19 AL 1 : Systèmes linéaires et représentations matricielles

19.1 Équivalence de systèmes linéaires

Noti.
On considère $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *équation linéaire* (« EL » dans la suite) à p inconnues et à coefficients réels toute équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

d'inconnue $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, de *paramètres* $a_1, \ldots, a_p$ et b. Si $b = 0$, alors on parle d'*équation linéaire homogène* (« ELH » dans la suite).

Exem.
Voici une EL à 3 inconnues :

$$2x - 3y + 5z = 2026.$$

La liste de ses coefficients est $(2; -3; 5)$ et son second membre est 2026.

Noti. (Système linéaire)
On considère $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle *système de n EL à p inconnues*, ou simplement *système linéaire* de n équations à p inconnues, tout système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$.
La famille de coefficients est $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. On l'appelle *(table) matrice à n lignes et p colonnes* à coefficients réels, et on l'écrit visuellement

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}.$$

La table matrice $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ écrite $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ est le *second membre.*

Exem.
Voici un système linéaire à 3 inconnues de 2 équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2025 \\ -5x - 6y - 7z = 2026. \end{cases}$$

La table matrice de ses coefficients est

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix},$$

et la table matrice de son second membre est

$$\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}.$$

Ici, le *système linéaire homogène associé* est celui où l'on remplace chaque coefficient du second membre par zéro ; dit autrement, on remplace le second membre par la table matrice nulle de même format (ou taille).

Noti.
La *matrice augmentée* d'un système linéaire (« SL » dans la suite) de matrice A et de second membre B est la matrice obtenue en joignant à la fin de chaque ligne le coefficient du second membre correspondant ; on la note $(A|B)$.

Exem.
La matrice augmentée du système linéaire ci-haut s'écrit

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{array}\right].$$

Rema.
Le SL

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2025 \\ -5x - 6y - 7z = 2026 \end{cases}$$

admet pour écriture matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2025 \\ 2026 \end{bmatrix}}_{B},$$

ou encore $AX = B$.

Rema.
Le SL précédent est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 2025(-1) = 0 \\ -5x - 6y - 7z + 2026(-1) = 0 \end{cases}$$

lequel s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2025 \\ -5 & -6 & -7 & 2026 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou encore

$$(A|B)\begin{pmatrix} X \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{2,1},$$

ou encore

$$\begin{cases} (A|B)\begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} = 0_{2,1} \\ t = -1 \end{cases}.$$