

20 FONDEMENTS 7 : ENTIERS NATURELS ET DÉNOMBREMENT

20.1 Ensemble fini

Noti.

On dit qu'un ensemble non vide est *fini* lorsqu'on peut ranger ses éléments d'un premier à un dernier.

Défi.

Un ensemble E non vide est dit *fini* si, et seulement si, on peut trouver au moins un entier naturel n non nul tel que les ensembles E et $\llbracket 1, n \rrbracket$ soient en bijection.

Exem.

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. Si $n - m \geq 2$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\} &\longrightarrow \llbracket 1, n - 1 - m \rrbracket \\ x &\longmapsto r = x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$\begin{aligned} \llbracket 1, n - 1 - m \rrbracket &\longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\} \\ r &\longmapsto m + r. \end{aligned}$$

2. Idem, si $n - m \geq 0$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \leq n\} &\longrightarrow \llbracket 1, 1 + n - m \rrbracket \\ x &\longmapsto r = 1 + x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$\begin{aligned} \llbracket 1, 1 + n - m \rrbracket &\longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \leq n\} \\ r &\longmapsto n - 1 + r. \end{aligned}$$

Noti. (Principe des tiroirs)

Si on range $n + 1$ cailloux dans n boîtes, alors une des boîtes contiendra plus d'un caillou. La négation serait absurde.

Prop. (Principe des tiroirs)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute fonction de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est non injective.

Prop. (Unicité du cardinal)

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. S'il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, p \rrbracket$, alors $n = p$, et réciproquement.

20.2 Cardinal d'un ensemble fini

Défi.

Le *cardinal* d'un ensemble fini E non vide est l'unique entier naturel n non nul tel que E est en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Noti.

Le cardinal de E est le nombre de ses éléments.

Nota.

On le note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.

Rema.

$\text{Card}(\emptyset) := 0$.

Prop.

Si un ensemble fini est en bijection avec un second ensemble, alors le second est fini et de même cardinal.

Prop.

Si les cardinaux des parties finies d'un ensemble sont tous majorés par un même entier naturel, alors l'ensemble est fini et de cardinal majoré par cet entier.

Prop.

Les ensembles *infinis* sont ceux dont les cardinaux des parties finies ne sont pas majorés.

Prop.

Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini de cardinal inférieur, et s'il y a égalité des deux cardinaux, alors la partie est égale à l'ensemble tout entier.

Prop.

Les parties finies des entiers naturels sont les parties majorées.

Rema.

Les parties finies des entiers relatifs (\mathbb{Z}) sont les parties bornées.

20.3 Fonctions et ensembles finis

Prop.

Si une fonction arrivant dans un ensemble fini est injective, alors son ensemble de départ est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui d'arrivée.

Prop. (Surjectivité et finitude)

Si une fonction partant d'un ensemble fini est surjective, alors son ensemble d'arrivée est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui de départ.

Rema.

C'est-à-dire que si $f : E \rightarrow F$ est surjective avec E fini, alors F est fini et $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.

Prop.

Pour qu'une fonction entre deux ensembles de même cardinal soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

Rema.

Par analogie, étant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pour que la fonction linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

20.4 Parties finies d'un même ensemble

Prop. (Réunion finie de parties finies disjointes)

1. Si A et B sont deux parties finies et disjointes de E , alors $A \sqcup B$ est finie et

$$\text{Card}(A \sqcup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

2. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ puis des parties A_1, A_2, \dots, A_n disjointes deux à deux. Alors

$$\text{Card}\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i).$$

Prop. (Lemme des bergers ou partition égalitaire)

Un ensemble fini à n éléments étant mis en parties disjointes de même cardinal n' , le nombre n' d'éléments par partie, multiplié par le nombre p de parties, produit le nombre n d'éléments de l'ensemble tout entier :

$$n' \times p = n.$$

Prop. (Correspondance « p à 1 »)

Soit deux ensembles non vides E et F , puis $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Supposons

- E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$;
- tout élément de $f(E)$ admet exactement n' antécédents.

Ainsi,

- $f(E)$ est fini de cardinal $p \in \mathbb{N}$;
- $n' \times p = n$.

Prop.

Soit un ensemble fini E , puis $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors $\bar{A} \in \mathcal{P}(E)$ et

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

Prop.

Si $A \in \mathcal{P}(E)$ est finie et $B \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \setminus B \in \mathcal{P}_f(E)$ (ensemble des parties finies) et

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B).$$

Prop.

Si $A, B \in \mathcal{P}_f(E)$, alors $A \cup B \in \mathcal{P}_f(E)$ et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Prop.

Si $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathcal{P}_f(E)$ alors $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p \in \mathcal{P}_f(E)$ et

$$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^p A_k\right) \leq \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p).$$

Il y a égalité si, et seulement si, les A_k sont disjointes deux à deux.

Rema.

1. $A_1 \cup A_2 = B_1 \sqcup B_2$ où $B_1 = A_1 \subset A_1$ et $B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2 \subset A_2$.
2. $A_1 \cup \dots \cup A_p = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_p$ où $B_1 = A_1$, $B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2$, $B_3 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$, \dots , $B_p = \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{p-1} \cap A_p$.

20.5 Opérations externes sur les ensembles finis

Prop.

1. Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

2. Plus généralement, si E_1, E_2, \dots, E_p sont p ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est fini et

$$\text{Card}\left(\prod_{k=1}^p E_k\right) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_p).$$

Prop.

Soit deux ensembles non vides E et F . Si E et F sont finis alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

Rema.

On note aussi $\mathcal{F}(E, F) = F^E$, ce qui donne

$$\text{Card}(F^E) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

Prop. (Ensemble des parties)

Si E est fini, alors l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}.$$

Rema.

$\mathcal{P}(E) \simeq \{0, 1\}^E$ où $\{0, 1\}^E$ est constitué des familles $(x_e)_{e \in E}$ d'éléments de $\{0, 1\}$ indexées par E .

20.6 Formules combinatoires

Nota.

- $\mathcal{P}(n)$ désigne les parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- $\mathcal{P}_p(n)$ désigne les parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal p .

Exem.

$\{2; 7\} \in \mathcal{P}_2(9)$.

Prop.

Soit $n \in \llbracket 0, +\infty \rrbracket$, puis $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Ainsi,

$$\text{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \text{Card}(\mathcal{P}_{n-p}(n)).$$

(cf. dans la suite, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$)

Prop.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a la relation de récurrence :

$$\text{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \text{Card}(\mathcal{P}_p(n-1)) + \text{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1)).$$

(cf. $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$)