

## 21 DROITE RÉELLE ET SUITES NUMÉRIQUES 1

### 21.1 Droite réelle achevée totalement ordonnée

**Noti.**

Les ensembles de nombres usuels sont supposés connus et maîtrisés, ils respectent la chaîne d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

À titre d'exemple,

- $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ;
- $1/10 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$ ;
- $1/3 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$ ;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Prop.**

Toute suite finie  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  d'éléments de la droite réelle peut être rangée par ordre croissant (respectivement décroissant) : il existe une unique suite  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  qui est croissante (respectivement décroissante) et qui partage les mêmes éléments, en tenant compte de leurs occurrences.

**Noti.**

On appelle *distance* entre deux réels  $a$  et  $b$  le réel positif

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a - b \geq 0 \\ b - a & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut également écrire  $|a - b| = \max(a, b) - \min(a, b)$ .

**Défi.**

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

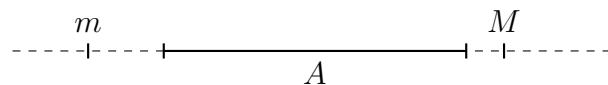
- On dit qu'un réel  $M$  est un *majorant* de  $A$  si

$$\forall a \in A, \quad a \leq M.$$

- On dit qu'un réel  $m$  est un *minorant* de  $A$  si

$$\forall a \in A, \quad a \geq m.$$

**Figu.**



**Défi.**

Soit  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Un réel  $M$  est un *majorant* de  $f$  s'il est un majorant de l'ensemble de ses valeurs  $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ . Autrement dit,

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leq M.$$

De même, un réel  $m$  est un *minorant* de  $f$  si :  $\forall x \in E, \quad f(x) \geq m$ .

**Exem.**

- La fonction  $\cos$  admet 1 pour majorant ; elle est majorée par 1.
- La fonction réelle  $\ln$  n'est pas majorée.

**Rema.**

Si  $M$  est un majorant d'une partie  $A$ , alors tout réel  $M' \geq M$  est également un majorant de  $A$ . Cette propriété est analogue pour les minorants.

**Défi.**

On dit qu'un réel  $a^+$  est le *maximum* d'une partie  $A$  non vide de  $\mathbb{R}$  pour dire que

$$\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq a^+ \\ a^+ \in A. \end{cases}$$

**Défi.**

On adapte pour le *minimum*.

**Défi.**

On adapte pour la partie de  $\mathbb{R}$  que constituent les valeurs d'une fonction.

**Nota.**

$$\max(A) ; \quad \max\{f(x) : x \in I\} ; \quad \max_{x \in I} f(x) ; \quad \max_I f.$$

**Exem.**

Le nombre 2026 est un majorant de  $[0, 2026[$  qui n'est pas le maximum, et 0 est le minimum de l'ensemble.

**Défi.**

On dit qu'un réel  $M^-$  est la *borne supérieure* d'une partie non vide  $A$  de  $\mathbb{R}$  si  $M^-$  est le plus petit des majorants de  $A$  :

- $\forall a \in A, \quad a \leq M^-$  ;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad (\forall a \in A, \quad a \leq \mu) \implies \mu \geq M^-$ .

**Rema.**

Dans la pratique, on considère le plus souvent la contraposée de l'implication ci-haut :

- $\forall a \in A, \quad a \leq M^-$  ;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu < M^- \implies (\exists a \in A, \quad a > \mu)$ .

**Exem.**

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\max(\cos(x)) = 1$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\min(x^2 + x + 1) = \frac{3}{4}$ .

**Rema.**

La borne supérieure d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  n'est pas toujours définie : il est nécessaire que  $A$  soit à la fois non vide et majorée.

**Nota.**

- $\sup A, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  ;
- $\sup\{f(x) : x \in I\} = \sup_{x \in I} f(x) = \sup_I f, f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  ou  $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$  avec  $I \subset E$  ;
- $\sup_E f = \sup f$  pour  $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ .

**Exem.**

1.  $0 = \sup] -\infty, 0] = \max] -\infty, 0]$ .
2.  $0 = \sup] -\infty, 0[$  ; partie sans maximum.
3. Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ . Ainsi,  $1 = \sup f = \max f$ , et  $0 = \inf f = \min f$ .

**Défi.**

On dit qu'un réel  $m^+$  est la *borne inférieure* d'une partie non vide  $A$  de  $\mathbb{R}$  pour dire que  $m^+$  est le plus grand des minorants de  $A$  :

- $\forall a \in A, a \geq m^+$  ;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, (\forall a \in A, a \geq \mu) \implies \mu \leq m^+$ .

**Rema.**

C'est que :

- $\forall a \in A, a \geq m^+$  ;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \mu > m^+ \implies (\exists a \in A, a < \mu)$ .

**Rema.**

Soit  $m^+, M^- \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$ .

- $M^- = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M^- \\ \forall \mu \in \mathbb{R}, \mu < M^- \implies (\exists a \in A, \mu < a \leq M^-). \end{cases}$
- $m^+ = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m^+ \\ \forall \mu \in \mathbb{R}, \mu > m^+ \implies (\exists a \in A, m^+ \leq a < \mu). \end{cases}$

**Prop.** (Axiome de la borne supérieure dans  $(\mathbb{R}, \leq)$ )

Si une partie des nombres réels est non vide et majorée alors elle admet une borne supérieure.

**Prop.** (Axiome de la borne inférieure dans  $(\mathbb{R}, \leq)$ )

Si une partie des nombres réels est non vide et minorée alors elle admet une borne inférieure.

**Rema.**

On a :

- si  $\sup A$  existe, alors  $-\sup A = \inf(-A)$  ;
- si  $\inf A$  existe, alors  $-\inf A = \sup(-A)$ .

**Prop.** (Caractérisation des intervalles de  $\mathbb{R}$ )

Toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x \leq y \implies [x, y] \subset A.$$

**Prop.** (Propriété d'Archimède)

Si  $0 < a \leq b$  alors on peut trouver  $n \in \mathbb{N}^*$  suffisamment grand pour que  $b/n < a$  et  $b < na$ .

**Défi.**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $[x] = \max\{e \in \mathbb{Z} \mid e \leq x\} = \max([-\infty, x] \cap \mathbb{Z})$ .

**Prop.** (Partie entière)

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $e \in \mathbb{Z}$ , les propositions que voici sont équivalentes :

- $e = [x]$  ;
- $e \leq x < e + 1$  ;
- $\exists f \in [0, 1[, \quad x = e + f$ .

**Prop.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  puis  $p \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi, il existe un unique nombre décimal  $D_p$  tel que  $D_p \leq x < D_p + 10^{-p}$  avec  $10^p D_p \in \mathbb{Z}$ . C'est la valeur approchée décimale par défaut, à précision  $10^{-p}$ , du réel  $x$ .

**Rema.**

Plus bas,  $x = \lim_{p \rightarrow +\infty} D_p$ ; tout réel peut s'obtenir comme la limite d'une suite de nombres décimaux.

## 21.2 Généralités sur les suites réelles

**Défi.**

Une *suite* dans  $\mathbb{R}$  est une fonction de  $\llbracket n_0, +\infty \rrbracket$  dans  $\mathbb{R}$ , pour un certain  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

**Nota.**

$\llbracket n_0, +\infty \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \mapsto u_n$ ;  $(u_n : n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket)$ ;  $(u_n)_{n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket}$ ;  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .

**Nota.**

L'ensemble des suites dans  $\mathbb{R}$  indexées par  $\mathbb{N}$  est notée  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Exem.**

$(n^2)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

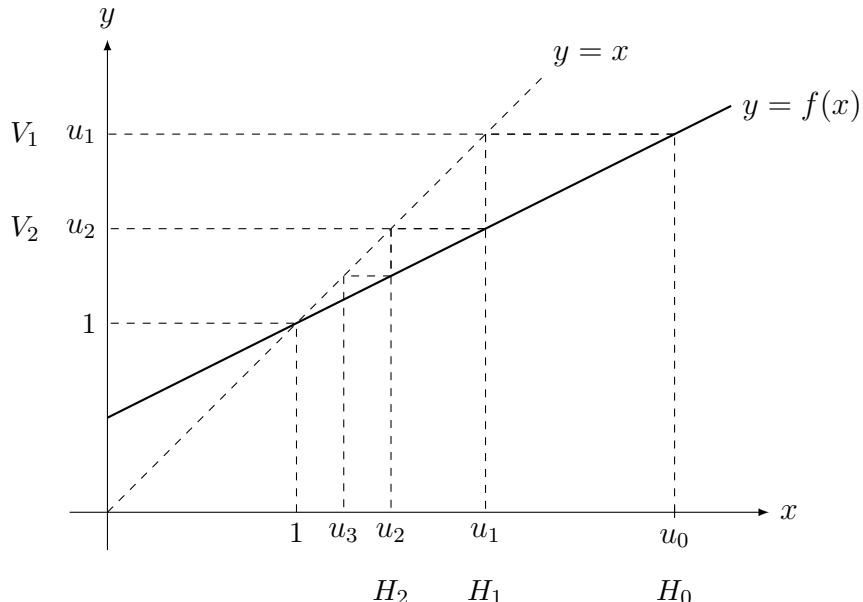
**Nota.**

$$(n^2)_{n \geq 0} = (0^2, 1^2, 2^2, \dots).$$

**Méth.** (Représenter graphiquement des termes d'une suite)

Représentation des premiers termes de l'unique suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2} \end{cases} .$$



Procédure pour placer les points  $H_n(u_n, 0)$  :

Ayant placé  $H_n(u_n, 0)$ , on place le point  $V_{n+1}(0, u_{n+1})$  sur l'axe des ordonnées à l'aide de la courbe d'équation  $y = f(x)$  sachant que  $u_{n+1} = f(u_n)$ ; puis on place sur l'axe des abscisses  $H_{n+1}(u_{n+1}, 0)$  à l'aide de la droite d'équation  $y = x$ .

**Défi.**

On considère deux suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puis  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ainsi,

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ;
- $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ;
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Défi.**

Une suite réelle *croissante* définie à partir d'un rang  $n_0$  est une fonction de  $[n_0, +\infty]$  dans  $\mathbb{R}$  qui est croissante. On adapte pour la croissance stricte, la décroissance et la décroissance stricte.

**Prop.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . La suite est :

- croissantessi  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$ ;
- strictement croissantessi  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$ ;
- décroissantessi  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$ ;
- strictement décroissantessi  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$ .

**Rema.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La proposition  $(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_k \leq u_n)$  signifie  $(\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n \implies u_k \leq u_n)$ .

**Exer.** (Étudier la monotonie)

Suite :  $(\sum_{k=0}^n 2^{-k})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Posons  $u_n = \sum_{k=0}^n 2^{-k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2^{-(n+1)} - u_n = 2^{-(n+1)} > 0.$$

Ce que soit  $n \in \mathbb{N}$ . Donc la suite est strictement croissante.

**Exer.**

Étudions la monotonie de la suite  $(\prod_{k=1}^n (1 - 2^{-k}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Posons  $v_n = \prod_{k=1}^n (1 - 2^{-k})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'abord,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 1 - 2^{-k} > 0$ .

Donc  $v_n > 0$ .

Ensuite,  $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{v_n \cdot (1 - 2^{-(n+1)})}{v_n} - 1 = -2^{-(n+1)} < 0$ .

D'où la suite est strictement décroissante.

**Méth.** (Étudier la monotonie d'une suite réelle en comparant deux termes consécutifs quelconques)

- Si le terme général se prête à des additions, alors on peut comparer les accroissements à 0.
- Si le terme général se prête à des multiplications et qu'il est strictement positif, alors on peut comparer les accroissements relatifs à 1.

**Prop.**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par deux constantes si et seulement si  $(|u_n|)$  est majorée par une constante.

**Prop.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  arithmétique de raison  $a \in \mathbb{R}$ . On a ainsi,

- si  $a = 0$ ,  $(u_n)$  est constante ;
- si  $a > 0$ ,  $(u_n)$  est strictement croissante ;
- si  $a < 0$ ,  $(u_n)$  est strictement décroissante.

Dans tous les cas,  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_p + a \cdot (n - p)$ .

**Prop.**

Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  géométrique de raison  $q \in \mathbb{R}$ . Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  et si

- $q - 1 = 0$  alors  $(u_n)$  est constante ;
- $q - 1 > 0$  alors  $(u_n)$  est strictement croissante ;
- $q - 1 < 0$  alors  $(u_n)$  est strictement décroissante.

Par ailleurs, on a  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_p \cdot q^{n-p}$ .

**Défi.**

On dit qu'une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

**Prop.** (Terme général d'une suite arithmético-géométrique)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - au_n = b$ . Supposons  $a \neq 1$ . Ainsi on peut trouver une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \omega + ca^n$  où  $\omega$  est l'unique constante telle que  $\omega - a\omega = b$ .

**Exer.**

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2} \end{cases}$

On demande  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Étape 1 : On a  $\{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n = 0\} = \{c(\frac{1}{2})^n : c \in \mathbb{R}\}$ .

Étape 2 : La suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{2}$ .

Étape 3 : En conclusion, pour  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $u_0 = 1 + c \cdot (\frac{1}{2})^0$ , i.e.  $c = 1$ .

On a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ .

## 21.3 Limite, finie ou infinie, d'une suite réelle

**Défi.**

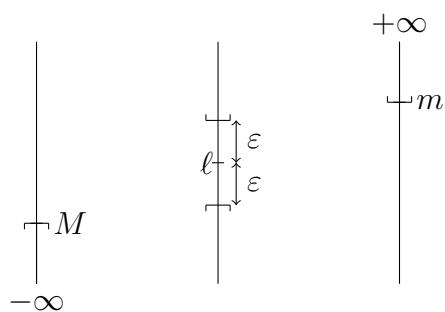
On appelle *voisinage* dans la droite réelle achevée  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  d'un élément  $\ell$  comme une partie contenant au moins :

1. un intervalle centré  $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ , où  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , si  $\ell$  est fini ;
2. une section finissante  $[m, +\infty]$ , où  $m \in \mathbb{R}$ , si  $\ell = +\infty$  ;
3. une section commençante  $[-\infty, M]$ , où  $M \in \mathbb{R}$ , si  $\ell = -\infty$ .

**Exem.**

1.  $]-10^{-2026}, 10^{-2026}[ ; [-10^{-2026}, 10^{-2026}]$ ; et  $[-1, 1] \cup \{2026\}$  sont des *voisinages* de 0.
2. Les parties  $[10^{2026}, +\infty]$  et  $\{0\} \cup [10^{2026}, +\infty]$  sont deux voisinages de  $+\infty$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Figu.**



**Défi.**

On dit que  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  est une *limite* de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  lorsque tout voisinage de  $\ell$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang : pour tout voisinage arbitrairement petit de  $\ell$ , on peut trouver un rang suffisamment grand à partir duquel le voisinage contient toute valeur de la suite.

**Voca.**

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\ell : (u_0, u_1, u_2, \dots) \rightarrow \ell$ , ou encore que la suite admet pour limite  $\ell$ . On dit que la grandeur  $u_n$  tend vers  $\ell$  quand la grandeur entière  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Ecriture symbolique

«  $\ell$  est une limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  » signifie :

- $\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[, \exists N_\varepsilon \in \llbracket 0, +\infty \rrbracket, \forall n \in \llbracket N_\varepsilon, +\infty \rrbracket, u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ , si  $\ell$  est finie ;
- $\forall m \in ]-\infty, +\infty[, \exists N_m \in \llbracket 0, +\infty \rrbracket, \forall n \in \llbracket N_m, +\infty \rrbracket, u_n \in [m, +\infty]$ , si  $\ell = +\infty$  ;
- $\forall M \in ]-\infty, +\infty[, \exists N_M \in \llbracket 0, +\infty \rrbracket, \forall n \in \llbracket N_M, +\infty \rrbracket, u_n \in [-\infty, M]$ , si  $\ell = -\infty$ .

### Rema. (Unification)

« La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  » signifie

$$\begin{cases} \forall m \in \mathbb{R}, m < \ell \implies (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket, m \leq u_n) \\ \forall M \in \mathbb{R}, M > \ell \implies (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket, M \geq u_n) \end{cases} .$$

### Prop. (Unicité de la limite)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \\ u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell' \end{cases}$$

alors  $\ell' = \ell$ .

### Nota.

Par conséquent, on écrit  $\ell = \lim(u_0, u_1, \dots) = \lim(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Rema.

- $[0, +\infty[$  n'est pas un voisinage de 0.
- Il se peut que  $M \leq \lim u_n$  pourtant il n'existe aucun rang à partir duquel  $M \leq u_n$ . Par exemple,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1 - 10^{-n})$  et  $M = 1$ .

### Prop. (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Si à partir d'un certain rang  $u_n \geq m$  et que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  alors  $\ell \geq m$ .

### Défi.

Une suite réelle est dite *convergente* lorsqu'elle admet une limite réelle (finie). Sinon, elle est dite *divergente*.

### Prop.

Si une suite réelle est convergente, alors elle est bornée.

### Prop. (Suites bornées)

L'ensemble des suites réelles bornées est stable par addition, par multiplication pour tout réel, et par multiplication interne.

**Prop.** (Suites de limites nulles)

L'ensemble des suites réelles de limite nulle est stable par addition, multiplication par un réel, multiplication par une suite bornée.