# 20 Fondements 7 : entiers naturels et dénombrement

## 20.1 Ensemble fini

**Noti.**
On dit qu'un ensemble non vide est *fini* lorsqu'on peut ranger ses éléments d'un premier à un dernier.

**Défi.**
Un ensemble $E$ non vide est dit *fini* si, et seulement si, on peut trouver au moins un entier naturel $n$ non nul tel que les ensembles $E$ et $[\![1, n]\!]$ soient en bijection.

**Exem.**
Soit $m, n \in \mathbb{Z}$.
1. Si $n - m \geqslant 2$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\} &\longrightarrow [\![1, n-1-m]\!] \\ x &\longmapsto r = x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$[\![1, n-1-m]\!] \longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < n\}$$

$$r \longmapsto m + r.$$

2. Idem, si $n - m \geqslant 0$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant x \leqslant n\} &\longrightarrow [\![1, 1+n-m]\!] \\ x &\longmapsto r = 1 + x - m \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$[\![1, 1+n-m]\!] \longrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant x \leqslant n\}$$

$$r \longmapsto n - 1 + r.$$

**Noti.** (Principe des tiroirs)
Si on range $n+1$ cailloux dans $n$ boîtes, alors une des boîtes contiendra plus d'un caillou. La négation serait absurde.

**Prop.** (Principe des tiroirs)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute fonction de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est non injective.

**Prop.** (Unicité du cardinal)
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. S'il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$, alors $n = p$, et réciproquement.

## 20.2 Cardinal d'un ensemble fini

**Défi.**
Le *cardinal* d'un ensemble fini $E$ non vide est l'unique entier naturel $n$ non nul tel que $E$ est en bijection avec $[\![1, n]\!]$.

**Noti.**
Le cardinal de $E$ est le nombre de ses éléments.

**Nota.**
On le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.

**Rema.**
$\mathrm{Card}(\varnothing) \coloneqq 0$.

**Prop.**
Si un ensemble fini est en bijection avec un second ensemble, alors le second est fini et de même cardinal.

**Prop.**
Si les cardinaux des parties finies d'un ensemble sont tous majorés par un même entier naturel, alors l'ensemble est fini et de cardinal majoré par cet entier.

**Prop.**
Les ensembles *infinis* sont ceux dont les cardinaux des parties finies ne sont pas majorés.

**Prop.**
Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini de cardinal inférieur, et s'il y a égalité des deux cardinaux, alors la partie est égale à l'ensemble tout entier.

**Prop.**
Les parties finies des entiers naturels sont les parties majorées.

**Rema.**
Les parties finies des entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont les parties bornées.

## 20.3 Fonctions et ensembles finis

**Prop.**
Si une fonction arrivant dans un ensemble fini est injective, alors son ensemble de départ est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui d'arrivée.

**Prop.** (Surjectivité et finitude)
Si une fonction partant d'un ensemble fini est surjective, alors son ensemble d'arrivée est fini et de cardinal inférieur au cardinal de celui de départ.

**Rema.**
C'est-à-dire que si $f : E \to F$ est surjective avec $E$ fini, alors $F$ est fini et $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$.

**Prop.**
Pour qu'une fonction entre deux ensembles de même cardinal soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

**Rema.**
Par analogie, étant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pour que la fonction linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

soit bijective, il est suffisant qu'elle soit injective ou surjective.

## 20.4 Parties finies d'un même ensemble

**Prop.**
Si $A$ et $B$ sont deux parties finies et disjointes de $E$, alors $A \sqcup B$ est finie et

$$\mathrm{Card}(A \sqcup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

*Document en construction.*