10. Plan Complexe 3 : Équations Polynomiales

10.1 Équation polynomiale dans $\mathbb{C}$

Noti.
Une *équation polynomiale*, dite aussi *algébrique*, est une équation qui met en jeu des fonctions polynomiales. En voici un exemple : $2z^2 - z + i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Toute solution d'une équation algébrique est appelée *racine* de cette équation. C'est aussi une racine, ou un zéro, de la fonction polynomiale associée.

Prop.
Soit $a, z \in \mathbb{C}$. Ainsi,
- $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$;
- $z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + za + a^2)$.

Prop.
Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$. Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) - P(a) = (z-a)Q(z)$$

Prop. (Corollaire fondamental)
Si a est une racine de P (c'est-à-dire $P(a) = 0$), alors on peut factoriser $P(z)$ par $(z-a)$:

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

Prop.
Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k z^k$ une fonction polynomiale. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{C_k}(\overline{z})^k$$

En particulier, si tous les coefficients C_k sont réels (i.e. P est à coefficients réels), alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{P(z)} = P(\overline{z})$$

Prop.
Si un nombre complexe est racine d'une fonction polynomiale à **coefficients réels**, alors son conjugué l'est aussi.

$$(P \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad P(z) = 0) \implies P(\overline{z}) = 0$$

10.2 Racines carrées d'un complexe

Défi.
Soit $a \in \mathbb{C}$. Les racines carrées complexes de a sont les solutions (inconnue $z \in \mathbb{C}$) de l'équation algébrique :

$$z^2 = a$$