20 Fondements 7 : entiers naturels et dénombrement

20.1 Ensemble fini

Noti.
On dit qu'un ensemble non vide est *fini* lorsqu'on peut ranger ses éléments d'un premier à un dernier.

Défi.
Un ensemble E non vide est dit *fini* si, et seulement si, on peut trouver au moins un entier naturel n non nul tel que les ensembles E et $[\![1, n]\!]$ soient en bijection.

Exem.
Soit $m, n \in \mathbb{Z}$.
1. Si $n - m \geqslant 2$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\} &\longrightarrow [\![1, n-1-m]\!] \\ x &\longmapsto r = x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$[\![1, n-1-m]\!] \longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\}$$

$$r \longmapsto m + r.$$

2. Idem, si $n - m \geqslant 0$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant x \leqslant n\} &\longrightarrow [\![1, 1+n-m]\!] \\ x &\longmapsto r = 1 + x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$[\![1, 1+n-m]\!] \longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant x \leqslant n\}$$

$$r \longmapsto n - 1 + r.$$

Noti. (Principe des tiroirs)
Si on range $n+1$ cailloux dans n boîtes, alors une des boîtes contiendra plus d'un caillou. La négation serait absurde.

Prop. (Principe des tiroirs)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute fonction de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est non injective.

Prop. (Unicité du cardinal)
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. S'il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$, alors $n = p$, et réciproquement.

20.2 Cardinal d'un ensemble fini

Défi.
Le *cardinal* d'un ensemble fini E non vide est l'unique entier naturel n non nul tel que E est en bijection avec $[\![1, n]\!]$.

Noti.
Le cardinal de E est le nombre de ses éléments.

Nota.
On le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.

Rema.
$\mathrm{Card}(\varnothing) \coloneqq 0$.

Prop.
Si un ensemble fini est en bijection avec un second ensemble, alors le second est fini et de même cardinal.

Prop.
Si les cardinaux des parties finies d'un ensemble sont tous majorés par un même entier naturel, alors l'ensemble est fini et de cardinal majoré par cet entier.

Prop.
Les ensembles infinis sont ceux dont les cardinaux des parties finies ne sont pas majorés.

Prop.
Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini de cardinal inférieur, et s'il y a égalité des deux cardinaux, alors la partie est égale à l'ensemble tout entier.

Prop.
Les parties finies des entiers naturels sont les parties majorées.

Rema.
Les parties finies des entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont les parties bornées.

20.3 Fonctions et ensembles finis

Prop.
Si une fonction arrivant dans un ensemble fini est injective, alors son ensemble de départ est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui d'arrivée.

Prop.
Si une fonction partant d'un ensemble fini est surjective, alors son ensemble d'arrivée est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui de départ.

Rema.
C'est-à-dire que si $f : E \to F$ est surjective avec E fini, alors F est fini et $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.

Prop.
Pour qu'une fonction entre deux ensembles de même cardinal soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

Rema.
Par analogie, étant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pour que la fonction linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

20.4 Parties finies d'un même ensemble

Prop. (Réunion finie de parties finies disjointes)
1. Si A et B sont deux parties finies et disjointes de E, alors $A \sqcup B$ est finie et

$$\mathrm{Card}(A \sqcup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

2. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ puis des parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjointes deux à deux. Alors

$$\mathrm{Card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i).$$

Prop. (Lemme des bergers ou partition égalitaire)
Un ensemble fini à n éléments étant mis en parties disjointes de même cardinal n', le nombre n' d'éléments par partie, multiplié par le nombre p de parties, produit le nombre n d'éléments de l'ensemble tout entier :

$$n' \times p = n.$$

Prop. (Correspondance « p à 1 »)
Soit deux ensembles non vides E et F, puis $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Supposons
- E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$;
- tout élément de $f(E)$ admet exactement n' antécédents.

Ainsi,
- $f(E)$ est fini de cardinal $p \in \mathbb{N}$;
- $n' \times p = n$.

Prop.
Soit un ensemble fini E, puis $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors $\bar{A} \in \mathcal{P}(E)$ et

$$\mathrm{Card}(\bar{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

Prop.
Si $A \in \mathcal{P}(E)$ est finie et $B \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \setminus B \in \mathcal{P}_f(E)$ (ensemble des parties finies) et

$$\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Prop.
Si $A, B \in \mathcal{P}_f(E)$, alors $A \cup B \in \mathcal{P}_f(E)$ et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Prop.
Si $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathcal{P}_f(E)$ alors $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \in \mathcal{P}_f(E)$ et

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \leqslant \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \cdots + \mathrm{Card}(A_p).$$

Il y a égalité si, et seulement si, les A_k sont disjointes deux à deux.

Rema.
1. $A_1 \cup A_2 = B_1 \sqcup B_2$ où $B_1 = A_1 \subset A_1$ et $B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2 \subset A_2$.
2. $A_1 \cup \cdots \cup A_p = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_p$ où $B_1 = A_1, \quad B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2, \quad B_3 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3, \quad \dots, \quad B_p = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{p-1}} \cap A_p$.

20.5 Opérations externes sur les ensembles finis

Prop.
1. Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

2. Plus généralement, si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont p ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est fini et

$$\mathrm{Card}\left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \cdots \times \mathrm{Card}(E_p).$$

Prop.
Soit deux ensembles non vides E et F. Si E et F sont finis alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Rema.
On note aussi $\mathcal{F}(E, F) = F^E$, ce qui donne

$$\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Prop. (Ensemble des parties)
Si E est fini, alors l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Rema.
$\mathcal{P}(E) \simeq \{0,1\}^E$ où $\{0,1\}^E$ est constitué des familles $(x_e)_{e\in E}$ d'éléments de $\{0,1\}$ indexées par E.

20.6 Formules combinatoires

Nota.
- $\mathcal{P}(n)$ désigne les parties de $[\![1,n]\!]$.
- $\mathcal{P}_p(n)$ désigne les parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p.

Exem.
$\{2;7\} \in \mathcal{P}_2(9)$.

Prop.
Soit $n \in [\![0,+\infty[\![$, puis $p \in [\![0,n]\!]$. Ainsi,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{n-p}(n)).$$

(cf. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$)

Prop.
Si $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n-1)) + \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1)).$$

(cf. $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$)

Prop.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(n)) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n)).$$

Prop. (Formule du chef)
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. On a

$$p \cdot \mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1)) \cdot n.$$

Démo.
On considère n personnes auxquelles on assigne des numéros respectifs de 1 à n. On veut dénombrer les groupes possibles de p personnes comportant un chef.

Première manière :

- On choisit simultanément p personnes parmi ces n personnes : il y a $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n))$ choix possibles.
- Puis on choisit un chef parmi les p personnes ci-avant : il y a p choix possibles.

Ainsi, il y a $p \times \mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n))$ groupes possibles.

Seconde manière :
- On choisit une personne parmi les n personnes que l'on nomme chef : il y a n choix possibles.
- Puis on choisit simultanément les $p-1$ personnes restantes parmi les $n-1$ restants (ce sont les suiveurs du chef) : il y a $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1))$ choix possibles.

Ainsi, on trouve $n \times \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1))$ groupes possibles.

L'égalité des deux dénombrements fournit le résultat attendu.

20.7 Listes d'éléments d'un ensemble fini

Prop. (Liste de p éléments parmi n)
Le nombre n^p est égal :
- au nombre de façons de choisir, successivement à p reprises ou en p fois et avec remise, un élément parmi n ;
- au nombre de fonctions d'un ensemble de p éléments vers un ensemble de n éléments.

Prop. (Listes de p éléments distincts pris parmi n)
Le nombre $n(n-1)\cdots(n-(p-1))$ est égal :
- au nombre de façons de choisir successivement à p reprises, ou en p fois, et sans remise, un élément parmi n ;
- au nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Rema.
Si $p = n$, ce nombre correspond au nombre de façons d'ordonner ou de permuter n éléments distincts.

Prop. (Listes croissantes de p éléments distincts pris parmi n)
Le nombre $\binom{n}{p}$ est égal :
- au nombre de façons de choisir simultanément, ou en une seule fois, p éléments parmi n (sans égard à leur ordre) ;
- au nombre de parties de p éléments d'un ensemble de cardinal n.