Dérivées

Dérivées des fonctions réelles usuelles

La fonction $f : \mathcal{D} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ est dérivable sur tout intervalle de plus d'un point inclus dans $\mathcal{D}'$, et sa fonction dérivée est la fonction $f' : \mathcal{D}' \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$; où

$\mathcal{D} =$	$\mathcal{D}' =$	$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) =$	$\forall x \in \mathcal{D}', f'(x) =$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$C, \quad C \in \mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$-nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$x^d = e^{d \ln x}, \quad d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	dx^{d-1}
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\lvert x \rvert$	$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$b^x = e^{x \ln b}, \quad b > 0$	$(\ln b)b^x = (\ln b)e^{x \ln b}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\operatorname{Arccos} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\operatorname{Arcsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\operatorname{sh} x$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{ch} x$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Opérations sur les fonctions réelles dérivables

- **Combinaison linéaire** : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I et a, b deux réels, alors la combinaison linéaire $au + bv$ est dérivable sur I et
$$(au + bv)' = au' + bv'.$$
- **Produit** : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, alors le produit uv est dérivable sur I et
$$(uv)' = u'v + uv'.$$
- **Inverse** : Si v est une fonction dérivable sur I telle que $\forall x \in I, v(x) \neq 0$, alors l'inverse de v est dérivable sur I et
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}.$$
- **Quotient** : Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I telle que $\forall x \in I, v(x) \neq 0$, alors le quotient de u par v est dérivable sur I et
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$
- **Réciproque** : Si $f : I \ni x \longmapsto y \in J \ / \ y = f(x)$ est dérivable et admet une réciproque $f^{-1} : J \ni y \longmapsto x \in I \ / \ f(x) = y$ qui est continue ; et si $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, alors f^{-1} est dérivable et
$$\forall y \in J, \ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$
- **Composée** : Si u est dérivable sur I et v est une fonction dérivable sur un intervalle J avec $u(I) \subset J$, alors la composée de v suivant u est dérivable sur I et
$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \cdot u' \quad : \quad \forall x \in I, \ (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Application de la dérivation composée

Soit u une fonction réelle dérivable sur I respectant les contraintes ci-après. Alors f est dérivable sur I de dérivée f' ; où

Contrainte sur u	$\forall x \in I, f(x) =$	$\forall x \in I, f'(x) =$
Aucune	$(u(x))^n, \ n \in \mathbb{N}^*$	$n \cdot u'(x) \cdot (u(x))^{n-1}$
$\forall x \in I, u(x) \neq 0$	$\frac{1}{(u(x))^n} = (u(x))^{-n}$	$u'(x) \cdot \frac{-n}{(u(x))^{n+1}}$
$\forall x \in I, u(x) > 0$	$\sqrt{u(x)}$	$u'(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$
$\forall x \in I, u(x) > 0$	$(u(x))^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \cdot u'(x) \cdot (u(x))^{\alpha-1}$
$\forall x \in I, u(x) > 0$	$\ln(u(x))$	$u'(x) \cdot \frac{1}{u(x)}$
Aucune	$e^{u(x)}$	$u'(x) \cdot e^{u(x)}$
Aucune	$\cos(u(x))$	$-u'(x) \cdot \sin(u(x))$
Aucune	$\sin(u(x))$	$u'(x) \cdot \cos(u(x))$

$u(x) \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$	$\tan(u(x))$	$u'(x) \cdot (1 + \tan^2(u(x))) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$\lvert u(x) \rvert < 1$	$\text{Arccos}(u(x))$	$u'(x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$\lvert u(x) \rvert < 1$	$\text{Arcsin}(u(x))$	$u'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
Aucune	$\text{Arctan}(u(x))$	$u'(x) \cdot \frac{1}{1+(u(x))^2}$
Aucune	$\text{ch}(u(x))$	$u'(x) \cdot \text{sh}(u(x))$
Aucune	$\text{sh}(u(x))$	$u'(x) \cdot \text{ch}(u(x))$
Aucune	$\text{th}(u(x))$	$u'(x) \cdot (1 - \text{th}^2(u(x))) = \frac{u'(x)}{\text{ch}^2(u(x))}$