13. Pratique calculatoire 3 : sommes et produits

13.1. Somme et produit d'une suite finie de complexes

Défi.
On considère m et n dans $\mathbb{N}$, puis $(z_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ une liste de complexes (élément de $\mathbb{C}^{[\![m,n]\!]}$). Ainsi, on définit par récurrence la somme de la liste de complexes $(z_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ comme suit :

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = \begin{cases} z_m & \text{si } n = m \\ \left(\displaystyle\sum_{k=m}^{n-1} z_k\right) + z_n & \text{si } n > m \quad (n \in [\![m+1, +\infty[\![) \end{cases}$$

On adapte cela pour le produit :

$$\prod_{k=m}^{n} z_k$$

Rema.
Dans la définition, on a sous-entendu que $m \leqslant n$. On convient que

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = 0 \quad \text{si } n < m.$$

Prop. (Associativité générale ou invariance par groupement)
Soit une suite de complexes $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(p,q,r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p < q < r$, on a

$$\left(\sum_{k=p}^{q-1} z_k\right) + \left(\sum_{k=q}^{r} z_k\right) = \sum_{k=p}^{r} z_k.$$

Prop. (Succession d'évolution et variation globale)
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, puis $(d_1, d_2, \dots)$ une suite dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite $(z_k)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ comme suit :

$$z_k = z_{k-1} + d_k.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = z_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Prop. (Somme télescopique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$, on a

$$\sum_{k=m+1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_m.$$

Ou encore
$$\sum_{\ell=m}^{n-1}(z_{\ell+1}-z_\ell)=z_n-z_m.$$

Exem.
Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n=\dfrac{1}{n+1}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a alors
$$z_k-z_{k-1}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}.$$
Ainsi,
$$\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right).$$
Tous les termes intermédiaires se simplifient deux à deux, et il reste
$$\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})=\frac{1}{n+1}-1=z_n-z_0.$$

Prop. (Succession d'évolution et multiplicateur global)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in[\![1,+\infty[\![}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Supposons que
$$\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\quad z_n=z_{n-1}\cdot q_n.$$
Ainsi,
$$\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\quad z_n=z_0\cdot\prod_{k=1}^{n}q_k.$$

Prop. (Produit télescopique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}, z_n\neq 0$. Ainsi, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m<n$, on a
$$\begin{aligned}\frac{z_n}{z_m}&=\prod_{k=m+1}^{n}\frac{z_k}{z_{k-1}}\\&=\prod_{\ell=m}^{n-1}\frac{z_{\ell+1}}{z_\ell}\\&=\frac{z_n}{z_{n-1}}\cdot\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\cdots\frac{z_{m+2}}{z_{m+1}}\cdot\frac{z_{m+1}}{z_m}\end{aligned}$$

Prop. (Commutativité générale et invariance par permutation)
On ne varie pas la somme d'une liste quelconque de nombres complexes si on permute ses éléments. Il en est de même pour le produit.

Défi. (Suite arithmétique)
On dit qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est *arithmétique* quand il existe au moins

un réel r, appelé *raison*, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = z_n + r.$$

Défi. (Suite géométrique)
On dit qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est *géométrique* quand il existe au moins un réel q, appelé *raison*, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = q\, z_n.$$

Prop. (Terme général d'une suite arithmétique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons la suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad z_n = z_m + (n-m)r.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0 + nr.$$

Prop.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Ainsi, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \underbrace{\frac{a_m + a_n}{2}}_{\substack{\text{moyenne}\\ \text{des extrêmes}}} \cdot \underbrace{(1+n-m)}_{\text{nombre de termes}}.$$

Prop.
Soit une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de raison $q \in \mathbb{C}$. Ainsi, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} g_k = \begin{cases} g_m(1+n-m) & \text{si } q = 1 \\ g_m \cdot \dfrac{q^{1+n-m} - 1}{q-1} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Prop. (Sommes de puissances d'entiers)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

1. $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

3. $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

13.2. Somme et produit d'une famille finie quelconque

Défi. (Somme « en vrac »)

- On appelle somme « en vrac » d'une famille finie de nombres complexes l'unique nombre complexe égal à la valeur commune des sommes des listes qu'on obtient de cette famille (en rangeant les termes d'un premier à un dernier).
- Soit un ensemble fini I, puis une famille de complexes $(z_i)_{i\in I}$. On pose alors

$$\sum_{i\in I} z_i = z_{i_1} + z_{i_2} + \cdots + z_{i_n} = \sum_{k=1}^{n} z_{i_k}$$

  où $n \in \mathbb{N}^*$ est le nombre d'éléments de I et $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est une liste de tous les éléments de I sans répétition (liste arbitrairement choisie).
- On convient que $\displaystyle\sum_{i\in\emptyset} z_i = 0$.

Exem.
- Somme sur un intervalle d'entiers relatifs :

$$\sum_{k\in[\![-2,2]\!]} |k| = |0| + |1| + |-1| + |2| + |-2| = 0+1+1+2+2 = 6.$$

- Somme double sur un produit cartésien :

$$\sum_{(i,j)\in[\![0,1]\!]\times[\![0,2]\!]} (i+j) = (0+0)+(0+1)+(1+0)+(0+2)+(1+1)+(1+2).$$

  Pour tout $(i,j) \in [\![0,1]\!] \times [\![0,2]\!]$, on pose $z_{i,j} = i+j$. Le tableau ci-après indique les valeurs des $z_{i,j}$:

$i \setminus j$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3

Défi. (Produit « en vrac »)
De manière analogue, on définit le produit d'une famille finie $(z_i)_{i\in I}$ par

$$\prod_{i\in I} z_i = z_{i_1} \times z_{i_2} \times \cdots \times z_{i_n} = \prod_{k=1}^{n} z_{i_k}.$$

On convient que pour l'ensemble vide, le produit est égal à l'élément neutre :

$$\prod_{i\in\emptyset} z_i = 1.$$

Prop. (Groupement par paquets)
Soit $(z_i)_{i\in I}$ une famille finie de complexes.
1. (Cas de deux paquets) Si I est la réunion disjointe de deux parties I_1 et I_2 (on note $I = I_1 \sqcup I_2$), alors :

$$\sum_{i\in I_1} z_i + \sum_{i\in I_2} z_i = \sum_{i\in I} z_i.$$

2. (Cas général) Si $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ (réunion disjointe indexée par J), alors

$$\sum_{i\in I} z_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} z_i\right).$$

Prop. (Linéarité de la somme)
Soit deux familles finies de complexes $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ indexées par un même ensemble fini I.
Ainsi, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$,

$$\lambda\sum_{i\in I} a_i + \mu\sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i).$$

Rema.
Cela revient à dire que :

$$\forall(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I, \forall(b_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I, \forall\lambda\in\mathbb{C},$$
$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i\\ \displaystyle\sum_{i\in I}\lambda a_i = \lambda\sum_{i\in I} a_i.\end{cases}$$

Prop. (Changement de variable par la somme discrète)
Soit I un ensemble fini, J un ensemble fini, puis $\varphi : I \to J$. Soit $g : J \to \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\sum_{i\in I} g(\varphi(i)) = \sum_{j\in\varphi(I)}\ \sum_{\substack{i\in I\\ \varphi(i)=j}} g(\varphi(i)).$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{i\in I} g(\varphi(i)) = \sum_{j\in\varphi(I)} g(j)\cdot\mathrm{Card}\{i\in I \mid \varphi(i)=j\}$$

où $\varphi(I)$ désigne l'ensemble des valeurs de φ.
En particulier, si toute valeur de φ reçoit un unique antécédent, alors

$$\sum_{i\in I} g(\varphi(i)) = \sum_{j\in\varphi(I)} g(j).$$

Prop. (Interversion des sommes)
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille finie de complexes. Ainsi,

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Prop. (Distributivité générale)
Soit deux familles finies de complexes $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$. Ainsi,

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

Prop. (Carré d'une somme)
Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de nombres complexes. Ainsi,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

13.3. Identités sommatoires remarquables

Prop. Formule de Bernoulli
Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Ainsi,
- pour tout $n \in [\![1, +\infty[\![$;

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \cdots + a^0 b^{n-1}).$$

- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k.$$

Défi.
On considère $(n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$. On appelle *coefficient binomial* « p parmi n », noté $\binom{n}{p}$, l'unique réel défini comme suit :
- si $p < 0$ ou $n < p$ (*i.e.* $p \notin [\![0, n]\!]$), alors $\binom{n}{p} = 0$;
- si $p = 0$, alors $\binom{n}{0} = 1$;
- sinon, *i.e.* si $1 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$\binom{n}{p} = \frac{(n-0)(n-1)\dots(n-(p-1))}{(p-0)(p-1)\dots(p-(p-1))}.$$

Exem.
1. $\binom{2025}{-2} = 0$ car $-2 \notin [\![0, 2025]\!]$.
2. $\binom{99}{100} = 0$ car $100 \notin [\![0, 99]\!]$.
3. $\binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$.
4. $\binom{73}{0} = 1$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1$.

Défi.
On appelle *factorielle* d'un entier naturel n, notée $n!$, l'unique entier naturel égal au produit des entiers supérieurs à 1 et inférieurs à n.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times\cdots\times n.$$

Rema.
1. $0! = 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = n\times(n-1)!$.
3. Si $n \geqslant 1,\ n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 1$.

Exem.

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	1	2	6	24	120	720

Prop.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin [\![0,n]\!] \\ \dfrac{n!}{(n-p)!p!} & \text{si } p \in [\![0,n]\!]. \end{cases}$$

Prop. (Symétrie)
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Prop. Formule de Pascal
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Rema. Triangle de Pascal
Le tableau suivant donne les coefficients binomiaux :

$n \setminus p$	-1	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
2	0	1	2	1	0	0
3	0	1	3	3	1	0
4	0	1	4	6	4	0
5	0	1	5	10	10	5

Prop.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}.$$

Prop. Formule du binôme de Newton
Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n;$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$