15. Pratique calculatoire 4 : Primitives et intégrales

15.1. Primitives

Défi. (Primitive)
On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point, puis une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle *primitive* de la fonction f toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable et de fonction dérivée égale à f.

Prop. (Caractérisation des constantes parmi les dérivables)
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point. Ainsi, parmi les fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I, les fonctions constantes sont celles de dérivées nulles.

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un point.

Prop. (Existence de primitives)
Toute fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ admet des primitives.

Prop. (Égalité de deux fonctions dérivées)
Si deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ sont dérivables et de dérivées égales, alors elles diffèrent d'une constante.

Prop. (Description des primitives)
Une primitive sur l'intervalle I étant donnée, on obtient toute primitive en lui ajoutant une certaine fonction constante.

15.2. Primitives et somme intégrale

Défi. (Intégrale d'une fonction continue)
On considère $f : I \to \mathbb{R}$, puis $x, y \in I$. Ainsi, on appelle *somme intégrale*, depuis x jusqu'à y, de la fonction f, l'unique nombre réel

$$\int_{t=x}^{y} f(t)\mathrm{d}t := F(y) - F(x) = \big[F(t)\big]_{t=x}^{y}$$

où F est une des primitives de f sur I, arbitrairement choisie. C'est que la somme intégrale depuis x jusqu'à y d'une fonction continue f est égale à la variation d'une primitive, arbitrairement choisie, depuis la borne inférieure x de la somme jusqu'à la borne supérieure y.

Prop. (Théorème fondamental du calcul différentiel)
Si f est continue, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x);$$

si f est continûment dérivable alors

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t.$$

15.3. Techniques de calcul

Prop. (Relation de Chasles)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x, y, z \in I$. Ainsi

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t + \int_y^z f(t)\mathrm{d}t = \int_x^z f(t)\mathrm{d}t.$$

Rema.
1. Si $a < c < b$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,c]} f(t)\mathrm{d}t + \int_{[c,b]} f(t)\mathrm{d}t$.
2.

$$\int_x^y f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ \displaystyle\int_{[x,y]} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x < y \\ \displaystyle -\int_{[y,x]} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } y < x \end{cases}$$

Prop. (Linéarité de l'intégrale)
Soit $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ continues, puis $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi,
1. La fonction $C_1u_1 + C_2u_2$ est continue.
2. On a $\forall x \in I, \forall y \in I$,

$$\int_x^y \big(C_1u_1(t) + C_2u_2(t)\big) = C_1 \int_x^y u_1(t)\mathrm{d}t + C_2 \int_x^y u_2(t)\mathrm{d}t.$$

Prop. (Positivité et croissance de l'intégrale)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.
1. Si f est à valeurs positives sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}_+$:

$$[\forall x \in [a,b], \quad f(x) \in \mathbb{R}_+] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}_+\right].$$

2. On a

$$[\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq g(x)] \implies \left[\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{[a,b]} g(x)\mathrm{d}x\right].$$

Prop. (Primitivation « produit »)
Soit $u, v : I \to \mathbb{R}$ dérivables. Ainsi,

$$\forall x \in I, \quad u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$