

## 9. FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE 1 : ÉTUDE GLOBALE

### 9.1. Généralités

#### Noti.

On appelle *fonction* d'une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  toute relation qui fait passer de tout nombre  $x$  de  $D$  à un unique nombre  $y$  de  $\mathbb{R}$ ; auquel cas, on note  $y = f(x)$  si la fonction est appelée  $f$ .

Lorsque l'ensemble de départ n'est pas précisé, on appelle *ensemble de définition* de  $f$  l'ensemble des valeurs de la variable  $x$  dans  $\mathbb{R}$  pour lesquelles  $f(x)$  existe.

#### Défi.

On considère une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  où  $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . On dit que  $f$  est :

- a) *constante* quand :  $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) = c$ ;
- b) *croissante* quand :  $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$ ;
- c) *strictement croissante* quand :  $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ ;
- d) *décroissante* quand :  $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$ ;
- e) *strictement décroissante* quand :  $\forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ .

#### Défi.

On dit qu'une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est *monotone* quand  $f$  est croissante ou  $f$  est décroissante. On adapte pour la monotonie stricte.

#### Prop. (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit un intervalle  $I$ , une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , puis  $v \in \mathbb{R}$ . Si  $v$  est compris entre deux valeurs de  $f$ , alors  $v$  est aussi une valeur de  $f$ .

#### Prop. (Théorème de la bijection continue)

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ; puis  $f : I \rightarrow J$ . Supposons que :

- ET  $f$  est continue;
- ET  $f$  est strictement monotone;
- ET la limite de  $f$  en l'extrémité inf. de  $I$  est égale à l'extrémité inf. de  $J$ ; de même avec les extr. sup. (ou inversement selon la monotonie).

Ainsi,  $f : I \rightarrow J, x \mapsto y = f(x)$  admet une réciproque  $g : J \rightarrow I, y \mapsto x \in I$  telle que  $f(x) = y$ .

#### Prop.

Si l'on connaît la représentation graphique de  $f : x \mapsto f(x)$ , on peut obtenir celles de certaines fonctions transformées de la manière suivante :

- La représentation graphique de  $x \mapsto f(x - a)$  se déduit de celle de  $f$  par une translation horizontale de vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- La représentation graphique de  $x \mapsto f(x) + b$  se déduit de celle de  $f$  par une translation verticale de vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ .
- La représentation de  $x \mapsto f(2a - x)$  se déduit de celle de  $f$  par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation  $x = a$ .

- La représentation de  $x \mapsto 2b - f(x)$  se déduit de celle de  $f$  par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation  $y = b$ .
- La représentation de  $x \mapsto f(\lambda^{-1}x)$ , avec  $\lambda > 0$ , se déduit de celle de  $f$  par une dilatation de centre  $O$  et de rapport  $\lambda$  dans la direction horizontale.
- La représentation de  $x \mapsto \mu f(x)$ , avec  $\mu > 0$ , se déduit de celle de  $f$  par une dilatation de rapport  $\mu$  dans la direction verticale.
- La représentation graphique de la fonction réciproque  $f^{-1}$  se déduit de celle de  $f$  par une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant, c'est-à-dire la droite  $y = x$ .

#### Défi.

On appelle (droite) *asymptote horizontale* de la courbe de  $f$  toute droite d'équation  $y = C$  où  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = C$ .

#### Défi.

On appelle (droite) *asymptote verticale* toute droite d'équation  $x = C$  telle que  $\lim_{x \rightarrow C} f = \pm\infty$ .

#### Défi.

On considère  $D \subset \mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *paire* quand :

- ET  $\forall x \in D, -x \in D$
- ET  $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$ .

#### Défi.

On dit que  $f$  est *impaire* quand :

- ET  $\forall x \in D, -x \in D$
- ET  $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$ .

#### Défi.

On considère  $T \in ]0, +\infty[$ . On dit que  $f$  est *T-périodique* ou que  $f$  admet  $T$  pour *période* quand :

- ET  $\forall x \in D, x + T \in D$
- ET  $\forall x \in D, f(x) = f(x + T)$

On parle de *la* période pour désigner la plus petite quand elle existe.

#### Défi.

Une *fonction périodique* est une fonction qui admet au moins une période ( $T > 0$ ).

#### Défi.

On dit que  $f$  est :

- *majorée* par une constante  $M \in \mathbb{R}$  quand  $\forall x \in D, f(x) \leq M$  ;
- *minorée* par une constante  $m \in \mathbb{R}$  quand  $\forall x \in D, f(x) \geq m$  ;
- *bornée* par deux constantes  $m \leq M$  quand  $\forall x \in D, m \leq f(x) \leq M$ .

#### Prop.

La fonction réelle  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$  est bornée si, et seulement si, la fonction réelle positive  $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)|$  est majorée par une constante.

**Défi.**

On dit que  $m \in \mathbb{R}$  est un *minimum global* de  $f$  quand :

- ET  $\forall x \in D, f(x) \geq m$
- ET  $\exists x_0 \in D, f(x_0) = m$

On parle de *minimum local* en un point  $x_*$  quand on se restreint autour de  $x_*$ .

Adaptation pour un maximum.

**Défi.**

On parle d'*extremum* pour tout minimum ou tout maximum.

## 9.2. Dérivation et représentation graphique

**Prop.**

Soit un intervalle  $I$  de plus d'un point, puis  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ . Ainsi :

1.  $f$  est constante ssi  $f'$  est nulle.
2.  $f$  est croissante ssi  $f'$  est positive.
3.  $f$  est strictement croissante ssi :
  - ET  $f'$  est positive ;
  - ET l'ensemble des points d'annulation de  $f'$  ne contient pas d'intervalle de plus d'un point.

On adapte pour la décroissance.

**Défi.**

On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est *deux fois dérivable* quand  $f$  est dérivable et que  $f'$  est dérivable ; auquel cas, on note  $f'' = (f')' : \text{dérivée seconde de } f$ .

**Prop.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable et  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un r.o.n.  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Si  $f''$  est positive, alors  $\mathcal{C}$  est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si  $f''$  est négative, alors  $\mathcal{C}$  est en-dessous de chacune de ses tangentes.

## 9.3. Fonctions réelles de référence

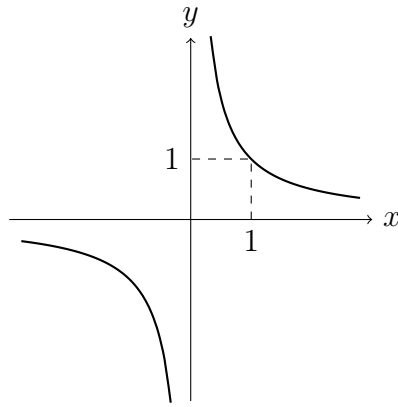
*Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.*

FONCTIONS CONSTANTES

FONCTIONS AFFINES

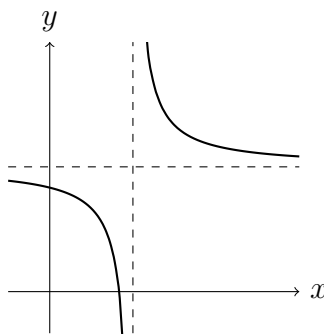
FONCTION INVERSE

**Figu.**



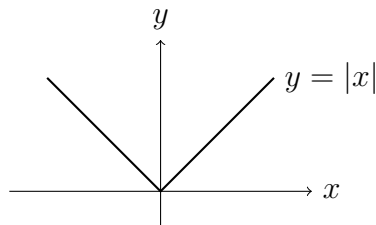
## QUOTIENTS DE FONCTIONS AFFINES

**Figu.**



## FONCTION VALEUR ABSOLUE

**Figu.**

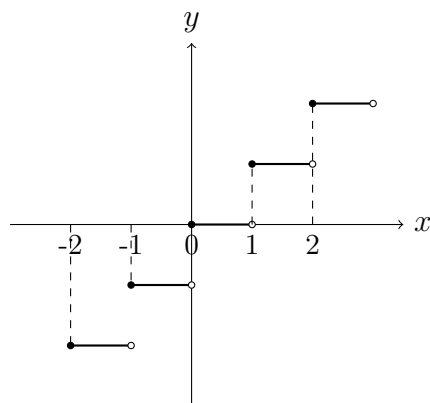


## FONCTION PARTIE ENTIÈRE

**Noti.**

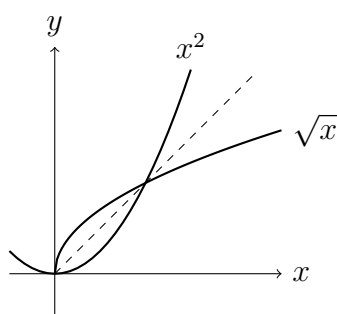
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$ , où  $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ .

**Figu.**



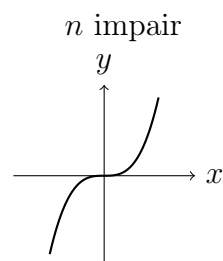
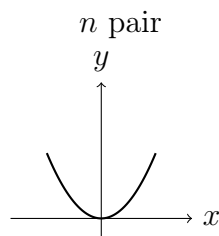
## FONCTIONS CARRÉ ET RACINE CARRÉE

**Fig.**



## PUISSANCE N-IÈME

**Fig.**

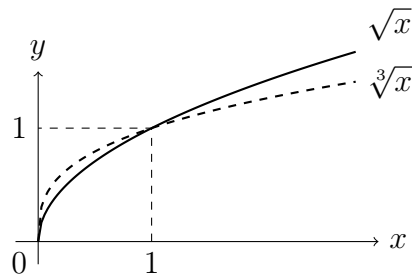


## RACINES N-IÈMES

**Défi.**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on appelle *racine n-ième* de  $x \geq 0$ , notée  $\sqrt[n]{x}$ , l'unique réel positif dont la puissance  $n$ -ième vaut  $x$ .

**Fig.**



## FONCTIONS POLYNOMIALES ET RATIONNELLES

### Défi.

On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire de fonctions puissances entières.

### Défi.

Une *fonction rationnelle* est le quotient de deux fonctions polynomiales.

## FONCTIONS EXPONENTIELLES ET RÉCIPROQUES

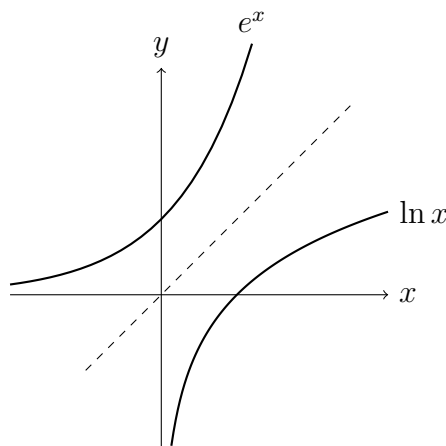
### Défi.

$\exp$  est l'unique fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , égale à sa dérivée et valant 1 en 0.

### Défi.

Le *logarithme népérien*  $\ln$  est défini sur  $]0, +\infty[$  comme la bijection réciproque de l'exponentielle. C'est que  $\ln(y)$  est l'unique réel dont l'image par l'exponentielle donne  $y$ .

### Figu.



### Défi.

On considère  $b \in ]0, +\infty[$ .

- Pour tout  $x \in ]-\infty, +\infty[$ , l'*exponentielle en base b* de  $x$  est

$$b^x \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(x \ln b).$$

- Le *logarithme en base b* de tout  $y \in ]0, +\infty[$  lorsque  $b \neq 1$  est

$$\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}.$$

**Rema.**

Les fonctions  $\exp_b$  et  $\log_b$  sont réciproques l'une de l'autre.

FONCTION PUISSANCE RÉELLE DE DEGRÉ  $d$ **Défi.**

Pour  $d \in \mathbb{R}$  et  $x > 0$ , la puissance de degré  $d$  est définie par

$$x^d = \exp(d \ln x).$$

**Prop.** (Prolongement en 0)

- Si  $d > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^d = 0$ .
- Si  $d < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^d = +\infty$ .

**Prop.** (Croissances comparées)

Soit  $\alpha, \beta, \gamma \in ]0, +\infty[$ .

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

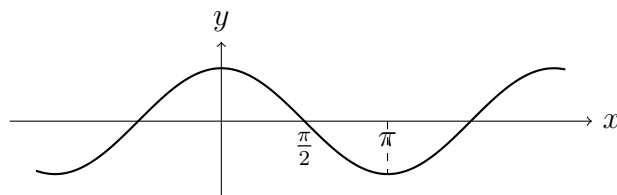
$$e^{\alpha y} |y|^\beta \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$$

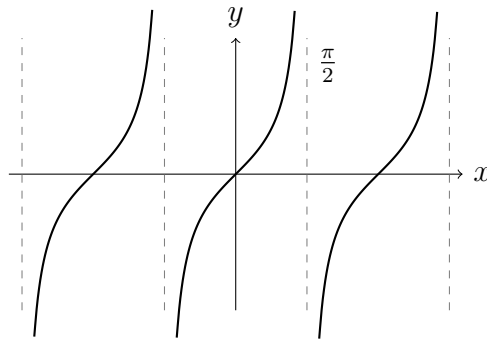
$$y^\beta |\ln y|^\gamma \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 0$$

## FONCTIONS CIRCULAIRES ET RÉCIPROQUES

**Méth.**

La construction de la courbe complète de  $\cos$  se fait par symétries successives (centrale puis axiale) à partir du segment  $[0, \pi/2]$ , puis par translations (périodicité).

**Figu.****Figu.** (Tangente)



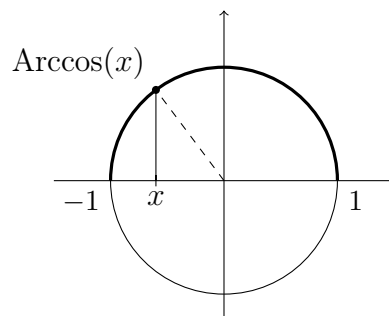
**Défi.**

$\forall x \in [-1, 1]$ , on appelle *arccosinus* de  $x$ , noté  $\text{Arccos}(x)$ , l'unique réel de  $[0, \pi]$  dont le cosinus est égal à  $x$ .

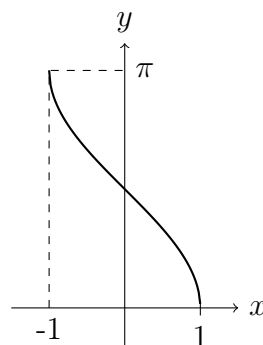
$$\begin{cases} \text{Arccos}(x) \in [0, \pi] \\ \cos(\text{Arccos } x) = x \end{cases}$$

(Attention aux deux "c"!)

**Figu.**



**Figu.**



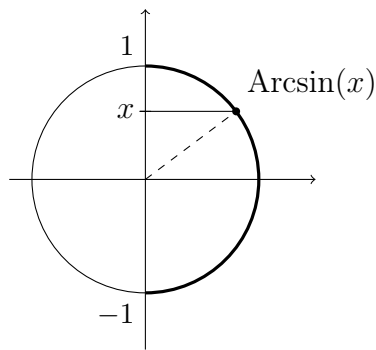
**Défi.**

$\forall x \in [-1, 1]$ , on appelle *arcsinus* de  $x$ , noté  $\text{Arcsin}(x)$ , l'unique réel de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dont le sinus est égal à  $x$ .

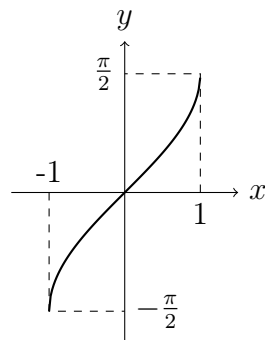
$$\begin{cases} \text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(\text{Arcsin } x) = x \end{cases}$$

**Figu.**





**Figu.**

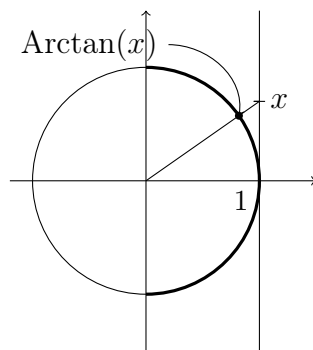


**Défi.**

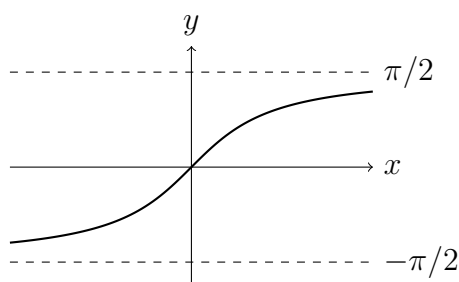
Pour tout  $x$  de  $]-\infty, +\infty[$ , on appelle *arctangente* de  $x$ , noté  $\text{Arctan}(x)$ , l'unique réel de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dont la tangente est égale à  $x$ .

$$\begin{cases} \text{Arctan}(x) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ \tan(\text{Arctan } x) = x \end{cases}$$

**Figu.**



**Figu.**



**Défi.**

Pour tout réel  $x$ , on appelle cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique les nombres réels :

$$\operatorname{ch}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sh}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

**Prop.**

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(iz) = \cos(z) \\ \operatorname{sh}(iz) = i \sin(z) \end{cases}$$

**Prop.**

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x) \\ \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x) \end{cases}$$

**Prop.**

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

**Prop.**

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x \\ \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x} \end{cases}$$

**Figu.**