

02\_pc\_2602150230

NOTES DE  
**COURS DE PHYSIQUE-CHIMIE**

JEAN DECROOCQ

CPGE TSI 1 – 2025/2026  
Lycée polyvalent de Cachan

## TABLE DES MATIÈRES

<b>0 Propédeutique</b>	<b>3</b>
1 Analyse dimensionnelle . . . . .	4
2 Mesures et incertitudes . . . . .	5
<b>1 Signaux physiques</b>	<b>7</b>
1 Propagation d'un signal . . . . .	8
2 Formation des images . . . . .	11
3 Circuits électriques dans l'ARQS . . . . .	14
4 Circuits linéaires du premier ordre . . . . .	17
5 Oscillateurs libres et forcés . . . . .	19
<b>2 Mouvement et interactions</b>	<b>27</b>
1 Éléments de cinématique . . . . .	28
2 Mécanique newtonienne . . . . .	34
3 Approche énergétique . . . . .	37
4 Solide en rotation autour d'un axe fixe . . . . .	39
<b>3 À venir</b>	<b>42</b>
1 À venir . . . . .	43
<b>4 Constitution et transformation de la matière</b>	<b>44</b>
1 Architecture de la matière . . . . .	45
2 Transformation de la matière . . . . .	51
3 Acido-basicité et précipitation . . . . .	55

0

# 1 ANALYSE DIMENSIONNELLE

*Contenu à paraître*

## 2 MESURES ET INCERTITUDES

### Incertitudes de répétabilité (Type A)

- L'évaluation de type A consiste à estimer l'incertitude en effectuant une série de mesures et en réalisant un traitement statistique. La valeur mesurée retenue est la moyenne des mesures, et l'écart-type renseigne sur la dispersion des résultats.

- Valeur mesurée :

$$x = \bar{x} = x_{moy} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

- L'écart-type d'échantillon — le plus adéquat en pratique expérimentale — est noté  $s$ ,  $s_x$  (variable précisée),  $s_{n-1}$  ou encore  $\sigma_{n-1}$ . Sa notation peut varier, mais il ne faut pas le confondre avec l'écart-type de population  $\sigma$  ou  $\sigma_x$ .

Il se calcule généralement avec une calculatrice, un tableur ou en Python.

- L'incertitude-type est alors donnée par :

$$u(x) = \frac{s_x}{\sqrt{n}}.$$

- Pour définir un intervalle de confiance, on calcule l'incertitude élargie  $U(x)$  à l'aide d'un facteur d'élargissement  $k$  (généralement  $k = 2$ ) qui dépend en principe de  $n$  et du niveau de confiance choisi :

$$U(x) = k \cdot u(x).$$

Pour  $k = 1$  on parle d'incertitude type. On choisit souvent  $k = 2$  pour un niveau de confiance d'environ 95%.

### Incertitudes sur mesure unique (Type B)

- Pour un appareil analogique avec une lecture unique, l'incertitude pour un intervalle de confiance à 95% est estimée à partir de la valeur d'une graduation  $g$  ;

$$U(x) = \frac{2g}{\sqrt{12}}.$$

- Pour un niveau de confiance de 95%, l'incertitude liée à une lecture double est estimée à :

$$U(x) = \frac{2\sqrt{2} \cdot g}{\sqrt{12}}.$$

- Lorsque la notice d'un appareil fournit une tolérance  $\pm t$ , l'incertitude pour un niveau de confiance à 95% est estimée à :

$$U(x) = \frac{2t}{\sqrt{3}}.$$

Lorsque la précision de l'appareil est donné sous la forme  $n\% \pm m$ ,  $t$  peut aussi se déterminer en multipliant le résultat de la mesure par  $n\%$  puis en ajoutant  $m$  fois la dernière puissance de 10 affichée par l'appareil.

- Lorsque la valeur  $x$  se situe dans un intervalle, on prendra comme incertitude pour un niveau de confiance à 95% :

$$U(x) = \frac{x_{max} - x_{min}}{\sqrt{3}}.$$

## Incertitudes composées

- Si une mesure est affectée par plusieurs sources d'erreurs, l'incertitude globale est la somme quadratique des incertitudes de chaque source :

$$U(x)^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots$$

- Cas d'une somme ou d'une différence du type  $G = \alpha A \pm \beta B$  :

$$U(G)^2 = (\alpha \cdot U(A))^2 + (\beta \cdot U(B))^2.$$

- Cas d'un produit ou d'un quotient du type  $G = k \cdot A^\alpha \cdot B^\beta$  :

$$\left(\frac{U(G)}{G}\right)^2 = \left(\alpha \frac{U(A)}{A}\right)^2 + \left(\beta \frac{U(B)}{B}\right)^2.$$

## Expression et acceptabilité du résultat

- Par convention, le résultat d'un mesurage s'écrit ainsi :

$$X = x \pm U(x).$$

L'incertitude élargie  $U(x)$  est écrite avec deux chiffres significatifs et la valeur mesurée  $x$  est ajustée pour que son dernier chiffre significatif soit à la même position décimale que celui de  $U(x)$ .

- La précision d'une mesure est évaluée par son incertitude relative  $\frac{U(x)}{x}$ , qui doit être la plus faible possible.
- L'écart relatif permet de comparer le résultat de la mesure à une valeur attendue.

$$\epsilon = \frac{|x - x_{ref}|}{x_{ref}}.$$

- Pour comparer une mesure à une valeur de référence  $x_{ref}$ , on calcule l'écart normalisé, ou z-score. Il permet de statuer sur la compatibilité des deux valeurs en se basant sur les incertitudes-types.

$$z = \frac{|x - x_{ref}|}{u(x)}.$$

La mesure est jugée compatible avec la valeur de référence si  $z < 2$ .

1

# 1 PROPAGATION D'UN SIGNAL

## Signaux

- Signal : grandeur physique dont la variation apporte une information.
- Signal périodique : signal qui se répète. Il est caractérisé par sa fréquence  $f$ , sa période  $T$  et sa pulsation  $\omega$ .

$$f = \frac{1}{T}, \quad T = \frac{1}{f}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

- Valeur moyenne d'un signal périodique  $s(t)$  :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{\text{Aire}}{\text{Période}}.$$

Un signal de valeur moyenne nulle est dit alternatif.

- Valeur efficace : valeur continue qui restitue la même puissance qu'un signal alternatif.

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle}.$$

- Signal sinusoïdal :

$$s(t) = \langle s(t) \rangle + A \cos(\omega t + \varphi),$$

Déphasage :

$$|\varphi_{\text{rad}}| = \frac{2\pi \Delta t}{T}, \quad |\varphi^{\circ}| = \frac{360 \Delta t}{T}.$$

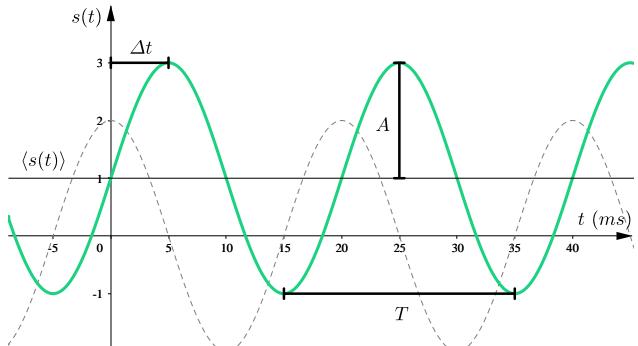
$\varphi > 0$  : signal en avance.

$\varphi < 0$  : signal en retard.

Il est également possible de décrire le signal alternatif avec une fonction sinus. Seule la phase à l'origine diffère : cos commence à son maximum, sin commence à zéro en croissant. Le choix dépend simplement de la convention retenue pour le signal de référence.

- Valeur efficace d'un signal sinusoïdal **alternatif** :

$$S_{\text{eff}} = \frac{S_{\max}}{\sqrt{2}}.$$



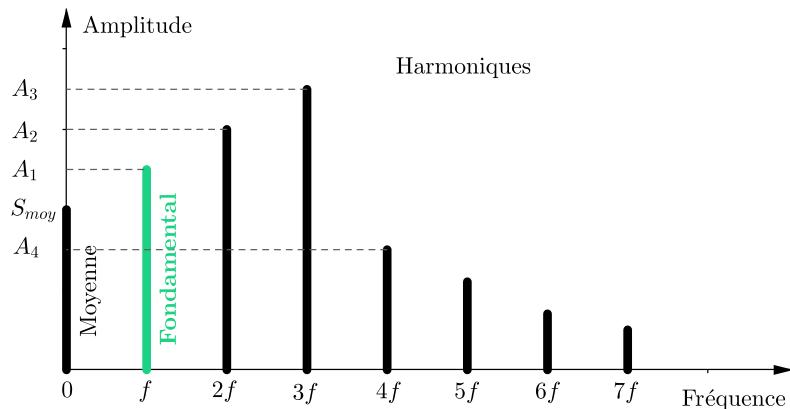
## Spectres

- Théorème de Fourier : tout signal périodique peut se décomposer en la somme de sa valeur moyenne et d'une infinité de fonctions sinusoïdales, dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale.

$$s(t) = \langle s(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

- Spectre d'un signal périodique : représentation graphique des amplitudes  $A_n$  des différentes composantes sinusoïdales en fonction de leur fréquence  $f_n = n \cdot f_1$ .

La valeur moyenne est représentée au rang 0. Le fondamental, de même fréquence que le signal, correspond au rang 1. Les autres composantes sont les harmoniques, de rang  $n$ .



- Spectre d'un signal quelconque : il n'est plus constitué de raies de fréquences particulières mais occupe toute la bande de fréquences. C'est un spectre continu.

## Ondes progressives

- Onde : perturbation locale qui se propage sans déplacement global de matière, en transportant de l'énergie à une vitesse appelée célérité, qui dépend des propriétés du milieu.
- Onde transversale : perturbation perpendiculaire à la direction de propagation (ex. corde).
- Onde longitudinale : perturbation parallèle à la direction de propagation (ex. son).
- Double périodicité d'une onde périodique : en un point fixe, la perturbation se répète dans le temps ; à un instant donné, la forme de l'onde se répète dans l'espace.

$$s(x, t + T) = s(x, t), \quad s(x + \lambda, t) = s(x, t).$$

La longueur d'onde  $\lambda$  est la distance parcourue par l'onde pendant une période  $T$  :

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}.$$

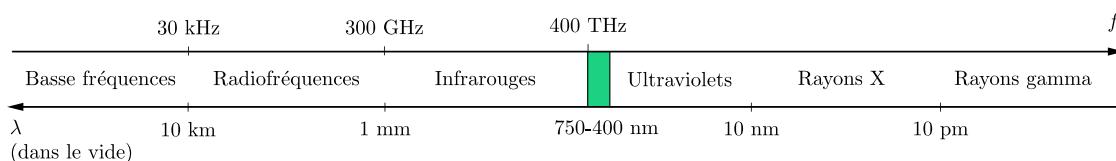
- Une expression (parmi tant d'autres) d'une onde sinusoïdale progressive en un point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$  :

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}.$$

Le nombre d'onde  $k$  est l'analogie dans l'espace de la pulsation temporelle  $\omega$ .

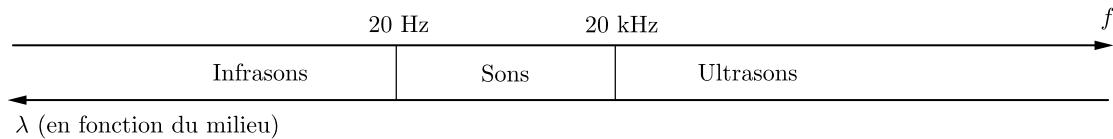
Pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants, le signe devant  $k$  ou  $x$  est inversé.

- Spectre électromagnétique :



La lumière visible par l'œil humain s'étend de 400 nm (violet) à 750 nm (rouge) environ.

- Spectre acoustique :



Le domaine des sons audibles pour l'humain va de 20 Hz à 20 kHz.

## Interférences

- Principe de superposition : lorsque deux ondes se rencontrent en un point, leurs élongations s'additionnent.
- Condition d'interférence : les ondes doivent être cohérentes (même fréquence et déphasage constant).
- Différence de marche : différence de distance parcourue par les deux ondes.

$$\delta = d_2 - d_1.$$

- La différence de marche induit un déphasage entre les deux ondes :

$$\varphi_{2/1} = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

- Interférences constructives : l'amplitude est maximale (ondes en phase).

$$\delta = p \cdot \lambda \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

- Interférences destructives : l'amplitude est minimale (ondes en opposition de phase).

$$\delta = \left( p + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

- Interfrange : distance séparant les milieux de deux franges brillantes (ou sombres) consécutives. Si  $a$  est la distance entre les fentes et  $D$  la distance à l'écran :

$$i = \frac{\lambda D}{a}.$$

## Diffraction

- Phénomène : étalement des directions de propagation d'une onde au passage d'une ouverture ou d'un obstacle de largeur  $a \leq \lambda$ .
- Écart angulaire : demi-angle (en radians) de la tache centrale :

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{a}.$$

- Avec la largeur de la tache centrale  $\ell$  sur un écran à la distance  $D$  :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{\ell}{2D}.$$

## 2 FORMATION DES IMAGES

### Photons

- Dualité onde-corpuscule : la lumière se comporte à la fois comme une onde, et comme un flux de particules (photons).
- Photon : particule sans masse, se déplaçant à la vitesse de la lumière  $c$ , et transportant une énergie quantifiée (un quantum d'énergie).

$$E_{\text{photon}} = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda};$$

avec  $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  (constante de Planck).

- Electronvolt (eV) : unité d'énergie adaptée à l'échelle atomique.

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

- Puissance lumineuse : énergie transportée par unité de temps. Elle est liée au flux de photons  $\Phi$ , i.e. au nombre de photons émis par seconde.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \Phi \cdot E_{\text{photon}}.$$

- L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par une plaque métallique soumise à un rayonnement électromagnétique. Il ne se produit que si la fréquence  $\nu$  du rayonnement incident est supérieure à une fréquence seuil caractéristique du métal  $\nu_s$ .
- Le travail d'extraction  $W_{\text{ext}}$  est le travail qu'il faut fournir à un électron pour l'arracher du métal.
- Après extraction, l'énergie du photon a été diminuée du travail d'extraction. L'électron extrait reçoit donc un travail  $W_{\text{restant}} = E_{\text{photon}} - W_{\text{ext}}$ .
- Le théorème de l'énergie cinétique s'applique à l'électron extrait :

$$\Delta E_c = E_c - 0 = \frac{1}{2}mv^2 = h(\nu - \nu_s).$$

### Sources et spectres

- Source primaire : corps qui produit et émet sa propre lumière.
- Source secondaire : objet qui diffuse la lumière qu'il reçoit.
- Spectre continu : contient toutes les longueurs d'onde sur une large plage.
- Spectre de raies (ou discret, ou discontinu) : ne contient que quelques longueurs d'onde discrètes et bien définies.
- Lumière monochromatique : ne contient qu'une seule longueur d'onde.

## Propagation de la lumière

- MHTI : milieu homogène (mêmes propriétés en tout point), transparent (laisse passer la lumière) et isotrope (mêmes propriétés dans toutes les directions) assurant la propagation rectiligne de la lumière.
- Indice de réfraction : grandeur sans dimension qui caractérise un milieu.

$$n = \frac{c_0}{c} \geq 1.$$

Matière	Vide	Air	Eau	Verre
Indice optique	1	1,003	1,33	$\sim 1,5$

- La fréquence  $\nu$  d'une onde lumineuse ne change jamais lors d'un changement de milieu. La longueur d'onde, elle, est modifiée :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}.$$

## Lois de Snell-Descartes

- Réflexion :

$$i_1 = i'_1.$$

- Réfraction :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

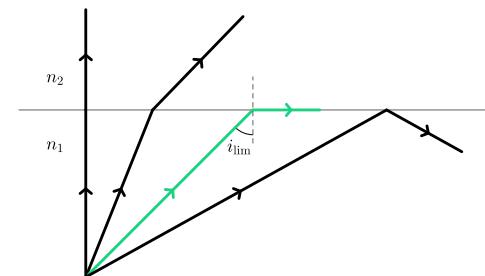
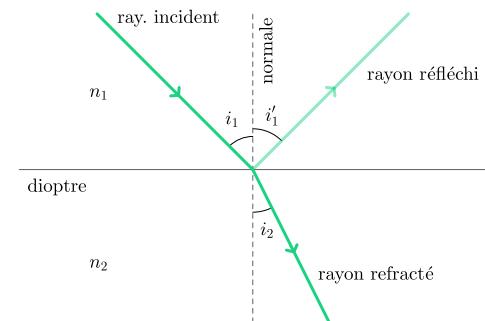
- Réflexion totale : possible uniquement lors du passage d'un **milieu d'indice plus élevé à un milieu d'indice plus faible**, si l'angle d'incidence est supérieur à l'angle limite  $i_{\text{lim}}$ .

$$i_1 > i_{\text{lim}} = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right).$$

(Démo. loi de réfraction avec  $i_2 = 90^\circ$ ).

Ex. fibre optique (guidage par réflexions successives), ou vignettage sous l'eau (réiproque, flèches opposées sur le schéma).

- Dioptre : surface séparant deux milieux d'indices de réfraction différents.



## Systèmes optiques

- Les rayons lumineux qui proviennent d'un point situé à l'infini sont parallèles entre eux.
- Miroir plan : l'image A' d'un point objet A est son symétrique par rapport au miroir, et est donc virtuelle.
- Lentille mince : convergente (bords minces, symb.  $\uparrow$ ) ou divergente (bords épais, symb. opposé).
- Conditions de Gauss (base de toute l'optique géométrique simplifiée) : rayons lumineux peu inclinés sur l'axe optique et peu éloignés de celui-ci.

- Stigmatisme : un système est rigoureusement stigmatique s'il donne de tout point objet A un unique point image A'.
- Le stigmatisme est approché si la taille de la tache image est plus petite que le grain du détecteur (ex. photosite d'un capteur CMOS).
- Propriétés des lentilles (schémas dans le cours) :

Source	Lentille convergente	Lentille divergente
Rayon passant par le centre optique O.	Rayon non dévié.	Rayon non dévié.
Rayon incident parallèle à l'axe optique.	Émerge en passant par le point focal image F'.	Émerge en semblant provenir du point focal image F'.
Rayon dont le support passe par le point focal objet F.	Émerge parallèlement à l'axe optique.	Émerge parallèlement à l'axe optique.
Faisceau de rayons parallèles entre eux.	Converge en un point du plan focal image.	Diverge en semblant provenir d'un point du plan focal image.
Objet placé dans le plan focal objet.	Image à l'infini, rayons émergents parallèles.	Image à l'infini, rayons émergents parallèles.

Ainsi, en vertu de ces propriétés, tout faisceau de rayons incidents parallèles entre eux et parallèles à l'axe optique passe ou semble passer par le point focal image F'.

- Un objet est réel s'il est la source physique des rayons ; il est virtuel s'il est situé là où des rayons allaient converger.
- Une image est réelle si on peut la former sur un écran (ex. capteur photo après objo, foyer d'un miroir de télescope) ; elle est virtuelle si elle n'est visible qu'à travers le système optique, par prolongement des rayons (ex. loupe, miroir).
- L'image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique est elle-même perpendiculaire à cet axe.
- Distance focale  $f'$ , vergence  $V$  :

$$f' = \overline{OF'} = -\overline{OF}, \quad V = \frac{1}{f'}.$$

$f' > 0$  pour une lentille convergente,  $f' < 0$  pour une divergente.  $V$  s'exprime en dioptries ( $\delta$ ).

- Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}}, \quad \overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}.$$

$\overline{OA}$  est très souvent négatif (objet réel placé avant la lentille).

- Grandissement transversal (différent du grossissement) :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

Si  $\gamma > 0$ , l'image est droite. Si  $\gamma < 0$ , l'image est renversée.

Si  $|\gamma| > 1$ , l'image est agrandie. Si  $|\gamma| < 1$ , l'image est rétrécie.

- Focométrie : méthodes expérimentales pour déterminer la distance focale d'une lentille (voir cours).

### 3 CIRCUITS ÉLECTRIQUES DANS L'ARQS

#### Grandeurs électriques

- Le courant électrique correspond à un déplacement ordonné de charges électriques. Il se conserve, comme le débit d'eau dans un moulin.
- L'intensité du courant mesure le débit de charges à travers la section d'un conducteur.

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \approx \frac{\Delta q}{\Delta t}; \quad I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Par convention, un sens est choisi sur la branche : si le courant circule dans ce sens,  $i > 0$ , sinon  $i < 0$ .

Il se mesure avec un ampèremètre, toujours branché en série.

- Le potentiel électrique est une grandeur relative associée à chaque point du circuit, qui mesure sa capacité à attirer les charges négatives. Cette valeur dépend de la référence choisie. Un point du circuit est choisi comme référence de potentiel (0 V), appelé « masse ».
- La tension électrique est une différence de potentiel entre deux points. Elle mesure la tendance des charges positives à se déplacer d'un point vers l'autre.

$$u_{AB}(t) = V_A(t) - V_B(t).$$

Elle se mesure avec un voltmètre, toujours branché en parallèle.

- Conventions d'étude d'un dipôle :
  - Récepteur : les flèches représentant la tension et le courant sont de sens opposés.
  - Générateur : les flèches représentant la tension et le courant sont de même sens.
- La puissance électrique aux bornes d'un dipôle est donnée par :

$$P(t) = u(t) \cdot i(t).$$

Selon la convention, il s'agit d'une puissance reçue ou fournie.

#### Circuits électriques

- L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) postule que la propagation du signal est instantanée. En régime variable, sa validité requiert que la longueur maximale du circuit  $\ell$  soit très inférieure à la longueur d'onde  $\lambda$  du signal.

$$\ell \ll \lambda.$$

En régime continu, l'approximation est toujours valide.

- Un réseau est constitué de nœuds (connexion d'au moins trois branches), de branches (portion entre deux nœuds) et de mailles (parcours fermé).
- Loi des nœuds (traduit la conservation de la charge) :

$$\sum_k \epsilon_k i_k = 0,$$

avec  $\epsilon_k = +1$  si le courant  $i_k$  arrive au nœud, et  $\epsilon_k = -1$  s'il en repart.

Autrement,

$$\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}.$$

- Loi des mailles :

$$\sum_k \epsilon_k u_k = 0.$$

avec  $\epsilon_k = +1$  si la flèche de tension  $u_k$  est orientée dans le sens de parcours de la maille, et  $\epsilon_k = -1$  sinon.

## Dipôles linéaires dans l'ARQS

### Conducteur ohmique

- Un conducteur ohmique (ou résistor) est caractérisé par sa résistance (en  $\Omega$ ) et satisfait la loi d'Ohm :

$$u(t) = R \cdot i(t).$$

Un fil peut être considéré comme un résistor de résistance nulle, et un interrupteur ouvert comme un résistor de résistance infinie.

- La conductance est l'inverse de la résistance, exprimée en Siemens (S) ou  $\Omega^{-1}$ .

$$i(t) = G \cdot u(t); \quad G = \frac{1}{R}.$$

- Un résistor dissipe une puissance (thermique) par effet Joule :

$$P_J = R i^2 = \frac{u^2}{R}.$$

- Il est possible de ramener le groupement de plusieurs résistors à un seul résistor équivalent. Lorsque les résistors sont en série,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Lorsque les résistors sont en parallèle,

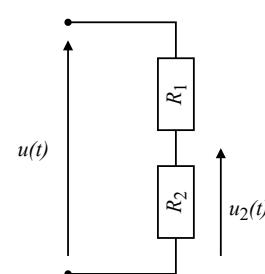
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots; \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Le cas particulier de deux résistors en parallèle est très fréquent :

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\text{Produit}}{\text{Somme}}.$$

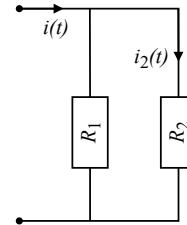
- Pont diviseur de tension :

$$u_2(t) = u(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$



- Pont diviseur de courant :

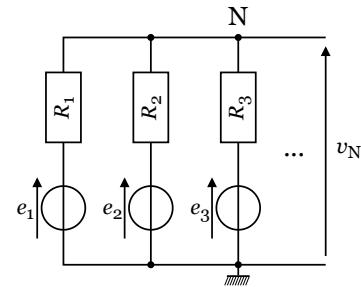
$$i_2(t) = i(t) \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$



- Loi des nœuds en termes de potentiels (Théorème de Millman) :

$$v_N = \frac{\sum_i \frac{e_i}{R_i}}{\sum_i \frac{1}{R_i}}.$$

Il faut voir le numérateur comme une somme de courants : selon les cas, cela peut être un quotient comme ci-dessous, ou bien un simple courant (générateur de courant) ou encore 0 (aucun générateur).



### Condensateur

- Un condensateur est caractérisé par sa capacité  $C$ , en Farads (F). La charge  $q$  (en coulombs, C) de l'armature sur laquelle arrive le courant est liée à la tension  $u$  à ses bornes.

$$q(t) = Cu(t).$$

- Relation fondamentale :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}.$$

- En régime continu, un condensateur équivaut à un interrupteur ouvert ( $i = 0$ ).
- L'énergie électrostatique stockée par un condensateur vaut :

$$E_C = \frac{1}{2} Cu^2(t).$$

- La tension aux bornes d'un condensateur est continue. ( $u(0^-) = u(0^+)$  par ex.)

### Bobine

- Une bobine est caractérisée par son inductance  $L$ , en Henrys (H).
- Relation fondamentale :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

En régime continu, une bobine idéale équivaut à un fil ( $u = 0$ ).

- L'énergie magnétique stockée par une bobine vaut :

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2(t).$$

- L'intensité du courant traversant une bobine est continue.

## 4 CIRCUITS LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

### Régimes

- Le régime transitoire correspond à l'intervalle de temps durant lequel la grandeur étudiée évolue. Lorsqu'elle se stabilise, on parle de régime permanent ou régime établi.
- Pour estimer la durée du régime transitoire, on utilise souvent le temps de réponse à 5 %, qui est l'instant à partir duquel la grandeur étudiée ne s'écarte plus de 5 % de sa valeur finale.

### Équations différentielles du premier ordre

Cette section s'intéresse à la réponse temporelle d'un circuit du premier ordre soumis à une sollicitation brusque. On étudie alors l'évolution de grandeurs physiques telles que la tension aux bornes d'un condensateur ou le courant dans une bobine.

#### Établissement

- Utiliser la loi des mailles pour établir la relation globale entre les tensions du circuit.
- Appliquer la loi d'Ohm pour le conducteur ohmique afin de lier tension et courant.
- Intégrer la loi fondamentale du condensateur ou de la bobine, qui fait intervenir la dérivée temporelle de la grandeur étudiée et mène à l'équation différentielle.

#### Résolution

- Mettre l'équation sous sa forme canonique pour identifier la constante de temps  $\tau$  et la valeur finale en régime permanent  $F_\infty$  :

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = \frac{F_\infty}{\tau} \quad \text{ou} \quad f(t) + \tau \frac{df(t)}{dt} = F_\infty.$$

- Indiquer la solution  $f_1(t)$  de l'équation différentielle homogène (sans second membre) :

$$f_1(t) = Ce^{-t/\tau}.$$

- Déterminer la solution particulière  $f_2(t)$ , qui est une constante égale à la valeur finale :

$$f_2(t) = F_\infty.$$

- Écrire la solution générale de l'équation différentielle comme la somme des deux précédentes :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = Ce^{-t/\tau} + F_\infty.$$

- Utiliser les conditions initiales, généralement à  $t = 0$ , pour déterminer la constante  $C$ .

Ex. 1 :  $f(0) = 0$ , alors  $Ce^0 + F_\infty = 0$ , d'où  $C = -F_\infty$ .

Ex. 2 :  $f(0) = 2$ , alors  $Ce^0 + F_\infty = 2$ , d'où  $C = 2 - F_\infty$ .

- Écrire la solution finale :

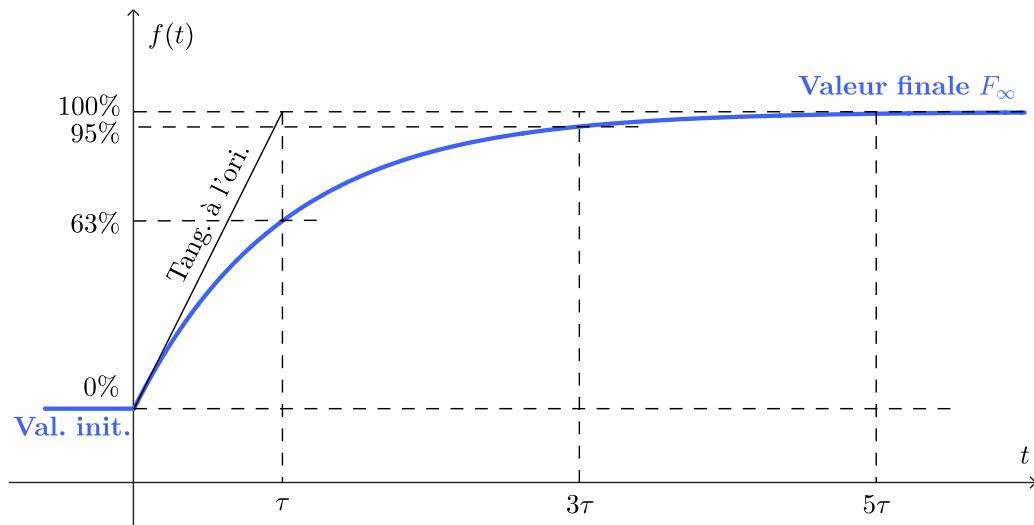
$$f(t) = Ce^{-t/\tau} + F_\infty.$$

Dans le cas des exemples précédents,

Ex. 1 :  $f(t) = -F_\infty e^{-t/\tau} + F_\infty$ , i.e.  $f(t) = F_\infty(1 - e^{-t/\tau})$ .

Ex. 2 :  $f(t) = (2 - F_\infty)e^{-t/\tau} + F_\infty$ .

### Tracé de la solution



- La tangente à l'origine de la courbe coupe l'asymptote horizontale (valeur finale  $F_\infty$ ) à l'instant  $t = \tau$ . Cette propriété permet une détermination graphique de la constante de temps et réciproquement.
- La réponse du système atteint des pourcentages clés de sa variation totale à des multiples de  $\tau$  :
  - À  $t = \tau$ , la grandeur atteint 63 % de sa valeur finale.
  - À  $t = 3\tau$ , la grandeur atteint 95 % de sa valeur finale (fin du régime transitoire).
  - À  $t = 5\tau$ , la grandeur atteint 99 % de sa valeur finale.
- Ces caractéristiques sont valables pour une grandeur croissante (charge, établissement du courant) comme pour une grandeur décroissante (décharge, rupture du courant).

### Aspect énergétique

- En appelant  $P_G$  la puissance fournie par le générateur,  $P_J$  la puissance dissipée par le résistor, et  $E$  l'énergie emmagasinée dans le condensateur ou la bobine, on établit la relation suivante :

$$P_G = \frac{dE}{dt} + P_J.$$

## 5 OSCILLATEURS LIBRES ET FORCÉS

### 1. OSCILLATEURS HARMONIQUES

*Contenu à paraître*

#### Approche expérimentale : oscillateurs mécaniques

##### Définition de l'oscillateur harmonique

##### Le système masse-ressort horizontal

##### Oscillateur harmonique vertical

##### Pendule simple

##### Oscillateur harmonique électrique LC

#### Analogie entre oscillateurs électriques et mécaniques

### 2. OSCILLATEURS AMORTIS

*Contenu à paraître*

#### Équations différentielles de l'oscillateur amorti

##### Méthode pour résoudre l'équation différentielle amortie

##### Décrément logarithmique

##### Oscillateur électrique RLC série

##### Oscillateur mécanique amorti vertical

##### Étude énergétique de l'oscillateur amorti

### 3. SYSTÈMES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

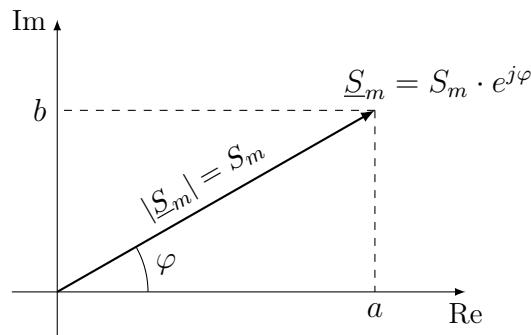
#### Représentation complexe

- En sciences physiques, il est d'usage d'écrire  $j$  au lieu de  $i$  et par convention, les grandeurs complexes sont toujours soulignées.
- On associe à  $s(t) = S_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  la grandeur complexe

$$\underline{s}(t) = S_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S}_m \cdot e^{j\omega t}$$

avec l'amplitude complexe  $\underline{S}_m = S_m \cdot e^{j\varphi}$ . On identifie ainsi  $|\underline{S}_m| = S_m$  et  $\text{Arg}(\underline{S}_m) = \varphi$ .

- Il est possible de représenter l'amplitude complexe  $\underline{S}_m$  associée à la grandeur sinusoïdale  $s(t)$  dans le plan complexe :



- Le passage de la forme polaire  $(S_m e^{j\varphi})$  à la forme cartésienne  $(a+jb)$  se fait par  $a = S_m \cos \varphi$  et  $b = S_m \sin \varphi$ . Inversement,  $S_m = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\varphi = \arctan(b/a)$  si  $a > 0$ ; (sinon (rare)  $\varphi = \arctan(b/a) + \pi$ ).
- La grandeur complexe associée à la somme de deux signaux sinusoïdaux est la somme de leurs grandeurs complexes associées, ce qui permet de traiter simplement les combinaisons linéaires de fonctions sinusoïdales (avec des signaux de même pulsation).

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \iff \underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t) = (\underline{S}_{1m} + \underline{S}_{2m}) e^{j\omega t} = \underline{S}_m e^{j\omega t}.$$

- Pour dériver une grandeur complexe, il suffit de la multiplier par  $j\omega$  :

$$\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d\underline{S}_m}{dt} = j\omega \cdot \underline{S}_m.$$

L'intégration correspond à une division par  $j\omega$  :

$$\int \underline{s}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \int \underline{S}_m dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{S}_m.$$

#### Impédance complexe

- L'impédance  $Z$  d'un dipôle, exprimée en ohms ( $\Omega$ ), relie l'amplitude du courant traversant le dipôle à la tension présente à ses bornes :

$$U = ZI, \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}.$$

- On définit le déphasage entre  $u$  et  $i$  comme étant la différence  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ .
- On appelle impédance complexe d'un dipôle la grandeur

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_{eff}}{\underline{I}_{eff}} = \frac{\underline{U}_m e^{j\varphi_u}}{\underline{I}_m e^{j\varphi_i}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

On a donc  $Z = |\underline{Z}|$  et  $\varphi = \text{Arg}(\underline{Z})$ .

- On définit également l'admittance complexe  $\underline{Y}$  (S ou  $\Omega^{-1}$ ) comme l'inverse de l'impédance :  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I}{U}$ .
- Impédances des dipôles élémentaires :

Dipôle	Impédance	Déphasage
Résistance	$\underline{Z}_R = R$	0
Inductance	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$+\frac{\pi}{2}$
Condensateur	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

- Associations :
  - Série : l'impédance complexe équivalente est la somme des impédances.  $\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}_i$ .
  - Parallèle : l'impédance complexe équivalente vérifie  $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_i} = \sum \underline{Y}_i$ .
- Toutes les méthodes utilisées pour la résolution des circuits en continu (noeuds, mailles, ponts, Millman, etc.) peuvent être réutilisées en RSF à condition d'utiliser les amplitudes complexes et les impédances.

## Circuits du second ordre en régime sinusoïdal forcé

- Un système excité périodiquement présente une résonance pour une grandeur physique lorsque l'amplitude de celle-ci admet un maximum pour une fréquence particulière de l'excitation appelée fréquence de résonance.
- Pour un circuit RLC série alimenté par  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ , l'impédance complexe totale est

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right).$$

On obtient aisément le module et le déphasage de la tension par rapport au courant en vertu de leurs formules respectives.

- La partie imaginaire s'annule pour la pulsation propre  $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$  i.e.  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
  - Si  $\omega = \omega_0$ , le circuit est purement résistif ( $\varphi = 0$ ).
  - Si  $\omega < \omega_0$ , le circuit est capacitif (tension en retard sur le courant ;  $\varphi < 0$ ).
  - Si  $\omega > \omega_0$ , le circuit est inductif (tension en avance sur le courant ;  $\varphi > 0$ ).
- Étude asymptotique : dans chacun des cas, on remplace les condensateurs et les inductances par un interrupteur fermé (impédance nulle) ou par un interrupteur ouvert (impédance vers l'infini). On laisse les résistances inchangées.
  - B.F. ( $\omega \rightarrow 0$ ) : l'inductance se comporte comme un fil et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Le courant est donc nul, tout comme la tension aux bornes de la résistance. C'est que  $\underline{i}_{BF}(t) = 0$ ,  $\underline{u}_{L BF}(t) = 0$  et  $\underline{u}_{C BF}(t) = \underline{e}_{BF}(t)$ .
  - H.F. ( $\omega \rightarrow \infty$ ) : l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. De même, le courant tend vers 0. C'est que  $\underline{i}_{HF}(t) = 0$ ,  $\underline{u}_{L HF}(t) = \underline{e}_{HF}(t)$  et  $\underline{u}_{C HF}(t) = 0$ .

### 5.16.1 RÉSONANCE D'INTENSITÉ DES CIRCUITS RLC SÉRIE

- On choisit  $e(t)$  comme origine des phases. On peut alors écrire  $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  puis en notation complexe  $\underline{e}(t) = E_m \cdot e^{j\omega t}$ .

En utilisant les amplitudes complexes, on peut déterminer l'intensité complexe du courant :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}.$$

En factorisant par  $R$ , on obtient l'expression suivante :

$$\underline{I}_m = \frac{\frac{E_m}{R}}{1 + j(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega})}.$$

En posant  $I_m = \frac{E_m}{R}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  on peut mettre le résultat sous la forme canonique suivante :

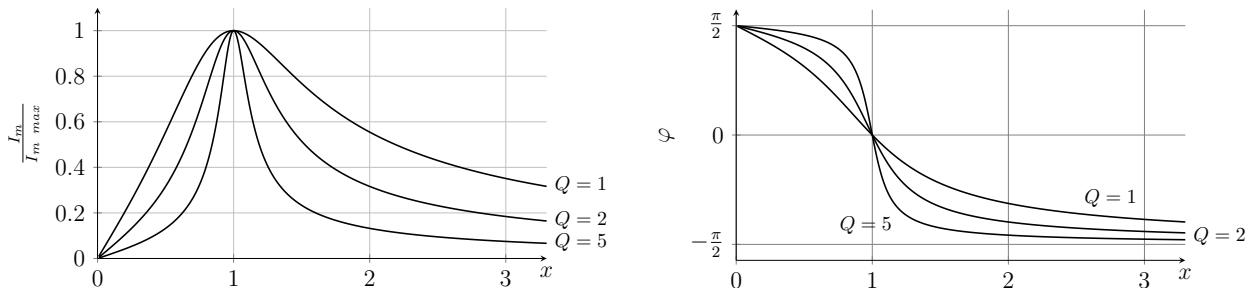
$$\underline{I}_m = \frac{I_m}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} = \frac{I_m \cdot \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}.$$

En remplaçant  $x$  par  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , l'identification de la forme canonique  $\underline{I}_m = \frac{I_m \cdot \frac{j\omega}{Q}}{1 + \frac{j\omega}{Q} + (j\omega)^2}$  avec

la relation électrique  $\underline{I}_m = \frac{\frac{E_m}{R} \cdot jRC\omega}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}$  est plus aisée. Les expressions sont équivalentes à condition que  $\frac{1}{\omega_0^2} = LC$ , que  $I_m = \frac{E_m}{R}$  et que  $RC = \frac{1}{Q\omega_0}$ . On en déduit les relations

$$I_m = \frac{E_m}{R}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

- Il y a résonance en intensité lorsque la pulsation  $\omega$  est égale à la pulsation propre  $\omega_0$  ( $x = 1$ ). Pour cette pulsation, l'impédance  $Z$  est minimale ( $Z = R$ ) et l'intensité est maximale :  $I_{m \max} = \frac{E_m}{R}$ . Cette résonance est systématique quel que soit  $Q$ , et courant et tension y sont en phase.



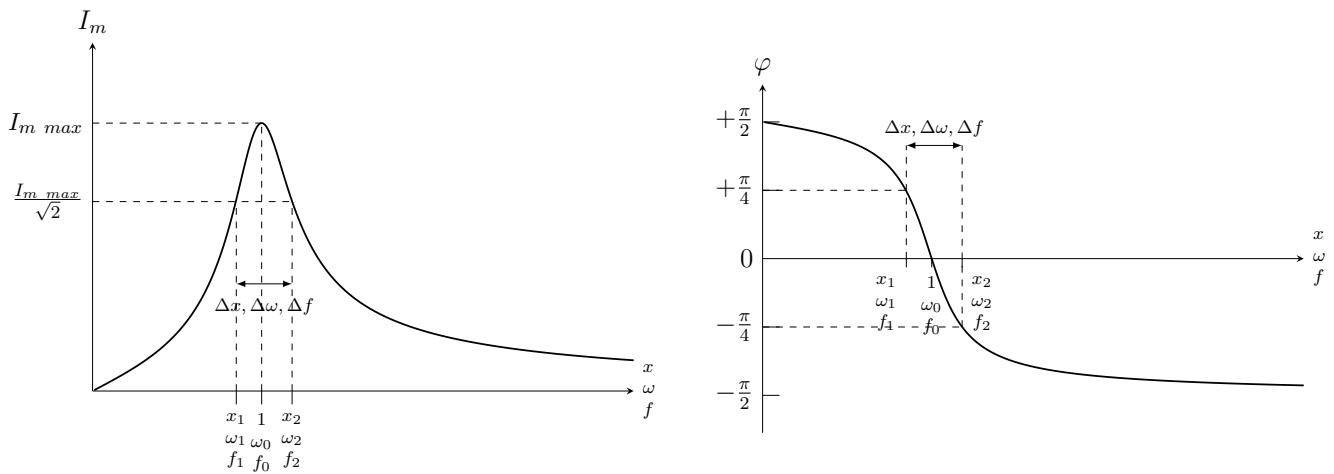
- La bande passante d'un filtre est l'intervalle des fréquences  $\Delta\omega$  (ou des pulsations  $\Delta f$ ) pour lesquelles le signal de sortie vérifie

$$S \geq \frac{S_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

- Le facteur de qualité d'un circuit résonnant en intensité vérifie la relation

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{\Delta x}.$$

- Si le facteur de qualité est élevé, la bande passante est étroite : on dit que la résonance est aiguë.
- Si le facteur de qualité est faible, la bande passante est large : on dit que la résonance est floue.
- On peut également déterminer la bande passante à l'aide de la courbe de phase. En effet, pour les pulsations réduites  $x_1$  et  $x_2$  correspondant aux bornes de la bande passante, le déphasage vaut  $\pm\frac{\pi}{4}$ .



### 5.16.2 RÉSONANCE EN TENSION (AUX BORNES DU CONDENSATEUR) DU CIRCUIT RLC SÉRIE

- On choisit toujours la tension  $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t)$  du générateur comme référence des phases. On étudie la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur. En utilisant le pont diviseur de tension, on détermine l'amplitude complexe

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}.$$

En multipliant par l'admittance du condensateur  $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}$ , on obtient

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{1}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}.$$

En posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on peut mettre le résultat sous la forme canonique suivante :

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{1}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}.$$

Il est alors possible de déterminer l'amplitude maximale de la tension aux bornes du condensateur :

$$U_{C_m} = |\underline{U}_{C_m}| = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}.$$

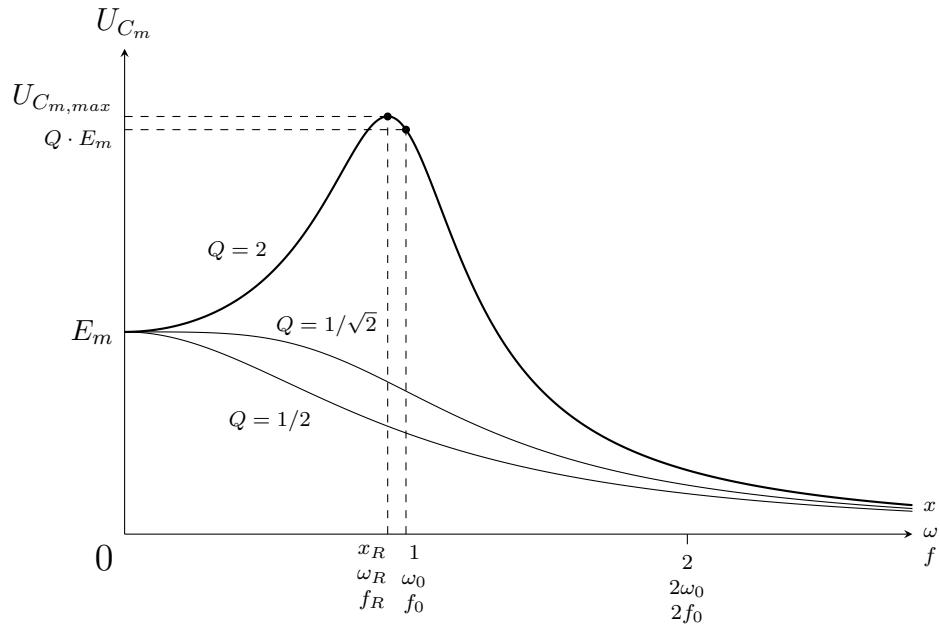
- Quelle que soit la valeur du facteur de qualité, à la pulsation propre on a  $U_{C_m}(x = 1) = Q \cdot E_m$ .
- Le phénomène de résonance en tension n'apparaît que si le facteur de qualité est suffisamment élevé, lorsque  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Sinon la courbe est décroissante (pas de pic).

- La résonance en tension apparaît pour la pulsation de résonance en tension  $\omega_R < \omega_0$  :

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

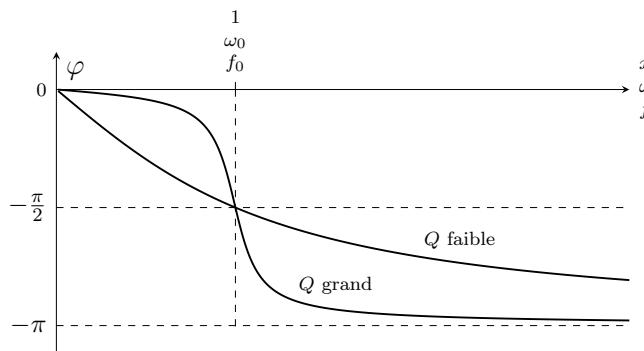
L'amplitude maximale vaut alors

$$U_{C_{m,max}} = \frac{Q \cdot E_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$



Si le facteur de qualité est très élevé ( $Q > 5$ ),  $\omega_R \approx \omega_0$  et  $U_{C_{m,max}} \approx Q \cdot E_m$ .  $Q$  est alors appelé coefficient de surtension.

- La courbe de phase en tension correspond à la courbe de phase en intensité translatée de  $-\frac{\pi}{2}$ .



### 5.16.3 SYSTÈME MÉCANIQUE DU SECOND ORDRE EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

- On modélise le système par un point matériel de masse  $m$  accroché à un ressort et un système exciteur qui assure un mouvement rectiligne sinusoidal  $z_A(t) = A \cos(\omega t)$ .

On établit la relation de longueur  $\ell(t) = \ell_{eq} + z(t) - z_A(t)$ .

Bilan des forces :

- poids  $\vec{P} = mg\vec{e}_z$ ,
- force de rappel du ressort  $\vec{F} = -k\Delta\ell\vec{u} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_z = -k(z(t) - z_A(t) + \frac{mg}{k})\vec{e}_z$ ,

- force de frottement fluide  $\vec{f} = -\alpha \dot{z} \vec{e}_z$ .
- Le PFD projeté sur l'axe  $O\vec{z}$  donne  $-k(z(t) - z_A(t) + \frac{mg}{k}) \vec{e}_z + mg\vec{e}_z - \alpha \dot{z} \vec{e}_z = m\ddot{z}\vec{e}_z$  i.e.  $m\ddot{z} + \alpha \dot{z} + kz = kz_A(t)$ , soit encore

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} z_A(t).$$

En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$ , on obtient la forme canonique

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_A(t).$$

### Résonances en amplitude

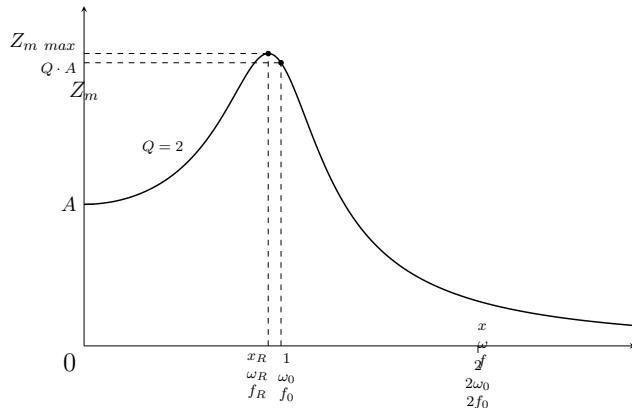
- En notation complexe, l'excitation est  $\underline{z}_A(t) = A e^{j\omega t}$ . On cherche  $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$ . L'équation devient :  $-\omega^2 \underline{z} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} = \omega_0^2 A$ . On obtient l'amplitude complexe

$$\underline{Z}_m = A \cdot \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Voici alors le module (amplitude des oscillations) :

$$Z_m = |\underline{Z}_m| = \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}.$$

- C'est la même forme mathématique que la résonance en tension du circuit RLC. De même, si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il y a résonance en élévation et la pulsation de résonance est  $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ . L'amplitude maximale est  $Z_{m \ max} = \frac{QA}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ .



- La courbe de phase est identique à celle en tension.

### Résonances en vitesse

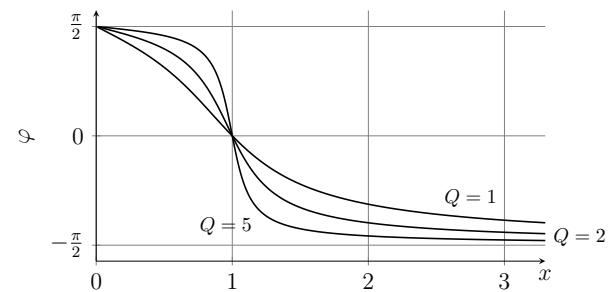
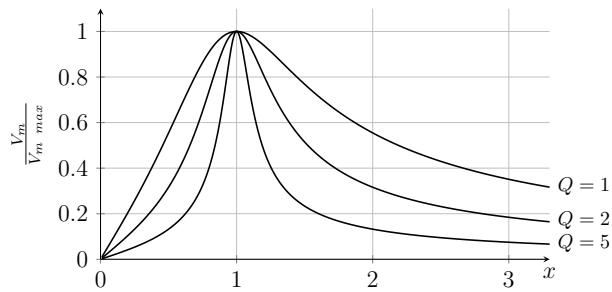
- On s'intéresse à la vitesse  $v(t) = \dot{z}(t)$ . En complexe,

$$\underline{V}_m = j\omega \cdot \underline{z}(t) = j\omega \cdot \underline{Z}_m = \frac{j\omega A}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}.$$

En factorisant pour faire apparaître la forme canonique (analogue à l'intensité),

$$\underline{V}_m = \frac{QA\omega_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

- Il y a résonance en vitesse lorsque la pulsation est égale à la pulsation propre ( $x = 1$ ). Pour cette pulsation, la vitesse est maximale et vaut  $V_{m,max} = QA\omega_0$ . Ce phénomène est observable systématiquement (pour tout  $Q$ ).



2

# 1 ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE

## Description et paramétrage du mouvement d'un point

- Un point matériel est un objet sans dimension, caractérisé par sa masse (grandeur scalaire invariante en kg). Son mouvement se déroule dans l'espace et le temps.
- En mécanique classique, on suppose que la vitesse des corps est très faible devant la célérité de la lumière (sinon il faut utiliser la relativité). De plus, la taille des systèmes étudiés est très grande devant celle de l'atome (sinon il faut utiliser la mécanique quantique). Ainsi, le temps et les distances sont absous.
- Le mouvement est relatif : il dépend de l'observateur. Il est donc nécessaire de définir un référentiel d'étude.
- Un référentiel est constitué d'un repère d'espace pour situer une position et d'une horloge pour mesurer le temps.
- Cas usuels : référentiel terrestre (laboratoire), géocentrique (centre de la Terre), héliocentrique (Soleil).
- La position du point  $M$  à l'instant  $t$  par rapport à l'origine  $O$  du repère est donnée par le vecteur position

$$\vec{r}(t) = \vec{OM}(t).$$

L'ensemble des positions successives constitue la trajectoire.

- Le vecteur vitesse instantanée est la dérivée temporelle du vecteur position :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}.$$

Il est toujours tangent à la trajectoire au point  $M(t)$ .

- Le vecteur accélération instantanée est la dérivée du vecteur vitesse :

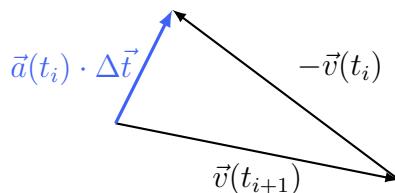
$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}(t)}{dt^2}.$$

Il est toujours orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

- Lors d'un enregistrement vidéo (discret), on approxime ces vecteurs par des variations moyennes entre deux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$  séparés par  $\Delta t$  :

$$\vec{v}(t_i) = \frac{\vec{OM}(t_{i+1}) - \vec{OM}(t_i)}{\Delta t} \quad ; \quad \vec{a}(t_i) = \frac{\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_i)}{\Delta t}.$$

Graphiquement, on détermine la direction et le sens de  $\vec{a}(t_i)$  en construisant la différence vectorielle  $\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_i)$ .



## Cinématique en coordonnées cartésiennes

- On se place dans un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .
- Le vecteur position s'écrit

$$\vec{r}(t) = O\vec{M}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Sa norme est  $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

- En dérivant le vecteur position on obtient le vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{dO\vec{M}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

- De même, le vecteur accélération s'obtient par une nouvelle dérivation :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}}(t) = \frac{d^2O\vec{M}(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

### 1.2.1 MOUVEMENT RECTILIGNE À ACCÉLÉRATION CONSTANTE

- Considérons un point matériel défini par une vitesse initiale  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$  et par une accélération  $\vec{a}_0$  constante colinéaire au vecteur vitesse initial dans le référentiel lié au sol.
- On choisit le système de coordonnées cartésiennes pour simplifier les calculs de sorte que :

$$O\vec{M}(0) = \vec{0}; \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{a}(t) = \vec{a}_0 = a_0\vec{e}_x.$$

- L'accélération est imposée par l'extérieur, mais dépend aussi de la définition des coordonnées cartésiennes :  $\vec{a}(t) = a_0\vec{e}_x = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$ . Cette équation peut être vue sous forme de vecteur colonne :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

Par identification, on trouve les équations du mouvement :

$$\ddot{x}(t) = a_0; \quad \ddot{y}(t) = 0; \quad \ddot{z}(t) = 0.$$

- On doit intégrer une fois le vecteur accélération pour obtenir le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} a_0 t + v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix},$$

où  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  et  $v_{0z}$  sont trois constantes d'intégration que l'on détermine en utilisant la condition initiale  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

On obtient ainsi

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} a_0 t + v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- En intégrant le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$ , on obtient le vecteur position :

$$\vec{OM}(t) = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

où  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  sont trois constantes d'intégration déterminées par la position initiale  $\vec{OM}(0) = \vec{0}$ .

On obtient finalement

$$\vec{OM}(t) = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.2 MOUVEMENT COURBE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ

- Considérons un point matériel défini par une vitesse initiale  $\vec{v}(0)$  et par une accélération constante cette fois orthogonale au vecteur vitesse initial.
- On se place en coordonnées cartésiennes de sorte que :

$$\vec{OM}(0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{a}(t) = \vec{a}_0 = a_0\vec{e}_y.$$

- Équations du mouvement :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \ddot{x}(t) = 0 ; \quad \ddot{y}(t) = a_0 ; \quad \ddot{z}(t) = 0.$$

- Obtention du vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = v_0\vec{e}_x + a_0t\vec{e}_y = \begin{pmatrix} v_0 \\ a_0t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Obtention du vecteur position :

$$\vec{OM}(t) = \vec{r}(t) = v_0t\vec{e}_x + \frac{1}{2}a_0t^2\vec{e}_y = \begin{pmatrix} v_0t \\ \frac{1}{2}a_0t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- La trajectoire dans le plan  $(x, y)$  est donnée par  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0t \\ \frac{1}{2}a_0t^2 \end{pmatrix}$ .

Pour obtenir l'équation de la courbe  $y = f(x)$ , il faut faire disparaître le temps de l'expression de  $y$  pour faire apparaître  $x$ . On exprime le temps  $t$  en fonction de  $x$ , ce qui donne  $t = \frac{x}{v_0}$ . On injecte ce temps dans l'expression de  $y$ , ce qui donne

$$y(x) = \frac{1}{2}a_0 \left( \frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{a_0}{v_0^2} x^2.$$

Il s'agit d'une trajectoire parabolique.

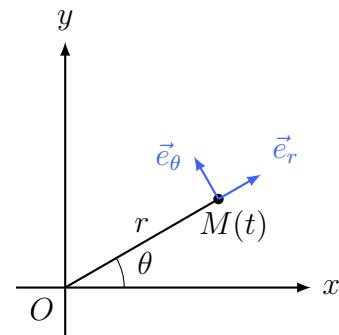
## Cinématique en coordonnées cylindriques et polaires

### 1.3.1 COORDONNÉES POLAIRES

- En coordonnées polaires, un point  $M(t)$  du plan est repéré par les variables  $r$  et  $\theta$  telles que :

- le rayon  $r = OM \in [0, +\infty[$  ;
- l'angle  $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OM}) \in [0, 2\pi]$ .

Le lien avec les coordonnées cartésiennes est immédiat :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .



- On définit la base locale orthonormée directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . Il s'agit d'une base mobile rattachée au point  $M$  (contrairement à la base cartésienne qui est fixe).
- Les vecteurs de base dépendent de l'angle  $\theta$ . Voici comment on les dérive :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r.$$

- L'expression du vecteur position est très simple en coordonnées polaires :

$$\vec{r}(t) = \vec{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) = r\vec{e}_r.$$

*Comme ci-haut, simplifions par la suite, les notations des variables.*

- Le vecteur vitesse s'obtient en dérivant le vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta ;$$

- Le vecteur accélération s'obtient en dérivant le vecteur vitesse :

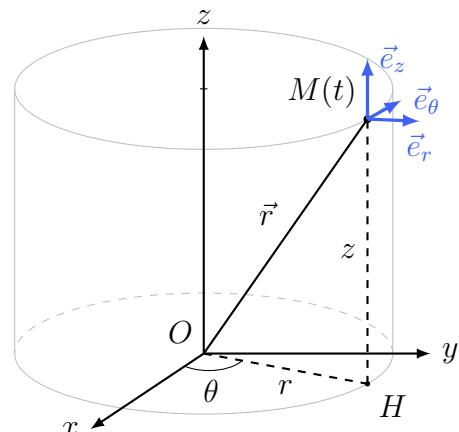
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \frac{d\dot{r}\vec{e}_r}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt} = (\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta) + (\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r).$$

En regroupant les termes selon  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ , on obtient :

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

### 1.3.2 COORDONNÉES CYLINDRIQUES

- Il s'agit de la généralisation des coordonnées polaires pour les mouvements en trois dimensions.
- Si on note  $H$  le projeté de  $M$  dans le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , on définit :
  - le rayon polaire  $r = OH$  ;
  - l'angle polaire  $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OH})$  ;
  - la cote  $z$  (comme en coordonnées cartésiennes) ;
  - le vecteur radial  $\vec{e}_r$  ;
  - le vecteur orthoradial  $\vec{e}_\theta$ .
- La base locale cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  suit le mouvement de  $M$ .
- Les expressions des vecteurs cinématiques se déduisent des coordonnées polaires en ajoutant la composante verticale :
  - position :  $\vec{OM}(t) = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$  ;
  - vitesse :  $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$  ;
  - accélération :  $\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$ .



### 1.3.3 MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

- Un point  $M$  possède un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle de rayon constant  $r(t) = R$ . Si le mouvement est uniforme, la norme du vecteur vitesse est constante.
- La vitesse angulaire est constante :  $\dot{\theta}(t) = \Omega$ . On a alors la relation  $v = \|\vec{v}\| = R\Omega$ .
- Vecteur accélération : en remplaçant  $r(t)$  par  $R$  et  $\ddot{\theta}$  par 0 dans l'expression générale, il ne reste que le terme radial :

$$\vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

On dit que cette accélération est centripète (dirigée vers le centre de la trajectoire).

### 1.3.4 MOUVEMENT CIRCULAIRE NON UNIFORME

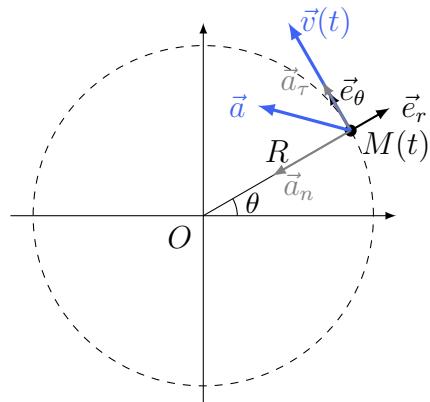
- Dans ce cas, la trajectoire reste un cercle de rayon  $R$ , mais la vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t)$  varie au cours du temps.
- Le vecteur position vérifie  $O\vec{M}(t) = R\vec{e}_r$ .
- Le vecteur vitesse est purement tangentiel :

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v(t)\vec{e}_\theta.$$

- En simplifiant le vecteur accélération des coordonnées polaires, deux composantes apparaissent :

$$\vec{a}(t) = \underbrace{-R\dot{\theta}^2\vec{e}_r}_{\vec{a}_n} + \underbrace{R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta}_{\vec{a}_\tau} = -\frac{v(t)^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_\theta.$$

- On définit ainsi :
  - l'accélération normale  $\vec{a}_n$ , dirigée selon  $-\vec{e}_r$ , liée à la courbure de la trajectoire ;
  - l'accélération tangentielle  $\vec{a}_\tau$ , dirigée selon  $\vec{e}_\theta$ , liée à la variation de la norme de la vitesse.



## Introduction au mouvement des solides

- Un solide indéformable est un ensemble de points tel que la distance entre deux points quelconques du solide reste constante au cours du temps.
- Un solide est en translation si, à tout instant, les vecteurs vitesse de tous ses points sont identiques.
- Types de translation :
  - rectiligne : les trajectoires des points sont des droites parallèles ;
  - circulaire : les trajectoires sont des cercles de même rayon mais les axes liés au solide gardent une direction fixe (ex : nacelle de grande roue).
- Un solide est en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrées sur  $\Delta$ .
- La vitesse d'un point  $M$  situé à une distance  $r$  de l'axe est portée par la tangente au cercle et vaut :

$$v = r\omega$$

où  $\omega = \dot{\theta}$  est la vitesse angulaire du solide. Contrairement à la translation, le champ des

vitesses n'est pas uniforme : la vitesse dépend de la distance à l'axe.

## 2 MÉCANIQUE NEWTONIENNE

### Forces et interactions

- Il existe quatre interactions fondamentales qui régissent la physique :
  - l’interaction gravitationnelle, de portée infinie et dominante à l’échelle astronomique ;
  - l’interaction électromagnétique, de portée infinie et dominante à l’échelle atomique et humaine, responsable de la cohésion de la matière et des frottements ;
  - l’interaction forte, de portée très courte  $\sim 10^{-14}$  m, responsable de la cohésion des noyaux ;
  - l’interaction faible, de portée très courte  $\sim 10^{-18}$  m, qui intervient auprès des nucléons.
- Une force modélise l’action mécanique exercée par un système sur un autre. Elle est représentée par un vecteur  $\vec{F}$  caractérisé par : une direction, un sens et une norme (intensité en Newton N).
- On distingue les forces de contact (nécessitant un contact physique, ex : tension, frottement) des forces à distance (champ de force, ex : poids, force électrique).

#### 2.1.1 INTERACTIONS USUELLES

- La force d’interaction gravitationnelle exercée par un point matériel  $M_1$  sur  $M_2$  (masses  $m_1, m_2$ ) séparés d’une distance  $r$  est

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12},$$

avec  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup>.kg<sup>-1</sup>.s<sup>-2</sup> et  $\vec{u}_{12}$  vecteur unitaire de 1 vers 2.

Cas particulier : la force d’attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet ponctuel  $M$  de masse  $m$  s’appelle le poids et vérifie  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$  (car  $g = \frac{GM_t}{R_T^2}$ ).

- La force d’interaction électrostatique exercée par une particule de charge  $q_1$  sur une autre de charge  $q_2$  séparées d’une distance  $r$  est

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12},$$

où la permittivité du vide  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$  F/m et la constante de Coulomb  $k = 9,0 \times 10^9$  N·m<sup>2</sup>·C<sup>-2</sup>.

Plus généralement, une particule de charge  $q$  placée dans un champ électrique  $\vec{E}$  subit la force électrostatique

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}.$$

- Pour un fil inextensible de masse négligeable, la tension  $\vec{T}$  est dirigée le long du fil, de l’objet vers le point d’attache. Si le fil n’est pas tendu,  $\vec{T} = \vec{0}$ .
- Soit un ressort de masse négligeable, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Si sa longueur est  $\ell$ , il exerce une force de rappel

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u},$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire orienté dans le sens de l’allongement.

- La réaction  $\vec{R}$  d’un support solide se décompose en une composante normale  $\vec{R}_n$  et une composante tangentielle  $\vec{R}_t$  (force de frottement). Les lois de Coulomb (frottements solides) permettent de relier leurs normes via le coefficient de frottement  $f$  :

- absence de glissement (statique) :  $\|\vec{R}_t\| \leq f\|\vec{R}_n\|$  ;
- glissement avéré (dynamique) :  $\|\vec{R}_t\| = f\|\vec{R}_n\|$ .
- La force de frottement fluide s'exerce sur un solide se déplaçant dans un fluide. C'est une force de freinage opposée au vecteur vitesse. On distingue le modèle linéaire (faibles vitesses, frottements visqueux) du modèle quadratique (grandes vitesses) :

$$\vec{F}_{fl} = -\lambda \vec{v}; \quad \vec{F}_{fq} = -kv\vec{v}.$$

- La poussée d'Archimède est la force exercée par un fluide sur un volume immergé  $V$ . Elle est égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé :

$$\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g}.$$

## Lois de Newton

- Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , le vecteur quantité de mouvement d'un point  $M$  de masse  $m$  est défini par la relation

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}.$$

- PREMIÈRE LOI DE NEWTON : PRINCIPE D'INERTIE

Il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens, dans lesquels un point matériel isolé, soumis à aucune force, est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme. C'est que

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = c\vec{t}e; \quad \frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{0}.$$

- DEUXIÈME LOI DE NEWTON : PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Dans un référentiel galiléen,

$$\frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext \rightarrow M}.$$

Dans le cas où la masse est constante, cette loi s'écrit :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \sum \vec{F}_{ext \rightarrow M}.$$

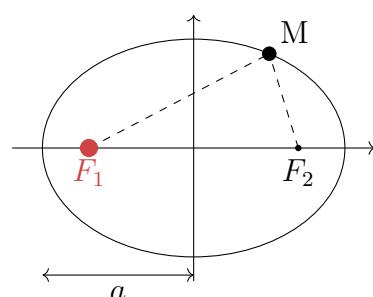
- TROISIÈME LOI DE NEWTON : PRINCIPE DES ACTIONS RÉCIPROQUES

Si un système  $A$  exerce une force sur un système  $B$ , alors  $B$  exerce simultanément sur  $A$  une force de même direction, de même intensité, mais de sens opposé :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}.$$

## Lois de Kepler

- PREMIÈRE LOI DE KEPLER : LOI DES ORBITES  
Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire d'une planète est décrite par une orbite elliptique dont le Soleil occupe un des foyers.
- Notons que  $F_1M + F_2M$  est constante.



– DEUXIÈME LOI DE KEPLER : LOI DES AIRES

Dans le référentiel héliocentrique, le segment reliant le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

- En effet, la vitesse de la planète n'est pas uniforme : elle est maximale au périhélie et minimale à l'aphélie.

– TROISIÈME LOI DE KEPLER : LOI DES PÉRIODES

Le carré de la période de révolution  $T$  est proportionnel au cube du demi-grand axe  $a$  de l'orbite. Le rapport ne dépend que de la masse de l'astre attracteur :

$$\frac{T^2}{a^3} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Démontrons-le dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

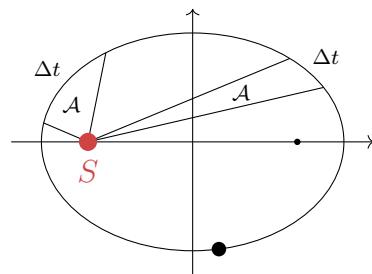
On considère une trajectoire circulaire de rayon  $R$  parcourue à vitesse constante  $v$ . La période s'exprime alors  $T = \frac{2\pi R}{v}$ .

La deuxième loi de Newton appliquée à la planète de masse  $m$  tournant autour du soleil de masse  $M_S$ , projetée sur le vecteur normal (centripète), donne l'égalité entre la force gravitationnelle et le produit de la masse  $m$  par l'accélération normale  $a$  :

$$\frac{GM_S m}{R^2} = ma = m \frac{v^2}{R}.$$

En élevant l'expression de la période au carré et en y substituant  $v^2$ , on retrouve la loi :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 R^2}{\left(\frac{GM_S}{R}\right)} = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_S}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}.$$



### 3 APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

#### Premier principe de la thermodynamique

- L'énergie est une grandeur fondamentale qui se conserve pour un système isolé. Le premier principe de la thermodynamique stipule que la variation d'énergie totale  $\Delta E$  d'un système fermé est égale à la somme des transferts d'énergie avec l'extérieur, sous forme de travail  $W$  ou de chaleur  $Q$  (J) :

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U = W + Q.$$

- Dans le cadre de la mécanique du point matériel, l'énergie interne  $U$  (liée à l'agitation thermique) ne varie généralement pas. L'étude se concentre alors sur l'énergie mécanique, somme des énergies cinétique  $E_c$  et potentielle  $E_p$ .

#### Puissance et travail d'une force

- La puissance instantanée  $\mathcal{P}$  d'une force  $\vec{F}$  s'exerçant sur un point matériel animé d'une vitesse  $\vec{v}$  est définie par le produit scalaire  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$  (W).

Si  $\mathcal{P} > 0$ , la force est qualifiée de motrice car elle favorise le mouvement, tandis qu'elle est dite résistante si  $\mathcal{P} < 0$ .

Une force orthogonale au vecteur vitesse ne développe aucune puissance.

- Le travail élémentaire  $\delta W$  correspond à l'énergie transférée par la force lors d'un déplacement infinitésimal  $d\vec{OM}$  durant une durée  $dt$  :

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \vec{F} \cdot d\vec{OM}.$$

Le travail total pour un déplacement d'un point  $A$  vers un point  $B$  s'obtient par intégration le long de la trajectoire (J). Dans le cas particulier d'une force constante sur un déplacement rectiligne, cette intégrale se simplifie en un produit scalaire :  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ .

- Il convient de connaître quelques résultats classiques : le travail du poids  $\vec{P}$  ne dépend que de la variation d'altitude, soit  $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$ . À l'inverse, la force de frottement fluide dissipe systématiquement de l'énergie (travail résistant), tandis que la force magnétique de Lorentz, toujours perpendiculaire à la vitesse, ne travaille jamais.

#### Théorèmes de l'énergie cinétique

- L'énergie cinétique d'un point matériel de masse  $m$  est définie par la relation  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ . Elle représente l'énergie liée au mouvement du corps dans le référentiel d'étude.
- Deux théorèmes fondamentaux permettent de relier cette grandeur aux actions mécaniques. Le théorème de la puissance cinétique (TPC) traduit, dans un référentiel galiléen, l'égalité entre la dérivée temporelle de l'énergie cinétique et la somme des puissances des forces extérieures :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}).$$

- Par intégration temporelle, on obtient le théorème de l'énergie cinétique (TEC), qui stipule que la variation d'énergie cinétique entre deux positions est égale à la somme des travaux

des forces extérieures sur ce parcours :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}).$$

## Énergie potentielle et mécanique

- Une force est dite conservative lorsque son travail est indépendant du chemin suivi entre deux points. Cette propriété permet de définir une énergie potentielle  $E_p$  telle que le travail élémentaire de la force soit l'opposé de la variation de cette énergie ( $\delta W = -dE_p$ ). Parmi les exemples usuels figurent l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = mgz$  (avec un axe vertical ascendant) et l'énergie potentielle élastique d'un ressort  $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ . Ces grandeurs sont définies à une constante additive près.
- L'énergie mécanique  $E_m$  est la somme des énergies cinétique et potentielles du système. Le théorème de l'énergie mécanique énonce que sa variation est exclusivement due au travail des forces non conservatives  $\vec{F}_{nc}$  (telles que les frottements) :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{nc}).$$

En l'absence de telles forces, l'énergie mécanique se conserve au cours du temps, traduisant un transfert réversible entre énergie cinétique et potentielle.

## Positions d'équilibre et stabilité

- Une position d'équilibre correspond à un extrémum local de l'énergie potentielle, ce qui se traduit mathématiquement par l'annulation de sa dérivée par rapport à la position ( $\frac{dE_p}{dx} = 0$ ).
- La nature de cet équilibre dépend de la concavité de la courbe d'énergie potentielle. Un minimum local (forme de puits) caractérise un équilibre stable : si le système est légèrement écarté de cette position, il tend à y revenir. À l'inverse, un maximum local (forme de bosse) correspond à un équilibre instable.
- Lorsque l'énergie mécanique du système est insuffisante pour s'extraire d'un puits de potentiel ( $E_m < E_{p,max}$ ), le mouvement est borné : on parle d'état lié.

*Figure à venir...*

## 4 SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

### Rappels

- Un solide indéformable est un ensemble de points tel que la distance entre deux points quelconques du solide reste constante au cours du temps. Ce modèle est valide pour de nombreux systèmes mais exclut les objets mous ou élastiques.
- Pour repérer un solide dans l'espace, il faut six paramètres : trois coordonnées pour la position d'un point et trois angles pour l'orientation.
- Un solide  $S$  est en translation par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  si, à un instant  $t$ , les vecteurs vitesse de tous ses points sont identiques.
- On distingue la translation rectiligne et la translation circulaire (attention, l'orientation du solide ne change pas, comme la nacelle d'une grande roue).
- Un solide  $S$  est en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  si tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur cet axe.
- Voici l'expression de la vitesse d'un point du solide, situé à une distance  $r$  de l'axe :

$$v = r \cdot \dot{\theta} = r \cdot \omega.$$

Contrairement à la translation, il existe ici un champ des vitesses : chaque point possède une vitesse différente selon sa distance à l'axe.

### Moment cinétique scalaire

- Pour un solide en rotation, le moment cinétique scalaire ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) est défini par la relation linéaire

$$L_{\Delta/\mathcal{R}} = J_{\Delta} \dot{\theta}.$$

Il joue pour la rotation le même rôle que la quantité de mouvement ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ) pour la translation.

- Le moment d'inertie  $J_{\Delta}$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ), caractérise la répartition des masses autour de l'axe de rotation et quantifie la résistance du solide à un changement de mouvement de rotation. Plus la masse est éloignée de l'axe, plus le moment d'inertie est grand, et plus il est difficile de modifier la vitesse de rotation du solide.

### Moment scalaire d'une force

- Le moment d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  par rapport à un axe orienté  $\Delta$  traduit la capacité de cette force à faire tourner le système autour de l'axe.

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_{\Delta},$$

où  $O$  est un point quelconque de l'axe  $\Delta$ , et  $\vec{e}_{\Delta}$ , son vecteur unitaire qui définit le sens positif de la rotation.

- Si la force est dans un plan perpendiculaire à l'axe, le moment se calcule simplement par

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F \cdot d,$$

avec  $d$ , le bras de levier (distance orthogonale entre l'axe et la droite d'action de la force). Le signe est déterminé par le sens de rotation induit (attention au repère).

- Un couple est un ensemble de forces dont la résultante est nulle mais dont le moment résultant est non nul (ex. mains sur un volant de voiture).

## Théorème du moment cinétique

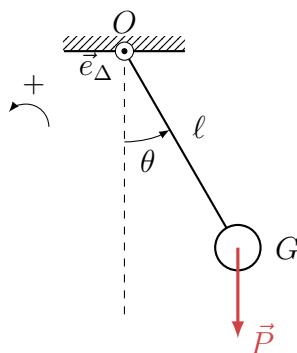
- Dans un référentiel galiléen, pour un solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ , la dérivée temporelle du moment cinétique scalaire est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées au solide par rapport à cet axe.

$$\frac{dL_{\Delta/R}}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

C'est l'analogie du PFD ( $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ ).

- Application au pendule pesant :

Considérons un pendule massif de masse  $m$ , dont le centre de gravité  $G$  est situé à une distance  $\ell$  de l'axe de rotation  $\Delta$  (point  $O$ ). Le système est soumis à son poids  $\vec{P}$  et à la réaction de l'axe  $\vec{R}$ , dont le moment est donc nul.



Le moment du poids s'écrit  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgl \sin(\theta)$ . En appliquant le TMC, on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$J_\Delta \ddot{\theta} = -mgl \sin(\theta); \quad \text{i.e.} \quad \ddot{\theta} + \frac{mgl}{J_\Delta} \sin(\theta) = 0.$$

Dans le cas des petites oscillations ( $\sin \theta \approx \theta$ ), on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_\Delta}}$ .

//// STOP EDIT ICI //// Document en cours de production.

### 4.4.1 ASPECTS ÉNERGÉTIQUES ET PORTRAIT DE PHASE

- On peut définir une intégrale première du mouvement, correspondant à la conservation de l'énergie mécanique  $E_m$  (si frottements négligés) :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = \text{cte}$$

- Le portrait de phase (tracé de  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$ ) permet de distinguer deux régimes :
  - **Mouvement libératoire (réolutif)** : L'énergie est suffisante pour faire des tours complets ( $\dot{\theta}$  ne s'annule jamais).
  - **Mouvement oscillatoire (pendulaire)** : Le pendule oscille dans un puits de potentiel (trajectoires fermées autour de positions d'équilibre stable).
- La séparation entre ces régimes s'appelle la séparatrice (cas limite où le pendule atteint tout juste la position verticale haute).

## Théorèmes énergétiques

### 4.5.1 ÉNERGIE CINÉTIQUE DE ROTATION

- L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

C'est l'analogie de  $\frac{1}{2}mv^2$  en translation.

### 4.5.2 THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE

- Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances des forces extérieures.

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}})$$

- Pour un solide en rotation, la puissance d'une force ou d'un couple s'exprime simplement à l'aide du moment :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_{\Delta} \cdot \dot{\theta}$$

- On retrouve ainsi le théorème du moment cinétique en dérivant l'énergie :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 \right) = J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{\Delta} \dot{\theta} \implies J_{\Delta} \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{\Delta}$$

## Systèmes déformables (Conservation du moment cinétique)

- Si la somme des moments des forces extérieures est nulle, le moment cinétique se conserve :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = 0 \implies L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega = \text{constante}$$

- Cas du tabouret d'inertie (ou du patineur) : C'est un système déformable. Si l'individu rapproche les bras (modification de la répartition de masse), son moment d'inertie  $J_{\Delta}$  diminue.
- Comme le produit  $J_{\Delta} \omega$  doit rester constant, la vitesse angulaire  $\omega$  augmente obligatoirement.

$$J_{\text{bras tendus}} > J_{\text{bras repliés}} \implies \omega_{\text{bras tendus}} < \omega_{\text{bras repliés}}$$

- Attention : L'énergie cinétique n'est pas conservée dans ce cas. Le travail des forces intérieures (muscles tirant les bras) est responsable de l'augmentation de l'énergie cinétique.

3

# 1 À VENIR

*Contenu à paraître*

4

# 1 ARCHITECTURE DE LA MATIÈRE

## Structure de l'atome

- Atome : constitué d'un noyau (protons et neutrons) autour duquel gravitent des électrons, il est électriquement neutre.
- Notation symbolique :  ${}^A_Z X$  avec  $Z$ , le numéro atomique (nombre de protons) et  $A$ , le nombre de masse (protons + neutrons = nucléons).
- Le proton porte la charge élémentaire  $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , l'électron la charge opposée  $-e$ . La charge du noyau est donc  $Q = Z \cdot e$ .
- La masse des électrons est négligeable devant celle des nucléons.
- Un élément chimique regroupe tous les atomes ou les ions ayant le même nombre de protons  $Z$ . C'est cette valeur qui définit la nature chimique de l'atome (sa place dans le tableau périodique).
- Un nucléide désigne un atome ou un ion caractérisé par un nombre donné de protons  $Z$  et de neutrons  $A - Z$ .  
Par exemple le cobalt-60 et le cobalt-59 sont des nucléides différents.
- Les isotopes d'un élément sont l'ensemble des nucléides qui appartiennent au même élément chimique (c'est-à-dire qui ont le même nombre de protons), mais qui possèdent un nombre de neutrons différent. Par exemple le carbone-12 et le carbone-14 sont des isotopes du carbone ( $Z = 6$ ), avec respectivement 6 et 8 neutrons.

## Nombres quantiques et configurations électroniques

- Un électron dans un atome est décrit par un ensemble unique de quatre nombres quantiques :

- principal  $n \in \mathbb{N}^*$  : définit la couche électronique ;
- secondaire  $\ell \in [0, n - 1]$  : définit la sous-couche :

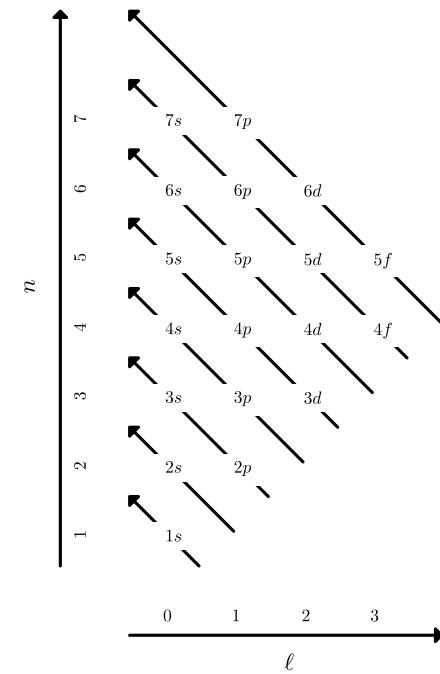
$\ell$	0	1	2	3	4
Lettre	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$
Capacité	$2e^-$	$6e^-$	$10e^-$	$14e^-$	$18e^-$

- magnétique  $m_\ell \in [-\ell, \ell]$  : orientation de la sous-couche ;
- de spin  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  : orientation du spin de l'électron.
- Le remplissage des orbitales suit l'ordre donné par la règle de Klechkowski (Diagramme ci-contre).

- Pour certains métaux de transition, la configuration électronique adopte une structure plus stable en dérogeant à la règle de Klechkowski. La très grande stabilité des sous-couches  $d$  et  $f$  pleines ou demi-pleines (remplissage habituel en dehors de ces situations) favorise des configurations comme  $s^1d^{10}$  (au lieu de  $s^2d^9$ ) ou  $s^1d^5$  (au lieu de  $s^2d^4$ ).

Exemples : Cr (Z=24) :  $[Ar] 4s^13d^5$  et Cu (Z=29) :  $[Ar] 4s^13d^{10}$ .

- Électrons de valence : électrons des couches les plus externes pouvant participer aux liaisons chimiques. Pour les éléments des familles principales ( $s$  et  $p$ ), ce sont les électrons de la dernière couche. Pour les éléments de transition interne ( $d$  et  $f$ ), ce sont les électrons de la couche  $s$  externe et des sous-couches  $d$  ou  $f$  partiellement remplies.
- Électrons de cœur : électrons des couches internes complètement remplies, qui ne participent pas aux liaisons chimiques.



## Tableau périodique

- La ligne (période) d'un élément correspond à sa couche de valence ( $n$ ). La colonne (famille) est liée au nombre d'électrons de valence, ce qui confère des propriétés chimiques similaires.
- Electronégativité  $\chi$  : tendance d'un atome à attirer les électrons d'une liaison. Plus  $\chi$  est grand, plus les électrons auront tendance à se rapprocher de l'élément. Elle augmente de gauche à droite sur une période et de bas en haut dans une famille, reflétant la diminution du rayon atomique.

Atome	H	C	N	O
$\chi$	2,20	2,55	3,04	3,44

- Familles remarquables :

- Alcalins (colonne 1) :  $ns^1$ . Forment facilement l'ion  $M^+$ .
- Halogènes (colonne 17) :  $ns^2 np^5$ . Forment facilement l'ion  $X^-$ .
- Gaz nobles (colonne 18) :  $ns^2 np^6$ . Couche de valence saturée. Très stables.

## Cristaux et liaisons

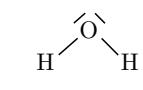
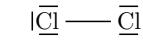
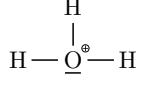
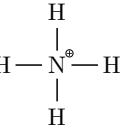
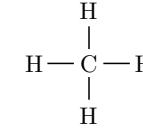
- Solides moléculaires : constitués de molécules régulièrement disposées dans l'espace.  
La cohésion est assurée par des interactions intermoléculaires : forces de Van der Waals ou liaisons hydrogène.
- Cristaux ioniques : formés de réseaux d'anions et de cations, dont la cohésion résulte de l'interaction électrostatique entre charges opposées.
- Cristaux covalents : atomes liés entre eux par des liaisons covalentes correspondant à la mise en commun de deux électrons entre atomes voisins.
- Cristaux métalliques : atomes métalliques liés par des liaisons métalliques, caractérisées par un nuage d'électrons délocalisés entourant les noyaux positifs. Ils sont opaques, bons conducteurs de chaleur et d'électricité, et possèdent un fort pouvoir réflecteur.

## Schéma de Lewis

- Liaison covalente : partage d'un doublet d'électrons entre deux atomes. Elle est représentée par une barre entre les atomes. Si l'atome est isolé, on inscrit un point pour chaque électron susceptible de se lier.
- Doublet non liant : paire d'électrons de valence appartenant uniquement à un atome et ne participant pas à une liaison avec un autre atome. On représente une barre autour de l'atome pour chaque doublet.
- Éléments à connaître :

Élément	Z	Config. électronique	Rep. de Lewis
Hydrogène	1	$1s^1$	H·
Carbone	6	$1s^2 2s^2 2p^2$	·C·
Azote	7	$1s^2 2s^2 2p^3$	N·
Oxygène	8	$1s^2 2s^2 2p^4$	O·

- Règle de stabilité : pour gagner en stabilité, les atomes tendent à acquérir la configuration électronique du gaz noble le plus proche.
- On distingue la règle du duet (pour H, qui vise 2 électrons) et la règle de l'octet (pour les éléments des lignes 2 et 3, qui visent 8 électrons de valence).  
Au-delà, dès l'apparition des orbitales d et f, ces règles ne s'appliquent plus strictement.
- Molécules et ions courants :

Molécule	Formule	Schéma	Ion	Formule	Schéma
Eau	H <sub>2</sub> O		Ion hydroxyde	HO <sup>-</sup>	H — 
Dichlore	Cl <sub>2</sub>		Ion oxonium	H <sub>3</sub> O <sup>+</sup>	
Diazote	N <sub>2</sub>	N ≡ N	Ion ammonium	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	
Méthane	CH <sub>4</sub>		Ion cyanure	CN <sup>-</sup>	C° ≡ N

- Lorsque plusieurs positions sont possibles, la charge négative se place sur l'atome le plus électronégatif, et la charge positive sur le moins électronégatif. Rappelons que l'hydrogène ne porte jamais de charge et que  $\chi(C) < \chi(N) < \chi(O)$ .

## Géométrie spatiale des molécules

- Les doublets électroniques (liants et non liants) autour d'un atome central se repoussent et s'orientent dans l'espace pour minimiser cette répulsion, ce qui impose la géométrie de la molécule.
- On note une espèce selon le modèle  $AX_nE_m$  où A est l'atome central, X un atome voisin ( $n$  liaisons (peu importe simple, double ou triple)) et E un doublet non liant ( $m$  doublets).

$n + m$	2	3	4
Figure de répulsion	Linéaire	Plane triangulaire	Tétradaédrique
Représentation spatiale			

## Polarité des molécules

- Moment dipolaire électrique ( $\vec{\mu}$ ) : grandeur vectorielle qui quantifie la séparation des charges électriques dans un système. Il mesure l'asymétrie de la distribution des charges, en coulomb-mètre (C·m) ou en debyes (1 D =  $3,336 \cdot 10^{-30}$  C·m).  
Pour un système composé de deux charges opposées  $+q$  placée au point  $P$  et  $-q$  placée au point  $N$ , le moment dipolaire vérifie  $\vec{\mu} = q \cdot \vec{NP}$ .
- Polarisation d'une liaison : Une liaison A-B est polarisée si les électronégativités sont différentes ( $\Delta\chi = \chi(B) - \chi(A) \neq 0$ ). La densité électronique est alors décentrée vers l'atome le plus électronégatif.

- Le coefficient  $\delta$  (compris entre 0 et 1), appelé pourcentage ionique, caractérise le caractère ionique de la liaison.
- La séparation des charges engendre un moment dipolaire, vecteur colinéaire à la liaison A—B, orienté du pôle négatif vers le pôle positif du dipôle :  $\vec{\mu} = \delta \cdot e \cdot \vec{BA}$ .
- La liaison est purement ionique pour  $\delta = 1$  (lorsque  $\Delta\chi > 2$ ) et purement covalente lorsque  $\delta = 0$  (lorsque  $\Delta\chi < 0,5$ ).
- Le moment dipolaire de la molécule est obtenu en sommant vectoriellement les moments dipolaires de chacune des liaisons.  
Si le moment dipolaire total est nul, la molécule est dite apolaire. Sinon la molécule est polaire.

## Modèle du cristal parfait

- Cristal parfait : structure ordonnée et périodique résultant de la répétition dans l'espace d'une maille élémentaire.
- Cristal parfait : structure ordonnée et périodique résultant de la répétition dans l'espace d'une maille élémentaire.
- Empilement compact : chaque atome est en contact avec le maximum d'atomes voisins.

Nom	Population	Représentation
Hexagonal Compact (HC)	$8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$	
Cubique à Faces Centrées (CFC)	$8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$	

- Empilement non compact : l'espace n'est pas optimisé, il y a plus de trous.

Cubique Centré (CC)	$8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$	
---------------------	-------------------------------	--

- Paramètres de maille cubique : longueur  $a$  d'une arête.  
Il y a donc des relations (sur une arête, une diagonale, ou une diagonale du cube) entre les rayons des atomes et  $a$ .
- Population : nombre de motifs appartenant en propre à une maille.

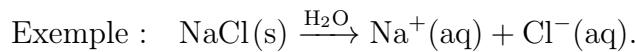
$$n = n_{\text{intérieur}} + \frac{n_{\text{faces}}}{2} + \frac{n_{\text{arêtes}}}{4} + \frac{n_{\text{sommets}}}{8}.$$

- Sites interstitiels : espaces vides entre les atomes dans un empilement compact, pouvant accueillir des atomes plus petits.
- Les structures cristalines permettent de retrouver la masse volumique du cristal :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{n \cdot m_{\text{motif}}}{V_{\text{maille}}}.$$

## Dissolution d'un solide ionique

- Dissolution : processus en 3 étapes : dissociation, solvatation (hydratation), dispersion.
- Équation de dissolution :



- Concentration molaire : quantité de matière de soluté dissout par litre de solution :

$$c = \frac{n}{V}.$$

La formule est analogue pour la concentration d'un ion, en prenant pour  $n$  la quantité de matière de cet ion.

- Puisqu'il est difficile de connaître la masse d'un seul atome, mais plus courant de connaître celle d'une mole d'atomes, on utilise le nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .
- Tableau d'avancement : il permet de suivre l'évolution des quantités de matière.

<b>Éq. réaction</b>	$\text{BeF}_2(\text{s}) \xrightarrow{\text{H}_2\text{O}} \text{Be}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{F}^-(\text{aq})$
<b>État initial</b>	$n_0 \quad 0 \quad 0$
<b>État interm.</b>	$n_0 - \xi(t) \quad \xi(t) \quad 2\xi(t)$
<b>État final</b>	$n_0 - \xi_{\max} = 0 \quad \xi_{\max} \quad 2\xi_{\max}$

- La conductivité électrique  $\sigma$  (en  $\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ ) d'une solution ionique est donnée par la loi de Kohlrausch :

$$\sigma = \sum_i \lambda_i \cdot [X_i]$$

avec  $\lambda_i$  la conductivité molaire ionique de l'ion  $i$  en  $\text{S}\cdot\text{m}^2\cdot\text{mol}^{-1}$  et  $[X_i]$  sa concentration en **mol·m<sup>-3</sup>** !

## 2 TRANSFORMATION DE LA MATIÈRE

### Transformations de la matière

- On distingue trois types de transformations de la matière :
  - nucléaires : transformation du noyau atomique entraînant un changement d'élément chimique (fission, fusion, désintégration) ;
  - physiques : modification de l'état ou de l'aspect de la matière sans changement de la nature des espèces chimiques ;
  - chimiques : transformation résultant d'une réorganisation des atomes par rupture et formation de liaisons, avec conservation des éléments.

#### 2.1.1 TRANSFORMATIONS PHYSIQUES

- L'état gazeux est un état totalement désordonné où les particules n'ont quasiment aucune interaction. Un gaz occupe tout le volume disponible. La force exercée par un gaz sur une surface est mesurée par la pression  $P$  et la force exercée sur une surface de normale extérieure  $\vec{u}$  vaut

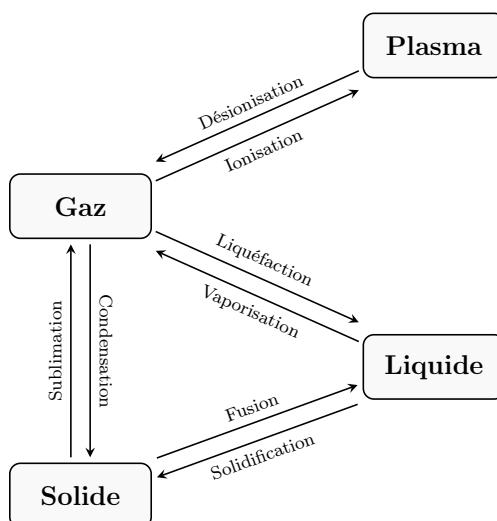
$$\vec{F} = P \cdot S \cdot \vec{u}.$$

Le modèle du gaz parfait suit la loi

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T,$$

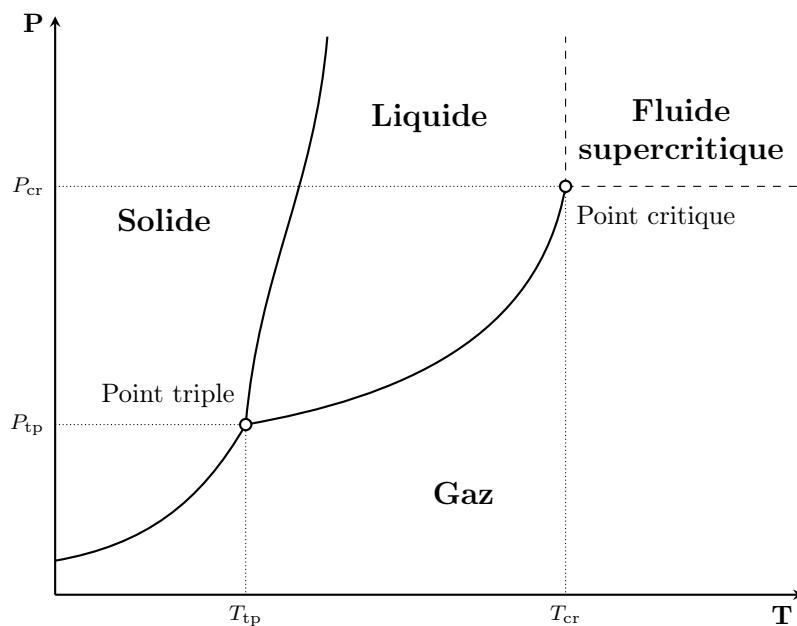
avec  $P$  la pression (Pa),  $V$  le volume ( $m^3$ ),  $n$  la quantité de matière (mol),  $R$  la constante des gaz parfaits et  $T$  la température (K).

- L'état liquide est partiellement désordonné. Le volume est quasi fixe, les liquides sont donc peu compressibles. Il n'a pas de forme propre.
- L'état solide est très ordonné (volume et forme fixes). On distingue :
  - le solide cristallin : arrangement géométrique régulier (ex : NaCl) ;
  - le solide amorphe : pas d'organisation interne régulière (ex : verre) ;
  - le solide semi-cristallin : zones cristallines et zones amorphes (ex : polymères).
- On donne ainsi les différentes transformations physiques entre les états :



Le passage d'un état solide à un autre est appelé transformation allotropique.

- Une phase est une zone de l'espace où les paramètres physiques varient continûment. Elle est dite homogène si ses propriétés sont identiques en tout point. Les notations usuelles sont : (s) pour solide, ( $\ell$ ) pour liquide pur, (g) pour gaz, (aq) pour une espèce dissoute en solution aqueuse.



## Système chimique

- Le nombre d'Avogadro est  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . La mole est une quantité qui représente  $N_A$  objets.
- La masse molaire  $M$  ( $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) représente la masse d'une mole d'entités chimiques. Ce concept s'applique de manière analogue au nucléide (valeur proche du nombre de masse  $A$ ), à l'élément ou à la molécule (somme des masses molaires atomiques la constituant).
- Le volume molaire  $V_m$  ( $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) est le volume occupé par une mole de gaz. Pour un gaz parfait, il ne dépend que de la pression et de la température.
- La charge molaire correspond en valeur absolue à la charge électrique d'une mole d'électrons. Son unité est le faraday ( $F$ ) qui représente donc la charge d'une mole d'ions  $\text{H}^+$ . On a donc  $1F = N_A \cdot e = 96,5 \times 10^3 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- Dans un mélange de gaz, la pression partielle  $P_X$  d'un gaz  $X$  est la pression qu'il exerceait s'il était seul dans le même volume. Selon la loi de Dalton, la pression totale est la somme des pressions partielles. On définit ainsi la fraction molaire  $x_X$  comme suit :

$$x_X = \frac{n_X}{n_{tot}}; \quad P_X = x_X \cdot P_{tot}; \quad \text{i.e.} \quad P_X = P_{tot} \cdot \frac{n_X}{n_{tot}};$$

$n_{tot}$  étant la quantité de matière totale des gaz uniquement.

## Avancement d'un système chimique

- Une transformation chimique est notée à l'aide d'une équation chimique bilan de la forme réactifs  $\Rightarrow$  produits.

- On définit le nombre stœchiométrique algébrique  $\nu_X$  d'un élément  $X$  comme le nombre de fois où cet élément apparaît dans l'équation chimique. Il est positif pour les produits et négatif pour les réactifs.
- L'avancement (molaire)  $\xi$  est la quantité de matière formée d'un produit, ou consommée d'un réactif, de nombre stœchiométrique égal à 1. L'avancement initial est nul, puis il augmente au cours de la réaction et atteint en fin de réaction sa valeur finale. La quantité de matière d'un élément  $X$  au temps  $t$  est donnée par :

$$n_X(t) = n_{X,0} + \nu_X \cdot \xi(t).$$

- Le tableau d'avancement est l'outil central pour étudier une réaction chimique. Le voici pour une réaction générique  $aA + bB \rightleftharpoons C + dD$  :

Équation	$a A$	+	$b B$	$\rightleftharpoons$	$c C$	+	$d D$
État initial	$n_i(A)$		$n_i(B)$		$n_i(C)$		$n_i(D)$
État inter.	$n_i(A) - a\xi(t)$		$n_i(B) - b\xi(t)$		$n_i(C) + c\xi(t)$		$n_i(D) + d\xi(t)$
État final	$n_i(A) - a\xi_f$		$n_i(B) - b\xi_f$		$n_i(C) + c\xi_f$		$n_i(D) + d\xi_f$

- Le tableau peut aussi être réalisé en concentration ( $\text{mol.L}^{-1}$ ) lorsque le volume est constant, en introduisant l'avancement volumique  $x = \xi/V$ .
- Une réaction est dite totale ( $\rightarrow$ ) si elle continue jusqu'à épuisement d'un des réactifs. Le réactif qui s'épuise est appelé réactif limitant. L'avancement maximal  $\xi_{max}$  est la plus petite valeur de  $\xi$  qui annule la quantité de l'un des réactifs.
- Un mélange est stœchiométrique si les réactifs sont introduits dans les proportions des nombres stœchiométriques. Pour une transformation totale, à l'état final, tous les réactifs sont consommés.
- Le dosage d'une espèce chimique en solution est la détermination de sa concentration molaire.
- Lors d'un dosage volumétrique (titrage), on verse à l'aide d'une burette la solution titrante jusqu'à ce que le réactif titré ait totalement réagi. L'équivalence est repérée par un changement de couleur (colorimétrie), une rupture de pente (conductimétrie) ou un saut de pH (pH-métrie). On mesure alors le volume de solution titrante versé à l'équivalence, qui permet de calculer la quantité de matière du titrant, dont on connaît la concentration, puis la quantité de matière et la concentration de la solution titrée.
- Une réaction est équilibrée ( $\rightleftharpoons$ ) si elle s'arrête avant la disparition totale de l'un des réactifs. Il y a coexistence des réactifs et produits. L'équilibre est dynamique (la réaction continue microscopiquement dans les deux sens). On définit le taux d'avancement final

$$\tau = \frac{\xi_f}{\xi_{max}},$$

avec  $\xi_{max}$ , l'avancement que l'on aurait obtenu avec une réaction totale.

## Évolution spontanée d'un système chimique

- L'activité chimique  $a(X)$  est une grandeur sans dimension qui dépend de l'état de l'espèce :
  - Pour le solvant (eau) :  $a = 1$ .
  - Pour un solide ou un liquide pur non miscible  $X$  :  $a(X) = 1$ .

- Pour un soluté  $X$  en solution diluée :  $a(X) = \frac{[X]}{C^\circ}$  avec  $C^\circ = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ .
- Pour un gaz  $X$  supposé parfait :  $a(X) = \frac{P_X}{P^\circ}$  avec  $P^\circ = 1 \text{ bar (10}^5 \text{ Pa)}$ .
- Le quotient de réaction  $Q$  est défini pour une réaction  $\sum \nu_i X_i = 0$  par le produit des activités des constituants élevées à la puissance de leur nombre stœchiométrique algébrique :

$$Q = \prod_i a(X_i)^{\nu_i} = \frac{a(C)^\gamma \cdot a(D)^\delta}{a(A)^\alpha \cdot a(B)^\beta} \quad (\text{pour } \alpha A + \beta B \rightleftharpoons \gamma C + \delta D)$$

- À l'équilibre thermodynamique, le quotient de réaction prend une valeur constante appelée constante d'équilibre  $K^\circ$ . Cette constante ne dépend que de la température.

$$Q_{eq} = K^\circ$$

- Critère d'évolution spontanée : on compare  $Q$  à un instant donné avec  $K^\circ$  :
  - Si  $Q < K^\circ$  : évolution dans le sens direct ( $\rightarrow$ ).
  - Si  $Q > K^\circ$  : évolution dans le sens indirect ( $\leftarrow$ ).
  - Si  $Q = K^\circ$  : le système est à l'équilibre, il n'évolue plus.
- Si  $K^\circ > 10^4$ , la réaction est considérée comme totale. Si  $K^\circ < 10^{-4}$ , la réaction est considérée comme nulle ou très limitée.
- La méthode pour trouver l'état final d'une réaction équilibrée consiste à :
  - dresser le tableau d'avancement exprimé en fonction de  $\xi_f$  ;
  - exprimer  $Q_{eq}$  en fonction de  $\xi_f$  ;
  - résoudre l'équation  $Q_{eq} = K^\circ$  permettant de déterminer  $\xi_f$ .

On peut ainsi calculer, à l'aide du tableau d'avancement, toutes les quantités de matières à l'état final.
- La conductimétrie permet de suivre une réaction ou déterminer une constante d'équilibre. La conductivité  $\sigma$  ( $\text{S.m}^{-1}$ ) d'une solution contenant des ions  $X_i$  est donnée par la loi de Kohlrausch :

$$\sigma = \sum_i \lambda_i \cdot [X_i]$$

avec  $\lambda_i$  la conductivité molaire ionique ( $\text{S.m}^2.\text{mol}^{-1}$ ) et  $[X_i]$  la concentration en **mol.m<sup>-3</sup>**. Tous les ions présents en solution participent à la conductivité.

On a aussi

$$\sigma = k_{cell} \cdot G$$

avec la constante de cellule  $k_{cell}$  ( $\text{m}^{-1}$ ) et  $G$  la conductance, inverse de la résistance.

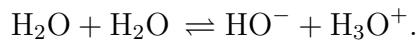
### 3 ACIDO-BASICITÉ ET PRÉCIPITATION

*Il est nécessaire de maîtriser les noms et formules des ions courants dans les applications de ce chapitre. Se référer à la fiche dédiée.*

#### PARTIE 1 : RÉACTIONS ACIDO-BASIQUES

##### Réactions acido-basiques

- Un acide est une entité chimique (molécule ou ion) capable de céder un proton  $H^+$ , tandis qu'une base est une entité capable d'en capter un. Ces deux entités sont reliées au sein d'un couple acide/base  $AH/A^-$ , défini par la demi-équation  $AH \rightleftharpoons A^- + H^+$ .
- Un polyacide est une espèce susceptible de libérer plusieurs protons  $H^+$ .
- Une réaction acido-basique correspond à l'échange d'un ou plusieurs protons entre une base et un acide :  $A_1H + A_2^- \rightleftharpoons A_1^- + A_2H$ .
- Certaines espèces dites amphotères, peuvent se comporter à la fois comme un acide et comme une base dans deux couples différents. L'eau en est l'exemple principal, intervenant dans les couples  $H_3O^+/H_2O$  et  $H_2O/HO^-$ .
- L'eau subit une réaction d'autoprotolyse :



La constante d'équilibre associée est le produit ionique de l'eau  $K_e$  :

$$K_e = \frac{[H_3O^+]_{\text{eq}}[HO^-]_{\text{eq}}}{(C^\circ)^2} = 10^{-14} \quad (\text{à } 25^\circ\text{C}) ; \quad pK_e = -\log K_e = 14.$$

Ainsi, dans toute solution aqueuse, les concentrations des ions  $H_3O^+$  et  $HO^-$  sont liées. La connaissance de l'une permet, à l'aide de cette relation, de déterminer l'autre.

##### Potentiel hydrogène

- Toute solution aqueuse contenant des ions hydronium (oxonium) peut être caractérisée par son potentiel hydrogène (pH), grandeur sans dimension définie par

$$pH = -\log[H_3O^+] ; \quad [H_3O^+] = 10^{-pH}.$$

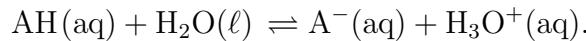
- Selon la valeur du pH, une solution aqueuse (à  $25^\circ\text{C}$ ) est dite :

- acide si  $0 \leq pH < 7$  (les ions  $H_3O^+$  sont majoritaires) ;
- neutre si  $pH = 7$  (il y a autant d'ions  $H_3O^+$  que d'ions  $HO^-$ ) ;
- basique si  $7 < pH \leq 14$  (les ions  $HO^-$  sont majoritaires).

Pour une solution neutre, on déduit du produit ionique de l'eau que  $[H_3O^+] = \sqrt{K_e}$ , d'où la valeur  $pH = 7$ .

## Constante d'acidité

- Lorsqu'un acide AH est mis en solution, il réagit avec l'eau selon l'équilibre



Cette réaction est caractérisée par une constante d'équilibre, nommée constante d'acidité

$$K_A = \frac{[\text{A}^-]_{\text{eq}} \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eq}}}{[\text{AH}]_{\text{eq}} \cdot C^\circ}.$$

- Par analogie avec le pH, on définit le  $\text{p}K_A$  du couple AH/A<sup>-</sup> par la relation

$$\text{p}K_A = -\log K_A ; \quad K_A = 10^{-\text{p}K_A}.$$

- Les couples de l'eau servent de références sur l'échelle des  $\text{p}K_A$  :

- $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O} : K_A = 1$  donc  $\text{p}K_A = 0$ ;
- $\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^- : K_A = 10^{-14}$  donc  $\text{p}K_A = 14$ .

- Une relation fondamentale lie le pH au  $\text{p}K_A$  et aux concentrations des espèces du couple :

$$\text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}.$$

Cette relation permet d'établir le diagramme de prédominance (plus bas) :

- $\text{pH} = \text{p}K_A \Rightarrow [\text{A}^-] = [\text{AH}]$  (équipartition des espèces);
- $\text{pH} < \text{p}K_A \Rightarrow [\text{AH}] > [\text{A}^-]$  (l'acide prédomine);
- $\text{pH} > \text{p}K_A \Rightarrow [\text{A}^-] > [\text{AH}]$  (la base prédomine).

## Force des acides et des bases

- Certains acides réagissent totalement avec l'eau en libérant des protons H<sup>+</sup>, ce sont des acides forts. La réaction est alors totale ( $\rightarrow$ ). Cela correspond à un  $K_A$  très grand et un  $\text{p}K_A$  négatif (ou nul).
- Un acide est faible en solution aqueuse si sa réaction avec l'eau n'est pas totale ( $\rightleftharpoons$ ). Le taux d'avancement  $\tau$  est strictement inférieur à 1.
- Certaines bases réagissent totalement avec l'eau en libérant des ions hydroxyde HO<sup>-</sup>(aq), ce sont des bases fortes. La réaction est alors totale.
- Enfin, les bases faibles réagissent de manière équilibrée avec l'eau.
- Lorsque plusieurs couples acido-basiques sont présents en solution, la réaction favorisée a lieu entre l'acide le plus fort et la base la plus forte (voir échelle des  $\text{p}K_A$ ).

## Constante d'équilibre (rappel et intérêt)

- On rappelle que  $K^\circ$  correspond à la valeur du quotient de réaction à l'équilibre ( $Q_{eq}$ ). Pour une réaction entre un acide A<sub>1</sub>H et une base A<sub>2</sub><sup>-</sup> la constante d'équilibre  $K^\circ$  peut s'exprimer en fonction des constantes d'acidité des couples mis en jeu :

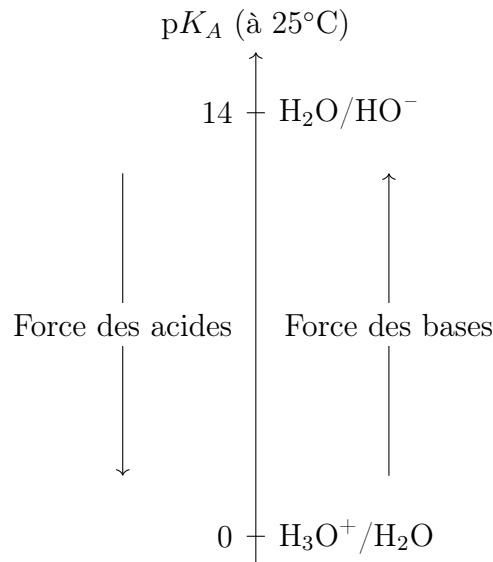
$$K^\circ = f(K_{A1}, K_{A2}).$$

Pour ce faire, il s'agit d'exprimer les trois relations indépendamment et de trouver une relation entre elles. On peut ainsi parfois lever une inconnue.

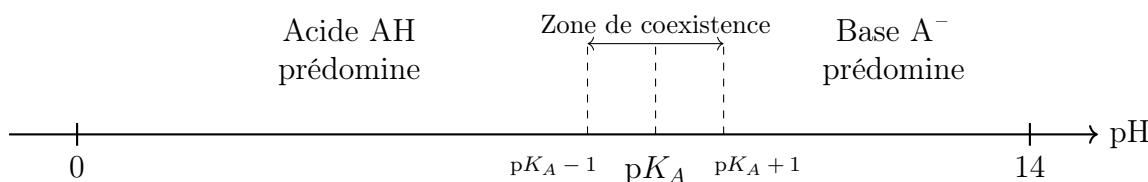
- On considère généralement que la réaction est totale si  $K^\circ > 10^4$ .

## Figures

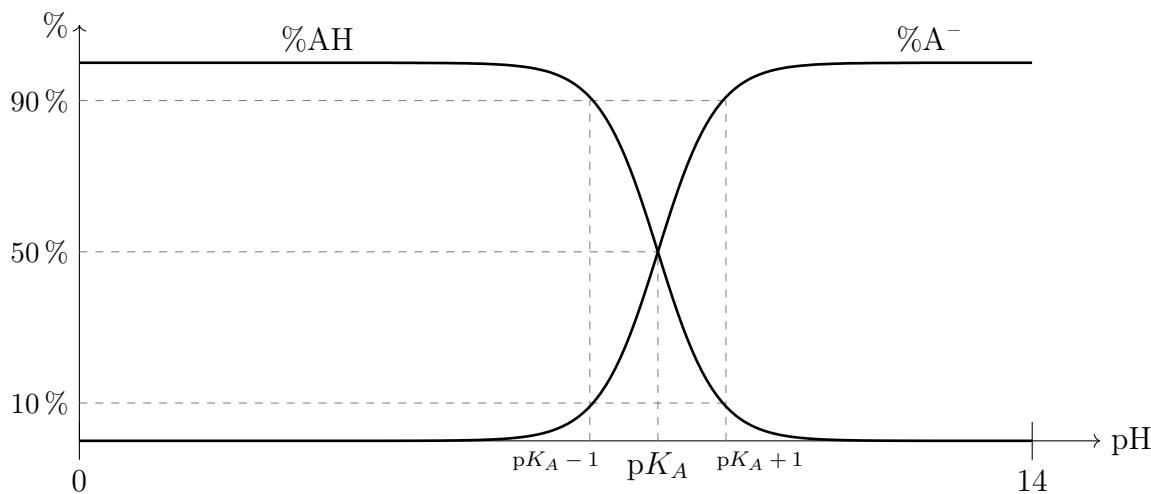
- Echelle des  $pK_A$  :



- Diagramme de prédominance :



- Courbes de distribution en fonction du pH :



## Dosages acido-basiques

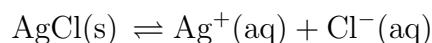
- Un dosage (ou titrage) a pour but de déterminer la concentration inconnue d'une espèce en solution. La réaction de dosage doit être totale (quantitative), rapide et unique.
- On atteint l'équivalence lorsque les réactifs (titré et titrant) ont été introduits dans les proportions stœchiométriques. C'est à cet instant que le changement de réactif limitant s'opère.

- Le repérage de l'équivalence peut se faire par différentes méthodes : suivi pH-métrique (saut de pH), suivi conductimétrique (rupture de pente) ou par colorimétrie (changement de teinte d'un indicateur coloré dont la zone de virage contient le pH à l'équivalence).

## PARTIE 2 : RÉACTIONS DE DISSOLUTION ET DE PRÉCIPITATION

### Précipitation et dissolution

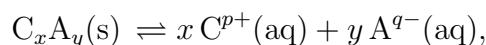
- Un précipité est un dépôt solide en équilibre avec la phase aqueuse, qui apparaît lorsqu'une solution est saturée en composés ioniques ou moléculaires. Il s'obtient en introduisant un excès de solide dans l'eau ou en mélangeant deux solutions contenant les espèces constituant le précipité.
- Une dissolution est une réaction au cours de laquelle un cristal ionique est dissout en ses ions constitutifs par un solvant. C'est la réaction inverse de la précipitation.
- Exemple : dissolution/précipitation du chlorure d'argent.



On observe cet équilibre soit en mettant un excès de solide dans l'eau, soit en mélangeant deux solutions (ex. nitrate d'argent  $\text{AgNO}_3$  et chlorure de potassium  $\text{KCl}$ ).

### Produit de solubilité

- Le produit de solubilité  $K_s$  est la constante d'équilibre associée à la réaction de dissolution dans l'eau.
- Pour un solide  $\text{C}_x\text{A}_y(\text{s})$  se dissolvant selon



le produit de solubilité s'écrit

$$K_s = \frac{[\text{C}^{p+}]_{\text{eq}}^x \cdot [\text{A}^{q-}]_{\text{eq}}^y}{C^{\circ x+y}}.$$

- On définit le  $\text{p}K_s$  comme suit :

$$\text{p}K_s = -\log K_s ; \quad K_s = 10^{-\text{p}K_s}.$$

### Solubilité

- La solubilité  $s$  est la quantité maximale de solide que l'on peut dissoudre dans un litre de solution. Elle s'exprime généralement en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , sinon en  $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ , et dépend de la température et du solvant.
- La connaissance de  $K_s$  permet de calculer  $s$  et inversement.
  - Exemple 1 :



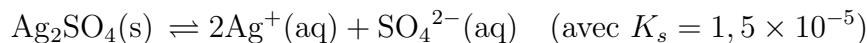
	PbSO <sub>4</sub> (s)	Pb <sup>2+</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>
EF	excès	$s$	$s$

$$K_s = [\text{Pb}^{2+}][\text{SO}_4^{2-}] = s^2,$$

d'où

$$s = \sqrt{K_s} = \sqrt{10^{-8}} = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

- Exemple 2 :



	Ag <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> (s)	2 Ag <sup>+</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>
EF	excès	$2s$	$s$

$$K_s = [\text{Ag}^+]^2 \cdot [\text{SO}_4^{2-}] = (2s)^2 \times s = 4s^3,$$

d'où

$$s = \sqrt[3]{\frac{K_s}{4}} = 1,6 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

En massique ( $M = 312 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) :  $s_m = s \times M = 4,99 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ .

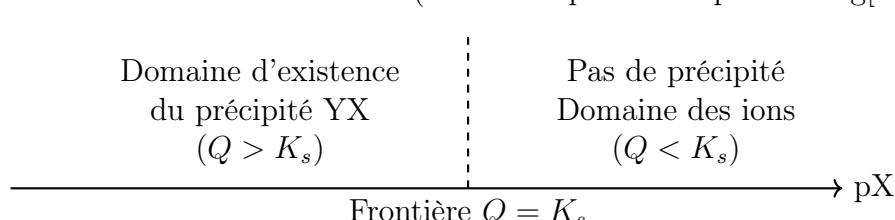
## Conditions de précipitation

- Pour savoir si un précipité se forme lors d'un mélange, on calcule le quotient de réaction initial  $Q_i$  et on le compare à  $K_s$  :
  - $Q_i < K_s$  : la solution est insaturée.
  - $Q_i > K_s$  : la solution est saturée. Il y a précipitation jusqu'à ce que  $Q_i = K_s$ .
- Exemple : Mélange de Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> (10 mL à  $8 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) et AgNO<sub>3</sub> (10 mL à  $8 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ). Le volume double, donc les concentrations sont divisées par 2 :  $[\text{Ag}^+]_i = [\text{SO}_4^{2-}]_i = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
 
$$Q_i = [\text{Ag}^+]_i^2 \cdot [\text{SO}_4^{2-}]_i = (4 \cdot 10^{-2})^2 \times (4 \cdot 10^{-2}) = 6,4 \times 10^{-5}$$

Comme  $K_s = 1,5 \times 10^{-5}$ , on a  $Q_i > K_s$  : il y a précipitation.

## Domaine d'existence d'un précipité

- On peut tracer un diagramme d'existence pour visualiser les conditions de précipitation en fonction de la concentration d'un des ions (souvent exprimée en  $\text{p}X = -\log[\text{X}]$ ).



**FIN**

Revenir au début