# 14. Fondements 5 : Fonction entre deux ensembles

## 14.1. Modes de définition d'une fonction, de son graphe

**Noti.**
Une fonction $f$ partant d'un ensemble $E$ et arrivant dans un ensemble $F$ est un triplet constitué de l'ensemble de départ $E$, de l'ensemble d'arrivée $F$, et d'une relation qui, à tout élément $x$ du départ, associe un unique élément $y$ à l'arrivée, appelé image de $x$ par $f$ et noté $f(x)$.
On note :
- $f : E \to F, \quad x \mapsto f(x)$ ;
- $y = f(x)$ pour $x \mapsto y$ ;
- $\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ ;
- $\mathcal{F}(E, F)$ pour l'ensemble des fonctions partant de $E$ et arrivant dans $F$.

**Défi.** (Graphe)
On définit le graphe $\Gamma_f$ d'une fonction $f : E \to F$ comme la partie de $E \times F$ telle que $(x, y) \in \Gamma_f \iff y = f(x)$.

$$\Gamma_f := \big\{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\big\} = \big\{(x, f(x)) \mid x \in E\big\}.$$

**Rema.**
Deux fonctions ne sont égales que si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et la même relation fonctionnelle. Par exemple, les fonctions :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^2$$

ne sont pas égales car leurs ensembles d'arrivée diffèrent.
En revanche, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, x \mapsto -x$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, t \mapsto 1 - (t + 1)$ sont égales.

**Noti.**
On peut définir une fonction de plusieurs manières :
- par une relation explicite,
  en ex. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y$ ;
- par une relation implicite,
  en ex. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto z$ ;
- par une relation de récurrence, en ex.

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & 0 & \mapsto & 1 \\ & 1 & \mapsto & 1 \\ & n \geq 2 & \mapsto & f(n-1) + f(n-2); \end{array}$$

- par un tableau de valeurs ($E$ fini), en ex. $f : \{0, 1, 2\} \to \mathbb{C}$ :

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $i$ | $1 - i$ | $2026$ |

## 14.2. Opérations générales sur les fonctions

**Défi.** (Restriction)
On appelle restriction d'une fonction $f : E \to F$ à une partie $A$ de $E$, la fonction notée $f_{|A}$ définie par :

$$f_{|A} \; : \; \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

**Défi.** (Prolongement)
On dit qu'une fonction $g$ est un prolongement de la fonction $f$ lorsque $f$ est la restriction de $g$ à l'ensemble de départ de $f$.

**Défi.** (Image directe)
On appelle image directe par $f : E \to F$ d'une partie $A$ de $E$ (du départ), l'unique partie de $F$ (de l'arrivée) définie par :

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

**Prop.** (Image directe, inclusion et opérations)
Soient $f : E \to F$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$.
1. Si $A_1 \subset A_2$, alors $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. En général, on ne peut pas comparer $f(A_2 \setminus A_1)$ et $f(A_2) \setminus f(A_1)$.
3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. En général, l'inclusion est stricte.
4. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.