

## 16. FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE 2 : EDO

### Introduction

L'intervalle  $I$  possède plus d'un point. On traite ici d'*Équations Différentielles Ordinaires Scalaires Normalisées Linéaires* (EDOSNL) sur un intervalle  $I$  :

- et du premier ordre :  $\frac{d}{dt}(x(t)) - a x(t) = b(t)$  sur  $I$ .
- et du second ordre :  $\frac{d^2}{dt^2}(x(t)) - s \frac{d}{dt}(x(t)) + p x(t) = b(t)$  sur  $I$ .

### Exem.

1. La fonction  $\exp$  est solution de l'ED linéaire  $\frac{d}{dt}(x(t)) - x(t) = 0$ .
2. La fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto \cos(2026\theta)$  est solution de l'ED linéaire  $\frac{d^2}{d\theta^2}(x(t)) + 2026^2 x(t) = 0$ .
3. La fonction  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$  est solution de l'ED  $\frac{d}{dx}(y(x)) - (y(x))^2 = 1$  (qu'on peut écrire  $y' - y^2 = 1$ ). Notez que celle-ci n'est pas linéaire.

### Rema.

C'est à dire que :

1.  $\forall t \in \mathbb{R}, \exp'(t) - \exp(t) = 0$  ;
2.  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{d^2}{d\theta^2}(\cos(2026\theta)) + 2026^2 \cos(2026\theta) = 0$  ;
3.  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \tan'(x) - (\tan(x))^2 = 1$ .

## 16.1 Liminaires

### Rema.

Chercher les primitives de  $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ , c'est résoudre sur  $I$  l'ED  $\frac{d}{dt}(x(t)) - 0 \cdot x(t) = b(t)$ .

### Nota.

$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$  désigne la classe des fonctions de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$  qui sont infiniment dérивables.

### Prop. (Stabilité)

L'ensemble  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$  est stable par dérivation et par combinaison linéaire.

### Exem.

Toute fonction polynomiale est infiniment dérivable.

### Prop.

Pour les deux classes d'ED de ce cours, si le second membre est infiniment dérivable, alors toute solution est infiniment dérivable.

### Prop. (Théorème de structure)

Une solution particulière étant donnée, on obtient toutes les solutions en lui ajoutant les solu-

tions de l'équation différentielle linéaire homogène associée (i.e. avec second membre nul).

**Prop.** (Principe de superposition)

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux solutions particulières associées aux seconds membres  $b_1$  et  $b_2$  respectivement, alors  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$  est une solution particulière associée au second membre  $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ .

**Prop.** Pour trouver une solution particulière

Soit  $B \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ . Pour toute fonction  $k \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$  et tout  $r \in \mathbb{K}$ , la fonction  $t \mapsto e^{rt}k(t)$  est solution sur  $I$  de l'ED

$$x'(t) - a x(t) = e^{rt}B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k'(t) + (r - a)k(t) = B(t).$$

De plus, elle est solution de l'ED

$$x''(t) - s x'(t) + p x(t) = e^{rt}B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k''(t) + (2r - s)k'(t) + (r^2 - sr + p)k(t) = B(t).$$

**Prop.** (Indépendance linéaire)

Soient  $r_-$  et  $r_+$  dans  $\mathbb{C}$  tels que  $r_- \neq r_+$ . Ainsi, les deux fonctions de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  que sont  $t \mapsto e^{r_- t}$  et  $t \mapsto e^{r_+ t}$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ .

$$\forall (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{C}^2, \quad (\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_- e^{r_- t} + \lambda_+ e^{r_+ t} = 0) \implies (\lambda_-, \lambda_+) = (0, 0).$$

## 16.2. Premier ordre à coefficients constants

**Prop.**

Les solutions de l'EDL homogène  $x'(t) - a x(t) = 0$  sont les fonctions

$$\begin{array}{rcl} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & C e^{at} \end{array}$$

pour  $C$  parcourant  $\mathbb{K}$ .

**Appl.**

Les solutions sur  $]0, 2026]$  de l'ED  $3x'(t) - 2x(t) = 0$  sont les fonctions  $]0, 2026] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto C e^{\frac{2}{3}t}$  pour  $C$  parcourant  $\mathbb{R}$ .

**Prop.**

- Les solutions de l'EDL avec second membre  $x'(t) - a x(t) = b(t)$  existent.
- Ce sont les fonctions

$$\begin{array}{rcl} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \varphi_0(t) + C e^{at} \end{array}$$

pour  $C$  parcourant  $\mathbb{K}$ , où  $\varphi_0$  est une solution particulière arbitrairement choisie.

**Rema.**

Les solutions de cette équation  $x'(t) + a x(t) = 0$  sont les fonctions  $t \mapsto C e^{-at}$ .

**Méth.**

1. Avec  $b : t \mapsto A e^{\lambda t}$  où  $(A, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ .

a) Résolvons sur  $\mathbb{R}$ ,  $x'(t) - 2x(t) = 7$ .

Étape 1 : Les solutions de l'EDL homogène associée sont les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C e^{2t} \end{array} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

Étape 2 : [Cherchons une solution particulière parmi les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto k$  pour  $k \in \mathbb{R}$ .] On trouve pour solution particulière

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{2}. \end{array}$$

Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{2} + C e^{2t} \end{array} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

b) Résolvons sur  $\mathbb{R}$ ,  $x'(t) - 2x(t) = 7e^{-4t}$ .

Étape 1 : Fait ! (Il s'agit de la même équation homogène  $x' - 2x = 0$ ).

Étape 2 : [Cherchons une solution particulière parmi les fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto k(t)e^{-4t}$  où  $k$  est une fonction polynomiale.] Soit  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  polynomiale.  $t \mapsto k(t)e^{-4t}$  convient comme solution particulière si et seulement si la fonction  $k$  est solution de

$$k'(t) - 6k(t) = 7.$$

Ainsi on trouve pour solution particulière

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{6}e^{-4t}. \end{array}$$

Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{6}e^{-4t} + C e^{2t}, \quad C \text{ parcourant } \mathbb{R}. \end{array}$$

2. Avec  $b : t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ .

a) Résolvons  $x'(t) - 2x(t) = 7 \cos(4t)$  i.e.  $x'(t) - 2x(t) = 7 \operatorname{Re}(e^{i4t})$ . [Pour ce faire, on peut chercher  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui vérifie  $z'(t) - 2z(t) = 7e^{i4t}$ , puis choisir  $\varphi_0 : t \mapsto \operatorname{Re}(z(t))$ .  $k(t)e^{i4t}, \forall t, k'(t) + (i4 - 2)k(t) = 7$  il suffit  $k(t) = \frac{7(i4-2)}{(i4-2)(i4+2)}$ .  $k(t) = \frac{7(-2-i4)}{2^2+4^2} = \frac{-14-i28}{20} = -\frac{7}{10} - i\frac{14}{10}$ .  $z(t) = \left(-\frac{7}{10} - i\frac{14}{10}\right) (\cos(4t) + i \sin(4t))$ .]

Étape 1 : Fait !

Étape 2 : L'équation admet pour solution particulière  $t \mapsto -\frac{7}{10} \cos(4t) + \frac{14}{10} \sin(4t)$ .

Étape 3 : En réponse, les solutions de l'équation complète sont les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{7}{10} \cos(4t) + \frac{14}{10} \sin(4t) + C e^{2t} \end{array} \quad \text{pour } C \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

b) Résolvons  $x'(t) - 2x(t) = 7 \cos(4t) + 2 \sin(4t)$ .

Étape 1 : Fait !

Étape 2 : On trouve une solution de la même forme  $t \mapsto C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)$ .

Étape 3 : On répond.

**Prop.** (Problème de Cauchy d'ordre 1)

Rappel :  $a \in \mathbb{K}$ ,  $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . Pour tout couple  $(t_0, x_0)$  de  $I \times \mathbb{K}$ , le problème de Cauchy sur  $I$

$$\begin{cases} x'(t) - a x(t) = b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet exactement une solution.

**Prop.** (Partition de  $I \times \mathbb{R}$ )

Les courbes intégrales de l'ED, i.e. les parties  $\{(t, x(t)) : t \in I\}$  pour  $x$  parcourant les solutions, constituent une partition de l'ensemble produit  $I \times \mathbb{K}$  : pour tout point passe exactement une courbe intégrale.

**Méth.**

Résolvons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = 7 \\ x(1) = 8. \end{cases}$$

Étapes 1, 2, 3 : Fait ! (Nous avons déterminé précédemment que la solution générale est  $x(t) = -\frac{7}{2} + Ce^{2t}$ ).

Étape 4 : [Parmi les fonctions qui vérifient l'ED, lesquelles respectent la CI  $x(1) = 8$  ?

$$[-\frac{7}{2} + Ce^{2t}]_{t=1} = 8 \implies -\frac{7}{2} + Ce^2 = 8 \implies e^2 C = \frac{23}{2} = 11,5. \\ \text{Ainsi, voici une solution}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -3,5 + 11,5e^{2(t-1)}. \end{array}$$

Par existence et unicité dans le problème de Cauchy, c'est l'unique solution. (Toute autre solution lui est égale).

### 16.3. Second ordre à coefficients constants

**Prop.** (EDOL homogène d'ordre 2 à coefficient constant)

Rappel :  $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ . Notons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des racines complexes de la fonction polynomiale complexe

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{X} : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 - sz + p. \end{array}$$

- Si  $\mathcal{R} = \{r_-, r_+\}$  avec  $r_-, r_+ \in \mathbb{R}$ ,  $r_- \neq r_+$ , alors les solutions de l'ED  $x''(t) - s x'(t) + p x(t) = 0$  sont les combinaisons linéaires des fonctions réelles

$$t \mapsto e^{r_- t} \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{r_+ t}.$$

- Si  $\mathcal{R} = \{r_0, \bar{r}_0\}$  avec  $r_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , alors les deux fonctions ci-haut sont remplacées par

$$t \mapsto e^{\operatorname{Re}(r_0)t} \cos(\operatorname{Im}(r_0)t) \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{\operatorname{Re}(r_0)t} \sin(\operatorname{Im}(r_0)t).$$

- Si  $\mathcal{R} = \{r_0\}$  avec  $r_0 \in \mathbb{R}$ , alors les deux fonctions sont remplacées par

$$t \mapsto e^{r_0 t} \quad \text{et} \quad t \mapsto t e^{r_0 t}.$$

**Rema.**

Ce sont les fonctions  $t \mapsto C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$  pour  $(C_1, C_2)$  parcourant  $\mathbb{R}^2$ .

**Prop.** (Problème de Cauchy d'ordre 2)

Pour tout couple  $(t_0, (x_0, v_0)) \in I \times \mathbb{K}^2$ , il y a exactement une solution, c'est-à-dire une unique, au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - s x'(t) + p x(t) = b(t) \\ \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$