16. Fonction d'une variable réelle 2 : EDO

Introduction
L'intervalle I possède plus d'un point. On traite ici d'*Équations Différentielles Ordinaires Scalaires Normalisées Linéaires* (EDOSNL) sur un intervalle I :
- et du premier ordre : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - a\,x(t) = b(t)$ sur I.
- et du second ordre : $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)) - s\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) + p\,x(t) = b(t)$ sur I.

Exem.
1. La fonction exp est solution de l'ED linéaire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - x(t) = 0$.
2. La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto \cos(2026\,\theta)$ est solution de l'ED linéaire $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)) + 2026^2\,x(t) = 0$.
3. La fonction $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$ est solution de l'ED $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y(x)) - (y(x))^2 = 1$ (qu'on peut écrire $y' - y^2 = 1$). Notez que celle-ci n'est pas linéaire.

Rema.
C'est à dire que :
1. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp'(t) - \exp(t) = 0$;
2. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}(\cos(2026\theta)) + 2026^2\cos(2026\theta) = 0$;
3. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan'(x) - (\tan(x))^2 = 1$.

16.1 Liminaires

Rema.
Chercher les primitives de $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, c'est résoudre sur I l'ED $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) - 0 \cdot x(t) = b(t)$.

Nota.
$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ désigne la classe des fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ qui sont infiniment dérivables.

Prop. (Stabilité)
L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ est stable par dérivation et par combinaison linéaire.

Exem.
Toute fonction polynomiale est infiniment dérivable.

Prop.
Pour les deux classes d'ED de ce cours, si le second membre est infiniment dérivable, alors toute solution est infiniment dérivable.

Prop. (Théorème de structure)
Une solution particulière étant donnée, on obtient toutes les solutions en lui ajoutant les solu-

tions de l'équation différentielle linéaire homogène associée (avec second membre nul).

Prop. (Principe de superposition)
Si x_1 et x_2 sont deux solutions particulières associées aux seconds membres b_1 et b_2 respectivement, alors $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ est une solution particulière associée au second membre $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Prop.
Soit $B \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. Pour toute fonction $k \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et tout $r \in \mathbb{K}$, la fonction $t \mapsto e^{rt}k(t)$ est solution sur I de l'ED

$$x'(t) - a\,x(t) = e^{rt}B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k'(t) + (r-a)k(t) = B(t).$$

De plus, elle est solution de l'ED

$$x''(t) - s\,x'(t) + p\,x(t) = e^{rt}B(t),$$

si et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad k''(t) + (2r-s)k'(t) + (r^2 - sr + p)k(t) = B(t).$$

Prop.
- Les solutions de l'EDL avec second membre $x'(t) - a\,x(t) = b(t)$ existent.
- Ce sont les fonctions $I \to \mathbb{K}, \quad t \mapsto \varphi_0(t) + Ce^{at}$ pour C parcourant $\mathbb{K}$, où φ_0 est une solution particulière arbitrairement choisie.

Document en cours de production.