

## 12 GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 2 : LE PLAN

### 12.1 Déterminant dans une base orthonormée directe

#### Noti.

On considère un plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Pour tout couple de vecteurs non nuls  $(\vec{u}, \vec{v})$  de  $\mathcal{P}$ , la notation  $(\vec{u}, \vec{v})$  désigne aussi une des mesures de l'angle orienté qui porte de la demi-droite  $[O, \vec{u})$  à la demi-droite  $[O, \vec{v})$ . Ces mesures sont égales modulo  $2\pi$ .

#### Prop.

Pour tous vecteurs non nuls  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  de  $\mathcal{P}$  :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \stackrel{=}{=}_{2\pi} (\vec{u}, \vec{w});$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \stackrel{=}{=}_{2\pi} -(\vec{v}, \vec{u}).$$

#### Défi. (Déterminant d'un couple de vecteurs)

Dans un plan orienté muni d'une base orthonormée directe, on appelle *déterminant* du couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  l'unique réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

#### Prop.

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où  $K$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur la perpendiculaire à  $(AB)$  en  $A$ .

#### Prop.

Ci-avant, la valeur absolue du  $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$  est égale à l'aire du parallélogramme de côtés  $[AB]$  et  $[AC]$ .

#### Prop.

Le déterminant est :

1. bilinéaire :

a. pour tout vecteur  $\vec{u}$ ,

$$\forall(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$$

b. pour tout vecteur  $\vec{v}$ ,

$$\forall(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \forall(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v});$$

2. antisymétrique :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2, \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

**Prop.**

Soit  $\mathcal{P}$  un plan muni d'une b.o.n.d. Soient deux vecteurs  $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

**Prop.**

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

## 12.2 Droites du plan

**Défi.**

Dans un plan  $\mathcal{P}$ , on considère un point  $A$  et un vecteur non nul  $\vec{v}$ . L'unique droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{v}$  est l'ensemble des points  $M$  tels que

$$\vec{AM} \in \mathbb{R}\vec{v} \quad \text{où} \quad \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

**Prop.**

Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan muni d'un r.o.n.d.

1. Il existe au moins un triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que la droite  $\mathcal{D}$  admette pour équation

$$ax + by = c$$

avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ . On parle d'*équation cartésienne*.

2. Réciproquement, pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(a, b) \neq (0, 0)$ , la partie du plan dont une équation est  $ax + by = c$  est une droite, laquelle est dirigée par le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

**Prop.** (Paramétrisation)

Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan.

1. On peut trouver au moins un couple  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et un couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que pour tout point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}.$$

2. Réciproquement, étant donné  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , l'ensemble

$$\left\{ M \begin{pmatrix} x_0 + t\alpha \\ y_0 + t\beta \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

est la droite passant par  $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et dirigée par  $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .

**Méth.** (Passage d'une équation à une paramétrisation)

Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère une droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $ax + by = c$ . Donnons-en une paramétrisation.

1. Choix d'un point simple  $A(x_0, y_0)$  appartenant à la droite. Pour cela, on fixe par exemple  $x = 0$  (alors  $y = c/b$ ).
2. Identification d'un vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

3. Ecriture de la paramétrisation :

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Méth.** (Passage d'une paramétrisation à une équation)

Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère la droite définie par

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Voie 1 : Soit  $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .  $M \in \mathcal{D} \iff A\vec{M}$  colinéaire à  $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ , avec  $A(\sqrt{2}, 8)$ .

$$\det(A\vec{M}, \vec{v}) = 0 \iff 3(x - \sqrt{2}) - (-5)(y - 8) = 0.$$

On développe et réduit pour obtenir  $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$ .

Voie 2 : Le vecteur  $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$  dirige la droite. Une équation est de la forme  $3x + 5y = c$ . Comme  $A\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ , on a  $c = 3\sqrt{2} + 40$ . D'où une équation :  $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$ .

**Méth.** (Intersection de deux droites)

Pour trouver le point d'intersection de deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , on distingue les cas selon la forme de leurs équations.

Cas 1 : Deux équations cartésiennes

On résout le système linéaire  $2 \times 2$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}.$$

Cas 2 : Une paramétrique et une cartésienne

Si  $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$  et  $\mathcal{D}_2 : ax + by = c$ . On injecte les expressions de  $x(t)$  et  $y(t)$  dans l'équation de  $\mathcal{D}_2$ . On obtient une équation d'inconnue  $t$ . Une fois  $t$  trouvé, on le reporte dans la paramétrisation pour avoir les coordonnées du point.

Cas 3 : Deux paramétriques

On cherche  $t$  et  $t'$  tels que  $M(t) = M(t')$ . Cela revient à résoudre

$$\begin{cases} x_0 + \alpha t = x'_0 + \alpha' t' \\ y_0 + \beta t = y'_0 + \beta' t' \end{cases}.$$

**Défi.** (Projeté orthogonal sur une droite)

On considère une droite  $\mathcal{D}$  d'un plan, puis un point  $M$  quelconque du même plan. On appelle *projeté orthogonal* de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  qui passe par  $M$ .

**Méth.** (Coordonnées d'un projeté orthogonal)

Soit une droite  $\mathcal{D}$  dirigée par  $\vec{u}$  et un point  $M$  hors de la droite. On cherche les coordon-

nées du projeté orthogonal  $H(x, y)$ . Le point  $H$  est l'unique solution du système caractérisant l'appartenance et l'orthogonalité :

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} & (\text{Vérifie l'équation de } \mathcal{D}) \\ \vec{MH} \cdot \vec{u} = 0 & (\text{Orthogonalité}). \end{cases}$$

*Exemple :* Soit  $\mathcal{D} : 4x + 6y = -3$  et  $M(-3, 2)$ . Un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  est  $\vec{u}(-6, 4)$ . La condition  $\vec{MH} \cdot \vec{u} = 0$  équivaut à dire que  $\vec{u}$  est un vecteur normal à la droite  $(MH)$ . L'équation de la perpendiculaire  $(MH)$  est donc de la forme  $-6x + 4y = k$ . Comme  $M(-3, 2) \in (MH)$ , on a  $k = -6(-3) + 4(2) = 18 + 8 = 26$ . On résout alors le système

$$\begin{cases} 4x + 6y = -3 \\ -6x + 4y = 26 \end{cases}$$

**Défi.** (Distance à une droite)

On considère un point  $M$  du plan et une droite  $\mathcal{D}$ . On dit qu'un réel positif  $d$  est égal à la distance du point  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$  lorsque  $d$  est la plus petite des distances entre  $M$  et les points de  $\mathcal{D}$  :

- $\exists P \in \mathcal{D}, MP = d$ ;
- $\forall P \in \mathcal{D}, MP \geq d$ .

On peut noter  $\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}$ .

**Prop.**

Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ , alors,

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = MH.$$

**Défi.** (Vecteur normal)

Un vecteur  $\vec{n}$  est dit *normal* à une droite  $\mathcal{D}$  s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

**Prop.** (Distance à l'aide d'un vecteur normal)

Soit  $\vec{n}$  un vecteur normal de  $\mathcal{D}$ . Pour tout point  $A \in \mathcal{D}$  et tout point  $M \in \mathcal{P}$ ,

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

**Prop.** (Vecteur normal et équation cartésienne)

Si  $\mathcal{D}$  admet pour équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$ , alors le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est normal à  $\mathcal{D}$ .

**Form.**

Si  $\mathcal{D}$  admet pour équation  $ax + by + c = 0$ , alors pour tout  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## 12.3 Cercles du plan

**Défi.**

Dans un plan  $\mathcal{P}$ , on appelle cercle de centre  $\Omega \in \mathcal{P}$  et de rayon  $r \in \mathbb{R}_+$  l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid \Omega M = r\}.$$

**Rema.**

- Le rayon du cercle est un nombre, tandis que les « rayons » désignent aussi les segments  $[\Omega M]$ .
- L'unique cercle de centre  $O$  passant par  $A$  est  $\mathcal{C}(O, OA)$ .
- L'unique cercle de diamètre  $[AB]$  est  $\mathcal{C}(I, \frac{AB}{2})$  où  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .

**Prop.** (Équation cartésienne)

1. Dans un r.o.n.d., le cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  avec  $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$  a pour équation

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2.$$

2. Réciproquement, pour l'ensemble d'équation  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + ax + by = c$ , si  $A \neq C$  ou si  $B \neq 0$ , ce n'est pas un cercle.

**Méth.** (Vérification d'une équation de cercle)

*Question :* Est-ce que l'ensemble  $(\Gamma) : 2x^2 + 2y^2 + 3x - 6y - 2 = 0$  est un cercle ?

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On normalise l'équation en divisant par 2 :

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - 3y - 1 = 0.$$

On reconnaît le début d'identités remarquables (mise sous forme canonique) :

- $x^2 + \frac{3}{2}x = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$  ;
- $y^2 - 3y = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ .

L'équation devient :

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0.$$

En isolant les carrés, on obtient :

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = K$$

avec  $K = \frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+36+16}{16} = \frac{61}{16}$ .

*Conclusion :* Comme  $K > 0$ , l'ensemble  $(\Gamma)$  est bien un cercle de centre  $\Omega(-3/4; 3/2)$  et de rayon  $R = \sqrt{K} = \frac{\sqrt{61}}{4}$ .

**Prop.** (Paramétrisation d'un cercle)

Le cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  avec  $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$  admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_\Omega + r \cos(\theta) \\ y = y_\Omega + r \sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$