

## 5 Oscillateurs libres et forcés

### 1. OSCILLATEURS HARMONIQUES

Approche expérimentale : oscillateurs mécaniques

Définition de l'oscillateur harmonique

Le système masse-ressort horizontal

Oscillateur harmonique vertical

Pendule simple

Oscillateur harmonique électrique LC

Analogie entre oscillateurs électriques et mécaniques

### 2. OSCILLATEURS AMORTIS

Équations différentielles de l'oscillateur amorti

Méthode pour résoudre l'équation différentielle amortie

Décrément logarithmique

Oscillateur électrique RLC série

Oscillateur mécanique amorti vertical

Étude énergétique de l'oscillateur amorti

### 3. SYSTÈMES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

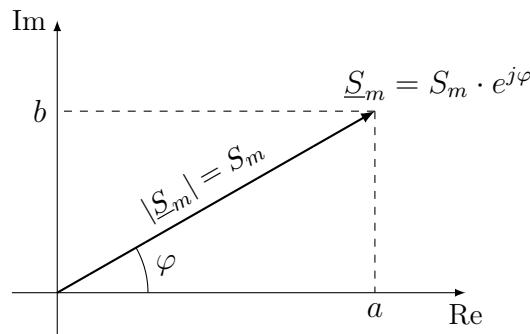
#### Représentation complexe

- En sciences physiques, il est d'usage d'écrire  $j$  au lieu de  $i$  et par convention, les grandeurs complexes sont toujours soulignées.
- On associe à  $s(t) = S_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  la grandeur complexe

$$\underline{s}(t) = S_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S}_m \cdot e^{j\omega t}$$

avec l'amplitude complexe  $\underline{S}_m = S_m \cdot e^{j\varphi}$ . On identifie ainsi  $|\underline{S}_m| = S_m$  et  $\text{Arg}(\underline{S}_m) = \varphi$ .

- Il est possible de représenter l'amplitude complexe  $\underline{S}_m$  associée à la grandeur sinusoïdale  $s(t)$  dans le plan complexe :



- Le passage de la forme polaire ( $S_m e^{j\varphi}$ ) à la forme cartésienne ( $a + jb$ ) se fait par  $a = S_m \cos \varphi$  et  $b = S_m \sin \varphi$ .  
Inversement,  $S_m = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\varphi = \arctan(b/a)$  si  $a > 0$  ; (sinon (rare)  $\varphi = \arctan(b/a) + \pi$ ).
- La grandeur complexe associée à la somme de deux signaux sinusoïdaux est la somme de leurs grandeurs complexes associées, ce qui permet de traiter simplement les combinaisons linéaires de fonctions sinusoïdales (avec des signaux de même pulsation).

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \iff \underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t) = (\underline{S}_{1m} + \underline{S}_{2m})e^{j\omega t} = \underline{S}_m e^{j\omega t}.$$

- Pour dériver une grandeur complexe, il suffit de la multiplier par  $j\omega$  :

$$\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d\underline{S}_m}{dt} = j\omega \cdot \underline{S}_m.$$

L'intégration correspond à une division par  $j\omega$  :

$$\int \underline{s}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{s}(t) \quad \text{et} \quad \int \underline{S}_m dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{S}_m.$$

#### Impédance complexe

- L'impédance  $Z$  d'un dipôle, exprimée en ohms ( $\Omega$ ), relie l'amplitude du courant traversant le dipôle à la tension présente à ses bornes :

$$U = ZI, \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}}.$$

- On définit le déphasage entre  $u$  et  $i$  comme étant la différence  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ .

- On appelle impédance complexe d'un dipôle la grandeur

$$\underline{Z} = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

On a donc  $Z = |\underline{Z}|$  et  $\varphi = \text{Arg}(\underline{Z})$ .

- On définit également l'admittance complexe  $\underline{Y}$  (S ou  $\Omega^{-1}$ ) comme l'inverse de l'impédance :  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I}{U}$ .
- Impédances des dipôles élémentaires :

Dipôle	Impédance	Déphasage
Résistance	$\underline{Z}_R = R$	0
Inductance	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$+\frac{\pi}{2}$
Condensateur	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

- Associations :
  - Série : l'impédance complexe équivalente est la somme des impédances.  $\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}_i$ .
  - Parallèle : l'impédance complexe équivalente vérifie  $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_i} = \sum \underline{Y}_i$ .
- Toutes les méthodes utilisées pour la résolution des circuits en continu (noeuds, mailles, ponts, Millman, etc.) peuvent être réutilisées en RSF à condition d'utiliser les amplitudes complexes et les impédances.

## Circuits du second ordre en régime sinusoïdal forcé

- Un système excité périodiquement présente une résonance pour une grandeur physique lorsque l'amplitude de celle-ci admet un maximum pour une fréquence particulière de l'excitation appelée fréquence de résonance.
- Pour un circuit RLC série alimenté par  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ , l'impédance complexe totale est

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right).$$

On obtient aisément le module et le déphasage de la tension par rapport au courant en vertu de leurs formules respectives.

- La partie imaginaire s'annule pour la pulsation propre  $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$  i.e.  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
  - Si  $\omega = \omega_0$ , le circuit est purement résistif ( $\varphi = 0$ ).
  - Si  $\omega < \omega_0$ , le circuit est capacitif (tension en retard sur le courant ;  $\varphi < 0$ ).
  - Si  $\omega > \omega_0$ , le circuit est inductif (tension en avance sur le courant ;  $\varphi > 0$ ).
- Étude asymptotique : dans chacun des cas, on remplace les condensateurs et les inductances par un interrupteur fermé (impédance nulle) ou par un interrupteur ouvert (impédance vers l'infini). On laisse les résistances inchangées.
  - B.F. ( $\omega \rightarrow 0$ ) : l'inductance se comporte comme un fil et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Le courant est donc nul, tout comme la tension aux bornes de la résistance. C'est que  $i_{BF}(t) = 0$ ,  $\underline{u}_{L, BF}(t) = 0$  et  $\underline{u}_{C, BF}(t) = \underline{e}_{BF}(t)$ .
  - H.F. ( $\omega \rightarrow \infty$ ) : l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. De même, le courant tend vers 0. C'est que  $i_{HF}(t) = 0$ ,  $\underline{u}_{L, HF}(t) = \underline{e}_{HF}(t)$  et  $\underline{u}_{C, HF}(t) = 0$ .

## Résonance d'intensité des circuits RLC série

- On choisit  $e(t)$  comme origine des phases. On peut alors écrire  $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  puis en notation complexe  $\underline{e}(t) = E_m \cdot e^{j\omega t}$ .

En utilisant les amplitudes complexes, on peut déterminer l'intensité complexe du courant :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.$$

En factorisant par  $R$ , on obtient l'expression suivante :

$$\underline{I}_m = \frac{\frac{E_m}{R}}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

En posant  $I_m = \frac{E_m}{R}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  on peut mettre le résultat sous la forme canonique suivante :

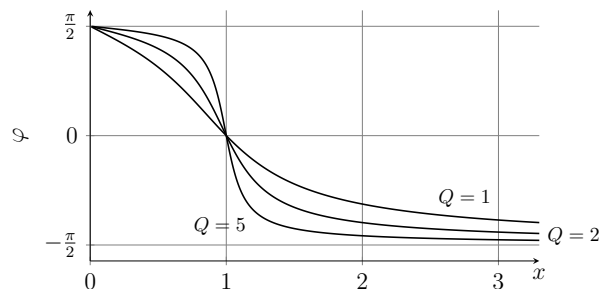
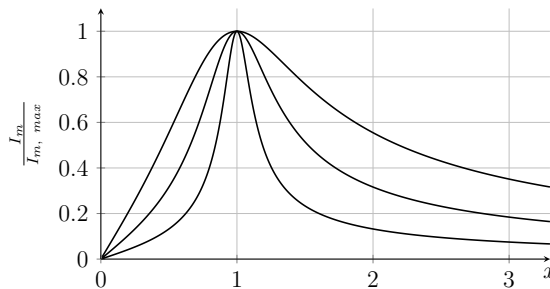
$$\underline{I}_m = \frac{I_m}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{I_m \cdot \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}.$$

En remplaçant  $x$  par  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , l'identification de la forme canonique  $\underline{I}_m = \frac{I_m \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{Q}}{1 + \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{Q} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$  avec

la relation électrique  $\underline{I}_m = \frac{\frac{E_m}{R} \cdot jRC\omega}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}$  est plus aisée. Les expressions sont équivalentes à condition que  $\frac{1}{\omega_0^2} = LC$ , que  $I_m = \frac{E_m}{R}$  et que  $RC = \frac{1}{Q\omega_0}$ . On en déduit les relations

$$I_m = \frac{E_m}{R}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

- Il y a résonance en intensité lorsque la pulsation  $\omega$  est égale à la pulsation propre  $\omega_0$  ( $x = 1$ ). Pour cette pulsation, l'impédance  $Z$  est minimale ( $Z = R$ ) et l'intensité est maximale :  $I_{m, \max} = \frac{E_m}{R}$ . Cette résonance est systématique quel que soit  $Q$ , et courant et tension y sont en phase.



- La bande passante d'un filtre est l'intervalle des fréquences  $\Delta\omega$  (ou des pulsations  $\Delta f$ ) pour lesquelles le signal de sortie vérifie

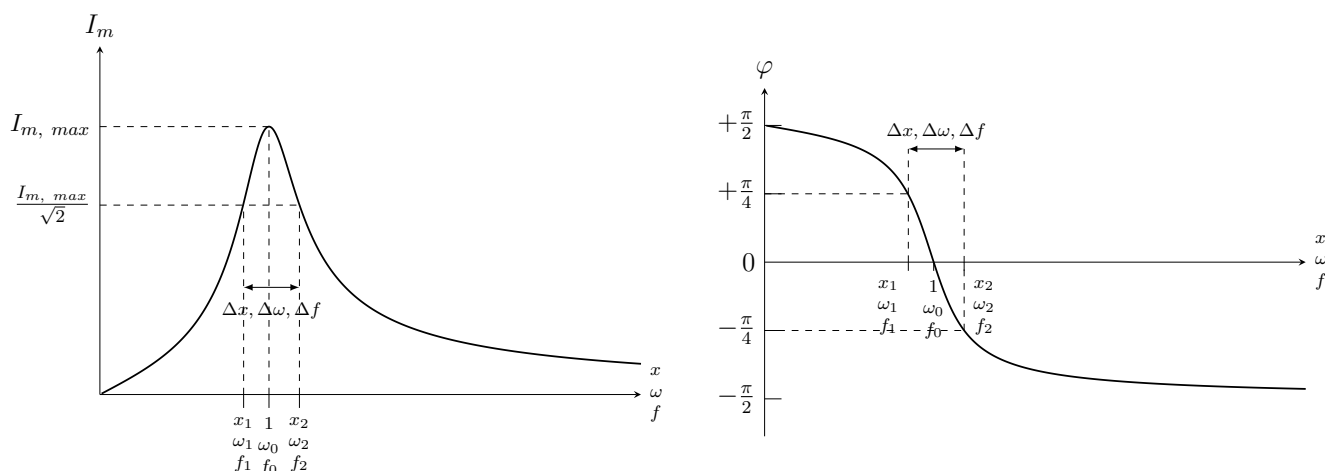
$$S \geq \frac{S_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

- Le facteur de qualité d'un circuit résonnant en intensité vérifie la relation

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{\Delta x}.$$

- Si le facteur de qualité est élevé, la bande passante est étroite : on dit que la résonance est aiguë.  
Si le facteur de qualité est faible, la bande passante est large : on dit que la résonance est floue.

- On peut également déterminer la bande passante à l'aide de la courbe de phase. En effet, pour les pulsations réduites  $x_1$  et  $x_2$  correspondant aux bornes de la bande passante, le déphasage vaut  $\pm \frac{\pi}{4}$ .



### Résonance en tension (aux bornes du condensateur) du circuit RLC série

- On choisit toujours la tension  $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t)$  du générateur comme référence des phases. On étudie la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur. En utilisant le pont diviseur de tension, on détermine l'amplitude complexe

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}.$$

En multipliant par l'admittance du condensateur  $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}$ , on obtient

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{1}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}.$$

En posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on peut mettre le résultat sous la forme canonique suivante :

$$\underline{U}_{C_m} = \underline{E}_m \cdot \frac{1}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}.$$

Il est alors possible de déterminer l'amplitude maximale de la tension aux bornes du condensateur :

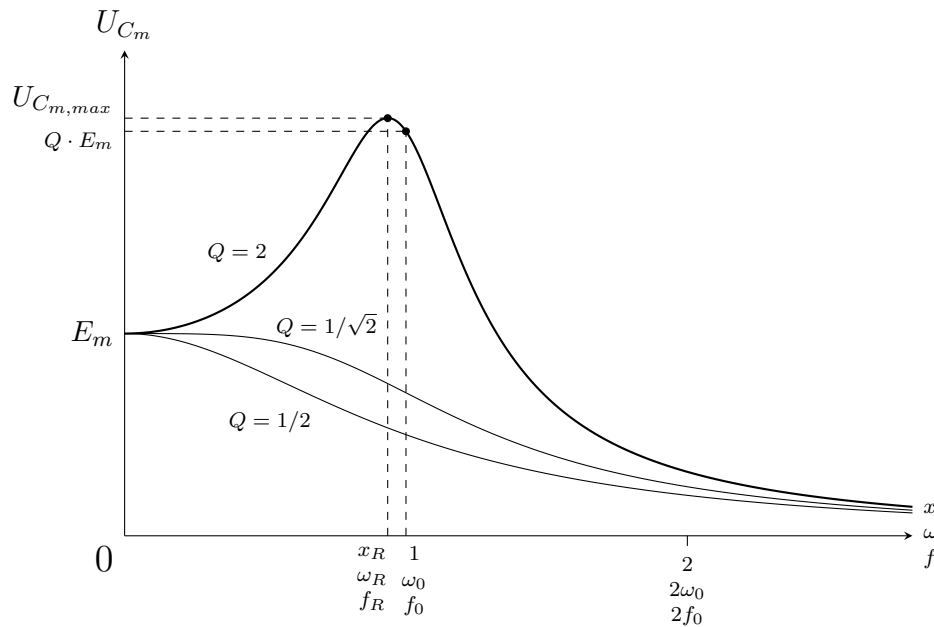
$$U_{C_m} = |\underline{U}_{C_m}| = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}.$$

- Quelle que soit la valeur du facteur de qualité, à la pulsation propre on a  $U_{C_m}(x = 1) = Q \cdot E_m$ .
- Le phénomène de résonance en tension n'apparaît que si le facteur de qualité est suffisamment élevé, lorsque  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Sinon la courbe est décroissante (pas de pic).
- La résonance en tension apparaît pour la pulsation de résonance en tension  $\omega_R < \omega_0$  :

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

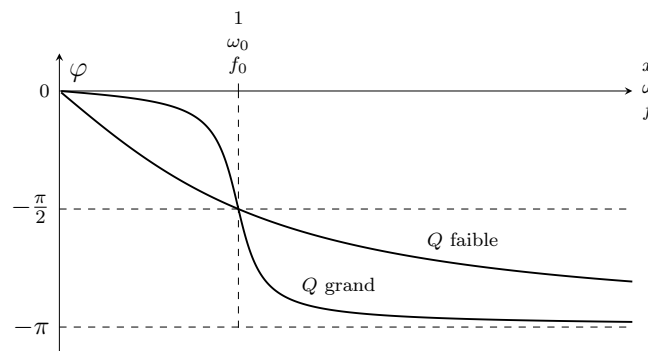
L'amplitude maximale vaut alors

$$U_{C_m, max} = \frac{Q \cdot E_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$



Si le facteur de qualité est très élevé ( $Q > 5$ ),  $\omega_R \approx \omega_0$  et  $U_{C_m, max} \approx Q \cdot E_m$ .  $Q$  est alors appelé coefficient de surtension.

- La courbe de phase en tension correspond à la courbe de phase en intensité translatée de  $-\frac{\pi}{2}$ .



### Système mécanique du second ordre en régime sinusoïdal forcé : résonances d'amplitude et de vitesse

- On modélise le système par un point matériel de masse  $m$  accroché à un ressort et un système excitateur qui assure un mouvement rectiligne sinusoïdal  $z_A(t) = A \cos(\omega t)$ .

On établit la relation de longueur  $\ell(t) = \ell_{eq} + z(t) - z_A(t)$ .

Bilan des forces :

- poids  $\vec{P} = mg\vec{e}_z$ ,
- force de rappel du ressort  $\vec{F} = -k\Delta\ell\vec{u} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_z = -k(z(t) - z_A(t) + \frac{mg}{k})\vec{e}_z$ ,
- force de frottement fluide  $\vec{f} = -\alpha\dot{z}\vec{e}_z$ .

- Le PFD projeté sur l'axe  $O\vec{z}$  donne  $-k(z(t) - z_A(t) + \frac{mg}{k})\vec{e}_z + mg\vec{e}_z - \alpha\dot{z}\vec{e}_z = m\ddot{z}\vec{e}_z$  i.e.  $m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = kz_A(t)$ , soit encore

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_A(t).$$

En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$ , on obtient la forme canonique

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_A(t).$$

- On passe en notation complexe. L'excitation est  $z_A(t) = Ae^{j\omega t}$ . On cherche  $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$ . L'équation devient :  $-\omega^2 \underline{z} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} = \omega_0^2 A$ . On obtient l'amplitude complexe

$$\underline{Z}_m = A \cdot \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

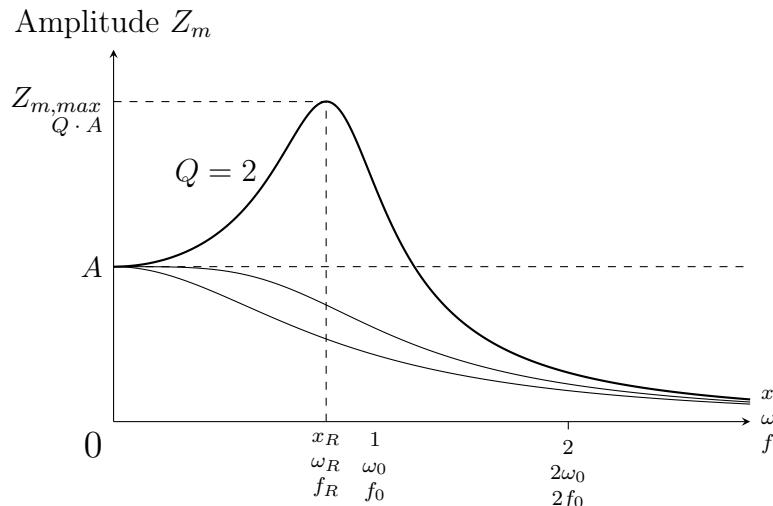
////////// STOP ICI //////////// EDT EN COURS

- Module (Amplitude des oscillations) :

$$Z_m = |\underline{Z}_m| = \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

**Analyse :** C'est la même forme mathématique que la résonance en tension du circuit RLC.

- Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il y a résonance en élongation.
- La pulsation de résonance est  $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .
- L'amplitude maximale est  $Z_{m,max} = \frac{QA}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ .



**Réponse en phase :**

$$\varphi = \arg(\underline{Z}_m) = -\arctan\left(\frac{x/Q}{1-x^2}\right)$$

La courbe de phase en élongation correspond à la courbe de phase en intensité translatée de  $-\frac{\pi}{2}$  (démarre à 0, passe par  $-\pi/2$  à la résonance, finit à  $-\pi$ ).

On s'intéresse à la vitesse  $v(t) = \dot{z}(t)$ . En complexe :  $\underline{V}_m = j\omega \underline{Z}_m$ .

$$\underline{V}_m = \frac{j\omega A}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

En factorisant pour faire apparaître la forme canonique (analogue à l'intensité) :

$$\underline{V}_m = \frac{QA\omega_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

- Il y a **résonance en vitesse** lorsque la pulsation est égale à la pulsation propre  $\omega_0$  ( $x = 1$ ).
- Pour cette pulsation, la vitesse est maximale et vaut  $V_{m,max} = QA\omega_0$ .

- Ce phénomène est observable systématiquement (pour tout  $Q$ ).

