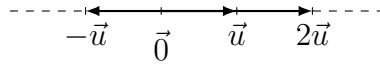


## 4. PLAN COMPLEXE 1 : $\mathbb{C}, +, \times, |\cdot|$

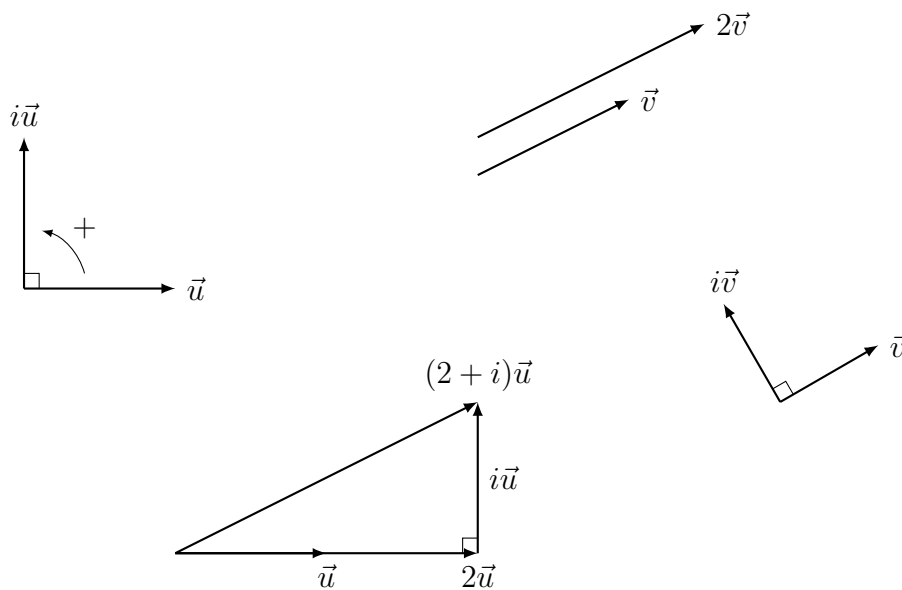
### 4.1. Nombres complexes et vecteurs du plan orienté

#### Noti.

Les nombres réels peuvent être regardés comme des multiplicateurs pour passer des vecteurs non nuls de la droite à tous les vecteurs de cette même droite.



Dans le plan orienté, on imagine un « nombre » par lequel la multiplication a pour effet de réaliser le quart de tour direct.



**Noti.** (Le corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ , extension du corps  $(\mathbb{R}, +, \times)$ )

1. Les nombres réels sont des nombres complexes.
2. L'addition entre les nombres complexes :
  - a. est associative :  $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ ;
  - b. est commutative :  $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ;
  - c. admet le nombre 0 pour unique élément neutre :  $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = z = 0 + z$ ;
  - d. admet pour tout nombre complexe  $z$ , un unique opposé noté  $-z$  :  $(-z) + z = 0 = z + (-z)$ .
3. La multiplication entre les nombres complexes est :
  - a. associative;
  - b. est commutative;
  - c. admet le nombre 1 pour unique élément neutre;
  - d. admet pour tout nombre complexe  $z$  non nul, un unique inverse noté  $z^{-1}$ .
4. Par rapport à l'addition entre les complexes, la multiplication entre les complexes est doublement distributive.
5. Il existe au moins un nombre complexe dont le carré (le produit du nombre par lui-même) est égal à  $-1$ . Notons  $i$  un tel nombre dans toute la suite.
6. Pour tout nombre complexe, on peut l'exprimer comme la somme :
  - du produit de 1 par un réel,
  - et du produit de  $i$  par un réel.

C'est que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \exists b \in \mathbb{R}, \quad z = a + ib.$$

## 4.2. Nombres réels partie réelle et partie imaginaire d'un complexe

### Prop.

Pour tous réels  $x$  et  $y$ , si  $x + iy = 0$ , alors  $x = 0$  et  $y = 0$ .

### Prop. (Unicité de la forme algébrique d'un complexe)

Soit un nombre complexe  $z$ . Ainsi, il existe exactement un couple  $(x, y)$  de réels tel que  $x + iy = z$ .

### Défi. (Partie réelle et partie imaginaire)

On considère un complexe  $z$ . On appelle *partie réelle* et *partie imaginaire* de  $z$  qu'on note respectivement  $\operatorname{Re}(z)$  et  $\operatorname{Im}(z)$ , les nombres réels tels que :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = z \\ \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

### Prop.

Soient deux complexes  $z_1 = x_1 + iy_1$  et  $z_2 = x_2 + iy_2$ , où  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ .

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ .
- $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ .

### Prop. (Linéarité sur $\mathbb{R}$ de $\operatorname{Re}(\cdot)$ et $\operatorname{Im}(\cdot)$ )

Pour tous complexes  $z_1$  et  $z_2$ , pour tous réels  $r_1$  et  $r_2$  :

$$\operatorname{Re}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \operatorname{Re}(z_1) + r_2 \operatorname{Re}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \operatorname{Im}(z_1) + r_2 \operatorname{Im}(z_2)$$

### Prop.

L'inverse de  $i$  est égal à son opposé :  $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$ .

### Prop.

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Alors

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{z}{i}\right) = \operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}\left(\frac{z}{i}\right) = -\operatorname{Re}(z). \end{cases}$$

### Prop. (Caractérisation des réels parmi les complexes)

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $z \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{Im}(z) = 0$
- $z = \operatorname{Re}(z)$

**Prop.** (Caractérisation des imaginaires purs)

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a.  $z \in i\mathbb{R}$
- b.  $\operatorname{Re}(z) = 0$
- c.  $z = i\operatorname{Im}(z)$

**Rema.**

$$z \in i\mathbb{R} \iff \frac{z}{i} \in \mathbb{R}.$$

### 4.3. Nombre complexe conjugué d'un complexe

**Défi.**

Le nombre complexe *conjugué* de  $z$ , noté  $\bar{z}$ , est défini par  $\bar{z} \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$ .

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a  $z = \bar{\bar{z}}$ .

**Prop.**

Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Alors

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ;
- si  $z_1 \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$ .

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \frac{\bar{z} + z}{2} \\ \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Alors

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

### 4.4. Nombre réel module d'un complexe

**Défi.**

Le nombre réel *module* de  $z$ , noté  $|z|$ , est  $|z| \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \in \mathbb{R}_+$ .

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Alors :

- $z\bar{z} = |z|^2$ .
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ .
- $z\bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$ .

**Prop.** (Formule algébrique d'un quotient)

Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tq  $z_1 \neq 0$ . Alors

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \left( \frac{z_2}{z_1} \right) = \frac{\operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2)}{|z_1|^2} \\ \operatorname{Im} \left( \frac{z_2}{z_1} \right) = \frac{\operatorname{Im}(\overline{z_1} z_2)}{|z_1|^2} \end{cases}$$

**Méth.** (pour écrire un quotient sous forme algébrique)

Exemple :

$$\frac{1}{1+i} = \frac{(1-i) \times 1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

**Prop.**

Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Alors

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .
- Si  $z_1 \neq 0$ ,  $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$ .

**Prop.**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ ,

- $|r| = r$  ;
- $|r \cdot z| = r|z|$ .

**Prop.**

On considère un nombre complexe  $z$ . Ainsi,

- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ .
- Si, et seulement si,  $z \in \mathbb{R}$  alors  $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$ .
- $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ .
- Si, et seulement si,  $z \in i\mathbb{R}$  alors  $|\operatorname{Im}(z)| = |z|$ .

**Prop.** (Inégalité triangulaire pour les complexes)

Soit deux complexes  $z_1$  et  $z_2$ . Ainsi,

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .
- Si  $(z_1 = 0) \vee (\exists r \in \mathbb{R}_+, z_2 = r z_1)$  alors  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ .

**Prop.**

Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Ainsi  $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ .

**Défi.** (Disque)

On considère un complexe  $a$  et un réel positif  $r$ . On appelle *disque* fermé de centre  $a$  et de rayon  $r$ , l'ensemble des complexes  $z$  tels que  $|z - a| \leq r$ .

## 4.5. Nombres complexes et géométrie du plan orienté

**Défi.**

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. À tout vecteur  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$  du plan, on associe le nombre complexe

$$z = x + iy,$$

appelé *affixe* de  $\vec{v}$ .

Réciproquement, à tout complexe  $z = x + iy$ , on associe le vecteur

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

appelé *vecteur image* de  $z$ .

2. L'*affixe* d'un point  $M$  est l'affixe du vecteur  $\vec{OM}$ .

Réciproquement, le *point image* d'un complexe  $z = x + iy$  est le point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$ , que l'on note  $M(z)$ .

**Prop.**

Soit  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  deux vecteurs,  $z_1$  et  $z_2$  deux complexes et  $r_1$  et  $r_2$  deux réels. Si  $\vec{v}_1$  admet pour affixe  $z_1$  et  $\vec{v}_2$  admet pour affixe  $z_2$ , alors  $r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2$  admet pour affixe  $r_1z_1 + r_2z_2$ .

**Prop.**

Soit  $\vec{v}$  un vecteur du plan, d'affixe  $z$  dans un repère orthonormé. Alors  $\|\vec{v}\| = |z|$ .

**Prop.**

Soient  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  dans un repère orthonormé. Alors  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont colinéaires si et seulement si  $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$ .

En particulier, soient  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  trois points distincts du plan. Alors  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si  $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ .

**Prop.**

Soient  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  dans un repère orthonormé. Alors

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \iff \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}.$$

**Prop.**

Soit un vecteur  $\vec{b}(b)$ . Soit un point  $M(z)$ . Soit un point  $M'(z')$ . Ainsi,  $M'(z')$  est l'image de  $M(z)$  par translation de vecteur  $\vec{b}$  si et seulement si  $z' = z + b$ .

**Prop.**

Soit un réel  $\theta$ . Le point  $M'(z')$  est l'image de  $M(z)$  par la rotation de centre l'origine et d'angle  $\theta$  si et seulement si  $z' = z(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

**Prop.**

Par suite,  $M'(z')$  est l'image de  $M(z)$  par la rotation de centre  $\Omega(\omega)$  et d'angle  $\theta$  si et seulement si  $z' - \omega = (z - \omega)(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

**Prop.**

Soit un réel non nul  $k$ .

- $M'(z')$  est l'image de  $M(z)$  par l'homothétie de centre l'origine et de rapport  $k$  si et seulement si  $z' = zk$  ( $= kz$ ).
- $M'(z')$  est l'image de  $M(z)$  par l'homothétie de centre  $\Omega(\omega)$  et de rapport  $k$  si et seulement si  $z' - \omega = (z - \omega)k$ .

**Prop.**

$M'(z')$  est l'image de  $M(z)$  par la symétrie orthogonale par rapport au premier axe du repère si et seulement si  $z' = \bar{z}$ .

$M'(z')$  est l'image de  $M(z)$  par la symétrie orthogonale par rapport au second axe du repère si et seulement si  $z' = -\bar{z}$ .