

9. FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE 1 : ÉTUDE GLOBALE

9.1. Généralités

Noti. (Fonction et Ensemble de définition)

On appelle *fonction* d'une partie D de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} toute relation qui fait passer de tout nombre x de D à un unique nombre y de \mathbb{R} . Auquel cas, on note $y = f(x)$ si la fonction est appelée f .

Lorsque l'ensemble de départ n'est pas précisé, on appelle *ensemble de définition* de f l'ensemble des valeurs de la variable x dans \mathbb{R} pour lesquelles $f(x)$ existe.

Voc. (Restriction)

On dit qu'une fonction f possède une propriété sur une partie A quand sa *restriction* à A possède cette même propriété.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x - 1$ est positive sur $[2026, +\infty[$, ce qui signifie que la restriction $f|_{[2026, +\infty[}$ est à valeurs positives.

Défi. (Variations et Monotonie)

On considère une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dit que f est :

- **constante** quand : $\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad f(x) = c$.
- **croissante** quand : $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **strictement croissante** quand : $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
- **décroissante** quand : $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **strictement décroissante** quand : $\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

On dit que f est **monotone** quand elle est croissante ou décroissante (resp. **strictement monotone** pour les inégalités strictes).

Prop. (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $v \in \mathbb{R}$. Si v est compris entre deux valeurs de f , alors v est aussi une valeur de f .

Prop. (Théorème de la bijection continue)

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$. Supposons que :

- f est continue sur I ;
- f est strictement monotone sur I ;
- $f(I) = J$ (les limites aux bornes de I correspondent aux bornes de J).

Alors f réalise une bijection de I sur J . Elle admet une fonction réciproque $g : J \rightarrow I$ telle que :

$$y = f(x) \iff x = g(y) \quad (\text{pour } x \in I, y \in J).$$

9.2. Représentations graphiques

Prop. (Transformations affines)

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de $x \mapsto f(x)$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. **Translation** : La courbe de $x \mapsto f(x - a) + b$ est obtenue par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
2. **Symétrie axiale** : La courbe de $x \mapsto f(2a - x)$ s'obtient par symétrie d'axe $x = a$. La courbe de $x \mapsto 2b - f(x)$ s'obtient par symétrie d'axe $y = b$.
3. **Dilatation** : La courbe de $x \mapsto f(\lambda^{-1}x)$ est une dilatation horizontale de rapport λ . La courbe de $x \mapsto \mu f(x)$ est une dilatation verticale de rapport μ .
4. **Réciproque** : La courbe de la bijection réciproque f^{-1} s'obtient par symétrie axiale par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Méth. (Résolution graphique)

Soient \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes de f et g .

- Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
- Les solutions de $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points où \mathcal{C}_f est située en dessous de \mathcal{C}_g .

Défi. (Asymptotes)

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

- Une droite d'équation $y = c$ est **asymptote horizontale** en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$ (resp. $-\infty$).
- Une droite d'équation $x = c$ est **asymptote verticale** si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$.

9.3. Parité et Périodicité

Défi. (Parité)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- f est **paire** si : $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = f(x)$. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).
- f est **impaire** si : $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$. La courbe est symétrique par rapport à l'origine O .

Défi. (Périodicité)

Soit $T > 0$. On dit que f est **T -périodique** si :

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Si une plus petite période strictement positive existe, on l'appelle *la* période de f .

9.4. Bornes et Extrema

Défi. (Fonction bornée)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- f est **majorée** par $M \in \mathbb{R}$ si : $\forall x \in D, f(x) \leq M$.
- f est **minorée** par $m \in \mathbb{R}$ si : $\forall x \in D, f(x) \geq m$.
- f est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée (c'est-à-dire si $|f|$ est majorée).

Défi. (Extrema globaux)

- M est le **maximum global** de f sur D si : $(\forall x \in D, f(x) \leq M)$ et $(\exists x_0 \in D, f(x_0) = M)$.
- m est le **minimum global** de f sur D si : $(\forall x \in D, f(x) \geq m)$ et $(\exists x_0 \in D, f(x_0) = m)$.

On parle d'*extremum* pour désigner indifféremment un maximum ou un minimum.