1 Oscillateurs Harmoniques

Notions

– Un oscillateur harmonique à un degré de liberté est un système physique dont l'évolution au cours du temps, en l'absence d'amortissement et d'excitation, est régie par l'équation différentielle linéaire

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x(t)=\omega_0^2X_{eq}\ ; \qquad \ddot{x}+\omega_0^2x=\omega_0^2X_{eq}.$$

- ω_0 : pulsation propre de l'oscillateur harmonique exprimée en rad·s^{-1}.
- X_{eq} : position finale d'équilibre qu'atteindrait le système en présence d'amortissement.

– Avec un changement de variable adapté $X=x-X_{eq}$, il est toujours possible de se ramener à une équation homogène : $\ddot{X}+\omega_0^2X=0$.

Système masse-ressort horizontal

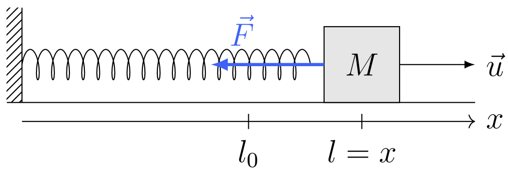
Système

– On considère une masse m ramenée à son centre d'inertie G, accrochée à un ressort et posée sur un support plan horizontal. Le ressort est idéal et le mouvement se fait sans frottement.

– Le ressort est caractérisé par sa longueur à vide l_0 et sa raideur k (en N·m^{-1}). Ainsi, lorsque qu'il est déformé par une extrémité M, il exerce une force de rappel donnée par

$$\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u}=-k\Delta l\vec{u},$$

avec $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur.



– Le système subit trois forces : le poids $\vec{P}$, la réaction normale $\vec{R}$ et la force de rappel $\vec{F}$.

– À l'équilibre, le PFS donne $\sum\vec{F}_{ext}=\vec{0}$, puis, en projetant sur $\vec{e}_x$, $-k(l-l_0)=0$ d'où $X_{eq}=l_0$.

Mise en équation

– Le PFD appliqué à la masse en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen donne

$$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m\vec{a}.$$

– Il vient alors $m\ddot{x}=-k(x-l_0)$, i.e.

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{k}{m}l_0.$$

– Par identification avec la forme canonique,

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad X_{eq}=l_0.$$

Résolution de l'équation différentielle

- Solution homogène de $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$:

$$f_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

  On préférera la première forme lorsque l'une des deux conditions innitiales est nulle.
- Solution particulière (constante) de l'équation complète : $f_2(t) = X_{eq} = l_0$.
- Solution générale : $x(t) = f_1(t) + f_2(t)$.
- Les constantes se déterminent grâce aux conditions initiales. Par exemple, si on lâche la masse sans vitesse initiale ($v_0 = 0$) depuis la position X_0 :

$$x(t) = (X_0 - l_0)\cos(\omega_0 t) + l_0.$$

Approche énergétique

- L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et potentielle :

$$E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2.$$

- Pour un système conservatif, l'énergie mécanique est constante (TEM) :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0.$$

- Dérivons l'expression de l'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + k(x - l_0)\dot{x} = \dot{x}\big(m\ddot{x} + k(x - l_0)\big) = 0.$$

  En supposant $\dot{x} \neq 0$, on retrouve l'équation différentielle : $m\ddot{x} + kx = kl_0$.

  /// FIN EDIT ICI ///

Oscillateur harmonique vertical

- On considère une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur k et longueur à vide l_0. On utilise un axe vertical descendant Oz.
- **Position d'équilibre :** À l'équilibre, la masse est immobile ($\vec{a} = \vec{0}$). Les forces sont le poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$ et le rappel $\vec{F} = -k(l_{eq} - l_0)\vec{e}_z$.

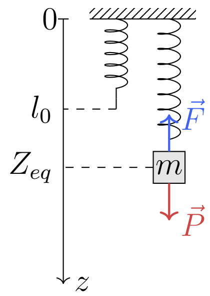
$$mg - k(l_{eq} - l_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad Z_{eq} = l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

  Le poids allonge le ressort à l'équilibre.
- **Mise en équation :** Le PFD donne $m\ddot{z} = mg - k(z - l_0)$.

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

  On identifie la forme canonique $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 Z_{eq}$ avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$



Pendule simple

- Une masse m est accrochée à un fil inextensible de longueur ℓ. On repère la position par l'angle θ avec la verticale.
- **Approche énergétique :** L'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$. L'énergie potentielle de pesanteur (origine en O) est $E_p = -mg\ell\cos\theta$ (ou $mg\ell(1-\cos\theta)$ si origine au point bas). Conservation de E_m :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)\right) = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

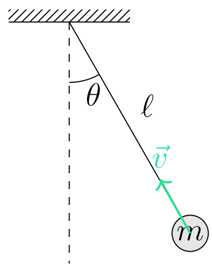
  En simplifiant par $m\ell^2\dot{\theta}$ (non nul), on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

- **Approximation des petits angles :** Si θ est petit ($\theta \ll 1$ rad), alors $\sin\theta \approx \theta$. L'équation devient linéaire :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

  C'est un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.



Oscillateur harmonique électrique LC

Circuit et mise en équation

- On étudie un circuit composé d'un condensateur C (initialement chargé) et d'une bobine d'inductance L idéale.
- Loi des mailles : $u_C(t) + u_L(t) = 0$.
- Loi de l'inductance : $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
- Relation condensateur : $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.
- En combinant :

$$u_C + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = 0$$

$$\ddot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

On identifie la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$$\xrightarrow{i}$$

Solution et énergie

- La solution pour la tension est $u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)$ (avec $u_C(0) = E$ et $i(0) = 0$).
- Le courant est $i(t) = C\dot{u}_C(t) = -C\omega_0 E\sin(\omega_0 t)$.
- **Analyse énergétique :** L'énergie totale est la somme de l'énergie électrostatique et magnétique.
$$E_{tot} = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$$
En remplaçant par les solutions sinusoïdales, on montre que $E_{tot} = \frac{1}{2}CE^2 = \text{cste}$. Il y a échange perpétuel d'énergie entre le condensateur et la bobine.

Analogie entre oscillateurs électriques et mécaniques

- On constate que les systèmes mécaniques (masse-ressort) et électriques (LC) sont régis par la même équation différentielle $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$.
- On peut établir une analogie formelle :

Mécanique	**Symbole**	**Électrique**	**Symbole**
Position	x	Charge	q
Vitesse	$v = \dot{x}$	Intensité	$i = \dot{q}$
Masse (Inertie)	m	Inductance	L
Raideur	k	Inverse capacité	$1/C$
Énergie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	Énergie magnétique	$\frac{1}{2}Li^2$
Énergie potentielle	$\frac{1}{2}kx^2$	Énergie électrique	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

2 Oscillateurs Amortis

Contenu à paraître

Équations différentielles de l'oscillateur amorti

Méthode pour résoudre l'équation différentielle amortie

Décrément logarithmique

Oscillateur électrique RLC série

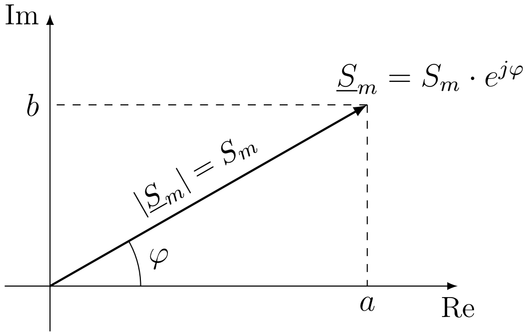
Oscillateur mécanique amorti vertical

Étude énergétique de l'oscillateur amorti

3 Systèmes linéaires en régime sinusoïdal forcé

Représentation complexe

- En sciences physiques, il est d'usage d'écrire j au lieu de i et par convention, les grandeurs complexes sont toujours soulignées.
- On associe à $s(t) = S_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ la grandeur complexe
$$\underline{s}(t) = S_m \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{S}_m \cdot e^{j\omega t}$$
avec l'amplitude complexe $\underline{S}_m = S_m \cdot e^{j\varphi}$. On identifie ainsi $|\underline{S}_m| = S_m$ et $\mathrm{Arg}(\underline{S}_m) = \varphi$.
- Il est possible de représenter l'amplitude complexe $\underline{S}_m$ associée à la grandeur sinusoïdale $s(t)$ dans le plan complexe :



- Le passage de la forme polaire $(S_m e^{j\varphi})$ à la forme cartésienne $(a+jb)$ se fait par $a = S_m \cos\varphi$ et $b = S_m \sin\varphi$.
Inversement, $S_m = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi = \arctan(b/a)$ si $a > 0$; (sinon (rare) $\varphi = \arctan(b/a) + \pi$).
- La grandeur complexe associée à la somme de deux signaux sinusoïdaux est la somme de leurs grandeurs complexes associées, ce qui permet de traiter simplement les combinaisons linéaires de fonctions sinusoïdales (avec des signaux de même pulsation).
$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \iff \underline{s}(t) = \underline{s_1}(t) + \underline{s_2}(t) = \big(\underline{S}_{1m} + \underline{S}_{2m}\big)e^{j\omega t} = \underline{S}_m e^{j\omega t}.$$
- Pour dériver une grandeur complexe, il suffit de la multiplier par $j\omega$:
$$\frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t} = j\omega \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\underline{S}_m}{\mathrm{d}t} = j\omega \cdot \underline{S}_m.$$
L'intégration correspond à une division par $j\omega$:
$$\int \underline{s}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \int \underline{S}_m \mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{S}.$$

Impédance complexe

- L'impédance Z d'un dipôle, exprimée en ohms (Ω), relie l'amplitude du courant traversant le dipôle à la tension présente à ses bornes :
$$U = ZI, \qquad\qquad Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}.$$
- On définit le déphasage entre u et i comme étant la différence $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

– On appelle impédance complexe d'un dipôle la grandeur

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}_{eff}}{\underline{I}_{eff}} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

On a donc $Z = |\underline{Z}|$ et $\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{Z})$.

– On définit également l'admittance complexe $\underline{Y}$ (S ou Ω^{-1}) comme l'inverse de l'impédance : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$.

– Impédances des dipôles élémentaires :

Dipôle	**Impédance**	**Déphasage**
Résistance	$\underline{Z}_R = R$	0
Inductance	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$+\frac{\pi}{2}$
Condensateur	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

– Associations :
  - Série : l'impédance complexe équivalente est la somme des impédances. $\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}_i$.
  - Parallèle : l'impédance complexe équivalente vérifie $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_i} = \sum \underline{Y}_i$.

– Toutes les méthodes utilisées pour la résolution des circuits en continu (noeuds, mailles, ponts, Millman, etc.) peuvent être réutilisées en RSF à condition d'utiliser les amplitudes complexes et les impédances.

Circuits du second ordre en régime sinusoïdal forcé

– Un système excité périodiquement présente une résonance pour une grandeur physique lorsque l'amplitude de celle-ci admet un maximum pour une fréquence particulière de l'excitation appelée fréquence de résonance.

– Pour un circuit RLC série alimenté par $e(t) = E_m \cos(\omega t)$, l'impédance complexe totale est

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$

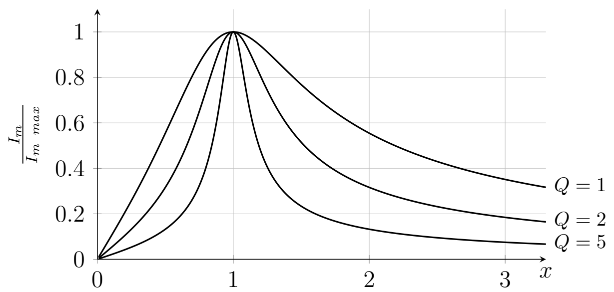
On obtient aisément le module et le déphasage de la tension par rapport au courant en vertu de leurs formules respectives.

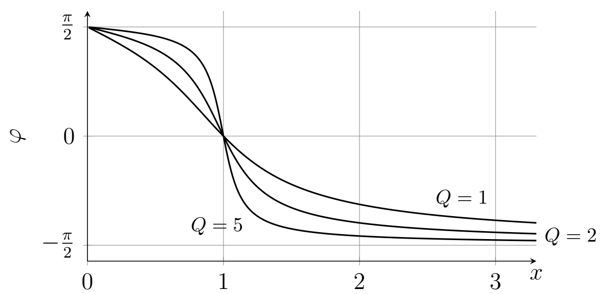
– La partie imaginaire s'annule pour la pulsation propre $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$ *i.e.* $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
  - Si $\omega = \omega_0$, le circuit est purement résistif ($\varphi = 0$).
  - Si $\omega < \omega_0$, le circuit est capacitif (tension en retard sur le courant ; $\varphi < 0$).
  - Si $\omega > \omega_0$, le circuit est inductif (tension en avance sur le courant ; $\varphi > 0$).

– Étude asymptotique : dans chacun des cas, on remplace les condensateurs et les inductances par un interupteur fermé (impédance nulle) ou par un interupteur ouvert (impédance vers l'infini). On laisse les resistances inchangées.
  - B.F. ($\omega \to 0$) : l'inductance se comporte comme un fil et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Le courant est donc nul, tout comme la tension aux bornes de la résistance. C'est que $\underline{i}_{BF}(t) = 0$, $\underline{u}_{L\ BF}(t) = 0$ et $\underline{u}_{C\ BF}(t) = \underline{e}_{BF}(t)$.
  - H.F. ($\omega \to \infty$) : l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. De même, le courant tend vers 0. C'est que $\underline{i}_{HF}(t) = 0$, $\underline{u}_{L\ HF}(t) = \underline{e}_{HF}(t)$ et $\underline{u}_{C\ HF}(t) = 0$.

Résonance d'intensité des circuits RLC série

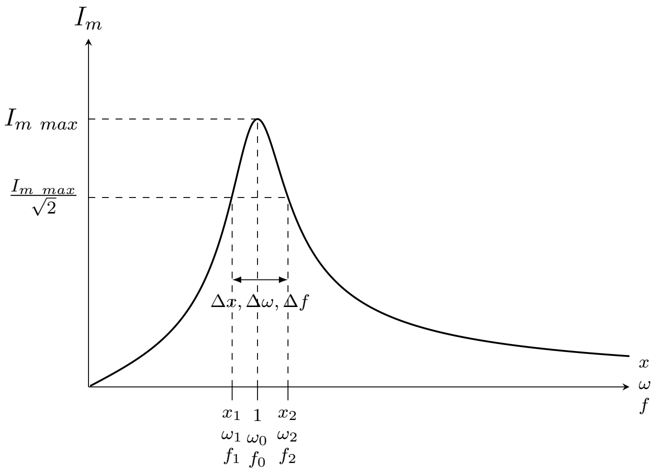
- On choisit $e(t)$ comme origine des phases. On peut alors écrire $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ puis en notation complexe $\underline{e}(t) = E_m \cdot e^{j\omega t}$.
  En utilisant les amplitudes complexes, on peut déterminer l'intensité complexe du courant :
  $$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.$$
  En factorisant par R, on obtient l'expression suivante :
  $$\underline{I}_m = \frac{\frac{E_m}{R}}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$
  En posant $I_m = \frac{E_m}{R}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on peut mettre le résultat sous la forme canonique suivante :
  $$\underline{I}_m = \frac{I_m}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{I_m \cdot \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}.$$
  En remplaçant x par $\frac{\omega}{\omega_0}$, l'identification de la forme canonique $\underline{I}_m = \dfrac{I_m \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{Q}}{1 + \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{Q} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$ avec la relation électrique $\underline{I}_m = \dfrac{\frac{E_m}{R} \cdot jRC\omega}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}$ est plus aisée. Les expressions sont équivalentes à condition que $\frac{1}{\omega_0^2} = LC$, que $I_m = \frac{E_m}{R}$ et que $RC = \frac{1}{Q\omega_0}$. On en déduit les relations
  $$I_m = \frac{E_m}{R}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$
- Il y a résonance en intensité lorsque la pulsation ω est égale à la pulsation propre ω_0 ($x = 1$). Pour cette pulsation, l'impédance Z est minimale ($Z = R$) et l'intensité est maximale : $I_{m\ max} = \frac{E_m}{R}$. Cette résonance est systématique quel que soit Q, et courant et tension y sont en phase.

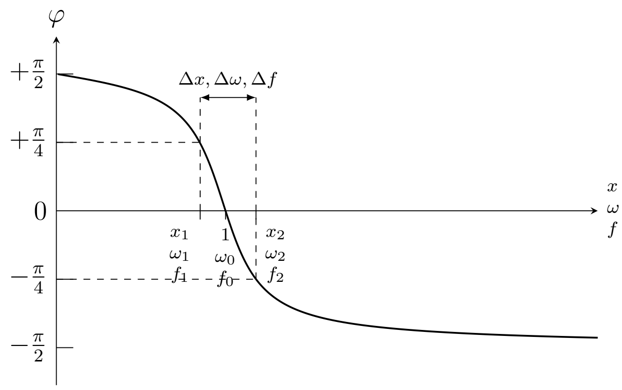




- La bande passante d'un filtre est l'intervalle des fréquences $\Delta\omega$ (ou des pulsations Δf) pour lesquelles le signal de sortie vérifie
  $$S \geq \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}.$$
- Le facteur de qualité d'un circuit résonnant en intensité vérifie la relation
  $$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{\Delta x}.$$
- Si le facteur de qualité est élevé, la bande passante est étroite : on dit que la résonance est aiguë.
  Si le facteur de qualité est faible, la bande passante est large : on dit que la résonance est floue.

– On peut également déterminer la bande passante à l'aide de la courbe de phase. En effet, pour les pulsations réduites x_1 et x_2 correspondant aux bornes de la bande passante, le déphasage vaut $\pm\frac{\pi}{4}$.





Résonance en tension (aux bornes du condensateur) du circuit RLC série

– On choisit toujours la tension $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t)$ du générateur comme référence des phases. On étudie la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.
  En utilisant le pont diviseur de tension, on détermine l'amplitude complexe

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}.$$

  En multipliant par l'admittance du condensateur $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}$, on obtient

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{1}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}.$$

  En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on peut mettre le résultat sous la forme canonique suivante :

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{1}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}.$$

  Il est alors possible de déterminer l'amplitude maximale de la tension aux bornes du condensateur :

$$U_{C_m} = |\underline{U}_{C_m}| = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}.$$

– Quelle que soit la valeur du facteur de qualité, à la pulsation propre on a $U_{C_m}(x=1) = Q \cdot E_m$.

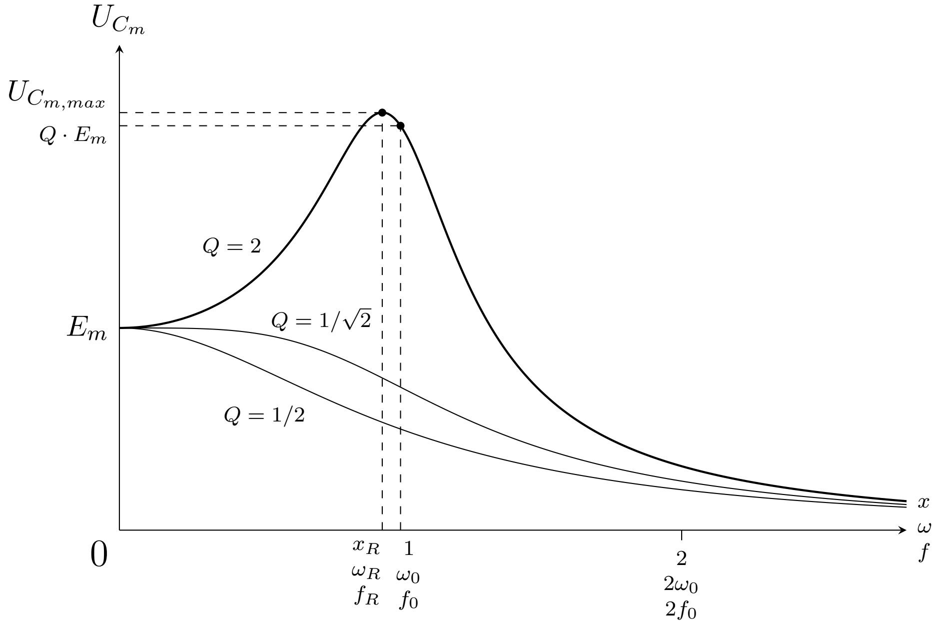
– Le phénomène de résonance en tension n'apparaît que si le facteur de qualité est suffisamment élevé, lorsque $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sinon la courbe est décroissante (pas de pic).

– La résonance en tension apparaît pour la pulsation de résonance en tension $\omega_R < \omega_0$:

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

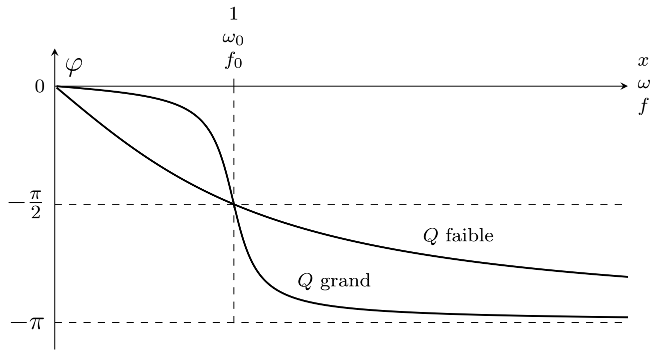
  L'amplitude maximale vaut alors

$$U_{C_{m,max}} = \frac{Q \cdot E_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$



Si le facteur de qualité est très élevé ($Q > 5$), $\omega_R \approx \omega_0$ et $U_{C_{m,max}} \approx Q \cdot E_m$. Q est alors appelé coefficient de surtension.

– La courbe de phase en tension correspond à la courbe de phase en intensité translatée de $-\frac{\pi}{2}$.



Système mécanique du second ordre en régime sinusoïdal forcé

– On modélise le système par un point matériel de masse m accroché à un ressort et un système excitateur qui assure un mouvement rectiligne sinusoïdal $z_A(t) = A\cos(\omega t)$.
  On établit la relation de longueur $\ell(t) = \ell_{eq} + z(t) - z_A(t)$.
  Bilan des forces :
  - poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$,
  - force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\Delta\ell\vec{u} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_z = -k(z(t) - z_A(t) + \frac{mg}{k})\vec{e}_z$,
  - force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\dot{z}\vec{e}_z$.

– Le PFD projeté sur l'axe $O\vec{z}$ donne $-k\left(z(t) - z_A(t) + \frac{mg}{k}\right)\vec{e}_z + mg\vec{e}_z - \alpha\dot{z}\vec{e}_z = m\ddot{z}\vec{e}_z$ *i.e.* $m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = kz_A(t)$, soit encore

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_A(t).$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$, on obtient la forme canonique

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_A(t).$$

Résonances en amplitude

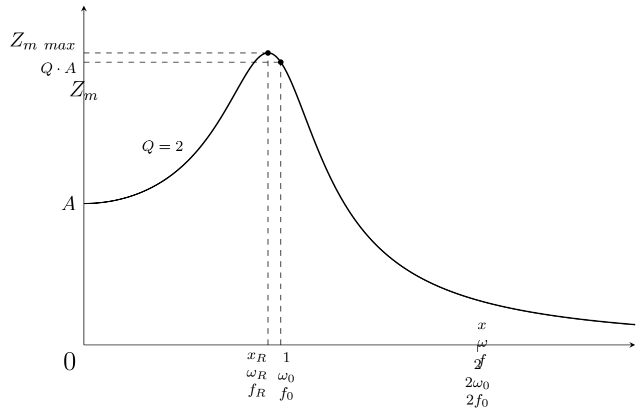
- En notation complexe, l'excitation est $\underline{z}_A(t) = Ae^{j\omega t}$. On cherche $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$. L'équation devient : $-\omega^2 \underline{z} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} = \omega_0^2 A$. On obtient l'amplitude complexe

$$\underline{Z}_m = A \cdot \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Voici alors le module (amplitude des oscillations) :

$$Z_m = |\underline{Z}_m| = \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}.$$

- C'est la même forme mathématique que la résonance en tension du circuit RLC. De même, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance en élongation et la pulsation de résonance est $\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. L'amplitude maximale est $Z_{m\ max} = \frac{QA}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$.



- La courbe de phase est identique à celle en tension.

Résonances en vitesse

- On s'intéresse à la vitesse $v(t) = \dot{z}(t)$. En complexe,

$$\underline{V}_m = j\omega \cdot \underline{z}(t) = j\omega \cdot \underline{Z}_m = \frac{j\omega A}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}.$$

En factorisant pour faire apparaître la forme canonique (analogue à l'intensité),

$$\underline{V}_m = \frac{QA\omega_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

- Il y a résonance en vitesse lorsque la pulsation est égale à la pulsation propre ($x = 1$). Pour cette pulsation, la vitesse est maximale et vaut $V_{m,max} = QA\omega_0$.
Ce phénomène est observable systématiquement (pour tout Q).