18 Géométrie élémentaire 3 : l'espace

18.1 Produit vectoriel dans l'espace orienté

Défi.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, qu'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'unique vecteur de l'espace défini comme suit :
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, alors
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})\, \vec{k},$$
où $\vec{k}$ désigne l'unique vecteur unitaire directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est lié, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Prop.
Le produit vectoriel est :
1. bilinéaire :
   a. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{E}$,
$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}; \end{cases}$$
   b. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}); \end{cases}$$
2. antisymétrique :
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Prop.
L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Soient $\vec{v_1}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v_2}(x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs. Alors $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$ admet pour coordonnées
$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Appl.
Dans une b.o.n.d. de l'espace, on considère $\vec{v_1}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Alors,
$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Prop. (Produit vectoriel et colinéarité)
Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si, et seulement si, le produit vectoriel de l'un par l'autre est égal au vecteur nul :
$$\vec{u} // \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

18.2 Déterminant dans une b.o.n.d

Défi. (Déterminant en dimension 3)
Le *déterminant* de tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace est le nombre réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Nota.
On note souvent $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exem.
On considère en b.o.n.d $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -14 \times 7 - 10 \times 2 - 2 \times 6 = -130.$$

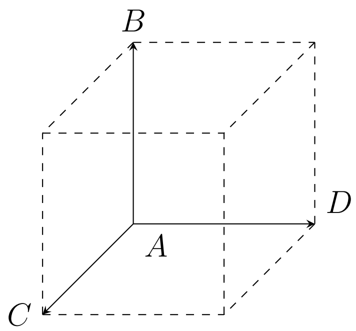
Prop. (Produit vectoriel et mesure)
La valeur absolue $|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$ mesure le volume du parallélépipède d'arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Rema.
1. On ne demande pas à ce que le parallélépipède le soit au sens strict.
2. Pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ on peut choisir A quelconque puis B, C et D tels que

$$\begin{cases} A + \vec{u} = B \\ A + \vec{v} = C \\ A + \vec{w} = D \end{cases}$$

   pour interpréter $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

Figu.



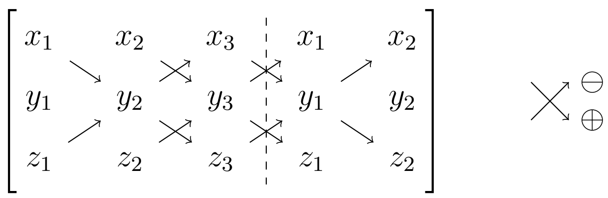
Prop. (Multilinéarité et antisymétrie)
Le déterminant (en dim. 2 ou 3) est linéaire par rapport à chaque place et antisymétrique.

Rema.
« Bi- » et « tri- » linéaires.

Exem.
Si $\vec{v} = \mu_1\vec{v_1} + \mu_2\vec{v_2}$, alors
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \mu_1[\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{w}] + \mu_2[\vec{u}, \vec{v_2}, \vec{w}],$$
et semblablement, si $\vec{u} = \lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2}$ ou si $\vec{w} = \nu_1\vec{w_1} + \nu_2\vec{w_2}$.

Prop. (Déterminant et coordonnées)
Considérons $\vec{v_1}\left(\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{smallmatrix}\right)$, $\vec{v_2}\left(\begin{smallmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v_3}\left(\begin{smallmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{smallmatrix}\right)$ dans une b.o.n.d.
$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad [\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}] &= y_1z_2x_3 - z_1y_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_1z_2y_3 + x_1y_2z_3 - y_1x_2z_3 \\ &= (x_1y_2z_3 + z_1x_2y_3 + y_1z_2x_3) - (z_1y_2x_3 + x_1z_2y_3 + y_1x_2z_3). \end{aligned}$$

Figu.



Nota.
Comme pour la notation $ab - cd = \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$, la somme ci-avant se note
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et développement)
En développant par rapport à la troisième colonne, on obtient
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Rema.
Un échange permet de placer toute colonne en troisième position.

Rema.
Comme pour la relation $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$, la transposition conserve le déterminant (en dim 2 ou 3) ;

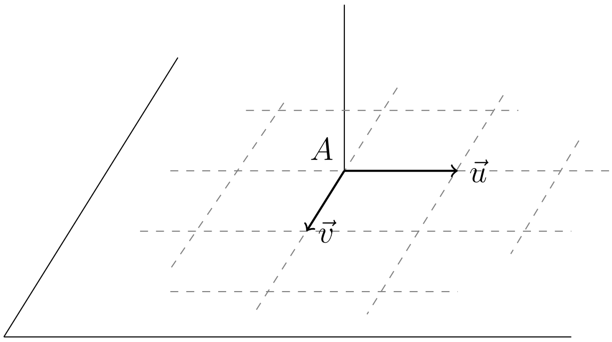
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et dépendance linéaire)
Un triplet de vecteurs de l'espace est lié si, et seulement si, son déterminant est égal à zéro.

18.3 Plans de l'espace

Noti. (Plan de l'espace)
On décrit primitivement un plan par la donnée d'un point A qu'il possède et d'un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs linéairement indépendants qui le dirigent.

Figu.



Prop. (Paramétrisation)
1. Le plan $\mathcal{P}$ passant par $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et dirigé par $\vec{v_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases} \quad ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Réciproquement, une telle paramétrisation, avec $\vec{v_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ linéairement indépendants, définit le plan passant par $M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dirigé par $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Appl.
Que dire de la partie de l'espace définie par le système de trois éqn. paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = 2k + 3l \\ y = -1 + 3k \\ z = -5 - 2k + l \end{cases} \quad ; \quad (k, l) \in \mathbb{R}^2 \quad ?$$

Posons $M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, puis $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre ? Soit, est-ce que $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} \neq$

$\vec{0}$?
Oui car l'abscisse est égale à : $3 \times 1 - (-2) \times 0 = 3$ et $3 \neq 0$. Cette partie est le plan passant par M_0 et dirigé par $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Production en cours.