

## 7. PLAN COMPLEXE 2 : EXPONENTIELLE ET TRIGONOMÉTRIE

### 7.1. Exponentielle complexe

**Défi.**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\exp(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(\operatorname{Re}(z)) (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z))).$$

**Prop.**

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} \quad \text{et} \quad e^{i(x-y)} = \frac{e^{ix}}{e^{iy}}.$$

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\iff z \in i2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = i2k\pi. \end{aligned}$$

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  (fixé). Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  (variable). Ainsi,

$$e^z = e^{z_0} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = z_0 + i2k\pi.$$

**Prop.**

Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  :

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Puis, si  $e^{z_2} \neq 0$  :

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}.$$

### 7.2. Nombres complexes de module 1

**Prop.**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Ainsi,

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad (a, b) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Nous avons l'équivalence

$$|z| = 1 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} z = a + ib \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}.$$

**Noti.**

On note  $\mathbb{U}$  l'ensemble des complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

**Prop.**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\theta}.$$

C'est que  $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ .

**Rema.**

Rappelons que  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ .

**Prop.**

Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ . Ainsi,

- $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$ .
- $\frac{1}{z_1} \in \mathbb{U}$ .
- $z_1 \neq 0, \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}$ .

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{U}$ . Ainsi,

- $\frac{1}{z} = \bar{z}$ ;
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ .

**Exem.**

Si  $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ , alors  $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

1.

$$\exists (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

2. Supposons que  $z \neq 0$ . Ainsi,

$$\exists! (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

**Défi.**

On considère  $z \in \mathbb{C}$ . On appelle *forme exponentielle* de  $z$  toute expression  $e^{i\theta} \rho$  égale à  $z$ , pour  $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

**Défi.**

On considère  $a \in \mathbb{R}^*$  fixé. On dit qu'un réel  $y$  est *congru* à un réel  $x$  *modulo*  $a$ , lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = x + ka,$$

que l'on note  $y \equiv x[a]$ .

**Prop.**

Soit  $(\theta_0, \rho_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  (fixé) et  $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  (variable). Ainsi,

$$e^{i\theta}\rho = e^{i\theta_0}\rho_0 \iff \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta \equiv \theta_0[2\pi] \end{cases}.$$

**Prop.** (Équation  $\exp(z) = w$ )

Soit  $w \in \mathbb{C}$  (fixé). Soit  $z \in \mathbb{C}$  (variable). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $\exp(z) = w$
2.  $w \in \mathbb{C}^*$  et

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln(\rho) + i\theta + i2\pi k$$

où  $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  est tel que  $e^{i\theta}\rho = w$ .

**Prop.**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  et tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\arg(rz) = \arg(z) \quad [2\pi].$$

**Défi.**

On dit qu'un réel  $\theta$  est un des *arguments* d'un complexe  $z$  non nul quand

$$\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{i\theta}\rho = z.$$

**Rema.**

C'est dire que  $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$ .

**Nota.**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ , on note  $\arg(z)$  pour un des arguments de  $z$  et  $\text{Arg}(z)$  pour celui qui tombe dans  $]-\pi, \pi]$ .

**Exem.**

- $\arg(0 + 3i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .
- $\arg(2 + 2\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3} [2\pi] = 60^\circ [360^\circ]$ .
- $\text{Arg}(4 - 4i) = -\frac{\pi}{4}$ .

**Prop.**

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ .

- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 [\pi]$ .
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

**Prop.** (Arguments d'un produit, d'un quotient)

Si  $z_1 = e^{i\theta_1}\rho_1$  et  $z_2 = e^{i\theta_2}\rho_2$  (non nuls). Alors

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi];$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi].$$

On a aussi

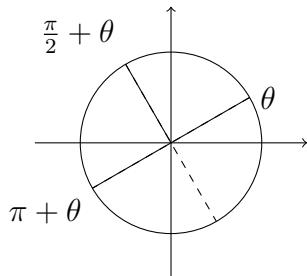
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$   $[2\pi]$  ;
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$   $[2\pi]$ .

### 7.3. Trigonométrie circulaire

#### Prop.

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Ainsi,

- $(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi)) = (-\cos \theta, -\sin \theta)$ .
- $(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta)) = (-\cos \theta, \sin \theta)$ .
- $(\cos(\frac{\pi}{2} + \theta), \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ .
- $(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta), \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)) = (\sin \theta, \cos \theta)$ .



#### Prop. (Formules d'addition)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Ainsi, d'une part,

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

D'autre part,

- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = -\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

#### Meth. (Retrouver les formules d'addition)

$$1. e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

$$2. e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

En égalisant ces expressions, on obtient promptement par identification ce que l'on cherche.

Pour les formules avec  $(a - b)$ , il suffit de remplacer  $b$  par  $-b$ .

#### Prop. (Formule de duplication)

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Ainsi,

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ .
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$ .

#### Prop. Formule de Moivre

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Ainsi,

$$(\cos \theta + i\sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

**Prop.** (Puissance  $n$ -ième d'une somme, pour  $n$  petit)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Ainsi,

- $(a + b)^0 = 1$
- $(a + b)^1 = 1a + 1b$
- $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- $(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
- $(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

**Figu.** Triangle de Pascal

On retrouve les coefficients binomiaux précédents à l'aide du tableau suivant :

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

**Prop.** Formules d'Euler

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Ainsi,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

**Prop.** (Formules de linéarisation)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

- $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\sin(a) \sin(b) = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

**Prop.** (Formules de factorisation)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

- $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

**Méth.** (Technique de l'arc moitié)

Pour factoriser une somme d'exponentielles  $e^{ia} + e^{ib}$ , on met en facteur l'exponentielle de la moyenne des angles ( $e^{i\frac{a+b}{2}}$ ).

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

De même :

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

**Méth.** (Transformation de  $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ )

On considère  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . On veut écrire  $f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$  sous la forme  $A \cos(\omega t - \varphi)$ .

1. On factorise par le module  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  :

$$f(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t) \right).$$

2. On identifie un angle  $\varphi$ . Comme  $(\frac{a}{A})^2 + (\frac{b}{A})^2 = 1$ , il existe  $\varphi$  tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{A}.$$

3. On applique la formule d'addition :

$$f(t) = A(\cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)) = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Le nombre  $\varphi$  est un argument du complexe  $a + ib$ .

**Défi.** (Tangente)

On considère un réel  $\theta$  non congru à  $\frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$ . On définit ainsi la *tangente* de  $\theta$  comme suit :

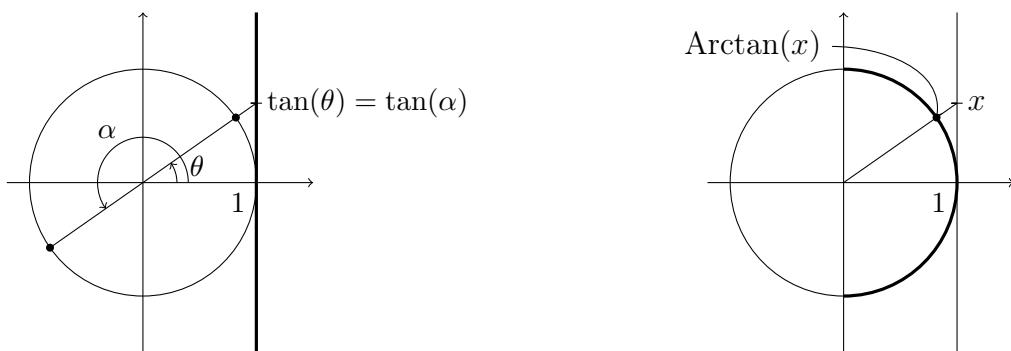
$$\tan(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

**Défi.** (Arctangente)

Pour tout réel  $x$ , on appelle *arctangente* de  $x$ , noté  $\text{Arctan}(x)$ , l'unique réel  $\theta$  tel que

$$\begin{cases} \theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ \tan(\theta) = x. \end{cases}$$

**Figu.**



**Prop.** (Inégalités géométriques)

Soit  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Ainsi,

$$\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta).$$