

## 8 FONDEMENTS 3 : MODES DE RAISONNEMENTS

### 8.1 Raisonnement par disjonction de cas

**Exem. 1.1**

Montrons que pour tout entier naturel  $n$ , l'entier  $n(n + 1)$  est divisible par 2.  
En effet, raisonnons par disjonction de cas. Soit  $n \in \mathbb{N}$  quelconque.

Cas 1 : Supposons que  $n$  est pair.

Il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $n = 2k$ . Alors  $n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 2k'$  avec  $k' = k(2k + 1) \in \mathbb{Z}$ .  
Donc  $n(n + 1)$  est pair dans ce cas.

Cas 2 : Supposons que  $n$  est impair.

Il existe  $l \in \mathbb{Z}$  tel que  $n = 2l + 1$ . Alors  $n(n + 1) = (2l + 1)(2l + 2) = 2(2l + 1)(l + 1) = 2l'$  avec  $l' = (2l + 1)(l + 1) \in \mathbb{Z}$ . Donc  $n(n + 1)$  est pair dans ce cas également.

Bilan : En somme,  $n(n + 1)$  est pair dans tous les cas.

**Exem. 1.2**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . Montrons que  $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ .  
En effet, raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1 :  $x \in A \cap B$ . Alors  $x \in A$  et  $x \in B$ .  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$  et  $\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$ . L'égalité est vérifiée.

Cas 2 :  $x \in A$  et  $x \notin B$ .  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$  car  $x \notin A \cap B$ .  $\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x) = 1 \times 0 = 0$ . L'égalité est vérifiée.

Cas 3 :  $x \notin A$  et  $x \in B$ .  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$  et  $\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x) = 0 \times 1 = 0$ .

Cas 4 :  $x \notin A$  et  $x \notin B$ .  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$  et  $\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x) = 0 \times 0 = 0$ .

Bilan : Dans tous les cas,  $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ .

### 8.2 Raisonnement par (l'implication) contraposée

**Noti.**

Le raisonnement par contraposée s'appuie sur l'équivalence logique

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P).$$

Pour démontrer  $P \implies Q$ , on peut choisir de démontrer que si  $Q$  est fausse, alors  $P$  est fausse.

**Exem. 2.1**

Montrons que :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \neq 0 \implies (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$ .

Raisonnons par contraposée.

Supposons  $\neg(a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$ , c'est-à-dire  $(a = 0 \text{ ou } b = 0)$ . Alors  $ab = 0$ .

La contraposée est démontrée. L'objectif est atteint.

**Exem. 2.2**

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Montrons que si  $ab$  est pair, alors  $a$  est pair ou  $b$  est pair.

Raisonnons par contraposée.

Supposons que  $\neg(a$  pair ou  $b$  pair), c'est-à-dire que  $a$  est impair ET  $b$  est impair. Alors il existe  $k, l \in \mathbb{Z}$  tels que  $a = 2k + 1$  et  $b = 2l + 1$ .

$$ab = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1.$$

Donc  $ab$  est impair. La propriété est démontrée.

### Exem. 2.3

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q}$ .

Raisonnons par contraposée.

Supposons  $1 + x \in \mathbb{Q}$ . Alors  $x = (1 + x) - 1$ . Comme  $\mathbb{Q}$  est stable par soustraction (différence de deux rationnels),  $x \in \mathbb{Q}$ . On a montré  $1 + x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{Q}$ , ce qui conclut la preuve.

## 8.3 Raisonnement par l'absurde

### Noti.

Pour démontrer une proposition  $P$ , on suppose  $\neg P$  (la négation de  $P$ ) et on cherche à aboutir à une contradiction (absurdité).

### Exem. 3.1

Montrons que  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Par l'absurde, supposons que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Ainsi, il existe  $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tels que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  et la fraction est irréductible ( $\text{PGCD}(a, b) = 1$ ).

En élevant au carré :  $2 = \frac{a^2}{b^2} \implies a^2 = 2b^2$ . Donc  $a^2$  est pair, ce qui implique que  $a$  est pair. On écrit  $a = 2a'$  avec  $a' \in \mathbb{N}^*$ .

L'équation devient :  $(2a')^2 = 2b^2 \implies 4a'^2 = 2b^2 \implies 2a'^2 = b^2$ . Donc  $b^2$  est pair, ce qui implique que  $b$  est pair.

Ainsi  $a$  et  $b$  sont tous deux pairs, donc la fraction  $\frac{a}{b}$  n'est pas irréductible (simplifiable par 2). C'est absurde par rapport à l'hypothèse de départ. Donc  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

### Exem. 3.2

Montrons que les complexes 1 et  $i$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Supposons  $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$ .

Supposons par l'absurde que  $b \neq 0$ . Alors  $i = -\frac{a}{b}$ . Or  $a, b \in \mathbb{R}$ , donc  $-\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ . Cela signifierait que  $i \in \mathbb{R}$ , or  $i^2 = -1$  (impossible pour un réel). Absurde. Donc  $b = 0$ .

Puis  $a + 0 \cdot i = 0 \implies a = 0$ . On a montré que  $a = 0$  et  $b = 0$ .

## 8.4 Raisonnement par analyse et synthèse

### Voca.

- On dit qu'une proposition  $N$  est une *condition nécessaire* à une proposition  $P$  quand  $P \implies N$ .
- On dit qu'une proposition  $S$  est une *condition suffisante* à  $P$  quand  $S \implies P$ .
- On parle de condition nécessaire et suffisante lorsque  $P \iff S$ .

### Stru.

Le raisonnement par analyse-synthèse sert souvent à déterminer l'ensemble des solutions d'un

problème ou à prouver l'existence et l'unicité.

1. Analyse (Unicité / Condition Nécessaire) : On suppose que le problème admet une solution  $x$ . On déduit des propriétés sur  $x$  pour réduire le champ des possibles (trouver des candidats).

Solution  $\implies$  Candidat

2. Synthèse (Existence / Condition Suffisante) : On vérifie si les candidats trouvés sont effectivement solutions.

Candidat  $\implies$  Solution

### **Exem. 4.1**

On cherche l'ensemble des réels  $x$  tels que  $x^2 = 1$ .

Analyse : Soit  $x \in \mathbb{R}$  une solution.  $x^2 = 1 \implies x^2 - 1 = 0 \implies (x-1)(x+1) = 0$ . Donc  $x = 1$  ou  $x = -1$ . Les seuls candidats possibles sont 1 et -1.

Synthèse :

- Si  $x = 1$ , alors  $x^2 = 1^2 = 1$ . Ça marche.
- Si  $x = -1$ , alors  $x^2 = (-1)^2 = 1$ . Ça marche.

Conclusion : L'ensemble des solutions est  $S = \{-1, 1\}$ .

### **Exem. 4.2**

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$  tel que  $z = sr$ .

Analyse : Supposons qu'un tel couple existe. On a  $z = sr$ . En passant au module :  $|z| = |sr| = |s||r|$ . Comme  $s \in \mathbb{U}$ ,  $|s| = 1$ . Comme  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $|r| = r$ . Donc  $r = |z|$ . L'égalité  $z = sr$  devient  $z = s|z|$ , d'où  $s = \frac{z}{|z|}$  (possible car  $z \neq 0$ ). Le seul couple candidat est  $(s, r) = \left(\frac{z}{|z|}, |z|\right)$ .

Synthèse : Posons  $r_0 = |z|$  et  $s_0 = \frac{z}{|z|}$ . On a bien  $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ . Vérifions que  $s_0 \in \mathbb{U}$  :  $|s_0| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$ . Enfin,  $s_0 r_0 = \frac{z}{|z|} \times |z| = z$ . Le couple convient.

### **Exem. 4.3**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions  $(s, a)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} f = s + a \\ s \text{ est paire} \\ a \text{ est impaire} \end{cases}$$

En effet, raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons que le couple  $(s, a)$  existe. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} s(x) + a(x) = f(x) \\ s(-x) + a(-x) = f(-x) \end{cases}$$

Comme  $s$  est paire,  $s(-x) = s(x)$ . Comme  $a$  est impaire,  $a(-x) = -a(x)$ . Le système devient :

$$\begin{cases} s(x) + a(x) = f(x) & (L_1) \\ s(x) - a(x) = f(-x) & (L_2) \end{cases}$$

En faisant  $(L_1) + (L_2)$ , on obtient  $2s(x) = f(x) + f(-x)$ , soit  $s(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ . En faisant  $(L_1) - (L_2)$ , on obtient  $2a(x) = f(x) - f(-x)$ , soit  $a(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ .

Synthèse : Posons les fonctions  $s_0 : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$  et  $a_0 : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ .

- Somme :  $s_0(x) + a_0(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$ .
- Parité de  $s_0$  :  $s_0(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = s_0(x)$ . Donc  $s_0$  est paire.
- Parité de  $a_0$  :  $a_0(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -a_0(x)$ . Donc  $a_0$  est impaire.

Conclusion : Le couple existe et est unique.