

## 20 FONDEMENTS 7 : ENTIERS NATURELS ET DÉNOMBREMENT

### 20.1 Ensemble fini

**Noti.**

On dit qu'un ensemble non vide est *fini* lorsqu'on peut ranger ses éléments d'un premier à un dernier.

**Défi.**

Un ensemble  $E$  non vide est dit *fini* si, et seulement si, on peut trouver au moins un entier naturel  $n$  non nul tel que les ensembles  $E$  et  $\llbracket 1, n \rrbracket$  soient en bijection.

**Exem.**

Soit  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

1. Si  $n - m \geq 2$ , alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\} &\longrightarrow \llbracket 1, n - 1 - m \rrbracket \\ x &\longmapsto r = x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$\begin{aligned} \llbracket 1, n - 1 - m \rrbracket &\longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\} \\ r &\longmapsto m + r. \end{aligned}$$

2. Idem, si  $n - m \geq 0$ , alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \leq n\} &\longrightarrow \llbracket 1, 1 + n - m \rrbracket \\ x &\longmapsto r = 1 + x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$\begin{aligned} \llbracket 1, 1 + n - m \rrbracket &\longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \leq n\} \\ r &\longmapsto n - 1 + r. \end{aligned}$$

**Noti.** (Principe des tiroirs)

Si on range  $n + 1$  cailloux dans  $n$  boîtes, alors une des boîtes contiendra plus d'un caillou. La négation serait absurde.

**Prop.** (Principe des tiroirs)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Toute fonction de  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est non injective.

**Prop.** (Unicité du cardinal)

Soit  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . S'il existe une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sur  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , alors  $n = p$ , et réciproquement.

### 20.2 Cardinal d'un ensemble fini

**Défi.**

Le *cardinal* d'un ensemble fini  $E$  non vide est l'unique entier naturel  $n$  non nul tel que  $E$  est en bijection avec  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Noti.**

Le cardinal de  $E$  est le nombre de ses éléments.

**Nota.**

On le note  $\text{Card}(E)$  ou  $|E|$  ou  $\#E$ .

**Rema.**

$\text{Card}(\emptyset) := 0$ .

**Prop.**

Si un ensemble fini est en bijection avec un second ensemble, alors le second est fini et de même cardinal.

**Prop.**

Si les cardinaux des parties finies d'un ensemble sont tous majorés par un même entier naturel, alors l'ensemble est fini et de cardinal majoré par cet entier.

**Prop.**

Les ensembles infinis sont ceux dont les cardinaux des parties finies ne sont pas majorés.

**Prop.**

Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini de cardinal inférieur, et si il y a égalité des deux cardinaux, alors la partie est égale à l'ensemble tout entier.

**Prop.**

Les parties finies des entiers naturels sont les parties majorées.

**Rema.**

Les parties finies des entiers relatifs ( $\mathbb{Z}$ ) sont les parties bornées.

## 20.3 Fonctions et ensembles finis

**Prop.**

Si une fonction arrivant dans un ensemble fini est injective, alors son ensemble de départ est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui d'arrivée.

**Prop.**

Si une fonction partant d'un ensemble fini est surjective, alors son ensemble d'arrivée est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui de départ.

**Rema.**

C'est-à-dire que si  $f : E \rightarrow F$  est surjective avec  $E$  fini, alors  $F$  est fini et  $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$ .

**Prop.**

Pour qu'une fonction entre deux ensembles de même cardinal soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

**Rema.**

Par analogie, étant donnés  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , pour que la fonction linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

## 20.4 Parties finies d'un même ensemble

**Prop.** (Réunion finie de parties finies disjointes)

1. Si  $A$  et  $B$  sont deux parties finies et disjointes de  $E$ , alors  $A \sqcup B$  est finie et

$$\text{Card}(A \sqcup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

2. Soit  $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$  puis des parties  $A_1, A_2, \dots, A_n$  disjointes deux à deux. Alors

$$\text{Card}\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i).$$

**Prop.** (Lemme des bergers ou partition égalitaire)

Un ensemble fini à  $n$  éléments étant mis en parties disjointes de même cardinal  $n'$ , le nombre  $n'$  d'éléments par partie, multiplié par le nombre  $p$  de parties, produit le nombre  $n$  d'éléments de l'ensemble tout entier :

$$n' \times p = n.$$

**Prop.** (Correspondance «  $p$  à  $1$  »)

Soit deux ensembles non vides  $E$  et  $F$ , puis  $f \in \mathcal{F}(E, F)$ . Supposons

- $E$  est fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}$ ;
- tout élément de  $f(E)$  admet exactement  $n'$  antécédents.

Ainsi,

- $f(E)$  est fini de cardinal  $p \in \mathbb{N}$ ;
- $n' \times p = n$ .

**Prop.**

Soit un ensemble fini  $E$ , puis  $A \in \mathcal{P}(E)$ . Alors  $\bar{A} \in \mathcal{P}(E)$  et

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

**Prop.**

Si  $A \in \mathcal{P}(E)$  est finie et  $B \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $A \setminus B \in \mathcal{P}_f(E)$  (ensemble des parties finies) et

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B).$$

**Prop.**

Si  $A, B \in \mathcal{P}_f(E)$ , alors  $A \cup B \in \mathcal{P}_f(E)$  et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

**Prop.**

Si  $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathcal{P}_f(E)$  alors  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p \in \mathcal{P}_f(E)$  et

$$\text{Card} \left( \bigcup_{k=1}^p A_k \right) \leq \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p).$$

Il y a égalité si, et seulement si, les  $A_k$  sont disjointes deux à deux.

**Rema.**

1.  $A_1 \cup A_2 = B_1 \sqcup B_2$  où  $B_1 = A_1 \subset A_1$  et  $B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2 \subset A_2$ .
2.  $A_1 \cup \dots \cup A_p = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_p$  où  $B_1 = A_1, B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2, B_3 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3, \dots, B_p = \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{p-1} \cap A_p$ .

## 20.5 Opérations externes sur les ensembles finis

**Prop.**

1. Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles finis, alors  $E \times F$  est fini et

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

2. Plus généralement, si  $E_1, E_2, \dots, E_p$  sont  $p$  ensembles finis alors  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$  est fini et

$$\text{Card} \left( \prod_{k=1}^p E_k \right) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_p).$$

**Prop.**

Soit deux ensembles non vides  $E$  et  $F$ . Si  $E$  et  $F$  sont finis alors  $\mathcal{F}(E, F)$  est fini et

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

**Rema.**

On note aussi  $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ , ce qui donne

$$\text{Card}(F^E) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

**Prop.** (Ensemble des parties)

Si  $E$  est fini, alors l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$  est fini et

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}.$$

**Rema.**

$\mathcal{P}(E) \simeq \{0, 1\}^E$  où  $\{0, 1\}^E$  est constitué des familles  $(x_e)_{e \in E}$  d'éléments de  $\{0, 1\}$  indexées par  $E$ .

## 20.6 Formules combinatoires

**Nota.**

- $\mathcal{P}(n)$  désigne les parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
- $\mathcal{P}_p(n)$  désigne les parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de cardinal  $p$ .

**Exem.**

$\{2; 7\} \in \mathcal{P}_2(9)$ .

**Prop.**

Soit  $n \in \llbracket 0, +\infty \llbracket$ , puis  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Ainsi,

$$\text{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \text{Card}(\mathcal{P}_{n-p}(n)).$$

(cf.  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ )

**Prop.**

Si  $p, n \in \mathbb{N}$  tels que  $1 \leq p \leq n$ , alors

$$\text{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \text{Card}(\mathcal{P}_p(n-1)) + \text{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1)).$$

(cf.  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ )

**Prop.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Card}(\mathcal{P}(n)) = \sum_{p=0}^n \text{Card}(\mathcal{P}_p(n)).$$

**Prop.** (Formule du chef)

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $1 \leq p \leq n$ . On a

$$p \cdot \text{Card}(\mathcal{P}_p(n)) = \text{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n-1)) \cdot n.$$

**Démo.**

On considère  $n$  personnes auxquelles on assigne des numéros respectifs de 1 à  $n$ . On veut dénombrer les groupes possibles de  $p$  personnes comportant un chef.

Première manière :

- On choisit simultanément  $p$  personnes parmi ces  $n$  personnes : il y a  $\text{Card}(\mathcal{P}_p(n))$  choix possibles.
- Puis on choisit un chef parmi les  $p$  personnes ci-dessus : il y a  $p$  choix possibles.  
Ainsi, il y a  $p \times \text{Card}(\mathcal{P}_p(n))$  groupes possibles.

Seconde manière :

- On choisit une personne parmi les  $n$  personnes que l'on nomme chef : il y a  $n$  choix possibles.
- Puis on choisit simultanément les  $p - 1$  personnes restantes parmi les  $n - 1$  restants (ce sont les suiveurs du chef) : il y a  $\text{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n - 1))$  choix possibles.

Ainsi, on trouve  $n \times \text{Card}(\mathcal{P}_{p-1}(n - 1))$  groupes possibles.

L'égalité des deux dénominations fournit le résultat attendu.

## 20.7 Listes d'éléments d'un ensemble fini

**Prop.** (Liste de  $p$  éléments parmi  $n$ )

Le nombre  $n^p$  est égal :

- au nombre de façons de choisir, successivement à  $p$  reprises ou en  $p$  fois et avec remise, un élément parmi  $n$  ;
- au nombre de fonctions d'un ensemble de  $p$  éléments vers un ensemble de  $n$  éléments.

**Prop.** (Listes de  $p$  éléments distincts pris parmi  $n$ )

Le nombre  $n(n - 1) \cdots (n - (p - 1))$  est égal :

- au nombre de façons de choisir successivement à  $p$  reprises, ou en  $p$  fois, et sans remise, un élément parmi  $n$  ;
- au nombre d'injections d'un ensemble à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

**Rema.**

Si  $p = n$ , ce nombre correspond au nombre de façons d'ordonner ou de permuter  $n$  éléments distincts.

**Prop.** (Listes croissantes de  $p$  éléments distincts pris parmi  $n$ )

Le nombre  $\binom{n}{p}$  est égal :

- au nombre de façons de choisir simultanément, ou en une seule fois,  $p$  éléments parmi  $n$  (sans égard à leur ordre) ;
- au nombre de parties de  $p$  éléments d'un ensemble de cardinal  $n$ .