

18 GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE 3 : L'ESPACE

Rema.

Pour décrire une partie de l'espace,

- une paramétrisation permet d'accéder directement à tout point de la partie ;
- une mise en équations permet de décider si un point donné de l'espace tout entier est de la partie.

18.1 Produit vectoriel dans l'espace orienté

Défi.

On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace orienté. On appelle *produit vectoriel* de \vec{u} par \vec{v} , qu'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'unique vecteur de l'espace défini comme suit :

- Si (\vec{u}, \vec{v}) est libre, alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k},$$

où \vec{k} désigne l'unique vecteur unitaire directement orthogonal à (\vec{u}, \vec{v}) .

- Si (\vec{u}, \vec{v}) est lié, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Prop.

Le produit vectoriel est :

1. bilinéaire :

a. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{E}$,

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}; \end{cases}$$

b. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}); \end{cases}$$

2. antisymétrique :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}, \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Prop.

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soient $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs. Alors $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ admet pour coordonnées

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Appl.

Dans une b.o.n.d. de l'espace, on considère $\vec{v}_1 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ et $\vec{v}_2 \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$. Alors,

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Prop. (Produit vectoriel et colinéarité)

Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si, et seulement si, le produit vectoriel de l'un par l'autre est égal au vecteur nul :

$$\vec{u} // \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

18.2 Déterminant dans une b.o.n.d

Défi. (Déterminant en dimension 3)

Le *déterminant* de tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace est le nombre réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Nota.

On note souvent $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exem.

On considère en b.o.n.d $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -14 \times 7 - 10 \times 2 - 2 \times 6 = -130.$$

Prop. (Produit vectoriel et mesure)

La valeur absolue $|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$ mesure le volume du parallélépipède d'arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

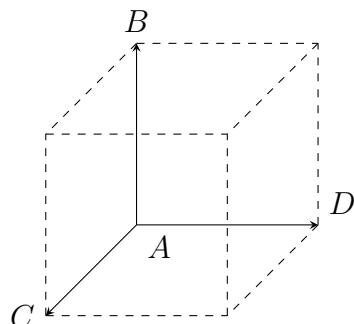
Rema.

1. On ne demande pas à ce que le parallélépipède le soit au sens strict.
2. Pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ on peut choisir A quelconque puis B, C et D tels que

$$\begin{cases} A + \vec{u} = B \\ A + \vec{v} = C \\ A + \vec{w} = D \end{cases}$$

pour interpréter $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

Figur.



Prop. (Multilinéarité et antisymétrie)

Le déterminant (en dim. 2 ou 3) est linéaire par rapport à chaque place et antisymétrique.

Rema.

« Bi- » et « tri- » linéaires.

Exem.

Si $\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$, alors

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \mu_1 [\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \mu_2 [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}],$$

et semblablement, si $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$ ou si $\vec{w} = \nu_1 \vec{w}_1 + \nu_2 \vec{w}_2$.

Prop. (Déterminant et coordonnées)

Considérons $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ dans une b.o.n.d.

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] &= y_1 z_2 x_3 - z_1 y_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_1 z_2 y_3 + x_1 y_2 z_3 - y_1 x_2 z_3 \\ &= (x_1 y_2 z_3 + z_1 x_2 y_3 + y_1 z_2 x_3) - (z_1 y_2 x_3 + x_1 z_2 y_3 + y_1 x_2 z_3). \end{aligned}$$

Figu.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} \times \ominus \\ \oplus \end{matrix}$$

Nota.

Comme pour la notation $ab - cd = \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$, la somme ci-dessous se note

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et développement)

En développant par rapport à la troisième colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Rema.

Un échange permet de placer toute colonne en troisième position.

Rema.

Comme pour la relation $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$, la transposition conserve le déterminant (en dim. 2 ou 3) ;

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Prop. (Déterminant et dépendance linéaire)

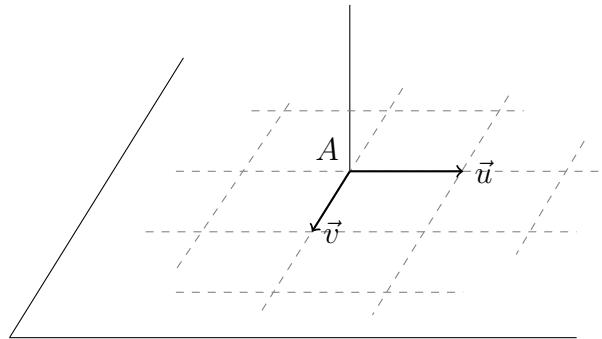
Un triplet de vecteurs de l'espace est lié si, et seulement si, son déterminant est égal à zéro.

18.3 Plans de l'espace

Noti. (Plan de l'espace)

On décrit primitivement un plan par la donnée d'un point A qu'il possède et d'un couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs linéairement indépendants qui le dirigent.

Figu.



Prop. (Paramétrisation)

1. Le plan \mathcal{P} passant par $M_0 \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix} \right)$ et dirigé par $\vec{v}_1 \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{smallmatrix} \right)$ et $\vec{v}_2 \left(\begin{smallmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{smallmatrix} \right)$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases}; \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Réciproquement, une telle paramétrisation, avec $\vec{v}_1 \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{smallmatrix} \right)$ et $\vec{v}_2 \left(\begin{smallmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{smallmatrix} \right)$ linéairement indépendants, définit le plan passant par $M \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix} \right)$ dirigé par (\vec{v}_1, \vec{v}_2) .

Appl.

Que dire de la partie de l'espace définie par le système de trois éqn. paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = 2k + 3l \\ y = -1 + 3k \\ z = -5 - 2k + l \end{cases}; \quad (k, l) \in \mathbb{R}^2 ?$$

Posons $M_0 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{smallmatrix} \right)$, puis $\vec{v}_1 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)$ et $\vec{v}_2 \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$. Est-ce que (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est libre ? Soit, est-ce que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \neq$

$\vec{0}$?

Oui car l'abscisse est égale à : $3 \times 1 - (-2) \times 0 = 3$ et $3 \neq 0$. Cette partie est le plan passant par M_0 et dirigé par (\vec{v}_1, \vec{v}_2) .

Prop. (Équation cartésienne)

Soit \mathcal{P} un plan de l'espace.

- On peut trouver au moins un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que le plan \mathcal{P} admet pour équation :

$$ax + by + cz = d.$$

De plus, si le repère est orthonormé, alors le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{P} .

- Réciproquement, toute partie de l'espace d'équation $ax + by + cz = d$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est un plan, dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si le repère est orthonormé.

Méth. (Passer d'une paramétrisation à une équation et inversement)

- On considère le plan de paramétrisation

$$\begin{cases} x = 2k + 3l \\ y = -1 + 3k \\ z = 5 - 2k + l \end{cases}; \quad (k, l) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit (\vec{v}_1, \vec{v}_2) un couple de vecteurs qui dirige le plan. On a $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Donc \mathcal{P} admet pour équation cartésienne $3x - 8y - 9z = d$ où $d \in \mathbb{R}$.

Or $M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ (obtenu par $(k, l) = (0, 0)$).

Donc $3 \times 0 - 8(-1) - 9 \times 5 = d$.

Enfin, \mathcal{P} admet pour équation cartésienne

$$3x - 8y - 9z = -37.$$

- On demande une paramétrisation du plan \mathcal{P} d'équation cartésienne

$$3x - 8y - 9z = -37.$$

Voie géométrique 1

Choisissons deux points de \mathcal{P} . $M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $M_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 37/8 \\ 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

Trouvons un couple libre (\vec{v}_1, \vec{v}_2) qui dirige \mathcal{P} .

Posons $\vec{v}_1 = M_0 \vec{M}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 37/8 \\ -37/9 \end{pmatrix}$.

Posons $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$ puis $\vec{v}_2 = \vec{n} \wedge \vec{v}_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} \alpha = 37 \cdot \frac{8}{9} + \frac{9}{8} \\ \beta = 37 \cdot \frac{3}{9} \\ \gamma = 37 \cdot \frac{3}{8} \end{cases}$.

D'où la paramétrisation

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \frac{37}{8}s + \beta t \\ z = \frac{37}{9} - \frac{37}{9}s + \gamma t \end{cases}; \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Voie géométrique 2

On identifie un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$.

On cherche un premier vecteur directeur \vec{v}_1 orthogonal à \vec{n} (i.e. $\vec{n} \cdot \vec{v}_1 = 0$) en choisissant des coordonnées simples.

$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient car $3(8) - 8(3) - 9(0) = 0$.

On fabrique le second vecteur directeur par produit vectoriel :

$$\vec{v}_2 = \vec{n} \wedge \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 27 \\ -72 \\ 73 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en choisissant le point $M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 37/9 \end{pmatrix}$, on obtient la paramétrisation

$$\begin{cases} x = 8s + 27t \\ y = 3s - 72t \\ z = 37/9 + 73t \end{cases}; \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Voie algébrique

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad 3x - 8y - 9z = -37 \iff 9z = 3x - 8y + 37$$

$$\iff \begin{cases} x = p \\ y = q \\ z = 37/9 + 3p - 8q \end{cases}; \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2.$$

Méth. (Déterminer l'intersection de deux plans)

On considère deux plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . On étudie le système formé par leurs équations cartésiennes.

Cas 1 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -5 \\ 5x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Les vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 17 \\ 14 \\ -19 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. L'intersection est donc une droite dirigée par $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$. On cherche un point particulier, par exemple en fixant $z = 0$ et en résolvant le système, ce qui donne $M_0 \begin{pmatrix} 2/19 \\ -33/19 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{cases} x = 2/19 + 17t \\ y = -33/19 + 14t \\ z = -19t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -5 \\ -6x - 9y - 12z = 10 \end{cases}.$$

On remarque que $-3 \times (2x + 3y + 4z) = -6x - 9y - 12z$. Les plans ont des vecteurs normaux colinéaires, ils sont parallèles. (Peut aussi se traiter avec le produit vectoriel.) Cependant, $15 \neq 10$. Le système est incompatible. L'intersection est vide.

Cas 3 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -5 \\ -6x - 9y - 12z = 15 \end{cases}$$

La seconde équation est exactement le produit de la première par -3 . Les deux équations sont équivalentes. L'intersection est le plan \mathcal{P}_1 lui-même. N'oublions pas d'en donner une paramétrisation, à partir d'une des équations, pour répondre au problème.

Défi. (Projeté orthogonal sur un plan)

Considérons un plan \mathcal{P} . On appelle *projeté orthogonal* de tout point M sur le plan \mathcal{P} l'unique point H d'intersection de \mathcal{P} avec la perpendiculaire à \mathcal{P} passant par M . C'est que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{MH} \perp \vec{v}. \end{cases}$$

Rema.

Si (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est une base de vecteurs de \mathcal{P} , alors

$$(\forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{MH}' \perp \vec{v}) \iff (\vec{MH}' \perp \vec{v}_1) \wedge (\vec{MH}' \perp \vec{v}_2).$$

Défi.

La *distance* du point M au plan \mathcal{P} est $\min_{P \in \mathcal{P}} MP$.

Nota.

Aussi, $\text{dist}(M, \mathcal{P}) = \min\{MP : P \in \mathcal{P}\}$.

Figu.

C'est le rayon de la plus petite sphère de centre M établissant un contact ponctuel avec le plan.

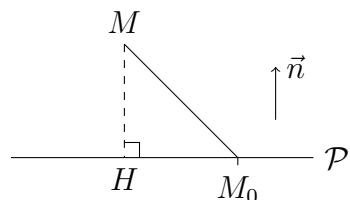
Prop.

Si H est le projeté orthogonal du point M sur \mathcal{P} alors

$$\text{dist}(M, \mathcal{P}) = MH.$$

Méth. (Calculer la distance d'un point à un plan)

On suppose qu'on dispose d'un point $M_0 \in \mathcal{P}$ et d'un vecteur normal \vec{n} de ce même plan. On demande la distance de tout point M donné au plan \mathcal{P} .



On écrit $\vec{M_0M} = \vec{M_0H} + \vec{HM}$.

Or $\vec{M_0H} \perp \vec{n}$; donc $\vec{M_0H} \cdot \vec{n} = 0$.

Donc $\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = \vec{M_0H} \cdot \vec{n} + \vec{HM} \cdot \vec{n} = \vec{HM} \cdot \vec{n}$.

Or $H\vec{M}/\|\vec{n}\|$, donc $|H\vec{M} \cdot \vec{n}| = \|H\vec{M}\| \times \|\vec{n}\|$.

Donc

$$\text{dist}(M, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{M}_0 M|}{\|\vec{n}\|}.$$

Par conséquent, si \mathcal{P} admet pour équation cartésienne $ax + by + cz = d$, alors la distance de tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à \mathcal{P} est

$$\text{dist} \left(M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathcal{P} \right) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

18.4 Droites de l'espace

Noti.

Une droite \mathcal{D} est définie par la donnée d'un point $M_0 \in \mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Prop. (Paramétrisation)

Si $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dirige \mathcal{D} , alors \mathcal{D} admet la paramétrisation que voici :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R},$$

et réciproquement.

Prop. (Mise en équation)

Si \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont deux vecteurs normaux à \mathcal{D} linéairement indépendants et si $M_0 \in \mathcal{D}$, alors tout point $M \in \mathcal{D}$ est sur \mathcal{D} si et seulement si

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{M}_0 M = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{M}_0 M = 0. \end{cases}$$

Ainsi, la droite \mathcal{D} admet un système de deux équations cartésiennes

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

avec $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ linéairement indépendants.

Rema.

Si \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont deux vecteurs normaux linéairement indépendants alors le vecteur $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ est directeur de la droite.

Méth. (Passer d'une paramétrisation d'une droite à une mise en équation et inversement)

1. Soit \mathcal{D} de paramétrisation

$$\begin{cases} x = 3 + 9t \\ y = 4 - 6t \\ z = 8 + 4t \end{cases}.$$

$M_0 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{D}$ et $\vec{v} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \in \vec{\mathcal{D}} \setminus \{\vec{0}\}$.

Posons $\vec{n}_1 \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\vec{n}_2 = \vec{v} \wedge \vec{n}_1$. Alors $\vec{n}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{n}_1 \perp \vec{v}$ (car $\vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 9 \times 6 - 6 \times 9 + 4 \times 0 = 0$).

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -36 \\ 24 \\ 127 \end{pmatrix}.$$

Ainsi \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont deux vecteurs normaux linéairement indépendants, donc \mathcal{D} admet pour système

$$\begin{cases} 6x + 9y + 0z = d \\ -36x + 24y + 117z = d' \end{cases} \quad \text{où } (d, d') \in \mathbb{R}^2.$$

Les coordonnées de M_0 vérifient ce système ; ce qui donne d et d' .

2. On considère \mathcal{D} définie par le système

$$\begin{cases} 6x + 9y = 44 \\ -12x + 8y + 39z = 308 \end{cases}.$$

On veut une paramétrisation. Posons $\vec{n}_1 \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\vec{n}_2 \left(\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 39 \end{pmatrix} \right)$. Ainsi, $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 351 \\ -234 \\ 156 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

Donc (\vec{n}_1, \vec{n}_2) est libre, puis \mathcal{D} est bien une droite ; elle est dirigée par $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$. Enfin, une solution particulière $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ du système conduit à une paramétrisation.

Méth. (Déterminer l'intersection de deux droites)

On considère deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 données par leurs représentations paramétriques. On cherche à déterminer s'il existe un couple (t, k) tel que $M(t) = M(k)$.

Prenons l'exemple suivant :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 - k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

On résout le système formé par l'égalité des coordonnées :

$$(S) : \begin{cases} 1 + t = 2 + k \quad (L_1) \\ -2 + t = 3 - k \quad (L_2) \\ 3t = 1 + 2k \quad (L_3). \end{cases}$$

On extrait un sous-système de deux équations pour trouver les candidats (t, k) . En utilisant (L_1) et (L_2) :

$$\begin{cases} t - k = 1 \\ t + k = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 6 \implies t = 3 \\ k = 5 - 3 = 2. \end{cases}$$

On vérifie si ce couple candidat est solution de la troisième équation (L_3) :

$$3t = 3(3) = 9 \quad \text{et} \quad 1 + 2k = 1 + 2(2) = 5.$$

On constate que $9 \neq 5$. L'équation (L_3) n'est pas vérifiée.

Le système est incompatible, l'intersection est vide.

Si la troisième équation avait été vérifiée, les droites auraient été sécantes au point obtenu en injectant $t = 3$ dans \mathcal{D}_1 . Enfin, si le système avait eu une infinité de solutions, les droites auraient été confondues.

Méth. (Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan)

On considère la droite \mathcal{D} et le plan \mathcal{P} définis par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t & (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} : x + y - z - 5 = 0.$$

On cherche le paramètre t pour lequel le point de la droite appartient au plan en injectant les expressions paramétriques dans l'équation cartésienne.

On a

$$\begin{aligned} (1 + t) + (2 - 2t) - (3t) - 5 &= 0 \\ 1 + 2 - 5 + t - 2t - 3t &= 0 \\ -2 - 4t &= 0 \\ t &= -0,5. \end{aligned}$$

La droite et le plan sont sécants.

On reporte t dans la paramétrisation de \mathcal{D} :

$$\begin{cases} x = 1 + (-0,5) = 0,5 \\ y = 2 - 2(-0,5) = 3 \\ z = 3(-0,5) = -1,5. \end{cases}$$

Le point d'intersection est $M(0,5 ; 3 ; -1,5)$.

Si l'équation en t aboutit à une suppression de l'inconnue t :

- $0 = k$ (avec $k \neq 0$) : Impossible. La droite est strictement parallèle au plan.
- $0 = 0$: Toujours vrai. La droite est incluse dans le plan.

Défi. (Distance à une droite)

La *distance* du point M à la droite \mathcal{D} est la plus petite distance séparant M d'un point de la droite :

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \min\{MP : P \in \mathcal{D}\}.$$

Défi. (Projeté orthogonal sur une droite)

Considérons une droite \mathcal{D} dirigée par un vecteur \vec{v} . On appelle *projeté orthogonal* du point M sur la droite \mathcal{D} l'unique point H tel que :

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \vec{MH} \perp \vec{v} \end{cases}.$$

Prop.

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = MH$$

où H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} .

Méth. (Calculer la distance de tout point donné à une droite)

Supposons qu'on dispose de $M_0 \in \mathcal{D}$ et de \vec{v} directeur de \mathcal{D} .

On écrit : $\vec{M_0M} = \vec{M_0H} + \vec{HM}$.

Donc

$$\begin{aligned}\vec{v} \wedge \vec{M_0M} &= \vec{v} \wedge \vec{M_0H} + \vec{v} \wedge \vec{HM} \\ \|\vec{v} \wedge \vec{M_0M}\| &= \|\vec{v} \wedge \vec{HM}\| \quad (\text{car } \vec{M_0H} // \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{HM}\| \quad (\text{car } \vec{v} \perp \vec{HM}).\end{aligned}$$

Donc

$$\text{dist}(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{M_0M}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

18.5 Sphère de l'espace

Défi.

Dans l'espace \mathcal{E} , on appelle *sphère* de centre $\Omega \in \mathcal{E}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble

$$\mathcal{S}(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{E} \mid \Omega M = r\}.$$

Prop. (Équation cartésienne d'une sphère)

Soit un point Ω de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ dans un r.o.n. puis $r \in [0, +\infty[$.

La sphère $\mathcal{S}(\Omega, r)$ admet pour équation cartésienne

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2.$$

Rema.

Dans la propriété ci-avant, le membre de gauche admet pour forme développée

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha'x + \beta'y + \gamma'z.$$

Méth. (Vérification d'une équation de sphère et caractéristiques)

Question : Est-ce que l'ensemble $(\Gamma) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ est une sphère ?

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On regroupe les termes et on reconnaît le début d'identités remarquables (mise sous forme canonique) :

- $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$;
- $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$;
- $z^2 - 6z = (z - 3)^2 - 9$.

L'équation devient :

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 3)^2 - 9 + 5 = 0.$$

En isolant les carrés, on obtient :

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

Ceci est de la forme $X^2 + Y^2 + Z^2 = K$ avec $K = 9$.

Conclusion : Comme $K > 0$, l'ensemble (Γ) est bien une sphère de centre $\Omega \left(\frac{1}{3}, -2, 3 \right)$ et de rayon $R = \sqrt{9} = 3$.

Prop. (Paramétrisation d'une sphère)

La sphère $\mathcal{S}(\Omega, r)$ avec $\Omega \left(\frac{x_\Omega}{y_\Omega}, \frac{y_\Omega}{z_\Omega} \right)$ admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_\Omega + r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ y = y_\Omega + r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ z = z_\Omega + r \sin(\varphi) \end{cases}, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Méth. (Intersection d'une sphère et d'un plan)

Soit \mathcal{S} une sphère de centre Ω et de rayon R , et \mathcal{P} un plan.

Pour étudier l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$, on calcule d'abord la distance du centre au plan :

$$d = \text{dist}(\Omega, \mathcal{P}).$$

Trois cas se présentent :

1. Si $d > R$, l'intersection est vide.
2. Si $d = R$, l'intersection est réduite à un point unique H (le projeté orthogonal de Ω sur \mathcal{P}).
Le plan est tangent à la sphère.
3. Si $d < R$, l'intersection est un cercle de centre H (projeté orthogonal de Ω sur \mathcal{P}) et de rayon $r_{\text{cercle}} = \sqrt{R^2 - d^2}$ (Théorème de Pythagore).