15. Pratique calculatoire 4 : primitives et intégrales

15.1. Primitives

Défi.
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point, puis une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. On appelle *primitive* de la fonction f toute fonction $F\colon I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable et de fonction dérivée égale à f.

Prop.
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point. Ainsi, parmi les fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I, les fonctions constantes sont celles de dérivées nulles.

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point.

Prop.
Toute fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ admet des primitives.

Prop.
Si deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ sont dérivables et de dérivées égales, alors elles diffèrent d'une constante.

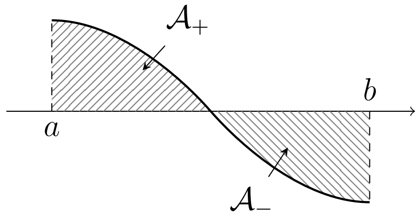
Prop.
Une primitive sur l'intervalle I étant donnée, on obtient toute primitive en lui ajoutant une certaine fonction constante.

15.2. Primitives et somme intégrale

Noti.
On considère deux réels $a < b$; puis $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}_+$. On appelle *somme intégrale* de f sur le segment $[a, b]$, qu'on note $\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ l'unique nombre réel qui associe l'aire « sous la courbe de f » à l'aire du rectangle unité défini par le repère.

Figu.

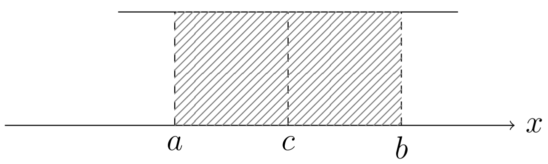
$$\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-$$



Rema.
Si $f\colon I \to \mathbb{R}_+$ est constante, alors

$$\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$$

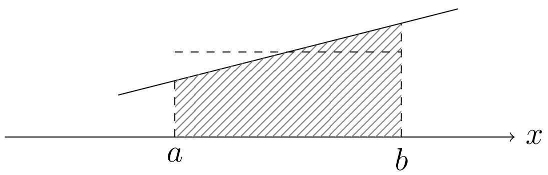
où c est arbitrairement choisi dans $[a,b]$.



Rema.
Si $f\colon I \to \mathbb{R}_+$ est affine, alors

$$\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$$

$$2\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = (f(a)+f(b))\cdot(b-a)$$



Défi.
On considère $f\colon I \to \mathbb{R}$, puis $x, y \in I$. Ainsi, on appelle *somme intégrale*, depuis x jusqu'à y, de la fonction f, l'unique nombre réel

$$\int_{t=x}^{y} f(t)\mathrm{d}t := F(y) - F(x) = \big[F(t)\big]_{t=x}^{y}$$

où F est une des primitives de f sur I, arbitrairement choisie. C'est que la somme intégrale depuis x jusqu'à y d'une fonction continue f est égale à la variation d'une primitive, arbitrairement choisie, depuis la borne inférieure x de la somme jusqu'à la borne supérieure y.

Prop. Théorème fondamental du calcul différentiel
Si f est continue, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x);$$

si f est continûment dérivable alors

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t.$$

15.3. Techniques de calcul

Prop. Relation de Chasles
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x, y, z \in I$. Ainsi

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t + \int_y^z f(t)\mathrm{d}t = \int_x^z f(t)\mathrm{d}t.$$

Rema.
1. Si $a < c < b$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,c]} f(t)\mathrm{d}t + \int_{[c,b]} f(t)\mathrm{d}t$.
2.
$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ \displaystyle\int_{[x,y]} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x < y \\ \displaystyle -\int_{[y,x]} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } y < x \end{cases}$$

Prop. (Linéarité de l'intégrale)
Soit $u_1, u_2\colon I \to \mathbb{R}$ continues, puis $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi,
1. La fonction $C_1 u_1 + C_2 u_2$ est continue.
2. On a $\forall x \in I, \forall y \in I$,

$$\int_x^y \big(C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)\big) = C_1 \int_x^y u_1(t)\mathrm{d}t + C_2 \int_x^y u_2(t)\mathrm{d}t.$$

Prop. (Positivité et croissance de l'intégrale)
Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.
1. Si f est à valeurs positives sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}_+$:

$$[\forall x \in [a,b], \quad f(x) \in \mathbb{R}_+] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}_+\right].$$

2. On a

$$[\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq g(x)] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{[a,b]} g(x)\mathrm{d}x\right].$$

Prop. (Primitivation « produit »)
Soit $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ dérivables. Ainsi,

$$\forall x \in I, \quad u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$

Prop. (Intégration par parties)
Soit $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ dérivables. Ainsi, pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\int_x^y u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_{t=x}^{y} - \int_x^y u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

Prop. (Primitivation « composée »)
Soit $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ et $G\colon J \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\varphi(I) \subset J$. Ainsi, $\forall x \in I$, $G'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(G(\varphi(x))\right)$. Par conséquent, on a la formule d'intégration par changement de variable :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \quad \int_x^y G'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} G'(s)\mathrm{d}s$$

(« $s = \varphi(t)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, donc $\mathrm{d}s = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ »).

15.4. Somme intégrale et invariance

Prop.
Soit un réel $a > 0$, puis une fonction $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ qui est continue.
1. Si f est paire, alors

$$\int_{[-a,0]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,a]} f(x)\,\mathrm{d}x \ ;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{[0,a]} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

2. Si f est impaire alors

$$-\int_{[0,a]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[-a,0]} f(x)\,\mathrm{d}x;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Prop.
Soit $T \in]0, +\infty[$, puis une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. Si f est T-périodique, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

15.5. Fonctions particulières

Ci-après, pour tout intervalle I de l'ensemble D, la fonction $F\colon I \to \mathbb{R}$, est une primitive de la fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$.

D	$\forall x \in I, F(x) =$	$\forall x \in I, f(x) =$
$\mathbb{R}$	C	0
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$x^n,\ n \in \mathbb{N}$
$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	$\frac{1}{s+1}x^{s+1} + C$	$x^s,\ s \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$	$\frac{1}{x}$
$]0, +\infty[$	$\frac{1}{d+1}x^{d+1} + C$	$x^d,\ d \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\mathbb{R}$	$\exp(x) + C$	$\exp(x)$

$]0,+\infty[$	$x\ln(x)-x+C$	$\ln(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)+C$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)+C$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)+C$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$-\cos(x)+C$	$\sin(x)$
$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	$\tan(x)$

Méth.
On demande les primitives de Arctan. Soit une variable dans $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}(x) &= 1\cdot\mathrm{Arctan}(x)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\cdot\mathrm{Arctan}(x)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\cdot\mathrm{Arctan}(x)+x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arctan}(x))-x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arctan}(x))\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ \mathrm{Arctan}(x))-\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ \mathrm{Arctan}(x))-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln(1+x^2)\big)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\ \mathrm{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)
\end{aligned}$$