14. Fondements 5 : fonction entre deux ensembles

14.1. Modes de définition d'une fonction, de son graphe

Noti.
Une fonction f partant d'un ensemble E et arrivant dans un ensemble F est un triplet constitué de l'ensemble de départ E, de l'ensemble d'arrivée F, et d'une relation qui, à tout élément x du départ, associe un unique élément y à l'arrivée, appelé image de x par f et noté $f(x)$.
On note :
- $f\colon E \to F, \quad x \mapsto f(x)$;
- $y = f(x)$ pour $x \mapsto y$;
- $f\colon E \to F$
  $x \mapsto f(x)$;
- $\mathcal{F}(E, F)$ pour l'ensemble des fonctions partant de E et arrivant dans F.

Défi. (Graphe)
On définit le graphe Γ_f d'une fonction $f\colon E \to F$ comme la partie de $E \times F$ telle que $(x, y) \in \Gamma_f \iff y = f(x)$.

$$\Gamma_f := \big\{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\big\} = \big\{(x, f(x)) \mid x \in E\big\}.$$

Rema.
Deux fonctions ne sont égales que si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et la même relation fonctionnelle. Par exemple, les fonctions :

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^2$$

ne sont pas égales car leurs ensembles d'arrivée diffèrent.
En revanche, $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, x \mapsto -x$ et $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, t \mapsto 1 - (t + 1)$ sont égales.

Noti.
On peut définir une fonction de plusieurs manières :
- par une relation explicite,
  en ex. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y$;
- par une relation implicite,
  en ex. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto z$;
- par une relation de récurrence, en ex.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ 0 &\mapsto 1 \\ 1 &\mapsto 1 \\ n &\mapsto f(n-1) + f(n-2) \quad (\text{pour } n \geq 2); \end{aligned}$$

- par un tableau de valeurs (E fini), en ex. $f\colon \{0, 1, 2\} \to \mathbb{C}$:

x	0	1	2
$f(x)$	i	$1 - i$	2026

.

14.2. Opérations générales sur les fonctions

Défi.
On appelle *restriction* d'une fonction $f : E \to F$ à une partie A de E, la fonction notée $f_{|A}$ définie par :

$$f_{|A} \colon \begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto f(x). \end{array}$$

Défi.
On dit qu'une fonction g est un *prolongement* de la fonction f lorsque f est la restriction de g à l'ensemble de départ de f.

Défi.
On appelle *image directe* par $f \colon E \to F$ d'une partie A de E (du départ), l'unique partie de F (de l'arrivée) définie par :

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Prop. (Image directe, inclusion et opérations)
Soient $f \colon E \to F$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E)$.
1. Si $A_1 \subset A_2$, alors $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. En général, on ne peut pas comparer $f(A_2 \setminus A_1)$ et $f(A_2) \setminus f(A_1)$.
3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. En général, l'inclusion est stricte.
4. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Défi.
Étant donné une fonction $f \colon E \to F$, on appelle *image réciproque* d'une partie B de F (de l'arrivée), l'unique partie de E (du départ) égale à l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Prop. (Image réciproque, inclusion et opérations)
Soient $f \colon E \to F$ et B_1, B_2 deux parties de F.
1. Si $B_1 \subset B_2$, alors $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_2 \setminus B_1) = f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
4. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Prop. (Enchaînement image directe et réciproque)
Soit $f \colon E \to F$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.
1. $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Défi.
Soient trois ensembles E, F, G et deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle *fonction composée* de f suivie de g (ou composée de g suivant f), notée $g \circ f$, l'unique fonction de E dans G définie par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Prop. (Pseudo-associativité)
Si $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ et $h\colon G \to H$, alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Défi.
La *fonction identité* sur un ensemble E est définie par :

$$\mathrm{id}_E\colon E \to E, \quad x \mapsto x.$$

Prop.
La fonction identité agit comme un élément neutre pour la composition :
1. Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $f = f \circ \mathrm{id}_E$ (neutralité à droite).
2. Pour toute fonction $e \in \mathcal{F}(F, E)$, $\mathrm{id}_E \circ e = e$ (neutralité à gauche).

14.3. Fonction indicatrice d'une partie

Défi.
Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle *fonction indicatrice* de A sur E la fonction notée $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A\colon E &\to \{0, 1\}\\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A\\ 0 & \text{si } x \notin A.\end{cases}\end{aligned}$$

Prop. (Opérations sur les indicatrices)
Soient A et B deux parties de E.
1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
3. Si $A \cap B = \varnothing$ (disjoints), alors $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$.