2 Fondements 1 : logique

2.1 Énoncés et notion de valeur de vérité

Noti. (Proposition)
Une *proposition* ou *assertion*, est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Prop. (Principe du tiers exclu)
Une proposition est soit vraie, soit fausse, et non les deux à la fois.

Noti. (Négation)
La *négation* d'une proposition P est vraie si et seulement si P est fausse. On note NON P ou $\neg P$.

P	$\neg P$
V	F
F	V

Toute proposition et sa négation sont contradictoires : "P et $\neg P$" est une contradiction (toujours faux).

Prop. (Involution)
P est vraie si et seulement si sa négation est fausse :

$$P \iff \neg(\neg P).$$

2.2 Combinaison de deux propositions

Défi. (Conjonction et Disjonction)
Soit P et Q deux propositions.
- La *conjonction*, notée P ET Q ou $P \wedge Q$, est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.
- La *disjonction*, notée P OU Q ou $P \vee Q$, est vraie si et seulement si au moins l'une des deux propositions est vraie.

Prop. (Associativité et commutativité)
Etant donné une liste de proposition , on ne varie par leur conjonction si on les ordonne puis les groupe arbitrairement.

Prop. (Distributivité)
Soit trois propositions P, Q et R. Alors :
- $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
- $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Noti. (Équivalence d'une première proposition avec une dernière)
P ÉQUIVAUT À Q, $P \iff Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies ou P et Q sont toutes les deux fausses.

Noti. (Implication d'une dernière proposition par une première)
P IMPLIQUE Q, $P \implies Q$, est vraie si et seulement si P est fausse, ou P et Q sont toutes les deux vraies.

Tabl. (Tables de vérité)
Voici des tables de valeurs de vérité de ces quatre propositions composées.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \iff Q$	$P \implies Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V

Prop. (Négations des propositions composées)
Soit P et Q. On a
- $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$
- $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \implies Q) \iff P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \iff Q) \iff (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

Prop. (Liens logiques)
- Disjonction et implication : $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$.
- Équivalence et implication : $(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Défi.
On appelle *contraposée* de l'implication $P \implies Q$, l'implication $\neg Q \implies \neg P$.

Prop.
Une implication et sa contraposée sont équivalentes :

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P).$$

Défi.
On appelle *implication réciproque* de $P \implies Q$, l'implication $Q \implies P$.

Rema.
En règle générale, on ne peut déterminer la valeur de vérité d'une implication directe à partir de celle de sa réciproque.

Prop.

$$P \vee Q \iff \neg P \implies Q$$

2.3 Propositions universelles, existentielles

Noti. (Conjonction "en vrac" de plusieurs propositions)
On dit que la conjonction d'une liste d'un certain nombre de propositions est vraie si toutes ces propositions sont vraies ; on dit qu'elle est fausse sinon, c'est-à-dire si au moins une proposition est fausse.

Noti. (Conjonction d'une famille de propositions)
- "quel que soit l'élément x, $\mathcal{P}(x)$" ;
- "pour tout élément x, $\mathcal{P}(x)$" ;
- $\forall x, \mathcal{P}(x)$.

Noti. (Disjonction d'une liste de plusieurs propositions)
On dit que la disjonction d'un certain nombre de propositions est vraie si au moins une de ces propositions est vraie ; on dit qu'elle est fausse sinon (toutes fausses).

Noti. (Disjonction (inclusive) d'une famille de propositions)
- "il existe au moins un élément x tel que $\mathcal{P}(x)$" ;
- "pour au moins un élément x, $\mathcal{P}(x)$" ;
- $\exists x, \mathcal{P}(x)$.

Prop. (Négation de la proposition universelle)
La négation de "$\forall x, \mathcal{P}(x)$" est la proposition existentielle "$\exists x, \neg\mathcal{P}(x)$".

Prop. (Négation de la proposition existentielle)
La négation de "$\exists x, \mathcal{P}(x)$" est la proposition universelle "$\forall x, \neg\mathcal{P}(x)$".

Exem.
La négation de "Tout élève de la classe possède un stylo bleu" est "Il existe au moins un élève de la classe qui ne possède pas de stylo bleu".

2.4 Valeur numérique de vérité d'une proposition (hors programme)

Défi.
Pour toute proposition $\mathcal{P}$, on pose :

$$\mathbb{1}_{\mathcal{P}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P} \text{ est vraie} \\ 0 & \text{si } \mathcal{P} \text{ est fausse} \end{cases}$$

Prop.
- $\mathbb{1}_{\neg\mathcal{P}} = 1 - \mathbb{1}_{\mathcal{P}}$
- $\mathbb{1}_{\mathcal{P}\wedge\mathcal{Q}} = \mathbb{1}_{\mathcal{P}}\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$
- $\mathbb{1}_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}} = 1 - \mathbb{1}_{\neg\mathcal{P}\wedge\neg\mathcal{Q}} = \mathbb{1}_{\mathcal{P}} + \mathbb{1}_{\mathcal{Q}} - \mathbb{1}_{\mathcal{P}}\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$

Prop. (Rapport à l'implication)

$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \iff \mathbb{1}_{\mathcal{P}} \leqslant \mathbb{1}_{\mathcal{Q}}$$

Complément
La proposition "il existe au plus un élément x tel que $\mathcal{P}(x)$" se dit "si x et y sont tels que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$ alors $x = y$" (où x et y désignent le même objet). Autrement écrit,

$$\forall x, \forall y, \quad (\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{P}(y)) \implies x = y.$$