# 7 Plan Complexe 2 : EXPONENTIELLE ET TRIGONOMÉTRIE

## 7.1 Exponentielle complexe

**Défi.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\exp(z) \overset{\text{déf}}{=} \exp(\mathrm{Re}(z))\big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))\big).$$

**Prop.**
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors
$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \quad \text{et} \quad e^{i(x-y)} = \frac{e^{ix}}{e^{iy}}.$$

**Prop.**
Soit $z \in \mathbb{C}$. Ainsi,
$$\begin{aligned} e^z = 1 &\iff z \in i2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = i2k\pi. \end{aligned}$$

**Prop.**
Soit $z \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ (variable). Ainsi,
$$e^z = e^{z_0} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = z_0 + i2k\pi.$$

**Prop.**
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$
Puis, si $e^{z_2} \neq 0$ :
$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

## 7.2 Nombres complexes de module 1

**Prop.**
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi,
$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad (a, b) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

**Prop.**
Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous avons l'équivalence
$$|z| = 1 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} z = a + ib \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}.$$

**Noti.**
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

**Prop.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\theta}.$$

C'est que $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

**Rema.**
Rappelons que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

**Prop.**
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Ainsi,
- $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$.
- $\frac{1}{z_1} \in \mathbb{U}$.
- $z_1 \neq 0$, $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{U}$.

**Prop.**
Soit $z \in \mathbb{U}$. Ainsi,
- $\frac{1}{z} = \bar{z}$ ;
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

**Exem.**
Si $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\frac{1}{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

**Prop.**
Soit $z \in \mathbb{C}$.
1.

$$\exists (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

2. Supposons que $z \neq 0$. Ainsi,

$$\exists! (s, r) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+, \quad z = sr.$$

**Défi.**
On considère $z \in \mathbb{C}$. On appelle *forme exponentielle* de $z$ toute expression $e^{i\theta}\rho$ égale à $z$, pour $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

**Défi.**
On considère $a \in \mathbb{R}^*$ fixé. On dit qu'un réel $y$ est *congru* à un réel $x$ *modulo* $a$, lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = x + ka,$$

que l'on note $y \equiv x[a]$.

**Prop.**
Soit $(\theta_0, \rho_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (fixé) et $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (variable). Ainsi,

$$e^{i\theta}\rho = e^{i\theta_0}\rho_0 \iff \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \theta \equiv \theta_0 [2\pi] \end{cases} .$$

**Prop.** (Équation $\exp(z) = w$)
Soit $w \in \mathbb{C}$ (fixé). Soit $z \in \mathbb{C}$ (variable). Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. $\exp(z) = w$
2. $w \in \mathbb{C}^*$ et
$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \ln(\rho) + i\theta + i2\pi k$$
   où $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est tel que $e^{i\theta}\rho = w$.

**Prop.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\arg(rz) = \arg(z) \quad [2\pi].$$

**Défi.**
On dit qu'un réel $\theta$ est un des *arguments* d'un complexe $z$ non nul quand

$$\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{i\theta}\rho = z.$$

**Rema.**
C'est dire que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$.

**Nota.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $\arg(z)$ pour un des arguments de $z$ et $\mathrm{Arg}(z)$ pour celui qui tombe dans $]-\pi, \pi]$.

**Exem.**
- $\arg(0 + 3i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- $\arg(2 + 2\sqrt{3}\,i) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] = 60°\ [360°]$.
- $\mathrm{Arg}(4 - 4i) = -\dfrac{\pi}{4}$.

**Prop.**
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0\ [\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

**Prop.** (Arguments d'un produit, d'un quotient)
Si $z_1 = e^{i\theta_1}\rho_1$ et $z_2 = e^{i\theta_2}\rho_2$ (non nuls). Alors

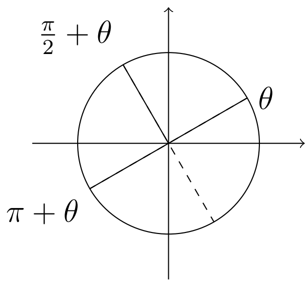
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi];$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi].$$

On a aussi
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$ ;
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.

## 7.3 Trigonométrie circulaire

**Prop.**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $(\cos(\theta+\pi), \sin(\theta+\pi)) = (-\cos\theta, -\sin\theta)$.
- $(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta)) = (-\cos\theta, \sin\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2}+\theta), \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.
- $(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta), \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)) = (\sin\theta, \cos\theta)$.




**Prop.** (Formules d'addition)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ainsi, d'une part,
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

D'autre part,
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = -\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

**Meth.** (Retrouver les formules d'addition)
1. $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$
2. $e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$

En égalisant ces expressions, on obtient promptement par identification ce que l'on cherche.
Pour les formules avec $(a-b)$, il suffit de remplacer $b$ par $-b$.

**Prop.** (Formule de duplication)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Ainsi,
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.

**Prop.** (Formule de Moivre)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

**Prop.** (Puissance $n$-ième d'une somme, pour $n$ petit)
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Ainsi,

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = 1a + 1b$
- $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
- $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

**Figu.** (Triangle de Pascal)
On retrouve les coefficients binomiaux précédents à l'aide du tableau suivant :

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

**Prop.** (Formules d'Euler)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

**Prop.** (Formules de linéarisation)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

**Prop.** (Formules de factorisation)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

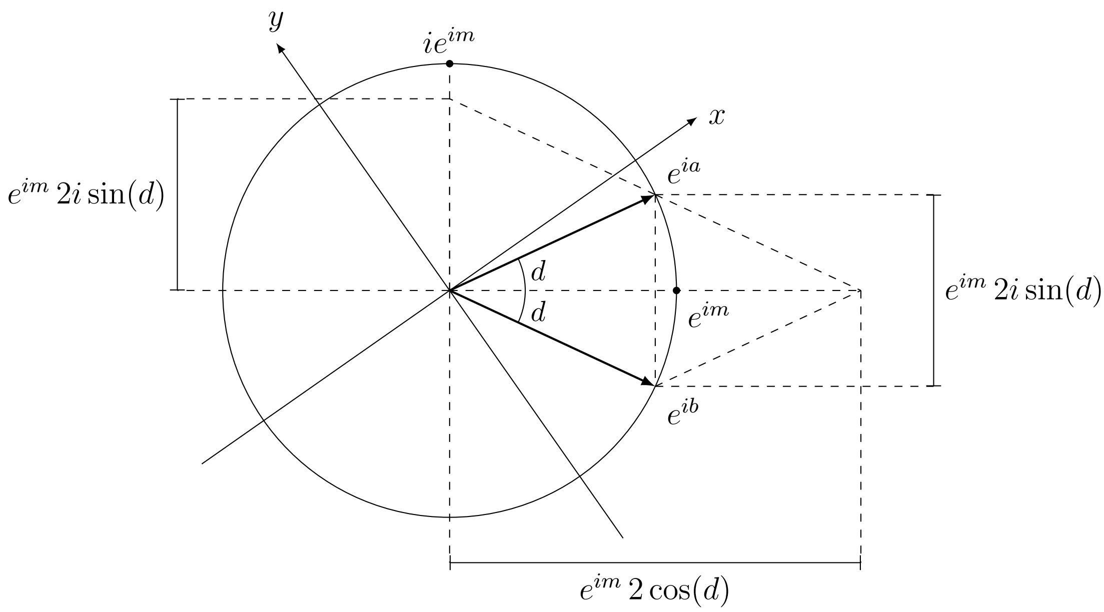
**Méth.** (Technique de l'arc moitié)
Pour factoriser une somme d'exponentielles $e^{ia} + e^{ib}$, on met en facteur l'exponentielle de la moyenne des angles ($e^{i\frac{a+b}{2}}$).

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

De même,

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

**Figu.**
Posons $m = \frac{a+b}{2}$ et $d = \frac{a-b}{2}$.




**Méth.** (Transformation de $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$)
On considère $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On veut écrire $f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t - \varphi)$.

1. On factorise par le module $A = \sqrt{a^2+b^2}$ :

$$f(t) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\omega t)\right).$$

2. On identifie un angle $\varphi$. Comme $(\frac{a}{A})^2 + (\frac{b}{A})^2 = 1$, il existe $\varphi$ tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{A}.$$

3. On applique la formule d'addition :

$$f(t) = A(\cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)) = A\cos(\omega t - \varphi).$$

Le nombre $\varphi$ est un argument du complexe $a + ib$.

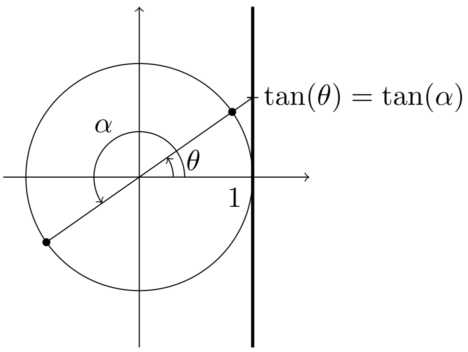
**Défi.** (Tangente)
On considère un réel $\theta$ non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo $\pi$. On définit ainsi la *tangente* de $\theta$ comme suit :

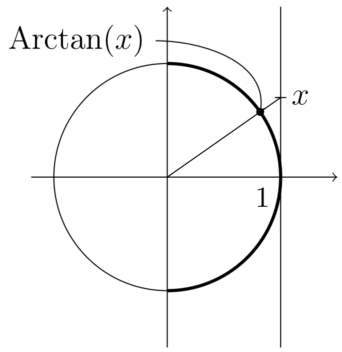
$$\tan(\theta) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

**Défi.** (Arctangente)
Pour tout réel $x$, on appelle *arctangente* de $x$, noté $\operatorname{Arctan}(x)$, l'unique réel $\theta$ tel que

$$\begin{cases} \theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ \tan(\theta) = x. \end{cases}$$

**Figu.**




**Prop.** (Inégalités géométriques)
Soit $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta).$$