12. Géométrie élémentaire 2 : Le plan

12.1. Déterminant dans une base orthonormée directe

Noti.
On considère un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Pour tout couple de vecteurs non nuls $(\vec{u}, \vec{v})$, la notation $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne aussi une des mesure de l'angle orienté qui porte de la demi-droite $[O, \vec{u})$ à la demi-droite $[O, \vec{v})$. Ces mesures sont égales modulo 2π.

Prop.
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \underset{2\pi}{=} (\vec{u}, \vec{w});$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{2\pi}{=} -(\vec{v}, \vec{u}).$$

Défi. (Déterminant d'un couple de vecteur à l'aide d'une projection orthogonale)
Dans un plan orienté muni d'une b.o.n.d., on appelle *déterminant* du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ l'unique réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Prop.
Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où K est le projeté orthogonal de C sur la perpendiculaire à (AB) en A.

Prop.
Ci-avant, la valeur absolue du $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ est égale à l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Prop.
Le déterminant est :
1. bilinéaire :
   a. pour tout vecteur $\vec{u}$,
   $$\forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$$
   b. pour tout vecteur $\vec{v}$,
   $$\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v}).$$
2. antisymétrique :
   $$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

Prop.
Soit un plan muni d'une b.o.n.d. Soient $\vec{v}_1 \binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{v}_2 \binom{x_2}{y_2}$. Ainsi,

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Prop.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

12.2. Droites du plan