

12. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 2 : LE PLAN

12.1. Déterminant dans une base orthonormée directe

Noti.

On considère un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Pour tout couple de vecteurs non nuls (\vec{u}, \vec{v}) de \mathcal{P} , la notation (\vec{u}, \vec{v}) désigne aussi une des mesures de l'angle orienté qui porte de la demi-droite $[O, \vec{u})$ à la demi-droite $[O, \vec{v})$. Ces mesures sont égales modulo 2π .

Prop.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de \mathcal{P} :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \underset{2\pi}{=} (\vec{u}, \vec{w});$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{2\pi}{=} -(\vec{v}, \vec{u}).$$

Défi. (Déterminant d'un couple de vecteurs)

Dans un plan orienté muni d'une base orthonormée directe, on appelle *déterminant* du couple (\vec{u}, \vec{v}) l'unique réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

Prop.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où K est le projeté orthogonal de C sur la perpendiculaire à (AB) en A .

Prop.

Ci-avant, la valeur absolue du $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ est égale à l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Prop.

Le déterminant est :

1. bilinéaire :

a. pour tout vecteur \vec{u} ,

$$\forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$$

b. pour tout vecteur \vec{v} ,

$$\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v});$$

2. antisymétrique :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

Prop.

Soit \mathcal{P} un plan muni d'une b.o.n.d. Soient deux vecteurs $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Prop.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

12.2. Droites du plan

Défi.

Dans un plan \mathcal{P} , on considère un point A et un vecteur non nul \vec{v} . L'unique droite passant par A et dirigée par \vec{v} est l'ensemble des points M tels que

$$AM \in \mathbb{R}\vec{v} \quad \text{où} \quad \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Prop.

Soit \mathcal{D} une droite du plan muni d'un r.o.n.d. Ainsi,

1. Il existe au moins un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la droite \mathcal{D} admette pour équation

$$ax + by = c$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On parle d'*équation cartésienne*.

2. Réciproquement, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, la partie du plan dont une équation est $ax + by = c$ est une droite, laquelle est dirigée par le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Prop. (Paramétrisation)

Soit \mathcal{D} une droite du plan.

1. On peut trouver au moins un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

2. Réciproquement, étant donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, l'ensemble

$$\left\{ M \begin{pmatrix} x_0 + t\alpha \\ y_0 + t\beta \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

est la droite passant par $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Méth. (Passage d'une équation à une paramétrisation)

Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère une droite \mathcal{D} d'équation cartésienne $ax + by = c$. Donnons-en une paramétrisation.

1. Choix d'un point simple $A(x_0, y_0)$ appartenant à la droite. Pour cela, on fixe par exemple $x = 0$ (alors $y = c/b$).
2. Identification d'un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

3. Ecriture de la paramétrisation :

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Méth. (Passage d'une paramétrisation à une équation)

Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère la droite définie par

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Voie 1 : Soit $M\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$. $M \in \mathcal{D} \iff \vec{AM}$ colinéaire à $\vec{v}\left(\begin{matrix} -5 \\ 3 \end{matrix}\right)$, avec $A(\sqrt{2}, 8)$.

$$\det(A\vec{M}, \vec{v}) = 0 \iff 3(x - \sqrt{2}) - (-5)(y - 8) = 0.$$

On développe et réduit pour obtenir $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

Voie 2 : Le vecteur $\vec{v}\left(\begin{matrix} -5 \\ 3 \end{matrix}\right)$ dirige la droite. Une équation est de la forme $3x + 5y = c$. Comme $A\left(\begin{matrix} \sqrt{2} \\ 8 \end{matrix}\right) \in \mathcal{D}$, on a $c = 3\sqrt{2} + 40$. D'où une équation : $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

Méth. (Intersection de deux droites)

Pour trouver le point d'intersection de deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , on distingue les cas selon la forme de leurs équations.

Cas 1 : Deux équations cartésiennes

On résout le système linéaire 2×2

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Cas 2 : Une paramétrique et une cartésienne

Si $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ et $\mathcal{D}_2 : ax + by = c$. On injecte les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ dans l'équation de \mathcal{D}_2 . On obtient une équation d'inconnue t . Une fois t trouvé, on le reporte dans la paramétrisation pour avoir les coordonnées du point.

Cas 3 : Deux paramétriques

On cherche t et t' tels que $M(t) = M(t')$. Cela revient à résoudre

$$\begin{cases} x_0 + \alpha t = x'_0 + \alpha' t' \\ y_0 + \beta t = y'_0 + \beta' t' \end{cases}$$

Défi. (Projeté orthogonal sur une droite)

On considère une droite \mathcal{D} d'un plan, puis un point M quelconque du même plan. On appelle *projeté orthogonal* de M sur \mathcal{D} l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à \mathcal{D} qui passe par M .

Méth. (Coordonnées d'un projeté orthogonal)

Soit une droite \mathcal{D} dirigée par \vec{u} et un point M hors de la droite. On cherche les coordon-

nées du projeté orthogonal $H(x, y)$. Le point H est l'unique solution du système caractérisant l'appartenance et l'orthogonalité :

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} & (\text{Vérifie l'équation de } \mathcal{D}) \\ \vec{MH} \cdot \vec{u} = 0 & (\text{Orthogonalité}). \end{cases}$$

Exemple : Soit $\mathcal{D} : 4x + 6y = -3$ et $M(-3, 2)$. Un vecteur directeur de \mathcal{D} est $\vec{u}(-6, 4)$. La condition $\vec{MH} \cdot \vec{u} = 0$ équivaut à dire que \vec{u} est un vecteur normal à la droite (MH) . L'équation de la perpendiculaire (MH) est donc de la forme $-6x + 4y = k$. Comme $M(-3, 2) \in (MH)$, on a $k = -6(-3) + 4(2) = 18 + 8 = 26$. On résout alors le système

$$\begin{cases} 4x + 6y = -3 \\ -6x + 4y = 26 \end{cases}$$

Défi. (Distance à une droite)

On considère un point M du plan et une droite \mathcal{D} . On dit qu'un réel positif d est égal à la distance du point M à la droite \mathcal{D} lorsque d est la plus petite des distances entre M et les points de \mathcal{D} :

- $\exists P \in \mathcal{D}, MP = d$;
- $\forall P \in \mathcal{D}, MP \geq d$.

On peut noter $\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}$.

Prop.

Si H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} , alors,

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = MH.$$

Défi. (Vecteur normal)

Un vecteur \vec{n} est dit *normal* à une droite \mathcal{D} s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de \mathcal{D} .

Prop. (Distance à l'aide d'un vecteur normal)

Soit \vec{n} un vecteur normal de \mathcal{D} . Pour tout point $A \in \mathcal{D}$ et tout point $M \in \mathcal{P}$,

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Prop. (Vecteur normal et équation cartésienne)

Si \mathcal{D} admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, alors le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{D} .

Form.

Si \mathcal{D} admet pour équation $ax + by + c = 0$, alors pour tout $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

12.3. Cercles du plan

Défi.

Dans un plan \mathcal{P} , on appelle cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M = r\}.$$

Rema.

- Le rayon du cercle est un nombre, tandis que les « rayons » désignent aussi les segments $[\Omega M]$.
- L'unique cercle de centre O passant par A est $\mathcal{C}(O, OA)$.
- L'unique cercle de diamètre $[AB]$ est $\mathcal{C}(I, \frac{AB}{2})$ où I est le milieu de $[AB]$.

Prop. (Équation cartésienne)

1. Dans un r.o.n.d., le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ a pour équation

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2.$$

2. Réciproquement, pour l'ensemble d'équation $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + ax + by = c$, si $A \neq C$ ou si $B \neq 0$, ce n'est pas un cercle.

Méth. (Vérification d'une équation de cercle)

Question : Est-ce que l'ensemble $(\Gamma) : 2x^2 + 2y^2 + 3x - 6y - 2 = 0$ est un cercle ?

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On normalise l'équation en divisant par 2 :

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - 3y - 1 = 0.$$

On reconnaît le début d'identités remarquables (mise sous forme canonique) :

- $x^2 + \frac{3}{2}x = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$;
- $y^2 - 3y = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

L'équation devient :

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0.$$

En isolant les carrés, on obtient :

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = K$$

avec $K = \frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+36+16}{16} = \frac{61}{16}$.

Conclusion : Comme $K > 0$, l'ensemble (Γ) est bien un cercle de centre $\Omega(-3/4; 3/2)$ et de rayon $R = \sqrt{K} = \frac{\sqrt{61}}{4}$.

Prop. (Paramétrisation d'un cercle)

Le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_\Omega + r \cos(\theta) \\ y = y_\Omega + r \sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$