9 Fonction d'une variable réelle 1 : étude globale

9.1 Généralités

Noti.
On appelle *fonction* d'une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute relation qui fait passer de tout nombre x de D à un unique nombre y de $\mathbb{R}$; auquel cas, on note $y = f(x)$ si la fonction est appelée f.
Lorsque l'ensemble de départ n'est pas précisé, on appelle *ensemble de définition* de f l'ensemble des valeurs de la variable x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles $f(x)$ existe.

Défi.
On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dit que f est :
a) *constante* quand : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) = c$;
b) *croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
c) *strictement croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;
d) *décroissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)$;
e) *strictement décroissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Défi.
On dit qu'une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ est *monotone* quand f est croissante ou f est décroissante.
On adapte pour la monotonie stricte.

Prop. (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit un intervalle I, une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$, puis $v \in \mathbb{R}$. Si v est compris entre deux valeurs de f, alors v est aussi une valeur de f.

Prop. (Théorème de la bijection continue)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$; puis $f\colon I \to J$. Supposons que :
- ET f est continue ;
- ET f est strictement monotone ;
- ET la limite de f en l'extrémité inf. de I est égale à l'extrémité inf. de J ; de même avec les extr. sup. (ou inversement selon la monotonie).

Ainsi, $f\colon I \to J, x \mapsto y = f(x)$ admet une réciproque $g\colon J \to I, y \mapsto x \in I$ telle que $f(x) = y$.

Prop.
Si l'on connaît la représentation graphique de $f\colon x \mapsto f(x)$, on peut obtenir celles de certaines fonctions transformées de la manière suivante :
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x-a)$ se déduit de celle de f par une translation horizontale de vecteur $\vec{u} = \binom{a}{0}$.
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x)+b$ se déduit de celle de f par une translation verticale de vecteur $\vec{v} = \binom{0}{b}$.
- La représentation de $x \mapsto f(2a-x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a$.
- La représentation de $x \mapsto 2b-f(x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport

à la droite d'équation $y = b$.
- La représentation de $x \mapsto f(\lambda^{-1}x)$, avec $\lambda > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de centre O et de rapport λ dans la direction horizontale.
- La représentation de $x \mapsto \mu f(x)$, avec $\mu > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de rapport μ dans la direction verticale.
- La représentation graphique de la fonction réciproque f^{-1} se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant, c'est-à-dire la droite $y = x$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote horizontale* de la courbe de f toute droite d'équation $y = \mathrm{C}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = \mathrm{C}$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote verticale* toute droite d'équation $x = \mathrm{C}$ telle que $\lim\limits_{x \to \mathrm{C}} f = \pm\infty$.

Défi.
On considère $D \subset \mathbb{R}$ et $f \colon D \to \mathbb{R}$. On dit que f est *paire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$.

Défi.
On dit que f est *impaire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

Défi.
On considère $T \in \,]0, +\infty[$. On dit que f est *T-périodique* ou que f admet T pour *période* quand :
- ET $\forall x \in D,\ x + T \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(x) = f(x + T)$

On parle de *la* période pour désigner la plus petite quand elle existe.

Défi.
Une *fonction périodique* est une fonction qui admet au moins une période ($T > 0$).

Défi.
On dit que f est :
- *majorée* par une constante $M \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$;
- *minorée* par une constante $m \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$;
- *bornée* par deux constantes $m \leqslant M$ quand $\forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Prop.
La fonction réelle $f \colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ est bornée si, et seulement si, la fonction réelle positive $|f| \colon D \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)|$ est majorée par une constante.

Défi.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un *minimum global* de f quand :
- ET $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$
- ET $\exists x_0 \in D,\ f(x_0) = m$

On parle de *minimum local* en un point x_* quand on se restreint autour de x_*.
Adaptation pour un maximum.

Défi.
On parle d'*extremum* pour tout minimum ou tout maximum.

9.2 Dérivation et représentation graphique

Prop.
Soit un intervalle I de plus d'un point, puis $f\colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que f est dérivable en tout point de I. Ainsi :
1. f est constante ssi f' est nulle.
2. f est croissante ssi f' est positive.
3. f est strictement croissante ssi :
   - ET f' est positive ;
   - ET l'ensemble des points d'annulation de f' ne contient pas d'intervalle de plus d'un point.

On adapte pour la décroissance.

Défi.
On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *deux fois dérivable* quand f est dérivable et que f' est dérivable ; auquel cas, on note $f'' = (f')'$: *dérivée seconde* de f.

Prop.
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un r.o.n. $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Si f'' est positive, alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si f'' est négative, alors $\mathcal{C}$ est en-dessous de chacune de ses tangentes.

9.3 Fonctions réelles de référence

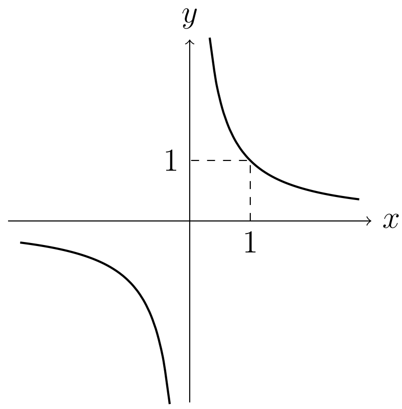
Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.

9.3.1 Fonctions constantes

9.3.2 Fonctions affines

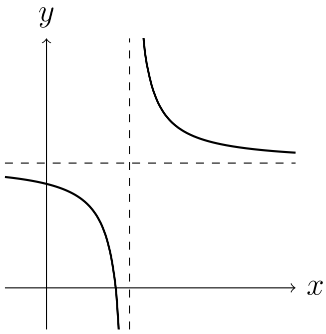
9.3.3 Fonction inverse

Figu.



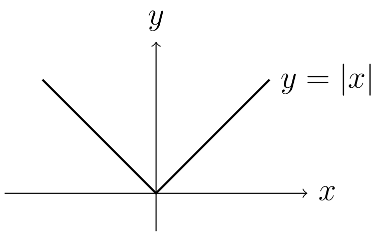
9.3.4 Quotients de fonctions affines

Figu.



9.3.5 Fonction valeur absolue

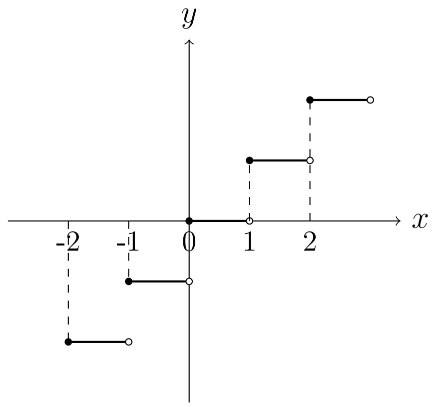
Figu.



9.3.6 Fonction partie entière

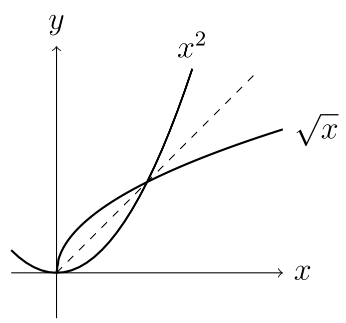
Noti.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$, où $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$.

Figu.



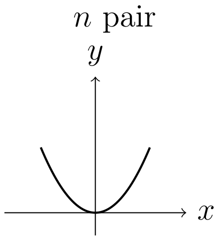
9.3.7 Fonctions carré et racine carrée

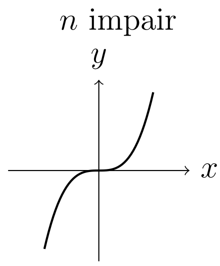
Figu.



9.3.8 Puissance n-ième

Figu.

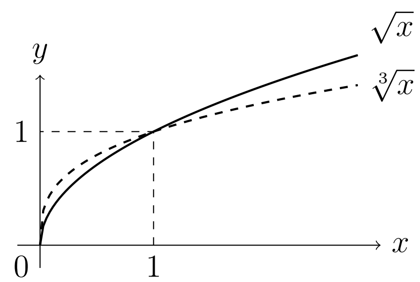




9.3.9 Racines n-ièmes

Défi.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine n-ième* de $x \geqslant 0$, notée $\sqrt[n]{x}$, l'unique réel positif dont la puissance n-ième vaut x.

Figu.



9.3.10 Fonctions polynomiales et rationnelles

Défi.
On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire de fonctions puissances entières.

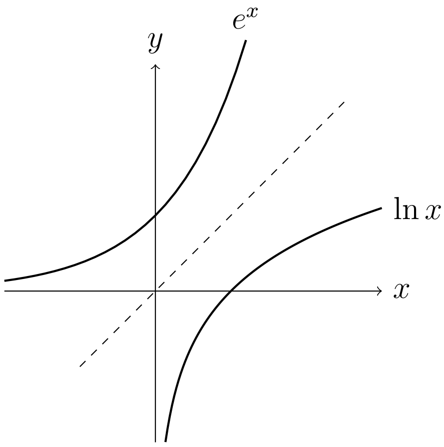
Défi.
Une *fonction rationnelle* est le quotient de deux fonctions polynomiales.

9.3.11 Fonctions exponentielles et réciproques

Défi.
exp est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et valant 1 en 0.

Défi.
Le *logarithme népérien* ln est défini sur $]0, +\infty[$ comme la bijection réciproque de l'exponentielle. C'est que $\ln(y)$ est l'unique réel dont l'image par l'exponentielle donne y.

Figu.



Défi.
On considère $b \in]0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$, l'*exponentielle en base* b de x est

$$b^x \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(x \ln b).$$

- Le *logarithme en base* b de tout $y \in]0, +\infty[$ lorsque $b \neq 1$ est

$$\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}.$$

Rema.
Les fonctions $\exp_b$ et $\log_b$ sont réciproques l'une de l'autre.

9.3.12 Fonction puissance réelle de degré d

Défi.
Pour $d \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, la puissance de degré d est définie par

$$x^d = \exp(d \ln x).$$

Prop. (Prolongement en 0)
- Si $d > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^d = 0$.
- Si $d < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^d = +\infty$.

Prop. (Théorème des croissances comparées)
Soit $\alpha, \beta, \gamma \in]0, +\infty[$.

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

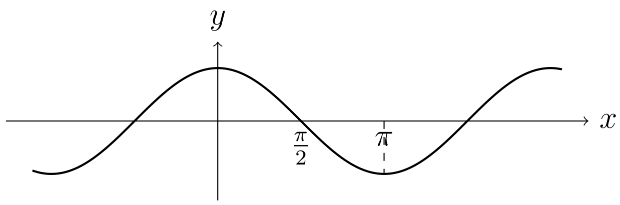
$$e^{\alpha y} |y|^\beta \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0$$

$$y^\beta |\ln y|^\gamma \xrightarrow[y \to 0^+]{} 0$$

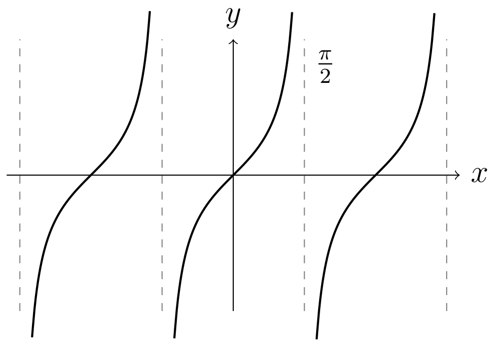
9.3.13 Fonctions circulaires et réciproques

Méth.
La construction de la courbe complète de cos se fait par symétries successives (centrale puis axiale) à partir du segment $[0, \pi/2]$, puis par translations (périodicité).

Figu.



Figu. (Tangente)

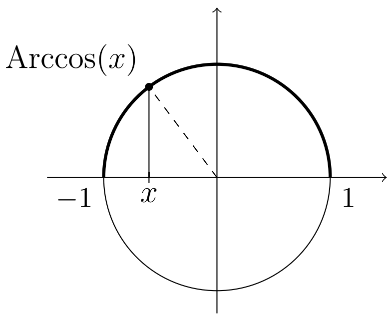


Défi.
$\forall x \in [-1,1]$, on appelle *arccosinus* de x, noté $\mathrm{Arccos}(x)$, l'unique réel de $[0,\pi]$ dont le cosinus est égal à x.

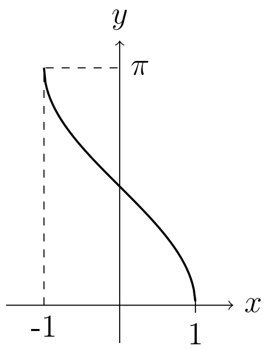
$$\begin{cases} \mathrm{Arccos}(x) \in [0,\pi] \\ \cos(\mathrm{Arccos}\ x) = x \end{cases}$$

(Attention aux deux "c" !)

Figu.



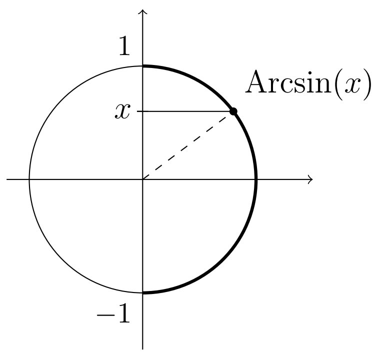
Figu.



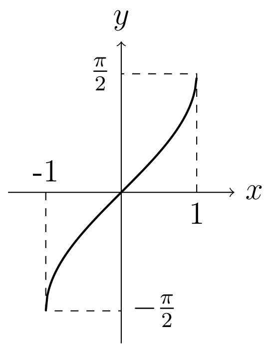
Défi.
$\forall x \in [-1,1]$, on appelle *arcsinus* de x, noté $\mathrm{Arcsin}(x)$, l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dont le sinus est égal à x.

$$\begin{cases} \mathrm{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \sin(\mathrm{Arcsin}\ x) = x \end{cases}$$

Figu.



Figu.

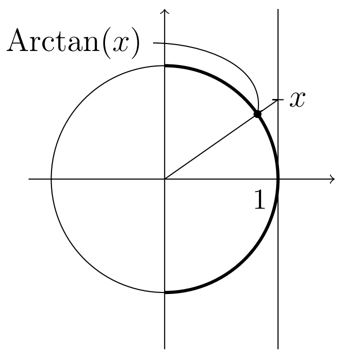


Défi.
Pour tout x de $]-\infty, +\infty[$, on appelle *arctangente* de x, noté $\text{Arctan}(x)$, l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x.

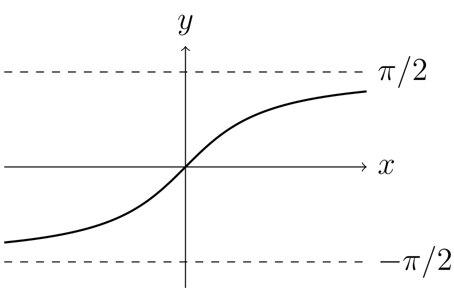
$$\begin{cases} \text{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(\text{Arctan } x) = x \end{cases}$$

Rema.
$\text{Arctan}(\tan(\theta)) = \theta$ uniquement si $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sinon, $\text{Arctan}(\tan(\theta))$ est l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ayant même tangente que θ, *i.e.* $\text{Arctan}(\tan(\theta)) \equiv \theta\ [\pi]$.

Figu.



Figu.



9.3.14 Fonctions hyperboliques

Défi.
Pour tout réel x, on appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* les nombres réels :

$$\mathrm{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Prop.

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(iz) = \cos(z) \\ \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z) \end{cases}$$

Prop.

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x) \\ \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x) \end{cases}$$

Prop.

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Prop.

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Prop.
Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}(x), \\ (\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}(x). \end{cases}$$

Figu.