3 Géométrie élémentaire 1 : vecteurs de l'espace

3.1 Vecteurs et opérations

Noti.
Le vecteur $\vec{AA'}$, de A à A', est associé à la translation qui transforme le point A en point A'. Si $A' \neq A$, le vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.

Prop.
Soit quatre points A, A', B et B'. $\vec{AA'} = \vec{BB'}$ si et seulement si le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Noti.
- Notée $\|\vec{v}\|$, la *norme* d'un vecteur $\vec{v}$ est la mesure commune des longueurs des segments orientés qui le représentent. C'est un nombre réel positif.
- Pour tout point M, on peut trouver un unique point M' image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Prop.
Un point O étant choisi comme origine, il y a correspondance un à un entre les vecteurs $\vec{v}$ et les points M via la relation $\vec{OM} = \vec{v}$, i.e. $O + \vec{v} = M$.

Prop. (Addition entre les vecteurs)
L'addition entre les vecteurs :
- est associative ;
- est commutative ;
- admet le vecteur nul $(\vec{0})$ pour élément neutre : $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$;
- admet pour tout vecteur $\vec{v}$ un unique opposé noté $-\vec{v}$.

Prop. (Associativité et commutativité générale de l'addition)
Etant donné une liste d'un certain nombre de vecteurs, on ne varie pas leur somme si on les ordonne puis les groupe arbitrairement.

Prop. (Multiplication des vecteurs par les réels)
La multiplication des vecteurs par les nombres réels est :
- distributive sur l'addition entre les vecteurs : $\lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2$;
- distributive sur l'addition entre les nombres réels : $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v}$;
- sans effet pour le nombre 1 : $1\vec{v} = \vec{v}$;
- compatible avec la multiplication entre les nombres réels : $\lambda_2(\lambda_1\vec{v}) = (\lambda_2\lambda_1)\vec{v}$.

Prop. (Produit et règle des signes)
Soit un vecteur $\vec{v}$ et un réel λ. $\lambda\vec{v} = \vec{0} \iff \lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
De plus : $-\lambda\vec{v} = (-\lambda)\vec{v} = \lambda(-\vec{v})$.

Noti.
On dit qu'un vecteur est une *combinaison linéaire* d'une liste de vecteurs si le premier se décompose comme une somme de produits des derniers par des réels.

Noti.
On dit qu'une liste de vecteurs est *libre*, ou que ces vecteurs sont *linéairement indépendants*, si pour obtenir le vecteur nul comme combinaison linéaire de ces derniers, il est nécessaire de choisir chaque coefficient égal à 0. Sinon, on dit que la liste est *liée* ou que les vecteurs sont *linéairement dépendants*.

Rema.
Une liste est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs n'est une combinaison linéaire des autres.

Prop.
- Deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont *linéairement dépendants* (colinéaires) ssi l'un est nul ou l'un est une combinaison linéaire de l'autre ($\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v_2} = \lambda \vec{v_1}$).
- Trois vecteurs sont linéairement dépendants (coplanaires) ssi l'un est nul ou l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

3.2 Repérage dans un plan, l'espace

Défi.
On appelle *base du plan* toute liste de deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan. On appelle *base de l'espace* toute liste de trois vecteurs linéairement indépendants.

Prop.
Etant donné une liste de vecteurs d'un plan (resp. de l'espace), il s'agit d'une base de ce plan si et seulement si tout autre vecteur peut se décomposer de manière unique comme une combinaison linéaire de la liste.

Défi.
Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ est *orthogonale* si $\vec{u} \perp \vec{v}$. Elle est *orthonormale* (ou orthonormée) si de plus $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Défi.
On appelle *repère* d'un plan $\mathcal{P}$ tout triplet $(O; \vec{u}, \vec{v})$ constitué d'un point O du plan et d'une base $(\vec{u}, \vec{v})$ des vecteurs de $\mathcal{P}$. De même pour l'espace avec $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Défi.
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on appelle *couple de coordonnées* du point M l'unique couple (x, y) tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Prop. (Changement de coordonnées par translation)
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace et O' un point de coordonnées (u, v, w) dans ce repère (tel que $\vec{OO'} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$). Pour tout point M, si $\vec{OM}$ a pour coordonnées (x, y, z), alors $\vec{O'M}$

a pour coordonnées $(x-u, y-v, z-w)$.

Défi.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, pour tout point M distinct de l'origine, on appelle *coordonnées polaires* le couple (r, θ) tel que :

$$\vec{OM} = r(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$$

avec $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. r est la norme $\|\vec{OM}\|$ et θ est la *mesure principale* de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$.

3.3 Barycentre

Défi.
Un *système de points pondérés* est une liste de points auxquels on affecte des nombres appelés *poids* (ou coefficients).

Nota.
Par exemple, $\{(A; -2); (B; 10); (C; 5,3)\}$ est un système pondéré de points. On note aussi

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ -2 & 10 & 5,3 \end{bmatrix}.$$

Défi. (Barycentre)
Soit O un point fixé et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le système pondéré

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}, \quad p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}.$$

Si $p_1 + \cdots + p_n \neq 0$, on appelle *barycentre* du système le point

$$G = \text{bar}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad \vec{OG} = \frac{p_1\vec{OA}_1 + \cdots + p_n\vec{OA}_n}{p_1 + \cdots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i\vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Défi. (Isobarycentre)
On appelle *isobarycentre* d'une famille de points le barycentre du système formé par ces points affectés de poids tous égaux.

Prop. (Indépendance du point de référence)
La définition du barycentre ne dépend pas du choix de l'origine. Pour tout point M, on a

$$\sum_{i=1}^n p_i\vec{MA}_i = \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)\vec{MG}.$$

Prop. (Caractérisation du barycentre)
Le barycentre G est l'unique point tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{GA_i} = \vec{0}.$$

Prop. (Coordonnées cartésiennes du barycentre)
(Comme avant). Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, notons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point A_i dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors l'abscisse du barycentre G est égale à la moyenne pondérée des abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$ affectés des poids $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivement. De même pour l'ordonnée et l'altitude. C'est que :

$$x_G = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

où x_G est l'abscisse de G.

Prop. (Barycentre et invariance)
Le barycentre est invariant par multiplication de tous les poids par un même réel non nul. L'isobarycentre est invariant par toute transformation affine qui laisse globalement invariant le système de points.

Prop.
Si le système admet un axe de symétrie, alors son isobarycentre appartient à cet axe.

3.4 Produit scalaire

Défi.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace. On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, qu'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini comme suit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Prop.
Soit deux points A et B distincts. Soit un troisième point C. Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$, où H désigne le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Prop.
Le produit scalaire est :
1. bilinéaire :
   - $(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) + \lambda_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{v})$;
   - $\vec{u} \cdot (\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1(\vec{u} \cdot \vec{v}_1) + \lambda_2(\vec{u} \cdot \vec{v}_2)$;

   quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ et les réels λ_1, λ_2 ;
2. symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
3. positif : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$ quelque soit $\vec{u}$;
4. défini : $\forall \vec{u}$, si $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$.

Prop.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
Par suite $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Nota.
On note $\vec{u}^2$ pour $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

Prop. (Produit scalaire et produit des normes)
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

$$-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leqslant \vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

(Ceci est l'Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Prop. (Identités scalaires remarquables)
Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On a
1. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$;
2. $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$;
3. $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$.

Aussi,
1. $\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$;
2. $\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$;
3. $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

Prop.
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a

$$\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Prop.
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$

Prop. (Décomposition dans une base orthonormée)
Soit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des vecteurs de l'espace. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque. Ainsi, $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j} + z_{\vec{u}}\vec{k}$, où

$$\begin{cases} x_{\vec{u}} = \vec{i} \cdot \vec{u} \\ y_{\vec{u}} = \vec{j} \cdot \vec{u} \\ z_{\vec{u}} = \vec{k} \cdot \vec{u} \end{cases}.$$

Prop.
Soit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des vecteurs de l'espace. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}}z_{\vec{v}}.$$

Prop.
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors
$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$