19 AL 1 : Systèmes linéaires et représentations matricielles

Rema.
Bien que ce chapitre soit présenté avec des coefficients réels, l'intégralité des définitions, propriétés et méthodes s'étend aux nombres complexes.

19.1 Équivalence de systèmes linéaires

Noti.
On considère $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *équation linéaire* (« EL » dans la suite) à p inconnues et à coefficients réels toute équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

d'inconnue $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, de *paramètres* $a_1, \ldots, a_p$ et b. Si $b = 0$, alors on parle d'*équation linéaire homogène* (« ELH » dans la suite).

Exem.
Voici une EL à 3 inconnues :

$$2x - 3y + 5z = 2026.$$

La liste de ses coefficients est $(2; -3; 5)$ et son second membre est 2026.

Noti. (Système linéaire)
On considère $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle *système de n EL à p inconnues*, ou simplement *système linéaire* de n équations à p inconnues, tout système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$.
La famille de coefficients est $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. On l'appelle *(table) matrice à n lignes et p colonnes* à coefficients réels, et on l'écrit visuellement

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}.$$

La table matrice $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ écrite $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ est le *second membre*.

Exem.
Voici un système linéaire à 3 inconnues de 2 équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2025 \\ -5x - 6y - 7z = 2026. \end{cases}$$

La table matrice de ses coefficients est

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix},$$

et la table matrice de son second membre est

$$\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}.$$

Ici, le *système linéaire homogène associé* est celui où l'on remplace chaque coefficient du second membre par zéro ; dit autrement, on remplace le second membre par la table matrice nulle de même format (ou taille).

Noti.
La *matrice augmentée* d'un système linéaire (« SL » dans la suite) de matrice A et de second membre B est la matrice obtenue en joignant à la fin de chaque ligne le coefficient du second membre correspondant ; on la note $(A|B)$.

Exem.
La matrice augmentée du système linéaire ci-haut s'écrit

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{array}\right].$$

Rema.
Le SL

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2025 \\ -5x - 6y - 7z = 2026 \end{cases}$$

admet pour écriture matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}}_{B},$$

ou encore $AX = B$.

Rema.
Le SL précédent est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 2025(-1) = 0 \\ -5x - 6y - 7z + 2026(-1) = 0 \end{cases}$$

lequel s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou encore

$$(A|B)\begin{pmatrix} X \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{2,1},$$

ou encore

$$\begin{cases} (A|B)\begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} = 0_{2,1} \\ t = -1 \end{cases}.$$

Défi. (Opérations (inversibles) élémentaires)
Voici les trois classes d'opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire d'une table matrice :
1. L'*échange* des lignes L_i et L_j (ligne d'indice i et ligne d'indice j) avec $i \neq j$: $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. La *multiplication* (ou *dilatation*) de la ligne L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. L'*ajout* (ou *transvection*) à la ligne L_i du produit de L_j par $\mu \in \mathbb{R}$, avec $i \neq j$: $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$.

Exem.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donné. On a la chaîne d'équivalences suivante :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + z = 2 \\ -x - y + 3z = -5 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -x - y + 3z = -5 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 2z = -2 \\ -7y + 4z = -7 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2}{\iff} \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ y + 2z = -2 \\ 18z = -21. \end{cases}$$

Défi. (Produit d'une matrice rectangulaire par une colonne)
On considère $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$; puis $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, la matrice

de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (AX)_{i,1} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}X_{k,1} = A_{i,1}X_{1,1} + A_{i,2}X_{2,1} + \cdots + A_{i,p}X_{p,1}.$$

Repr.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,1} \\ X_{2,1} \\ \vdots \\ X_{p,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}X_{1,1} + A_{1,2}X_{2,1} + \cdots + A_{1,p}X_{p,1} \\ A_{2,1}X_{1,1} + A_{2,2}X_{2,1} + \cdots + A_{2,p}X_{p,1} \\ \vdots \\ A_{n,1}X_{1,1} + A_{n,2}X_{2,1} + \cdots + A_{n,p}X_{p,1} \end{bmatrix}$$

Exem.
Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -8 & 12 & -5 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

$$AX = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ -8 \cdot (-1) + 12 \cdot 4 - 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Défi.
On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents au sens des opérations élémentaires* lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par un certain enchaînement d'opérations élémentaires sur les lignes.

Rema.
Si deux systèmes linéaires sont équivalents au sens des opérations élémentaires, alors ils sont équivalents au sens de la logique. La réciproque est vraie pour deux systèmes de même format.

Prop.
Deux systèmes linéaires équivalents admettent le même ensemble de solutions.

Défi.
Deux matrices sont *équivalentes en lignes* lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par un enchaînement d'opérations élémentaires sur les lignes.

Rema.
Deux systèmes linéaires sont équivalents si, et seulement si, leurs matrices augmentées sont équivalentes en lignes. Le cas échéant, les suites d'opérations élémentaires sont les mêmes.

Appl.
Posons

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right].$$

C'est la matrice augmentée du dernier système. On a cette chaîne d'équivalences en lignes :

$$M \underset{L}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -21 \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2.$$

19.2 Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Exem. (Résolution par substitutions)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné.
1. On a

$$\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x^2 \\ 2x + x^2 = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = (-1)^2 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (-1, 1).$$

2. Avec un système linéaire cette fois,

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ 2y + y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ y = -1/3 \end{cases}$$

$$\iff (x, y) = (-1/3, -1/3).$$

Exem. (Résolution par combinaisons)
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donné. On a

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} -x+y=0 \\ \ 2x+y=-1 \end{cases} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2+2L_1}{\iff} &\begin{cases} -x+y=0 \\ \qquad 3y=-1 \end{cases} \\
\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\iff} &\begin{cases} -x+y=0 \\ \qquad\ y=-1/3 \end{cases} \\
\underset{L_1 \leftarrow L_1-L_2}{\iff} &\begin{cases} -x=1/3 \\ \ \ y=-1/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Noti.
On appelle *pivot* d'une matrice ligne qui n'est pas entièrement nulle son premier coefficient non nul (à partir de la gauche).

Exem.
Le pivot de la ligne $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2026 \end{bmatrix}$ est égal à -2.

Noti. (Matrice échelonnée en lignes)
- Si une de ses lignes est entièrement nulle, alors chacune des lignes suivantes le sont aussi.
- À partir de la deuxième ligne, dans chacune des lignes non entièrement nulles, le pivot est à droite du pivot précédent.

Exem.
1. Voici une matrice non échelonnée en lignes :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Voici une matrice échelonnée en lignes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Défi.
On dit qu'une table matrice est *échelonnée réduite en lignes* lorsque chacun de ses pivots est égal à 1 et qu'il est l'unique coefficient non nul de sa colonne.

Exem.

1. Voici une matrice échelonnée réduite en lignes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Elle est obtenue à partir de la matrice précédente par la chaîne d'opérations élémentaires $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$).

Prop.
Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une matrice échelonnée réduite en lignes, laquelle est unique.

Méth. (Trouver l'unique matrice échelonnée réduite en lignes associée à un système linéaire donné à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan)
On donne une matrice rectangulaire à coefficients réels. On demande de retourner une matrice équivalente à la matrice initiale qui soit échelonnée réduite en lignes.

a) On donne

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -11/2 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{-2}{11}L_2 \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \end{matrix} \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_2 \end{aligned}.$$

b) On donne

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -8 & -7 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} M &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & -9 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -47/3 & -31/3 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3}L_2 \quad \text{[Matrice échelonnée]} \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 8/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow \frac{-3}{47}L_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_1 \leftarrow \frac{-1}{3}L_1 \end{matrix} \\ &\underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 27/47 \\ 0 & 1 & 0 & -36/47 \\ 0 & 0 & 1 & 31/47 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{8}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{3}L_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\underset{L}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3/47\\ 0 & 1 & 0 & -36/47\\ 0 & 0 & 1 & 31/47\end{bmatrix}\quad L_1 \leftarrow L_1 - \left(\frac{-2}{3}\right) L_2 \quad \text{[Matrice échelonnée réduite].}$$

Voici un énoncé de la procédure suivie ci-dessus, d'après l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

Étape 1 : Échelonnement
Tant que la matrice à traiter est non vide :
1. Si la première colonne est nulle on traite la (sous-)matrice obtenue en supprimant cette colonne ;
2. Sinon, par un échange de lignes, on place le premier coeff non nul de cette première colonne en première ligne.
3. En ajoutant à chaque ligne autre que la première un multiple de la ligne 1, on place des zéros partout ailleurs sur la colonne 1. Puis on traite la (sous-)matrice obtenue en supprimant à la fois la première colonne et la première ligne.

Fin tant que.

Étape 2 : Réduction d'une matrice échelonnée en lignes
4. On multiplie chaque ligne non nulle par l'inverse de son pivot.
5. Pour chaque ligne non nulle, on ajoute un de ses multiples à toute ligne au-dessus en sorte que son pivot soit le seul coefficient non nul de sa colonne.

La matrice finale est la matrice cherchée.

19.3 Résolution d'un système linéaire

Noti.
Soit x_1, x_2, x_3, x_4 des inconnues variables de $\mathbb{R}$. Ainsi, pour le SL

$$(S)\begin{cases}1x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 3\\ \qquad\qquad 1x_2 - x_4 = 8\end{cases}$$

x_1 et x_2 sont les deux *inconnues principales* tandis que x_3 et x_4 sont les deux *inconnues secondaires.*
Résolvons ce système.

$$(S) \iff \begin{cases}x_1 = 3 + 2s - 4t\\ x_2 = 8 + t\\ x_3 = s\\ x_4 = t\end{cases} \quad ; \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

De manière générale, les inconnues principales sont les inconnues de rangs des pivots de l'unique matrice échelonnée réduite en lignes.

Prop.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$; puis un SL de matrice A. Si $r \in \mathbb{N}$ le nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée réduite en lignes équivalente à A, alors $r \leqslant n, p$ et le système admet r inconnues principales et $p - r$ inconnues secondaires.

Défi.
1. On appelle *rang* d'une matrice l'entier naturel égal au nombre de pivots de sa matrice

échelonnée réduite en lignes.
2. On appelle *rang* d'un système linéaire le rang de sa matrice.

Exem.

1. Le rang de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est égal à 0.
2. D'après les calculs ci-dessus, la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -8 & -7 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ est de rang égal à 3.
3. On a
$$\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2025 & -2 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -2026 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Rema.
Toute matrice échelonnée en ligne est de rang égal à son nombre de lignes non nulles.

Défi.
On dit qu'un système linéaire est *compatible* lorsqu'il admet au moins une solution. Sinon il est *incompatible.*

Méth. (Décider si un système linéaire est compatible en déterminant des conditions de compatibilité)
Soit le système
$$(S)\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 8 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$
d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$. On a
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right]$$
$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$
$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 7 & -29 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$
$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -82/5 \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{5}L_2.$$
Ainsi,
$$(S) \iff \begin{cases} 1x - 1y = 8 \\ 0x + 5y = -9 \\ 0x + 0y = -82/5 \end{cases}.$$

Donc le système est incompatible à cause de sa dernière équation.

Prop. (Compatibilité d'un SL)

1. Soit un système échelonné de rang r, à n lignes. Il est compatible si, et seulement si, les seconds membres de ses $n-r$ dernières équations sont nuls.
2. Pour deux systèmes équivalents, l'un est compatible si, et seulement si, l'autre est compatible.

Appl. (Second membre à paramètre)
Soit le SL

$$(S)\begin{cases} 2x+3y=a \\ x-y=b \\ 4x+3y=c \end{cases}$$

d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ et de paramètres a, b, c.
Q : Condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que (S) soit compatible ?
On a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & a \\ 1 & -1 & b \\ 4 & 3 & c \end{array}\right]$$

$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a \\ 4 & 3 & c \end{array}\right] \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 0 & 5 & a-2b \\ 0 & 7 & c-4b \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 0 & 5 & a-2b \\ 0 & 0 & \frac{7}{5}a - \frac{6}{5}b + c \end{array}\right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{5}L_2.$$

R : (S) est compatible si, et seulement si, $0 = \frac{-7}{5}a - \frac{6}{5}b + c$, si, et seulement si, $-7a - 6b + 5c = 0$.
Pour $(a, b, c) = (7, 8, 3)$, le système est incompatible : $-7(7) - 6(8) + 5(3) = -82$.

Prop. (Structure de l'ensemble des solutions)
Étant donnée une solution particulière d'un système linéaire, on obtient toutes les solutions en lui ajoutant les solutions du système linéaire homogène associé.

Prop. (Rang et nombre de solutions)

- Si le rang est égal au nombre d'équations, alors il y a au moins une solution.
- Si le rang est égal au nombre d'inconnues, alors il y a au plus une solution.

Rema.
C'est que la fonction $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $X \mapsto AX$ est surjective, injective ou bijective selon les cas.

Prop. (Système linéaire d'ordre 2 bien posé)
Soit
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}),$$
puis un système linéaire de matrice A. Ainsi, ce système admet exactement une solution si, et seulement si
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{i.e. } ad - bc \neq 0).$$
Auquel cas, $\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Appl.
On souhaite résoudre le système suivant d'inconnues x, y en fonction des paramètres x', y' :
$$\begin{cases} 2x - 3y = x' \\ 5x + 4y = y' \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{23}(4x' + 3y') \\ y = \dfrac{1}{23}(-5x' + 2y'). \end{cases}$$

19.4 Liste de colonnes à n lignes

Objet
Mettre en œuvre l'étude des systèmes linéaires pour :
- Décider si plusieurs listes de réels sont linéairement dépendantes ou non.
- Décider si une liste de réels est combinaison linéaire de plusieurs listes données de réels.

Défi.
Soit $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de p éléments de $\mathbb{R}^n$. On appelle *combinaison linéaire* de cette famille $\mathcal{F}$ tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ qu'on peut écrire
$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p \vec{v}_p$$
pour une certaine famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de p réels.

Nota.
On note
$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p \vec{v}_p\}.$$

Défi.
Soit $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *liée* lorsque

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \end{cases}.$$

Rema.
$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ signifie

$$\exists i_0 \in [\![1, p]\!], \quad \lambda_{i_0} \neq 0.$$

Rema.
« $\mathcal{F}$ *libre* » signifie « $\mathcal{F}$ non liée », i.e.

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0).$$

Prop. (Dépendance linéaire et SL)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ de $\mathbb{R}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), les propositions suivantes sont équivalentes :

a) La liste de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ est libre.
b) Le système linéaire $AX = 0$ admet pour seule solution la colonne nulle (solution triviale).
c) La matrice A est de rang égal à p.

Rema.
Dire que $\vec{v}_1\binom{1}{2}$, $\vec{v}_2\binom{3}{4}$ et $\vec{v}_3\binom{5}{6}$ sont linéairement indépendants veut dire que

$$\forall(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Note : ici c'est faux).

Défi.
On dit que la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ de p éléments de $\mathbb{R}^n$ est *génératrice* de l'espace $\mathbb{R}^n$ ou que ses vecteurs *engendrent linéairement* $\mathbb{R}^n$, pour dire que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}).$$

Exem.
1. $\mathrm{Vect}\left(\binom{1}{0}\right) \neq \mathbb{R}^2$ car $\binom{0}{1} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Vect}\left(\binom{1}{0}\right)$. Donc la famille $\left(\binom{1}{0}\right)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathrm{Vect}\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right) = \mathbb{R}^2$; en effet, $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} = \binom{x}{0} + \binom{0}{y} = x\binom{1}{0} + y\binom{0}{1}$.

Prop. (Famille génératrice et SL)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est la matrice dont les colonnes à n lignes sont les coordonnées de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ de $\mathbb{R}^n$ où $p \in \mathbb{N}^*$, les propositions suivantes sont équivalentes :

a) La liste de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p)$ est génératrice de l'espace $\mathbb{R}^n$.
b) Le système linéaire $AX = B$ est compatible, quel que soit la colonne à n lignes B.
c) La matrice A est de rang égal à n.

Rema.
« $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ » signifie

$$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \exists (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_p\vec{v}_p = \vec{b}.$$

Cela signifie encore

$$\forall \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \exists \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$