

7. PLAN COMPLEXE 2 : EXPONENTIELLE ET TRIGONOMETRIE

7.1. Exponentielle complexe

Défi.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(\operatorname{Re}(z)) (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z))).$$

Prop.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} \quad \text{et} \quad e^{i(x-y)} = \frac{e^{ix}}{e^{iy}}.$$

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\iff z \in i2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = i2k\pi. \end{aligned}$$

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ (variable). Ainsi,

$$e^z = e^{z_0} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = z_0 + i2k\pi.$$

Prop.

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Puis, si $e^{z_2} \neq 0$:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

7.2. Nombres complexes de module 1

Prop.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi,

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad (a, b) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous avons l'équivalence

$$|z| = 1 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} z = a + ib \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}.$$

Noti.

On note \mathbb{U} l'ensemble des complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Prop.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\theta}.$$

C'est que $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Rema.

Rappelons que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$.

Prop.

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Ainsi,

- $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$.
- $\frac{1}{z_1} \in \mathbb{U}$.
- $z_1 \neq 0, \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}$.

Prop.

Soit $z \in \mathbb{U}$. Ainsi,

- $\frac{1}{z} = \bar{z}$;
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Exem.

Si $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1.

$$\exists (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

2. Supposons que $z \neq 0$. Ainsi,

$$\exists! (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

Défi.

On considère $z \in \mathbb{C}$. On appelle *forme exponentielle* de z toute expression $e^{i\theta}\rho$ égale à z , pour $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Défi.

On considère $a \in \mathbb{R}^*$ fixé. On dit qu'un réel y est *congru* à un réel x *modulo* a , lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = x + ka,$$

que l'on note $y \equiv x[a]$.

Prop.

Soit $(\theta_0, \rho_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (fixé) et $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (variable). Ainsi,

$$e^{i\theta} \rho = e^{i\theta_0} \rho_0 \iff \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta \equiv \theta_0 [2\pi] \end{cases}.$$

Prop. (Équation $\exp(z) = w$)

Soit $w \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z \in \mathbb{C}$ (variable). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\exp(z) = w$
2. $w \in \mathbb{C}^*$ et

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln(\rho) + i\theta + i2\pi k$$

où $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est tel que $e^{i\theta} \rho = w$.

Prop.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\arg(rz) = \arg(z) \quad [2\pi].$$

Défi.

On dit qu'un réel θ est un des *arguments* d'un complexe z non nul quand

$$\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{i\theta} \rho = z.$$

Rema.

C'est dire que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$.

Nota.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $\arg(z)$ pour un des arguments de z et $\text{Arg}(z)$ pour celui qui tombe dans $] -\pi, \pi]$.

Exem.

- $\arg(0 + 3i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- $\arg(2 + 2\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3} [2\pi] = 60^\circ [360^\circ]$.
- $\text{Arg}(4 - 4i) = -\frac{\pi}{4}$.

Prop.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 [\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Prop. (Arguments d'un produit, d'un quotient)

Si $z_1 = e^{i\theta_1} \rho_1$ et $z_2 = e^{i\theta_2} \rho_2$ (non nuls). Alors

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi];$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi].$$

On a aussi

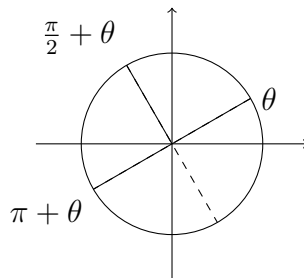
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi];$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi].$

7.3. Trigonométrie circulaire

Prop.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,

- $(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi)) = (-\cos \theta, -\sin \theta).$
- $(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta)) = (-\cos \theta, \sin \theta).$
- $(\cos(\frac{\pi}{2} + \theta), \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)) = (-\sin \theta, \cos \theta).$
- $(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta), \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)) = (\sin \theta, \cos \theta).$



Prop. (Formules d'addition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ainsi, d'une part,

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a + b) = \cos(a) \sin(b) + \cos(b) \sin(a)$

D'autre part,

- $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a - b) = -\cos(a) \sin(b) + \cos(b) \sin(a)$

Meth. (Retrouver les formules d'addition)

1. $e^{i(a+b)} = \cos(a + b) + i \sin(a + b)$
2. $e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$

En égalisant ces expressions, on obtient promptement par identification ce que l'on cherche.

Pour les formules avec $(a - b)$, il suffit de remplacer b par $-b$.

Prop. (Formule de duplication)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Ainsi,

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a).$
- $\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a).$

Prop. Formule de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Prop. (Puissance n -ième d'une somme, pour n petit)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Ainsi,

- $(a + b)^0 = 1$
- $(a + b)^1 = 1a + 1b$
- $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- $(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
- $(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Fig. Triangle de Pascal

On retrouve les coefficients binomiaux précédents à l'aide du tableau suivant :

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|----|----|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

Prop. Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Prop. (Formules de linéarisation)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$
- $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- $\sin(a) \sin(b) = \frac{-1}{2}[\cos(a + b) - \cos(a - b)]$

Prop. (Formules de factorisation)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Méth. (Technique de l'arc moitié)

Pour factoriser une somme d'exponentielles $e^{ia} + e^{ib}$, on met en facteur l'exponentielle de la moyenne des angles ($e^{i\frac{a+b}{2}}$).

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

De même :

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Méth. (Transformation de $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$)

On considère $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On veut écrire $f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ sous la forme $A \cos(\omega t - \varphi)$.

1. On factorise par le module $A = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$f(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t) \right).$$

2. On identifie un angle φ . Comme $(\frac{a}{A})^2 + (\frac{b}{A})^2 = 1$, il existe φ tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{A}.$$

3. On applique la formule d'addition :

$$f(t) = A(\cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)) = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Le nombre φ est un argument du complexe $a + ib$.

Défi. (Tangente)

On considère un réel θ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π . On définit ainsi la *tangente* de θ comme suit :

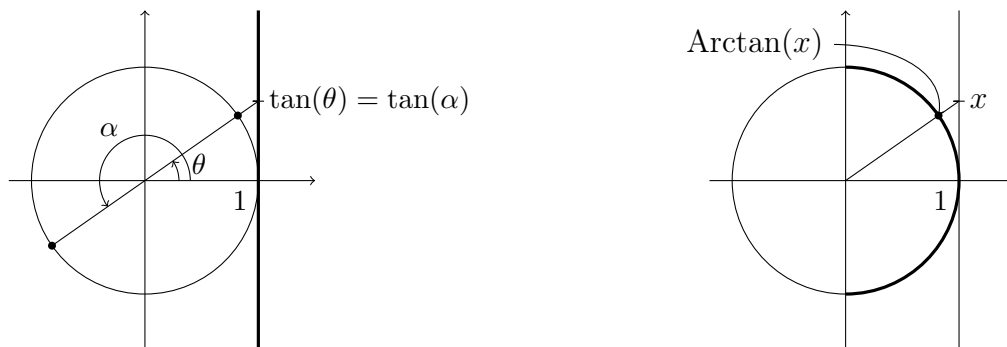
$$\tan(\theta) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Défi. (Arctangente)

Pour tout réel x , on appelle *arctangente* de x , noté $\text{Arctan}(x)$, l'unique réel θ tel que :

$$\begin{cases} \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan(\theta) = x \end{cases}$$

Figu.



Prop. (Inégalités géométriques)

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta).$$