01_math_2601110300

Notes de
Cours de Mathématiques

éditées par Jean Decroocq
d'après l'enseignement de M. Ngambou

CPGE TSI 1 – 2025/2026
Lycée polyvalent de Cachan

Dernière mise à jour : 11/01/2026
Signaler une erreur : `jeandecroocq@hotmail.com`

Table des matières

1. Pratiques calculatoires 1 : $\mathbb{R},+,\times,\leqslant,|\cdot|$

1.1. Opérations dans la droite réelle

Prop.
L'addition entre les nombres réels est :
- associative : pour tous réels x, a et b, $(x+a)+b = x+(a+b)$;
- commutative : pour tous réels a et b, $a+b=b+a$;
- admet 0 pour unique élément neutre : pour tout réel x, $x+0=x=0+x$;
- admet pour tout réel x, un unique opposé noté $-x$: $x+(-x)=0=-x+x$.

Prop.
La multiplication entre les nombres réels :
- est associative ;
- est commutative ;
- admet 1 pour unique élément neutre ;
- admet pour tout réel non nul x, un unique inverse noté x^{-1} : $x\times x^{-1}=1=x^{-1}\times x$.

Prop. (Stabilité de $\mathbb{R}^*$ par multiplication)
Si deux réels sont non nuls, alors leur produit est non nul.

Prop. (Distributivité)
La multiplication entre les réels est, par rapport à l'addition :
- distributive à gauche : pour tous réels x, a et b, $ax+bx=(a+b)x$;
- distributive à droite : $xa+xb=x(a+b)$.

Prop. (Absorbance et produit nul)
- Le nombre 0 est absorbant : pour tout réel a, $0\times a = 0 = a\times 0$.
- Pour tous réels a et b, $ab=0$ ssi $a=0$ ou $b=0$.

Prop. (Règle des signes)
Les trois expressions $-(ab)$, $(-a)b$, $a(-b)$ sont égales.

Défi. (Différence)
Considérons deux réels a et b. La différence de a à b, notée $a-b$, est définie par $a-b \overset{\text{déf}}{=} a+(-b)$.

Prop. (Propriétés de la différence)
Soit quatre réels a, b, a', b'. On a :
- $(a-b)+(a'-b')=(a+a')-(b+b')$;
- $-(a-b)=b-a$.

Défi. (Quotient)
Considérons deux réels a et b, avec b non nul. Le quotient de a par b, noté a/b, est le nombre réel défini par $a/b \overset{\text{déf}}{=} a \times b^{-1}$.

Prop. (Propriétés du quotient)
Soit des réels a, a' et des réels non nuls b, b'.
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b} = \dfrac{a+a'}{b}$;
- Les trois expressions $-\dfrac{a}{b}, \dfrac{-a}{b}$ et $\dfrac{a}{-b}$ sont égales ;
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a \times a'}{b \times b'}$;
- Si $a \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

1.2. Egalité dans la droite réelle

Prop. (Invariance de la somme d'après la variation des deux termes)
On ne varie pas la somme de deux nombres réels si on ajoute à l'un un troisième nombre réel alors qu'on soustrait de l'autre ce même troisième nombre.

$$\forall t_1, t_2, d \in \mathbb{R}, \quad t_1 + t_2 = (t_1 + d) + (t_2 - d).$$

Prop. (Invariance du produit)
On ne varie pas le produit de deux nombres réels si on multiplie l'un par un troisième nombre réel non nul alors qu'on divise l'autre par ce même troisième nombre non nul.

$$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^*, \quad f_1 \cdot f_2 = (f_1 \cdot q) \cdot (f_2/q).$$

Prop. (Invariance de la différence)
On ne varie pas la différence de deux nombres réels si on ajoute à chacun des deux ou si on soustrait de chacun des deux, un même troisième nombre réel.

$$\forall t_1, t_2, d \in \mathbb{R}, \quad t_1 - t_2 = (t_1 + d) - (t_2 + d).$$

Prop. (Invariance du quotient)
On ne varie pas le quotient de deux nombres réels si on multiplie chacun des deux, ou si on divise chacun des deux, par un même troisième nombre non nul.

$$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1 \times q}{f_2 \times q} \quad (\text{si } f_2 \neq 0).$$

1.3. Ordre dans la droite réelle

Prop. (Ordre entre les réels)
L'ordre $\leqslant$ entre les nombres réels est :
- réflexif : pour tout réel x, on a $x \leqslant x$;

- transitif : pour toute suite de trois réels x, y et z, si $x \leqslant y$ et si $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$;
- antisymétrique : pour tous réels x et y, si $x \leqslant y$ et si $y \leqslant x$ alors $x = y$;
- total : pour tous choix de deux nombres réels x et y, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Nota.
On note "$x < y$" pour "$x \leqslant y$ et $x \neq y$".

Prop. (Rapport aux nombres positifs)
Soit deux réels x et y.
- $x \leqslant y$ si, et seulement si, on peut trouver un réel positif d tel que $y = x + d$.
- Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $xy \geqslant 0$.

Prop.
Soit deux réels positifs x et y.
- $x + y$ est positif.
- Si $x + y$ est nul alors chacun des réels x et y est nul.

Prop. (Rapport à l'addition)
- Pour tous réels x et y, pour tout réel d, si $x \leqslant y$ alors $x + d \leqslant y + d$.
- Pour tout réel x, $x \leqslant 0 \leqslant -x$ ou $-x \leqslant 0 \leqslant x$.
- Pour tous réels x et y, si $x \leqslant y$ alors $-y \leqslant -x$.

Prop. (Rapport à la multiplication)
- Soit x et y deux réels. Soit q un réel positif. Si $x \leqslant y$ alors $qx \leqslant qy$.
- Pour tout réel x strictement positif, $x \leqslant 1 \leqslant x^{-1}$ ou $x^{-1} \leqslant 1 \leqslant x$.
- Pour tous réels x et y, si $0 < x \leqslant y$ alors $0 < y^{-1} \leqslant x^{-1}$; si $x \leqslant y < 0$ alors $y^{-1} \leqslant x^{-1} < 0$.

1.4. Inégalités dans la droite réelle

Prop. (Variation de la somme)
Pour tous réels a, b, c, d :
- $a \leqslant b \implies a + c \leqslant b + c$.
- $a \leqslant b \wedge c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$.

Prop. (Variation de la différence)
Pour tous réels a, b, c :
- $a \leqslant b \implies a - c \leqslant b - c$.
- $a \leqslant b \implies c - a \geqslant c - b$.

Prop. (Variation du produit)
Pour tous réels a, b, c :
- Si $c \geqslant 0$: $\quad a \leqslant b \implies ac \leqslant bc$.
- Si $c \leqslant 0$: $\quad a \leqslant b \implies ac \geqslant bc$.
- Pour a, b, c, d positifs : $\quad a \leqslant b \wedge c \leqslant d \implies ac \leqslant bd$.

Prop. (Variation du quotient)
Pour tous réels a, b strictement de même signe :
- $a \leqslant b \iff \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.

Pour des réels strictement positifs n, d :
- $n_1 \leqslant n_2 \implies \frac{n_1}{d} \leqslant \frac{n_2}{d}$.
- $d_1 \leqslant d_2 \implies \frac{n}{d_1} \geqslant \frac{n}{d_2}$.

1.5. Intervalles et valeur absolue

Défi.
Les intervalles I non vides d'extrémité inférieure a et d'extrémité supérieure b sont donnés par le tableau suivant :

	$b \in I$	$b \in \mathbb{R} \setminus I$	$b = +\infty$
$a \in I$	$[a, b]$	$[a, b[$	$[a, +\infty[$
$a \in \mathbb{R} \setminus I$	$]a, b]$	$]a, b[$	$]a, +\infty[$
$a = -\infty$	$]-\infty, b]$	$]-\infty, b[$	$]-\infty, +\infty[$

Défi.
On appelle *valeur absolue* de tout nombre réel x l'unique nombre réel noté $|x|$ défini par

$$|x| \overset{\text{déf}}{=} \max\{-x, x\}.$$

Prop. (Inégalité triangulaire)
Soit deux réels x et y. Alors $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Prop. (Cas d'égalité)
Si $|x + y| = |x| + |y|$, alors $x, y \geqslant 0$ ou $x, y \leqslant 0$.

Prop. (Inégalité triangulaire inversée)
On a deux réels x et y. Ainsi $|x + y| \geqslant |x| - |y|$.

Prop.
Soit x un réel quelconque. Alors $|x| = \sqrt{x^2}$.

Prop. (Rapport à la multiplication)
On donne x et y deux nombres réels. Ainsi,
1. $|xy| = |x| \cdot |y|$.
2. Pour tout réel positif r, $|rx| = r|x|$.

Prop. (Rapport à la division)
$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Prop.
Soit un réel x quelconque. On peut trouver S égal à 1 ou -1, et $r \geqslant 0$ tel que $x = Sr$.

Défi. (Signe d'un réel)
On appelle *signe* d'un réel non nul x, qu'on note ici $\operatorname{sgn}(x)$, le nombre réel $\operatorname{sgn}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{x}{|x|}$.

Méth. (pour déterminer le signe d'un produit)
Qu'on donne un réel x quelconque. On veut le signe de l'expression $f(x) = (2x-1)(12-3x)$. Cela est indiqué dans le tableau de signes ci-après.

x	$-\infty$		$1/2$		4		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$12-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Prop. (Intervalle centrés)
Soit a et b deux réels, avec r positif. Sur tout réel x, les deux propositions suivantes sont équivalentes :
1. $|x-a| \leqslant r$;
2. $x \in [a-r, a+r]$.

Voca.
$[a-r, a+r]$ est l'intervalle fermé centré en a de rayon r ; et $]a-r, a+r[$ est l'intervalle ouvert centré en a et de rayon r.

2. FONDEMENTS 1 : LOGIQUE

2.1. Énoncés et notion de valeur de vérité

Noti. (Proposition)
Une *proposition* ou *assertion*, est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Prop. (Principe du tiers exclu)
Une proposition est soit vraie, soit fausse, et non les deux à la fois.

Noti. (Négation)
La *négation* d'une proposition P est vraie si et seulement si P est fausse. On note NON P ou $\neg P$.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Toute proposition et sa négation sont contradictoires : "P et $\neg P$" est une contradiction (toujours faux).

Prop. (Involution)
P est vraie si et seulement si sa négation est fausse :

$$P \iff \neg(\neg P).$$

2.2. Combinaison de deux propositions

Défi. (Conjonction et Disjonction)
Soit P et Q deux propositions.
- La *conjonction*, notée P ET Q ou $P \wedge Q$, est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.
- La *disjonction*, notée P OU Q ou $P \vee Q$, est vraie si et seulement si au moins l'une des deux propositions est vraie.

Prop. (Associativité et commutativité)
Etant donné une liste de proposition , on ne varie par leur conjonction si on les ordonne puis les groupe arbitrairement.

Prop. (Distributivité)
Soit trois propositions P, Q et R. Alors :
- $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
- $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Noti. (Équivalence d'une première proposition avec une dernière)
P ÉQUIVAUT À Q, $P \iff Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies ou P et Q sont toutes les deux fausses.

Noti. (Implication d'une dernière proposition par une première)
P IMPLIQUE Q, $P \implies Q$, est vraie si et seulement si P est fausse, ou P et Q sont toutes les deux vraies.

Tabl. (Tables de vérité)
Voici des tables de valeurs de vérité de ces quatre propositions composées.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \iff Q$	$P \implies Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V

Prop. (Négations des propositions composées)
Soit P et Q. On a
- $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$
- $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \implies Q) \iff P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \iff Q) \iff (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

Prop. (Liens logiques)
- Disjonction et implication : $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$.
- Équivalence et implication : $(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Défi.
On appelle *contraposée* de l'implication $P \implies Q$, l'implication $\neg Q \implies \neg P$.

Prop.
Une implication et sa contraposée sont équivalentes :

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P).$$

Défi.
On appelle *implication réciproque* de $P \implies Q$, l'implication $Q \implies P$.

Rema.
En règle générale, on ne peut déterminer la valeur de vérité d'une implication directe à partir de celle de sa réciproque.

Prop.

$$P \vee Q \iff \neg P \implies Q$$

2.3. Propositions universelles, existentielles

Noti. (Conjonction "en vrac" de plusieurs propositions)
On dit que la conjonction d'une liste d'un certain nombre de propositions est vraie si toutes ces propositions sont vraies ; on dit qu'elle est fausse sinon, c'est-à-dire si au moins une proposition est fausse.

Noti. (Conjonction d'une famille de propositions)
- "quel que soit l'élément x, $\mathcal{P}(x)$" ;
- "pour tout élément x, $\mathcal{P}(x)$" ;
- $\forall x, \mathcal{P}(x)$.

Noti. (Disjonction d'une liste de plusieurs propositions)
On dit que la disjonction d'un certain nombre de propositions est vraie si au moins une de ces propositions est vraie ; on dit qu'elle est fausse sinon (toutes fausses).

Noti. (Disjonction (inclusive) d'une famille de propositions)
- "il existe au moins un élément x tel que $\mathcal{P}(x)$" ;
- "pour au moins un élément x, $\mathcal{P}(x)$" ;
- $\exists x, \mathcal{P}(x)$.

Prop. (Négation de la proposition universelle)
La négation de "$\forall x, \mathcal{P}(x)$" est la proposition existentielle "$\exists x, \neg\mathcal{P}(x)$".

Prop. (Négation de la proposition existentielle)
La négation de "$\exists x, \mathcal{P}(x)$" est la proposition universelle "$\forall x, \neg\mathcal{P}(x)$".

Exem.
La négation de "Tout élève de la classe possède un stylo bleu" est "Il existe au moins un élève de la classe qui ne possède pas de stylo bleu".

2.4. Valeur numérique de vérité d'une proposition (hors programme)

Défi.
Pour toute proposition $\mathcal{P}$, on pose :

$$\mathbb{1}_{\mathcal{P}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P} \text{ est vraie} \\ 0 & \text{si } \mathcal{P} \text{ est fausse} \end{cases}$$

Prop.
- $\mathbb{1}_{\neg\mathcal{P}} = 1 - \mathbb{1}_{\mathcal{P}}$
- $\mathbb{1}_{\mathcal{P}\wedge\mathcal{Q}} = \mathbb{1}_{\mathcal{P}}\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$
- $\mathbb{1}_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}} = 1 - \mathbb{1}_{\neg\mathcal{P}\wedge\neg\mathcal{Q}} = \mathbb{1}_{\mathcal{P}} + \mathbb{1}_{\mathcal{Q}} - \mathbb{1}_{\mathcal{P}}\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$

Prop. (Rapport à l'implication)

$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \iff \mathbb{1}_{\mathcal{P}} \leqslant \mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$$

Complément
La proposition "il existe au plus un élément x tel que $\mathcal{P}(x)$" se dit "si x et y sont tels que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$ alors $x = y$" (où x et y désignent le même objet). Autrement écrit,

$$\forall x, \forall y, \quad (\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{P}(y)) \implies x = y.$$

3. Géométrie élémentaire 1 : Vecteurs de l'espace

3.1. Vecteurs et opérations

Noti.
Le vecteur $\vec{AA'}$, de A à A', est associé à la translation qui transforme le point A en point A'. Si $A' \neq A$, le vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.

Prop.
Soit quatre points A, A', B et B'. $\vec{AA'} = \vec{BB'}$ si et seulement si le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Noti.
- Notée $\|\vec{v}\|$, la *norme* d'un vecteur $\vec{v}$ est la mesure commune des longueurs des segments orientés qui le représentent. C'est un nombre réel positif.
- Pour tout point M, on peut trouver un unique point M' image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Prop.
Un point O étant choisi comme origine, il y a correspondance un à un entre les vecteurs $\vec{v}$ et les points M via la relation $\vec{OM} = \vec{v}$, *i.e.* $O + \vec{v} = M$.

Prop. (Addition entre les vecteurs)
L'addition entre les vecteurs :
- est associative ;
- est commutative ;
- admet le vecteur nul ($\vec{0}$) pour élément neutre : $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$;
- admet pour tout vecteur $\vec{v}$ un unique opposé noté $-\vec{v}$.

Prop. (Associativité et commutativité générale de l'addition)
Etant donné une liste d'un certain nombre de vecteurs, on ne varie pas leur somme si on les ordonne puis les groupe arbitrairement.

Prop. (Multiplication des vecteurs par les réels)
La multiplication des vecteurs par les nombres réels est :
- distributive sur l'addition entre les vecteurs : $\lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2$;
- distributive sur l'addition entre les nombres réels : $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v}$;
- sans effet pour le nombre 1 : $1\vec{v} = \vec{v}$;
- compatible avec la multiplication entre les nombres réels : $\lambda_2(\lambda_1\vec{v}) = (\lambda_2\lambda_1)\vec{v}$.

Prop. (Produit et règle des signes)
Soit un vecteur $\vec{v}$ et un réel λ. $\lambda\vec{v} = \vec{0} \iff \lambda = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
De plus : $-\lambda\vec{v} = (-\lambda)\vec{v} = \lambda(-\vec{v})$.

Noti.
On dit qu'un vecteur est une *combinaison linéaire* d'une liste de vecteurs si le premier se décompose comme une somme de produits des derniers par des réels.

Noti.
On dit qu'une liste de vecteurs est *libre*, ou que ces vecteurs sont *linéairement indépendants*, si pour obtenir le vecteur nul comme combinaison linéaire de ces derniers, il est nécessaire de choisir chaque coefficient égal à 0. Sinon, on dit que la liste est *liée* ou que les vecteurs sont *linéairement dépendants*.

Rema.
Une liste est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs n'est une combinaison linéaire des autres.

Prop.
- Deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont *linéairement dépendants* (colinéaires) ssi l'un est nul ou l'un est une combinaison linéaire de l'autre ($\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v_2} = \lambda \vec{v_1}$).
- Trois vecteurs sont linéairement dépendants (coplanaires) ssi l'un est nul ou l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

3.2. Repérage dans un plan, l'espace

Défi.
On appelle *base du plan* toute liste de deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan. On appelle *base de l'espace* toute liste de trois vecteurs linéairement indépendants.

Prop.
Etant donné une liste de vecteurs d'un plan (resp. de l'espace), il s'agit d'une base de ce plan si et seulement si tout autre vecteur peut se décomposer de manière unique comme une combinaison linéaire de la liste.

Défi.
Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ est *orthogonale* si $\vec{u} \perp \vec{v}$. Elle est *orthonormale* (ou orthonormée) si de plus $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Défi.
On appelle *repère* d'un plan $\mathcal{P}$ tout triplet $(O; \vec{u}, \vec{v})$ constitué d'un point O du plan et d'une base $(\vec{u}, \vec{v})$ des vecteurs de $\mathcal{P}$. De même pour l'espace avec $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Défi.
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on appelle *couple de coordonnées* du point M l'unique couple (x, y) tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Prop. (Changement de coordonnées par translation)
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace et O' un point de coordonnées (u, v, w) dans ce repère (tel que $\vec{OO'} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$). Pour tout point M, si $\vec{OM}$ a pour coordonnées (x, y, z), alors $\vec{O'M}$ a pour coordonnées $(x - u, y - v, z - w)$.

Défi.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, pour tout point M distinct de l'origine, on appelle *coordonnées polaires* le couple (r, θ) tel que :

$$\vec{OM} = r(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

avec $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in] - \pi, \pi]$. r est la norme $\|\vec{OM}\|$ et θ est la *mesure principale* de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$.

3.3. Barycentre

Défi.
Un *système de points pondérés* est une liste de points auxquels on affecte des nombres appelés *poids* (ou coefficients).

Nota.
Par exemple, $\{(A, -2); (B, 10); (C, 5,3)\}$ est un système pondéré de points. On note aussi

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ -2 & 10 & 5,3 \end{bmatrix}.$$

Définition. (Barycentre)
Soit O un point fixé et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le système pondéré

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}, \quad p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}.$$

Si $p_1 + \cdots + p_n \neq 0$, on appelle *barycentre* du système le point

$$G = \mathrm{bar}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad \vec{OG} = \frac{p_1\vec{OA_1} + \cdots + p_n\vec{OA_n}}{p_1 + \cdots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i\vec{OA_i}}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Défi. (Isobarycentre)
On appelle *isobarycentre* d'une famille de points le barycentre du système formé par ces points affectés de poids tous égaux.

Prop. (Indépendance du point de référence)
La définition du barycentre ne dépend pas du choix de l'origine. Pour tout point M, on a

$$\sum_{i=1}^n p_i\vec{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)\vec{MG}.$$

Prop. (Caractérisation du barycentre)
Le barycentre G est l'unique point tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{GA_i} = \vec{0}.$$

Prop. (Coordonnées cartésiennes du barycentre)
(Comme avant). Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, notons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point A_i dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors l'abscisse du barycentre G est égale à la moyenne pondérée des abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$ affectés des poids $p_1, p_2, \dots, p_n$ respectivement. De même pour l'ordonnée et l'altitude. C'est que :

$$x_G = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

où x_G est l'abscisse de G.

Prop. (Barycentre et invariance)
Le barycentre est invariant par multiplication de tous les poids par un même réel non nul. L'isobarycentre est invariant par toute transformation affine qui laisse globalement invariant le système de points.

Prop.
Si le système admet un axe de symétrie, alors son isobarycentre appartient à cet axe.

3.4. Produit scalaire

Défi.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace. On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, qu'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini comme suit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Prop.
Soit deux points A et B distincts. Soit un troisième point C. Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$, où H désigne le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Prop.
Le produit scalaire est :
1. bilinéaire : à savoir que
   - $(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \cdot \vec{v})$;
   - $\vec{u} \cdot (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 (\vec{u} \cdot \vec{v}_1) + \lambda_2 (\vec{u} \cdot \vec{v}_2)$;

   quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ et les réels λ_1, λ_2 ;
2. symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
3. positif : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$ quelque soit $\vec{u}$;
4. défini : pour tout vecteur $\vec{u}$, si $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$.

Prop.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
Par suite $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

Nota.
On note $\vec{u}^2$ pour $\vec{u}\cdot\vec{u}$.

Prop. (Produit scalaire et produit des normes)
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

$$-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leqslant \vec{u}\cdot\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

(Ceci est l'Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Prop. (Identités scalaires remarquables)
Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On a :
1. $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$;
2. $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$;
3. $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$.

Aussi,
1. $\vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2$;
2. $\vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2$;
3. $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$.

Prop.
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

$$\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Prop.
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

Prop. (Décomposition dans une base orthonormée)
Soit une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ des vecteurs de l'espace. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque. Ainsi, $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j} + z_{\vec{u}}\vec{k}$ où

$$\begin{cases} x_{\vec{u}} = \vec{i}\cdot\vec{u} \\ y_{\vec{u}} = \vec{j}\cdot\vec{u} \\ z_{\vec{u}} = \vec{k}\cdot\vec{u} \end{cases}$$

Prop.
Soit une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ des vecteurs de l'espace. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coor-

données respectives $(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}}z_{\vec{v}}.$$

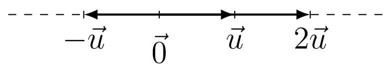
Prop.
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

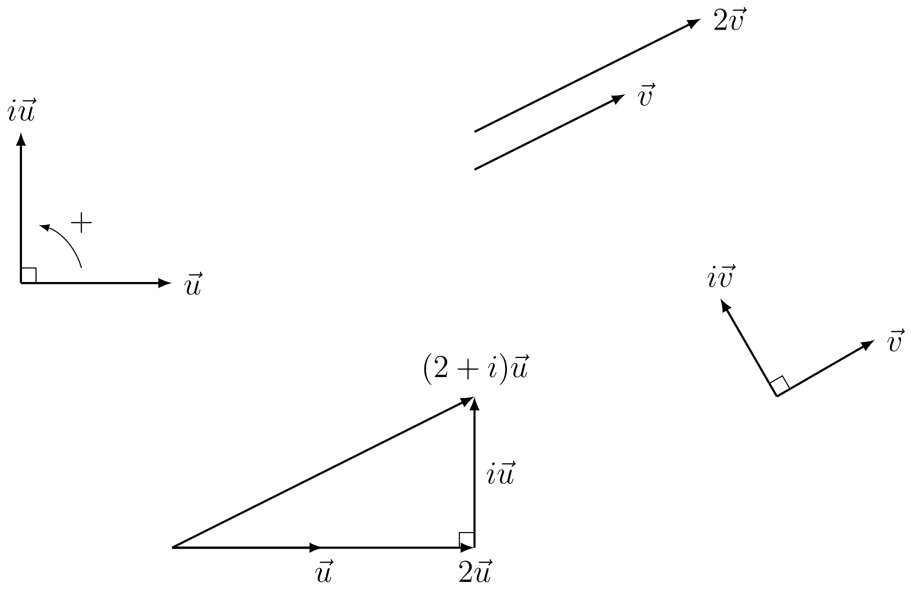
4. PLAN COMPLEXE 1 : $\mathbb{C}, +, \times, |\cdot|$

4.1. Nombres complexes et vecteurs du plan orienté

Noti.
Les nombres réels peuvent être regardés comme des multiplicateurs pour passer des vecteurs non nuls de la droite à tous les vecteurs de cette même droite.



Dans le plan orienté, on imagine un « nombre » par lequel la multiplication a pour effet de réaliser le quart de tour direct.



Noti. (Le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, extension du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$)
1. Les nombres réels sont des nombres complexes.
2. L'addition entre les nombres complexes :
   a. est associative : $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall z_3 \in \mathbb{C}, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
   b. est commutative : $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
   c. admet le nombre 0 pour unique élément neutre : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z + 0 = z = 0 + z$;
   d. admet pour tout nombre complexe z, un unique opposé noté $-z$: $(-z)+z = 0 = z+(-z)$.
3. La multiplication entre les nombres complexes est :
   a. associative ;
   b. est commutative ;
   c. admet le nombre 1 pour unique élément neutre ;
   d. admet pour tout nombre complexe z non nul, un unique inverse noté z^{-1}.
4. Par rapport à l'addition entre les complexes, la multiplication entre les complexes est doublement distributive.
5. Il existe au moins un nombre complexe dont le carré (le produit du nombre par lui-même) est égal à -1. Notons i un tel nombre dans toute la suite.
6. Pour tout nombre complexe, on peut l'exprimer comme la somme :
   - du produit de 1 par un réel,

- et du produit de i par un réel.

C'est que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \exists b \in \mathbb{R}, \quad z = 1a + ib.$$

4.2. Nombres réels partie réelle et partie imaginaire d'un complexe

Prop.
Pour tous réels x et y, si $x + iy = 0$, alors $x = 0$ et $y = 0$.

Prop. (Unicité de la forme algébrique d'un complexe)
Soit un nombre complexe z. Ainsi, il existe exactement un couple (x, y) de réels tel que $x+iy = z$.

Défi. (Partie réelle et partie imaginaire)
On considère un complexe z. On appelle *partie réelle* et *partie imaginaire* de z qu'on note respectivement $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$, les nombres réels tels que :
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = z \\ \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prop.
Soient deux complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, où $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.
- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Prop. (Linéarité sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{Re}(\cdot)$ et $\mathrm{Im}(\cdot)$)
Pour tous complexes z_1 et z_2, pour tous réels r_1 et r_2 :
$$\mathrm{Re}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \mathrm{Re}(z_1) + r_2 \mathrm{Re}(z_2)$$
$$\mathrm{Im}(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1 \mathrm{Im}(z_1) + r_2 \mathrm{Im}(z_2)$$

Prop.
L'inverse de i est égal à son opposé : $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\left(\frac{z}{i}\right) = \mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}\left(\frac{z}{i}\right) = -\mathrm{Re}(z). \end{cases}$$

Prop. (Caractérisation des réels parmi les complexes)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
a. $z \in \mathbb{R}$
b. $\mathrm{Im}(z) = 0$
c. $z = \mathrm{Re}(z)$

Prop. (Caractérisation des imaginaires purs)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
a. $z \in i\mathbb{R}$
b. $\mathrm{Re}(z) = 0$
c. $z = i\mathrm{Im}(z)$

Rema.
$z \in i\mathbb{R} \iff \frac{z}{i} \in \mathbb{R}$.

4.3. Nombre complexe conjugué d'un complexe

Défi.
Le nombre complexe *conjugué* de z, noté $\bar{z}$, est défini par $\bar{z} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z = \bar{\bar{z}}$.

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- si $z_1 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \frac{\bar{z}+z}{2} \\ \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \end{cases}$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

4.4. Nombre réel module d'un complexe

Défi.
Le nombre réel *module* de z, noté $|z|$, est $|z| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \in \mathbb{R}_+$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :
- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- $z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

Prop. (Formule algébrique d'un quotient)
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tq $z_1 \neq 0$. Alors
$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)}{|z_1|^2} \\ \mathrm{Im}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2)}{|z_1|^2} \end{cases}$$

Méth. (pour écrire un quotient sous forme algébrique)
Exemple :
$$\frac{1}{1+i} = \frac{(1-i)\times 1}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- Si $z_1 \neq 0$, $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$.

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,
- $|r| = r$;
- $|r \cdot z| = r|z|$.

Prop.
On considère un nombre complexe z. Ainsi,
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.
- Si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}$ alors $|\mathrm{Re}(z)| = |z|$.
- $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
- Si, et seulement si, $z \in i\mathbb{R}$ alors $|\mathrm{Im}(z)| = |z|$.

Prop. (Inégalité triangulaire pour les complexes)
Soit deux complexes z_1 et z_2. Ainsi,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- Si $(z_1 = 0) \vee (\exists r \in \mathbb{R}_+, z_2 = rz_1)$ alors $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ainsi $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Défi. (Disque)
On considère un complexe a et un réel positif r. On appelle *disque* fermé de centre a et de rayon r, l'ensemble des complexes z tels que $|z - a| \leq r$.

4.5. Nombres complexes et géométrie du plan orienté

Défi.
On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. À tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ du plan, on associe le nombre complexe
$$z = x + iy,$$
appelé *affixe* de $\vec{v}$.
Réciproquement, à tout complexe $z = x + iy$, on associe le vecteur
$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j},$$
appelé *vecteur image* de z.
2. L'*affixe* d'un point M est l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.
Réciproquement, le *point image* d'un complexe $z = x + iy$ est le point M de coordonnées (x, y), que l'on note $M(z)$.

Prop.
Soit $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ deux vecteurs, z_1 et z_2 deux complexes et r_1 et r_2 deux réels. Si $\vec{v_1}$ admet pour affixe z_1 et $\vec{v_2}$ admet pour affixe z_2, alors $r_1\vec{v_1} + r_2\vec{v_2}$ admet pour affixe $r_1z_1 + r_2z_2$.

Prop.
Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan, d'affixe z dans un repère orthonormé. Alors $\|\vec{v}\| = |z|$.

Prop.
Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2 dans un repère orthonormé. Alors $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
En particulier, soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts du plan. Alors A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Prop.
Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes respectives z_1 et z_2 dans un repère orthonormé. Alors
$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \iff \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}.$$

Prop.
Soit un vecteur $\vec{b}(b)$. Soit un point $M(z)$. Soit un point $M'(z')$. Ainsi, $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par translation de vecteur $\vec{b}$ si et seulement si $z' = z + b$.

Prop.
Soit un réel θ. Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre l'origine et d'angle θ si et seulement si $z' = z(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Prop.
Par suite, $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ si et seulement si $z' - \omega = (z - \omega)(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Prop.
Soit un réel non nul k.
- $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre l'origine et de rapport k si et seulement si $z' = zk$ $(= kz)$.
- $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k si et seulement si $z' - \omega = (z - \omega)k$.

Prop.
$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie orthogonale par rapport au premier axe du repère si et seulement si $z' = \bar{z}$.
$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la symétrie orthogonale par rapport au second axe du repère si et seulement si $z' = -\bar{z}$.

5. Fondements 2 : Ensembles

5.1. Égalité

Prop.
La relation d'égalité est :
- réflexive : toute expression est égale à elle-même ;
- symétrique : si $\text{expr}_1 = \text{expr}_2$ alors $\text{expr}_2 = \text{expr}_1$;
- transitive : si $\text{expr}_1 = \text{expr}_2$ et $\text{expr}_2 = \text{expr}_3$ alors $\text{expr}_1 = \text{expr}_3$.

Prop. (Principe de substitution)
Si une première expression est égale à une dernière, alors toute formule comprenant la première expression est égale à la même formule dans laquelle on a substitué la dernière expression à une occurrence de la première.

5.2. L'ensemble et ses éléments

Noti.
Les constituants d'un ensemble sont ses éléments. Si e est un élément de l'ensemble E, on dit que :
- e appartient à E, noté $e \in E$;
- E possède e, noté $E \ni e$.

Noti.
L'ensemble vide est celui qui ne possède aucun élément. On le note $\emptyset$.

Défi.
Un *singleton* est un ensemble qui possède exactement un élément.

Défi.
On dit que deux ensembles E et F sont égaux pour dire que

$$\forall x, \quad x \in E \iff x \in F.$$

Défi.
On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F pour dire que

$$\forall x, \quad x \in E \Rightarrow x \in F.$$

C'est que,

$$\forall x \in E, \quad x \in F.$$

Noti.
On note $E \subset F$ et on dit que E est un *sous-ensemble*, ou une *partie*, de F.

Méth. (pour montrer que deux ensembles sont égaux)
On utilise ce que
$$E = F \iff (E \subset F) \wedge (F \subset E).$$

Défi. (Disjoints)
On dit que deux ensembles E et F sont *disjoints* pour dire qu'ils n'ont pas d'éléments en commun.
$$\forall x, \quad \neg(x \in E \wedge x \in F).$$

5.3. Deux modes de définition d'un ensemble

Défi.
Un ensemble peut être défini de deux manières :
- *en intension*, c'est-à-dire en spécifiant une propriété caractéristique vérifiée par tous ses éléments :
$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\};$$
- *en extension*, c'est-à-dire en décrivant explicitement les éléments de l'ensemble, soit par énumération, soit par un procédé de construction :
$$\{-1;1\} \quad \text{ou encore} \quad \{x+y \mid x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}.$$

5.4. Opérations sur les parties d'un ensemble

Dans la suite, E désigne un ensemble, A et B des parties de E.

Nota.
L'ensemble constitué de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exem.
Soit $E = \{1,2\}$. Ainsi,
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

Rema.
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ signifie $\mathbb{R} \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$.
- $\{1\} \subset \{1,2\}$ signifie $\{1\} \in \mathcal{P}(\{1,2\})$.

Défi.
On appelle *partie complémentaire* dans E de A, l'ensemble $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} \overset{\text{not.}}{=} \overline{A}$.

Défi.
On appelle l'*intersection* de A et B l'ensemble :

$$A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Prop.
L'intersection entre les parties de E :
- est associative : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- est commutative : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \cap B = B \cap A$;
- admet E pour unique élément neutre : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cap E = A = E \cap A$.

Rema.
$\emptyset$ est absorbant par $\cap$. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cap \emptyset = \emptyset$.

Défi.
On appelle la *réunion* de A et B l'ensemble :

$$A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Prop.
La réunion entre les parties de E :
- est associative ;
- est commutative ;
- admet $\emptyset$ pour unique élément neutre : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \cup \emptyset = A$.

Prop.
L'intersection est distributive sur la réunion, et la réunion est distributive sur l'intersection. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

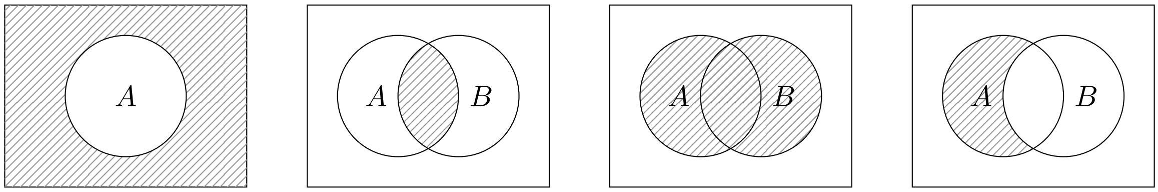
Défi.
On considère un ensemble I et des parties A_i de E pour $i \in I$.
1. L'intersection « en vrac » des A_i est $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$.
2. La réunion « en vrac » des A_i est $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$.

Défi.
On appelle la *différence* dans A de la partie B :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Rema.
Si $A \supset B$, alors $A \setminus B$ est égal au complémentaire dans A de B. Dans tous les cas : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Figu.



$E \setminus A$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \cup B$ $\qquad$ $A \setminus B$

Prop.
Le complémentaire de l'intersection est la réunion des complémentaires :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Le complémentaire de la réunion est l'intersection des complémentaires :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

5.5. Produit cartésien d'ensembles

Noti.
Étant donnés une suite de deux ensembles E puis F, l'ensemble *produit cartésien* de E par F est :

$$E \times F \overset{\text{déf.}}{=} \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Noti.
Étant donné un entier $n \geq 2$, et une suite de n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, on appelle produit cartésien de la suite :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in E_i\}.$$

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on note l'ensemble E^n.

5.6. Mises en parties d'un ensemble

Défi.
On appelle *recouvrement* d'un ensemble E tout ensemble de parties de E dont la réunion est égale à E tout entier.

Exem.
Soit $E = \{1, 2, 3\}$. On pose $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$. On a $A \cup B = \{1, 2, 3\} = E$. La famille $\{A, B\}$ est un recouvrement de E.

Défi.
On appelle *recouvrement disjoint* de E tout ensemble de parties de E dont la réunion est égale à E tout entier et tel que ces ensembles sont disjoints deux à deux.

Exem.
L'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}^*$, est recouvert de manière disjointe par l'ensemble des strictement négatifs et l'ensemble des strictement positifs :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*_- \sqcup \mathbb{R}^*_+.$$

Défi.
On appelle *partition* de E tout recouvrement disjoint de E par des parties non vides.

Exem.
L'ensemble des entiers relatifs est partitionné par les entiers pairs et les entiers impairs :

$$\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \sqcup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Défi.
On appelle *système de représentants* d'une partition de E, tout ensemble d'éléments de E tel que :
- ET tout élément de cet ensemble appartient exactement à une composante de la partition ;
- ET toute composante de la partition possède exactement un élément de cet ensemble.

Exem.
Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. On le découpe en deux paquets (partition) : $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Pour former un système de représentants, il faut choisir une seule lettre dans le premier paquet et une seule dans le second. Par exemple, l'ensemble $\{a, c\}$ est un système de représentants. L'ensemble $\{b, d\}$ en est un autre.

5.7. Nombre indicateur de l'appartenance à une partie

Défi.
On considère une partie A de E, et un élément x de E. On définit le nombre indicateur $\mathbb{1}_A(x)$ par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Prop.
Soit un ensemble E. Soit deux parties A et B de E.
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- Si $A \supset B$, alors $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$

Prop.
- $A \subset B \iff \forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.
- $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

6. Pratique calculatoire 2 : Limites et Dérivées

6.1. Égalité sur les limites dans la droite réelle achevée

Noti.
La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On note aussi cet ensemble $[-\infty, +\infty]$.

Défi. (Addition)
On étend l'addition entre les réels à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :
- $x + (+\infty) = +\infty$ pour tout $x \in]-\infty, +\infty]$.
- $x + (-\infty) = -\infty$ pour tout $x \in [-\infty, +\infty[$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

On résume cela par le tableau suivant :

$x \setminus y$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

Prop.
La limite de la somme est la somme des limites quand cette dernière est définie.

Défi.
La multiplication d'un élément x de $\overline{\mathbb{R}}$ par un réel r est définie par ce tableau :

$x \setminus r$	$r < 0$	0	$0 < r$
$-\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}$	xr	0	xr
$+\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$

Prop. (Combinaison linéaire)
Si $f_1(x) \to l_1 \in \mathbb{R}$ et $f_2(x) \to l_2 \in \mathbb{R}$, alors pour tous réels r_1, r_2 :

$$r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} r_1 l_1 + r_2 l_2.$$

Défi.
On définit le produit xy pour $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ comme suit :

$x \setminus y$	$-\infty$	$\substack{y\in\mathbb{R}\\ y<0}$	0	$\substack{y\in\mathbb{R}\\ y>0}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indét.	$-\infty$	$-\infty$
$\substack{x\in\mathbb{R}\\ x<0}$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	Indét.	0	0	0	Indét.
$\substack{x\in\mathbb{R}\\ x>0}$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indét.	$+\infty$	$+\infty$

Prop.
La limite du produit est égale au produit des deux limites lorsque ce dernier est défini.

Défi.
On considère $x \in \overline{\mathbb{R}}$. On a le tableau suivant pour l'inverse $1/x$:

x	$-\infty$	$\substack{x\in\mathbb{R}\\ x<0}$	0^-	0	0^+	$\substack{x\in\mathbb{R}\\ 0<x}$	$+\infty$
$1/x$	0^-	$1/x$	$-\infty$	Indéf.	$+\infty$	$1/x$	0^+

Prop.
- La limite d'un quotient est égale au quotient de la limite si cette dernière est définie.
- La limite de l'inverse est l'inverse de la limite si cette dernière est définie.

Prop. (Composition des limites)
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et de plus d'un point. Soient $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{J}$ (points ou extrémités). Soient $\varphi : I \to J$ et $f : J \to \mathbb{R}$.
Supposons que
- ET $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$;
- ET $\lim\limits_{y\to b} f(y)$ existe.

Alors la limite de la composée existe et

$$\lim_{x\to a}(f \circ \varphi)(x) = \lim_{y\to b} f(y).$$

Prop.
- Si pour tout x (dans l'ensemble de def.) $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ et si $m(x)$ et $M(x)$ admettent une seule et même limite réelle l quand $x \to a$, alors
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$
- Si $m(x) \leqslant f(x)$ et si $m(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ alors
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$$
- Si $f(x) \leqslant M(x)$ et si $M(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ alors
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$$

Prop. (Croissance comparées)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\dfrac{x^n}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
- $\dfrac{\ln(x)}{x^n} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
- $e^x x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$
- $x^n \ln(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0$

Méth. (Levée d'indétermination)
- Forme $\frac{\infty}{\infty}$ pour une fonction rationnelle en $\pm\infty$: on factorise par le terme de plus haut degré.

$$\frac{2x^2 - 3}{x - 2025} = \frac{2x^2(1 - \frac{3}{2x^2})}{x(1 - \frac{2025}{x})} = 2x\frac{1 - \dots}{1 - \dots} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

- Forme $\infty - \infty$: factorisation. Ex : $x^2 - x = x^2(1 - \frac{1}{x}) \to +\infty$.

6.2. Inégalités sur les limites dans la droite réelle achevée

Prop.
Si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) < \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$, alors sur un certain voisinage de a, $f_1 \leqslant f_2$.

Prop. (Passage à la limite dans les inégalités larges)
Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)$ existent. Ainsi,
- si pour tout x dans un certain voisinage de a, $f(x) \leqslant M$, où M est une constante, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant M$, et on adapte pour « $f(x) \geqslant m$ » ;
- si, pour tout x suffisamment proche de a, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) \leqslant \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$.

6.3. Dérivée

Défi.
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant plus d'un point, $a \in I$, et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit qu'un réel p est le *nombre dérivé* de la fonction f au point a, ou simplement de f en a, pour dire que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} p.$$

Si un tel réel p existe, alors il est unique et on le note $f'(a)$.

Prop.
Dans les conditions ci-haut, si $f'(a)$ existe alors la tangente à la courbe représentative dans un certain repère, au point $A(a, f(a))$ admet une équation que voici :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

C'est-à-dire que c'est l'ensemble $\{M(x, y) \mid y - f(a) = f'(a)(x - a)\}$.

Prop. (Combinaison linéaire de fonctions dérivables en un point)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point; $x_0 \in I$; puis $f, g : I \to \mathbb{R}$. Supposons que f et g sont dérivables en x_0 (i.e. $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$ existent). Ainsi, pour tout $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $rf + sg$ est dérivable en x_0 et

$$(rf + sg)'(x_0) = rf'(x_0) + sg'(x_0).$$

Prop. (Produit de deux fonctions dérivables en un point)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant plus d'un point, $x_0 \in I$, et deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$. Supposons que f et g sont dérivables en x_0. Ainsi, la fonction produit fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Prop. (Quotient de deux fonctions dérivables en un point)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant plus d'un point, $x_0 \in I$, et deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$. Supposons que
- ET pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$;
- ET g est dérivable en x_0;
- ET f est dérivable en x_0.

Ainsi, la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Prop. (Dérivation composée)
Soit deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ qui possèdent plus d'un point; x_0 un point de J; puis $\varphi : J \to \mathbb{R}$ à valeurs dans I et $f : I \to \mathbb{R}$ (en sorte que $f(\varphi(x))$ existe pour tout $x \in J$). Supposons que
- ET $\varphi'(x_0)$ existe;
- ET $f'(\varphi(x_0))$ existe.

Ainsi, la composée de φ suivi de f, ou composée de f suivant φ, est dérivable en x_0 de nombre dérivé

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

Prop. (Dérivation en un point de la réciproque)
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et de plus d'un point. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to I$ réciproque l'une de l'autre. Soit $x_0 \in I$. Supposons que
- ET f est dérivable en x_0;
- ET $f'(x_0) \neq 0$;
- ET $\lim\limits_{y \to f(x_0)} g(y) = x_0$.

Ainsi g est dérivable en $f(x_0)$ et $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Défi.
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point; $t_0 \in I$, et $\Phi : I \to \mathbb{C}$. On dit que la fonction complexe Φ est dérivable en t_0 pour dire que les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(\Phi) : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{Re}(\Phi(t))$ et $\mathrm{Im}(\Phi) : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{Im}(\Phi(t))$ sont dérivables en t_0; le cas

échéant :

$$\Phi'(t_0) \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Re}(\Phi))'(t_0) + i(\mathrm{Im}(\Phi))'(t_0).$$

Défi.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose

$$\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)).$$

Prop.
Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $t \in I$. Ainsi,
$(\exp \circ u)'(t) = \exp(u(t))u'(t)$. $\quad ((e^u)' = u'e^u)$.

Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.

7. Plan Complexe 2 : Exponentielle et Trigonométrie

7.1. Exponentielle complexe

Défi.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\exp(z) \overset{\text{déf}}{=} \exp(\mathrm{Re}(z))\big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))\big).$$

Prop.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors
$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \quad \text{et} \quad e^{i(x-y)} = \frac{e^{ix}}{e^{iy}}.$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Ainsi,
$$\begin{aligned} e^z = 1 &\iff z \in i2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = i2k\pi. \end{aligned}$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ (variable). Ainsi,
$$e^z = e^{z_0} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = z_0 + i2k\pi.$$

Prop.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$
Puis, si $e^{z_2} \neq 0$:
$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

7.2. Nombres complexes de module 1

Prop.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi,
$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad (a, b) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous avons l'équivalence
$$|z| = 1 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} z = a + ib \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}.$$

Noti.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists\theta \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\theta}.$$

C'est que $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Rema.
Rappelons que $\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Prop.
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Ainsi,
- $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$.
- $\frac{1}{z_1} \in \mathbb{U}$.
- $z_1 \neq 0, \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{U}$. Ainsi,
- $\frac{1}{z} = \bar{z}$;
- $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Exem.
Si $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
1.

$$\exists(s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

2. Supposons que $z \neq 0$. Ainsi,

$$\exists!(s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

Défi.
On considère $z \in \mathbb{C}$. On appelle *forme exponentielle* de z toute expression $e^{i\theta}\rho$ égale à z, pour $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Défi.
On considère $a \in \mathbb{R}^*$ fixé. On dit qu'un réel y est *congru* à un réel x *modulo* a, lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = x + ka,$$

que l'on note $y \equiv x[a]$.

Prop.
Soit $(\theta_0, \rho_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (fixé) et $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (variable). Ainsi,

$$e^{i\theta}\rho = e^{i\theta_0}\rho_0 \iff \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta \equiv \theta_0 [2\pi] \end{cases} .$$

Prop. (Équation $\exp(z) = w$)
Soit $w \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z \in \mathbb{C}$ (variable). Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. $\exp(z) = w$
2. $w \in \mathbb{C}^*$ et

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln(\rho) + i\theta + i2\pi k$$

   où $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est tel que $e^{i\theta}\rho = w$.

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\arg(rz) = \arg(z) \quad [2\pi].$$

Défi.
On dit qu'un réel θ est un des *arguments* d'un complexe z non nul quand

$$\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{i\theta}\rho = z.$$

Rema.
C'est dire que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$.

Nota.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $\arg(z)$ pour un des arguments de z et $\mathrm{Arg}(z)$ pour celui qui tombe dans $]-\pi, \pi]$.

Exem.
- $\arg(0 + 3i) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
- $\arg(2 + 2\sqrt{3}\, i) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi] = 60°$ $[360°]$.
- $\mathrm{Arg}(4 - 4i) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Prop.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0$ $[\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

Prop. (Arguments d'un produit, d'un quotient)
Si $z_1 = e^{i\theta_1}\rho_1$ et $z_2 = e^{i\theta_2}\rho_2$ (non nuls). Alors

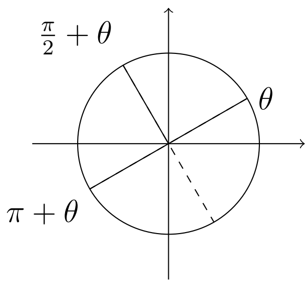
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi];$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi].$$

On a aussi
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.

7.3. Trigonométrie circulaire

Prop.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $(\cos(\theta+\pi), \sin(\theta+\pi)) = (-\cos\theta, -\sin\theta)$.
- $(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta)) = (-\cos\theta, \sin\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2}+\theta), \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta), \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)) = (\sin\theta, \cos\theta)$.



Prop. Formules d'addition
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ainsi, d'une part,
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

D'autre part,
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = -\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

Meth. (Retrouver les formules d'addition)
1. $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$
2. $e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$

En égalisant ces expressions, on obtient promptement par identification ce que l'on cherche.
Pour les formules avec $(a-b)$, il suffit de remplacer b par $-b$.

Prop. Formule de duplication
Soit $a \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.

Prop. Formule de Moivre
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Prop. (Puissance n-ième d'une somme, pour n petit)
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Ainsi,
- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = 1a + 1b$
- $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
- $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Figu. Triangle de Pascal
On retrouve les coefficients binomiaux précédents à l'aide du tableau suivant :

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Prop. Formules d'Euler
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Prop. Formules de linéarisation
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

Prop. Formules de factorisation
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Méth. (Technique de l'arc moitié)
Pour factoriser une somme d'exponentielles $e^{ia} + e^{ib}$, on met en facteur l'exponentielle de la

moyenne des angles ($e^{i\frac{a+b}{2}}$).

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

De même :

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Méth. (Transformation de $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$)
On considère $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On veut écrire $f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t - \varphi)$.
1. On factorise par le module $A = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$f(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t) \right).$$

2. On identifie un angle φ. Comme $(\frac{a}{A})^2 + (\frac{b}{A})^2 = 1$, il existe φ tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{A}.$$

3. On applique la formule d'addition :

$$f(t) = A(\cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)) = A\cos(\omega t - \varphi).$$

Le nombre φ est un argument du complexe $a + ib$.

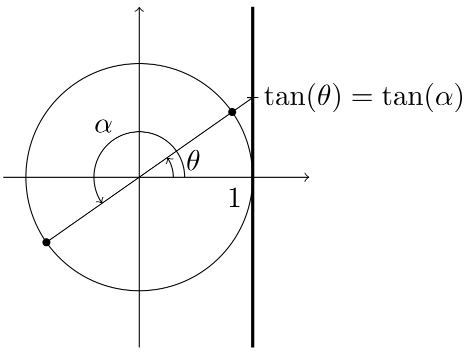
Défi. (Tangente)
On considère un réel θ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. On définit ainsi la *tangente* de θ comme suit :

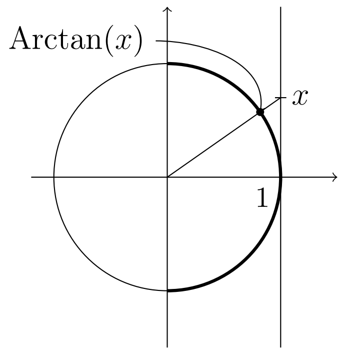
$$\tan(\theta) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Défi. (Arctangente)
Pour tout réel x, on appelle *arctangente* de x, noté $\mathrm{Arctan}(x)$, l'unique réel θ tel que :

$$\begin{cases} \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(\theta) = x \end{cases}$$

Figu.





Prop. (Inégalités géométriques)
Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta).$$

8. Fondements 3 : Modes de raisonnements

8.1. Raisonnement par disjonction de cas

Exem. 1.1
Montrons que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)$ est divisible par 2.
En effet, raisonnons par disjonction de cas. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Cas 1 : Supposons que n est pair.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k'$ avec $k' = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$. Donc $n(n+1)$ est pair dans ce cas.

Cas 2 : Supposons que n est impair.
Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2l+1$. Alors $n(n+1) = (2l+1)(2l+2) = 2(2l+1)(l+1) = 2l'$ avec $l' = (2l+1)(l+1) \in \mathbb{Z}$. Donc $n(n+1)$ est pair dans ce cas également.

Bilan : En somme, $n(n+1)$ est pair dans tous les cas.

Exem. 1.2
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrons que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
En effet, raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1 : $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$. L'égalité est vérifiée.

Cas 2 : $x \in A$ et $x \notin B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ car $x \notin A \cap B$. $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 0 = 0$. L'égalité est vérifiée.

Cas 3 : $x \notin A$ et $x \in B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 \times 1 = 0$.

Cas 4 : $x \notin A$ et $x \notin B$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 \times 0 = 0$.

Bilan : Dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

8.2. Raisonnement par (l'implication) contraposée

Noti.
Le raisonnement par contraposée s'appuie sur l'équivalence logique

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P).$$

Pour démontrer $P \implies Q$, on peut choisir de démontrer que si Q est fausse, alors P est fausse.

Exem. 2.1
Montrons que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \neq 0 \implies (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$.
Raisonnons par contraposée.
Supposons $\neg(a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$, c'est-à-dire $(a = 0 \text{ ou } b = 0)$. Alors $ab = 0$.
La contraposée est démontrée. L'objectif est atteint.

Exem. 2.2
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrons que si ab est pair, alors a est pair ou b est pair.
Raisonnons par contraposée.
Supposons que $\neg(a$ pair ou b pair$)$, c'est-à-dire que a est impair ET b est impair. Alors il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k+1$ et $b = 2l+1$.

$$ab = (2k+1)(2l+1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1.$$

Donc ab est impair. La propriété est démontrée.

Exem. 2.3
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q}$.
Raisonnons par contraposée.
Supposons $1 + x \in \mathbb{Q}$. Alors $x = (1+x) - 1$. Comme $\mathbb{Q}$ est stable par soustraction (différence de deux rationnels), $x \in \mathbb{Q}$. On a montré $1 + x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{Q}$, ce qui conclut la preuve.

8.3. Raisonnement par l'absurde

Noti.
Pour démontrer une proposition P, on suppose $\neg P$ (la négation de P) et on cherche à aboutir à une contradiction (absurdité).

Exem. 3.1
Montrons que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et la fraction est irréductible ($\text{PGCD}(a, b) = 1$).
En élevant au carré : $2 = \frac{a^2}{b^2} \implies a^2 = 2b^2$. Donc a^2 est pair, ce qui implique que a est pair.
On écrit $a = 2a'$ avec $a' \in \mathbb{N}^*$.
L'équation devient : $(2a')^2 = 2b^2 \implies 4a'^2 = 2b^2 \implies 2a'^2 = b^2$. Donc b^2 est pair, ce qui implique que b est pair.
Ainsi a et b sont tous deux pairs, donc la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible (simplifiable par 2).
C'est absurde par rapport à l'hypothèse de départ. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exem. 3.2
Montrons que les complexes 1 et i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$.
Supposons par l'absurde que $b \neq 0$. Alors $i = -\frac{a}{b}$. Or $a, b \in \mathbb{R}$, donc $-\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$. Cela signifierait que $i \in \mathbb{R}$, or $i^2 = -1$ (impossible pour un réel). Absurde. Donc $b = 0$.
Puis $a + 0 \cdot i = 0 \implies a = 0$. On a montré que $a = 0$ et $b = 0$.

8.4. Raisonnement par analyse et synthèse

Voca.
- On dit qu'une proposition N est une *condition nécessaire* à une proposition P quand $P \implies N$.
- On dit qu'une proposition S est une *condition suffisante* à P quand $S \implies P$.
- On parle de condition nécessaire et suffisante lorsque $P \iff S$.

Stru.
Le raisonnement par analyse-synthèse sert souvent à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème ou à prouver l'existence et l'unicité.

1. Analyse (Unicité / Condition Nécessaire) : On suppose que le problème admet une solution x. On déduit des propriétés sur x pour réduire le champ des possibles (trouver des candidats).

$$\text{Solution} \implies \text{Candidat}$$

2. Synthèse (Existence / Condition Suffisante) : On vérifie si les candidats trouvés sont effectivement solutions.

$$\text{Candidat} \implies \text{Solution}$$

Exem. 4.1
On cherche l'ensemble des réels x tels que $x^2 = 1$.

<u>Analyse</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution. $x^2 = 1 \implies x^2 - 1 = 0 \implies (x-1)(x+1) = 0$. Donc $x = 1$ ou $x = -1$. Les seuls candidats possibles sont 1 et -1.

<u>Synthèse</u> :
- Si $x = 1$, alors $x^2 = 1^2 = 1$. Ça marche.
- Si $x = -1$, alors $x^2 = (-1)^2 = 1$. Ça marche.

<u>Conclusion</u> : L'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.

Exem. 4.2
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe un unique couple $(s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $z = sr$.

<u>Analyse</u> : Supposons qu'un tel couple existe. On a $z = sr$. En passant au module : $|z| = |sr| = |s||r|$. Comme $s \in \mathbb{U}$, $|s| = 1$. Comme $r \in \mathbb{R}_+^*$, $|r| = r$. Donc $r = |z|$. L'égalité $z = sr$ devient $z = s|z|$, d'où $s = \frac{z}{|z|}$ (possible car $z \neq 0$). Le seul couple candidat est $(s, r) = \left(\frac{z}{|z|}, |z|\right)$.

<u>Synthèse</u> : Posons $r_0 = |z|$ et $s_0 = \frac{z}{|z|}$. On a bien $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifions que $s_0 \in \mathbb{U}$: $|s_0| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$. Enfin, $s_0 r_0 = \frac{z}{|z|} \times |z| = z$. Le couple convient.

Exem. 4.3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (s, a) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} f = s + a \\ s \text{ est paire} \\ a \text{ est impaire} \end{cases}$$

En effet, raisonnons par analyse-synthèse.

<u>Analyse</u> : Supposons que le couple (s, a) existe. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} s(x) + a(x) = f(x) \\ s(-x) + a(-x) = f(-x) \end{cases}$$

Comme s est paire, $s(-x) = s(x)$. Comme a est impaire, $a(-x) = -a(x)$. Le système devient :

$$\begin{cases} s(x) + a(x) = f(x) \quad (L_1) \\ s(x) - a(x) = f(-x) \quad (L_2) \end{cases}$$

En faisant $(L_1) + (L_2)$, on obtient $2s(x) = f(x) + f(-x)$, soit $s(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. En faisant $(L_1) - (L_2)$, on obtient $2a(x) = f(x) - f(-x)$, soit $a(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Synthèse : Posons les fonctions $s_0 : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $a_0 : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
- Somme : $s_0(x) + a_0(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$.
- Parité de s_0 : $s_0(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = s_0(x)$. Donc s_0 est paire.
- Parité de a_0 : $a_0(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -a_0(x)$. Donc a_0 est impaire.

Conclusion : Le couple existe et est unique.

9. Fonction d'une variable réelle 1 : Étude globale

9.1. Généralités

Noti.
On appelle *fonction* d'une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute relation qui fait passer de tout nombre x de D à un unique nombre y de $\mathbb{R}$; auquel cas, on note $y = f(x)$ si la fonction est appelée f.
Lorsque l'ensemble de départ n'est pas précisé, on appelle *ensemble de définition* de f l'ensemble des valeurs de la variable x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles $f(x)$ existe.

Défi.
On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dit que f est :
a) *constante* quand : $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) = c$;
b) *croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
c) *strictement croissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;
d) *décroissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)$;
e) *strictement décroissante* quand : $\forall x_1 \in D,\ \forall x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Défi.
On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *monotone* quand f est croissante ou f est décroissante. On adapte pour la monotonie stricte.

Prop. Théorème des valeurs intermédiaires
Soit un intervalle I, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, puis $v \in \mathbb{R}$. Si v est compris entre deux valeurs de f, alors v est aussi une valeur de f.

Prop. Théorème de la bijection continue
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$; puis $f : I \to J$. Supposons que :
- ET f est continue ;
- ET f est strictement monotone ;
- ET la limite de f en l'extrémité inf. de I est égale à l'extrémité inf. de J ; de même avec les extr. sup. (ou inversement selon la monotonie).

Ainsi, $f : I \to J, x \mapsto y = f(x)$ admet une réciproque $g : J \to I, y \mapsto x \in I$ telle que $f(x) = y$.

Prop.
Si l'on connaît la représentation graphique de $f : x \mapsto f(x)$, on peut obtenir celles de certaines fonctions transformées de la manière suivante :
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x-a)$ se déduit de celle de f par une translation horizontale de vecteur $\vec{u} = \binom{a}{0}$.
- La représentation graphique de $x \mapsto f(x)+b$ se déduit de celle de f par une translation verticale de vecteur $\vec{v} = \binom{0}{b}$.
- La représentation de $x \mapsto f(2a-x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a$.

- La représentation de $x \mapsto 2b - f(x)$ se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = b$.
- La représentation de $x \mapsto f(\lambda^{-1}x)$, avec $\lambda > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de centre O et de rapport λ dans la direction horizontale.
- La représentation de $x \mapsto \mu f(x)$, avec $\mu > 0$, se déduit de celle de f par une dilatation de rapport μ dans la direction verticale.
- La représentation graphique de la fonction réciproque f^{-1} se déduit de celle de f par une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant, c'est-à-dire la droite $y = x$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote horizontale* de la courbe de f toute droite d'équation $y = \mathrm{C}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = \mathrm{C}$.

Défi.
On appelle (droite) *asymptote verticale* toute droite d'équation $x = \mathrm{C}$ telle que $\lim\limits_{x \to \mathrm{C}} f = \pm\infty$.

Défi.
On considère $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est *paire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$.

Défi.
On dit que f est *impaire* quand :
- ET $\forall x \in D,\ -x \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

Défi.
On considère $T \in \,]0, +\infty[$. On dit que f est T-*périodique* ou que f admet T pour *période* quand :
- ET $\forall x \in D,\ x + T \in D$
- ET $\forall x \in D,\ f(x) = f(x + T)$

On parle de *la* période pour désigner la plus petite quand elle existe.

Défi.
Une *fonction périodique* est une fonction qui admet au moins une période ($T > 0$).

Défi.
On dit que f est :
- *majorée* par une constante $M \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$;
- *minorée* par une constante $m \in \mathbb{R}$ quand $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$;
- *bornée* par deux constantes $m \leqslant M$ quand $\forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Prop.
La fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ est bornée si, et seulement si, la fonction réelle positive

$|f| : D \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)|$ est majorée par une constante.

Défi.
On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un *minimum global* de f quand :
- ET $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$
- ET $\exists x_0 \in D,\ f(x_0) = m$

On parle de *minimum local* en un point x_* quand on se restreint autour de x_*.
Adaptation pour un maximum.

Défi.
On parle d'*extremum* pour tout minimum ou tout maximum.

9.2. Dérivation et représentation graphique

Prop.
Soit un intervalle I de plus d'un point, puis $f : I \to \mathbb{R}$. Supposons que f est dérivable en tout point de I. Ainsi :
1. f est constante ssi f' est nulle.
2. f est croissante ssi f' est positive.
3. f est strictement croissante ssi :
   - ET f' est positive ;
   - ET l'ensemble des points d'annulation de f' ne contient pas d'intervalle de plus d'un point.

On adapte pour la décroissance.

Défi.
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *deux fois dérivable* quand f est dérivable et que f' est dérivable ; auquel cas, on note $f'' = (f')'$: *dérivée seconde* de f.

Prop.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un r.o.n. $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Si f'' est positive, alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.
2. Si f'' est négative, alors $\mathcal{C}$ est en-dessous de chacune de ses tangentes.

9.3. Fonctions réelles de référence

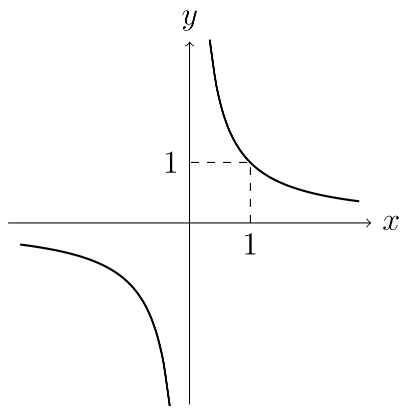
Les dérivées ne sont pas reprises ici ; se référer à la fiche dédiée.

FONCTIONS CONSTANTES

FONCTIONS AFFINES

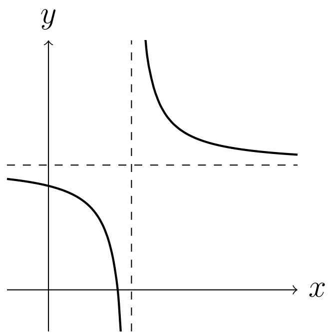
FONCTION INVERSE

Figu.



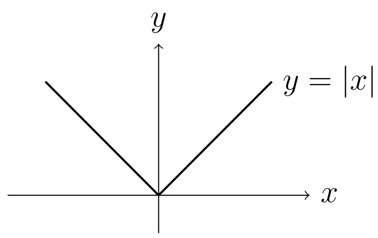
Quotients de fonctions affines

Figu.



Fonction valeur absolue

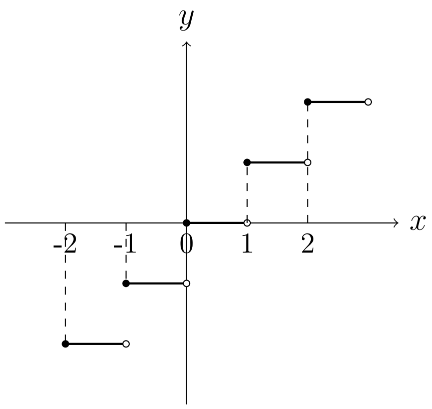
Figu.



Fonction partie entière

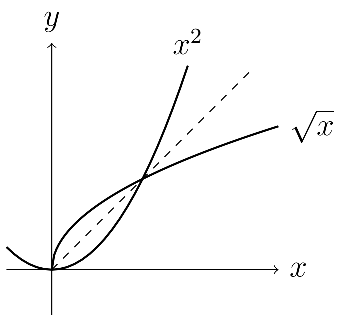
Noti.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$, où $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$.

Figu.



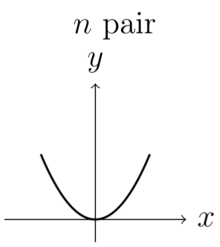
Fonctions carré et racine carrée

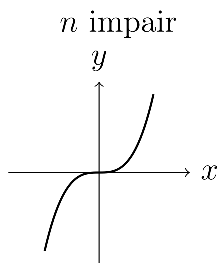
Figu.



Puissance n-ième

Figu.

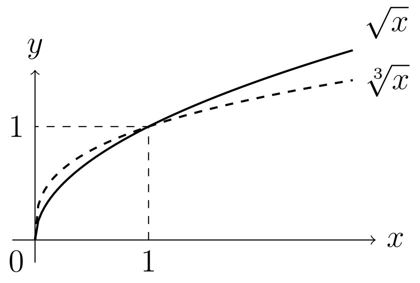




Racines n-ièmes

> **Défi.**
> Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine n-ième* de $x \geqslant 0$, notée $\sqrt[n]{x}$, l'unique réel positif dont la puissance n-ième vaut x.

Figu.



Fonctions polynomiales et rationnelles

Défi.
On appelle *fonction polynomiale* toute combinaison linéaire de fonctions puissances entières.

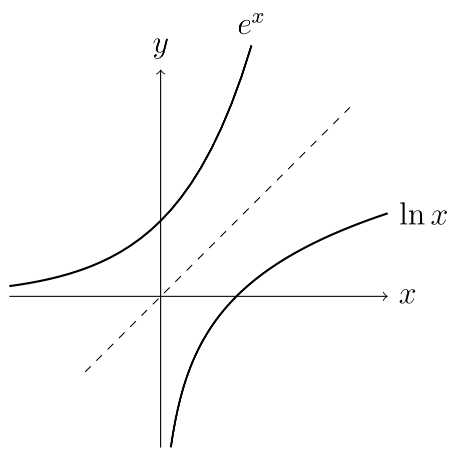
Défi.
Une *fonction rationnelle* est le quotient de deux fonctions polynomiales.

Fonctions exponentielles et réciproques

Défi.
exp est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et valant 1 en 0.

Défi.
Le *logarithme népérien* ln est défini sur $]0,+\infty[$ comme la bijection réciproque de l'exponentielle. C'est que $\ln(y)$ est l'unique réel dont l'image par l'exponentielle donne y.

Figu.



Défi.
On considère $b \in]0,+\infty[$.

- Pour tout $x \in]-\infty,+\infty[$, l'*exponentielle en base b* de x est

$$b^x \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(x \ln b).$$

- Le *logarithme en base* b de tout $y \in]0, +\infty[$ lorsque $b \neq 1$ est

$$\log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}.$$

Rema.
Les fonctions $\exp_b$ et $\log_b$ sont réciproques l'une de l'autre.

Fonction puissance réelle de degré d

Défi.
Pour $d \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, la puissance de degré d est définie par

$$x^d = \exp(d \ln x).$$

Prop. (Prolongement en 0)
- Si $d > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^d = 0$.
- Si $d < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^d = +\infty$.

Prop. Théorème des croissances comparées
Soit $\alpha, \beta, \gamma \in]0, +\infty[$.

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

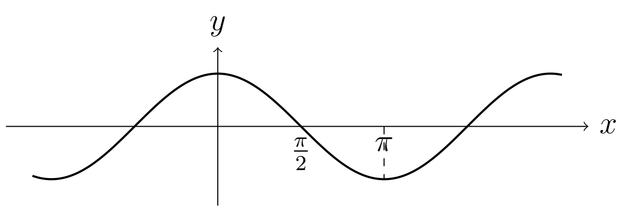
$$e^{\alpha y} |y|^\beta \xrightarrow[y \to -\infty]{} 0$$

$$y^\beta |\ln y|^\gamma \xrightarrow[y \to 0^+]{} 0$$

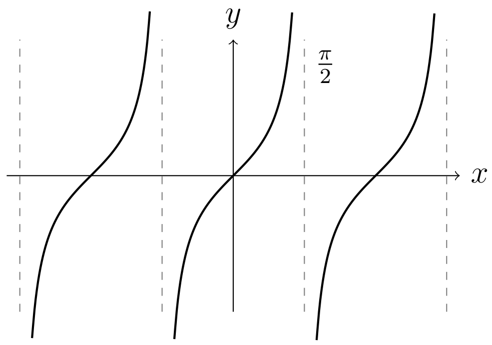
Fonctions circulaires et réciproques

Méth.
La construction de la courbe complète de cos se fait par symétries successives (centrale puis axiale) à partir du segment $[0, \pi/2]$, puis par translations (périodicité).

Figu.



Figu. (Tangente)

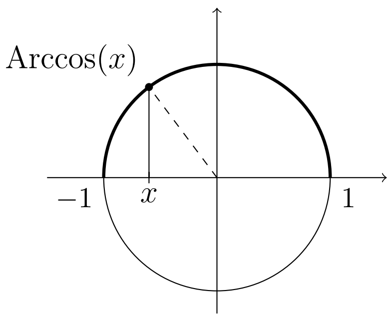


Défi.
$\forall x \in [-1, 1]$, on appelle *arccosinus* de x, noté $\text{Arccos}(x)$, l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal à x.

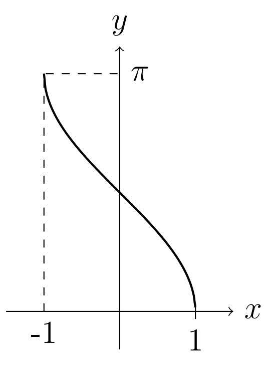
$$\begin{cases} \text{Arccos}(x) \in [0, \pi] \\ \cos(\text{Arccos } x) = x \end{cases}$$

(Attention aux deux "c" !)

Figu.



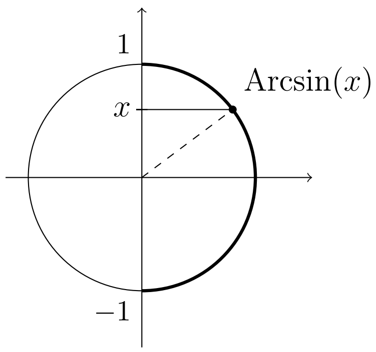
Figu.



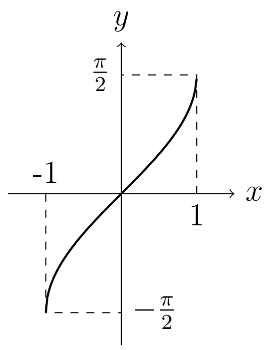
Défi.
$\forall x \in [-1, 1]$, on appelle *arcsinus* de x, noté $\text{Arcsin}(x)$, l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus est égal à x.

$$\begin{cases} \text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin(\text{Arcsin } x) = x \end{cases}$$

Figu.



Figu.

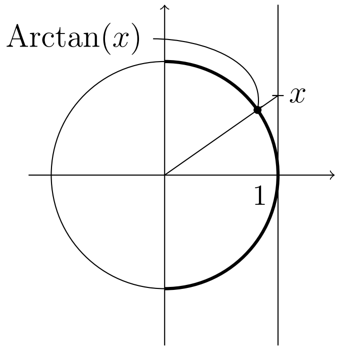


Défi.
Pour tout x de $]-\infty, +\infty[$, on appelle *arctangente* de x, noté $\text{Arctan}(x)$, l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x.

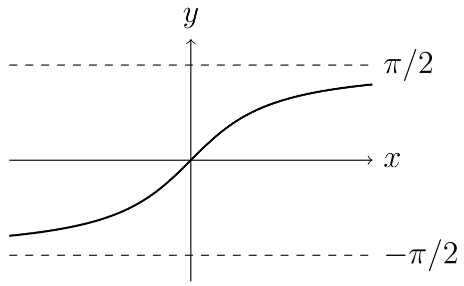
$$\begin{cases} \text{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(\text{Arctan } x) = x \end{cases}$$

Rema.
$\text{Arctan}(\tan(\theta)) = \theta$ uniquement si $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sinon, $\text{Arctan}(\tan(\theta))$ est l'unique réel de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ayant même tangente que θ, *i.e.* $\text{Arctan}(\tan(\theta)) \equiv \theta\ [\pi]$.

Figu.



Figu.



Fonctions hyperboliques

Défi.
Pour tout réel x, on appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* les nombres réels :

$$\operatorname{ch}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sh}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Prop.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(iz) = \cos(z) \\ \operatorname{sh}(iz) = i\sin(z) \end{cases}$$

Prop.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x) \\ \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x) \end{cases}$$

Prop.

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

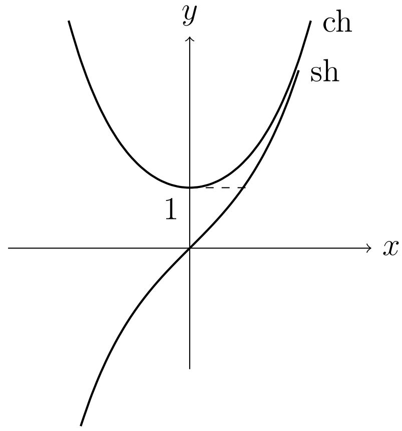
Prop.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x \\ \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Prop.
Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh}(x), \\ (\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch}(x). \end{cases}$$

Figu.


y
ch
sh
1
x

10. Plan Complexe 3 : Équations Polynomiales

10.1. Équation polynomiale dans $\mathbb{C}$

Noti.
Une *équation polynomiale*, dite aussi *algébrique*, est une équation qui met en jeu des fonctions polynomiales. En voici un exemple : $2z^2 - z + i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Toute solution d'une équation algébrique est appelée *racine* de cette équation. C'est aussi une racine, ou un zéro, de la fonction polynomiale associée.

Prop.
Soit $a, z \in \mathbb{C}$. Ainsi :
- $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$;
- $z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + za + a^2)$.

Prop.
Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$. Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) - P(a) = (z-a)Q(z).$$

Prop.
Si a est une racine de P (c'est-à-dire $P(a) = 0$), alors on peut factoriser $P(z)$ par $(z-a)$:

$$P(z) = (z-a)Q(z).$$

Prop.
Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k z^k$ une fonction polynomiale. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{C_k} (\overline{z})^k.$$

En particulier, si tous les coefficients C_k sont réels (i.e. P est à coefficients réels), alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{P(z)} = P(\overline{z}).$$

Prop.
Si un nombre complexe est racine d'une fonction polynomiale à coefficients réels, alors son conjugué l'est aussi.

$$\big(P \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad P(z) = 0\big) \implies P(\overline{z}) = 0.$$

10.2. Racines carrées d'un complexe

Défi.
Soit $a \in \mathbb{C}$. Les *racines carrées complexes* de a sont les solutions d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ de l'équation algébrique
$$z^2 = a.$$

Rema.
Il convient de ne pas confondre les racines carrées complexes d'un nombre avec l'unique racine carrée réelle positive d'un réel positif.

Exem.
- Les complexes i et $-i$ sont les racines carrées complexes de -1.
- Le complexe $2+i$ est une racine carrée complexe de $3+4i$.

Prop.
On a $\forall z \in \mathbb{C}$:
- $z^2 = 0 \iff z \in \{0\}$;
- $z^2 = 1 \iff z \in \{-1; +1\}$.

Prop.
Soit $w \in \mathbb{C}^*$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que $z_0^2 = w$. Ainsi,
- $z_0 \neq 0$;
- $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 = w \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 = 1$;
- $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 = w \iff z \in \{\pm z_0\}$.

Prop.
Soit $w \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, si $w > 0$, alors
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm\sqrt{w}\}.$$
Si $w < 0$, alors
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm i\sqrt{-w}\}.$$

Prop. (Forme exponentielle des racines carrées)
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi, \pi]$ tel que $re^{i\theta} = w$. Ainsi,
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}\}.$$

Prop. (Forme algébriques des racines carrées)
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $a + ib = w$. Ainsi,
$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\} = \{\pm z_0\}$$
où
- $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ si $w \notin \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Re}(z_0) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ si $w \in \mathbb{R}$.

10.3. Discriminant d'une fonction polynomiale du second degré

Prop.
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Ainsi,
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
- $\frac{a^2+b^2}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

Prop.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. Ainsi, il existe exactement un triplet $(C, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = C(z-\alpha)^2 + \beta.$$

Voca.
La forme $z \mapsto az^2 + bz + c$ est la forme *développée réduite*, et la forme $z \mapsto C(z-\alpha)^2 + \beta$ est la forme *canonique* de la fonction polynomiale.

Rema.
$C = a$.

Défi.
On appelle *discriminant* d'une fonction polynomiale complexe du second degré $z \mapsto az^2+bz+c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le complexe

$$b^2 - 4ac.$$

Prop. (Équation du second degré, cas réel)
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Ainsi,
1. si $\Delta > 0$, alors l'ensemble S des solutions de l'éq. alg. $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est constitué des éléments
$$S = \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}.$$
2. Si $\Delta < 0$, alors $S = \emptyset$.
3. Si $\Delta = 0$, alors $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$.

En somme, si $\Delta < 0$, alors $S = \emptyset$. Sinon $S = \left\{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Prop. (Équation du second degré, cas complexe)
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Ainsi, l'ensemble des racines complexes de $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az^2 + bz + c$ est

$$S = \left\{ \frac{-b \pm \delta}{2a} \right\}$$

où δ est une des racines carrées complexes de Δ, arbitrairement choisie.

Rema.
Ci-avant, si $\Delta = 0$, alors S possède exactement un élément ($\delta = 0$). Sinon S possède exactement deux éléments.

Appl. (Équation complexe et calcul de δ)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z : $z^2 - (1+i)z + i = 0$.

1. Calcul du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1+i)^2 - 4(1)(i) = (1+2i-1) - 4i = -2i.$$

2. Recherche d'une racine carrée δ de Δ
   On cherche $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = -2i$.
   - Voie algébrique (Système)
     Posons $\delta = x + iy$. On a les équivalences :

$$\delta^2 = -2i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & \text{(Re)} \\ 2xy = -2 & \text{(Im)} \\ x^2 + y^2 = |-2i| = 2 & \text{(Mod)} \end{cases}$$

     Par somme et différence des lignes (1) et (3), on obtient $2x^2 = 2$ et $2y^2 = 2$, d'où $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$. La ligne (2) impose que x et y soient de signes contraires ($xy = -1$). On choisit (arbitrairement) le couple $(1, -1)$.

$$\delta = 1 - i.$$

   - Voie géométrique (Exponentielle)
     On écrit Δ sous forme exponentielle :

$$\Delta = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

     Les racines carrées sont donc $\pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Choisissons celle avec le signe $+$:

$$\delta = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i.$$

3. Conclusion
   Les solutions sont $z = \frac{-b\pm\delta}{2a}$:

$$z_1 = \frac{(1+i)-(1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i \quad ; \quad z_2 = \frac{(1+i)+(1-i)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$S = \{1, i\}.$$

10.4. Formes d'un polynôme du second degré

Voca.
1. Voici deux exemples de *formes factorisées* :
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_1(z) = 2(z-1)(z+2)$
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_2(z) = 3(z+4)(z-5)$
2. Voici deux exemples de *formes canoniques* :
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_1(z) = 2(z+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{2}$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_2(z) = 3(z - \frac{1}{2})^2 - \frac{243}{4}$

3. Voici deux exemples de *formes développées réduites* :
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_1(z) = 2z^2 + 2z - 4$
   - $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_2(z) = 3z^2 - 3z - 60$

Rema.
Si on ne travaille qu'avec des nombres réels, alors la fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ n'admet pas de forme factorisée (comme produit de fonctions polynomiales de degré 1) car elle n'admet pas de racine réelle. Plus généralement, il n'y a pas de forme factorisée (dans $\mathbb{R}$) si et seulement si le discriminant est strictement négatif.

Prop. (Relation entre coefficients et racines)
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az^2 + bz + c$. Notons z_- et z_+ les deux racines complexes de P. Ainsi

$$z_- + z_+ = -\frac{b}{a}$$
$$z_- z_+ = \frac{c}{a}$$

10.5. Racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$

Défi.
On considère $n \in [\![1, +\infty[\![$ et $w \in \mathbb{C}$. On dit qu'un nombre complexe z est une des *racines n-ièmes complexes* de w quand

$$z^n = w.$$

Exem.
1. Le complexe 2 est une racine troisième de 8.
2. Le complexe i est une des racines 4-ièmes de 1.

Nota.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Exem.
- $\mathbb{U}_1 = \{1\}$
- $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{j^0, j^1, j^2\}$; $j = e^{i2\pi/3}$.
- $\mathbb{U}_4 = \{+1, -1, +i, -i\} = \{1, i, i^2, i^3\} = \{i^0, i^1, i^2, i^3\}$.

Prop.
On a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n = 0 \iff z = 0.$$

Prop.
$\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Prop. (Produit et quotient)
$\mathbb{U}_n \neq \emptyset$ car $1 \in \mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{C}^*$ car $0^n \neq 1$ ($n \geqslant 1$). Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$. Ainsi,

$$\begin{cases} z_1 z_2 \in \mathbb{U}_n \\ \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}_n \end{cases}.$$

Prop.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $z^{-1} \in \mathbb{U}_n$ et $\overline{z} \in \mathbb{U}_n$.

Rema.
Si $z \in \mathbb{U}$, alors $\overline{z} = z^{-1}$ ($z\overline{z} = |z|^2$).

Prop.
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que $z_0^n = w$. Ainsi, $z_0 \neq 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = w \iff \exists \xi \in \mathbb{U}_n, \quad z = \xi z_0.$$

Prop. (Description de $\mathbb{U}_n$)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U}_n \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right).$$

C'est que

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2\pi k}{n}} : k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Prop. (Racines n-ièmes de $w \in \mathbb{C}^*$)
Soit $w \in \mathbb{C}^*$. On a :

1. w admet au moins une racine n-ième ;
2. si z_0 est une racine n-ième (particulière) de w alors l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de w est constitué de $z_0\xi_k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, où $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \xi_k = \exp(i\frac{2\pi k}{n})$;
3. les racines n-ièmes de w sont au nombre de n.

Appl.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z : $z^3 = i$.

<u>Pas 1°</u> Posons

$$z_0 \overset{\text{def}}{=} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

Ainsi,

$$z_0^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Donc, comme le complexe i est <u>non nul</u>, z_0 est <u>une des trois racines troisièmes</u> de ce complexe.

<u>Pas 2°</u> Or l'ensemble des trois racines troisièmes de l'unité est :

$$\mathbb{U}_3 = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$$

où, pour tout $k \in \{0; 1; 2\}$, $\xi_k = e^{i\frac{2\pi k}{3}}$.
Commentaire. C'est-à-dire que

$$\begin{cases} \xi_0 = e^{i2\pi\cdot\frac{0}{3}} = 1, \\ \xi_1 = e^{i2\pi\cdot\frac{1}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \\ \xi_2 = e^{i2\pi\cdot\frac{2}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Fin de commentaire.

<u>Pas 3°</u> Donc, d'après les connaissances communes de référence, l'ensemble des solutions, c'est-à-dire des trois racines troisièmes du complexe i, est

$$S = \{z_0\xi_0, z_0\xi_1, z_0\xi_2\}.$$

C'est-à-dire

$$S = \left\{\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i\right\}.$$

11. FONDEMENTS 4 : ENTIERS NATURELS ET RÉCURRENCE

11.1. Ensemble ordonné des entiers naturels

Noti. (Énumération des entiers naturels)
- Le nombre zéro (0) est le plus petit des entiers naturels ;
- le nombre un (1) est le plus petit des entiers naturels autre que zéro ;
- et pour tout entier naturel n, le nombre $n+1$ est le plus petit des entiers naturels strictement supérieurs à n.

Prop. (Primitive du plus petit élément dans $\mathbb{N}$)
Si une partie des entiers naturels est non vide, alors elle possède un plus petit élément (le premier dans l'ordre ascendant).

Prop. (Propriété du plus grand élément dans $\mathbb{N}$)
Si une partie des entiers naturels est non vide et majorée, alors elle possède un plus grand élément, lequel est unique (le dernier dans l'ordre ascendant).

Prop. (Principe de récurrence dans $\mathbb{N}$)
Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si :
- ET $0 \in A$;
- ET $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in A \implies n+1 \in A$;

alors $A = \mathbb{N}$.

Prop. (Raisonnement par récurrence)
On considère une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendante d'une variable entière naturelle n. Ainsi, si :
- ET $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
- ET pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, quel que soit $n \in \mathbb{N}$;

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

11.2. Raisonnement par récurrence simple

Méth.
On souhaite montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$. Pour ce faire, raisonnons par récurrence :

- Initialisation
  On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (calcul, observation...). Donc l'initialisation est établie.
- Hérédité
  Soit $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - On part de la définition au rang $n+1$ ou de l'expression à atteindre.
  - On utilise l'hypothèse de récurrence pour transformer l'expression.
  - On démontre l'égalité ou l'inégalité souhaitée pour le rang $n+1$.

L'hérédité est établie.

- Conclusion
  En vertu du principe de récurrence sur l'ensemble ordonné des entiers naturels, l'objectif est atteint.

11.3. Raisonnement par récurrence double

Prop. (Principe de récurrence double)
Étant donné une suite de propositions $(\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2) \dots)$. Si :
- ET $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies ;
- ET $\forall n \in [\![0, +\infty[\![, \quad \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$;

alors : $\forall n \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{P}(n)$.

Rema.
Pour une récurrence double, l'initialisation nécessite de vérifier la propriété aux deux premiers rangs (n_0 et n_0+1). L'hérédité consiste à supposer la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ pour la démontrer au rang $n+2$.

11.4. Complément : raisonnement par récurrence « forte »

Prop.
La proposition $\forall n \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{P}(n)$ veut dire aussi :

$$\forall m \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{Q}(m)$$

où pour tout $m \in [\![0, +\infty[\![, \mathcal{Q}(m)$ signifie « toutes les prop. $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots,$ et $\mathcal{P}(m)$ sont vraies ».

Rema.
Dans une récurrence forte, pour démontrer $\mathcal{P}(n+1)$ (ou $\mathcal{P}(m)$ selon la notation), on suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers inférieurs ou égaux à n (ou $m-1$), et non pas seulement pour le précédent immédiat.

12. Géométrie élémentaire 2 : Le plan

12.1. Déterminant dans une base orthonormée directe

Noti.
On considère un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Pour tout couple de vecteurs non nuls $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{P}$, la notation $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne aussi une des mesures de l'angle orienté qui porte de la demi-droite $[O, \vec{u})$ à la demi-droite $[O, \vec{v})$. Ces mesures sont égales modulo 2π.

Prop.
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathcal{P}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \underset{2\pi}{=} (\vec{u}, \vec{w});$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \underset{2\pi}{=} -(\vec{v}, \vec{u}).$$

Défi. (Déterminant d'un couple de vecteurs)
Dans un plan orienté muni d'une base orthonormée directe, on appelle *déterminant* du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ l'unique réel :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}. \end{cases}$$

Prop.
Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Alors,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm AB \times AK$$

où K est le projeté orthogonal de C sur la perpendiculaire à (AB) en A.

Prop.
Ci-avant, la valeur absolue du $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$ est égale à l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Prop.
Le déterminant est :
1. bilinéaire :
   a. pour tout vecteur $\vec{u}$,

$$\forall (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \det(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \det(\vec{u}, \vec{v}_2);$$

   b. pour tout vecteur $\vec{v}$,

$$\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \det(\mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \mu_1 \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu_2 \det(\vec{u}_2, \vec{v});$$

2. antisymétrique :
$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}^2,\ \det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u}).$$

Prop.
Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'une b.o.n.d. Soient deux vecteurs $\vec{v}_1\binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{v}_2\binom{x_2}{y_2}$. Ainsi,
$$\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Prop.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

12.2. Droites du plan

Défi.
Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère un point A et un vecteur non nul $\vec{v}$. L'unique droite passant par A et dirigée par $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que
$$\vec{AM} \in \mathbb{R}\vec{v} \quad \text{où} \quad \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Prop.
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan muni d'un r.o.n.d. Ainsi,
1. Il existe au moins un triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la droite $\mathcal{D}$ admette pour équation
$$ax + by = c$$
avec $(a,b) \neq (0,0)$. On parle d'*équation cartésienne.*
2. Réciproquement, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$, la partie du plan dont une équation est $ax + by = c$ est une droite, laquelle est dirigée par le vecteur $\vec{v}\binom{-b}{a}$.

Prop. (Paramétrisation)
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan.
1. On peut trouver au moins un couple $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et un couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout point $M\binom{x}{y}$,
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$
2. Réciproquement, étant donné $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'ensemble
$$\left\{ M\begin{pmatrix} x_0 + t\alpha \\ y_0 + t\beta \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$
est la droite passant par $A\binom{x_0}{y_0}$ et dirigée par $\vec{v}\binom{\alpha}{\beta}$.

Méth. (Passage d'une équation à une paramétrisation)
Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by = c$. Donnons-en une paramétrisation.

1. Choix d'un point simple $A(x_0, y_0)$ appartenant à la droite. Pour cela, on fixe par exemple $x = 0$ (alors $y = c/b$).
2. Identification d'un vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.
3. Ecriture de la paramétrisation :

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Méth. (Passage d'une paramétrisation à une équation)
Dans un plan muni d'un r.o.n.d., on considère la droite définie par

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 5t \\ y = 8 + 3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Voie 1 : Soit $M\binom{x}{y}$. $M \in \mathcal{D} \iff \vec{AM}$ colinéaire à $\vec{v}\binom{-5}{3}$, avec $A(\sqrt{2}, 8)$.

$$\det(\vec{AM}, \vec{v}) = 0 \iff 3(x - \sqrt{2}) - (-5)(y - 8) = 0.$$

On développe et réduit pour obtenir $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

Voie 2 : Le vecteur $\vec{v}\binom{-5}{3}$ dirige la droite. Une équation est de la forme $3x + 5y = c$. Comme $A\binom{\sqrt{2}}{8} \in \mathcal{D}$, on a $c = 3\sqrt{2} + 40$. D'où une équation : $3x + 5y = 40 + 3\sqrt{2}$.

Méth. (Intersection de deux droites)
Pour trouver le point d'intersection de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, on distingue les cas selon la forme de leurs équations.

Cas 1 : Deux équations cartésiennes
On résout le système linéaire 2×2

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Cas 2 : Une paramétrique et une cartésienne
Si $\mathcal{D}_1$: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ et $\mathcal{D}_2$: $ax + by = c$. On injecte les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ dans l'équation de $\mathcal{D}_2$. On obtient une équation d'inconnue t. Une fois t trouvé, on le reporte dans la paramétrisation pour avoir les coordonnées du point.

Cas 3 : Deux paramétriques
On cherche t et t' tels que $M(t) = M(t')$. Cela revient à résoudre

$$\begin{cases} x_0 + \alpha t = x_0' + \alpha' t' \\ y_0 + \beta t = y_0' + \beta' t'. \end{cases}$$

Défi. (Projeté orthogonal sur une droite)
On considère une droite $\mathcal{D}$ d'un plan, puis un point M quelconque du même plan. On appelle *projeté orthogonal* de M sur $\mathcal{D}$ l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ qui passe

par M.

Méth. (Coordonnées d'un projeté orthogonal)
Soit une droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{u}$ et un point M hors de la droite. On cherche les coordonnées du projeté orthogonal $H(x, y)$. Le point H est l'unique solution du système caractérisant l'appartenance et l'orthogonalité :

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} & \text{(Vérifie l'équation de } \mathcal{D}\text{)} \\ \vec{MH} \cdot \vec{u} = 0 & \text{(Orthogonalité).} \end{cases}$$

Exemple : Soit $\mathcal{D} : 4x + 6y = -3$ et $M(-3, 2)$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(-6, 4)$. La condition $\vec{MH} \cdot \vec{u} = 0$ équivaut à dire que $\vec{u}$ est un vecteur normal à la droite (MH). L'équation de la perpendiculaire (MH) est donc de la forme $-6x + 4y = k$. Comme $M(-3, 2) \in (MH)$, on a $k = -6(-3) + 4(2) = 18 + 8 = 26$. On résout alors le système

$$\begin{cases} 4x + 6y = -3 \\ -6x + 4y = 26 \end{cases}$$

Défi. (Distance à une droite)
On considère un point M du plan et une droite $\mathcal{D}$. On dit qu'un réel positif d est égal à la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ lorsque d est la plus petite des distances entre M et les points de $\mathcal{D}$:
- $\exists P \in \mathcal{D},\ MP = d$;
- $\forall P \in \mathcal{D},\ MP \geqslant d$.

On peut noter $\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}$.

Prop.
Si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, alors,

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = MH.$$

Défi. (Vecteur normal)
Un vecteur $\vec{n}$ est dit *normal* à une droite $\mathcal{D}$ s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Prop. (Distance à l'aide d'un vecteur normal)
Soit $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{D}$. Pour tout point $A \in \mathcal{D}$ et tout point $M \in \mathcal{P}$,

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Prop. (Vecteur normal et équation cartésienne)
Si $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, alors le vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$ est normal à $\mathcal{D}$.

Form.
Si $\mathcal{D}$ admet pour équation $ax+by+c=0$, alors pour tout $M\binom{x}{y}$,

$$\operatorname{dist}(M,\mathcal{D})=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

12.3. Cercles du plan

Défi.
Dans un plan $\mathcal{P}$, on appelle cercle de centre $\Omega\in\mathcal{P}$ et de rayon $r\in\mathbb{R}_+$ l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Omega,r)=\{M\in\mathcal{P}\mid \Omega M=r\}.$$

Rema.
- Le rayon du cercle est un nombre, tandis que les « rayons » désignent aussi les segments $[\Omega M]$.
- L'unique cercle de centre O passant par A est $\mathcal{C}(O,OA)$.
- L'unique cercle de diamètre $[AB]$ est $\mathcal{C}\left(I,\frac{AB}{2}\right)$ où I est le milieu de $[AB]$.

Prop. (Équation cartésienne)
1. Dans un r.o.n.d., le cercle $\mathcal{C}(\Omega,r)$ avec $\Omega\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$ a pour équation

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2.$$

2. Réciproquement, pour l'ensemble d'équation $Ax^2+Bxy+Cy^2+ax+by=c$, si $A\neq C$ ou si $B\neq 0$, ce n'est pas un cercle.

Méth. (Vérification d'une équation de cercle)
Question : Est-ce que l'ensemble (Γ) : $2x^2+2y^2+3x-6y-2=0$ est un cercle ?
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On normalise l'équation en divisant par 2 :

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-3y-1=0.$$

On reconnait le début d'identités remarquables (mise sous forme canonique) :
- $x^2+\frac{3}{2}x=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$;
- $y^2-3y=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$.

L'équation devient :

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-1=0.$$

En isolant les carrés, on obtient :

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=K$$

avec $K=\frac{9}{16}+\frac{9}{4}+1=\frac{9+36+16}{16}=\frac{61}{16}$.
Conclusion : Comme $K>0$, l'ensemble (Γ) est bien un cercle de centre $\Omega(-3/4;3/2)$ et de rayon $R=\sqrt{K}=\frac{\sqrt{61}}{4}$.

Prop. (Paramétrisation d'un cercle)
Le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ avec $\Omega\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_\Omega + r\cos(\theta) \\ y = y_\Omega + r\sin(\theta) \end{cases} \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

13. Pratique calculatoire 3 : Sommes et produits

13.1. Somme et produit d'une suite finie de complexes

Défi.
On considère m et n dans $\mathbb{N}$, puis $(z_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ une liste de complexes (élément de $\mathbb{C}^{[\![m,n]\!]}$). Ainsi, on définit par récurrence la somme de la liste de complexes $(z_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ comme suit :

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = \begin{cases} z_m & \text{si } n = m \\ \left(\displaystyle\sum_{k=m}^{n-1} z_k\right) + z_n & \text{si } n > m \quad (n \in [\![m+1, +\infty[\![) \end{cases}$$

On adapte cela pour le produit :

$$\prod_{k=m}^{n} z_k$$

Rema.
Dans la définition, on a sous-entendu que $m \leqslant n$. On convient que

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = 0 \quad \text{si } n < m.$$

Prop. (Associativité générale ou invariance par groupement)
Soit une suite de complexes $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p < q < r$, on a

$$\left(\sum_{k=p}^{q-1} z_k\right) + \left(\sum_{k=q}^{r} z_k\right) = \sum_{k=p}^{r} z_k.$$

Prop. (Succession d'évolution et variation globale)
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, puis $(d_1, d_2, \dots)$ une suite dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite $(z_k)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ comme suit :

$$z_k = z_{k-1} + d_k.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = z_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Prop. (Somme télescopique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$, on a

$$\sum_{k=m+1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_m.$$

Ou encore
$$\sum_{\ell=m}^{n-1}(z_{\ell+1}-z_\ell)=z_n-z_m.$$

Exem.
Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n=\dfrac{1}{n+1}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a alors
$$z_k-z_{k-1}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}.$$
Ainsi,
$$\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right).$$
Tous les termes intermédiaires se simplifient deux à deux, et il reste
$$\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})=\frac{1}{n+1}-1=z_n-z_0.$$

Prop. (Succession d'évolution et multiplicateur global)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in[\![1,+\infty[\![}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Supposons que
$$\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\quad z_n=z_{n-1}\cdot q_n.$$
Ainsi,
$$\forall n\in[\![1,+\infty[\![,\quad z_n=z_0\cdot\prod_{k=1}^{n}q_k.$$

Prop. (Produit télescopique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}, z_n\neq 0$. Ainsi, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m<n$, on a
$$\begin{aligned}\frac{z_n}{z_m}&=\prod_{k=m+1}^{n}\frac{z_k}{z_{k-1}}\\&=\prod_{\ell=m}^{n-1}\frac{z_{\ell+1}}{z_\ell}\\&=\frac{z_n}{z_{n-1}}\cdot\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\cdots\frac{z_{m+2}}{z_{m+1}}\cdot\frac{z_{m+1}}{z_m}\end{aligned}$$

Prop. (Commutativité générale et invariance par permutation)
On ne varie pas la somme d'une liste quelconque de nombres complexes si on permute ses éléments. Il en est de même pour le produit.

Défi. (Suite arithmétique)
On dit qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est *arithmétique* quand il existe au moins un réel r, appelé *raison*, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = z_n + r.$$

Défi. (Suite géométrique)
On dit qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est *géométrique* quand il existe au moins un réel q, appelé *raison*, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = q\, z_n.$$

Prop. (Terme général d'une suite arithmétique)
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons la suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad z_n = z_m + (n-m)r.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0 + nr.$$

Prop.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Ainsi, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \underbrace{\frac{a_m + a_n}{2}}_{\substack{\text{moyenne} \\ \text{des extrêmes}}} \cdot \underbrace{(1+n-m)}_{\text{nombre de termes}}.$$

Prop.
Soit une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de raison $q \in \mathbb{C}$. Ainsi, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} g_k = \begin{cases} g_m(1+n-m) & \text{si } q = 1 \\ g_m \cdot \dfrac{q^{1+n-m}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Prop. (Sommes de puissances d'entiers)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

1. $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

3. $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

13.2. Somme et produit d'une famille finie quelconque

Défi. (Somme « en vrac »)
- On appelle somme « en vrac » d'une famille finie de nombres complexes l'unique nombre complexe égal à la valeur commune des sommes des listes qu'on obtient de cette famille (en rangeant les termes d'un premier à un dernier).
- Soit un ensemble fini I, puis une famille de complexes $(z_i)_{i\in I}$. On pose alors

$$\sum_{i\in I} z_i = z_{i_1} + z_{i_2} + \cdots + z_{i_n} = \sum_{k=1}^{n} z_{i_k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est le nombre d'éléments de I et $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est une liste de tous les éléments de I sans répétition (liste arbitrairement choisie).
- On convient que $\displaystyle\sum_{i\in\emptyset} z_i = 0$.

Exem.
- Somme sur un intervalle d'entiers relatifs :

$$\sum_{k\in[\![-2,2]\!]} |k| = |0| + |1| + |-1| + |2| + |-2| = 0+1+1+2+2 = 6.$$

- Somme double sur un produit cartésien :

$$\sum_{(i,j)\in[\![0,1]\!]\times[\![0,2]\!]} (i+j) = (0+0)+(0+1)+(1+0)+(0+2)+(1+1)+(1+2).$$

Pour tout $(i,j) \in [\![0,1]\!] \times [\![0,2]\!]$, on pose $z_{i,j} = i + j$. Le tableau ci-après indique les valeurs des $z_{i,j}$:

$i \setminus j$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3

Défi. (Produit « en vrac »)
De manière analogue, on définit le produit d'une famille finie $(z_i)_{i\in I}$ par

$$\prod_{i\in I} z_i = z_{i_1} \times z_{i_2} \times \cdots \times z_{i_n} = \prod_{k=1}^{n} z_{i_k}.$$

On convient que pour l'ensemble vide, le produit est égal à l'élément neutre :

$$\prod_{i\in\emptyset} z_i = 1.$$

Prop. (Groupement par paquets)
Soit $(z_i)_{i\in I}$ une famille finie de complexes.
1. (Cas de deux paquets) Si I est la réunion disjointe de deux parties I_1 et I_2 (on note $I =$

$I_1 \sqcup I_2$), alors :

$$\sum_{i\in I_1} z_i + \sum_{i\in I_2} z_i = \sum_{i\in I} z_i.$$

2. (Cas général) Si $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ (réunion disjointe indexée par J), alors

$$\sum_{i\in I} z_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} z_i \right).$$

Prop. (Linéarité de la somme)
Soit deux familles finies de complexes $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ indexées par un même ensemble fini I.
Ainsi, $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$,

$$\lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i).$$

Rema.
Cela revient à dire que :

$$\forall (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I, \forall (b_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I, \forall \lambda \in \mathbb{C},$$
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in I} (a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i \\ \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i. \end{cases}$$

Prop. (Changement de variable par la somme discrète)
Soit I un ensemble fini, J un ensemble fini, puis $\varphi : I \to J$. Soit $g : J \to \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\sum_{i\in I} g(\varphi(i)) = \sum_{j\in\varphi(I)} \sum_{\substack{i\in I \\ \varphi(i)=j}} g(\varphi(i)).$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{i\in I} g(\varphi(i)) = \sum_{j\in\varphi(I)} g(j) \cdot \mathrm{Card}\{i \in I \mid \varphi(i) = j\}$$

où $\varphi(I)$ désigne l'ensemble des valeurs de φ.
En particulier, si toute valeur de φ reçoit un unique antécédent, alors

$$\sum_{i\in I} g(\varphi(i)) = \sum_{j\in\varphi(I)} g(j).$$

Prop. (Interversion des sommes)
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille finie de complexes. Ainsi,

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Prop. (Distributivité générale)
Soit deux familles finies de complexes $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$. Ainsi,

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

Prop. (Carré d'une somme)
Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de nombres complexes. Ainsi,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

13.3. Identités sommatoires remarquables

Prop. Formule de Bernoulli
Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Ainsi,
- pour tout $n \in [\![1, +\infty[\![$;

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \cdots + a^0 b^{n-1}).$$

- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k.$$

Défi.
On considère $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. On appelle *coefficient binomial* « p parmi n », noté $\binom{n}{p}$, l'unique réel défini comme suit :
- si $p < 0$ ou $n < p$ (*i.e.* $p \notin [\![0, n]\!]$), alors $\binom{n}{p} = 0$;
- si $p = 0$, alors $\binom{n}{0} = 1$;
- sinon, *i.e.* si $1 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$\binom{n}{p} = \frac{(n-0)(n-1)\ldots(n-(p-1))}{(p-0)(p-1)\ldots(p-(p-1))}.$$

Exem.
1. $\binom{2025}{-2} = 0$ car $-2 \notin [\![0, 2025]\!]$.
2. $\binom{99}{100} = 0$ car $100 \notin [\![0, 99]\!]$.
3. $\binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$.
4. $\binom{73}{0} = 1$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1$.

Défi.
On appelle *factorielle* d'un entier naturel n, notée $n!$, l'unique entier naturel égal au produit des entiers supérieurs à 1 et inférieurs à n.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Rema.
1. $0! = 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = n \times (n-1)!$.
3. Si $n \geqslant 1,\ n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$.

Exem.

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	1	2	6	24	120	720

Prop.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin [\![0,n]\!] \\ \dfrac{n!}{(n-p)!p!} & \text{si } p \in [\![0,n]\!]. \end{cases}$$

Prop. (Symétrie)
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Prop. Formule de Pascal
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Rema. Triangle de Pascal
Le tableau suivant donne des valeurs de $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$:

$n \setminus p$	-1	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
2	0	1	2	1	0	0
3	0	1	3	3	1	0
4	0	1	4	6	4	0
5	0	1	5	10	10	5

Prop.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ainsi,
$$\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}.$$

Prop. Formule du binôme de Newton
Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n;$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

14. Fondements 5 : Fonction entre deux ensembles

14.1. Modes de définition d'une fonction, de son graphe

Noti.
Une fonction f partant d'un ensemble E et arrivant dans un ensemble F est un triplet constitué de l'ensemble de départ E, de l'ensemble d'arrivée F, et d'une relation qui, à tout élément x du départ, associe un unique élément y à l'arrivée, appelé image de x par f et noté $f(x)$.
On note :
- $f : E \to F, \quad x \mapsto f(x)$;
- $y = f(x)$ pour $x \mapsto y$;
- $\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$;
- $\mathcal{F}(E, F)$ pour l'ensemble des fonctions partant de E et arrivant dans F.

Défi. (Graphe)
On définit le graphe Γ_f d'une fonction $f : E \to F$ comme la partie de $E \times F$ telle que $(x, y) \in \Gamma_f \iff y = f(x)$.

$$\Gamma_f := \big\{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\big\} = \big\{(x, f(x)) \mid x \in E\big\}.$$

Rema.
Deux fonctions ne sont égales que si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et la même relation fonctionnelle. Par exemple, les fonctions :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^2$$

ne sont pas égales car leurs ensembles d'arrivée diffèrent.
En revanche, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, x \mapsto -x$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, t \mapsto 1 - (t + 1)$ sont égales.

Noti.
On peut définir une fonction de plusieurs manières :
- par une relation explicite,
  en ex. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y$;
- par une relation implicite,
  en ex. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto z$;
- par une relation de récurrence, en ex.

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & 0 & \mapsto & 1 \\ & & 1 & \mapsto & 1 \\ & & n \geq 2 & \mapsto & f(n-1) + f(n-2); \end{array}$$

- par un tableau de valeurs (E fini), en ex. $f : \{0, 1, 2\} \to \mathbb{C}$:

x	0	1	2
$f(x)$	i	$1 - i$	2026

.

14.2. Opérations générales sur les fonctions

Défi.
On appelle *restriction* d'une fonction $f : E \to F$ à une partie A de E, la fonction notée $f_{|A}$ définie par :

$$\begin{array}{rccc} f_{|A} & : & A & \to & F \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Défi.
On dit qu'une fonction g est un *prolongement* de la fonction f lorsque f est la restriction de g à l'ensemble de départ de f.

Défi.
On appelle *image directe* par $f : E \to F$ d'une partie A de E (du départ), l'unique partie de F (de l'arrivée) définie par :

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Prop. (Image directe, inclusion et opérations)
Soient $f : E \to F$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$.
1. Si $A_1 \subset A_2$, alors $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. En général, on ne peut pas comparer $f(A_2 \setminus A_1)$ et $f(A_2) \setminus f(A_1)$.
3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. En général, l'inclusion est stricte.
4. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Défi.
Étant donné une fonction $f : E \to F$, on appelle *image réciproque* d'une partie B de F (de l'arrivée), l'unique partie de E (du départ) égale à l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Prop. (Image réciproque, inclusion et opérations)
Soient $f : E \to F$ et B_1, B_2 deux parties de F.
1. Si $B_1 \subset B_2$, alors $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_2 \setminus B_1) = f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
4. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Prop. (Enchaînement image directe et réciproque)
Soit $f : E \to F$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.
1. $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Défi.
Soient trois ensembles E, F, G et deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle *fonction composée* de f suivie de g (ou composée de g suivant f), notée $g \circ f$, l'unique fonction de E

dans G définie par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Prop. (Pseudo-associativité)
Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$, alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Défi.
La *fonction identité* sur un ensemble E est définie par :

$$\mathrm{id}_E : E \to E, \quad x \mapsto x.$$

Prop.
La fonction identité agit comme un élément neutre pour la composition :
1. Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $f = f \circ \mathrm{id}_E$ (neutralité à droite).
2. Pour toute fonction $e \in \mathcal{F}(F, E)$, $\mathrm{id}_E \circ e = e$ (neutralité à gauche).

14.3. Fonction indicatrice d'une partie

Défi.
Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle *fonction indicatrice* de A sur E la fonction notée $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A & : & E & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Prop. (Opérations sur les indicatrices)
Soient A et B deux parties de E.
1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
3. Si $A \cap B = \varnothing$ (disjoints), alors $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$.

15. Pratique calculatoire 4 : Primitives et intégrales

15.1. Primitives

Défi.
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point, puis une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle *primitive* de la fonction f toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable et de fonction dérivée égale à f.

Prop.
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point. Ainsi, parmi les fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I, les fonctions constantes sont celles de dérivées nulles.

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point.

Prop.
Toute fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ admet des primitives.

Prop.
Si deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ sont dérivables et de dérivées égales, alors elles diffèrent d'une constante.

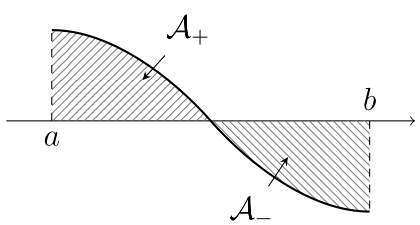
Prop.
Une primitive sur l'intervalle I étant donnée, on obtient toute primitive en lui ajoutant une certaine fonction constante.

15.2. Primitives et somme intégrale

Noti.
On considère deux réels $a < b$; puis $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$. On appelle *somme intégrale* de f sur le segment $[a, b]$, qu'on note $\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ l'unique nombre réel qui associe l'aire « sous la courbe de f » à l'aire du rectangle unité défini par le repère.

Figu.

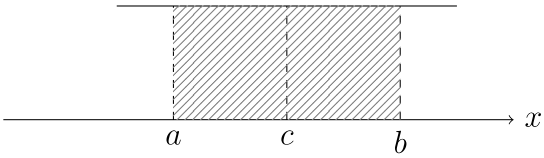
$$\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-$$



Rema.
Si $f : I \to \mathbb{R}_+$ est constante, alors

$$\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$$

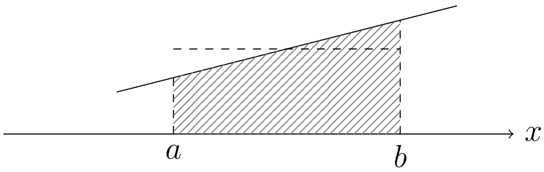
où c est arbitrairement choisi dans $[a,b]$.



Rema.
Si $f : I \to \mathbb{R}_+$ est affine, alors

$$\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$$

$$2\int_{x\in[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = (f(a)+f(b))\cdot(b-a)$$



Défi.
On considère $f : I \to \mathbb{R}$, puis $x, y \in I$. Ainsi, on appelle *somme intégrale*, depuis x jusqu'à y, de la fonction f, l'unique nombre réel

$$\int_{t=x}^{y} f(t)\mathrm{d}t := F(y) - F(x) = \big[F(t)\big]_{t=x}^{y}$$

où F est une des primitives de f sur I, arbitrairement choisie. C'est que la somme intégrale depuis x jusqu'à y d'une fonction continue f est égale à la variation d'une primitive, arbitrairement choisie, depuis la borne inférieure x de la somme jusqu'à la borne supérieure y.

Prop. Théorème fondamental du calcul différentiel
Si f est continue, alors
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x);$$
si f est continûment dérivable alors

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t.$$

15.3. Techniques de calcul

Prop. Relation de Chasles
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x, y, z \in I$. Ainsi

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t + \int_y^z f(t)\mathrm{d}t = \int_x^z f(t)\mathrm{d}t.$$

Rema.
1. Si $a < c < b$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,c]} f(t)\mathrm{d}t + \int_{[c,b]} f(t)\mathrm{d}t$.
2.

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ \displaystyle\int_{[x,y]} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x < y \\ \displaystyle -\int_{[y,x]} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } y < x \end{cases}$$

Prop. (Linéarité de l'intégrale)
Soit $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ continues, puis $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi,
1. La fonction $C_1u_1 + C_2u_2$ est continue.
2. On a $\forall x \in I, \forall y \in I$,

$$\int_x^y \big(C_1u_1(t) + C_2u_2(t)\big) = C_1 \int_x^y u_1(t)\mathrm{d}t + C_2 \int_x^y u_2(t)\mathrm{d}t.$$

Prop. (Positivité et croissance de l'intégrale)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.
1. Si f est à valeurs positives sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}_+$:

$$[\forall x \in [a,b], \quad f(x) \in \mathbb{R}_+] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}_+\right].$$

2. On a

$$[\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq g(x)] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{[a,b]} g(x)\mathrm{d}x\right].$$

Prop. (Primitivation « produit »)
Soit $u, v : I \to \mathbb{R}$ dérivables. Ainsi,

$$\forall x \in I, \quad u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$

Prop. (Intégration par parties)
Soit $u, v : I \to \mathbb{R}$ dérivables. Ainsi, pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\int_x^y u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_{t=x}^{y} - \int_x^y u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

Prop. (Primitivation « composée »)
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $G : J \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\varphi(I) \subset J$. Ainsi, $\forall x \in I$, $G'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(G(\varphi(x)))$. Par conséquent, on a la formule d'intégration par changement de variable :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \quad \int_x^y G'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} G'(s)\mathrm{d}s$$

(« $s = \varphi(t)$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, donc $\mathrm{d}s = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ »).

15.4. Somme intégrale et invariance

Prop.
Soit un réel $a > 0$, puis une fonction $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ qui est continue.
1. Si f est paire, alors

$$\int_{[-a,0]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,a]} f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{[0,a]} f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

2. Si f est impaire alors

$$-\int_{[0,a]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[-a,0]} f(x)\,\mathrm{d}x;$$

puis

$$\int_{[-a,a]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Prop.
Soit $T \in]0, +\infty[$, puis une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. Si f est T-périodique, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

15.5. Fonctions particulières

Ci-après, pour tout intervalle I de l'ensemble D, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$, est une primitive de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$.

D	$\forall x \in I, F(x) =$	$\forall x \in I, f(x) =$
$\mathbb{R}$	C	0
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$x^n,\ n \in \mathbb{N}$
$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	$\frac{1}{s+1}x^{s+1} + C$	$x^s,\ s \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$	$\frac{1}{x}$
$]0, +\infty[$	$\frac{1}{d+1}x^{d+1} + C$	$x^d,\ d \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\mathbb{R}$	$\exp(x) + C$	$\exp(x)$
$]0, +\infty[$	$x\ln(x) - x + C$	$\ln(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x) + C$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x) + C$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x) + C$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$-\cos(x) + C$	$\sin(x)$
$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\tan(x)$

Méth.
On demande les primitives de Arctan. Soit une variable dans $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}(x) &= 1 \cdot \mathrm{Arctan}(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \mathrm{Arctan}(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \mathrm{Arctan}(x) + x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arctan}(x)) - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arctan}(x)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ \mathrm{Arctan}(x)) - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ \mathrm{Arctan}(x)) - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(1+x^2)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\ \mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)
\end{aligned}$$

16. Fonction d'une variable réelle 2 : EDO

Introduction
L'intervalle I possède plus d'un point. On traite ici d'*Équations Différentielles Ordinaires Scalaires Normalisées Linéaires* (EDOSNL) sur un intervalle I :

- et du premier ordre : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - a\,x(t) = b(t)$ sur I.
- et du second ordre : $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)) - s\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) + p\,x(t) = b(t)$ sur I.

Exem.
1. La fonction exp est solution de l'ED linéaire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - x(t) = 0$.
2. La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto \cos(2026\,\theta)$ est solution de l'ED linéaire $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)) + 2026^2\,x(t) = 0$.
3. La fonction $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$ est solution de l'ED $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y(x)) - (y(x))^2 = 1$ (qu'on peut écrire $y' - y^2 = 1$). Notez que celle-ci n'est pas linéaire.

Rema.
C'est à dire que :
1. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp'(t) - \exp(t) = 0$;
2. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}(\cos(2026\theta)) + 2026^2\cos(2026\theta) = 0$;
3. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \tan'(x) - (\tan(x))^2 = 1$.

16.1 Liminaires

Rema.
Chercher les primitives de $b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, c'est résoudre sur I l'ED $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - 0 \cdot x(t) = b(t)$.

Nota.
$\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ désigne la classe des fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ qui sont infiniment dérivables.

Prop. (Stabilité)
L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ est stable par dérivation et par combinaison linéaire.

Exem.
Toute fonction polynomiale est infiniment dérivable.

Prop.
Pour les deux classes d'ED de ce cours, si le second membre est infiniment dérivable, alors toute solution est infiniment dérivable.

Prop. (Théorème de structure)
Une solution particulière étant donnée, on obtient toutes les solutions en lui ajoutant les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée (avec second membre nul).

Prop. (Principe de superposition)
Si x_1 et x_2 sont deux solutions particulières associées aux seconds membres b_1 et b_2 respectivement, alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est une solution particulière associée au second membre $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Prop.
Soit $B \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. Pour toute fonction $k \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et tout $r \in \mathbb{K}$, la fonction $t \mapsto e^{rt}k(t)$ est solution sur I de l'ED

$$x'(t) - a\,x(t) = e^{rt}B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k'(t) + (r-a)k(t) = B(t).$$

De plus, elle est solution de l'ED

$$x''(t) - s\,x'(t) + p\,x(t) = e^{rt}B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k''(t) + (2r - s)k'(t) + (r^2 - sr + p)k(t) = B(t).$$

Prop. (Indépendance linéaire)
Soient r_- et r_+ dans $\mathbb{C}$ tels que $r_- \neq r_+$. Ainsi, les deux fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ que sont $t \mapsto e^{r_- t}$ et $t \mapsto e^{r_+ t}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

$$\forall (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{C}^2, \quad \big(\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_- e^{r_- t} + \lambda_+ e^{r_+ t} = 0\big) \implies (\lambda_-, \lambda_+) = (0,0).$$

16.2. Premier ordre à coefficients constants

Prop.
Les solutions de l'EDL homogène $x'(t) - a\,x(t) = 0$ sont les fonctions

$$\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & Ce^{at} \end{array}$$

pour C parcourant $\mathbb{K}$.

Appl.
Les solutions sur $]0, 2026]$ de l'ED $3x'(t) - 2x(t) = 0$ sont les fonctions $]0, 2026] \to \mathbb{R},\ t \mapsto Ce^{\frac{2}{3}t}$ pour C parcourant $\mathbb{R}$.

Prop.
- Les solutions de l'EDL avec second membre $x'(t) - a\,x(t) = b(t)$ existent.

- Ce sont les fonctions
$$\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \varphi_0(t) + Ce^{at} \end{array}$$
pour C parcourant $\mathbb{K}$, où φ_0 est une solution particulière arbitrairement choisie.

Rema.
Les solutions de cette équation $x'(t) + a\,x(t) = 0$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-at}$.

Méth. (Trouver une solution particulière)
1. Avec $b : t \mapsto Ae^{\lambda t}$ où $(A, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Résolvons sur $\mathbb{R}$, $x'(t) - 2x(t) = 7$.

   Étape 1 : Les solutions de l'EDL homogène associée sont les fonctions
   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{2t} \end{array} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

   Étape 2 : [Cherchons une solution particulière parmi les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto k$ pour $k \in \mathbb{R}$.] Ainsi, on trouve pour solution particulière
   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{2} \end{array}$$

   Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions
   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{2} + Ce^{2t} \end{array} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

   b) Résolvons sur $\mathbb{R}$, $x'(t) - 2x(t) = 7e^{-4t}$.

   Étape 1 : Fait ! (Il s'agit de la même équation homogène $x' - 2x = 0$).

   Étape 2 : [Cherchons une solution particulière parmi les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto k(t)e^{-4t}$ où k est une fonction polynomiale.] Ainsi, soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale : $t \mapsto k(t)e^{-4t}$ convient si et seulement si la fonction k est solution de
   $$k'(t) - 6k(t) = 7.$$
   Ainsi on trouve pour solution particulière
   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{6}e^{-4t} \end{array}$$

   Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions
   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{6}e^{-4t} + Ce^{2t}, \quad C \text{ parcourant } \mathbb{R}. \end{array}$$

2. Avec $b : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.
   a) Résolvons $x'(t) - 2x(t) = 7\cos(4t)$ i.e. $x'(t) - 2x(t) = 7\mathrm{Re}(e^{i4t})$. Pour ce faire, on peut chercher $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifie $z'(t) - 2z(t) = 7e^{i4t}$, puis choisir $\varphi_0 : t \mapsto \mathrm{Re}(z(t))$.
   [$k(t)e^{i4t}, \forall t, k'(t) + (i4-2)k(t) = 7$ il suffit $k(t) = \frac{7(i4-2)}{(i4-2)(i4+2)}$. $k(t) = \frac{7(-2-i4)}{2^2+4^2} = \frac{-14-i28}{20} = -\frac{7}{10} - i\frac{14}{10}$. $z(t) = \left(-\frac{7}{10} - i\frac{14}{10}\right)(\cos(4t) + i\sin(4t))$.]

   Étape 1 : Fait !

   Étape 2 : L'équation admet pour solution particulière $t \mapsto -\frac{7}{10}\cos(4t) + \frac{14}{10}\sin(4t)$.

   Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{10}\cos(4t) + \frac{14}{10}\sin(4t) + Ce^{2t} \end{array} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

   b) Résolvons $x'(t) - 2x(t) = 7\cos(4t) + 2\sin(4t)$.

   Étape 1 : Fait !

   Étape 2 : On trouve une solution de la même forme $t \mapsto C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)$.

   Étape 3 : On répond.

Prop. (Problème de Cauchy d'ordre 1)
Rappel : $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Pour tout couple (t_0, x_0) de $I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy sur I

$$\begin{cases} x'(t) - a\,x(t) = b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet exactement une solution.

Prop. (Partition de $I \times \mathbb{R}$)
Les courbes intégrales de l'ED, i.e. les parties $\{(t, x(t)) : t \in I\}$ pour x parcourant les solutions, constituent une partition de l'ensemble produit $I \times \mathbb{K}$: pour tout point passe exactement une courbe intégrale.

Méth.
Résolvons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = 7 \\ x(1) = 8 \end{cases}$$

Étapes 1, 2, 3 : Fait ! (Nous avons déterminé précédemment que la solution générale est $x(t) = -\frac{7}{2} + Ce^{2t}$).

Étape 4 : [Parmi les fonctions qui vérifient l'ED, lesquelles respectent la CI $x(1) = 8$?
$\left[-\frac{7}{2} + Ce^{2t}\right]_{t=1} = 8 \implies -\frac{7}{2} + Ce^2 = 8 \implies e^2C = \frac{23}{2} = 11,5$]
Ainsi, voici une solution

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -3,5 + 11,5e^{2(t-1)} \end{array}$$

Par existence et unicité dans le problème de Cauchy, c'est l'unique solution. (Toute autre solution lui est égale).

16.3. Second ordre à coefficients constants

Prop. (EDOL homogène d'ordre 2 à coefficient constant)
Rappel : $(s,p) \in \mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des racines complexes de la fonction polynomiale complexe

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{X} : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 - sz + p \end{array}$$

1. Si $\mathcal{R} = \{r_-, r_+\}$ avec $r_-, r_+ \in \mathbb{R}$, $r_- \neq r_+$, alors les solutions de l'ED $x''(t) - s\,x'(t) + p\,x(t) = 0$ sont les combinaisons linéaires des fonctions réelles
$$t \mapsto e^{r_- t} \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{r_+ t}.$$
2. Si $\mathcal{R} = \{r_0, \overline{r_0}\}$ avec $r_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors les deux fonctions ci-haut sont remplacées par
$$t \mapsto e^{\mathrm{Re}(r_0)t}\cos(\mathrm{Im}(r_0)t) \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{\mathrm{Re}(r_0)t}\sin(\mathrm{Im}(r_0)t).$$
3. Si $\mathcal{R} = \{r_0\}$ avec $r_0 \in \mathbb{R}$, alors les deux fonctions sont remplacées par
$$t \mapsto e^{r_0 t} \quad \text{et} \quad t \mapsto te^{r_0 t}.$$

Rema.
Ce sont les fonctions $t \mapsto C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ pour (C_1, C_2) parcourant $\mathbb{R}^2$.

Prop. (Problème de Cauchy d'ordre 2)
Pour tout couple $(t_0, (x_0, v_0)) \in I \times \mathbb{K}^2$, il y a exactement une solution, c'est-à-dire une unique, au problème de Cauchy
$$\begin{cases} x''(t) - s\,x'(t) + p\,x(t) = b(t) \\ \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

FIN

Revenir au début