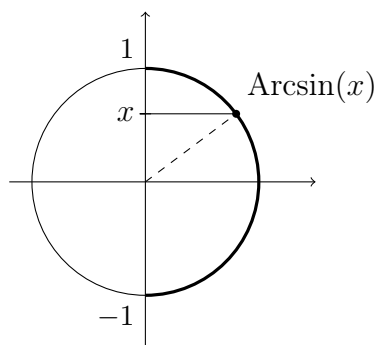
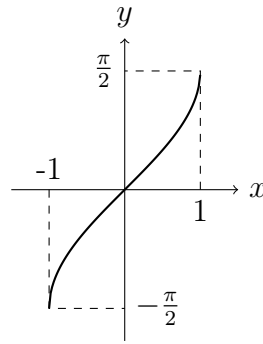


Fig.



Défi.

Pour tout x de $]-\infty, +\infty[$, on appelle *arctangente* de x , noté $\text{Arctan}(x)$, l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x .

$$\begin{cases} \text{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(\text{Arctan } x) = x \end{cases}$$

Rema.

$\text{Arctan}(\tan(\theta)) = \theta$ uniquement si $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sinon, $\text{Arctan}(\tan(\theta))$ est l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ayant même tangente que θ , *i.e.* $\text{Arctan}(\tan(\theta)) \equiv \theta \pmod{\pi}$.

Fig.

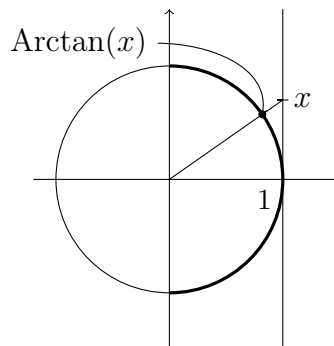
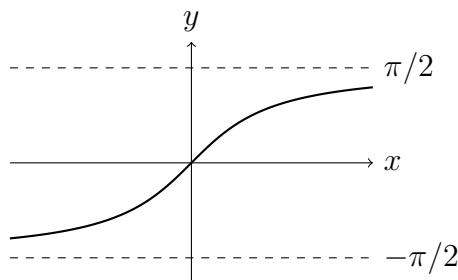


Fig.



9.3.14 Fonctions hyperboliques

Déf.

Pour tout réel x , on appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* les nombres réels :

$$\operatorname{ch}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sh}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Prop.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(iz) = \cos(z) \\ \operatorname{sh}(iz) = i \sin(z) \end{cases}$$

Prop.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x) \\ \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x) \end{cases}$$

Prop.

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

Prop.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x \\ \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Prop.

Les fonctions ch et sh sont dérivables sur \mathbb{R} et vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh}(x), \\ (\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch}(x). \end{cases}$$

Figu.

