22 AL 2 : Calcul matriciel : opérations avec les matrices

22.1 Combinaisons linéaires

Défi.
On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute fonction de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.

Voca.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, l'image par la matrice M du couple (i,j) est appelée *coefficient* d'indice (ou de position) (i,j) de la matrice M ; il est noté de l'une de ces façons :

$$M_{i,j} \ ; \qquad (M)_{i,j} \ ; \qquad [M]_{i,j}.$$

Repr.

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \cdots & M_{1,p} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & \cdots & M_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & M_{n,3} & \cdots & M_{n,p} \end{bmatrix}$$

On peut aussi employer des parenthèses.

Défi.
On appelle *taille* ou *format* d'une matrice l'unique couple (n,p) où n désigne le nombre de ses lignes et p le nombre de ses colonnes.

Exem.
La matrice $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ est de taille, ou de format $(3,1)$; elle est un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

Défi.
On parle de *matrice ligne* ou simplement de *ligne* lorsque la matrice ne comporte qu'une seule ligne. On adapte pour les colonnes.

Défi. (Somme d'un couple de matrices de <u>même taille</u>)
On considère un couple (A,B) de matrices de même taille $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle *matrice somme* de (A,B), qu'on note $A+B$, l'unique matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}.$$

Exem.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ -3 & 6 & -7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 4 & 7\\ 1 & 11 & 0\end{bmatrix}.$$

Défi. (Produit par un scalaire)
Le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'unique matrice $\lambda \cdot A$ ou $A \cdot \lambda$, définie comme suit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda (A)_{i,j} = (A)_{i,j}\lambda = (A \cdot \lambda)_{i,j}.$$

Exem.

$$2 \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\\ 10 & 12\end{bmatrix}.$$

Nota.
On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tout coefficient est égal à 0.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (0_{n,p})_{i,j} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Noti.
Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on calcule avec l'addition interne « $+$ » et la multiplication par les nombres « . » comme on calcule dans notre espace naturel $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$. On dit que l'ensemble structuré $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un *espace vectoriel* sur $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Prop. (Règles de calcul dans $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$)
1. L'addition entre les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
   a. est associative :
   $$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (A+B)+C = A+(B+C) \ ;$$
   b. admet la matrice nulle $0_{n,p}$ pour unique élément neutre :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A + 0_{n,p} = A = 0_{n,p} + A \ ;$$
   c. admet pour toute matrice A un unique opposé noté $-A$:
   $$-A + A = 0_{n,p} = A + (-A) \ ;$$
   d. est commutative :
   $$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A + B = B + A.$$
2. La multiplication des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par les nombres :
   a. est distributive sur l'addition entre les nombres :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \ ;$$
   b. est distributive sur l'addition entre les matrices :
   $$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \ ;$$
   c. est compatible avec la multiplication entre les nombres :
   $$\begin{cases} \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad 1 \cdot A = A \\ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A \end{cases}.$$

Rema.
Si $(M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(\ell)})$ est une liste de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors on définit sa somme

$$\sum_{k=1}^{\ell} M^{(k)} = M^{(1)} + M^{(2)} + \cdots + M^{(\ell)}$$

comme pour les nombres et les vecteurs.

Défi. (Symbole de Kronecker)
Étant donné un couple (a, b) d'éléments d'un ensemble E, on pose

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b \\ 1 & \text{si } a = b \end{cases}.$$

Exem.
$\delta_{2,3} = 0$; $\quad \delta_{2,3-1} = 1$.

Défi. (Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
On considère $(a, b) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. On appelle *matrice élémentaire* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de position (a, b), qu'on note $E_{a,b}$, la matrice définie comme suit :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad (E_{a,b})_{i,j} &= \delta_{(a,b),(i,j)} \\ &= \delta_{a,i}\, \delta_{b,j} \\ &= \delta_{i,a}\, \delta_{b,j} \end{aligned}$$

C'est que tous ses coefficients sont égaux à 0 sauf celui de position (a, b) qui est égal à 1.

Exem.
Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{1,2}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{2,2}.$$

Cependant, dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, $\quad E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rema.
$E_{a,b} = [\delta_{i,a}\, \delta_{j,b} : (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]] = [\delta_{i,a}\, \delta_{j,b}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Intr.
Soit $a, b \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + 0 \\ 0 + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a\times 1 \\ a\times 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\times 0 \\ b\times 1 \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= aE_{1,1} + bE_{2,1}.
\end{aligned}
$$

Cette décomposition dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ se généralise à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme ci-après.

Prop. (Décomposition linéaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ainsi, la famille de $((M)_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ de np éléments éléments de $\mathbb{K}$ est la seule telle que

$$M = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} (M)_{i,j} E_{i,j}.$$

Rema.
On dit que la famille de np matrices $(E_{a,b})_{\substack{1\leq a\leq n\\1\leq b\leq p}}$ est une base (de décomposition linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ des éléments) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est la *base canonique* de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Rema.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = a_{1,1}E_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + a_{2,1}E_{2,1} + a_{2,2}E_{2,2}.$$

22.2 Produit

Défi. (Produit d'un couple de matrices de tailles adéquates)
On considère un couple (A, B) de matrices avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (le nb de col. de la première, « sa largeur », est égal au nombre de lignes de la seconde, « sa hauteur »). On appelle *matrice produit* de (A, B) qu'on note $A \times B$, l'unique matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A\times B)_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}(B)_{j,k}.$$

Exem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 & 68 \\ 32 & 77 & 122 & 167 \end{pmatrix}$$

Prop. (Pseudo-associativité du produit matriciel)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Ainsi,

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{dans } \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})).$$

Prop. ((Pseudo-associativité du produit matriciel))
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Ainsi,

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{dans } \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})).$$

Nota.
On note ABC la valeur commune des expressions $(AB)C$ et $A(BC)$.

Prop.
Soit $n, p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit $E_{a,b} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $E_{c,d} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Ainsi,

$$E_{a,b} \times E_{c,d} = \delta_{b,c} E_{a,d}.$$

Rema. (Produits particuliers)

- Ligne par colonne :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p.$$

- Colonne par ligne :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_p \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_p \end{bmatrix}.$$

- Rectangle par colonne :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,p} x_p \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,p} x_p \end{bmatrix} = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \cdots + x_p V_p$$

  où $V_1, V_2, \dots, V_p$ sont les colonnes successives de la matrice strictement rectangulaire :

$$[V_1 \mid V_2 \mid \cdots \mid V_p] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} x_1 V_1 + x_2 V_2 + \cdots + x_p V_p.$$

Intr.
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$. Alors

$$A \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A_{.,1} \quad ; \quad A \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A_{.,2} \ ;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times A = A_{1,.} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times A = A_{2,.}.$$

C'est que

$$\begin{cases} Ae_{1,1} = A_{.,1} \\ Ae_{2,1} = A_{.,2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} e_{1,1}A = A_{1,.} \\ e_{1,2}A = A_{2,.} \end{cases}.$$

Prop.

1. Quand on multiplie à droite par $E_{i,j}$ (matrice carrée), on obtient une matrice de même taille dont toutes les colonnes sont nulles sauf éventuellement la colonne j qui est égale à la colonne i de la matrice de départ :

$$\underbrace{[C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_p]}_{A} \times \underbrace{[\vec{0}| \dots |\vec{0}|\vec{e_i}|\vec{0}| \dots |\vec{0}]}_{E_{i,j}} = [\vec{0}| \dots |\vec{0}|A\vec{e_i}|\vec{0}| \dots |\vec{0}]$$

   où $\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots$

2. À gauche, seule la ligne i est éventuellement non nulle, et égale à la ligne de départ (placée en ligne i).

Rema.

On peut poser $\hat{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Donc

$$\begin{cases} \hat{e_i}\vec{e_j} = \delta_{i,j} \\ \vec{e_i}\hat{e_j} = E_{i,j} \end{cases}.$$

22.3 Matrices carrées

Défi.

Une matrice est dite *carrée* lorsque ses lignes sont autant que ses colonnes.

Nota.

$\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \overset{\text{not}}{=} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Voca.

On parle de matrice carrée d'ordre n pour dire « matrice de taille (n, n) ».

Repr.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

On note $\text{diag}(A) = (a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$.

Défi.
La *matrice identité* d'ordre n est la matrice I_n telle que $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}.$$

Prop.
1. On calcule dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ comme dans $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ (voir $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ plus haut).
2. On calcule dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ comme dans $(\mathbb{K}, +, \times)$, sauf que la multiplication interne « $\times$ » n'est pas commutative ($n \geq 2$) et ne possède pas la propriété du produit nul.
3. La multiplication par les nombres « $\cdot$ » est compatible avec la multiplication interne au sens où
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \begin{cases} \lambda(AB) = (\lambda A)B \\ \lambda(AB) = A(\lambda B) \end{cases}.$$

Prop. (Binôme de Newton)
Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent (i.e. $AB = BA$) alors

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad A^d - B^d = (A - B) \sum_{k=0}^{d-1} A^{d-1-k} B^k$$

$$\forall d \in \mathbb{N}, \quad (A + B)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} A^{d-k} B^k.$$

Rema.
$A^d = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{d \text{ fois}}$ (avec $A^0 = I_n$).

Défi.
Les *matrices scalaires* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices λI_n pour λ parcourant $\mathbb{K}$.

Rema.
- $\lambda I_n + \mu I_n = (\lambda + \mu) I_n$.
- $(\lambda I_n)(\mu I_n) = \lambda \mu I_n$.

Défi.
On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un *inverse* de A lorsque

$$\begin{cases} AB = I_n \\ BA = I_n \end{cases}.$$

Prop.
Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus un inverse.

Nota.
A^{-1} quand c'est défini.

Exem.
- 0_n n'est pas inversible.
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$; auquel cas $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

22.4 Matrices carrées de formes particulières

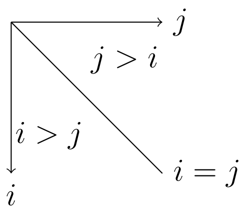
Défi.
On dit qu'une matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est
- *triangulaire supérieure* lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \implies (T)_{i,j} = 0 \ ;$$

- *triangulaire inférieure* lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad j > i \implies (T)_{i,j} = 0.$$

Figu.



Exem.
1. Voici une triangulaire supérieure :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ;$$

2. Voici une triangulaire inférieure :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nota.
$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Prop.
$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par addition, multiplication par tout nombre et par multiplication interne.

Prop.
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ ou si $A, B \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (AB)_{i,i} = (A)_{i,i}(B)_{i,i}.$$

Rema. (Attention !)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Défi.
On dit que $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* lorsque

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies (D)_{i,j} = 0.$$

Rema.
Une matrice diagonale est une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure ;

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}).$$

Prop.
- L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par addition, par multiplication par les nombres et par multiplication interne.
- $\begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d'_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 d'_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n d'_n \end{bmatrix}.$

Prop.
1. $\left[\ C_1 \mid C_2 \mid \dots \mid C_p\ \right] \times \begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p \end{bmatrix} = \left[\ d_1 C_1 \mid d_2 C_2 \mid \dots \mid d_p C_p\ \right].$
2. $\begin{bmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline d_n L_n \end{bmatrix}.$

Appl.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \end{bmatrix}.$$