01_math_2602201301

Notes de
Cours de Mathématiques

éditées par Jean Decroocq
d'après l'enseignement de M. Ngambou

CPGE TSI 1 – 2025/2026
Lycée polyvalent de Cachan

Dernière mise à jour : 20/02/2026
Communiquer une anomalie : jeandecroocq@hotmail.com

Avant-propos

Le présent document constitue une retranscription numérique des enseignements de mathématiques que j'ai reçus en première année de classe préparatoire aux grandes écoles, au sein de la filière technologie et sciences industrielles. Ma démarche a procédé avant tout d'une conviction pédagogique : la valeur de ce recueil, bien qu'il soit mis librement à disposition, réside moins dans sa consultation finale que dans le processus intellectuel de son élaboration. C'est dans l'exigence de la transcription, de la mise en forme et dans mon goût pour l'établissement de documents scientifiques que s'est véritablement opérée l'appropriation des concepts.

Si l'aspect numérique offre l'avantage d'une accessibilité permanente, permettant de consulter ce cours en tout lieu et à tout instant, ce travail a été conçu comme le prolongement de mes notes manuscrites prises en séance. J'ai ainsi conservé l'architecture et l'essentiel des formulations du cours magistral de mon professeur, tout en y apportant quelques inflexions personnelles. J'ai notamment fait le choix d'écarter la quasi-totalité des démonstrations afin de privilégier un support concis, tout en adaptant ponctuellement certains énoncés ou figures pour soutenir ma propre compréhension.

Il convient de souligner que ce document est le fruit d'un travail étudiant réalisé lors de mon apprentissage. Malgré la rigueur que j'ai cherché à y insuffler, il n'est pas exempt d'erreurs ou de coquilles dont je porte l'entière responsabilité. La vigilance du lecteur reste donc de mise.

Enfin, bien que la composition sous LaTeX témoigne de mon intérêt pour l'esthétique mathématique, la typographie employée ici s'est autorisée des libertés vis-à-vis des normes de rédaction conventionnelles. Ces choix ont privilégié une lisibilité personnelle et une structure visuelle adaptée à mes propres besoins.

Table des matières

1 Pratiques calculatoires 1 : $\mathbb{R}, +, \times, \leqslant, |\cdot|$

1.1 Opérations dans la droite réelle

Prop.
L'addition entre les nombres réels est :
- associative : pour tous réels x, a et b, $(x+a)+b = x+(a+b)$;
- commutative : pour tous réels a et b, $a+b = b+a$;
- admet 0 pour unique élément neutre : pour tout réel x, $x+0 = x = 0+x$;
- admet pour tout réel x, un unique opposé noté $-x$: $x+(-x) = 0 = -x+x$.

Prop.
La multiplication entre les nombres réels :
- est associative ;
- est commutative ;
- admet 1 pour unique élément neutre ;
- admet pour tout réel non nul x, un unique inverse noté x^{-1} : $x \times x^{-1} = 1 = x^{-1} \times x$.

Prop. (Stabilité de $\mathbb{R}^*$ par multiplication)
Si deux réels sont non nuls, alors leur produit est non nul.

Prop. (Distributivité)
La multiplication entre les réels est, par rapport à l'addition :
- distributive à gauche : pour tous réels x, a et b, $ax + bx = (a+b)x$;
- distributive à droite : $xa + xb = x(a+b)$.

Prop. (Absorbance et produit nul)
- Le nombre 0 est absorbant : pour tout réel a, $0 \times a = 0 = a \times 0$.
- Pour tous réels a et b, $ab = 0$ ssi $a = 0$ ou $b = 0$.

Prop. (Règle des signes)
Les trois expressions $-(ab)$, $(-a)b$, $a(-b)$ sont égales.

Défi. (Différence)
Considérons deux réels a et b. La différence de a à b, notée $a-b$, est définie par $a-b \overset{\text{déf}}{=} a+(-b)$.

Prop. (Propriétés de la différence)
Soit quatre réels a, b, a', b'. On a :
- $(a-b)+(a'-b') = (a+a')-(b+b')$;
- $-(a-b) = b-a$.

Défi. (Quotient)
Considérons deux réels a et b, avec b non nul. Le quotient de a par b, noté a/b, est le nombre réel défini par $a/b \overset{\text{déf}}{=} a \times b^{-1}$.

Prop. (Propriétés du quotient)
Soit des réels a, a' et des réels non nuls b, b'.
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b} = \dfrac{a+a'}{b}$;
- Les trois expressions $-\dfrac{a}{b}, \dfrac{-a}{b}$ et $\dfrac{a}{-b}$ sont égales ;
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a \times a'}{b \times b'}$;
- Si $a \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

1.2 Egalité dans la droite réelle

Prop. (Invariance de la somme d'après la variation des deux termes)
On ne varie pas la somme de deux nombres réels si on ajoute à l'un un troisième nombre réel alors qu'on soustrait de l'autre ce même troisième nombre.

$$\forall t_1, t_2, d \in \mathbb{R}, \quad t_1 + t_2 = (t_1 + d) + (t_2 - d).$$

Prop. (Invariance du produit)
On ne varie pas le produit de deux nombres réels si on multiplie l'un par un troisième nombre réel non nul alors qu'on divise l'autre par ce même troisième nombre non nul.

$$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^*, \quad f_1 \cdot f_2 = (f_1 \cdot q) \cdot (f_2/q).$$

Prop. (Invariance de la différence)
On ne varie pas la différence de deux nombres réels si on ajoute à chacun des deux ou si on soustrait de chacun des deux, un même troisième nombre réel.

$$\forall t_1, t_2, d \in \mathbb{R}, \quad t_1 - t_2 = (t_1 + d) - (t_2 + d).$$

Prop. (Invariance du quotient)
On ne varie pas le quotient de deux nombres réels si on multiplie chacun des deux, ou si on divise chacun des deux, par un même troisième nombre non nul.

$$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1 \times q}{f_2 \times q} \quad (\text{si } f_2 \neq 0).$$

1.3 Ordre dans la droite réelle

Prop. (Ordre entre les réels)
L'ordre $\leqslant$ entre les nombres réels est :
- réflexif : pour tout réel x, on a $x \leqslant x$;

- transitif : pour toute suite de trois réels x, y et z, si $x \leqslant y$ et si $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$;
- antisymétrique : pour tous réels x et y, si $x \leqslant y$ et si $y \leqslant x$ alors $x = y$;
- total : pour tous choix de deux nombres réels x et y, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Nota.
On note "$x < y$" pour "$x \leqslant y$ et $x \neq y$".

Prop. (Rapport aux nombres positifs)
Soit deux réels x et y.
- $x \leqslant y$ si, et seulement si, on peut trouver un réel positif d tel que $y = x + d$.
- Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $xy \geqslant 0$.

Prop.
Soit deux réels positifs x et y.
- $x + y$ est positif.
- Si $x + y$ est nul alors chacun des réels x et y est nul.

Prop. (Rapport à l'addition)
- Pour tous réels x et y, pour tout réel d, si $x \leqslant y$ alors $x + d \leqslant y + d$.
- Pour tout réel x, $x \leqslant 0 \leqslant -x$ ou $-x \leqslant 0 \leqslant x$.
- Pour tous réels x et y, si $x \leqslant y$ alors $-y \leqslant -x$.

Prop. (Rapport à la multiplication)
- Soit x et y deux réels. Soit q un réel positif. Si $x \leqslant y$ alors $qx \leqslant qy$.
- Pour tout réel x strictement positif, $x \leqslant 1 \leqslant x^{-1}$ ou $x^{-1} \leqslant 1 \leqslant x$.
- Pour tous réels x et y, si $0 < x \leqslant y$ alors $0 < y^{-1} \leqslant x^{-1}$; si $x \leqslant y < 0$ alors $y^{-1} \leqslant x^{-1} < 0$.

1.4 Inégalités dans la droite réelle

Prop. (Variation de la somme)
Pour tous réels a, b, c, d :
- $a \leqslant b \implies a + c \leqslant b + c$.
- $a \leqslant b \wedge c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$.

Prop. (Variation de la différence)
Pour tous réels a, b, c :
- $a \leqslant b \implies a - c \leqslant b - c$.
- $a \leqslant b \implies c - a \geqslant c - b$.

Prop. (Variation du produit)
Pour tous réels a, b, c :
- Si $c \geqslant 0$: $\quad a \leqslant b \implies ac \leqslant bc$.
- Si $c \leqslant 0$: $\quad a \leqslant b \implies ac \geqslant bc$.
- Pour a, b, c, d positifs : $\quad a \leqslant b \wedge c \leqslant d \implies ac \leqslant bd$.

Prop. (Variation du quotient)
Pour tous réels a, b strictement de même signe :
- $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$.

Pour des réels strictement positifs n, d :
- $n_1 \leqslant n_2 \implies \dfrac{n_1}{d} \leqslant \dfrac{n_2}{d}$.
- $d_1 \leqslant d_2 \implies \dfrac{n}{d_1} \geqslant \dfrac{n}{d_2}$.

1.5 Intervalles et valeur absolue

Défi.
Les intervalles I non vides d'extrémité inférieure a et d'extrémité supérieure b sont donnés par le tableau suivant :

	$b \in I$	$b \in \mathbb{R} \setminus I$	$b = +\infty$
$a \in I$	$[a, b]$	$[a, b[$	$[a, +\infty[$
$a \in \mathbb{R} \setminus I$	$]a, b]$	$]a, b[$	$]a, +\infty[$
$a = -\infty$	$]-\infty, b]$	$]-\infty, b[$	$]-\infty, +\infty[$

Défi.
On appelle *valeur absolue* de tout nombre réel x l'unique nombre réel noté $|x|$ défini par

$$|x| \overset{\text{déf}}{=} \max\{-x, x\}.$$

Prop. (Inégalité triangulaire)
Soit deux réels x et y. Alors $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Prop. (Cas d'égalité)
Si $|x + y| = |x| + |y|$, alors $x, y \geqslant 0$ ou $x, y \leqslant 0$.

Prop. (Inégalité triangulaire inversée)
On a deux réels x et y. Ainsi $|x + y| \geqslant |x| - |y|$.

Prop.
Soit x un réel quelconque. Alors $|x| = \sqrt{x^2}$.

Prop. (Rapport à la multiplication)
On donne x et y deux nombres réels. Ainsi,
1. $|xy| = |x| \cdot |y|$.
2. Pour tout réel positif r, $|rx| = r|x|$.

Prop. (Rapport à la division)
$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Prop.
Soit un réel x quelconque. On peut trouver S égal à 1 ou -1, et $r \geqslant 0$ tel que $x = Sr$.

Défi. (Signe d'un réel)
On appelle *signe* d'un réel non nul x, qu'on note ici $\operatorname{sgn}(x)$, le nombre réel $\operatorname{sgn}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{x}{|x|}$.

Méth. (pour déterminer le signe d'un produit)
Qu'on donne un réel x quelconque. On veut le signe de l'expression $f(x) = (2x-1)(12-3x)$. Cela est indiqué dans le tableau de signes ci-après.

x	$-\infty$		$1/2$		4		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$12-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Prop. (Intervalle centrés)
Soit a et b deux réels, avec r positif. Sur tout réel x, les deux propositions suivantes sont équivalentes :
1. $|x-a| \leqslant r$;
2. $x \in [a-r, a+r]$.

Voca.
$[a-r, a+r]$ est l'intervalle fermé centré en a de rayon r ; et $]a-r, a+r[$ est l'intervalle ouvert centré en a et de rayon r.

2 Fondements 1 : logique

2.1 Énoncés et notion de valeur de vérité

Noti. (Proposition)
Une *proposition* ou *assertion*, est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Prop. (Principe du tiers exclu)
Une proposition est soit vraie, soit fausse, et non les deux à la fois.

Noti. (Négation)
La *négation* d'une proposition P est vraie si et seulement si P est fausse. On note NON P ou $\neg P$.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Toute proposition et sa négation sont contradictoires : "P et $\neg P$" est une contradiction (toujours faux).

Prop. (Involution)
P est vraie si et seulement si sa négation est fausse :

$$P \iff \neg(\neg P).$$

2.2 Combinaison de deux propositions

Défi. (Conjonction et Disjonction)
Soit P et Q deux propositions.
- La *conjonction*, notée P ET Q ou $P \wedge Q$, est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.
- La *disjonction*, notée P OU Q ou $P \vee Q$, est vraie si et seulement si au moins l'une des deux propositions est vraie.

Prop. (Associativité et commutativité)
Etant donné une liste de proposition , on ne varie par leur conjonction si on les ordonne puis les groupe arbitrairement.

Prop. (Distributivité)
Soit trois propositions P, Q et R. Alors :
- $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
- $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Noti. (Équivalence d'une première proposition avec une dernière)
P ÉQUIVAUT À Q, $P \iff Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies ou P et Q sont toutes les deux fausses.

Noti. (Implication d'une dernière proposition par une première)
P IMPLIQUE Q, $P \implies Q$, est vraie si et seulement si P est fausse, ou P et Q sont toutes les deux vraies.

Tabl. (Tables de vérité)
Voici des tables de valeurs de vérité de ces quatre propositions composées.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \iff Q$	$P \implies Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V

Prop. (Négations des propositions composées)
Soit P et Q. On a
- $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$
- $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \implies Q) \iff P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \iff Q) \iff (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

Prop. (Liens logiques)
- Disjonction et implication : $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$.
- Équivalence et implication : $(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Défi.
On appelle *contraposée* de l'implication $P \implies Q$, l'implication $\neg Q \implies \neg P$.

Prop.
Une implication et sa contraposée sont équivalentes :

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P).$$

Défi.
On appelle *implication réciproque* de $P \implies Q$, l'implication $Q \implies P$.

Rema.
En règle générale, on ne peut déterminer la valeur de vérité d'une implication directe à partir de celle de sa réciproque.

Prop.

$$P \vee Q \iff \neg P \implies Q$$

2.3 Propositions universelles, existentielles

Noti. (Conjonction "en vrac" de plusieurs propositions)
On dit que la conjonction d'une liste d'un certain nombre de propositions est vraie si toutes ces propositions sont vraies ; on dit qu'elle est fausse sinon, c'est-à-dire si au moins une proposition est fausse.

Noti. (Conjonction d'une famille de propositions)
- "quel que soit l'élément x, $\mathcal{P}(x)$" ;
- "pour tout élément x, $\mathcal{P}(x)$" ;
- $\forall x, \mathcal{P}(x)$.

Noti. (Disjonction d'une liste de plusieurs propositions)
On dit que la disjonction d'un certain nombre de propositions est vraie si au moins une de ces propositions est vraie ; on dit qu'elle est fausse sinon (toutes fausses).

Noti. (Disjonction (inclusive) d'une famille de propositions)
- "il existe au moins un élément x tel que $\mathcal{P}(x)$" ;
- "pour au moins un élément x, $\mathcal{P}(x)$" ;
- $\exists x, \mathcal{P}(x)$.

Prop. (Négation de la proposition universelle)
La négation de "$\forall x, \mathcal{P}(x)$" est la proposition existentielle "$\exists x, \neg\mathcal{P}(x)$".

Prop. (Négation de la proposition existentielle)
La négation de "$\exists x, \mathcal{P}(x)$" est la proposition universelle "$\forall x, \neg\mathcal{P}(x)$".

Exem.
La négation de "Tout élève de la classe possède un stylo bleu" est "Il existe au moins un élève de la classe qui ne possède pas de stylo bleu".

2.4 Valeur numérique de vérité d'une proposition (hors programme)

Défi.
Pour toute proposition $\mathcal{P}$, on pose :

$$\mathbb{1}_{\mathcal{P}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P} \text{ est vraie} \\ 0 & \text{si } \mathcal{P} \text{ est fausse} \end{cases}$$

Prop.
- $\mathbb{1}_{\neg\mathcal{P}} = 1 - \mathbb{1}_{\mathcal{P}}$
- $\mathbb{1}_{\mathcal{P}\wedge\mathcal{Q}} = \mathbb{1}_{\mathcal{P}}\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$
- $\mathbb{1}_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}} = 1 - \mathbb{1}_{\neg\mathcal{P}\wedge\neg\mathcal{Q}} = \mathbb{1}_{\mathcal{P}} + \mathbb{1}_{\mathcal{Q}} - \mathbb{1}_{\mathcal{P}}\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$

Prop. (Rapport à l'implication)

$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \iff \mathbb{1}_{\mathcal{P}} \leqslant \mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$$

Complément
La proposition "il existe au plus un élément x tel que $\mathcal{P}(x)$" se dit "si x et y sont tels que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$ alors $x = y$" (où x et y désignent le même objet). Autrement écrit,

$$\forall x, \forall y, \quad (\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{P}(y)) \implies x = y.$$

3 Géométrie élémentaire 1 : vecteurs de l'espace

3.1 Vecteurs et opérations

Noti.
Le vecteur $\vec{AA'}$, de A à A', est associé à la translation qui transforme le point A en point A'. Si $A' \neq A$, le vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.

Prop.
Soit quatre points A, A', B et B'. $\vec{AA'} = \vec{BB'}$ si et seulement si le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Noti.
- Notée $\|\vec{v}\|$, la *norme* d'un vecteur $\vec{v}$ est la mesure commune des longueurs des segments orientés qui le représentent. C'est un nombre réel positif.
- Pour tout point M, on peut trouver un unique point M' image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Prop.
Un point O étant choisi comme origine, il y a correspondance un à un entre les vecteurs $\vec{v}$ et les points M via la relation $\vec{OM} = \vec{v}$, i.e. $O + \vec{v} = M$.

Prop. (Addition entre les vecteurs)
L'addition entre les vecteurs :
- est associative ;
- est commutative ;
- admet le vecteur nul ($\vec{0}$) pour élément neutre : $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$;
- admet pour tout vecteur $\vec{v}$ un unique opposé noté $-\vec{v}$.

Prop. (Associativité et commutativité générale de l'addition)
Etant donné une liste d'un certain nombre de vecteurs, on ne varie pas leur somme si on les ordonne puis les groupe arbitrairement.

Prop. (Multiplication des vecteurs par les réels)
La multiplication des vecteurs par les nombres réels est :
- distributive sur l'addition entre les vecteurs : $\lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2$;
- distributive sur l'addition entre les nombres réels : $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v}$;
- sans effet pour le nombre 1 : $1\vec{v} = \vec{v}$;
- compatible avec la multiplication entre les nombres réels : $\lambda_2(\lambda_1\vec{v}) = (\lambda_2\lambda_1)\vec{v}$.

Prop. (Produit et règle des signes)
Soit un vecteur $\vec{v}$ et un réel λ. $\lambda\vec{v} = \vec{0} \iff \lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
De plus : $-\lambda\vec{v} = (-\lambda)\vec{v} = \lambda(-\vec{v})$.

Noti.
On dit qu'un vecteur est une *combinaison linéaire* d'une liste de vecteurs si le premier se décompose comme une somme de produits des derniers par des réels.

Noti.
On dit qu'une liste de vecteurs est *libre*, ou que ces vecteurs sont *linéairement indépendants*, si pour obtenir le vecteur nul comme combinaison linéaire de ces derniers, il est nécessaire de choisir chaque coefficient égal à 0. Sinon, on dit que la liste est *liée* ou que les vecteurs sont *linéairement dépendants*.

Rema.
Une liste est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs n'est une combinaison linéaire des autres.

Prop.
- Deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont *linéairement dépendants* (colinéaires) ssi l'un est nul ou l'un est une combinaison linéaire de l'autre ($\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v_2} = \lambda \vec{v_1}$).
- Trois vecteurs sont linéairement dépendants (coplanaires) ssi l'un est nul ou l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

3.2 Repérage dans un plan, l'espace

Défi.
On appelle *base du plan* toute liste de deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan. On appelle *base de l'espace* toute liste de trois vecteurs linéairement indépendants.

Prop.
Etant donné une liste de vecteurs d'un plan (resp. de l'espace), il s'agit d'une base de ce plan si et seulement si tout autre vecteur peut se décomposer de manière unique comme une combinaison linéaire de la liste.

Défi.
Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ est *orthogonale* si $\vec{u} \perp \vec{v}$. Elle est *orthonormale* (ou orthonormée) si de plus $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Défi.
On appelle *repère* d'un plan $\mathcal{P}$ tout triplet $(O; \vec{u}, \vec{v})$ constitué d'un point O du plan et d'une base $(\vec{u}, \vec{v})$ des vecteurs de $\mathcal{P}$. De même pour l'espace avec $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Défi.
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on appelle *couple de coordonnées* du point M l'unique couple (x, y) tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Prop. (Changement de coordonnées par translation)
Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace et O' un point de coordonnées (u,v,w) dans ce repère (tel que $\vec{OO'} = u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$). Pour tout point M, si $\vec{OM}$ a pour coordonnées (x,y,z), alors $\vec{O'M}$ a pour coordonnées $(x-u, y-v, z-w)$.

Défi.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, pour tout point M distinct de l'origine, on appelle *coordonnées polaires* le couple (r,θ) tel que :

$$\vec{OM} = r(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})$$

avec $r\in]0,+\infty[$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$. r est la norme $\|\vec{OM}\|$ et θ est la *mesure principale* de l'angle orienté $(\vec{i},\vec{OM})$.

3.3 Barycentre

Défi.
Un *système de points pondérés* est une liste de points auxquels on affecte des nombres appelés *poids* (ou coefficients).

Nota.
Par exemple, $\{(A;-2);(B;10);(C;5,3)\}$ est un système pondéré de points. On note aussi

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ -2 & 10 & 5,3 \end{bmatrix}.$$

Défi. (Barycentre)
Soit O un point fixé et $n\in\mathbb{N}^*$. On considère le système pondéré

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}, \quad p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{R}.$$

Si $p_1+\cdots+p_n\neq 0$, on appelle *barycentre* du système le point

$$G = \mathrm{bar}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad \vec{OG} = \frac{p_1\vec{OA}_1+\cdots+p_n\vec{OA}_n}{p_1+\cdots+p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i\vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Défi. (Isobarycentre)
On appelle *isobarycentre* d'une famille de points le barycentre du système formé par ces points affectés de poids tous égaux.

Prop. (Indépendance du point de référence)
La définition du barycentre ne dépend pas du choix de l'origine. Pour tout point M, on a

$$\sum_{i=1}^n p_i\vec{MA}_i = \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)\vec{MG}.$$

Prop. (Caractérisation du barycentre)
Le barycentre G est l'unique point tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{GA_i} = \vec{0}.$$

Prop. (Coordonnées cartésiennes du barycentre)
(Comme avant). Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, notons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point A_i dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors l'abscisse du barycentre G est égale à la moyenne pondérée des abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$ affectés des poids $p_1, p_2, \dots, p_n$ respectivement. De même pour l'ordonnée et l'altitude. C'est que :

$$x_G = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

où x_G est l'abscisse de G.

Prop. (Barycentre et invariance)
Le barycentre est invariant par multiplication de tous les poids par un même réel non nul. L'isobarycentre est invariant par toute transformation affine qui laisse globalement invariant le système de points.

Prop.
Si le système admet un axe de symétrie, alors son isobarycentre appartient à cet axe.

3.4 Produit scalaire

Défi.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace. On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, qu'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini comme suit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Prop.
Soit deux points A et B distincts. Soit un troisième point C. Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$, où H désigne le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Prop.
Le produit scalaire est :
1. bilinéaire :
   - $(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \cdot \vec{v})$;
   - $\vec{u} \cdot (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 (\vec{u} \cdot \vec{v}_1) + \lambda_2 (\vec{u} \cdot \vec{v}_2)$;

   quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ et les réels λ_1, λ_2 ;
2. symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
3. positif : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$ quelque soit $\vec{u}$;
4. défini : $\forall \vec{u}$, si $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$.

Prop.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
Par suite $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Nota.
On note $\vec{u}^2$ pour $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

Prop. (Produit scalaire et produit des normes)
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

$$-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leqslant \vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

(Ceci est l'Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Prop. (Identités scalaires remarquables)
Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On a
1. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$;
2. $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$;
3. $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$.

Aussi,
1. $\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$;
2. $\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$;
3. $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

Prop.
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a

$$\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Prop.
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$

Prop. (Décomposition dans une base orthonormée)
Soit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des vecteurs de l'espace. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque. Ainsi, $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j} + z_{\vec{u}}\vec{k}$, où

$$\begin{cases} x_{\vec{u}} = \vec{i} \cdot \vec{u} \\ y_{\vec{u}} = \vec{j} \cdot \vec{u} \\ z_{\vec{u}} = \vec{k} \cdot \vec{u} \end{cases}.$$

Prop.
Soit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des vecteurs de l'espace. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coor-

données respectives $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}} z_{\vec{v}}.$$

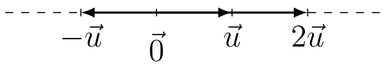
Prop.
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

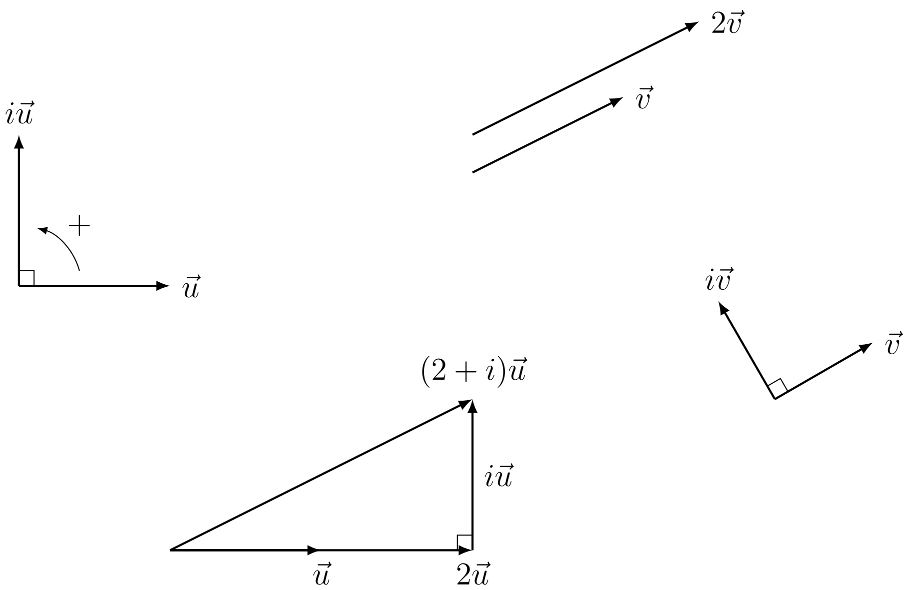
4 Plan complexe 1 : $\mathbb{C}, +, \times, |\cdot|$

4.1 Nombres complexes et vecteurs du plan orienté

Noti.
Les nombres réels peuvent être regardés comme des multiplicateurs pour passer des vecteurs non nuls de la droite à tous les vecteurs de cette même droite.



Dans le plan orienté, on imagine un « nombre » par lequel la multiplication a pour effet de réaliser le quart de tour direct.



Noti. (Le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, extension du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$)
1. Les nombres réels sont des nombres complexes.
2. L'addition entre les nombres complexes :
   a. est associative : $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall z_3 \in \mathbb{C}, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
   b. est commutative : $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
   c. admet le nombre 0 pour unique élément neutre : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z + 0 = z = 0 + z$;
   d. admet pour tout nombre complexe z, un unique opposé noté $-z$: $(-z)+z = 0 = z+(-z)$.
3. La multiplication entre les nombres complexes est :
   a. associative ;
   b. est commutative ;
   c. admet le nombre 1 pour unique élément neutre ;
   d. admet pour tout nombre complexe z non nul, un unique inverse noté z^{-1}.
4. Par rapport à l'addition entre les complexes, la multiplication entre les complexes est doublement distributive.
5. Il existe au moins un nombre complexe dont le carré (le produit du nombre par lui-même) est égal à -1. Notons i un tel nombre dans toute la suite.
6. Pour tout nombre complexe, on peut l'exprimer comme la somme :
   - du produit de 1 par un réel,

- et du produit de i par un réel.

C'est que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \exists b \in \mathbb{R}, \quad z = 1a + ib.$$

4.2 Nombres réels partie réelle et partie imaginaire d'un complexe

Prop.
Pour tous réels x et y, si $x + iy = 0$, alors $x = 0$ et $y = 0$.

Prop. (Unicité de la forme algébrique d'un complexe)
Soit un nombre complexe z. Ainsi, il existe exactement un couple (x, y) de réels tel que $x+iy = z$.

Défi. (Partie réelle et partie imaginaire)
On considère un complexe z. On appelle *partie réelle* et *partie imaginaire* de z qu'on note respectivement $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$, les nombres réels tels que :
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = z \\ \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prop.
Soient deux complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, où $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.
- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Prop. (Linéarité sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{Re}(\cdot)$ et $\mathrm{Im}(\cdot)$)
Pour tous complexes z_1 et z_2, pour tous réels r_1 et r_2 :
$$\mathrm{Re}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \mathrm{Re}(z_1) + r_2 \mathrm{Re}(z_2)$$
$$\mathrm{Im}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \mathrm{Im}(z_1) + r_2 \mathrm{Im}(z_2)$$

Prop.
L'inverse de i est égal à son opposé : $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\left(\frac{z}{i}\right) = \mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}\left(\frac{z}{i}\right) = -\mathrm{Re}(z). \end{cases}$$

Prop. (Caractérisation des réels parmi les complexes)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
a. $z \in \mathbb{R}$
b. $\mathrm{Im}(z) = 0$
c. $z = \mathrm{Re}(z)$

Prop. (Caractérisation des imaginaires purs)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
a. $z \in i\mathbb{R}$
b. $\mathrm{Re}(z) = 0$
c. $z = i\mathrm{Im}(z)$

Rema.
$z \in i\mathbb{R} \iff \frac{z}{i} \in \mathbb{R}$.

4.3 Nombre complexe conjugué d'un complexe

Défi.
Le nombre complexe *conjugué* de z, noté $\bar{z}$, est défini par $\bar{z} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z = \bar{\bar{z}}$.

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- si $z_1 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \frac{\bar{z}+z}{2} \\ \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \end{cases}$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

4.4 Nombre réel module d'un complexe

Défi.
Le nombre réel *module* de z, noté $|z|$, est $|z| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \in \mathbb{R}_+$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :
- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- $z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

Prop. (Formule algébrique d'un quotient)
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tq $z_1 \neq 0$. Alors
$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2)}{|z_1|^2} \\ \mathrm{Im}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\mathrm{Im}(\overline{z_1} z_2)}{|z_1|^2} \end{cases}$$

Méth. (pour écrire un quotient sous forme algébrique)
Exemple :
$$\frac{1}{1+i} = \frac{(1-i)\times 1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- Si $z_1 \neq 0$, $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$.

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,
- $|r| = r$;
- $|r \cdot z| = r|z|$.

Prop.
On considère un nombre complexe z. Ainsi,
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.
- Si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}$ alors $|\mathrm{Re}(z)| = |z|$.
- $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
- Si, et seulement si, $z \in i\mathbb{R}$ alors $|\mathrm{Im}(z)| = |z|$.

Prop. (Inégalité triangulaire pour les complexes)
Soit deux complexes z_1 et z_2. Ainsi,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- Si $(z_1 = 0) \vee (\exists r \in \mathbb{R}_+, z_2 = r z_1)$ alors $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ainsi $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Défi. (Disque)
On considère un complexe a et un réel positif r. On appelle *disque* fermé de centre a et de rayon r, l'ensemble des complexes z tels que $|z - a| \leq r$.

4.5 Nombres complexes et géométrie du plan orienté

Défi.
On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. À tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ du plan, on associe le nombre complexe
$$z = x + iy,$$
appelé *affixe* de $\vec{v}$.
Réciproquement, à tout complexe $z = x + iy$, on associe le vecteur
$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j},$$
appelé *vecteur image* de z.
2. L'*affixe* d'un point M est l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.
Réciproquement, le *point image* d'un complexe $z = x + iy$ est le point M de coordonnées (x, y), que l'on note $M(z)$.

Prop.
Soit $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ deux vecteurs, z_1 et z_2 deux complexes et r_1 et r_2 deux réels. Si $\vec{v_1}$ admet pour affixe z_1 et $\vec{v_2}$ admet pour affixe z_2, alors $r_1\vec{v_1} + r_2\vec{v_2}$ admet pour affixe $r_1z_1 + r_2z_2$.

Prop.
Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan, d'affixe z dans un repère orthonormé. Alors $\|\vec{v}\| = |z|$.

Prop.
Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2 dans un repère orthonormé. Alors $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
En particulier, soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan. Alors A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Prop.
Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2 dans un repère orthonormé. Alors
$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \iff \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}.$$

Prop.
Soit un vecteur $\vec{b}(b)$. Soit un point $M(z)$. Soit un point $M'(z')$. Ainsi, $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par translation de vecteur $\vec{b}$ si et seulement si $z' = z + b$.

Prop.
Soit un réel θ. Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre l'origine et d'angle θ si et seulement si $z' = z(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Prop.
Par suite, $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ si et seulement si $z' - \omega = (z - \omega)(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Prop.
Soit un réel non nul k.
- $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre l'origine et de rapport k si et seulement si $z' = zk\ (= kz)$.
- $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k si et seulement si $z' - \omega = (z - \omega)k$.

Prop.
$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie orthogonale par rapport au premier axe du repère si et seulement si $z' = \bar{z}$.
$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie orthogonale par rapport au second axe du repère si et seulement si $z' = -\bar{z}$.

5 Fondements 2 : ensembles

5.1 Égalité

Prop.
La relation d'égalité est :
- réflexive : toute expression est égale à elle-même ;
- symétrique : si $\mathrm{expr}_1 = \mathrm{expr}_2$ alors $\mathrm{expr}_2 = \mathrm{expr}_1$;
- transitive : si $\mathrm{expr}_1 = \mathrm{expr}_2$ et $\mathrm{expr}_2 = \mathrm{expr}_3$ alors $\mathrm{expr}_1 = \mathrm{expr}_3$.

Prop. (Principe de substitution)
Si une première expression est égale à une dernière, alors toute formule comprenant la première expression est égale à la même formule dans laquelle on a substitué la dernière expression à une occurrence de la première.

5.2 L'ensemble et ses éléments

Noti.
Les constituants d'un ensemble sont ses éléments. Si e est un élément de l'ensemble E, on dit que :
- e appartient à E, noté $e \in E$;
- E possède e, noté $E \ni e$.

Noti.
L'ensemble vide est celui qui ne possède aucun élément. On le note $\emptyset$.

Défi.
Un *singleton* est un ensemble qui possède exactement un élément.

Défi.
On dit que deux ensembles E et F sont égaux pour dire que

$$\forall x, \quad x \in E \iff x \in F.$$

Défi.
On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F pour dire que

$$\forall x, \quad x \in E \Rightarrow x \in F.$$

C'est que,

$$\forall x \in E, \quad x \in F.$$

Noti.
On note $E \subset F$ et on dit que E est un *sous-ensemble*, ou une *partie*, de F.

Méth. (pour montrer que deux ensembles sont égaux)
On utilise ce que
$$E = F \iff (E \subset F) \wedge (F \subset E).$$

Défi. (Disjoints)
On dit que deux ensembles E et F sont *disjoints* pour dire qu'ils n'ont pas d'éléments en commun.
$$\forall x, \quad \neg(x \in E \wedge x \in F).$$

5.3 Deux modes de définition d'un ensemble

Défi.
Un ensemble peut être défini de deux manières :
- *en intension*, c'est-à-dire en spécifiant une propriété caractéristique vérifiée par tous ses éléments :
$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\};$$
- *en extension*, c'est-à-dire en décrivant explicitement les éléments de l'ensemble, soit par énumération, soit par un procédé de construction :
$$\{-1; 1\} \quad \text{ou encore} \quad \{x + y \mid x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}.$$

5.4 Opérations sur les parties d'un ensemble

Dans la suite, E désigne un ensemble, A et B des parties de E.

Nota.
L'ensemble constitué de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exem.
Soit $E = \{1, 2\}$. Ainsi,
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Rema.
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ signifie $\mathbb{R} \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$.
- $\{1\} \subset \{1, 2\}$ signifie $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$.

Défi.
On appelle *partie complémentaire* dans E de A, l'ensemble $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} \overset{\text{not.}}{=} \overline{A}$.

Défi.
On appelle l'*intersection* de A et B l'ensemble :

$$A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Prop.
L'intersection entre les parties de E :
- est associative : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- est commutative : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \cap B = B \cap A$;
- admet E pour unique élément neutre : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cap E = A = E \cap A$.

Rema.
$\emptyset$ est absorbant par $\cap$. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cap \emptyset = \emptyset$.

Défi.
On appelle la *réunion* de A et B l'ensemble :

$$A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Prop.
La réunion entre les parties de E :
- est associative ;
- est commutative ;
- admet $\emptyset$ pour unique élément neutre : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cup \emptyset = A$.

Prop.
L'intersection est distributive sur la réunion, et la réunion est distributive sur l'intersection.
$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

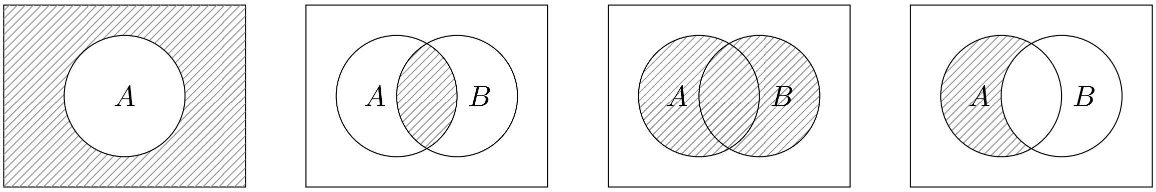
Défi.
On considère un ensemble I et des parties A_i de E pour $i \in I$.
1. L'intersection « en vrac » des A_i est $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$.
2. La réunion « en vrac » des A_i est $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$.

Défi.
On appelle la *différence* dans A de la partie B :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Rema.
Si $A \supset B$, alors $A \backslash B$ est égal au complémentaire dans A de B. Dans tous les cas : $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

Figu.



$E \setminus A$ $A \cap B$ $A \cup B$ $A \setminus B$

Prop.
Le complémentaire de l'intersection est la réunion des complémentaires :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Le complémentaire de la réunion est l'intersection des complémentaires :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

5.5 Produit cartésien d'ensembles

Noti.
Étant donnés une suite de deux ensembles E puis F, l'ensemble *produit cartésien* de E par F est :

$$E \times F \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Noti.
Étant donné un entier $n \geq 2$, et une suite de n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, on appelle produit cartésien de la suite :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in E_i\}.$$

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on note l'ensemble E^n.

5.6 Mises en parties d'un ensemble

Défi.
On appelle *recouvrement* d'un ensemble E tout ensemble de parties de E dont la réunion est égale à E tout entier.

Exem.
Soit $E = \{1, 2, 3\}$. On pose $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$. On a $A \cup B = \{1, 2, 3\} = E$. La famille $\{A, B\}$ est un recouvrement de E.

Défi.
On appelle *recouvrement disjoint* de E tout ensemble de parties de E dont la réunion est égale à E tout entier et tel que ces ensembles sont disjoints deux à deux.

Exem.
L'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}^*$, est recouvert de manière disjointe par l'ensemble des strictement négatifs et l'ensemble des strictement positifs :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*_- \sqcup \mathbb{R}^*_+.$$

Défi.
On appelle *partition* de E tout recouvrement disjoint de E par des parties non vides.

Exem.
L'ensemble des entiers relatifs est partitionné par les entiers pairs et les entiers impairs :

$$\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \sqcup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Défi.
On appelle *système de représentants* d'une partition de E, tout ensemble d'éléments de E tel que :
- ET tout élément de cet ensemble appartient exactement à une composante de la partition ;
- ET toute composante de la partition possède exactement un élément de cet ensemble.

Exem.
Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. On le découpe en deux paquets (partition) : $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Pour former un système de représentants, il faut choisir une seule lettre dans le premier paquet et une seule dans le second. Par exemple, l'ensemble $\{a, c\}$ est un système de représentants. L'ensemble $\{b, d\}$ en est un autre.

5.7 Nombre indicateur de l'appartenance à une partie

Défi.
On considère une partie A de E, et un élément x de E. On définit le nombre indicateur $\mathbb{1}_A(x)$ par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Prop.
Soit un ensemble E. Soit deux parties A et B de E.
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- Si $A \supset B$, alors $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$

Prop.
- $A \subset B \iff \forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.
- $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

6 Pratique calculatoire 2 : limites et dérivées

6.1 Égalité sur les limites dans la droite réelle achevée

Noti.
La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On note aussi cet ensemble $[-\infty, +\infty]$.

Défi. (Addition)
On étend l'addition entre les réels à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :
- $x + (+\infty) = +\infty$ pour tout $x \in]-\infty, +\infty]$.
- $x + (-\infty) = -\infty$ pour tout $x \in [-\infty, +\infty[$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

On résume cela par le tableau suivant :

$x \setminus y$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

Prop.
La limite de la somme est la somme des limites quand cette dernière est définie.

Défi.
La multiplication d'un élément x de $\overline{\mathbb{R}}$ par un réel r est définie par ce tableau :

$x \setminus r$	$r < 0$	0	$0 < r$
$-\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}$	xr	0	xr
$+\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$

Prop. (Combinaison linéaire)
Si $f_1(x) \to l_1 \in \mathbb{R}$ et $f_2(x) \to l_2 \in \mathbb{R}$, alors pour tous réels r_1, r_2 :

$$r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} r_1 l_1 + r_2 l_2.$$

Défi.
On définit le produit xy pour $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ comme suit :

$x \setminus y$	$-\infty$	$\substack{y\in\mathbb{R}\\ y<0}$	0	$\substack{y\in\mathbb{R}\\ y>0}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$	$-\infty$
$\substack{x\in\mathbb{R}\\ x<0}$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	Indét.	0	0	0	Indét.
$\substack{x\in\mathbb{R}\\ x>0}$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

Prop.
La limite du produit est égale au produit des deux limites lorsque ce dernier est défini.

Défi.
On considère $x \in \overline{\mathbb{R}}$. On a le tableau suivant pour l'inverse $1/x$:

x	$-\infty$	$\substack{x\in\mathbb{R}\\ x<0}$	0^-	0	0^+	$\substack{x\in\mathbb{R}\\ 0<x}$	$+\infty$
$1/x$	0^-	$1/x$	$-\infty$	Indéf.	$+\infty$	$1/x$	0^+

Prop.
- La limite d'un quotient est égale au quotient de la limite si cette dernière est définie.
- La limite de l'inverse est l'inverse de la limite si cette dernière est définie.

Prop. (Composition des limites)
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et de plus d'un point. Soient $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{J}$ (points ou extrémités). Soient $\varphi\colon I \to J$ et $f\colon J \to \mathbb{R}$.
Supposons que
- ET $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$;
- ET $\lim\limits_{y\to b} f(y)$ existe.

Alors la limite de la composée existe et

$$\lim_{x\to a}(f \circ \varphi)(x) = \lim_{y\to b} f(y).$$

Prop.
- Si pour tout x (dans l'ensemble de def.) $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ et si $m(x)$ et $M(x)$ admettent une seule et même limite réelle l quand $x \to a$, alors
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$
- Si $m(x) \leqslant f(x)$ et si $m(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ alors
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$$
- Si $f(x) \leqslant M(x)$ et si $M(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ alors
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$$

Prop. (Croissance comparées)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\dfrac{x^n}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- $\dfrac{\ln(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- $e^x x^n \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
- $x^n \ln(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$

Méth. (Levée d'indétermination)
- Forme $\frac{\infty}{\infty}$ pour une fonction rationnelle en $\pm\infty$: on factorise par le terme de plus haut degré.

$$\frac{2x^2-3}{x-2025} = \frac{2x^2(1-\frac{3}{2x^2})}{x(1-\frac{2025}{x})} = 2x\frac{1-\dots}{1-\dots} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

- Forme $\infty - \infty$: factorisation. Ex : $x^2 - x = x^2(1-\frac{1}{x}) \to +\infty$.

6.2 Inégalités sur les limites dans la droite réelle achevée

Prop.
Si $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) < \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, alors sur un certain voisinage de a, $f_1 \leqslant f_2$.

Prop. (Passage à la limite dans les inégalités larges)
Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ existent. Ainsi,
- si pour tout x dans un certain voisinage de a, $f(x) \leqslant M$, où M est une constante, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant M$, et on adapte pour « $f(x) \geqslant m$ » ;
- si, pour tout x suffisamment proche de a, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$.

6.3 Dérivée

Défi.
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant plus d'un point, $a \in I$, et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit qu'un réel p est le *nombre dérivé* de la fonction f au point a, ou simplement de f en a, pour dire que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\neq a}]{} p.$$

Si un tel réel p existe, alors il est unique et on le note $f'(a)$.

Prop.
Dans les conditions ci-haut, si $f'(a)$ existe alors la tangente à la courbe représentative dans un certain repère, au point $A(a, f(a))$ admet une équation que voici :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

C'est-à-dire que c'est l'ensemble $\{M(x,y) \mid y - f(a) = f'(a)(x-a)\}$.

Prop. (Combinaison linéaire de fonctions dérivables en un point)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point ; $x_0 \in I$; puis $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que f et g sont dérivables en x_0 (i.e. $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$ existent). Ainsi, pour tout $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $rf + sg$ est dérivable en x_0 et

$$(rf + sg)'(x_0) = rf'(x_0) + sg'(x_0).$$

Prop. (Produit de deux fonctions dérivables en un point)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant plus d'un point, $x_0 \in I$, et deux fonctions $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que f et g sont dérivables en x_0. Ainsi, la fonction produit fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Prop. (Quotient de deux fonctions dérivables en un point)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant plus d'un point, $x_0 \in I$, et deux fonctions $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Supposons que
- ET pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$;
- ET g est dérivable en x_0 ;
- ET f est dérivable en x_0.

Ainsi, la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Prop. (Dérivation composée)
Soit deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ qui possèdent plus d'un point ; x_0 un point de J ; puis $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ à valeurs dans I et $f\colon I \to \mathbb{R}$ (en sorte que $f(\varphi(x))$ existe pour tout $x \in J$). Supposons que
- ET $\varphi'(x_0)$ existe ;
- ET $f'(\varphi(x_0))$ existe.

Ainsi, la composée de φ suivi de f, ou composée de f suivant φ, est dérivable en x_0 de nombre dérivé

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

Prop. (Dérivation en un point de la réciproque)
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et de plus d'un point. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to I$ réciproque l'une de l'autre. Soit $x_0 \in I$. Supposons que
- ET f est dérivable en x_0 ;
- ET $f'(x_0) \neq 0$;
- ET $\lim\limits_{y \to f(x_0)} g(y) = x_0$.

Ainsi g est dérivable en $f(x_0)$ et $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Défi.
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point ; $t_0 \in I$, et $\Phi\colon I \to \mathbb{C}$. On dit que la fonction complexe Φ est dérivable en t_0 pour dire que les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(\Phi)\colon I \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{Re}(\Phi(t))$ et $\mathrm{Im}(\Phi)\colon I \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{Im}(\Phi(t))$ sont dérivables en t_0 ; le cas

échéant :

$$\Phi'(t_0) \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Re}(\Phi))'(t_0) + i(\mathrm{Im}(\Phi))'(t_0).$$

Défi.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose

$$\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Prop.
Soit $u\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable en $t \in I$. Ainsi,
$(\exp \circ u)'(t) = \exp(u(t))u'(t)$. $\quad ((e^u)' = u'e^u)$.

Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.

7 Plan Complexe 2 : exponentielle et trigonométrie

7.1 Exponentielle complexe

Défi.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) \overset{\text{déf}}{=} \exp(\mathrm{Re}(z))\big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))\big).$$

Prop.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \quad \text{et} \quad e^{i(x-y)} = \frac{e^{ix}}{e^{iy}}.$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\iff z \in i2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = i2k\pi. \end{aligned}$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ (variable). Ainsi,

$$e^z = e^{z_0} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = z_0 + i2k\pi.$$

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Puis, si $e^{z_2} \neq 0$:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

7.2 Nombres complexes de module 1

Prop.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi,

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad (a, b) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous avons l'équivalence

$$|z| = 1 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} z = a + ib \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}.$$

Noti.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\theta}.$$

C'est que $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Rema.
Rappelons que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Prop.
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Ainsi,
- $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$.
- $\frac{1}{z_1} \in \mathbb{U}$.
- $z_1 \neq 0, \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{U}$. Ainsi,
- $\frac{1}{z} = \bar{z}$;
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Exem.
Si $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
1.

$$\exists (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

2. Supposons que $z \neq 0$. Ainsi,

$$\exists! (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

Défi.
On considère $z \in \mathbb{C}$. On appelle *forme exponentielle* de z toute expression $e^{i\theta}\rho$ égale à z, pour $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Défi.
On considère $a \in \mathbb{R}^*$ fixé. On dit qu'un réel y est *congru* à un réel x *modulo* a, lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = x + ka,$$

que l'on note $y \equiv x[a]$.

Prop.
Soit $(\theta_0, \rho_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (fixé) et $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (variable). Ainsi,

$$e^{i\theta}\rho = e^{i\theta_0}\rho_0 \iff \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta \equiv \theta_0 [2\pi] \end{cases} .$$

Prop. (Équation $\exp(z) = w$)
Soit $w \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z \in \mathbb{C}$ (variable). Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. $\exp(z) = w$
2. $w \in \mathbb{C}^*$ et
$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln(\rho) + i\theta + i2\pi k$$
   où $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est tel que $e^{i\theta}\rho = w$.

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\arg(rz) = \arg(z) \quad [2\pi].$$

Défi.
On dit qu'un réel θ est un des *arguments* d'un complexe z non nul quand
$$\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{i\theta}\rho = z.$$

Rema.
C'est dire que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$.

Nota.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $\arg(z)$ pour un des arguments de z et $\mathrm{Arg}(z)$ pour celui qui tombe dans $]-\pi, \pi]$.

Exem.
- $\arg(0 + 3i) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
- $\arg(2 + 2\sqrt{3}\,i) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi] = 60°$ $[360°]$.
- $\mathrm{Arg}(4 - 4i) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0$ $[\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

Prop. (Arguments d'un produit, d'un quotient)
Si $z_1 = e^{i\theta_1}\rho_1$ et $z_2 = e^{i\theta_2}\rho_2$ (non nuls). Alors

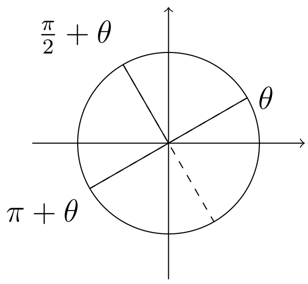
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi];$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi].$$

On a aussi
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.

7.3 Trigonométrie circulaire

Prop.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $(\cos(\theta+\pi), \sin(\theta+\pi)) = (-\cos\theta, -\sin\theta)$.
- $(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta)) = (-\cos\theta, \sin\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2}+\theta), \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta), \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)) = (\sin\theta, \cos\theta)$.



Prop. (Formules d'addition)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ainsi, d'une part,
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

D'autre part,
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = -\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

Meth. (Retrouver les formules d'addition)
1. $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$
2. $e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$

En égalisant ces expressions, on obtient promptement par identification ce que l'on cherche.
Pour les formules avec $(a-b)$, il suffit de remplacer b par $-b$.

Prop. (Formule de duplication)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.

Prop. (Formule de Moivre)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Prop. (Puissance n-ième d'une somme, pour n petit)
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Ainsi,
- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = 1a + 1b$
- $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
- $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Figu. (Triangle de Pascal)
On retrouve les coefficients binomiaux précédents à l'aide du tableau suivant :

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Prop. (Formules d'Euler)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Prop. (Formules de linéarisation)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

Prop. (Formules de factorisation)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Méth. (Technique de l'arc moitié)
Pour factoriser une somme d'exponentielles $e^{ia} + e^{ib}$, on met en facteur l'exponentielle de la

moyenne des angles ($e^{i\frac{a+b}{2}}$).

$$e^{ia}+e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)=e^{i\frac{a+b}{2}}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

De même :

$$e^{ia}-e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)=e^{i\frac{a+b}{2}}2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Méth. (Transformation de $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$)
On considère $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. On veut écrire $f(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t-\varphi)$.
1. On factorise par le module $A=\sqrt{a^2+b^2}$:

$$f(t)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\omega t)\right).$$

2. On identifie un angle φ. Comme $(\frac{a}{A})^2+(\frac{b}{A})^2=1$, il existe φ tel que :

$$\cos(\varphi)=\frac{a}{A}\quad\text{et}\quad\sin(\varphi)=\frac{b}{A}.$$

3. On applique la formule d'addition :

$$f(t)=A(\cos(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\omega t)\sin(\varphi))=A\cos(\omega t-\varphi).$$

Le nombre φ est un argument du complexe $a+ib$.

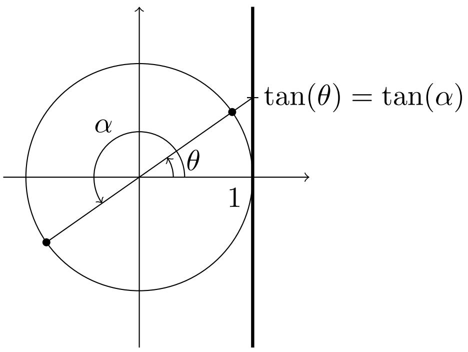
Défi. (Tangente)
On considère un réel θ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. On définit ainsi la *tangente* de θ comme suit :

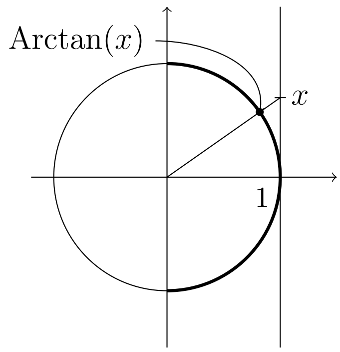
$$\tan(\theta)\overset{\text{déf}}{=}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Défi. (Arctangente)
Pour tout réel x, on appelle *arctangente* de x, noté $\mathrm{Arctan}(x)$, l'unique réel θ tel que

$$\begin{cases}\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ \tan(\theta)=x.\end{cases}$$

Figu.





Prop. (Inégalités géométriques)
Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta).$$

8 Fondements 3 : modes de raisonnements

8.1 Raisonnement par disjonction de cas

Exem. (1.1)
Montrons que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)$ est divisible par 2.
En effet, raisonnons par disjonction de cas. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Cas 1 : Supposons que n est pair.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k'$ avec $k' = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$. Donc $n(n+1)$ est pair dans ce cas.

Cas 2 : Supposons que n est impair.
Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2l+1$. Alors $n(n+1) = (2l+1)(2l+2) = 2(2l+1)(l+1) = 2l'$ avec $l' = (2l+1)(l+1) \in \mathbb{Z}$. Donc $n(n+1)$ est pair dans ce cas également.

Bilan : En somme, $n(n+1)$ est pair dans tous les cas.

Exem. (1.2)
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrons que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
En effet, raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1 : $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$. L'égalité est vérifiée.

Cas 2 : $x \in A$ et $x \notin B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ car $x \notin A \cap B$. $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 0 = 0$. L'égalité est vérifiée.

Cas 3 : $x \notin A$ et $x \in B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 \times 1 = 0$.

Cas 4 : $x \notin A$ et $x \notin B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 \times 0 = 0$.

Bilan : Dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

8.2 Raisonnement par (l'implication) contraposée

Noti.
Le raisonnement par contraposée s'appuie sur l'équivalence logique

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P).$$

Pour démontrer $P \implies Q$, on peut choisir de démontrer que si Q est fausse, alors P est fausse.

Exem. (2.1)
Montrons que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \neq 0 \implies (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$.
Raisonnons par contraposée.
Supposons $\neg(a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$, c'est-à-dire $(a = 0 \text{ ou } b = 0)$. Alors $ab = 0$.
La contraposée est démontrée. L'objectif est atteint.

Exem. (2.2)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrons que si ab est pair, alors a est pair ou b est pair.
Raisonnons par contraposée.
Supposons que $\neg$(a pair ou b pair), c'est-à-dire que a est impair ET b est impair. Alors il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2l + 1$.

$$ab = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1.$$

Donc ab est impair. La propriété est démontrée.

Exem. (2.3)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q}$.
Raisonnons par contraposée.
Supposons $1 + x \in \mathbb{Q}$. Alors $x = (1 + x) - 1$. Comme $\mathbb{Q}$ est stable par soustraction (différence de deux rationnels), $x \in \mathbb{Q}$. On a montré $1 + x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{Q}$, ce qui conclut la preuve.

8.3 Raisonnement par l'absurde

Noti.
Pour démontrer une proposition P, on suppose $\neg P$ (la négation de P) et on cherche à aboutir à une contradiction (absurdité).

Exem. (3.1)
Montrons que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et la fraction est irréductible ($\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$).
En élevant au carré : $2 = \frac{a^2}{b^2} \implies a^2 = 2b^2$. Donc a^2 est pair, ce qui implique que a est pair. On écrit $a = 2a'$ avec $a' \in \mathbb{N}^*$.
L'équation devient : $(2a')^2 = 2b^2 \implies 4a'^2 = 2b^2 \implies 2a'^2 = b^2$. Donc b^2 est pair, ce qui implique que b est pair.
Ainsi a et b sont tous deux pairs, donc la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible (simplifiable par 2). C'est absurde par rapport à l'hypothèse de départ. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exem. (3.2)
Montrons que les complexes 1 et i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$.
Supposons par l'absurde que $b \neq 0$. Alors $i = -\frac{a}{b}$. Or $a, b \in \mathbb{R}$, donc $-\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$. Cela signifierait que $i \in \mathbb{R}$, or $i^2 = -1$ (impossible pour un réel). Absurde. Donc $b = 0$.
Puis $a + 0 \cdot i = 0 \implies a = 0$. On a montré que $a = 0$ et $b = 0$.

8.4 Raisonnement par analyse et synthèse

Voca.
- On dit qu'une proposition N est une *condition nécessaire* à une proposition P quand $P \implies N$.
- On dit qu'une proposition S est une *condition suffisante* à P quand $S \implies P$.
- On parle de condition nécessaire et suffisante lorsque $P \iff S$.

Stru.
Le raisonnement par analyse-synthèse sert souvent à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème ou à prouver l'existence et l'unicité.

1. Analyse (Unicité / Condition Nécessaire) : On suppose que le problème admet une solution x. On déduit des propriétés sur x pour réduire le champ des possibles (trouver des candidats).

$$\text{Solution} \implies \text{Candidat}$$

2. Synthèse (Existence / Condition Suffisante) : On vérifie si les candidats trouvés sont effectivement solutions.

$$\text{Candidat} \implies \text{Solution}$$

Exem. (4.1)
On cherche l'ensemble des réels x tels que $x^2 = 1$.

<u>Analyse</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution. $x^2 = 1 \implies x^2 - 1 = 0 \implies (x-1)(x+1) = 0$. Donc $x = 1$ ou $x = -1$. Les seuls candidats possibles sont 1 et -1.

<u>Synthèse</u> :
- Si $x = 1$, alors $x^2 = 1^2 = 1$. Ça marche.
- Si $x = -1$, alors $x^2 = (-1)^2 = 1$. Ça marche.

<u>Conclusion</u> : L'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.

Exem. (4.2)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe un unique couple $(s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $z = sr$.

<u>Analyse</u> : Supposons qu'un tel couple existe. On a $z = sr$. En passant au module : $|z| = |sr| = |s||r|$. Comme $s \in \mathbb{U}$, $|s| = 1$. Comme $r \in \mathbb{R}_+^*$, $|r| = r$. Donc $r = |z|$. L'égalité $z = sr$ devient $z = s|z|$, d'où $s = \frac{z}{|z|}$ (possible car $z \neq 0$). Le seul couple candidat est $(s, r) = \left(\frac{z}{|z|}, |z|\right)$.

<u>Synthèse</u> : Posons $r_0 = |z|$ et $s_0 = \frac{z}{|z|}$. On a bien $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifions que $s_0 \in \mathbb{U}$: $|s_0| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$. Enfin, $s_0 r_0 = \frac{z}{|z|} \times |z| = z$. Le couple convient.

Exem. (4.3)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (s, a) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} f = s + a \\ s \text{ est paire} \\ a \text{ est impaire} \end{cases}$$

En effet, raisonnons par analyse-synthèse.

<u>Analyse</u> : Supposons que le couple (s, a) existe. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} s(x) + a(x) = f(x) \\ s(-x) + a(-x) = f(-x) \end{cases}$$

Comme s est paire, $s(-x) = s(x)$. Comme a est impaire, $a(-x) = -a(x)$. Le système devient :

$$\begin{cases} s(x) + a(x) = f(x) \quad (L_1) \\ s(x) - a(x) = f(-x) \quad (L_2) \end{cases}$$

En faisant $(L_1)+(L_2)$, on obtient $2s(x)=f(x)+f(-x)$, soit $s(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$. En faisant $(L_1)-(L_2)$, on obtient $2a(x)=f(x)-f(-x)$, soit $a(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Synthèse : Posons les fonctions $s_0 : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $a_0 : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
- Somme : $s_0(x)+a_0(x)=\frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2}=f(x)$.
- Parité de s_0 : $s_0(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=s_0(x)$. Donc s_0 est paire.
- Parité de a_0 : $a_0(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-a_0(x)$. Donc a_0 est impaire.

Conclusion : Le couple existe et est unique.

9 FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE 1 : ÉTUDE GLOBALE

9.1 Généralités

Noti.
On appelle *fonction* d'une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute relation qui fait passer de tout nombre x de D à un unique nombre y de $\mathbb{R}$; auquel cas, on note $y = f(x)$ si la fonction est appelée f.
Lorsque l'ensemble de départ n'est pas précisé, on appelle *ensemble de définition* de f l'ensemble des valeurs de la variable x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles $f(x)$ existe.

Défi.
On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dit que f est :
a) *constante* quand : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) = c$;
b) *croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
c) *strictement croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;
d) *décroissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)$;
e) *strictement décroissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Défi.
On dit qu'une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ est *monotone* quand f est croissante ou f est décroissante.
On adapte pour la monotonie stricte.

Prop. (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit un intervalle I, une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$, puis $v \in \mathbb{R}$. Si v est compris entre deux valeurs de f, alors v est aussi une valeur de f.

Prop. (Théorème de la bijection continue)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$; puis $f\colon I \to J$. Supposons que :
- ET f est continue ;
- ET f est strictement monotone ;
- ET la limite de f en l'extrémité inf. de I est égale à l'extrémité inf. de J ; de même avec les extr. sup. (ou inversement selon la monotonie).

Ainsi, $f\colon I \to J, x \mapsto y = f(x)$ admet une réciproque $g\colon J \to I, y \mapsto x \in I$ telle que $f(x) = y$.

Prop.
Si l'on connaît la représentation graphique de $f\colon x \mapsto f(x)$, on peut obtenir celles de certaines fonctions transformées de la manière suivante :
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x-a)$ se déduit de celle de f par une translation horizontale de vecteur $\vec{u} = \binom{a}{0}$.
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x)+b$ se déduit de celle de f par une translation verticale de vecteur $\vec{v} = \binom{0}{b}$.
- La représentation de $x \mapsto f(2a-x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a$.

- La représentation de $x \mapsto 2b - f(x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = b$.
- La représentation de $x \mapsto f(\lambda^{-1}x)$, avec $\lambda > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de centre O et de rapport λ dans la direction horizontale.
- La représentation de $x \mapsto \mu f(x)$, avec $\mu > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de rapport μ dans la direction verticale.
- La représentation graphique de la fonction réciproque f^{-1} se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant, c'est-à-dire la droite $y = x$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote horizontale* de la courbe de f toute droite d'équation $y = \mathrm{C}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = \mathrm{C}$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote verticale* toute droite d'équation $x = \mathrm{C}$ telle que $\lim\limits_{x \to \mathrm{C}} f = \pm\infty$.

Défi.
On considère $D \subset \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$. On dit que f est *paire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$.

Défi.
On dit que f est *impaire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

Défi.
On considère $T \in \,]0, +\infty[$. On dit que f est *T-périodique* ou que f admet T pour *période* quand :
- ET $\forall x \in D,\ x + T \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(x) = f(x + T)$

On parle de *la* période pour désigner la plus petite quand elle existe.

Défi.
Une *fonction périodique* est une fonction qui admet au moins une période ($T > 0$).

Défi.
On dit que f est :
- *majorée* par une constante $M \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$;
- *minorée* par une constante $m \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$;
- *bornée* par deux constantes $m \leqslant M$ quand $\forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Prop.
La fonction réelle $f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ est bornée si, et seulement si, la fonction réelle positive

$|f|: D \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)|$ est majorée par une constante.

Défi.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un *minimum global* de f quand :
- ET $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$
- ET $\exists x_0 \in D,\ f(x_0) = m$

On parle de *minimum local* en un point x_* quand on se restreint autour de x_*.
Adaptation pour un maximum.

Défi.
On parle d'*extremum* pour tout minimum ou tout maximum.

9.2 Dérivation et représentation graphique

Prop.
Soit un intervalle I de plus d'un point, puis $f: I \to \mathbb{R}$. Supposons que f est dérivable en tout point de I. Ainsi :
1. f est constante ssi f' est nulle.
2. f est croissante ssi f' est positive.
3. f est strictement croissante ssi :
   - ET f' est positive ;
   - ET l'ensemble des points d'annulation de f' ne contient pas d'intervalle de plus d'un point.

On adapte pour la décroissance.

Défi.
On dit qu'une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est *deux fois dérivable* quand f est dérivable et que f' est dérivable ; auquel cas, on note $f'' = (f')'$: *dérivée seconde* de f.

Prop.
Soit $f: I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un r.o.n. $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
1. Si f'' est positive, alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si f'' est négative, alors $\mathcal{C}$ est en-dessous de chacune de ses tangentes.

9.3 Fonctions réelles de référence

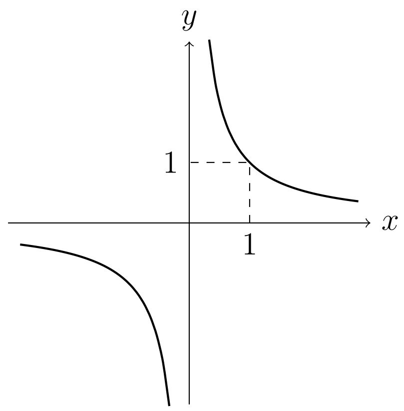
Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.

9.3.1 Fonctions constantes

9.3.2 Fonctions affines

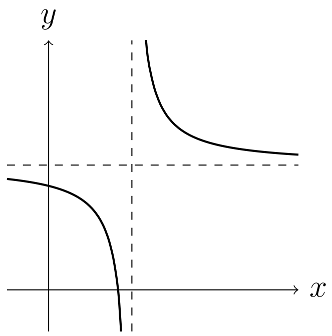
9.3.3 Fonction inverse

Figu.



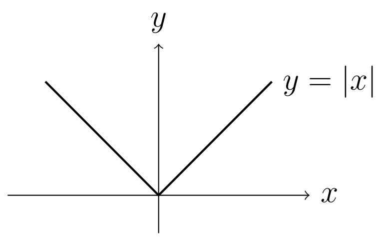
9.3.4 Quotients de fonctions affines

Figu.



9.3.5 Fonction valeur absolue

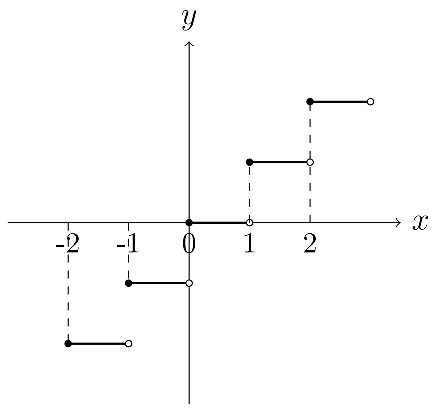
Figu.



9.3.6 Fonction partie entière

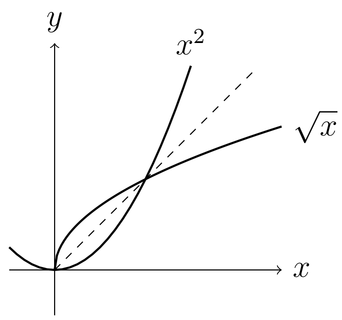
Noti.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$, où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$.

Figu.



9.3.7 Fonctions carré et racine carrée

Figu.



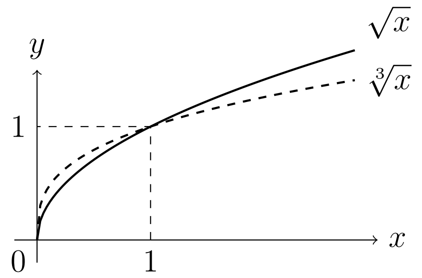
9.3.8 Puissance n-ième

Figu.

9.3.9 Racines n-ièmes

Défi.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine n-ième* de $x \geqslant 0$, notée $\sqrt[n]{x}$, l'unique réel positif dont la puissance n-ième vaut x.

Figu.



9.3.10 Fonctions polynomiales et rationnelles

Défi.
On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire de fonctions puissances entières.

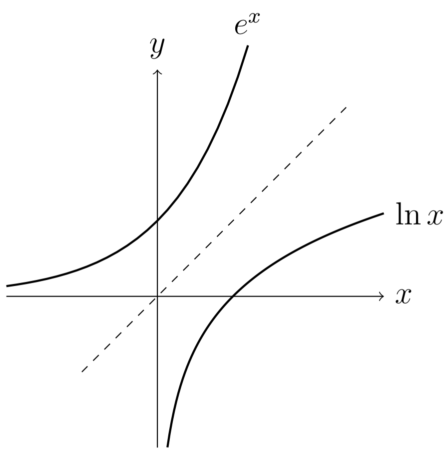
Défi.
Une *fonction rationnelle* est le quotient de deux fonctions polynomiales.

9.3.11 Fonctions exponentielles et réciproques

Défi.
exp est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et valant 1 en 0.

Défi.
Le *logarithme népérien* ln est défini sur $]0, +\infty[$ comme la bijection réciproque de l'exponentielle. C'est que $\ln(y)$ est l'unique réel dont l'image par l'exponentielle donne y.

Figu.



Défi.
On considère $b \in]0, +\infty[$.
- Pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$, l'*exponentielle en base b* de x est

$$b^x \overset{\text{déf}}{=} \exp(x \ln b).$$

- Le *logarithme en base* b de tout $y \in]0, +\infty[$ lorsque $b \neq 1$ est

$$\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}.$$

Rema.
Les fonctions $\exp_b$ et $\log_b$ sont réciproques l'une de l'autre.

9.3.12 Fonction puissance réelle de degré d

Défi.
Pour $d \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, la puissance de degré d est définie par

$$x^d = \exp(d \ln x).$$

Prop. (Prolongement en 0)
- Si $d > 0$, $\lim_{x\to 0} x^d = 0$.
- Si $d < 0$, $\lim_{x\to 0} x^d = +\infty$.

Prop. (Théorème des croissances comparées)
Soit $\alpha, \beta, \gamma \in]0, +\infty[$.

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

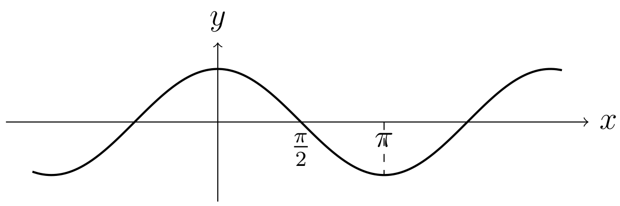
$$e^{\alpha y}|y|^\beta \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$$

$$y^\beta |\ln y|^\gamma \xrightarrow[y\to 0^+]{} 0$$

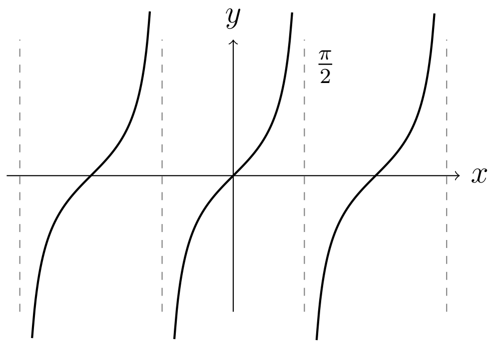
9.3.13 Fonctions circulaires et réciproques

Méth.
La construction de la courbe complète de cos se fait par symétries successives (centrale puis axiale) à partir du segment $[0, \pi/2]$, puis par translations (périodicité).

Figu.



Figu. (Tangente)

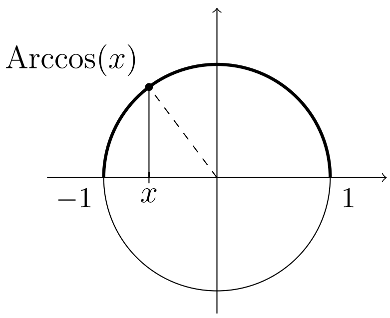


Défi.
$\forall x \in [-1,1]$, on appelle *arccosinus* de x, noté $\text{Arccos}(x)$, l'unique réel de $[0,\pi]$ dont le cosinus est égal à x.

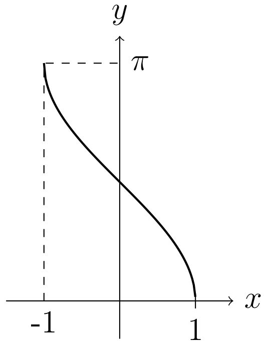
$$\begin{cases} \text{Arccos}(x) \in [0,\pi] \\ \cos(\text{Arccos } x) = x \end{cases}$$

(Attention aux deux "c" !)

Figu.



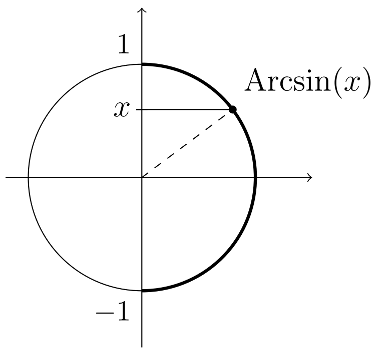
Figu.



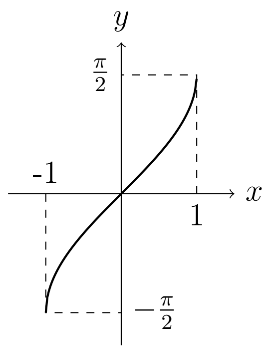
Défi.
$\forall x \in [-1,1]$, on appelle *arcsinus* de x, noté $\text{Arcsin}(x)$, l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dont le sinus est égal à x.

$$\begin{cases} \text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ \sin(\text{Arcsin } x) = x \end{cases}$$

Figu.



Figu.

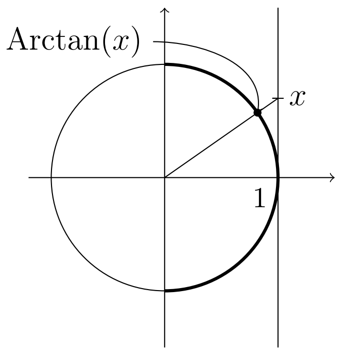


Défi.
Pour tout x de $]-\infty,+\infty[$, on appelle *arctangente* de x, noté $\text{Arctan}(x)$, l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x.

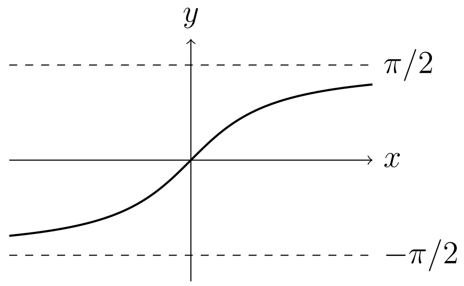
$$\begin{cases} \text{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ \tan(\text{Arctan }x) = x \end{cases}$$

Rema.
$\text{Arctan}(\tan(\theta)) = \theta$ uniquement si $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Sinon, $\text{Arctan}(\tan(\theta))$ est l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ayant même tangente que θ, *i.e.* $\text{Arctan}(\tan(\theta)) \equiv \theta\ [\pi]$.

Figu.



Figu.



9.3.14 Fonctions hyperboliques

Défi.
Pour tout réel x, on appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* les nombres réels :

$$\mathrm{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Prop.

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(iz) = \cos(z) \\ \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z) \end{cases}$$

Prop.

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x) \\ \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x) \end{cases}$$

Prop.

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

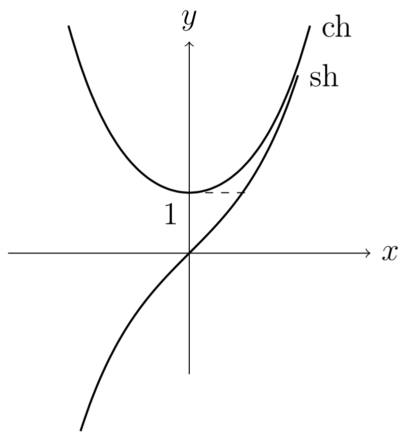
Prop.

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Prop.
Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}(x), \\ (\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}(x). \end{cases}$$

Figu.


y
ch
sh
1
x

10 Plan Complexe 3 : équations polynomiales

10.1 Équation polynomiale dans $\mathbb{C}$

Noti.
Une *équation polynomiale*, dite aussi *algébrique*, est une équation qui met en jeu des fonctions polynomiales. En voici un exemple : $2z^2 - z + i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Toute solution d'une équation algébrique est appelée *racine* de cette équation. C'est aussi une racine, ou un zéro, de la fonction polynomiale associée.

Prop.
Soit $a, z \in \mathbb{C}$. Ainsi :
- $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$;
- $z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + za + a^2)$.

Prop.
Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$. Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) - P(a) = (z-a)Q(z).$$

Prop.
Si a est une racine de P (c'est-à-dire $P(a) = 0$), alors on peut factoriser $P(z)$ par $(z-a)$:

$$P(z) = (z-a)Q(z).$$

Prop.
Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k z^k$ une fonction polynomiale. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{C_k}(\overline{z})^k.$$

En particulier, si tous les coefficients C_k sont réels (i.e. P est à coefficients réels), alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{P(z)} = P(\overline{z}).$$

Prop.
Si un nombre complexe est racine d'une fonction polynomiale à coefficients réels, alors son conjugué l'est aussi.

$$\big(P \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad P(z) = 0\big) \implies P(\overline{z}) = 0.$$

10.2 Racines carrées d'un complexe

Défi.
Soit $a \in \mathbb{C}$. Les *racines carrées complexes* de a sont les solutions d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ de l'équation algébrique
$$z^2 = a.$$

Rema.
Il convient de ne pas confondre les racines carrées complexes d'un nombre avec l'unique racine carrée réelle positive d'un réel positif.

Exem.
- Les complexes i et $-i$ sont les racines carrées complexes de -1.
- Le complexe $2+i$ est une racine carrée complexe de $3+4i$.

Prop.
On a $\forall z \in \mathbb{C}$:
- $z^2 = 0 \iff z \in \{0\}$;
- $z^2 = 1 \iff z \in \{-1; +1\}$.

Prop.
Soit $w \in \mathbb{C}^*$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que $z_0^2 = w$. Ainsi,
- $z_0 \neq 0$;
- $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 = w \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 1$;
- $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 = w \iff z \in \{\pm z_0\}$.

Prop.
Soit $w \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, si $w > 0$, alors
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm\sqrt{w}\}.$$
Si $w < 0$, alors
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm i\sqrt{-w}\}.$$

Prop. (Forme exponentielle des racines carrées)
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi, \pi]$ tel que $re^{i\theta} = w$. Ainsi,
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}\}.$$

Prop. (Forme algébriques des racines carrées)
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $a + ib = w$. Ainsi,
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm z_0\}$$
où
- $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ si $w \notin \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Re}(z_0) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ si $w \in \mathbb{R}$.

10.3 Discriminant d'une fonction polynomiale du second degré

Prop.
Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$. Ainsi,
- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
- $\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

Prop.
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ tel que $a\neq 0$. Ainsi, il existe exactement un triplet $(C,\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad az^2+bz+c=C(z-\alpha)^2+\beta.$$

Voca.
La forme $z\mapsto az^2+bz+c$ est la forme *développée réduite*, et la forme $z\mapsto C(z-\alpha)^2+\beta$ est la forme *canonique* de la fonction polynomiale.

Rema.
$C=a$.

Défi.
On appelle *discriminant* d'une fonction polynomiale complexe du second degré $z\mapsto az^2+bz+c$ où $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, le complexe

$$b^2-4ac.$$

Prop. (Équation du second degré, cas réel)
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Posons $\Delta=b^2-4ac$. Ainsi,
1. si $\Delta>0$, alors l'ensemble S des solutions de l'éq. alg. $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ est constitué des éléments
$$S=\left\{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$$
2. Si $\Delta<0$, alors $S=\emptyset$.
3. Si $\Delta=0$, alors $S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$.

En somme, si $\Delta<0$, alors $S=\emptyset$. Sinon $S=\left\{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Prop. (Équation du second degré, cas complexe)
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Posons $\Delta=b^2-4ac$. Ainsi, l'ensemble des racines complexes de $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto az^2+bz+c$ est

$$S=\left\{\frac{-b\pm\delta}{2a}\right\}$$

où δ est une des racines carrées complexes de Δ, arbitrairement choisie.

Rema.
Ci-avant, si $\Delta = 0$, alors S possède exactement un élément ($\delta = 0$). Sinon S possède exactement deux éléments.

Appl. (Équation complexe et calcul de δ)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z : $z^2 - (1+i)z + i = 0$.

1. Calcul du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = ((-1)(1+i))^2 - 4(1)(i) = (1 + 2i - 1) - 4i = -2i.$$

2. Recherche d'une racine carrée δ de Δ
   On cherche $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = -2i$.
   - Voie algébrique (Système)
     Posons $\delta = x + iy$. On a les équivalences :

$$\delta^2 = -2i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & \text{(Re)} \\ 2xy = -2 & \text{(Im)} \\ x^2 + y^2 = |-2i| = 2 & \text{(Mod)} \end{cases}$$

     Par somme et différence des lignes (1) et (3), on obtient $2x^2 = 2$ et $2y^2 = 2$, d'où $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$. La ligne (2) impose que x et y soient de signes contraires ($xy = -1$). On choisit (arbitrairement) le couple $(1, -1)$.

$$\delta = 1 - i.$$

   - Voie géométrique (Exponentielle)
     On écrit Δ sous forme exponentielle :

$$\Delta = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

     Les racines carrées sont donc $\pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Choisissons celle avec le signe $+$:

$$\delta = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i.$$

3. Conclusion
   Les solutions sont $z = \frac{-b\pm\delta}{2a}$:

$$z_1 = \frac{(1+i) - (1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i \quad ; \quad z_2 = \frac{(1+i) + (1-i)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$S = \{1, i\}.$$

10.4 Formes d'un polynôme du second degré

Voca.
1. Voici deux exemples de *formes factorisées* :
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_1(z) = 2(z-1)(z+2)$
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_2(z) = 3(z+4)(z-5)$
2. Voici deux exemples de *formes canoniques* :
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_1(z) = 2(z+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{2}$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_2(z) = 3(z - \frac{1}{2})^2 - \frac{243}{4}$

3. Voici deux exemples de *formes développées réduites* :
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_1(z) = 2z^2 + 2z - 4$
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_2(z) = 3z^2 - 3z - 60$

Rema.
Si on ne travaille qu'avec des nombres réels, alors la fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ n'admet pas de forme factorisée (comme produit de fonctions polynomiales de degré 1) car elle n'admet pas de racine réelle. Plus généralement, il n'y a pas de forme factorisée (dans $\mathbb{R}$) si et seulement si le discriminant est strictement négatif.

Prop. (Relation entre coefficients et racines)
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az^2 + bz + c$. Notons z_- et z_+ les deux racines complexes de P. Ainsi

$$z_- + z_+ = -\frac{b}{a}$$

$$z_- z_+ = \frac{c}{a}$$

10.5 Racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$

Défi.
On considère $n \in [\![1, +\infty[\![$ et $w \in \mathbb{C}$. On dit qu'un nombre complexe z est une des *racines n-ièmes complexes* de w quand

$$z^n = w.$$

Exem.
1. Le complexe 2 est une racine troisième de 8.
2. Le complexe i est une des racines 4-ièmes de 1.

Nota.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Exem.
- $\mathbb{U}_1 = \{1\}$
- $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{j^0, j^1, j^2\}$; $j = e^{i2\pi/3}$.
- $\mathbb{U}_4 = \{+1, -1, +i, -i\} = \{1, i, i^2, i^3\} = \{i^0, i^1, i^2, i^3\}$.

Prop.
On a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n = 0 \iff z = 0.$$

Prop.
$\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Prop. (Produit et quotient)
$\mathbb{U}_n \neq \emptyset$ car $1 \in \mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{C}^*$ car $0^n \neq 1$ ($n \geqslant 1$). Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$. Ainsi,

$$\begin{cases} z_1 z_2 \in \mathbb{U}_n \\ \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}_n \end{cases}.$$

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $z^{-1} \in \mathbb{U}_n$ et $\overline{z} \in \mathbb{U}_n$.

Rema.
Si $z \in \mathbb{U}$, alors $\overline{z} = z^{-1}$ ($z\overline{z} = |z|^2$).

Prop.
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que $z_0^n = w$. Ainsi, $z_0 \neq 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = w \iff \exists \xi \in \mathbb{U}_n, \quad z = \xi z_0.$$

Prop. (Description de $\mathbb{U}_n$)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U}_n \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right).$$

C'est que

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Prop. (Racines n-ièmes de $w \in \mathbb{C}^*$)
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. On a :
1. w admet au moins une racine n-ième ;
2. si z_0 est une racine n-ième (particulière) de w alors l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de w est constitué de $z_0 \xi_k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, où $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \xi_k = \exp(i\frac{2\pi k}{n})$;
3. les racines n-ièmes de w sont au nombre de n.

Appl.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z : $z^3 = i$.

Pas 1° Posons

$$z_0 \overset{\text{def}}{=} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}.$$

Ainsi,

$$z_0^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Donc, comme le complexe i est non nul, z_0 est une des trois racines troisièmes de ce complexe.

<u>Pas 2°</u> Or l'ensemble des trois racines troisièmes de l'unité est :

$$\mathbb{U}_3 = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$$

où, pour tout $k \in \{0; 1; 2\}$, $\xi_k = e^{i\frac{2\pi k}{3}}$.
Commentaire. C'est-à-dire que

$$\begin{cases} \xi_0 = e^{i2\pi\cdot\frac{0}{3}} = 1, \\ \xi_1 = e^{i2\pi\cdot\frac{1}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \xi_2 = e^{i2\pi\cdot\frac{2}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Fin de commentaire.

<u>Pas 3°</u> Donc, d'après les connaissances communes de référence, l'ensemble des solutions, c'est-à-dire des trois racines troisièmes du complexe i, est

$$S = \{z_0\xi_0, z_0\xi_1, z_0\xi_2\}.$$

C'est-à-dire

$$S = \left\{\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i\right\}.$$

11 Fondements 4 : entiers naturels et récurrence

11.1 Ensemble ordonné des entiers naturels

Noti. (Énumération des entiers naturels)
- Le nombre zéro (0) est le plus petit des entiers naturels ;
- le nombre un (1) est le plus petit des entiers naturels autre que zéro ;
- et pour tout entier naturel n, le nombre $n+1$ est le plus petit des entiers naturels strictement supérieurs à n.

Prop. (Primitive du plus petit élément dans $\mathbb{N}$)
Si une partie des entiers naturels est non vide, alors elle possède un plus petit élément (le premier dans l'ordre ascendant).

Prop. (Propriété du plus grand élément dans $\mathbb{N}$)
Si une partie des entiers naturels est non vide et majorée, alors elle possède un plus grand élément, lequel est unique (le dernier dans l'ordre ascendant).

Prop. (Principe de récurrence dans $\mathbb{N}$)
Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si :
- ET $0 \in A$;
- ET $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in A \implies n+1 \in A$;

alors $A = \mathbb{N}$.

Prop. (Raisonnement par récurrence)
On considère une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendante d'une variable entière naturelle n. Ainsi, si :
- ET $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
- ET pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, quel que soit $n \in \mathbb{N}$;

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

11.2 Raisonnement par récurrence simple

Méth.
On souhaite montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$. Pour ce faire, raisonnons par récurrence :

- Initialisation
  On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (calcul, observation...). Donc l'initialisation est établie.
- Hérédité
  Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - On part de la définition au rang $n+1$ ou de l'expression à atteindre.
  - On utilise l'hypothèse de récurrence pour transformer l'expression.
  - On démontre l'égalité ou l'inégalité souhaitée pour le rang $n+1$.

L'hérédité est établie.

- Conclusion
  En vertu du principe de récurrence sur l'ensemble ordonné des entiers naturels, l'objectif est atteint.

11.3 Raisonnement par récurrence double

Prop. (Principe de récurrence double)
Étant donné une suite de propositions $(\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2) \dots)$. Si :
- ET $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies ;
- ET $\forall n \in [\![0, +\infty[\![, \quad \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$;

alors : $\forall n \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{P}(n)$.

Rema.
Pour une récurrence double, l'initialisation nécessite de vérifier la propriété aux deux premiers rangs (n_0 et $n_0 + 1$). L'hérédité consiste à supposer la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ pour la démontrer au rang $n+2$.

11.4 Complément : raisonnement par récurrence « forte »

Prop.
La proposition $\forall n \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{P}(n)$ veut dire aussi :

$$\forall m \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{Q}(m)$$

où pour tout $m \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{Q}(m)$ signifie « toutes les prop. $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots,$ et $\mathcal{P}(m)$ sont vraies ».

Rema.
Dans une récurrence forte, pour démontrer $\mathcal{P}(n+1)$ (ou $\mathcal{P}(m)$ selon la notation), on suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers inférieurs ou égaux à n (ou $m - 1$), et non pas seulement pour le précédent immédiat.

12 GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 2 : LE PLAN

12.1 Déterminant dans une base orthonormée directe

Noti.
On considère un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Pour tout couple de vecteurs non nuls $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{P}$, la notation $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne aussi une des mesures de l'angle orienté qui porte de la demi-droite $[O, \vec{u})$ à la demi-droite $[O, \vec{v})$. Ces mesures sont égales modulo 2π.

Prop.
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathcal{P}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \underset{2\pi}{=} (\vec{u}, \vec{w});$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{2\pi}{=} -(\vec{v}, \vec{u}).$$

Défi. (Déterminant d'un couple de vecteurs)
Dans un plan orienté muni d'une base orthonormée directe, on appelle *déterminant* du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ l'unique réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

Prop.
Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où K est le projeté orthogonal de C sur la perpendiculaire à (AB) en A.

Prop.
Ci-avant, la valeur absolue du $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ est égale à l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Prop.
Le déterminant est :
1. bilinéaire :
   a. $\forall \vec{u}, \forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \ \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$
   b. $\forall \vec{v}, \forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \ \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v});$
2. antisymétrique : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \ \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$.

Prop.
Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'une b.o.n.d. Soient deux vecteurs $\vec{v}_1\binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{v}_2\binom{x_2}{y_2}$. Ainsi,

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Prop.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

12.2 Droites du plan

Défi.
Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère un point A et un vecteur non nul $\vec{v}$. L'unique droite passant par A et dirigée par $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que

$$\vec{AM} \in \mathbb{R}\vec{v} \quad \text{où} \quad \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Prop.
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan muni d'un r.o.n.d.
1. Il existe au moins un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la droite $\mathcal{D}$ admette pour équation
$$ax + by = c$$
avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On parle d'*équation cartésienne*.
2. Réciproquement, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, la partie du plan dont une équation est $ax + by = c$ est une droite, laquelle est dirigée par le vecteur $\vec{v}\binom{-b}{a}$.

Prop. (Paramétrisation)
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan.
1. On peut trouver au moins un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout point $M\binom{x}{y}$,
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}.$$
2. Réciproquement, étant donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, l'ensemble
$$\left\{ M\begin{pmatrix} x_0 + t\alpha \\ y_0 + t\beta \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$
est la droite passant par $A\binom{x_0}{y_0}$ et dirigée par $\vec{v}\binom{\alpha}{\beta}$.

Méth. (Passage d'une équation à une paramétrisation)
Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by = c$. Donnons-en une paramétrisation.
1. Choix d'un point simple $A(x_0, y_0)$ appartenant à la droite. Pour cela, on fixe par exemple $x = 0$ (alors $y = c/b$).
2. Identification d'un vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

3. Ecriture de la paramétrisation :

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Méth. (Passage d'une paramétrisation à une équation)
Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère la droite définie par

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

<u>Voie 1</u> : Soit $M\binom{x}{y}$. $M \in \mathcal{D} \iff \vec{AM}$ colinéaire à $\vec{v}\binom{-5}{3}$, avec $A(\sqrt{2}, 8)$.

$$\det(\vec{AM}, \vec{v}) = 0 \iff 3(x - \sqrt{2}) - (-5)(y - 8) = 0.$$

On développe et réduit pour obtenir $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

<u>Voie 2</u> : Le vecteur $\vec{v}\binom{-5}{3}$ dirige la droite. Une équation est de la forme $3x + 5y = c$. Comme $A\binom{\sqrt{2}}{8} \in \mathcal{D}$, on a $c = 3\sqrt{2} + 40$. D'où une équation : $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

Méth. (Intersection de deux droites)
Pour trouver le point d'intersection de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, on distingue les cas selon la forme de leurs équations.

<u>Cas 1</u> : Deux équations cartésiennes
On résout le système linéaire 2×2

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

<u>Cas 2</u> : Une paramétrique et une cartésienne
Si $\mathcal{D}_1$: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ et $\mathcal{D}_2$: $ax + by = c$. On injecte les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ dans l'équation de $\mathcal{D}_2$. On obtient une équation d'inconnue t. Une fois t trouvé, on le reporte dans la paramétrisation pour avoir les coordonnées du point.

<u>Cas 3</u> : Deux paramétriques
On cherche t et t' tels que $M(t) = M(t')$. Cela revient à résoudre

$$\begin{cases} x_0 + \alpha t = x'_0 + \alpha' t' \\ y_0 + \beta t = y'_0 + \beta' t'. \end{cases}$$

Défi. (Projeté orthogonal sur une droite)
On considère une droite $\mathcal{D}$ d'un plan, puis un point M quelconque du même plan. On appelle *projeté orthogonal* de M sur $\mathcal{D}$ l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ qui passe par M.

Méth. (Coordonnées d'un projeté orthogonal)
Soit une droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{u}$ et un point M hors de la droite. On cherche les coordonnées du projeté orthogonal $H(x, y)$. Le point H est l'unique solution du système caractérisant l'appartenance et l'orthogonalité :

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} & \text{(Vérifie l'équation de } \mathcal{D}\text{)} \\ \vec{MH} \cdot \vec{u} = 0 & \text{(Orthogonalité).} \end{cases}$$

Exemple : Soit $\mathcal{D} : 4x + 6y = -3$ et $M(-3, 2)$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(-6, 4)$. La condition $\vec{MH} \cdot \vec{u} = 0$ équivaut à dire que $\vec{u}$ est un vecteur normal à la droite (MH). L'équation de la perpendiculaire (MH) est donc de la forme $-6x + 4y = k$. Comme $M(-3, 2) \in (MH)$, on a $k = -6(-3) + 4(2) = 18 + 8 = 26$. On résout alors le système

$$\begin{cases} 4x + 6y = -3 \\ -6x + 4y = 26 \end{cases}$$

Défi. (Distance à une droite)
On considère un point M du plan et une droite $\mathcal{D}$. On dit qu'un réel positif d est égal à la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ lorsque d est la plus petite des distances entre M et les points de $\mathcal{D}$:
- $\exists P \in \mathcal{D},\ MP = d\,;$
- $\forall P \in \mathcal{D},\ MP \geqslant d.$

On peut noter $\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}$.

Prop.
Si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, alors,

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = MH.$$

Défi. (Vecteur normal)
Un vecteur $\vec{n}$ est dit *normal* à une droite $\mathcal{D}$ s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Prop. (Distance à l'aide d'un vecteur normal)
Soit $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{D}$. Pour tout point $A \in \mathcal{D}$ et tout point $M \in \mathcal{P}$,

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Prop. (Vecteur normal et équation cartésienne)
Si $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, alors le vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$ est normal à $\mathcal{D}$.

Form.
Si $\mathcal{D}$ admet pour équation $ax+by+c=0$, alors pour tout $M\binom{x}{y}$,

$$\operatorname{dist}(M,\mathcal{D}) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

12.3 Cercles du plan

Défi.
Dans un plan $\mathcal{P}$, on appelle cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M = r\}.$$

Rema.
- Le rayon du cercle est un nombre, tandis que les « rayons » désignent aussi les segments $[\Omega M]$.
- L'unique cercle de centre O passant par A est $\mathcal{C}(O, OA)$.
- L'unique cercle de diamètre $[AB]$ est $\mathcal{C}\left(I, \frac{AB}{2}\right)$ où I est le milieu de $[AB]$.

Prop. (Équation cartésienne)
1. Dans un r.o.n.d., le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec $\Omega\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$ a pour équation

$$(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = r^2.$$

2. Réciproquement, pour l'ensemble d'équation $Ax^2+Bxy+Cy^2+ax+by=c$, si $A \neq C$ ou si $B \neq 0$, ce n'est pas un cercle.

Méth. (Vérification d'une équation de cercle)
Question : Est-ce que l'ensemble (Γ) : $2x^2+2y^2+3x-6y-2=0$ est un cercle ?
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On normalise l'équation en divisant par 2 :

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-3y-1=0.$$

On reconnait le début d'identités remarquables (mise sous forme canonique) :
- $x^2+\frac{3}{2}x = \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$;
- $y^2-3y = \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

L'équation devient :

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0.$$

En isolant les carrés, on obtient :

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = K$$

avec $K = \frac{9}{16}+\frac{9}{4}+1 = \frac{9+36+16}{16} = \frac{61}{16}$.

Conclusion : Comme $K>0$, l'ensemble (Γ) est bien un cercle de centre $\Omega(-3/4;3/2)$ et de rayon $R=\sqrt{K}=\frac{\sqrt{61}}{4}$.

Prop. (Paramétrisation d'un cercle)
Le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec $\Omega\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_\Omega + r\cos(\theta) \\ y = y_\Omega + r\sin(\theta) \end{cases} \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

13 Pratique calculatoire 3 : sommes et produits

13.1 Somme et produit d'une suite finie de complexes

Défi.
On considère m et n dans $\mathbb{N}$, puis $(z_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ une liste de complexes (élément de $\mathbb{C}^{[\![m,n]\!]}$). Ainsi, on définit par récurrence la somme de la liste de complexes $(z_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ comme suit :

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = \begin{cases} z_m & \text{si } n = m \\ \left(\displaystyle\sum_{k=m}^{n-1} z_k\right) + z_n & \text{si } n > m \quad (n \in [\![m+1, +\infty[\![) \end{cases}$$

On adapte cela pour le produit :

$$\prod_{k=m}^{n} z_k$$

Rema.
Dans la définition, on a sous-entendu que $m \leqslant n$. On convient que

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = 0 \quad \text{si } n < m.$$

Prop. (Associativité générale ou invariance par groupement)
Soit une suite de complexes $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(p,q,r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p < q < r$, on a

$$\left(\sum_{k=p}^{q-1} z_k\right) + \left(\sum_{k=q}^{r} z_k\right) = \sum_{k=p}^{r} z_k.$$

Prop. (Succession d'évolution et variation globale)
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, puis $(d_1, d_2, \dots)$ une suite dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite $(z_k)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ comme suit :

$$z_k = z_{k-1} + d_k.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = z_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Prop. (Somme télescopique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$, on a

$$\sum_{k=m+1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_m.$$

Ou encore

$$\sum_{\ell=m}^{n-1}(z_{\ell+1} - z_\ell) = z_n - z_m.$$

Exem.
Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n = \dfrac{1}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$z_k - z_{k-1} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right).$$

Tous les termes intermédiaires se simplifient deux à deux, et il reste

$$\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{n+1} - 1 = z_n - z_0.$$

Prop. (Succession d'évolution et multiplicateur global)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in[\![1,+\infty[\![} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Supposons que

$$\forall n \in [\![1, +\infty[\![, \quad z_n = z_{n-1} \cdot q_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in [\![1, +\infty[\![, \quad z_n = z_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} q_k.$$

Prop. (Produit télescopique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq 0$. Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$, on a

$$\begin{aligned}\frac{z_n}{z_m} &= \prod_{k=m+1}^{n} \frac{z_k}{z_{k-1}} \\ &= \prod_{\ell=m}^{n-1} \frac{z_{\ell+1}}{z_\ell} \\ &= \frac{z_n}{z_{n-1}} \cdot \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}} \cdots \frac{z_{m+2}}{z_{m+1}} \cdot \frac{z_{m+1}}{z_m}\end{aligned}$$

Prop. (Commutativité générale et invariance par permutation)
On ne varie pas la somme d'une liste quelconque de nombres complexes si on permute ses éléments. Il en est de même pour le produit.

Défi. (Suite arithmétique)
On dit qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est *arithmétique* quand il existe au moins un réel r, appelé *raison*, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = z_n + r.$$

Défi. (Suite géométrique)
On dit qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est *géométrique* quand il existe au moins un réel q, appelé *raison*, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = q\, z_n.$$

Prop. (Terme général d'une suite arithmétique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons la suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad z_n = z_m + (n-m)r.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0 + nr.$$

Prop.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Ainsi, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \underbrace{\frac{a_m + a_n}{2}}_{\substack{\text{moyenne}\\ \text{des extrêmes}}} \cdot \underbrace{(1+n-m)}_{\text{nombre de termes}}.$$

Prop.
Soit une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de raison $q \in \mathbb{C}$. Ainsi, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} g_k = \begin{cases} g_m(1+n-m) & \text{si } q = 1 \\ g_m \cdot \dfrac{q^{1+n-m}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Prop. (Sommes de puissances d'entiers)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

13.2 Somme et produit d'une famille finie quelconque

Défi. (Somme « en vrac »)
- On appelle somme « en vrac » d'une famille finie de nombres complexes l'unique nombre complexe égal à la valeur commune des sommes des listes qu'on obtient de cette famille (en rangeant les termes d'un premier à un dernier).
- Soit un ensemble fini I, puis une famille de complexes $(z_i)_{i\in I}$. On pose alors

$$\sum_{i\in I} z_i = z_{i_1} + z_{i_2} + \cdots + z_{i_n} = \sum_{k=1}^{n} z_{i_k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est le nombre d'éléments de I et $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est une liste de tous les éléments de I sans répétition (liste arbitrairement choisie).
- On convient que $\displaystyle\sum_{i\in\emptyset} z_i = 0$.

Exem.
- Somme sur un intervalle d'entiers relatifs :

$$\sum_{k\in[\![-2,2]\!]} |k| = |0| + |1| + |-1| + |2| + |-2| = 0+1+1+2+2 = 6.$$

- Somme double sur un produit cartésien :

$$\sum_{(i,j)\in[\![0,1]\!]\times[\![0,2]\!]} (i+j) = (0+0)+(0+1)+(1+0)+(0+2)+(1+1)+(1+2).$$

Pour tout $(i,j) \in [\![0,1]\!] \times [\![0,2]\!]$, on pose $z_{i,j} = i+j$. Le tableau ci-après indique les valeurs des $z_{i,j}$:

$i \setminus j$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3

Défi. (Produit « en vrac »)
De manière analogue, on définit le produit d'une famille finie $(z_i)_{i\in I}$ par

$$\prod_{i\in I} z_i = z_{i_1} \times z_{i_2} \times \cdots \times z_{i_n} = \prod_{k=1}^{n} z_{i_k}.$$

On convient que pour l'ensemble vide, le produit est égal à l'élément neutre :

$$\prod_{i\in\emptyset} z_i = 1.$$

Prop. (Groupement par paquets)
Soit $(z_i)_{i\in I}$ une famille finie de complexes.
1. (Cas de deux paquets) Si I est la réunion disjointe de deux parties I_1 et I_2 (on note $I =$

$I_1 \sqcup I_2$), alors :

$$\sum_{i \in I_1} z_i + \sum_{i \in I_2} z_i = \sum_{i \in I} z_i.$$

2. (Cas général) Si $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ (réunion disjointe indexée par J), alors

$$\sum_{i \in I} z_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} z_i \right).$$

Prop. (Linéarité de la somme)
Soit deux familles finies de complexes $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ indexées par un même ensemble fini I. Ainsi, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$,

$$\lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i).$$

Rema.
Cela revient à dire que :

$$\forall (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I, \forall (b_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I, \forall \lambda \in \mathbb{C},$$
$$\begin{cases} \sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i \\ \sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i. \end{cases}$$

Prop. (Changement de variable par la somme discrète)
Soit I un ensemble fini, J un ensemble fini, puis $\varphi : I \to J$. Soit $g : J \to \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\sum_{i \in I} g(\varphi(i)) = \sum_{j \in \varphi(I)} \sum_{\substack{i \in I \\ \varphi(i) = j}} g(\varphi(i)).$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{i \in I} g(\varphi(i)) = \sum_{j \in \varphi(I)} g(j) \cdot \mathrm{Card}\{i \in I \mid \varphi(i) = j\}$$

où $\varphi(I)$ désigne l'ensemble des valeurs de φ.
En particulier, si toute valeur de φ reçoit un unique antécédent, alors

$$\sum_{i \in I} g(\varphi(i)) = \sum_{j \in \varphi(I)} g(j).$$

Prop. (Interversion des sommes)
Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille finie de complexes. Ainsi,

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}.$$

Prop. (Distributivité générale)
Soit deux familles finies de complexes $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$. Ainsi,

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

Prop. (Carré d'une somme)
Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de nombres complexes. Ainsi,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

13.3 Identités sommatoires remarquables

Prop. (Formule de Bernoulli)
Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Ainsi,
- pour tout $n \in [\![1, +\infty[\![$;

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \cdots + a^0 b^{n-1}).$$

- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k.$$

Défi.
On considère $(n, p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$. On appelle *coefficient binomial* « p parmi n », noté $\binom{n}{p}$, l'unique réel défini comme suit :
- si $p < 0$ ou $n < p$ (*i.e.* $p \notin [\![0, n]\!]$), alors $\binom{n}{p} = 0$;
- si $p = 0$, alors $\binom{n}{0} = 1$;
- sinon, *i.e.* si $1 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$\binom{n}{p} = \frac{(n-0)(n-1)\dots(n-(p-1))}{(p-0)(p-1)\dots(p-(p-1))}.$$

Exem.
1. $\binom{2025}{-2} = 0$ car $-2 \notin [\![0, 2025]\!]$.
2. $\binom{99}{100} = 0$ car $100 \notin [\![0, 99]\!]$.
3. $\binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$.
4. $\binom{73}{0} = 1$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1$.

Défi.
On appelle *factorielle* d'un entier naturel n, notée $n!$, l'unique entier naturel égal au produit des entiers supérieurs à 1 et inférieurs à n.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Rema.
1. $0! = 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = n \times (n-1)!$.
3. Si $n \geqslant 1,\ n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$.

Exem.

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	1	2	6	24	120	720

Prop.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin [\![0,n]\!] \\ \dfrac{n!}{(n-p)!p!} & \text{si } p \in [\![0,n]\!]. \end{cases}$$

Prop. (Symétrie)
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Prop. (Formule de Pascal)
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Rema. (Triangle de Pascal)
Le tableau suivant donne les coefficients binomiaux :

$n \setminus p$	-1	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
2	0	1	2	1	0	0
3	0	1	3	3	1	0
4	0	1	4	6	4	0
5	0	1	5	10	10	5

Prop.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ainsi,
$$\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}.$$

Prop. (Formule du binôme de Newton)
Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n;$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

14 Fondements 5 : fonction entre deux ensembles

14.1 Modes de définition d'une fonction, de son graphe

Noti.
Une fonction f partant d'un ensemble E et arrivant dans un ensemble F est un triplet constitué de l'ensemble de départ E, de l'ensemble d'arrivée F, et d'une relation qui, à tout élément x du départ, associe un unique élément y à l'arrivée, appelé image de x par f et noté $f(x)$.
On note :
- $f\colon E \to F, \quad x \mapsto f(x)$;
- $y = f(x)$ pour $x \mapsto y$;
- $f\colon E \to F$
  $x \mapsto f(x)$;
- $\mathcal{F}(E, F)$ pour l'ensemble des fonctions partant de E et arrivant dans F.

Défi. (Graphe)
On définit le graphe Γ_f d'une fonction $f\colon E \to F$ comme la partie de $E \times F$ telle que $(x, y) \in \Gamma_f \iff y = f(x)$.

$$\Gamma_f := \big\{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\big\} = \big\{(x, f(x)) \mid x \in E\big\}.$$

Rema.
Deux fonctions ne sont égales que si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et la même relation fonctionnelle. Par exemple, les fonctions :

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^2$$

ne sont pas égales car leurs ensembles d'arrivée diffèrent.
En revanche, $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, x \mapsto -x$ et $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, t \mapsto 1 - (t + 1)$ sont égales.

Noti.
On peut définir une fonction de plusieurs manières :
- par une relation explicite,
  en ex. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y$;
- par une relation implicite,
  en ex. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto z$;
- par une relation de récurrence, en ex.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ 0 &\mapsto 1 \\ 1 &\mapsto 1 \\ n &\mapsto f(n-1) + f(n-2) \quad (\text{pour } n \geq 2); \end{aligned}$$

- par un tableau de valeurs (E fini), en ex. $f\colon \{0, 1, 2\} \to \mathbb{C}$:

x	0	1	2
$f(x)$	i	$1-i$	2026

14.2 Opérations générales sur les fonctions

Défi.
On appelle *restriction* d'une fonction $f : E \to F$ à une partie A de E, la fonction notée $f_{|A}$ définie par :

$$\begin{aligned} f_{|A} \colon A &\to F \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Défi.
On dit qu'une fonction g est un *prolongement* de la fonction f lorsque f est la restriction de g à l'ensemble de départ de f.

Défi.
On appelle *image directe* par $f \colon E \to F$ d'une partie A de E (du départ), l'unique partie de F (de l'arrivée) définie par :

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Prop. (Image directe, inclusion et opérations)
Soient $f \colon E \to F$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$.
1. Si $A_1 \subset A_2$, alors $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. En général, on ne peut pas comparer $f(A_2 \setminus A_1)$ et $f(A_2) \setminus f(A_1)$.
3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. En général, l'inclusion est stricte.
4. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Défi.
Étant donné une fonction $f \colon E \to F$, on appelle *image réciproque* d'une partie B de F (de l'arrivée), l'unique partie de E (du départ) égale à l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Prop. (Image réciproque, inclusion et opérations)
Soient $f \colon E \to F$ et B_1, B_2 deux parties de F.
1. Si $B_1 \subset B_2$, alors $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_2 \setminus B_1) = f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
4. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Prop. (Enchaînement image directe et réciproque)
Soit $f \colon E \to F$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.
1. $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Défi.
Soient trois ensembles E, F, G et deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle *fonction composée* de f suivie de g (ou composée de g suivant f), notée $g \circ f$, l'unique fonction de E

dans G définie par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Prop. (Pseudo-associativité)
Si $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ et $h\colon G \to H$, alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Défi.
La *fonction identité* sur un ensemble E est définie par :

$$\mathrm{id}_E\colon E \to E, \quad x \mapsto x.$$

Prop.
La fonction identité agit comme un élément neutre pour la composition :
1. Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $f = f \circ \mathrm{id}_E$ (neutralité à droite).
2. Pour toute fonction $e \in \mathcal{F}(F, E)$, $\mathrm{id}_E \circ e = e$ (neutralité à gauche).

14.3 Fonction indicatrice d'une partie

Défi.
Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle *fonction indicatrice* de A sur E la fonction notée $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A\colon E &\to \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Prop. (Opérations sur les indicatrices)
Soient A et B deux parties de E.
1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
3. Si $A \cap B = \varnothing$ (disjoints), alors $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$.

15 Pratique calculatoire 4 : primitives et intégrales

15.1 Primitives

Défi.
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point, puis une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. On appelle *primitive* de la fonction f toute fonction $F\colon I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable et de fonction dérivée égale à f.

Prop.
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point. Ainsi, parmi les fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I, les fonctions constantes sont celles de dérivées nulles.

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point.

Prop.
Toute fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ admet des primitives.

Prop.
Si deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ sont dérivables et de dérivées égales, alors elles diffèrent d'une constante.

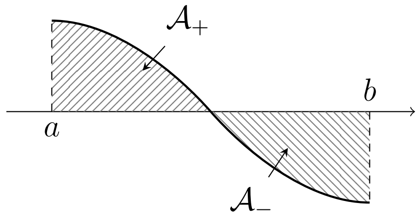
Prop.
Une primitive sur l'intervalle I étant donnée, on obtient toute primitive en lui ajoutant une certaine fonction constante.

15.2 Primitives et somme intégrale

Noti.
On considère deux réels $a < b$; puis $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}_+$. On appelle *somme intégrale* de f sur le segment $[a, b]$, qu'on note $\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ l'unique nombre réel qui associe l'aire « sous la courbe de f » à l'aire du rectangle unité défini par le repère.

Figu.

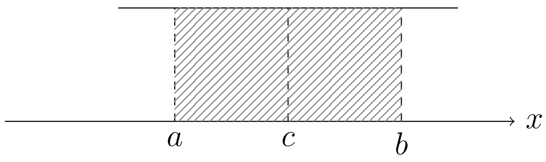
$$\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-$$



Rema.
Si $f\colon I \to \mathbb{R}_+$ est constante, alors

$$\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$$

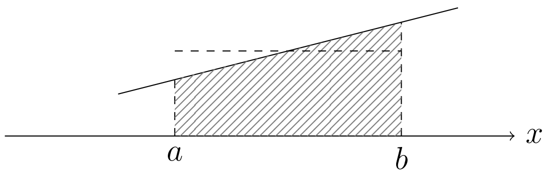
où c est arbitrairement choisi dans $[a,b]$.



Rema.
Si $f\colon I \to \mathbb{R}_+$ est affine, alors

$$\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$$

$$2\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = (f(a)+f(b))\cdot(b-a)$$



Défi.
On considère $f\colon I \to \mathbb{R}$, puis $x, y \in I$. Ainsi, on appelle *somme intégrale*, depuis x jusqu'à y, de la fonction f, l'unique nombre réel

$$\int_{t=x}^{y} f(t)\mathrm{d}t := F(y) - F(x) = \big[F(t)\big]_{t=x}^{y}$$

où F est une des primitives de f sur I, arbitrairement choisie. C'est que la somme intégrale depuis x jusqu'à y d'une fonction continue f est égale à la variation d'une primitive, arbitrairement choisie, depuis la borne inférieure x de la somme jusqu'à la borne supérieure y.

Prop. (Théorème fondamental du calcul différentiel)
Si f est continue, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x);$$

si f est continûment dérivable alors

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t.$$

15.3 Techniques de calcul

Prop. (Relation de Chasles)
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x, y, z \in I$. Ainsi

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t + \int_y^z f(t)\mathrm{d}t = \int_x^z f(t)\mathrm{d}t.$$

Rema.
1. Si $a < c < b$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,c]} f(t)\mathrm{d}t + \int_{[c,b]} f(t)\mathrm{d}t$.
2.

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ \displaystyle\int_{[x,y]} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x < y \\ \displaystyle -\int_{[y,x]} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } y < x \end{cases}$$

Prop. (Linéarité de l'intégrale)
Soit $u_1, u_2\colon I \to \mathbb{R}$ continues, puis $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi,
1. La fonction $C_1u_1 + C_2u_2$ est continue.
2. On a $\forall x \in I, \forall y \in I$,

$$\int_x^y \big(C_1u_1(t) + C_2u_2(t)\big) = C_1 \int_x^y u_1(t)\mathrm{d}t + C_2 \int_x^y u_2(t)\mathrm{d}t.$$

Prop. (Positivité et croissance de l'intégrale)
Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.
1. Si f est à valeurs positives sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}_+$:

$$[\forall x \in [a, b], \quad f(x) \in \mathbb{R}_+] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}_+\right].$$

2. On a

$$[\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq g(x)] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{[a,b]} g(x)\mathrm{d}x\right].$$

Prop. (Primitivation « produit »)
Soit $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ dérivables. Ainsi,

$$\forall x \in I, \quad u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$

Prop. (Intégration par parties)
Soit $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ dérivables. Ainsi, pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\int_x^y u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_{t=x}^{y} - \int_x^y u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

Prop. (Primitivation « composée »)
Soit $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ et $G\colon J \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\varphi(I) \subset J$. Ainsi, $\forall x \in I$, $G'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(G(\varphi(x)))$. Par conséquent, on a la formule d'intégration par changement de variable :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \quad \int_x^y G'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} G'(s)\mathrm{d}s$$

(« $s = \varphi(t)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, donc $\mathrm{d}s = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ »).

15.4 Somme intégrale et invariance

Prop.
Soit un réel $a > 0$, puis une fonction $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ qui est continue.
1. Si f est paire, alors

$$\int_{[-a,0]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,a]} f(x)\,\mathrm{d}x \ ;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{[0,a]} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

2. Si f est impaire alors

$$-\int_{[0,a]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[-a,0]} f(x)\,\mathrm{d}x;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Prop.
Soit $T \in]0, +\infty[$, puis une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. Si f est T-périodique, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

15.5 Fonctions particulières

Ci-après, pour tout intervalle I de l'ensemble D, la fonction $F\colon I \to \mathbb{R}$, est une primitive de la fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$.

D	$\forall x \in I, F(x) =$	$\forall x \in I, f(x) =$
$\mathbb{R}$	C	0
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$x^n,\ n \in \mathbb{N}$
$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	$\frac{1}{s+1}x^{s+1} + C$	$x^s,\ s \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$	$\frac{1}{x}$
$]0, +\infty[$	$\frac{1}{d+1}x^{d+1} + C$	$x^d,\ d \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\mathbb{R}$	$\exp(x)+C$	$\exp(x)$
$]0,+\infty[$	$x\ln(x)-x+C$	$\ln(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)+C$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)+C$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)+C$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$-\cos(x)+C$	$\sin(x)$
$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	$\tan(x)$

Méth.
On demande les primitives de Arctan. Soit une variable dans $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}(x) &= 1\cdot\mathrm{Arctan}(x)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\cdot\mathrm{Arctan}(x)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\cdot\mathrm{Arctan}(x)+x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arctan}(x))-x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arctan}(x))\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ \mathrm{Arctan}(x))-\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ \mathrm{Arctan}(x))-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(1+x^2)\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\ \mathrm{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)
\end{aligned}$$

16 Fonction d'une variable réelle 2 : EDO

Introduction
L'intervalle I possède plus d'un point. On traite ici d'*Équations Différentielles Ordinaires Scalaires Normalisées Linéaires* (EDOSNL) sur un intervalle I :

- et du premier ordre : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - a\,x(t) = b(t)$ sur I.
- et du second ordre : $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)) - s\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) + p\,x(t) = b(t)$ sur I.

Exem.
1. La fonction exp est solution de l'ED linéaire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - x(t) = 0$.
2. La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto \cos(2026\,\theta)$ est solution de l'ED linéaire $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)) + 2026^2\,x(t) = 0$.
3. La fonction $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$ est solution de l'ED $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y(x)) - (y(x))^2 = 1$ (qu'on peut écrire $y' - y^2 = 1$). Notez que celle-ci n'est pas linéaire.

Rema.
C'est à dire que :
1. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp'(t) - \exp(t) = 0\,;$
2. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}(\cos(2026\theta)) + 2026^2\cos(2026\theta) = 0\,;$
3. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan'(x) - (\tan(x))^2 = 1.$

16.1 Liminaires

Rema.
Chercher les primitives de $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, c'est résoudre sur I l'ED $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - 0 \cdot x(t) = b(t)$.

Nota.
$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ désigne la classe des fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ qui sont infiniment dérivables.

Prop. (Stabilité)
L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ est stable par dérivation et par combinaison linéaire.

Exem.
Toute fonction polynomiale est infiniment dérivable.

Prop.
Pour les deux classes d'ED de ce cours, si le second membre est infiniment dérivable, alors toute solution est infiniment dérivable.

Prop. (Théorème de structure)
Une solution particulière étant donnée, on obtient toutes les solutions en lui ajoutant les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée (i.e. avec second membre nul).

Prop. (Principe de superposition)
Si x_1 et x_2 sont deux solutions particulières associées aux seconds membres b_1 et b_2 respectivement, alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est une solution particulière associée au second membre $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Prop. (Pour trouver une solution particulière)
Soit $B \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. Pour toute fonction $k \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et tout $r \in \mathbb{K}$, la fonction $t \mapsto e^{rt}k(t)$ est solution sur I de l'ED

$$x'(t) - a\,x(t) = e^{rt}B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k'(t) + (r-a)k(t) = B(t).$$

De plus, elle est solution de l'ED

$$x''(t) - s\,x'(t) + p\,x(t) = e^{rt}B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k''(t) + (2r-s)k'(t) + (r^2 - sr + p)k(t) = B(t).$$

Prop. (Indépendance linéaire)
Soient r_- et r_+ dans $\mathbb{C}$ tels que $r_- \neq r_+$. Ainsi, les deux fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ que sont $t \mapsto e^{r_- t}$ et $t \mapsto e^{r_+ t}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

$$\forall (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{C}^2, \quad \big(\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_- e^{r_- t} + \lambda_+ e^{r_+ t} = 0\big) \implies (\lambda_-, \lambda_+) = (0,0).$$

16.2 Premier ordre à coefficients constants

Prop.
Les solutions de l'EDL homogène $x'(t) - a\,x(t) = 0$ sont les fonctions

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{K} \\ t &\mapsto Ce^{at} \end{aligned}$$

pour C parcourant $\mathbb{K}$.

Appl.
Les solutions sur $]0, 2026]$ de l'ED $3x'(t) - 2x(t) = 0$ sont les fonctions $]0, 2026] \to \mathbb{R},\ t \mapsto Ce^{\frac{2}{3}t}$ pour C parcourant $\mathbb{R}$.

Prop.
Les solutions de l'EDL avec second membre $x'(t) - a\,x(t) = b(t)$ existent et ce sont les fonctions

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{K} \\ t &\mapsto \varphi_0(t) + Ce^{at} \end{aligned}$$

pour C parcourant $\mathbb{K}$, où φ_0 est une solution particulière arbitrairement choisie.

Rema.
Les solutions de cette équation $x'(t) + a\,x(t) = 0$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-at}$.

Méth.
1. Avec $b\colon t \mapsto Ae^{\lambda t}$ où $(A, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Résolvons sur $\mathbb{R}$, $x'(t) - 2x(t) = 7$.

   Étape 1 : Les solutions de l'EDL homogène associée sont les fonctions

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto Ce^{2t} \end{aligned} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

   Étape 2 : [Cherchons une solution particulière parmi les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto k$ pour $k \in \mathbb{R}$.] On trouve pour solution particulière

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

   Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{2} + Ce^{2t} \end{aligned} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

   b) Résolvons sur $\mathbb{R}$, $x'(t) - 2x(t) = 7e^{-4t}$.

   Étape 1 : Fait ! (Il s'agit de la même équation homogène $x' - 2x = 0$).

   Étape 2 : [Cherchons une solution particulière parmi les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto k(t)e^{-4t}$ où k est une fonction polynomiale.] Soit $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale. $t \mapsto k(t)e^{-4t}$ convient comme solution particulière si et seulement si la fonction k est solution de

   $$k'(t) - 6k(t) = 7.$$

   Ainsi on trouve pour solution particulière

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{6}e^{-4t}. \end{aligned}$$

   Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

   $$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{6}e^{-4t} + Ce^{2t}, \end{aligned} \quad C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

2. Avec $b\colon t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.
   a) Résolvons $x'(t) - 2x(t) = 7\cos(4t)$ i.e. $x'(t) - 2x(t) = 7\mathrm{Re}(e^{i4t})$. [Pour ce faire, on peut chercher $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifie $z'(t) - 2z(t) = 7e^{i4t}$, puis choisir $\varphi_0\colon t \mapsto \mathrm{Re}(z(t))$. $k(t)e^{i4t}, \forall t, k'(t) + (i4-2)k(t) = 7$ il suffit $k(t) = \frac{7(i4-2)}{(i4-2)(i4+2)}$. $k(t) = \frac{7(-2-i4)}{2^2+4^2} = \frac{-14-i28}{20} = -\frac{7}{10} - i\frac{14}{10}$. $z(t) = \left(-\frac{7}{10} - i\frac{14}{10}\right)(\cos(4t) + i\sin(4t))$.]

Étape 1 : Fait !

Étape 2 : L'équation admet pour solution particulière $t \mapsto -\frac{7}{10}\cos(4t) + \frac{14}{10}\sin(4t)$.

Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -\frac{7}{10}\cos(4t) + \frac{14}{10}\sin(4t) + Ce^{2t} \end{aligned} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

b) Résolvons $x'(t) - 2x(t) = 7\cos(4t) + 2\sin(4t)$.

Étape 1 : Fait !

Étape 2 : On trouve une solution de la même forme $t \mapsto C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)$.

Étape 3 : On répond.

Prop. (Problème de Cauchy d'ordre 1)
Rappel : $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Pour tout couple (t_0, x_0) de $I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy sur I

$$\begin{cases} x'(t) - a\,x(t) = b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet exactement une solution.

Prop. (Partition de $I \times \mathbb{R}$)
Les courbes intégrales de l'ED, i.e. les parties $\{(t, x(t)) \mid t \in I\}$ pour x parcourant les solutions, constituent une partition de l'ensemble produit $I \times \mathbb{K}$: pour tout point passe exactement une courbe intégrale.

Méth.
Résolvons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = 7 \\ x(1) = 8. \end{cases}$$

Étapes 1, 2, 3 : Fait ! (Nous avons déterminé précédemment que la solution générale est $x(t) = -\frac{7}{2} + Ce^{2t}$).

Étape 4 : [Parmi les fonctions qui vérifient l'ED, lesquelles respectent la CI $x(1) = 8$?
$\left[-\frac{7}{2} + Ce^{2t}\right]_{t=1} = 8 \implies -\frac{7}{2} + Ce^2 = 8 \implies e^2C = \frac{23}{2} = 11,5.$]
Ainsi, voici une solution

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto -3,5 + 11,5e^{2(t-1)}. \end{aligned}$$

Par existence et unicité dans le problème de Cauchy, c'est l'unique solution. (Toute autre solution lui est égale).

16.3 Second ordre à coefficients constants

Prop. (EDOL homogène d'ordre 2 à coefficient constant)
Rappel : $(s,p) \in \mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des racines complexes de la fonction polynomiale complexe

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C}\\ z &\mapsto z^2 - sz + p.\end{aligned}$$

1. Si $\mathcal{R} = \{r_-, r_+\}$ avec $r_-, r_+ \in \mathbb{R}$, $r_- \neq r_+$, alors les solutions de l'ED $x''(t) - s\,x'(t) + p\,x(t) = 0$ sont les combinaisons linéaires des fonctions réelles

$$t \mapsto e^{r_- t} \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{r_+ t}.$$

2. Si $\mathcal{R} = \{r_0, \overline{r_0}\}$ avec $r_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors les deux fonctions ci-haut sont remplacées par

$$t \mapsto e^{\mathrm{Re}(r_0)t} \cos(\mathrm{Im}(r_0)t) \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{\mathrm{Re}(r_0)t} \sin(\mathrm{Im}(r_0)t).$$

3. Si $\mathcal{R} = \{r_0\}$ avec $r_0 \in \mathbb{R}$, alors les deux fonctions sont remplacées par

$$t \mapsto e^{r_0 t} \quad \text{et} \quad t \mapsto te^{r_0 t}.$$

Rema.
Ce sont les fonctions $t \mapsto C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ pour (C_1, C_2) parcourant $\mathbb{R}^2$.

Prop. (Problème de Cauchy d'ordre 2)
Pour tout couple $(t_0, (x_0, v_0)) \in I \times \mathbb{K}^2$, il y a exactement une solution, c'est-à-dire une unique, au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - s\,x'(t) + p\,x(t) = b(t) \\ \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

17 Fondements 6 : fonction et inversibilité

17.1 Surjectivité

Dans toute la suite, E et F désignent deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

Défi.
On dit que la fonction f est *surjective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au moins un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de $b \in F$, on peut trouver au moins un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f.

$$\forall b \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = b.$$

Rema.
Dire que f est surjective revient à dire que $f(E) = F$.

Prop.
La composée de deux fonctions surjectives est elle-même une fonction surjective : étant donné trois ensembles E, F et G, puis deux fonctions $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f \in \mathcal{F}(E, G)$ est surjective.

Défi.
On dit qu'une fonction $e \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse à droite* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque

$$\forall b \in F, \quad f(e(b)) = b.$$

C'est que $f \circ e = \mathrm{id}_F$.
On dit alors que f est *inversible à droite* lorsqu'elle admet un inverse à droite.

Exem.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Alors les deux fonctions $e_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto \sqrt{y}$ et $e_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto -\sqrt{y}$ sont deux inverses à droite de f.

Prop.
Une fonction est inversible à droite si et seulement si elle est surjective.

Méth. (Vérifier si une fonction est surjective)
Pour étudier la surjectivité de $f\colon E \to F$, on s'intéresse à l'équation $y = f(x)$, où $y \in F$ est un paramètre et $x \in E$ est l'inconnue.

- Pour montrer que f est surjective : on fixe un $y \in F$ quelconque et on montre que l'équation $f(x) = y$ admet toujours au moins une solution $x \in E$ (on cherche à exprimer x en fonction de y, ou à prouver son existence).
- Pour montrer que f n'est pas surjective : on cherche un contre-exemple. Il suffit d'exhiber

une valeur particulière $y_0 \in F$ qui n'admet aucun antécédent dans E (l'équation $f(x) = y_0$ n'a pas de solution).

17.2 Injectivité

Défi.
On dit que la fonction f est *injective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'au plus un élément du départ ; i.e. quel que soit le choix de $b \in F$, on peut trouver au plus un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f.

$$\forall b \in F, \quad \forall x_1, x_2 \in E, \quad (f(x_1) = b \wedge f(x_2) = b) \implies x_1 = x_2.$$

$$\text{i.e.} \qquad \forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Prop.
La composée de deux fonctions injectives est une fonction injective.

Défi.
On dit qu'une fonction $g \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse à gauche* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque

$$\forall x \in E, \quad g(f(x)) = x.$$

Rema.
C'est que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Rema.
Si g est un inverse à gauche de f, alors pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ admet au plus $g(b)$ pour solution.

Prop.
Toute fonction est inversible à gauche si, et seulement si elle est injective.

Méth. (Vérifier si une fonction est injective)
Soit $f \colon \mathbb{R} \to]1, +\infty[, \ x \mapsto e^{-x} + 1$. Cette fonction est-elle injective ?
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, puis $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &\iff e^{-x} + 1 = e^{-x_0} + 1 \\ &\iff e^{-x} = e^{-x_0} \\ &\iff -x = -x_0 \\ &\iff x = x_0. \end{aligned}$$

Elle est donc injective !
(Sinon, il aurait suffit de trouver deux réels distincts ne donnant pas la même image par f.)

17.3 Bijectivité

Défi.
On dit que la fonction f est *bijective* lorsque tout élément de l'arrivée est l'image d'exactement un élément du départ : quel que soit le choix de $b \in F$, il existe exactement un élément $x \in E$ qui admet b pour image par f.

$$\forall b \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = b.$$

Rema.
1. Une fonction bijective est une fonction à la fois surjective et injective.
2. Une fonction $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est bijective lorsqu'elle établit une correspondance un à un entre les éléments de E d'un côté et les éléments de F de l'autre côté.

Défi.
On considère une fonction bijective $f \colon E \to F$. On appelle *fonction réciproque* de f, qu'on note f^{-1}, l'unique fonction de F dans E qui à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f : pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément de E dont l'image par f est égale à y.

Prop.
La composée de deux fonctions bijectives est bijective.

Défi.
On dit que $h \in \mathcal{F}(F, E)$ est un *inverse* de $f \in \mathcal{F}(E, F)$ lorsque quel que soit le choix de $b \in F$ et $x \in E$, $f(h(b)) = b$ et $x = h(f(x))$.
C'est que $f \circ h = \mathrm{id}_F$ et $\mathrm{id}_E = h \circ f$.

Défi.
On dit que f est *inversible* pour dire que f admet un inverse.

Prop. (Unicité)
Toute fonction admet au plus un inverse.

Nota.
Si f est inversible, son inverse est notée f^{-1}.

Rema.
Dire que $f \in \mathcal{F}(E, F)$ admet f^{-1} pour inverse signifie que pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ admet exactement $f^{-1}(b)$ pour solution.

Prop.
Toute fonction est inversible si, et seulement si elle est bijective.

Méth. (Vérifier si une fonction est bijective en exprimant sa réciproque le cas échéant)
Soit $f \colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\},\ x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.
Que soit donné $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ quelconque fixé.

Est-ce que l'équation $f(x) = b$ d'inconnue x variant dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, admet exactement une solution ?
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ quelconque. On a

$$\begin{aligned}
& f(x) = b \\
\iff & 2x + 1 = b(x-1) \\
\iff & (2-b)x = -b-1 \\
\iff & x = \frac{-b-1}{2-b} \quad (\text{car } 2 - b \neq 0).
\end{aligned}$$

La fonction f est bijective et sa réciproque est la fonction

$$f^{-1} \colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\},\ b \mapsto \frac{-b-1}{2-b} = \frac{b+1}{b-2}.$$

18 Géométrie élémentaire 3 : l'espace

Rema.
Pour décrire une partie de l'espace,
- une paramétrisation permet d'accéder directement à tout point de la partie ;
- une mise en équations permet de décider si un point donné de l'espace tout entier est de la partie.

18.1 Produit vectoriel dans l'espace orienté

Défi.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, qu'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'unique vecteur de l'espace défini comme suit :
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, alors
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})\, \vec{k},$$
où $\vec{k}$ désigne l'unique vecteur unitaire directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est lié, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Prop.
Le produit vectoriel est :
1. bilinéaire :
   a. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{E}$,
$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}; \end{cases}$$
   b. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}); \end{cases}$$
2. antisymétrique :
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Prop.
L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Soient $\vec{v_1}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v_2}(x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs. Alors $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$ admet pour coordonnées
$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Appl.
Dans une b.o.n.d. de l'espace, on considère $\vec{v_1}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}-4\\5\\3\end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix}-14\\-10\\-2\end{pmatrix}.$$

Prop. (Produit vectoriel et colinéarité)
Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si, et seulement si, le produit vectoriel de l'un par l'autre est égal au vecteur nul :

$$\vec{u}//\vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

18.2 Déterminant dans une b.o.n.d

Défi. (Déterminant en dimension 3)
Le *déterminant* de tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace est le nombre réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Nota.
On note souvent $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exem.
On considère en b.o.n.d $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}7\\2\\6\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix}-14\\-10\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}7\\2\\6\end{pmatrix} = -14 \times 7 - 10 \times 2 - 2 \times 6 = -130.$$

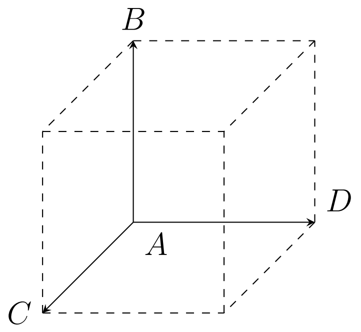
Prop. (Produit vectoriel et mesure)
La valeur absolue $|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$ mesure le volume du parallélépipède d'arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Rema.
1. On ne demande pas à ce que le parallélépipède le soit au sens strict.
2. Pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ on peut choisir A quelconque puis B, C et D tels que

$$\begin{cases} A + \vec{u} = B \\ A + \vec{v} = C \\ A + \vec{w} = D \end{cases}$$

pour interpréter $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

Figu.



Prop. (Multilinéarité et antisymétrie)
Le déterminant (en dim. 2 ou 3) est linéaire par rapport à chaque place et antisymétrique.

Rema.
« Bi- » et « tri- » linéaires.

Exem.
Si $\vec{v} = \mu_1 \vec{v_1} + \mu_2 \vec{v_2}$, alors

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \mu_1 [\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{w}] + \mu_2 [\vec{u}, \vec{v_2}, \vec{w}],$$

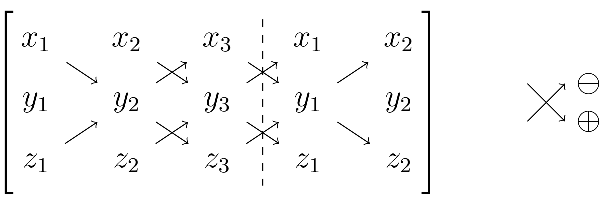
et semblablement, si $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2}$ ou si $\vec{w} = \nu_1 \vec{w_1} + \nu_2 \vec{w_2}$.

Prop. (Déterminant et coordonnées)
Considérons $\vec{v_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ dans une b.o.n.d.

$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad [\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}] &= y_1 z_2 x_3 - z_1 y_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_1 z_2 y_3 + x_1 y_2 z_3 - y_1 x_2 z_3 \\ &= (x_1 y_2 z_3 + z_1 x_2 y_3 + y_1 z_2 x_3) - (z_1 y_2 x_3 + x_1 z_2 y_3 + y_1 x_2 z_3). \end{aligned}$$

Figu.



Nota.
Comme pour la notation $ab - cd = \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$, la somme ci-avant se note

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et développement)
En développant par rapport à la troisième colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Rema.
Un échange permet de placer toute colonne en troisième position.

Rema.
Comme pour la relation $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$, la transposition conserve le déterminant (en dim. 2 ou 3) ;

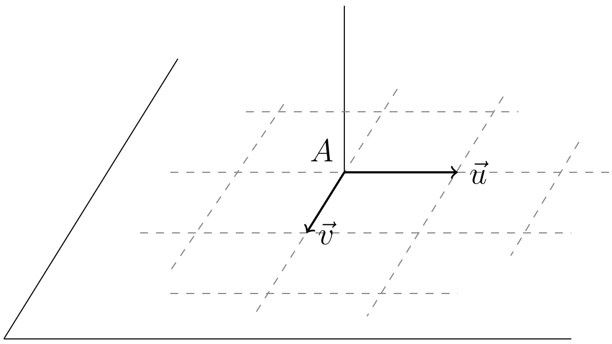
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et dépendance linéaire)
Un triplet de vecteurs de l'espace est lié si, et seulement si, son déterminant est égal à zéro.

18.3 Plans de l'espace

Noti. (Plan de l'espace)
On décrit primitivement un plan par la donnée d'un point A qu'il possède et d'un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs linéairement indépendants qui le dirigent.

Figu.



Prop. (Paramétrisation)

1. Le plan $\mathcal{P}$ passant par $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et dirigé par $\vec{v_1}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ admet pour paramétrisation
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases} \quad ; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
2. Réciproquement, une telle paramétrisation, avec $\vec{v_1}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ linéairement indépendants, définit le plan passant par $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dirigé par $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Appl.
Que dire de la partie de l'espace définie par le système de trois éqn. paramétriques suivant :
$$\begin{cases} x = 2k + 3l \\ y = -1 + 3k \\ z = -5 - 2k + l \end{cases} \quad ; \quad (k, l) \in \mathbb{R}^2 \quad ?$$
Posons $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, puis $\vec{v_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre ? Soit, est-ce que $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} \neq \vec{0}$?
Oui car l'abscisse est égale à : $3 \times 1 - (-2) \times 0 = 3$ et $3 \neq 0$. Cette partie est le plan passant par M_0 et dirigé par $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Prop. (Équation cartésienne)
Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.

1. On peut trouver au moins un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation :
$$ax + by + cz = d.$$
De plus, si le repère est orthonormé, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. Réciproquement, toute partie de l'espace d'équation $ax+by+cz = d$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est un plan, dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si le repère est orthonormé.

Méth. (Passer d'une paramétrisation à une équation et inversement)

1. On considère le plan de paramétrisation

$$\begin{cases} x = 2k + 3l \\ y = -1 + 3k \\ z = 5 - 2k + l \end{cases} \quad ; \quad (k,l) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ un couple de vecteurs qui dirige le plan. On a $\vec{v_1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$.
Donc $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $3x - 8y - 9z = d$ où $d \in \mathbb{R}$.
Or $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ (obtenu par $(k,l) = (0,0)$).
Donc $3 \times 0 - 8(-1) - 9 \times 5 = d$.
Enfin, $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne

$$3x - 8y - 9z = -37.$$

2. On demande une paramétrisation du plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne

$$3x - 8y - 9z = -37.$$

Voie géométrique 1

Choisissons deux points de $\mathcal{P}$. $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 37/9 \end{pmatrix}$ et $M_1\begin{pmatrix} 0 \\ 37/8 \\ 0 \end{pmatrix}$ conviennent.
Trouvons un couple libre $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ qui dirige $\mathcal{P}$.
Posons $\vec{v_1} = \overrightarrow{M_0M_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 37/8 \\ -37/9 \end{pmatrix}$.
Posons $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$ puis $\vec{v_2} = \vec{n} \wedge \vec{v_1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} \alpha = 37 \cdot \frac{8}{9} + \frac{9}{8} \\ \beta = 37 \cdot \frac{3}{9} \\ \gamma = 37 \cdot \frac{3}{8} \end{cases}$.
D'où la paramétrisation

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \frac{37}{8}s + \beta t \\ z = \frac{37}{9} - \frac{37}{9}s + \gamma t \end{cases} \quad ; \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Voie géométrique 2

On identifie un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$.
On cherche un premier vecteur directeur $\vec{v_1}$ orthogonal à $\vec{n}$ (i.e. $\vec{n} \cdot \vec{v_1} = 0$) en choisissant des coordonnées simples.
$\vec{v_1}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient car $3(8) - 8(3) - 9(0) = 0$.
On fabrique le second vecteur directeur par produit vectoriel :

$$\vec{v_2} = \vec{n} \wedge \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 27 \\ -72 \\ 73 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en choisissant le point $M_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 37/9 \end{pmatrix}$, on obtient la paramétrisation

$$\begin{cases} x = 8s + 27t \\ y = 3s - 72t \\ z = 37/9 + 73t \end{cases} \quad ; \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Voie algébrique

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad 3x - 8y - 9z = -37 \iff 9z = 3x - 8y + 37$$

$$\iff \begin{cases} x = p \\ y = q \\ z = 37 + 3p - 8q \end{cases} \quad ; \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2.$$

Méth. (Déterminer l'intersection de deux plans)
On considère deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. On étudie le système formé par leurs équations cartésiennes.

Cas 1 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -5 \\ 5x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Les vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 17 \\ 14 \\ -19 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. L'intersection est donc une droite dirigée par $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$. On cherche un point particulier, par exemple en fixant $z = 0$ et en résolvant le système, ce qui donne $M_0 \begin{pmatrix} 2/19 \\ -33/19 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donc

$$\begin{cases} x = 2/19 + 17t \\ y = -33/19 + 14t \\ z = -19t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -5 \\ -6x - 9y - 12z = 10 \end{cases} .$$

On remarque que $-3 \times (2x + 3y + 4z) = -6x - 9y - 12z$. Les plans ont des vecteurs normaux colinéaires, ils sont parallèles. (Peut aussi se traiter avec le produit vectoriel.) Cependant, $15 \neq 10$. Le système est incompatible. L'intersection est vide.

Cas 3 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -5 \\ -6x - 9y - 12z = 15 \end{cases}$$

La seconde équation est exactement le produit de la première par -3. Les deux équations sont équivalentes. L'intersection est le plan $\mathcal{P}_1$ lui-même. N'oublions pas d'en donner une paramétrisation, à partir d'une des équations, pour répondre au problème.

Défi. (Projeté orthogonal sur un plan)
Considérons un plan $\mathcal{P}$. On appelle *projeté orthogonal* de tout point M sur le plan $\mathcal{P}$ l'unique point H d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M. C'est que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{MH} \perp \vec{v}. \end{cases}$$

Rema.
Si $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est une base de vecteurs de $\mathcal{P}$, alors

$$(\forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{MH'} \perp \vec{v}) \iff (\vec{MH'} \perp \vec{v_1}) \wedge (\vec{MH'} \perp \vec{v_2}).$$

Défi.
La *distance* du point M au plan $\mathcal{P}$ est $\min\limits_{P \in \mathcal{P}} MP$.

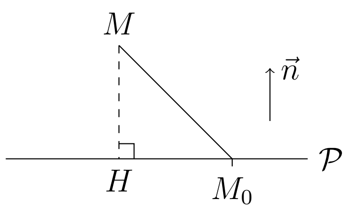
Nota.
Aussi, $\mathrm{dist}(M, \mathcal{P}) = \min\{MP : P \in \mathcal{P}\}$.

Figu.
C'est le rayon de la plus petite sphère de centre M établissant un contact ponctuel avec le plan.

Prop.
Si H est le projeté orthogonal du point M sur $\mathcal{P}$ alors

$$\mathrm{dist}(M, \mathcal{P}) = MH.$$

Méth. (Calculer la distance d'un point à un plan)
On suppose qu'on dispose d'un point $M_0 \in \mathcal{P}$ et d'un vecteur normal $\vec{n}$ de ce même plan. On demande la distance de tout point M donné au plan $\mathcal{P}$.



On écrit $\vec{M_0M} = \vec{M_0H} + \vec{HM}$.
Or $\vec{M_0H} \perp \vec{n}$; donc $\vec{M_0H} \cdot \vec{n} = 0$.
Donc $\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = \vec{M_0H} \cdot \vec{n} + \vec{HM} \cdot \vec{n} = \vec{HM} \cdot \vec{n}$.
Or $\vec{HM} // \vec{n}$, donc $|\vec{HM} \cdot \vec{n}| = \|\vec{HM}\| \times \|\vec{n}\|$.
Donc

$$\mathrm{dist}(M, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{M_0M}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Par conséquent, si $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + cz = d$, alors la distance de tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à $\mathcal{P}$ est

$$\mathrm{dist}\left(M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathcal{P}\right) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

18.4 Droites de l'espace

Noti.
Une droite $\mathcal{D}$ est définie par la donnée d'un point $M_0 \in \mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Prop. (Paramétrisation)
Si $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ admet la paramétrisation que voici :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},$$

et réciproquement.

Prop. (Mise en équation)
Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont deux vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ linéairement indépendants et si $M_0 \in \mathcal{D}$, alors tout point $M \in \mathcal{E}$ est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \vec{n_1} \cdot \vec{M_0M} = 0 \\ \vec{n_2} \cdot \vec{M_0M} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, la droite $\mathcal{D}$ admet un système de deux équations cartésiennes

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

avec $\vec{n_1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ linéairement indépendants.

Rema.
Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont deux vecteurs normaux linéairement indépendants alors le vecteur $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$ est directeur de la droite.

Méth. (Passer d'une paramétrisation d'une droite à une mise en équation et inversement)
1. Soit $\mathcal{D}$ de paramétrisation

$$\begin{cases} x = 3 + 9t \\ y = 4 - 6t \\ z = 8 + 4t \end{cases} .$$

$M_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{D}} \setminus \{\vec{0}\}$.
Posons $\vec{n_1} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} = \vec{v} \wedge \vec{n_1}$. Alors $\vec{n_1} \neq \vec{0}$ et $\vec{n_1} \perp \vec{v}$ (car $\vec{v} \cdot \vec{n_1} = 9 \times 6 - 6 \times 9 + 4 \times 0 = 0$).

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} -36 \\ 24 \\ 127 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont deux vecteurs normaux linéairement indépendants, donc $\mathcal{D}$ admet pour système

$$\begin{cases} 6x + 9y + 0z = d \\ -36x + 24y + 117z = d' \end{cases} \qquad \text{où } (d, d') \in \mathbb{R}^2.$$

Les coordonnées de M_0 vérifient ce système ; ce qui donne d et d'.

2. On considère $\mathcal{D}$ définie par le système

$$\begin{cases} 6x + 9y = 44 \\ -12x + 8y + 39z = 308 \end{cases}.$$

On veut une paramétrisation. Posons $\vec{n_1} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 39 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 351 \\ -234 \\ 156 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

Donc $(\vec{n_1}, \vec{n_2})$ est libre, puis $\mathcal{D}$ est bien une droite ; elle est dirigée par $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$. Enfin, une solution particulière $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ du système conduit à une paramétrisation.

Méth. (Déterminer l'intersection de deux droites)
On considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ données par leurs représentations paramétriques. On cherche à déterminer s'il existe un couple (t, k) tel que $M(t) = M(k)$.
Prenons l'exemple suivant :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 - k \\ z = 1 + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

On résout le système formé par l'égalité des coordonnées :

$$(S) : \begin{cases} 1 + t = 2 + k \quad (L_1) \\ -2 + t = 3 - k \quad (L_2) \\ 3t = 1 + 2k \quad (L_3). \end{cases}$$

On extrait un sous-système de deux équations pour trouver les candidats (t, k). En utilisant (L_1) et (L_2) :

$$\begin{cases} t - k = 1 \\ t + k = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 6 \implies t = 3 \\ k = 5 - 3 = 2. \end{cases}$$

On vérifie si ce couple candidat est solution de la troisième équation (L_3) :

$$3t = 3(3) = 9 \quad \text{et} \quad 1 + 2k = 1 + 2(2) = 5.$$

On constate que $9 \neq 5$. L'équation (L_3) n'est pas vérifiée.
Le système est incompatible, l'intersection est vide.
Si la troisième équation avait été vérifiée, les droites auraient été sécantes au point obtenu en injectant $t = 3$ dans $\mathcal{D}_1$. Enfin, si le système avait eu une infinité de solutions, les droites auraient été confondues.

Méth. (Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan)
On considère la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ définis par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P} : x + y - z - 5 = 0.$$

On cherche le paramètre t pour lequel le point de la droite appartient au plan en injectant les expressions paramétriques dans l'équation cartésienne.
On a

$$\begin{aligned} (1 + t) + (2 - 2t) - (3t) - 5 &= 0 \\ 1 + 2 - 5 + t - 2t - 3t &= 0 \\ -2 - 4t &= 0 \\ t &= -0,5. \end{aligned}$$

La droite et le plan sont sécants.
On reporte t dans la paramétrisation de $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} x = 1 + (-0,5) = 0,5 \\ y = 2 - 2(-0,5) = 3 \\ z = 3(-0,5) = -1,5. \end{cases}$$

Le point d'intersection est $M(0,5\ ;\ 3\ ;\ -1,5)$.
Si l'équation en t aboutit à une suppression de l'inconnue t :
- $0 = k$ (avec $k \neq 0$) : Impossible. La droite est strictement parallèle au plan.
- $0 = 0$: Toujours vrai. La droite est incluse dans le plan.

Défi. (Distance à une droite)
La *distance* du point M à la droite $\mathcal{D}$ est la plus petite distance séparant M d'un point de la droite :

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}.$$

Défi. (Projeté orthogonal sur une droite)
Considérons une droite $\mathcal{D}$ dirigée par un vecteur $\vec{v}$. On appelle *projeté orthogonal* du point M sur la droite $\mathcal{D}$ l'unique point H tel que :

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \vec{MH} \perp \vec{v} \end{cases}.$$

Prop.

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = MH$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Méth. (Calculer la distance de tout point donné à une droite)
Supposons qu'on dispose de $M_0 \in \mathcal{D}$ et de $\vec{v}$ directeur de $\mathcal{D}$.
On écrit : $\vec{M_0M} = \vec{M_0H} + \vec{HM}$.
Donc

$$\vec{v} \wedge \vec{M_0M} = \vec{v} \wedge \vec{M_0H} + \vec{v} \wedge \vec{HM}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v} \wedge \vec{M_0M}\| &= \|\vec{v} \wedge \vec{HM}\| \quad (\text{car } \vec{M_0H} // \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{HM}\| \quad (\text{car } \vec{v} \perp \vec{HM}).\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{M_0M}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

18.5 Sphère de l'espace

Défi.
Dans l'espace $\mathcal{E}$, on appelle *sphère* de centre $\Omega \in \mathcal{E}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble

$$\mathcal{S}(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{E} \mid \Omega M = r\}.$$

Prop. (Équation cartésienne d'une sphère)
Soit un point Ω de coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ dans un r.o.n. puis $r \in [0, +\infty[$.
La sphère $\mathcal{S}(\Omega, r)$ admet pour équation cartésienne

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2.$$

Rema.
Dans la propriété ci-avant, le membre de gauche admet pour forme développée

$$1x^2 + 1y^2 + 1z^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z.$$

Méth. (Vérification d'une équation de sphère et caractéristiques)
Question : Est-ce que l'ensemble $(\Gamma) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ est une sphère ?
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On regroupe les termes et on reconnaît le début d'identités remarquables (mise sous forme canonique) :
- $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$;
- $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$;
- $z^2 - 6z = (z-3)^2 - 9$.

L'équation devient :

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 5 = 0.$$

En isolant les carrés, on obtient :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Ceci est de la forme $X^2 + Y^2 + Z^2 = K$ avec $K = 9$.

Conclusion : Comme $K > 0$, l'ensemble (Γ) est bien une sphère de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\3\end{smallmatrix}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{9} = 3$.

Prop. (Paramétrisation d'une sphère)
La sphère $\mathcal{S}(\Omega, r)$ avec $\Omega\left(\begin{smallmatrix}x_\Omega\\y_\Omega\\z_\Omega\end{smallmatrix}\right)$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_\Omega + r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y = y_\Omega + r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z = z_\Omega + r\sin(\varphi) \end{cases} \quad , \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Méth. (Intersection d'une sphère et d'un plan)
Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{P}$ un plan.
Pour étudier l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$, on calcule d'abord la distance du centre au plan :

$$d = \mathrm{dist}(\Omega, \mathcal{P}).$$

Trois cas se présentent :
1. Si $d > R$, l'intersection est vide.
2. Si $d = R$, l'intersection est réduite à un point unique H (le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$). Le plan est tangent à la sphère.
3. Si $d < R$, l'intersection est un cercle de centre H (projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$) et de rayon $r_{cercle} = \sqrt{R^2 - d^2}$ (Théorème de Pythagore).

19 AL 1 : Systèmes linéaires et représentations matricielles

Rema.
Bien que ce chapitre soit présenté avec des coefficients réels, l'intégralité des définitions, propriétés et méthodes s'étend aux nombres complexes.

19.1 Équivalence de systèmes linéaires

Noti.
On considère $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *équation linéaire* (« EL » dans la suite) à p inconnues et à coefficients réels toute équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

d'inconnue $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, de *paramètres* $a_1, \ldots, a_p$ et b. Si $b = 0$, alors on parle d'*équation linéaire homogène* (« ELH » dans la suite).

Exem.
Voici une EL à 3 inconnues :

$$2x - 3y + 5z = 2026.$$

La liste de ses coefficients est $(2; -3; 5)$ et son second membre est 2026.

Noti. (Système linéaire)
On considère $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle *système de n EL à p inconnues*, ou simplement *système linéaire* de n équations à p inconnues, tout système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$.
La famille de coefficients est $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. On l'appelle *(table) matrice à n lignes et p colonnes* à coefficients réels, et on l'écrit visuellement

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}.$$

La table matrice $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ écrite $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ est le *second membre.*

Exem.
Voici un système linéaire à 3 inconnues de 2 équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2025 \\ -5x - 6y - 7z = 2026. \end{cases}$$

La table matrice de ses coefficients est

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix},$$

et la table matrice de son second membre est

$$\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}.$$

Ici, le *système linéaire homogène associé* est celui où l'on remplace chaque coefficient du second membre par zéro ; dit autrement, on remplace le second membre par la table matrice nulle de même format (ou taille).

Noti.
La *matrice augmentée* d'un système linéaire (« SL » dans la suite) de matrice A et de second membre B est la matrice obtenue en joignant à la fin de chaque ligne le coefficient du second membre correspondant ; on la note $(A|B)$.

Exem.
La matrice augmentée du système linéaire ci-haut s'écrit

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{array}\right].$$

Rema.
Le SL

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2025 \\ -5x - 6y - 7z = 2026 \end{cases}$$

admet pour écriture matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}}_{B},$$

ou encore $AX = B$.

Rema.
Le SL précédent est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y+4z+2025(-1)=0 \\ -5x-6y-7z+2026(-1)=0 \end{cases}$$

lequel s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou encore

$$(A|B)\begin{pmatrix} X \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{2,1},$$

ou encore

$$\begin{cases} (A|B)\begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} = 0_{2,1} \\ t=-1 \end{cases}.$$

Défi. (Opérations (inversibles) élémentaires)
Voici les trois classes d'opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire d'une table matrice :
1. L'*échange* des lignes L_i et L_j (ligne d'indice i et ligne d'indice j) avec $i \neq j$: $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. La *multiplication* (ou *dilatation*) de la ligne L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. L'*ajout* (ou *transvection*) à la ligne L_i du produit de L_j par $\mu \in \mathbb{R}$, avec $i \neq j$: $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$.

Exem.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ donné. On a la chaîne d'équivalences suivante :

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 3x-y+z=2 \\ -x-y+3z=-5 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -x-y+3z=-5 \\ 3x-y+z=2 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=3 \\ y+2z=-2 \\ -7y+4z=-7 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ \quad y + 2z = -2 \\ \quad\quad 18z = -21. \end{cases}$$

Défi. (Produit d'une matrice rectangulaire par une colonne)
On considère $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$; puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (AX)_{i,1} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} X_{k,1} = A_{i,1} X_{1,1} + A_{i,2} X_{2,1} + \cdots + A_{i,p} X_{p,1}.$$

Repr.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,1} \\ X_{2,1} \\ \vdots \\ X_{p,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}X_{1,1} + A_{1,2}X_{2,1} + \cdots + A_{1,p}X_{p,1} \\ A_{2,1}X_{1,1} + A_{2,2}X_{2,1} + \cdots + A_{2,p}X_{p,1} \\ \vdots \\ A_{n,1}X_{1,1} + A_{n,2}X_{2,1} + \cdots + A_{n,p}X_{p,1} \end{bmatrix}$$

Exem.
Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -8 & 12 & -5 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

$$AX = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ -8 \cdot (-1) + 12 \cdot 4 - 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Défi.
On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents au sens des opérations élémentaires* lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par un certain enchaînement d'opérations élémentaires sur les lignes.

Rema.
Si deux systèmes linéaires sont équivalents au sens des opérations élémentaires, alors ils sont équivalents au sens de la logique. La réciproque est vraie pour deux systèmes de même format.

Prop.
Deux systèmes linéaires équivalents admettent le même ensemble de solutions.

Défi.
Deux matrices sont *équivalentes en lignes* lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par un enchaînement d'opérations élémentaires sur les lignes.

Rema.
Deux systèmes linéaires sont équivalents si, et seulement si, leurs matrices augmentées sont équivalentes en lignes. Le cas échéant, les suites d'opérations élémentaires sont les mêmes.

Appl.
Posons

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right].$$

C'est la matrice augmentée du dernier système. On a cette chaîne d'équivalences en lignes :

$$\begin{aligned} M \underset{L}{\sim} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \underset{L}{\sim} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ \underset{L}{\sim} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -21 \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2. \end{aligned}$$

19.2 Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Exem. (Résolution par substitutions)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné.
1. On a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = x^2 \\ 2x + x^2 = -1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = (-1)^2 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (-1, 1).$$

2. Avec un système linéaire cette fois,

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ 2y + y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ y = -1/3 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (-1/3, -1/3).$$

Exem. (Résolution par combinaisons)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné. On a

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3y = -1 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{\iff} \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = -1/3 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x = 1/3 \\ y = -1/3 \end{cases}$$

Noti.
On appelle *pivot* d'une matrice ligne qui n'est pas entièrement nulle son premier coefficient non nul (à partir de la gauche).

Exem.
Le pivot de la ligne $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2026 \end{bmatrix}$ est égal à -2.

Noti. (Matrice échelonnée en lignes)
- Si une de ses lignes est entièrement nulle, alors chacune des lignes suivantes le sont aussi.
- À partir de la deuxième ligne, dans chacune des lignes non entièrement nulles, le pivot est à droite du pivot précédent.

Exem.
1. Voici une matrice non échelonnée en lignes :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Voici une matrice échelonnée en lignes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Défi.
On dit qu'une table matrice est *échelonnée réduite en lignes* lorsque chacun de ses pivots est égal à 1 et qu'il est l'unique coefficient non nul de sa colonne.

Exem.
1. Voici une matrice échelonnée réduite en lignes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Elle est obtenue à partir de la matrice précédente par la chaîne d'opérations élémentaires $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$).

Prop.
Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une matrice échelonnée réduite en lignes, laquelle est unique.

Méth. (Trouver l'unique matrice échelonnée réduite en lignes associée à un système linéaire donné à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan)
On donne une matrice rectangulaire à coefficients réels. On demande de retourner une matrice équivalente à la matrice initiale qui soit échelonnée réduite en lignes.

a) On donne

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -11/2 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{-2}{11}L_2 \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \end{array} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_2
\end{aligned}.$$

b) On donne

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -8 & -7 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
M &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & -9 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\
&\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -47/3 & -31/3 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3}L_2 \quad \text{[Matrice échelonnée]} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 8/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{-3}{47}L_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_1 \leftarrow \frac{-1}{3}L_1 \end{array} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 27/47 \\ 0 & 1 & 0 & -36/47 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{8}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{3}L_3 \end{array}
\end{aligned}$$

$$\underset{L}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&3/47\\0&1&0&-36/47\\0&0&1&31/47\end{bmatrix}\quad L_1 \leftarrow L_1-\left(\frac{-2}{3}\right)L_2\quad \text{[Matrice échelonnée réduite].}$$

Voici un énoncé de la procédure suivie ci-dessus, d'après l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

Étape 1 : Échelonnement
Tant que la matrice à traiter est non vide :
1. Si la première colonne est nulle on traite la (sous-)matrice obtenue en supprimant cette colonne ;
2. Sinon, par un échange de lignes, on place le premier coeff non nul de cette première colonne en première ligne.
3. En ajoutant à chaque ligne autre que la première un multiple de la ligne 1, on place des zéros partout ailleurs sur la colonne 1. Puis on traite la (sous-)matrice obtenue en supprimant à la fois la première colonne et la première ligne.

Fin tant que.

Étape 2 : Réduction d'une matrice échelonnée en lignes
4. On multiplie chaque ligne non nulle par l'inverse de son pivot.
5. Pour chaque ligne non nulle, on ajoute un de ses multiples à toute ligne au-dessus en sorte que son pivot soit le seul coefficient non nul de sa colonne.

La matrice finale est la matrice cherchée.

19.3 Résolution d'un système linéaire

Noti.
Soit x_1, x_2, x_3, x_4 des inconnues variables de $\mathbb{R}$. Ainsi, pour le SL

$$(S)\begin{cases}1x_1-2x_3+4x_4=3\\ \qquad\qquad 1x_2-x_4=8\end{cases}$$

x_1 et x_2 sont les deux *inconnues principales* tandis que x_3 et x_4 sont les deux *inconnues secondaires.*
Résolvons ce système.

$$(S)\iff\begin{cases}x_1=3+2s-4t\\ x_2=8+t\\ x_3=s\\ x_4=t\end{cases}\quad ;\quad (s,t)\in\mathbb{R}^2$$

De manière générale, les inconnues principales sont les inconnues de rangs des pivots de l'unique matrice échelonnée réduite en lignes.

Prop.
Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$; puis un SL de matrice A. Si $r\in\mathbb{N}$ le nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée réduite en lignes équivalente à A, alors $r\leqslant n,p$ et le système admet r inconnues principales et $p-r$ inconnues secondaires.

Défi.
1. On appelle *rang* d'une matrice l'entier naturel égal au nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite en lignes.
2. On appelle *rang* d'un système linéaire le rang de sa matrice.

Exem.
1. Le rang de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est égal à 0.
2. D'après les calculs ci-dessus, la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -8 & -7 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ est de rang égal à 3.
3. On a
$$\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2025 & -2 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -2026 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Rema.
Toute matrice échelonnée en ligne est de rang égal à son nombre de lignes non nulles.

Défi.
On dit qu'un système linéaire est *compatible* lorsqu'il admet au moins une solution. Sinon il est *incompatible.*

Méth. (Décider si un système linéaire est compatible en déterminant des conditions de compatibilité)
Soit le système
$$(S)\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 8 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$
d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$. On a
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right]$$
$$\underset{L}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 7 & -29 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -82/5 \end{array}\right] \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{5}L_2.$$

Ainsi,

$$(S) \iff \begin{cases} 1x - 1y = 8 \\ 0x + 5y = -9 \\ 0x + 0y = -82/5 \end{cases}.$$

Donc le système est incompatible à cause de sa dernière équation.

Prop. (Compatibilité d'un SL)
1. Soit un système échelonné de rang r, à n lignes. Il est compatible si, et seulement si, les seconds membres de ses $n - r$ dernières équations sont nuls.
2. Pour deux systèmes équivalents, l'un est compatible si, et seulement si, l'autre est compatible.

Appl. (Second membre à paramètre)
Soit le SL

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y = a \\ x - y = b \\ 4x + 3y = c \end{cases}$$

d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ et de paramètres a, b, c.
Q : Condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que (S) soit compatible ?
On a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & a \\ 1 & -1 & b \\ 4 & 3 & c \end{array}\right]$$

$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a \\ 4 & 3 & c \end{array}\right] \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 0 & 5 & a - 2b \\ 0 & 7 & c - 4b \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 0 & 5 & a-2b \\ 0 & 0 & \frac{7}{5}a-\frac{6}{5}b+c \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{5}L_2.$$

R : (S) est compatible si, et seulement si, $0 = \frac{-7}{5}a - \frac{6}{5}b + c$, si, et seulement si, $-7a-6b+5c=0$. Pour $(a,b,c)=(7,8,3)$, le système est incompatible : $-7(7)-6(8)+5(3)=-82$.

Prop. (Structure de l'ensemble des solutions)
Étant donnée une solution particulière d'un système linéaire, on obtient toutes les solutions en lui ajoutant les solutions du système linéaire homogène associé.

Prop. (Rang et nombre de solutions)
- Si le rang est égal au nombre d'équations, alors il y a au moins une solution.
- Si le rang est égal au nombre d'inconnues, alors il y a au plus une solution.

Rema.
C'est que la fonction $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto AX$ est surjective, injective ou bijective selon les cas.

Prop. (Système linéaire d'ordre 2 bien posé)
Soit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}),$$

puis un système linéaire de matrice A. Ainsi, ce système admet exactement une solution si, et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{i.e. } ad-bc \neq 0).$$

Auquel cas, $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Appl.
On souhaite résoudre le système suivant d'inconnues x, y en fonction des paramètres x', y' :

$$\begin{cases} 2x-3y = x' \\ 5x+4y = y' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{23}(4x'+3y') \\ y = \dfrac{1}{23}(-5x'+2y'). \end{cases}$$

19.4 Liste de colonnes à n lignes

Objet
Mettre en œuvre l'étude des systèmes linéaires pour :
- Décider si plusieurs listes de réels sont linéairement dépendantes ou non.
- Décider si une liste de réels est combinaison linéaire de plusieurs listes données de réels.

Défi.
Soit $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de p éléments de $\mathbb{R}^n$. On appelle *combinaison linéaire* de cette famille $\mathcal{F}$ tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ qu'on peut écrire

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{v}_p$$

pour une certaine famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de p réels.

Nota.
On note

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{v}_p\}\,.$$

Défi.
Soit $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *liée* lorsque

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \end{cases}.$$

Rema.
$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ signifie

$$\exists i_0 \in [\![1, p]\!], \quad \lambda_{i_0} \neq 0.$$

Rema.
« $\mathcal{F}$ *libre* » signifie « $\mathcal{F}$ non liée », i.e.

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0} \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0).$$

Prop. (Dépendance linéaire et SL)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ de $\mathbb{R}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), les propositions suivantes sont équivalentes :
a) La liste de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est libre.
b) Le système linéaire $AX = 0$ admet pour seule solution la colonne nulle (solution triviale).
c) La matrice A est de rang égal à p.

Rema.
Dire que $\vec{v}_1\binom{1}{2}$, $\vec{v}_2\binom{3}{4}$ et $\vec{v}_3\binom{5}{6}$ sont linéairement indépendants veut dire que

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Note : ici c'est faux).

Défi.
On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p)$ de p éléments de $\mathbb{R}^n$ est *génératrice* de l'espace $\mathbb{R}^n$ ou que ses vecteurs *engendrent linéairement* $\mathbb{R}^n$, pour dire que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}).$$

Exem.
1. $\mathrm{Vect}\left(\binom{1}{0}\right) \neq \mathbb{R}^2$ car $\binom{0}{1} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Vect}\left(\binom{1}{0}\right)$. Donc la famille $\left(\binom{1}{0}\right)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathrm{Vect}\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right) = \mathbb{R}^2$; en effet, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} = \binom{x}{0} + \binom{0}{y} = x\binom{1}{0} + y\binom{0}{1}$.

Prop. (Famille génératrice et SL)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est la matrice dont les colonnes à n lignes sont les coordonnées de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ de $\mathbb{R}^n$ où $p \in \mathbb{N}^*$, les propositions suivantes sont équivalentes :
a) La liste de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p)$ est génératrice de l'espace $\mathbb{R}^n$.
b) Le système linéaire $AX = B$ est compatible, quel que soit la colonne à n lignes B.
c) La matrice A est de rang égal à n.

Rema.
« $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ » signifie

$$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \exists (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_p\vec{v}_p = \vec{b}.$$

Cela signifie encore

$$\forall \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \exists \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

20 Fondements 7 : entiers naturels et dénombrement

20.1 Ensemble fini

Noti.
On dit qu'un ensemble non vide est *fini* lorsqu'on peut ranger ses éléments d'un premier à un dernier.

Défi.
Un ensemble E non vide est dit *fini* si, et seulement si, on peut trouver au moins un entier naturel n non nul tel que les ensembles E et $[\![1, n]\!]$ soient en bijection.

Exem.
Soit $m, n \in \mathbb{Z}$.
1. Si $n - m \geqslant 2$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\} &\longrightarrow [\![1, n-1-m]\!] \\ x &\longmapsto r = x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$[\![1, n-1-m]\!] \longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\}$$

$$r \longmapsto m + r.$$

2. Idem, si $n - m \geqslant 0$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant x \leqslant n\} &\longrightarrow [\![1, 1+n-m]\!] \\ x &\longmapsto r = 1 + x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$[\![1, 1+n-m]\!] \longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant x \leqslant n\}$$

$$r \longmapsto n - 1 + r.$$

Noti. (Principe des tiroirs)
Si on range $n + 1$ cailloux dans n boîtes, alors une des boîtes contiendra plus d'un caillou. La négation serait absurde.

Prop. (Principe des tiroirs)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute fonction de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est non injective.

Prop. (Unicité du cardinal)
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. S'il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$, alors $n = p$, et réciproquement.

20.2 Cardinal d'un ensemble fini

Défi.
Le *cardinal* d'un ensemble fini E non vide est l'unique entier naturel n non nul tel que E est en bijection avec $[\![1, n]\!]$.

Noti.
Le cardinal de E est le nombre de ses éléments.

Nota.
On le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.

Rema.
$\mathrm{Card}(\varnothing) \coloneqq 0$.

Prop.
Si un ensemble fini est en bijection avec un second ensemble, alors le second est fini et de même cardinal.

Prop.
Si les cardinaux des parties finies d'un ensemble sont tous majorés par un même entier naturel, alors l'ensemble est fini et de cardinal majoré par cet entier.

Prop.
Les ensembles infinis sont ceux dont les cardinaux des parties finies ne sont pas majorés.

Prop.
Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini de cardinal inférieur, et s'il y a égalité des deux cardinaux, alors la partie est égale à l'ensemble tout entier.

Prop.
Les parties finies des entiers naturels sont les parties majorées.

Rema.
Les parties finies des entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont les parties bornées.

20.3 Fonctions et ensembles finis

Prop.
Si une fonction arrivant dans un ensemble fini est injective, alors son ensemble de départ est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui d'arrivée.

Prop.
Si une fonction partant d'un ensemble fini est surjective, alors son ensemble d'arrivée est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui de départ.

Rema.
C'est-à-dire que si $f : E \to F$ est surjective avec E fini, alors F est fini et $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.

Prop.
Pour qu'une fonction entre deux ensembles de même cardinal soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

Rema.
Par analogie, étant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pour que la fonction linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

20.4 Parties finies d'un même ensemble

Prop. (Réunion finie de parties finies disjointes)
1. Si A et B sont deux parties finies et disjointes de E, alors $A \sqcup B$ est finie et

$$\mathrm{Card}(A \sqcup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

2. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ puis des parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjointes deux à deux. Alors

$$\mathrm{Card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i).$$

Prop. (Lemme des bergers ou partition égalitaire)
Un ensemble fini à n éléments étant mis en parties disjointes de même cardinal n', le nombre n' d'éléments par partie, multiplié par le nombre p de parties, produit le nombre n d'éléments de l'ensemble tout entier :

$$n' \times p = n.$$

Prop. (Correspondance « p à 1 »)
Soit deux ensembles non vides E et F, puis $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Supposons
- E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$;
- tout élément de $f(E)$ admet exactement n' antécédents.

Ainsi,
- $f(E)$ est fini de cardinal $p \in \mathbb{N}$;
- $n' \times p = n$.

Prop.
Soit un ensemble fini E, puis $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors $\bar{A} \in \mathcal{P}(E)$ et

$$\mathrm{Card}(\bar{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

Prop.
Si $A \in \mathcal{P}(E)$ est finie et $B \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \setminus B \in \mathcal{P}_f(E)$ (ensemble des parties finies) et

$$\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Prop.
Si $A, B \in \mathcal{P}_f(E)$, alors $A \cup B \in \mathcal{P}_f(E)$ et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Prop.
Si $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathcal{P}_f(E)$ alors $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p \in \mathcal{P}_f(E)$ et

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \leqslant \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \dots + \mathrm{Card}(A_p).$$

Il y a égalité si, et seulement si, les A_k sont disjointes deux à deux.

Rema.
1. $A_1 \cup A_2 = B_1 \sqcup B_2$ où $B_1 = A_1 \subset A_1$ et $B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2 \subset A_2$.
2. $A_1 \cup \dots \cup A_p = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_p$ où $B_1 = A_1$, $B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2$, $B_3 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$, $\dots$, $B_p = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{p-1}} \cap A_p$.

20.5 Opérations externes sur les ensembles finis

Prop.
1. Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

2. Plus généralement, si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont p ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est fini et

$$\mathrm{Card}\left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \dots \times \mathrm{Card}(E_p).$$

Prop.
Soit deux ensembles non vides E et F. Si E et F sont finis alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Rema.
On note aussi $\mathcal{F}(E,F) = F^E$, ce qui donne

$$\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Prop. (Ensemble des parties)
Si E est fini, alors l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Rema.
$\mathcal{P}(E) \simeq \{0,1\}^E$ où $\{0,1\}^E$ est constitué des familles $(x_e)_{e\in E}$ d'éléments de $\{0,1\}$ indexées par E.

20.6 Formules combinatoires

Nota.
- $\mathcal{P}(n)$ désigne les parties de $[\![1,n]\!]$.
- $\mathcal{P}_p(n)$ désigne les parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p.

Exem.
$\{2;7\} \in \mathcal{P}_2(9)$.

Prop.
Soit $n \in [\![0,+\infty[\![$, puis $p \in [\![0,n]\!]$. Ainsi,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{n-p}(n)).$$

(cf. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$)

Prop.
Si $p,n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n-1)) + \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1)).$$

(cf. $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$)

Prop.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(n)) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n)).$$

Prop. (Formule du chef)
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. On a

$$p \cdot \mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1)) \cdot n.$$

Démo.
On considère n personnes auxquelles on assigne des numéros respectifs de 1 à n. On veut dénombrer les groupes possibles de p personnes comportant un chef.

Première manière :
- On choisit simultanément p personnes parmi ces n personnes : il y a $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n))$ choix possibles.
- Puis on choisit un chef parmi les p personnes ci-avant : il y a p choix possibles.

Ainsi, il y a $p \times \mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(n))$ groupes possibles.

Seconde manière :
- On choisit une personne parmi les n personnes que l'on nomme chef : il y a n choix possibles.
- Puis on choisit simultanément les $p-1$ personnes restantes parmi les $n-1$ restants (ce sont les suiveurs du chef) : il y a $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1))$ choix possibles.

Ainsi, on trouve $n \times \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1))$ groupes possibles.

L'égalité des deux dénombrements fournit le résultat attendu.

20.7 Listes d'éléments d'un ensemble fini

Prop. (Liste de p éléments parmi n)
Le nombre n^p est égal :
- au nombre de façons de choisir, successivement à p reprises ou en p fois et avec remise, un élément parmi n ;
- au nombre de fonctions d'un ensemble de p éléments vers un ensemble de n éléments.

Prop. (Listes de p éléments distincts pris parmi n)
Le nombre $n(n-1)\cdots(n-(p-1))$ est égal :
- au nombre de façons de choisir successivement à p reprises, ou en p fois, et sans remise, un élément parmi n ;
- au nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Rema.
Si $p = n$, ce nombre correspond au nombre de façons d'ordonner ou de permuter n éléments distincts.

Prop. (Listes croissantes de p éléments distincts pris parmi n)
Le nombre $\binom{n}{p}$ est égal :
- au nombre de façons de choisir simultanément, ou en une seule fois, p éléments parmi n (sans égard à leur ordre) ;
- au nombre de parties de p éléments d'un ensemble de cardinal n.

21 Droite réelle et suites numériques 1

21.1 Droite réelle achevée totalement ordonnée

Noti.
Les ensembles de nombres usuels sont supposés connus et maîtrisés, ils respectent la chaîne d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

À titre d'exemple,
- $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
- $1/10 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$;
- $1/3 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Prop.
Toute suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de la droite réelle peut être rangée par ordre croissant (respectivement décroissant) : il existe une unique suite $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ qui est croissante (respectivement décroissante) et qui partage les mêmes éléments, en tenant compte de leurs occurrences.

Noti.
On appelle *distance* entre deux réels a et b le réel positif

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a-b \geq 0 \\ b-a & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut également écrire $|a-b| = \max(a,b) - \min(a,b)$.

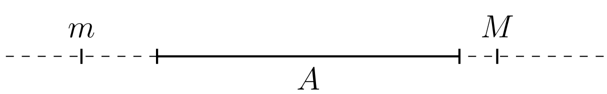
Défi.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
- On dit qu'un réel M est un *majorant* de A si

$$\forall a \in A, \quad a \leq M.$$

- On dit qu'un réel m est un *minorant* de A si

$$\forall a \in A, \quad a \geq m.$$

Figu.



Défi.
Soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un réel M est un *majorant* de f s'il est un majorant de l'ensemble de ses valeurs $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$. Autrement dit,

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leq M.$$

De même, un réel m est un *minorant* de f si : $\forall x \in E, \quad f(x) \geq m$.

Exem.
- La fonction cos admet 1 pour majorant ; elles majorée par 1.
- La fonction réelle ln n'est pas majorée.

Rema.
Si M est un majorant d'une partie A, alors tout réel $M' \geq M$ est également un majorant de A. Cette propriété est analogue pour les minorants.

Défi.
On dit qu'un réel a^+ est le *maximum* d'une partie A non vide de $\mathbb{R}$ pour dire que

$$\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq a^+ \\ a^+ \in A. \end{cases}$$

Défi.
On adapte pour le *minimum.*

Défi.
On adapte pour la partie de $\mathbb{R}$ que constitues les valeurs d'une fonction.

Nota.

$$\max(A) \ ; \qquad \max\{f(x) : x \in I\} \ ; \qquad \max_{x \in I} f(x) \ ; \qquad \max_I f.$$

Exem.
Le nombre 2026 est un majorant de $[0, 2026[$ qui n'est pas le maximum, et 0 est le minimum de l'ensemble.

Défi.
On dit qu'un réel M^- est la *borne supérieure* d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ si M^- est le plus petit des majorants de A :
- $\forall a \in A, \quad a \leq M^-$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad (\forall a \in A, \quad a \leq \mu) \implies \mu \geq M^-$.

Rema.
Dans la pratique, on considère le plus souvent la contraposée de l'implication ci-haut :

- $\forall a \in A, \quad a \leq M^-$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu < M^- \implies (\exists a \in A, \quad a > \mu)$.

Exem.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\max(\cos(x)) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\min(x^2 + x + 1) = \frac{3}{4}$.

Rema.
La borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours définie : il est nécessaire que A soit à la fois non vide et majorée.

Nota.
- $\sup A, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
- $\sup\{f(x) : x \in I\} = \sup\limits_{x \in I} f(x) = \sup\limits_{I} f, \quad f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ou $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ avec $I \subset E$;
- $\sup f = \sup\limits_{E} f$ pour $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

Exem.
1. $0 = \sup]-\infty, 0] = \max]-\infty, 0]$.
2. $0 = \sup]-\infty, 0[$; partie sans maximum.
3. Soit $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$. Ainsi, $1 = \sup f = \max f$, et $0 = \inf f = \min f$.

Défi.
On dit qu'un réel m^+ est la *borne inférieure* d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ pour dire que m^+ est le plus grand des minorants de A :
- $\forall a \in A, \quad a \geq m^+$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad (\forall a \in A, \quad a \geq \mu) \implies \mu \leq m^+$.

Rema.
C'est que :
- $\forall a \in A, \quad a \geq m^+$;
- $\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu > m^+ \implies (\exists a \in A, \quad a < \mu)$.

Rema.
Soit $m^+, M^- \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$.
- $M^- = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq M^- \\ \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu < M^- \implies (\exists a \in A, \quad \mu < a \leq M^-). \end{cases}$
- $m^+ = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \geq m^+ \\ \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu > m^+ \implies (\exists a \in A, \quad m^+ \leq a < \mu). \end{cases}$

Prop. (Axiome de la borne supérieure dans $(\mathbb{R}, \leq)$)
Si une partie des nombres réels est non vide et majorée alors elle admet une borne supérieure.

Prop. (Axiome de la borne inférieure dans $(\mathbb{R}, \leq)$)
Si une partie des nombres réels est non vide et minorée alors elle admet une borne inférieure.

Rema.
On a :
- si $\sup A$ existe, alors $-\sup A = \inf(-A)$;
- si $\inf A$ existe, alors $-\inf A = \sup(-A)$.

Prop. (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)
Toute partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x \leq y \implies [x, y] \subset A.$$

Prop. (Propriété d'Archimède)
Si $0 < a \leq b$ alors on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $b/n < a$ et $b < na$.

Défi.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \max\{e \in \mathbb{Z} \mid e \leq x\} = \max(]-\infty, x] \cap \mathbb{Z})$.

Prop. (Partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, les propositions que voici sont équivalentes :
- $e = \lfloor x \rfloor$;
- $e \leq x < e + 1$;
- $\exists f \in [0, 1[, \quad x = e + f$.

Prop.
Soit $x \in \mathbb{R}$ puis $p \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, il existe un unique nombre décimal D_p tel que $D_p \leq x < D_p + 10^{-p}$ avec $10^p D_p \in \mathbb{Z}$. C'est la valeur approchée décimale par défaut, à précision 10^{-p}, du réel x.

Rema.
Plus bas, $x = \lim\limits_{p \to +\infty} D_p$; tout réel peut s'obtenir comme la limite d'une suite de nombres décimaux.

21.2 Généralités sur les suites réelles

Défi.
Une *suite* dans $\mathbb{R}$ est une fonction de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.

Nota.
$[\![n_0, +\infty[\![\to \mathbb{R}, \quad n \mapsto u_n$; $(u_n : n \in [\![n_0, +\infty]\!])$; $(u_n)_{n \in [\![n_0, +\infty[\![}$; $(u_n)_{n \geq n_0}$.

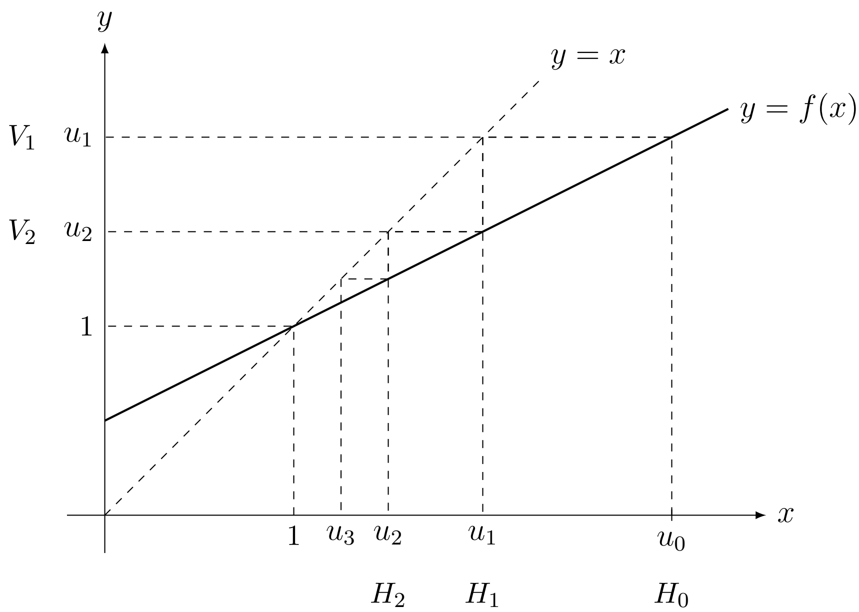
Nota.
L'ensemble des suites dans $\mathbb{R}$ indexées par $\mathbb{N}$ est notée $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exem.
$(n^2)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Nota.
$(n^2)_{n\geq 0} = (0^2, 1^2, 2^2, \dots)$.

Méth. (Représenter graphiquement des termes d'une suite)
Représentation des premiers termes de l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2} \end{cases}.$$



Procédure pour placer les points $H_n(u_n, 0)$:
Ayant placé $H_n(u_n, 0)$, on place le point $V_{n+1}(0, u_{n+1})$ sur l'axe des ordonnées à l'aide de la courbe d'équation $y = f(x)$ sachant que $u_{n+1} = f(u_n)$; puis on place sur l'axe des abscisses $H_{n+1}(u_{n+1}, 0)$ à l'aide de la droite d'équation $y = x$.

Défi.
On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Défi.
Une suite réelle *croissante* définie à partir d'un rang n_0 est une fonction de $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante. On adapte pour la croissance stricte, la décroissance et la décroissance stricte.

Prop.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite est :
- croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$;

- strictement croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$;
- décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$;
- strictement décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$.

Rema.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La proposition $(\forall k \in [\![0, n]\!], \quad u_k \leq u_n)$ signifie $(\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \leq n \implies u_k \leq u_n)$.

Exer. (Étudier la monotonie)
Suite : $\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Posons $u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2^{-(n+1)} - u_n = 2^{-(n+1)} > 0.$$

Ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite est strictement croissante.

Exer.
Étudions la monotonie de la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}(1 - 2^{-k})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Posons $v_n = \prod_{k=1}^{n}(1 - 2^{-k})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'abord, $\forall k \in [\![1, n]\!], 1 - 2^{-k} > 0$.
Donc $v_n > 0$.
Ensuite, $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{v_n \cdot (1-2^{-(n+1)})}{v_n} - 1 = -2^{-(n+1)} < 0$.
D'où la suite est strictement décroissante.

Méth. (Étudier la monotonie d'une suite réelle en comparant deux termes consécutifs quelconques)
- Si le terme général se prête à des additions, alors on peut comparer les accroissements à 0.
- Si le terme général se prête à des multiplications et qu'il est strictement positif, alors on peut comparer les accroissements relatifs à 1.

Prop.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par deux constantes si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée par une constante.

Prop.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$. On a ainsi,
- si $a = 0$, (u_n) est constante ;
- si $a > 0$, (u_n) est strictement croissante ;
- si $a < 0$, (u_n) est strictement décroissante.

Dans tous les cas, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p + a \cdot (n - p)$.

Prop.
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et si
- $q - 1 = 0$ alors (u_n) est constante ;
- $q - 1 > 0$ alors (u_n) est strictement croissante ;
- $q - 1 < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Par ailleurs, on a $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p \cdot q^{n-p}$.

Défi.
On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=au_n+b.$$

Prop. (Terme général d'une suite arithmético-géométrique)
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-au_n=b$. Supposons $a\neq 1$. Ainsi on peut trouver une constante $c\in\mathbb{R}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\omega+ca^n$ où ω est l'unique constante telle que $\omega-a\omega=b$.

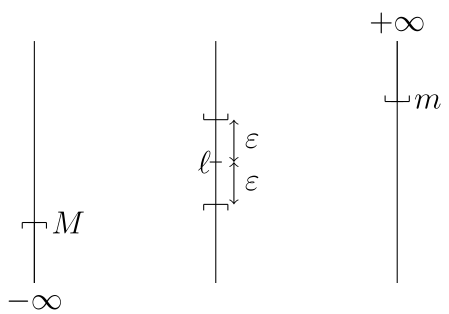
Exer.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{1+u_n}{2}\end{cases}$
On demande u_n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}$. (La méthode est similaire à celle des équations différentielles.)
Étape 1 : On a $\{(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}-\frac{1}{2}v_n=0\}=\{c(\frac{1}{2})^n : c\in\mathbb{R}\}$.
Étape 2 : La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}=(1)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n\in\mathbb{N},\ p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n=\frac{1}{2}$.
Étape 3 : En conclusion, pour $c\in\mathbb{R}$ tel que $u_0=1+c\cdot(\frac{1}{2})^0$, i.e. $c=1$.
On a $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=1+\frac{1}{2^n}$.

21.3 Limite, finie ou infinie, d'une suite réelle

Défi.
On appelle *voisinage* dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$ d'un élément ℓ une partie contenant au moins :
1. un intervalle centré $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$, où $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, si ℓ est fini ;
2. une section finissante $[m,+\infty]$, où $m\in\mathbb{R}$, si $\ell=+\infty$;
3. une section commençante $[-\infty,M]$, où $M\in\mathbb{R}$, si $\ell=-\infty$.

Exem.
1. $]-10^{-2026},10^{-2026}[$; $[-10^{-2026},10^{-2026}]$; et $[-1,1]\cup\{2026\}$ sont des voisinages de 0.
2. Les parties $[10^{2026},+\infty]$ et $\{0\}\cup[10^{2026},+\infty]$ sont deux voisinages de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Figu.



Défi.
On dit que $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ est une *limite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lorsque tout voisinage de ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang : pour tout voisinage arbitrairement petit de ℓ, on peut trouver un rang suffisamment grand à partir duquel le voisinage contient toute valeur de la suite.

Voca.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ : $(u_0, u_1, u_2, \dots) \to \ell$, ou encore que la suite admet pour limite ℓ. On dit que la grandeur u_n tend vers ℓ quand la grandeur entière n tend vers $+\infty$.

Ecriture symbolique
« ℓ est une limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » signifie :
- $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[, \quad \exists N_\varepsilon \in [\![0,+\infty[\![, \quad \forall n \in [\![N_\varepsilon,+\infty[\![, \quad u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$, si ℓ est finie ;
- $\forall m \in]-\infty,+\infty[, \quad \exists N_m \in [\![0,+\infty[\![, \quad \forall n \in [\![N_m,+\infty[\![, \quad u_n \in [m,+\infty]$, si $\ell = +\infty$;
- $\forall M \in]-\infty,+\infty[, \quad \exists N_M \in [\![0,+\infty[\![, \quad \forall n \in [\![N_M,+\infty[\![, \quad u_n \in [-\infty, M]$, si $\ell = -\infty$.

Rema. (Unification)
« La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$ » signifie

$$\begin{cases} \forall m \in \mathbb{R}, \quad m < \ell \implies (\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in [\![N,+\infty[\![, \quad m \le u_n) \\ \forall M \in \mathbb{R}, \quad M > \ell \implies (\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in [\![N,+\infty[\![, \quad M \ge u_n) \end{cases}.$$

Prop. (Unicité de la limite)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \end{cases}$$

alors $\ell' = \ell$.

Nota.
Par conséquent, on écrit $\ell = \lim(u_0, u_1, \dots) = \lim(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Rema.
- $[0,+\infty[$ n'est pas un voisinage de 0.
- Il se peut que $M \le \lim u_n$ pourtant il n'existe aucun rang à partir duquel $M \le u_n$. Par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1 - 10^{-n})$ et $M = 1$.

Prop. (Passage à la limite dans les inégalités larges)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $m \in \mathbb{R}$. Si à partir d'un certain rang $u_n \ge m$ et que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors $\ell \ge m$.

Défi.
Une suite réelle est dite *convergente* lorsqu'elle admet une limite réelle (finie). Sinon, elle est dite *divergente*.

Prop.
Si une suite réelle est convergente, alors elle est bornée.

Prop. (Suites bornées)
L'ensemble des suites réelles bornées est stable par addition, par multiplication pour tout réel, et par multiplication interne.

Prop. (Suites de limites nulles)
L'ensemble des suites réelles de limite nulle est stable par addition, multiplication par un réel, multiplication par une suite bornée.

21.4 Limites par opérations, par inégalités

Prop. (Somme de limites)
[...] Si chacune des limites suivantes existent dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}(u_n + v_n).$$

Rema.
1. Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors pour que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, il est suffisant qu'on puisse trouver $(\rho_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \rho_n$.
2. Ci-haut, les choix $\rho_n = |Z_n|$, pour $n \in \mathbb{N}$, conviennent.
   Si $\ell \in \mathbb{R}$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \iff u_n - \ell \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff u_n = \ell + \varepsilon_n$ avec (ε_n) de limite nulle.

Prop. (Multiplication par un réel)
[...]

$$\lambda \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \lambda u_n.$$

Prop. (Produit de limites)
Comme pour la somme.

Prop. (Quotient de limites)
Comme plus haut.

Prop. (Composition de limites)
Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $+\infty = \lim\limits_{k\to+\infty}(\varphi(k))$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} u_{\varphi(k)}.$$

Rema.
Pour toute variable k dans $\mathbb{N}$,
- $2k, \quad 2k+1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$;
- $k-1, \quad k+1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$;
- $k+(-1)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

Prop. (Théorème de la limite par encadrement)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Supposons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq u_n \leq b_n$). Ainsi,
1. si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent un même réel pour limite, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.
2. si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite, alors $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
3. si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $-\infty$ pour limite, alors $-\infty = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

21.5 Limites de suites réelles de référence

Prop.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors (u_n) est constante.
- Si $a > 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
- Si $a < 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

Prop.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.
- Si $q = 1$, alors (u_n) est constante.
- Si $q \in]-1, 1[$ (i.e. $|q| < 1$), alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Si $q \in]1, +\infty[$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ou $u_n \to -\infty$ ou elle est nulle.
- Si $q \in]-\infty, -1]$, alors soit (u_n) est nulle soit (u_n) n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Rema.
Pour tout $r \in [-1, +\infty[$,

$$(1+r)^n \to \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ 1 & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}.$$

Prop. (Croissances comparées)
$\forall a, b, c \in]0, +\infty[$,

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+a)^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{(1+a)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^c}{n^b}.$$

22 AL 2 : Calcul matriciel : opérations avec les matrices

22.1 Combinaisons linéaires

Défi.
On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute fonction de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.

Voca.
Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, l'image par la matrice M du couple (i,j) est appelée *coefficient* d'indice (ou de position) (i,j) de la matrice M ; il est noté de l'une de ces façons :

$$M_{i,j}\ ;\qquad (M)_{i,j}\ ;\qquad [M]_{i,j}.$$

Repr.

$$M=\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \cdots & M_{1,p}\\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & \cdots & M_{2,p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ M_{n,1} & M_{n,2} & M_{n,3} & \cdots & M_{n,p}\end{bmatrix}$$

On peut aussi employer des parenthèses.

Défi.
On appelle *taille* ou *format* d'une matrice l'unique couple (n,p) où n désigne le nombre de ses lignes et p le nombre de ses colonnes.

Exem.
La matrice $\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$ est de taille, ou de format $(3,1)$; elle est un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

Défi.
On parle de *matrice ligne* ou simplement de *ligne* lorsque la matrice ne comporte qu'une seule ligne. On adapte pour les colonnes.

Défi. (Somme d'un couple de matrices de <u>même taille</u>)
On considère un couple (A,B) de matrices de même taille $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle *matrice somme* de (A,B), qu'on note $A+B$, l'unique matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\quad (A+B)_{i,j}=(A)_{i,j}+(B)_{i,j}.$$

Exem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 1 & 11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Défi. (Produit par un scalaire)
Le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'unique matrice $\lambda \cdot A$ ou $A \cdot \lambda$, définie comme suit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda (A)_{i,j} = (A)_{i,j} \lambda = (A \cdot \lambda)_{i,j}.$$

Exem.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Nota.
On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tout coefficient est égal à 0.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (0_{n,p})_{i,j} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Noti.
Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on calcule avec l'addition interne « $+$ » et la multiplication par les nombres « . » comme on calcule dans notre espace naturel $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$. On dit que l'ensemble structuré $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un *espace vectoriel* sur $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Prop. (Règles de calcul dans $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$)
1. L'addition entre les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
   a. est associative :
   $$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (A+B)+C = A+(B+C) \ ;$$
   b. admet la matrice nulle $0_{n,p}$ pour unique élément neutre :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A + 0_{n,p} = A = 0_{n,p} + A \ ;$$
   c. admet pour toute matrice A un unique opposé noté $-A$:
   $$-A + A = 0_{n,p} = A + (-A) \ ;$$
   d. est commutative :
   $$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A + B = B + A.$$
2. La multiplication des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par les nombres :
   a. est distributive sur l'addition entre les nombres :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \ ;$$

b. est distributive sur l'addition entre les matrices :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B\ ;$$

c. est compatible avec la multiplication entre les nombres :

$$\begin{cases} \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad 1 \cdot A = A \\ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A \end{cases}.$$

Rema.
Si $(M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(\ell)})$ est une liste de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors on définit sa somme

$$\sum_{k=1}^{\ell} M^{(k)} = M^{(1)} + M^{(2)} + \cdots + M^{(\ell)}$$

comme pour les nombres et les vecteurs.

Défi. (Symbole de Kronecker)
Étant donné un couple (a, b) d'éléments d'un ensemble E, on pose

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b \\ 1 & \text{si } a = b \end{cases}.$$

Exem.
$\delta_{2,3} = 0\ ; \quad \delta_{2,3-1} = 1.$

Défi. (Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
On considère $(a, b) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. On appelle *matrice élémentaire* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de position (a, b), qu'on note $E_{a,b}$, la matrice définie comme suit :

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad (E_{a,b})_{i,j} &= \delta_{(a,b),(i,j)} \\ &= \delta_{a,i}\, \delta_{b,j} \\ &= \delta_{i,a}\, \delta_{b,j} \end{aligned}$$

C'est que tous ses coefficients sont égaux à 0 sauf celui de position (a, b) qui est égal à 1.

Exem.
Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{1,2}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{2,2}.$$

Cependant, dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, $\quad E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Rema.
$E_{a,b} = [\delta_{i,a}\,\delta_{j,b} : (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]] = [\delta_{i,a}\,\delta_{j,b}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Intr.
Soit $a, b \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+0 \\ 0+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \times 1 \\ a \times 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \times 0 \\ b \times 1 \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= aE_{1,1} + bE_{2,1}.\end{aligned}$$

Cette décomposition dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ se généralise à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme ci-après.

Prop. (Décomposition linéaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ainsi, la famille de $((M)_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de np éléments éléments de $\mathbb{K}$ est la seule telle que

$$M = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (M)_{i,j} E_{i,j}.$$

Rema.
On dit que la famille de np matrices $(E_{a,b})_{\substack{1 \leq a \leq n \\ 1 \leq b \leq p}}$ est une base (de décomposition linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ des éléments) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est la *base canonique* de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Rema.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = a_{1,1}E_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + a_{2,1}E_{2,1} + a_{2,2}E_{2,2}.$$

22.2 Produit

Défi. (Produit d'un couple de matrices de tailles adéquates)
On considère un couple (A, B) de matrices avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (le nb de col. de la première, « sa largeur », est égal au nombre de lignes de la seconde, « sa hauteur »). On

appelle *matrice produit* de (A, B) qu'on note $A \times B$, l'unique matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A \times B)_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}(B)_{j,k}.$$

Exem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 & 68 \\ 32 & 77 & 122 & 167 \end{pmatrix}$$

Prop. (Pseudo-associativité du produit matriciel)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Ainsi,

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{dans } \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})).$$

Prop. ((Pseudo-associativité du produit matriciel))
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Ainsi,

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{dans } \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})).$$

Nota.
On note ABC la valeur commune des expressions $(AB)C$ et $A(BC)$.

Prop.
Soit $n, p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit $E_{a,b} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $E_{c,d} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Ainsi,

$$E_{a,b} \times E_{c,d} = \delta_{b,c} E_{a,d}.$$

Rema. (Produits particuliers)
- Ligne par colonne :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p.$$

- Colonne par ligne :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_p \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_p \end{bmatrix}.$$

- Rectangle par colonne :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{bmatrix} = x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_pV_p$$

où $V_1, V_2, \dots, V_p$ sont les colonnes successives de la matrice strictement rectangulaire :

$$[V_1 \mid V_2 \mid \cdots \mid V_p] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_pV_p.$$

Intr.

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$. Alors

$$A \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A_{.,1} \quad ; \quad A \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A_{.,2} \ ;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times A = A_{1,.} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times A = A_{2,.}.$$

C'est que

$$\begin{cases} Ae_{1,1} = A_{.,1} \\ Ae_{2,1} = A_{.,2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e_{1,1}A = A_{1,.} \\ e_{1,2}A = A_{2,.} \end{cases} .$$

Prop.

1. Quand on multiplie à droite par $E_{i,j}$ (matrice carrée), on obtient une matrice de même taille dont toutes les colonnes sont nulles sauf éventuellement la colonne j qui est égale à la colonne i de la matrice de départ :

$$\underbrace{[C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_p]}_{A} \times \underbrace{[\vec{0}|\dots|\vec{0}|\vec{e_i}|\vec{0}|\dots|\vec{0}]}_{E_{i,j}} = [\vec{0}|\dots|\vec{0}|A\vec{e_i}|\vec{0}|\dots|\vec{0}]$$

où $\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots$

2. À gauche, seule la ligne i est éventuellement non nulle, et égale à la ligne de départ (placée en ligne i).

Rema.
On peut poser $\hat{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Donc

$$\begin{cases} \hat{e_i}\vec{e_j} = \delta_{i,j} \\ \vec{e_i}\hat{e_j} = E_{i,j} \end{cases}.$$

22.3 Matrices carrées

Défi.
Une matrice est dite *carrée* lorsque ses lignes sont autant que ses colonnes.

Nota.
$\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \overset{\text{not}}{=} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Voca.
On parle de matrice carrée d'ordre n pour dire « matrice de taille (n, n) ».

Repr.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

On note $\operatorname{diag}(A) = (a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$.

Défi.
La *matrice identité* d'ordre n est la matrice I_n telle que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad (I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}.$$

Prop.
1. On calcule dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ comme dans $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ (voir $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ plus haut).
2. On calcule dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ comme dans $(\mathbb{K}, +, \times)$, sauf que la multiplication interne « $\times$ » n'est pas commutative ($n \geq 2$) et ne possède pas la propriété du produit nul.
3. La multiplication par les nombres « $\cdot$ » est compatible avec la multiplication interne au sens où

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \begin{cases} \lambda(AB) = (\lambda A)B \\ \lambda(AB) = A(\lambda B) \end{cases}.$$

Prop. (Binôme de Newton)
Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent (i.e. $AB = BA$) alors

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad A^d - B^d = (A - B) \sum_{k=0}^{d-1} A^{d-1-k} B^k$$

$$\forall d \in \mathbb{N}, \quad (A + B)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} A^{d-k} B^k.$$

Rema.
$A^d = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{d \text{ fois}}$ (avec $A^0 = I_n$).

Défi.
Les *matrices scalaires* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices λI_n pour λ parcourant $\mathbb{K}$.

Rema.
- $\lambda I_n + \mu I_n = (\lambda + \mu) I_n$.
- $(\lambda I_n)(\mu I_n) = \lambda \mu I_n$.

Défi.
On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un *inverse* de A lorsque

$$\begin{cases} AB = I_n \\ BA = I_n \end{cases}.$$

Prop.
Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus un inverse.

Nota.
A^{-1} quand c'est défini.

Exem.
- 0_n n'est pas inversible.
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$; auquel cas $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

22.4 Matrices carrées de formes particulières

Défi.
On dit qu'une matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est

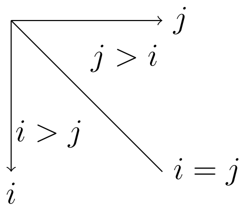
- *triangulaire supérieure* lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \implies (T)_{i,j} = 0 \;;$$

- *triangulaire inférieure* lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad j > i \implies (T)_{i,j} = 0.$$

Figu.



Exem.
1. Voici une triangulaire supérieure :
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$
2. Voici une triangulaire inférieure :
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nota.
$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Prop.
$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par addition, multiplication par tout nombre et par multiplication interne.

Prop.
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ ou si $A, B \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (AB)_{i,i} = (A)_{i,i}(B)_{i,i}.$$

Rema. (Attention !)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Défi.
On dit que $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \implies (D)_{i,j} = 0.$$

Rema.
Une matrice diagonale est une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure ;

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}).$$

Prop.
- L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par addition, par multiplication par les nombres et par multiplication interne.
- $\begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d'_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 d'_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n d'_n \end{bmatrix}.$

Prop.
1. $\left[\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{array}\right] \times \begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} d_1 C_1 & d_2 C_2 & \dots & d_p C_p \end{array}\right].$
2. $\begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} d_1 L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline d_n L_n \end{array}\right].$

Appl.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \end{bmatrix}.$$

23 Droite réelle et suites numériques 2

Contenu à paraître.

24 AL 3 : Calcul matriciel : matrices carrées inversibles

Contenu à paraître.

25 Probabilités sur un univers fini 1 : événements

Contenu à paraître.

26 Polynômes formels 1 : arithmétique

Contenu à paraître.

27 Fonction d'une variable réelle 3 : limite

Contenu à paraître.

28 AL 4 : Espaces vectoriels réels ou complexes

Contenu à paraître.

29 Fonction d'une variable réelle 4 : continuité

Contenu à paraître.

30 AL 5 : Applications linéaires entre EV's réels ou complexes

Contenu à paraître.

31 Fonction d'une variable réelle 5 : dérivabilité

Contenu à paraître.

32 Polynômes formels 2 : Racines réelles ou complexes

Contenu à paraître.

33 Probabilités sur un univers fini 2 : variables aléatoires

Contenu à paraître.

34 AL 6 : EV's réels ou complexes de dimensions finies

Contenu à paraître.

35 Fonction d'une variable réelle 6 : développements limités

Contenu à paraître.

36 AL 7 : Applications linéaires et représentations matricielles

Contenu à paraître.

37 Fonction d'une variable réelle 7 : intégration sur un segment

Contenu à paraître.

38 AL 8 : Classification des matrices par équivalence, similitude

Contenu à paraître.

39 Probabilités sur un univers fini 3 : espérance et variance

Contenu à paraître.

FIN

Revenir au début