13. Pratique calculatoire 3 : Sommes et produits

13.1. Somme et produit d'une suite finie de complexes

Défi.
On considère m et n dans $\mathbb{N}$, puis $(z_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ une liste de complexes (élément de $\mathbb{C}^{[\![m,n]\!]}$). Ainsi, on définit par récurrence la somme de la liste de complexes $(z_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ comme suit :

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = \begin{cases} z_m & \text{si } n = m \\ \left(\sum_{k=m}^{n-1} z_k\right) + z_n & \text{si } n > m \quad (n \in [\![m+1, +\infty[\![) \end{cases}$$

On adapte cela pour le produit :

$$\prod_{k=m}^{n} z_k$$

Prop. (Associativité générale ou invariance par groupement)
Soit une suite de complexes $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(p,q,r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p < q < r$, on a :

$$\left(\sum_{k=p}^{q-1} z_k\right) + \left(\sum_{k=q}^{r} z_k\right) = \sum_{k=p}^{r} z_k.$$

Nota
À cause de l'associativité générale, on peut noter sans parenthèses :

$$z_m + z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots + z_n$$

ou

$$z_m + z_{m+1} + \cdots + z_{n-1} + z_n$$

pour désigner $\sum_{k=m}^{n} z_k$.

Rema.
Dans la définition, on a sous-entendu que $m \leqslant n$. On convient que :

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = 0 \quad \text{si } n < m.$$

Prop. (Succession d'évolution et variation globale)
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, puis $(d_1, d_2, \dots)$ une suite dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite $(z_k)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ comme suit :

$$z_k = z_{k-1} + d_k.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$z_n = z_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Rema.
C'est que :

$$\begin{aligned}
z_1 &= z_0 + d_1 \\
z_2 &= z_1 + d_2 = z_0 + d_1 + d_2 \\
z_3 &= z_2 + d_3 = z_0 + d_1 + d_2 + d_3 \\
&\vdots \\
z_n &= z_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n.
\end{aligned}$$

Prop. (Somme télescopique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$, on a :

$$z_n - z_m = \sum_{k=m+1}^{n} (z_k - z_{k-1}).$$

Ou encore :

$$z_n - z_m = \sum_{\ell=m}^{n-1} (z_{\ell+1} - z_\ell).$$

Rema.
Le principe est que les termes s'annulent deux à deux :

$$\begin{aligned}
&(z_n - z_{n-1}) + (z_{n-1} - z_{n-2}) + \cdots + (z_{m+2} - z_{m+1}) + (z_{m+1} - z_m) \\
&= z_n - z_m.
\end{aligned}$$