1. Pratiques calculatoires 1 : $\mathbb{R}, +, \times, \leqslant, |\cdot|$

1.1. Opérations dans la droite réelle

Prop.
L'addition entre les nombres réels est :
- *associative* : pour tous réels x, a et b, $(x+a)+b = x+(a+b)$;
- *commutative* : pour tous réels a et b, $a+b = b+a$;
- admet 0 pour unique *élément neutre* : pour tout réel x, $x+0 = x = 0+x$;
- admet pour tout réel x, un unique *opposé* noté $-x$: $x+(-x) = 0 = -x+x$.

Prop.
La multiplication entre les nombres réels :
- est *associative* ;
- est *commutative* ;
- admet 1 pour unique *élément neutre* ;
- admet pour tout réel non nul x, un unique *inverse* noté x^{-1} : $x \times x^{-1} = 1 = x^{-1} \times x$.

Prop. (Stabilité de $\mathbb{R}^*$ par multiplication)
Si deux réels sont non nuls, alors leur produit est non nul.

Prop. (Distributivité)
La multiplication entre les réels est, par rapport à l'addition :
- *distributive* à gauche : pour tous réels x, a et b, $ax+bx = (a+b)x$;
- *distributive* à droite : $xa+xb = x(a+b)$.

Prop. (Absorbance et produit nul)
- Le nombre 0 est *absorbant* : pour tout réel a, $0 \times a = 0 = a \times 0$.
- Pour tous réels a et b, $ab = 0$ ssi $a = 0$ ou $b = 0$.

Prop. (Règle des signes)
Les trois expressions $-(ab)$, $(-a)b$, $a(-b)$ sont égales.

Défi. (Différence)
Considérons deux réels a et b. La *différence* de a à b, notée $a-b$, est définie par $a-b \overset{\text{déf}}{=} a+(-b)$.

Prop. (Propriétés de la différence)
Soit quatre réels a, b, a', b'. On a :
- $(a-b)+(a'-b') = (a+a')-(b+b')$;
- $-(a-b) = b-a$.

Défi. (Quotient)
Considérons deux réels a et b, avec b non nul. Le *quotient* de a par b, noté a/b, est le nombre réel défini par $a/b \overset{\text{déf}}{=} a \times b^{-1}$.

Prop. (Propriétés du quotient)
Soit des réels a, a' et des réels non nuls b, b'.
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b} = \dfrac{a+a'}{b}$;
- Les trois expressions $-\dfrac{a}{b}, \dfrac{-a}{b}$ et $\dfrac{a}{-b}$ sont égales ;
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a \times a'}{b \times b'}$;
- Si $a \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

1.2. Egalité dans la droite réelle

Prop. (Invariance de la somme d'après la variation des deux termes)
On ne varie pas la somme de deux nombres réels si on ajoute à l'un un troisième nombre réel alors qu'on soustrait de l'autre ce même troisième nombre.

$$\forall t_1, t_2, d \in \mathbb{R}, \quad t_1 + t_2 = (t_1 + d) + (t_2 - d).$$

Prop. (Invariance du produit)
On ne varie pas le produit de deux nombres réels si on multiplie l'un par un troisième nombre réel non nul alors qu'on divise l'autre par ce même troisième nombre non nul.

$$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^*, \quad f_1 \cdot f_2 = (f_1 \cdot q) \cdot (f_2/q).$$

Prop. (Invariance de la différence)
On ne varie pas la différence de deux nombres réels si on ajoute à chacun des deux ou si on soustrait de chacun des deux, un même troisième nombre réel.

$$\forall t_1, t_2, d \in \mathbb{R}, \quad t_1 - t_2 = (t_1 + d) - (t_2 + d).$$

Prop. (Invariance du quotient)
On ne varie pas le quotient de deux nombres réels si on multiplie chacun des deux, ou si on divise chacun des deux, par un même troisième nombre non nul.

$$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1 \times q}{f_2 \times q} \quad (\text{si } f_2 \neq 0).$$

1.3. Ordre dans la droite réelle

Prop. (Ordre entre les réels)
L'ordre $\leqslant$ entre les nombres réels est :
- *réflexif* : pour tout réel x, on a $x \leqslant x$;
- *transitif* : pour toute suite de trois réels x, y et z, si $x \leqslant y$ et si $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$;

- *antisymétrique* : pour tous réels x et y, si $x \leqslant y$ et si $y \leqslant x$ alors $x = y$;
- *total* : pour tous choix de deux nombres réels x et y, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Nota.
On note "$x < y$" pour "$x \leqslant y$ et $x \neq y$".

Prop. (Rapport aux nombres positifs)
Soit deux réels x et y.
- $x \leqslant y$ si, et seulement si, on peut trouver un réel positif d tel que $y = x + d$.
- Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $xy \geqslant 0$.

Prop.
Soit deux réels positifs x et y.
- $x + y$ est positif.
- Si $x + y$ est nul alors chacun des réels x et y est nul.

Prop. (Rapport à l'addition)
- Pour tous réels x et y, pour tout réel d, si $x \leqslant y$ alors $x + d \leqslant y + d$.
- Pour tout réel x, $x \leqslant 0 \leqslant -x$ ou $-x \leqslant 0 \leqslant x$.
- Pour tous réels x et y, si $x \leqslant y$ alors $-y \leqslant -x$.

Prop. (Rapport à la multiplication)
- Soit x et y deux réels. Soit q un réel positif. Si $x \leqslant y$ alors $qx \leqslant qy$.
- Pour tout réel x strictement positif, $x \leqslant 1 \leqslant x^{-1}$ ou $x^{-1} \leqslant 1 \leqslant x$.
- Pour tous réels x et y, si $0 < x \leqslant y$ alors $0 < y^{-1} \leqslant x^{-1}$; si $x \leqslant y < 0$ alors $y^{-1} \leqslant x^{-1} < 0$.

1.4. Inégalités dans la droite réelle

Prop. (Variation de la somme)
Pour tous réels a, b, c, d :
- $a \leqslant b \implies a + c \leqslant b + c$.
- $a \leqslant b \wedge c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$.

Prop. (Variation de la différence)
Pour tous réels a, b, c :
- $a \leqslant b \implies a - c \leqslant b - c$.
- $a \leqslant b \implies c - a \geqslant c - b$.

Prop. (Variation du produit)
Pour tous réels a, b, c :
- Si $c \geqslant 0$: $\quad a \leqslant b \implies ac \leqslant bc$.
- Si $c \leqslant 0$: $\quad a \leqslant b \implies ac \geqslant bc$.
- Pour a, b, c, d positifs : $\quad a \leqslant b \wedge c \leqslant d \implies ac \leqslant bd$.

Prop. (Variation du quotient)
Pour tous réels a, b strictement de même signe :
- $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$.

Pour des réels strictement positifs n, d :
- $n_1 \leqslant n_2 \implies \dfrac{n_1}{d} \leqslant \dfrac{n_2}{d}$.
- $d_1 \leqslant d_2 \implies \dfrac{n}{d_1} \geqslant \dfrac{n}{d_2}$.

1.5. Intervalles et valeur absolue

Défi.
Les intervalles I non vides d'extrémité inférieure a et d'extrémité supérieure b sont donnés par le tableau suivant :

	$b \in I$	$b \in \mathbb{R} \setminus I$	$b = +\infty$
$a \in I$	$[a, b]$	$[a, b[$	$[a, +\infty[$
$a \in \mathbb{R} \setminus I$	$]a, b]$	$]a, b[$	$]a, +\infty[$
$a = -\infty$	$]-\infty, b]$	$]-\infty, b[$	$]-\infty, +\infty[$

Défi.
On appelle *valeur absolue* de tout nombre réel x l'unique nombre réel noté $|x|$ défini par

$$|x| \overset{\text{déf}}{=} \max\{-x, x\}.$$

Prop. Inégalité triangulaire
Soit deux réels x et y. Alors $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Prop. (Cas d'égalité)
Si $|x + y| = |x| + |y|$, alors $x, y \geqslant 0$ ou $x, y \leqslant 0$.

Prop. (Inégalité triangulaire inversée)
On a deux réels x et y. Ainsi $|x + y| \geqslant |x| - |y|$.

Prop.
Soit x un réel quelconque. Alors $|x| = \sqrt{x^2}$.

Prop. (Rapport à la multiplication)
On donne x et y deux nombres réels. Ainsi,
1. $|xy| = |x| \cdot |y|$.
2. Pour tout réel positif r, $|rx| = r|x|$.

Prop. (Rapport à la division)
$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Prop.
Soit un réel x quelconque. On peut trouver S égal à 1 ou -1, et $r \geqslant 0$ tel que $x = Sr$.

Défi. (Signe d'un réel)
On appelle *signe* d'un réel non nul x, qu'on note ici $\operatorname{sgn}(x)$, le nombre réel $\operatorname{sgn}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{x}{|x|}$.

Méth. (pour déterminer le signe d'un produit)
Qu'on donne un réel x quelconque. On veut le signe de l'expression $f(x) = (2x-1)(12-3x)$. Cela est indiqué dans le tableau de signes ci-après.

x	$-\infty$		$1/2$		4		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$12-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Prop. (Intervalle centrés)
Soit a et b deux réels, avec r positif. Sur tout réel x, les deux propositions suivantes sont équivalentes :
1. $|x-a| \leqslant r$;
2. $x \in [a-r, a+r]$.

Voca.
$[a-r, a+r]$ est l'intervalle fermé centré en a de rayon r ; et $]a-r, a+r[$ est l'intervalle ouvert centré en a et de rayon r.