05. Oscillateurs libres et forcés

Document en cours de production.

1. Oscillateurs Harmoniques

Approche expérimentale : oscillateurs mécaniques

Définition de l'oscillateur harmonique

Le système masse-ressort horizontal

Oscillateur harmonique vertical

Pendule simple

Oscillateur harmonique électrique LC

Analogie entre oscillateurs électriques et mécaniques

2. Oscillateurs Amortis

Équations différentielles de l'oscillateur amorti

Méthode pour résoudre l'équation différentielle amortie

Décrément logarithmique

Oscillateur électrique RLC série

Oscillateur mécanique amorti vertical

Étude énergétique de l'oscillateur amorti

3. Systèmes linéaires en régime sinusoïdal forcé

Représentation complexe

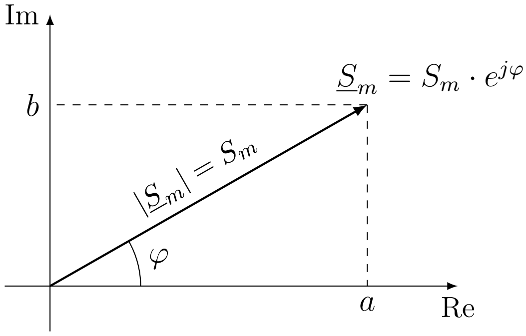
– En sciences physiques, il est d'usage d'écrire j au lieu de i et par convention, les grandeurs complexes sont toujours soulignées.

– On associe à $s(t) = S_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ la grandeur complexe

$$\underline{s}(t) = S_m \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{S}_m \cdot e^{j\omega t}$$

avec l'amplitude complexe $\underline{S}_m = S_m \cdot e^{j\varphi}$. On identifie ainsi $|\underline{S}_m| = S_m$ et $\mathrm{Arg}(\underline{S}_m) = \varphi$.

– Il est possible de représenter l'amplitude complexe $\underline{S}_m$ associée à la grandeur sinusoïdale $s(t)$ dans le plan complexe :



– Le passage de la forme polaire ($S_m e^{j\varphi}$) à la forme cartésienne ($a+jb$) se fait par $a = S_m \cos\varphi$ et $b = S_m \sin\varphi$.
Inversement, $S_m = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi = \arctan(b/a)$ si $a > 0$; (sinon (rare) $\varphi = \arctan(b/a) + \pi$).

– La grandeur complexe associée à la somme de deux signaux sinusoïdaux est la somme de leurs grandeurs complexes associées, ce qui permet de traiter simplement les combinaisons linéaires de fonctions sinusoïdales (avec des signaux de même pulsation).

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \iff \underline{s}(t) = \underline{s_1}(t) + \underline{s_2}(t) = \left(\underline{S}_{1m} + \underline{S}_{2m}\right)e^{j\omega t} = \underline{S}_m e^{j\omega t}.$$

– Pour dériver une grandeur complexe, il suffit de la multiplier par $j\omega$:

$$\frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t} = j\omega \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\underline{S}_m}{\mathrm{d}t} = j\omega \cdot \underline{S}_m.$$

L'intégration correspond à une division par $j\omega$:

$$\int \underline{s}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \int \underline{S}_m \mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{S}.$$

Impédance complexe

– L'impédance Z d'un dipôle, exprimée en ohms (Ω), relie l'amplitude du courant traversant le dipôle à la tension présente à ses bornes :

$$U = ZI, \qquad\qquad Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}.$$

– On définit le déphasage entre u et i comme étant la différence $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

– On appelle impédance complexe d'un dipôle la grandeur

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_{eff}}{\underline{I}_{eff}} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

On a donc $Z = |\underline{Z}|$ et $\varphi = \text{Arg}(\underline{Z})$.

– On définit également l'admittance complexe $\underline{Y}$ (S ou Ω^{-1}) comme l'inverse de l'impédance : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$.

– Impédances des dipôles élémentaires :

Dipôle	**Impédance**	**Déphasage**
Résistance	$\underline{Z}_R = R$	0
Inductance	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$+\frac{\pi}{2}$
Condensateur	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

– Associations :
  - Série : l'impédance complexe équivalente est la somme des impédances. $\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}_i$.
  - Parallèle : l'impédance complexe équivalente vérifie $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_i} = \sum \underline{Y}_i$.

– Toutes les méthodes utilisées pour la résolution des circuits en continu (noeuds, mailles, ponts, Millman, etc.) peuvent être réutilisées en RSF à condition d'utiliser les amplitudes complexes et les impédances.

Circuits du second ordre en régime sinusoïdal forcé

– Un système excité périodiquement présente une résonance pour une grandeur physique lorsque l'amplitude de celle-ci admet un maximum pour une fréquence particulière de l'excitation appelée fréquence de résonance.

Résonance d'intensité des circuits RLC série

– Pour un circuit RLC série alimenté par $e(t) = E_m \cos(\omega t)$, l'impédance complexe totale est

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$

On obtient aisément le module et le déphasage de la tension par rapport au courant en vertu de leurs formules respectives.

– La partie imaginaire s'annule pour la pulsation propre $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$ *i.e.* $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
  - Si $\omega = \omega_0$, le circuit est purement résistif ($\varphi = 0$).
  - Si $\omega < \omega_0$, le circuit est capacitif (tension en retard sur le courant ; $\varphi < 0$).
  - Si $\omega > \omega_0$, le circuit est inductif (tension en avance sur le courant ; $\varphi > 0$).

– Étude asymptotique : dans chacun des cas, on remplace les condensateurs et les inductances par un interupteur fermé (impédance nulle) ou par un interupteur ouvert (impédance vers l'infini). On laisse les resistances inchangées.
  - B.F. ($\omega \to 0$) : l'inductance se comporte comme un fil et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Le courant est donc nul, tout comme la tension aux bornes de la résistance. C'est que $\underline{i}_{BF}(t) = 0$, $\underline{u}_{L,\ BF}(t) = 0$ et $\underline{u}_{C,\ BF}(t) = \underline{e}_{BF}(t)$.
  - H.F. ($\omega \to \infty$) : l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. De même, le courant tend vers 0. C'est que $\underline{i}_{HF}(t) = 0$, $\underline{u}_{L,\ HF}(t) = \underline{e}_{HF}(t)$ et $\underline{u}_{C,\ HF}(t) = 0$.

– On choisit $e(t)$ comme origine des phases. On peut alors écrire $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ puis en notation complexe $\underline{e}(t) = E_m \cdot e^{j\omega t}$.
En utilisant les amplitudes complexes, on peut déterminer l'intensité complexe du courant :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.$$

En factorisant par R, on obtient l'expression suivante :

$$\underline{I}_m = \frac{\frac{E_m}{R}}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

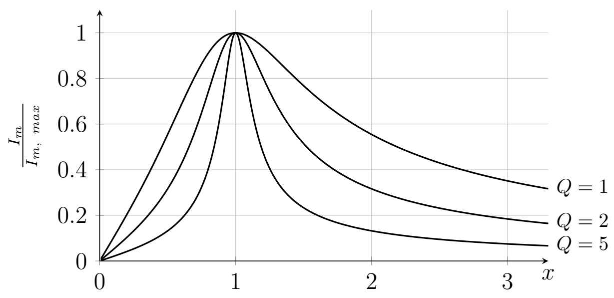
En posant $I_m = \frac{E_m}{R}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on peut mettre le résultat sous la forme canonique suivante :

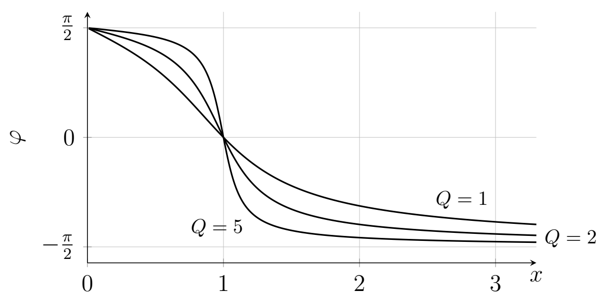
$$\underline{I}_m = \frac{I_m}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{I_m \cdot \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}.$$

En remplaçant x par $\frac{\omega}{\omega_0}$, l'identification de la forme canonique $\underline{I}_m = \dfrac{I_m \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{Q}}{1 + \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{Q} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$ avec la relation électrique $\underline{I}_m = \dfrac{\frac{E_m}{R} \cdot jRC\omega}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}$ est plus aisée. Les expressions sont équivalentes à condition que $\frac{1}{\omega_0^2} = LC$, que $I_m = \frac{E_m}{R}$ et que $RC = \frac{1}{Q\omega_0}$. On en déduit les relations

$$I_m = \frac{E_m}{R}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

– Il y a résonance en intensité lorsque la pulsation ω est égale à la pulsation propre ω_0 ($x = 1$). Pour cette pulsation, l'impédance Z est minimale ($Z = R$) et l'intensité est maximale : $I_{m,\ max} = \frac{E_m}{R}$. Cette résonance est systématique quel que soit Q, et courant et tension y sont en phase.





– La bande passante d'un filtre est l'intervalle des fréquences $\Delta\omega$ (ou des pulsations Δf) pour lesquelles le signal de sortie vérifie

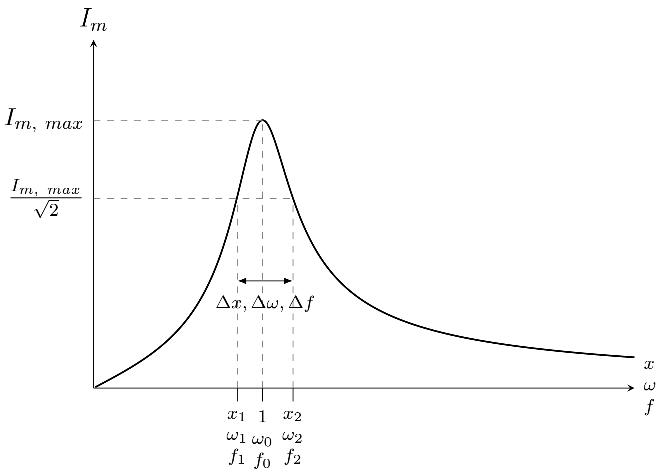
$$S \geq \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}.$$

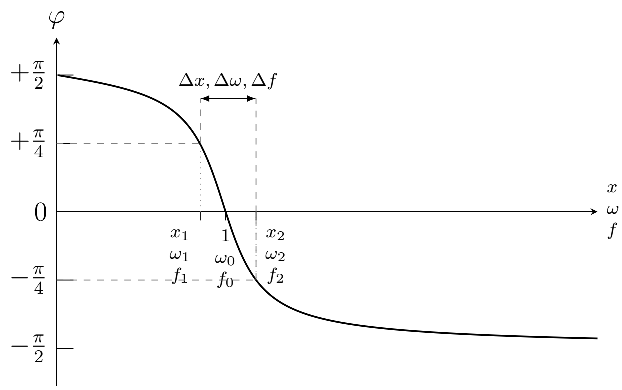
– Le facteur de qualité d'un circuit résonnant en intensité vérifie la relation

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{\Delta x}.$$

– Si le facteur de qualité est élevé, la bande passante est étroite : on dit que la résonance est aiguë.
Si le facteur de qualité est faible, la bande passante est large : on dit que la résonance est floue.

– On peut également déterminer la bande passante à l'aide de la courbe de phase. En effet, pour les pulsations réduites x_1 et x_2 correspondant aux bornes de la bande passante, le déphasage vaut $\pm\frac{\pi}{4}$.





Résonance en tension (aux bornes du condensateur)

– **Fonction de transfert :** En utilisant le pont diviseur de tension, l'amplitude complexe aux bornes du condensateur est :

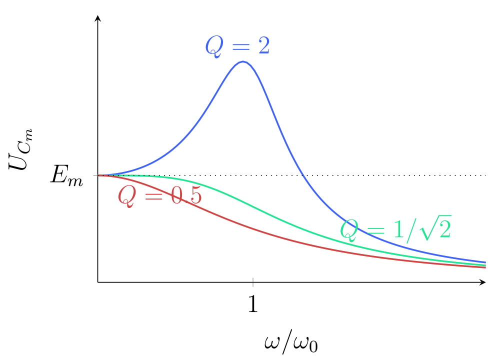
$$\underline{U}_{C_m} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_{tot}}\underline{E}_m = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Le module est :

$$U_{C_m} = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2}}$$

– **Conditions de résonance :** Contrairement à l'intensité, la résonance en tension n'est pas systématique.
  - Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance (maximum d'amplitude).
  - La pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. Elle est inférieure à ω_0.
  - L'amplitude maximale vaut alors $U_{C_{max}} = \frac{QE_m}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$.

– *Remarque :* Si Q est très grand, $\omega_r \approx \omega_0$ et $U_{C_{max}} \approx QE_m$. On parle de surtension (le coefficient Q est appelé coefficient de surtension).



Analogie électromécanique

– Les équations régissant les oscillateurs mécaniques et électriques sont analogues.

– *Tableau de correspondance (cf page 30 du polycopié) :*

Domaines	**Électrocinétique**	**Mécanique**
Variable d'intérêt	Intensité $i(t)$	Vitesse $v(t)$
Excitation	Tension $e(t)$	Force $F(t)$
Coeff. inertiel	Inductance L	Masse m
Coeff. dissipatif	Résistance R	Coeff. frottement h (ou α)
Coeff. de rappel	Inverse capacité $1/C$	Raideur k
Résonances	Résonance en intensité (toujours à ω_0)	Résonance en vitesse (toujours à ω_0)
Résonances	Résonance en tension aux bornes de C (Si $Q > 1/\sqrt{2}$)	Résonance en élongation (Position $x(t)$) (Si $Q > 1/\sqrt{2}$)