21 Droite réelle et suites numériques 1

21.1 Droite réelle achevée totalement ordonnée

Noti.
Les ensembles de nombres usuels sont supposés connus et maîtrisés, ils respectent la chaîne d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

À titre d'exemple,
- $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
- $1/10 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$;
- $1/3 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Prop.
Toute suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de la droite réelle peut être rangée par ordre croissant (respectivement décroissant) : il existe une unique suite $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ qui est croissante (respectivement décroissante) et qui partage les mêmes éléments, en tenant compte de leurs occurrences.

Noti.
On appelle *distance* entre deux réels a et b le réel positif

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a-b \geq 0 \\ b-a & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut également écrire $|a-b| = \max(a,b) - \min(a,b)$.

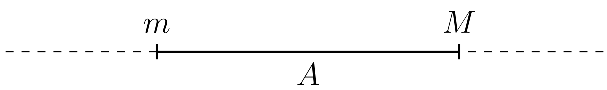
Défi.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- On dit qu'un réel M est un *majorant* de A si

$$\forall a \in A, \quad a \leq M.$$

- On dit qu'un réel m est un *minorant* de A si

$$\forall a \in A, \quad a \geq m.$$

Figu.



Défi.
Soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un réel M est un *majorant* de f s'il est un majorant de l'ensemble de ses valeurs $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$. Autrement dit,

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leq M.$$

De même, un réel m est un *minorant* de f si : $\forall x \in E, \quad f(x) \geq m$.

Exem.
- La fonction cos admet 1 pour majorant ; elles majorée par 1.
- La fonction réelle ln n'est pas majorée.

Rema.
Si M est un majorant d'une partie A, alors tout réel $M' \geq M$ est également un majorant de A. Cette propriété est analogue pour les minorants.

Défi.
On dit qu'un réel a^+ est le *maximum* d'une partie A non vide de $\mathbb{R}$ pour dire que

$$\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq a^+ \\ a^+ \in A. \end{cases}$$

Défi.
On adapte pour le *minimum*.

Défi.
On adapte pour la partie de $\mathbb{R}$ que constitues les valeurs d'une fonction.

Nota.

$$\max(A) \ ; \qquad \max\{f(x) : x \in I\} \ ; \qquad \max_{x \in I} f(x) \ ; \qquad \max_I f.$$

Exem.
Le nombre 2026 est un majorant de $[0, 2026[$ qui n'est pas un maximum, et 0 est le minimum de l'ensemble.

Défi. (Borne supérieure)
On dit qu'un réel M^- est la *borne supérieure* d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ si M^- est le plus petit des majorants de A :
- $\forall a \in A, \quad a \leq M^-$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad (\forall a \in A, a \leq \mu) \implies \mu \geq M^-$.