

17. FONDEMENTS 6 : FONCTION ET INVERSIBILITÉ

17.1. Surjectivité

Dans toute la suite, E et F désignent deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Défi.

On dit que la fonction f est *surjective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au moins un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de $b \in F$, on peut trouver au moins un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f .

$$\forall b \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = b.$$

Rema.

Dire que f est surjective revient à dire que $f(E) = F$.

Prop.

La composée de deux fonctions surjectives est elle-même une fonction surjective : étant donné trois ensembles E , F et G , puis deux fonctions $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$ est surjective.

Défi.

On dit qu'une fonction $e \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse à droite* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque

$$\forall b \in F, \quad f(e(b)) = b.$$

C'est que $f \circ e = \text{id}_F$.

On dit alors que f est *inversible à droite* lorsqu'elle admet un inverse à droite.

Exem.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Alors les deux fonctions $e_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \sqrt{y}$ et $e_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto -\sqrt{y}$ sont deux inverses à droite de f .

Prop.

Une fonction est inversible à droite si et seulement si elle est surjective.

Méth. (Vérifier si une fonction est surjective)

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$. Est-ce que f est surjective ?

Que soit donné $b \in \mathbb{R}$. L'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet au moins une solution.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ quelconque.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons que $f(x) = b$.

$$\frac{2x+1}{x-1} = b$$

$$\frac{2x+1}{x-1} - b = 0$$

$$\frac{2x+1 - b(x-1)}{x-1} = 0$$

$$2x+1 - bx + b = 0$$

$$(2-b)x + 1 + b = 0$$

$$(2-b)x = -1 - b$$

Si $b = 2$, alors $0 = -3$. Or $0 \neq -3$ donc $b \neq 2$.

CN : pour que $f(x) = b$, il est nécessaire que $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Synthèse : Pour le choix $b = 2$, l'équation n'admet aucune solution.

En réponse, la fonction f n'est pas surjective.

17.2. Injectivité

Défi.

On dit que la fonction f est *injective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au plus un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de $b \in F$, on peut trouver au plus un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f .

$$\forall b \in F, \quad \forall x_1, x_2 \in E, \quad (f(x_1) = b \wedge f(x_2) = b) \implies x_1 = x_2.$$

$$\text{i.e.} \quad \forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Prop.

La composée de deux fonctions injectives est une fonction injective.

Défi.

On dit qu'une fonction $g \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse à gauche* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque

$$\forall x \in E, \quad g(f(x)) = x.$$

Rema.

C'est que $g \circ f = \text{id}_E$.

Rema.

Si g est un inverse à gauche de f , alors pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ admet au plus $g(b)$ pour solution.

Prop.

Toute fonction est inversible à gauche si, et seulement si elle est injective.

17.3. Bijectivité

Défi.

On dit que la fonction f est *bijective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'exactement un élément du départ : quel que soit le choix de $b \in F$, il existe exactement un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f .

$$\forall b \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = b.$$

Rema.

1. Une fonction bijective est une fonction à la fois surjective et injective.
2. Une fonction $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est bijective lorsqu'elle établit une correspondance un à un entre les éléments de E d'un côté et les éléments de F de l'autre côté.

Défi.

On considère une fonction bijective $f : E \rightarrow F$. On appelle *fonction réciproque* de f , qu'on note f^{-1} , l'unique fonction de F dans E qui à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f : pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément de E dont l'image par f est égale à y .

Prop.

La composée de deux fonctions bijectives est bijective.

Défi.

On dit que $h \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque quel que soit le choix de $b \in F$ et $x \in E$, $f(h(b)) = b$ et $x = h(f(x))$.

C'est que $f \circ h = \text{id}_F$ et $\text{id}_E = h \circ f$.

Défi.

On dit que f est *inversible* pour dire que f admet un inverse.

Prop. (Unicité)

Toute fonction admet au plus un inverse.

Nota.

Si f est inversible, son inverse est notée f^{-1} .

Rema.

Dire que $f \in \mathcal{F}(E, F)$ admet f^{-1} pour inverse signifie que pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ admet exactement $f^{-1}(b)$ pour solution.

Prop.

Toute fonction est inversible si, et seulement si elle est bijective.

Méth. (Vérifier si une fonction est bijective en exprimant sa réciproque le cas échéant)

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.

Que soit donné $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ quelconque fixé.

Q : Est-ce que l'équation $f(x) = b$ d'inconnue x variant dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, admet exactement une solution ?

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ quelconque. On a $f(x) = b$;

$$\text{ce quand } 2x + 1 = b(x - 1)$$

$$\text{ce quand } (2 - b)x = -b - 1$$

$$\text{ce quand } x = \frac{-b - 1}{2 - b} \quad (\text{car } 2 - b \neq 0).$$

R : La fonction f est bijective et sa réciproque est la fonction

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad b \mapsto \frac{-b - 1}{2 - b} = \frac{b + 1}{b - 2}.$$