SUR LE CALCUL DE DÉRIVÉES

Dérivées des fonctions réelles usuelles

La fonction $f : D \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbf{R}$ est dérivable sur tout **intervalle** de plus d'un point inclus dans D', et sa fonction dérivée est la fonction $f' : D' \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbf{R}$; où

	$D =$	$D' =$	$\forall x \in D,\ f(x) =$	$\forall x \in D',\ f'(x) =$
Cte	$]-\infty,+\infty[$	D	$C,\quad C \in \mathbf{R}$	0
Fonctions puissances	$]-\infty,+\infty[$	D	$x^n,\quad n \in \mathbf{N}^*$	nx^{n-1}
	$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$	D	$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n},\quad n \in \mathbf{N}^*$	$-nx^{-n-1} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
	$[0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$]0,+\infty[$	D	$x^d = e^{d\ln x},\ d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$	dx^{d-1}
Ln	$]0,+\infty[$	D	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
Exp.	$]-\infty,+\infty[$	D	e^x	e^x
	$]-\infty,+\infty[$	D	$b^x = e^{x\ln b},\ b > 0$	$(\ln b)b^x = (\ln b)e^{x\ln b}$
Hyperboliques	$]-\infty,+\infty[$	D	$\operatorname{ch} x = \big(e^x + e^{-x}\big)/2$	$\operatorname{sh} x$
	$]-\infty,+\infty[$	D	$\operatorname{sh} x = \big(e^x - e^{-x}\big)/2$	$\operatorname{ch} x$
Circulaires	$]-\infty,+\infty[$	D	$\cos x$	$-\sin x$
	$]-\infty,+\infty[$	D	$\sin x$	$\cos x$
	$\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big]-\frac{\pi}{2}+k\pi,+\frac{\pi}{2}+k\pi\Big[$	D	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
Circulaires réciproques	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\operatorname{Arccos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$]-\infty,+\infty[$	D	$\operatorname{Arctan} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
Valeur absolue	$]-\infty,,+\infty[$	$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$	$\lvert x\rvert$	'sgn(x)'$=\begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

Opérations sur les fonctions réelles dérivables

① **Combinaison linéaire :** Si u_1 et u_2 sont deux fonctions dérivables sur I et si C_1 et C_2 sont deux réels, alors la combinaison linéaire $C_1u_1 + C_2u_2$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(C_1u_1 + C_2u_2)' = C_1u_1' + C_2u_2'}\ .$$

② **Produit :** Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I alors le produit uv est dérivable sur I et

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}\ .$$

③ **Inverse & Quotient :** Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I et v ne s'annule pas sur I alors l'inverse de v et le quotient de u par v sont dérivables sur I et

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}}\ ;\ \boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}\ .$$

④ **Composée :** Si φ est dérivable sur I et g est une fonction dérivable sur un intervalle J avec $\varphi(I) \subset J$, alors la composée de g suivant φ est dérivable sur I et

$$\boxed{(g \circ \varphi)' = (g' \circ \varphi) \cdot \varphi' \qquad : \qquad \forall x \in I, \quad (g \circ \varphi)'(x) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}\ .$$

⑤ **Réciproque :** Si $\varphi : I \ni x \longmapsto y \in J \ /\ y = \varphi(x)$ est dérivable et admet une réciproque $\varphi^{-1} : J \ni y \longmapsto x \in I \ /\ \varphi(x) = y$ qui est continue ; et si $\boldsymbol{\varphi'(x) \neq 0}$ **pour tout** $x \in I$, alors φ^{-1} est dérivable et

$$\boxed{\forall y \in J,\ \left(\varphi^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)}}\ .$$

Application de la dérivation composée

Soit φ une fonction réelle **dérivable** sur I respectant la contrainte ci-après. Alors f est dérivable sur I de dérivée f' ; où,

	Contrainte sur φ	Pour tout $x \in I$, $f(x) =$	Pour tout $x \in I$, $f'(x) =$
Fonctions puissances	Aucune	$(\varphi(x))^n, \quad n \in \mathbf{N}^*$	$n \times (\varphi(x))^{n-1} \cdot \varphi'(x)$
	$\forall x \in I,\ \varphi(x) \neq 0$	$\dfrac{1}{(\varphi(x))^n}$	$\dfrac{-n}{(\varphi(x))^{n+1}} \cdot \varphi'(x)$
	$\forall x \in I,\ \varphi(x) > 0$	$\sqrt{\varphi(x)}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}} \cdot \varphi'(x)$
	$\forall x \in I,\ \varphi(x) > 0$	$(\varphi(x))^d = e^{d \ln(\varphi(x))},\ d \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$	$d\varphi(x)^{d-1} \cdot \varphi'(x)$
Ln	$\forall x \in I,\ \varphi(x) > 0$	$\ln(\varphi(x))$	$\dfrac{1}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$
Exp.	Aucune	$\exp(\varphi(x))$	$\exp(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

De manière semblable, sous réserve d'existence,

$$(\mathrm{ch} \circ \varphi)' = (\mathrm{sh} \circ \varphi)\varphi' \qquad (\cos \circ \varphi)' = -(\sin \circ \varphi)\varphi' \qquad (\sin \circ \varphi)' = (\cos \circ \varphi)\varphi' \qquad (\tan \circ \varphi)' = \frac{\varphi'}{\cos^2 \circ \varphi}$$

$$(\mathrm{sh} \circ \varphi)' = (\mathrm{ch} \circ \varphi)\varphi' \qquad (\mathrm{Arccos} \circ \varphi)' = \frac{-\varphi'}{\sqrt{1-\varphi^2}} \qquad (\mathrm{Arcsin} \circ \varphi)' = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\varphi^2}} \qquad (\mathrm{Arctan} \circ \varphi)' = \frac{\varphi'}{1+\varphi^2}$$