21 Droite réelle et suites numériques 1

21.1 Droite réelle achevée totalement ordonnée

Noti.
Les ensembles de nombres usuels sont supposés connus et maîtrisés, ils respectent la chaîne d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

À titre d'exemple,
- $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
- $1/10 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$;
- $1/3 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Prop.
Toute suite finie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de la droite réelle peut être rangée par ordre croissant (respectivement décroissant) : il existe une unique suite $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ qui est croissante (respectivement décroissante) et qui partage les mêmes éléments, en tenant compte de leurs occurrences.

Noti.
On appelle *distance* entre deux réels a et b le réel positif

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a-b \geq 0 \\ b-a & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut également écrire $|a-b| = \max(a,b) - \min(a,b)$.

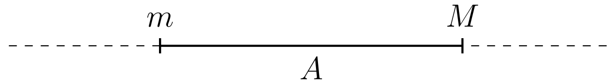
Défi.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- On dit qu'un réel M est un *majorant* de A si

$$\forall a \in A, \quad a \leq M.$$

- On dit qu'un réel m est un *minorant* de A si

$$\forall a \in A, \quad a \geq m.$$

Figu.



Défi.
Soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un réel M est un *majorant* de f s'il est un majorant de l'ensemble de ses valeurs $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$. Autrement dit,

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leq M.$$

De même, un réel m est un *minorant* de f si : $\forall x \in E, \quad f(x) \geq m$.

Exem.
- La fonction cos admet 1 pour majorant ; elles majorée par 1.
- La fonction réelle ln n'est pas majorée.

Rema.
Si M est un majorant d'une partie A, alors tout réel $M' \geq M$ est également un majorant de A. Cette propriété est analogue pour les minorants.

Défi.
On dit qu'un réel a^+ est le *maximum* d'une partie A non vide de $\mathbb{R}$ pour dire que

$$\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq a^+ \\ a^+ \in A. \end{cases}$$

Défi.
On adapte pour le *minimum*.

Défi.
On adapte pour la partie de $\mathbb{R}$ que constitues les valeurs d'une fonction.

Nota.

$$\max(A) \ ; \qquad \max\{f(x) : x \in I\} \ ; \qquad \max_{x \in I} f(x) \ ; \qquad \max_I f.$$

Exem.
Le nombre 2026 est un majorant de $[0, 2026[$ qui n'est pas un maximum, et 0 est le minimum de l'ensemble.

Défi.
On dit qu'un réel M^- est la *borne supérieure* d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ si M^- est le plus petit des majorants de A :
- $\forall a \in A, \quad a \leq M^-$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad (\forall a \in A, \quad a \leq \mu) \implies \mu \geq M^-$.

Rema.
Dans la pratique, on considère le plus souvent la contraposée de l'implication ci-haut :
- $\forall a \in A, \quad a \leq M^-$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu < M^- \implies (\exists a \in A, \quad a > \mu)$.

Exem.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\max(\cos(x)) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\min(x^2 + x + 1) = \frac{3}{4}$.

Rema.
La borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours définie : il est nécessaire que A soit à la fois non vide et majorée.

Nota.
- $\sup A, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
- $\sup\{f(x) : x \in I\} = \sup\limits_{x \in I} f(x) = \sup\limits_{I} f, \quad f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ou $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ avec $I \subset E$;
- $\sup f = \sup\limits_{E} f$ pour $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

Exem.
1. $0 = \sup]-\infty, 0] = \max]-\infty, 0]$.
2. $0 = \sup]-\infty, 0[$; partie sans maximum.
3. Soit $f \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$. Ainsi, $1 = \sup f = \max f$, et $0 = \inf f = \min f$.

Défi.
On dit qu'un réel m^+ est la *borne inférieure* d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ pour dire que m^+ est le plus grand des minorants de A :
- $\forall a \in A, \quad a \geq m^+$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad (\forall a \in A, \quad a \geq \mu) \implies \mu \leq m^+$.

Rema.
C'est que :
- $\forall a \in A, \quad a \geq m^+$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu > m^+ \implies (\exists a \in A, \quad a < \mu)$.

Rema.
Soit $m^+, M^- \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$.
- $M^- = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq M^- \\ \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu < M^- \implies (\exists a \in A, \quad \mu < a \leq M^-). \end{cases}$
- $m^+ = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \geq m^+ \\ \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu > m^+ \implies (\exists a \in A, \quad m^+ \leq a < \mu). \end{cases}$

Prop. Axiome de la borne supérieure dans $(\mathbb{R}, \leq)$
Si une partie des nombres réels est non vide et majorée alors elle admet une borne supérieure.

Prop. Axiome de la borne inférieure dans $(\mathbb{R}, \leq)$
Si une partie des nombres réels est non vide et minorée alors elle admet une borne inférieure.

Rema.
On a :

- si $\sup A$ existe, alors $-\sup A = \inf(-A)$;
- si $\inf A$ existe, alors $-\inf A = \sup(-A)$.

Prop. (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)
Toute partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si,

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad x \leq y \implies [x,y] \subset A.$$

Prop. (Propriété d'Archimède)
Si $0 < a \leq b$ alors on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $b/n < a$ et $b < na$.

Défi.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \max\{e \in \mathbb{Z} \mid e \leq x\} = \max(]-\infty, x] \cap \mathbb{Z})$.

Prop. (Partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, les propositions que voici sont équivalentes :
- $e = \lfloor x \rfloor$;
- $e \leq x < e + 1$;
- $\exists f \in [0, 1[, \quad x = e + f$.

Prop.
Soit $x \in \mathbb{R}$ puis $p \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, il existe un unique nombre décimal D_p tel que $D_p \leq x < D_p + 10^{-p}$ avec $10^p D_p \in \mathbb{Z}$. C'est la valeur approchée décimale par défaut, à précision 10^{-p}, du réel x.

Rema.
Plus bas, $x = \lim\limits_{p \to +\infty} D_p$; tout réel peut s'obtenir comme la limite d'une suite de nombres décimaux.

21.2 Généralités sur les suites réelles

Défi.
Une *suite* dans $\mathbb{R}$ est une fonction de $[\![n_0, +\infty [\![$ dans $\mathbb{R}$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.

Nota.
$[\![n_0, +\infty [\![\to \mathbb{R}, \quad n \mapsto u_n$; $(u_n : n \in [\![n_0, +\infty [\![)$; $(u_n)_{n \in [\![n_0, +\infty [\![}$; $(u_n)_{n \geq n_0}$.

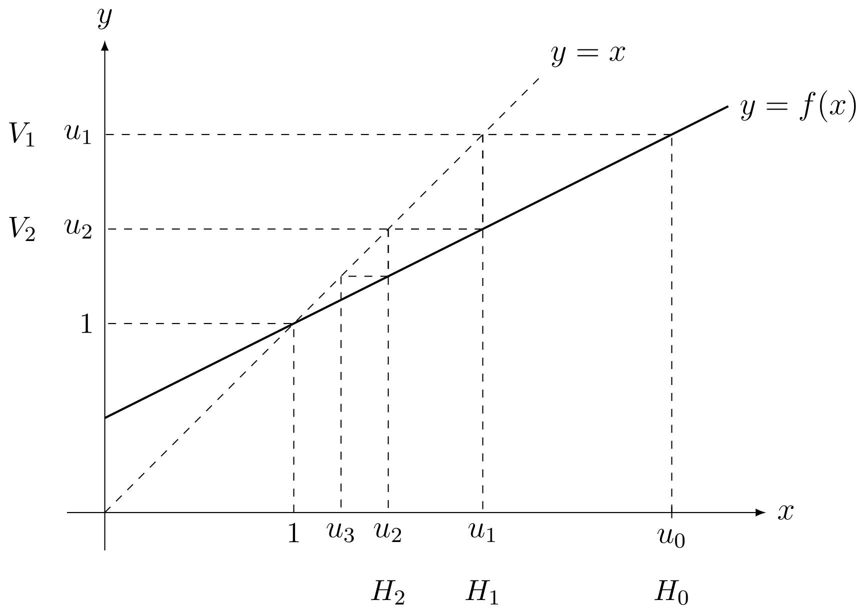
Nota.
L'ensemble des suites dans $\mathbb{R}$ indexées par $\mathbb{N}$ est notée $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exem.
$(n^2)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Nota.
$(n^2)_{n\geq 0} = (0^2, 1^2, 2^2, \dots)$.

Méth. (Représenter graphiquement des termes d'une suite)
Représentation des premiers termes de l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2} \end{cases}.$$



Procédure pour placer les points $H_n(u_n, 0)$:
Ayant placé $H_n(u_n, 0)$, on place le point $V_{n+1}(0, u_{n+1})$ sur l'axe des ordonnées à l'aide de la courbe d'équation $y = f(x)$ sachant que $u_{n+1} = f(u_n)$; puis on place sur l'axe des abscisses $H_{n+1}(u_{n+1}, 0)$ à l'aide de la droite d'équation $y = x$.

Défi.
On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Défi.
Une suite réelle *croissante* définie à partir d'un rang n_0 est une fonction de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante. On adapte pour la croissance stricte, la décroissance et la décroissance stricte.

Prop.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite est :
- croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$;
- strictement croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$;
- décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$;
- strictement décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$.

Rema.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La proposition $(\forall k \in [\![0, n]\!], \quad u_k \leq u_n)$ signifie $(\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n \implies u_k \leq u_n)$.

Exer. (Étudier la monotonie)
Suite : $\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Posons $u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2^{-(n+1)} - u_n = 2^{-(n+1)} > 0.$$

Ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite est strictement croissante.

Exer.
Étudions la monotonie de la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1 - 2^{-k})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Posons $v_n = \prod_{k=1}^{n}(1 - 2^{-k})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'abord, $\forall k \in [\![1, n]\!], 1 - 2^{-k} > 0$.
Donc $v_n > 0$.
Ensuite, $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{v_n \cdot (1-2^{-(n+1)})}{v_n} - 1 = -2^{-(n+1)} < 0$.
D'où la suite est strictement décroissante.

Méth. (Étudier la monotonie d'une suite réelle en comparant deux termes consécutifs quelconques)
- Si le terme général se prête à des additions, alors on peut comparer les accroissements à 0.
- Si le terme général se prête à des multiplications et qu'il est strictement positif, alors on peut comparer les accroissements relatifs à 1.

Prop.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par deux constantes si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée par une constante.

Prop.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$. On a ainsi,
- si $a = 0$, (u_n) est constante ;
- si $a > 0$, (u_n) est strictement croissante ;
- si $a < 0$, (u_n) est strictement décroissante.

Dans tous les cas, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p + a \cdot (n - p)$.

Prop.
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et si
- $q - 1 = 0$ alors (u_n) est constante ;
- $q - 1 > 0$ alors (u_n) est strictement croissante ;
- $q - 1 < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Par ailleurs, on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p \cdot q^{n-p}$.

Défi.
On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Prop. (Terme général d'une suite arithmético-géométrique)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - au_n = b$. Supposons $a \neq 1$. Ainsi on peut trouver une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \omega + ca^n$ où ω est l'unique constante telle que $\omega - a\omega = b$.

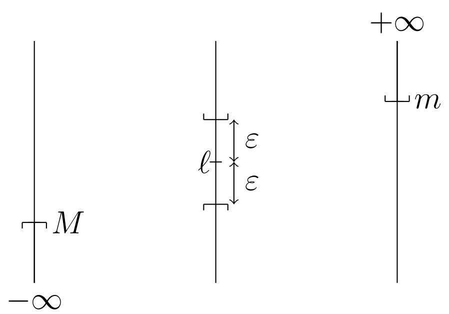
Exer.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2} \end{cases}$
On demande u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Étape 1 : On a $\{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n = 0\} = \{c(\frac{1}{2})^n : c \in \mathbb{R}\}$.
Étape 2 : La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{2}$.
Étape 3 : En conclusion, pour $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_0 = 1 + c \cdot (\frac{1}{2})^0$, i.e. $c = 1$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$.

21.3 Limite, finie ou infinie, d'une suite réelle

Défi.
On appelle *voisinage* dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ d'un élément ℓ comme une partie contenant au moins :
1. un intervalle centré $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, si ℓ est fini ;
2. une section finissante $[m, +\infty]$, où $m \in \mathbb{R}$, si $\ell = +\infty$;
3. une section commençante $[-\infty, M]$, où $M \in \mathbb{R}$, si $\ell = -\infty$.

Exem.
1. $]-10^{-2026}, 10^{-2026}[$; $[-10^{-2026}, 10^{-2026}]$; et $[-1, 1] \cup \{2026\}$ sont des *voisinages* de 0.
2. Les parties $[10^{2026}, +\infty]$ et $\{0\} \cup [10^{2026}, +\infty]$ sont deux voisinages de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Figu.



Défi.
On dit que $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ est une *limite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lorsque tout voisinage de ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang : pour tout voisinage arbitrairement petit de ℓ, on peut trouver un rang suffisamment grand à partir duquel le voisinage contient toute valeur de la suite.

Voca.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ : $(u_0, u_1, u_2, \dots) \to \ell$, ou encore que la suite admet pour limite ℓ. On dit que la grandeur u_n tend vers ℓ quand la grandeur entière n tend vers $+\infty$.

Ecriture symbolique
« ℓ est une limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » signifie :
- $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[, \quad \exists N_\varepsilon \in [\![0,+\infty[\![, \quad \forall n \in [\![N_\varepsilon,+\infty[\![, \quad u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$, si ℓ est finie ;
- $\forall m \in]-\infty,+\infty[, \quad \exists N_m \in [\![0,+\infty[\![, \quad \forall n \in [\![N_m,+\infty[\![, \quad u_n \in [m,+\infty]$, si $\ell = +\infty$;
- $\forall M \in]-\infty,+\infty[, \quad \exists N_M \in [\![0,+\infty[\![, \quad \forall n \in [\![N_M,+\infty[\![, \quad u_n \in [-\infty, M]$, si $\ell = -\infty$.

Rema. (Unification)
« La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$ » signifie

$$\begin{cases} \forall m \in \mathbb{R}, \quad m < \ell \implies (\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in [\![N,+\infty[\![, \quad m \leq u_n) \\ \forall M \in \mathbb{R}, \quad M > \ell \implies (\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in [\![N,+\infty[\![, \quad M \geq u_n) \end{cases}.$$

Prop. (Unicité de la limite)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \end{cases}$$

alors $\ell' = \ell$.

Nota.
Par conséquent, on écrit $\ell = \lim(u_0, u_1, \dots) = \lim(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Rema.
- $[0,+\infty[$ n'est pas un voisinage de 0.
- Il se peut que $M \leq \lim u_n$ pourtant il n'existe aucun rang à partir duquel $M \leq u_n$. Par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1-10^{-n})$ et $M = 1$.

Prop. (Passage à la limite dans les inégalités larges)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $m \in \mathbb{R}$. Si à partir d'un certain rang $u_n \geq m$ et que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors $\ell \geq m$.

Défi.
Une suite réelle est dite *convergente* lorsqu'elle admet une limite réelle (finie). Sinon, elle est dite *divergente*.

Prop.
Si une suite réelle est convergente, alors elle est bornée.

Prop. (Suites bornées)
L'ensemble des suites réelles bornées est stable par addition, par multiplication pour tout réel, et par multiplication interne.

Prop. (Suites de limites nulles)
L'ensemble des suites réelles de limite nulle est stable par addition, multiplication par un réel, multiplication par une suite bornée.