

## 15. PRATIQUE CALCULATOIRE 4 : PRIMITIVES ET INTÉGRALES

### 15.1. Primitives

**Défi.**

On considère un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  qui possède plus d'un point, puis une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle *primitive* de la fonction  $f$  toute fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  qui est dérivable et de fonction dérivée égale à  $f$ .

**Prop.**

Soit un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  qui possède plus d'un point. Ainsi, parmi les fonctions définies et dérivables sur l'intervalle  $I$ , les fonctions constantes sont celles de dérivées nulles.

*Dans la suite,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  qui possède plus d'un point.*

**Prop.**

Toute fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  admet des primitives.

**Prop.**

Si deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  sont dérivables et de dérivées égales, alors elles diffèrent d'une constante.

**Prop.**

Une primitive sur l'intervalle  $I$  étant donnée, on obtient toute primitive en lui ajoutant une certaine fonction constante.

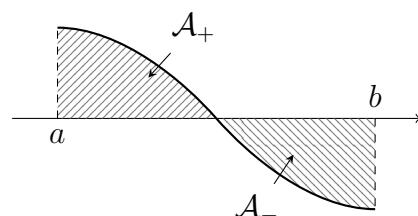
### 15.2. Primitives et somme intégrale

**Noti.**

On considère deux réels  $a < b$ ; puis  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On appelle *somme intégrale* de  $f$  sur le segment  $[a, b]$ , qu'on note  $\int_{x \in [a, b]} f(x)dx$  l'unique nombre réel qui associe l'aire « sous la courbe de  $f$  » à l'aire du rectangle unité défini par le repère.

**Figu.**

$$\int_{x \in [a, b]} f(x)dx = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-$$

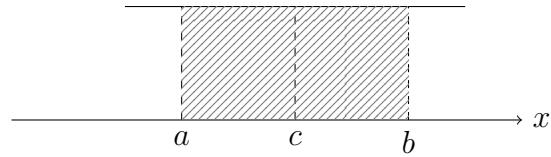


**Rema.**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  est constante, alors

$$\int_{x \in [a,b]} f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$$

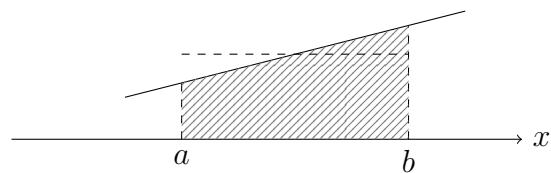
où  $c$  est arbitrairement choisi dans  $[a, b]$ .

**Rema.**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  est affine, alors

$$\int_{x \in [a,b]} f(x)dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)$$

$$2 \int_{x \in [a,b]} f(x)dx = (f(a) + f(b)) \cdot (b - a)$$

**Défi.**

On considère  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , puis  $x, y \in I$ . Ainsi, on appelle *somme intégrale*, depuis  $x$  jusqu'à  $y$ , de la fonction  $f$ , l'unique nombre réel

$$\int_{t=x}^y f(t)dt := F(y) - F(x) = [F(t)]_{t=x}^y$$

où  $F$  est une des primitives de  $f$  sur  $I$ , arbitrairement choisie. C'est que la somme intégrale depuis  $x$  jusqu'à  $y$  d'une fonction continue  $f$  est égale à la variation d'une primitive, arbitrairement choisie, depuis la borne inférieure  $x$  de la somme jusqu'à la borne supérieure  $y$ .

**Prop.** Théorème fondamental du calcul différentiel

Si  $f$  est continue, alors

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{x_0}^x f(t)dt \right) = f(x);$$

si  $f$  est continûment dérivable alors

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

### 15.3. Techniques de calcul

**Prop.** Relation de Chasles

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Soit  $x, y, z \in I$ . Ainsi

$$\int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt = \int_x^z f(t)dt.$$

**Rema.**

1. Si  $a < c < b$ ,  $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{[a,c]} f(t)dt + \int_{[c,b]} f(t)dt$ .
- 2.

$$\int_x^y f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ \int_{[x,y]} f(t)dt & \text{si } x < y \\ -\int_{[y,x]} f(t)dt & \text{si } y < x \end{cases}$$

**Prop.** (Linéarité de l'intégrale)

Soit  $u_1, u_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues, puis  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Ainsi,

1. La fonction  $C_1u_1 + C_2u_2$  est continue.
2. On a  $\forall x \in I, \forall y \in I$ ,

$$\int_x^y (C_1u_1(t) + C_2u_2(t))dt = C_1 \int_x^y u_1(t)dt + C_2 \int_x^y u_2(t)dt.$$

**Prop.** (Positivité et croissance de l'intégrale)

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soient  $a, b \in I$  tels que  $a < b$ .

1. Si  $f$  est à valeurs positives sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f(t)dt \in \mathbb{R}_+$  :

$$[\forall x \in [a, b], f(x) \in \mathbb{R}_+] \implies \left[ \int_{[a,b]} f(x)dx \in \mathbb{R}_+ \right].$$

2. On a

$$[\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)] \implies \left[ \int_{[a,b]} f(x)dx \leq \int_{[a,b]} g(x)dx \right].$$

**Prop.** (Primitivation « produit »)

Soit  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables. Ainsi,

$$\forall x \in I, u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$

**Prop.** (Intégration par parties)

Soit  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables. Ainsi, pour tout  $(x, y) \in I^2$ ,

$$\int_x^y u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_{t=x}^y - \int_x^y u'(t)v(t)dt.$$

**Prop.** (Primitivation « composée »)

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $G : J \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que  $\varphi(I) \subset J$ . Ainsi,  $\forall x \in I$ ,  $G'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(G(\varphi(x)))$ . Par conséquent, on a la formule d'intégration par changement de variable :

$$\forall x \in I, \forall y \in J, \int_x^y G'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} G'(s)ds$$

(«  $s = \varphi(t)$  et  $\frac{ds}{dt} = \varphi'(t)$ , donc  $ds = \varphi'(t)dt$  »).

## 15.4. Somme intégrale et invariance

**Prop.**

Soit un réel  $a > 0$ , puis une fonction  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  qui est continue.

1. Si  $f$  est paire, alors

$$\int_{[-a,0]} f(x) dx = \int_{[0,a]} f(x) dx ;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x) dx = 2 \int_{[0,a]} f(x) dx .$$

2. Si  $f$  est impaire alors

$$-\int_{[0,a]} f(x) dx = \int_{[-a,0]} f(x) dx;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x) dx = 0.$$

**Prop.**

Soit  $T \in ]0, +\infty[$ , puis une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue. Si  $f$  est  $T$ -périodique, alors pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt.$$

## 15.5. Fonctions particulières

Ci-après, pour tout intervalle  $I$  de l'ensemble  $D$ , la fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ , est une primitive de la fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $C \in \mathbb{R}$ .

$D$	$\forall x \in I, F(x) =$	$\forall x \in I, f(x) =$
$\mathbb{R}$	$C$	$0$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$x^n, n \in \mathbb{N}$
$] -\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$	$\frac{1}{s+1}x^{s+1} + C$	$x^s, s \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$] -\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$	$\ln( x ) + C$	$\frac{1}{x}$
$]0, +\infty[$	$\frac{1}{d+1}x^{d+1} + C$	$x^d, d \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\mathbb{R}$	$\exp(x) + C$	$\exp(x)$

$]0, +\infty[$	$x \ln(x) - x + C$	$\ln(x)$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh}(x) + C$	$\operatorname{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch}(x) + C$	$\operatorname{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x) + C$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$-\cos(x) + C$	$\sin(x)$
$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$-\ln  \cos x  + C$	$\tan(x)$

### Méth.

On demande les primitives de  $\operatorname{Arctan}(x)$ . Soit une variable dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arctan}(x) &= 1 \cdot \operatorname{Arctan}(x) \\
 &= \frac{d}{dx}(x) \cdot \operatorname{Arctan}(x) \\
 &= \frac{d}{dx}(x) \cdot \operatorname{Arctan}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{Arctan}(x)) - x \frac{d}{dx}(\operatorname{Arctan}(x)) \\
 &= \frac{d}{dx}(x \operatorname{Arctan}(x)) - \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} \\
 &= \frac{d}{dx}(x \operatorname{Arctan}(x)) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(\ln(1+x^2)) \\
 &= \frac{d}{dx} \left( x \operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right)
 \end{aligned}$$