

Formulaire courbes de Bézier de degré 2 et 3

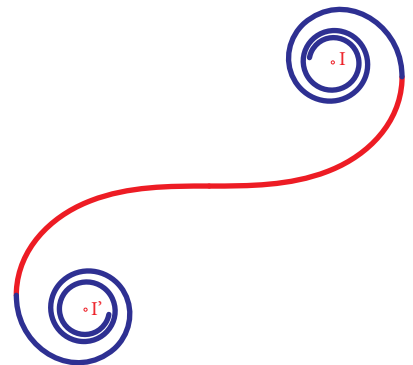


Table des matières

Equations des courbes de Bézier de degré 2.....	pages 4 et 5
Equations des courbes de Bézier de degré 3.....	pages 6 et 7
Courbes de Bézier 3 spéciales.....	page 8
Changement de paramètres d'une courbe de Bézier	page 9
Intersection d'une droite avec une courbe de Bézier	page 10
Estimation de paramètre t	page 11
Parabole paramétrique , calcul du sommet et du foyer	pages 12 et 13
Points stationnaires et de croisement d'une courbe de Bézier	pages 14 et 15
Subdivisions récursives (De Casteljau)	pages 16 et 17
Réunion de 2 courbes de Bézier	page 18
Distance d'un point à une courbe de Bézier	page 19
Centre de courbure (cercle osculateur)	page 20
Paramétrisation d'une fonction de 2ème ou 3ème degré	page 21
Aire, abscisse curviligne d'une courbe de Bézier	pages 22 et 23
Simulation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier	pages 24 et 25
Simulation d'un arc de clothoïde par une courbe de Bézier	pages 26 et 27
Courbe de Bézier passant strictement par 3 et 4 points.....	pages 28 et 29
Lissage d'un polygone par approximation dichotomique.....	pages 30, 31, 32, 33 et 34
Rotation d'une courbe Bézier par changement de base.....	page 35
Résolution d'une équation du 3ème degré	pages 36 et 37

Bibliographie

- [1] Modèles de Bézier des B-Splines et des Nurbs par G. DEMENGEL et J.P. POUGET éditions Ellipses
- [2] Topographie et topométrie modernes tome 1 : par S. MILLES et J. LAGOFUN éditions Eyrolles
- [3] Topographie et topométrie modernes tome 2 : par S. MILLES et J. LAGOFUN éditions Eyrolles
- [4] Cours de géométrie : par M. TROYANOV Presses polytechniques et universitaires romandes
- [5] Method'S classe de première : par T. PETIT éditions Ellipses

Équations des courbes de Bézier de degré 2 [1]

Les points $A_0 A_1 A_2$ sont les points de définitions d'une courbe paramétrique de Bézier de degré 2

Pour calculer les coordonnées d'un point $M(t)$ de la courbe il faut connaître son paramètre t^*

Equations vectorielles et analytiques de \mathcal{C}_2

a) selon les polynômes de Bernstein

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^2 \overrightarrow{OA_0} + 2t(1-t) \overrightarrow{OA_1} + t^2 \overrightarrow{OA_2}$$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = (1-t)^2 xA_0 + 2t(1-t) xA_1 + t^2 xA_2 \\ yM(t) = (1-t)^2 yA_0 + 2t(1-t) yA_1 + t^2 yA_2 \end{cases}$$

b) définition canonique (selon les puissances de t)

$$\overrightarrow{OM}(t) = t^2 (\overrightarrow{A_1 A_0} + \overrightarrow{A_1 A_2}) + 2t (\overrightarrow{A_0 A_1}) + \overrightarrow{OA_0}$$

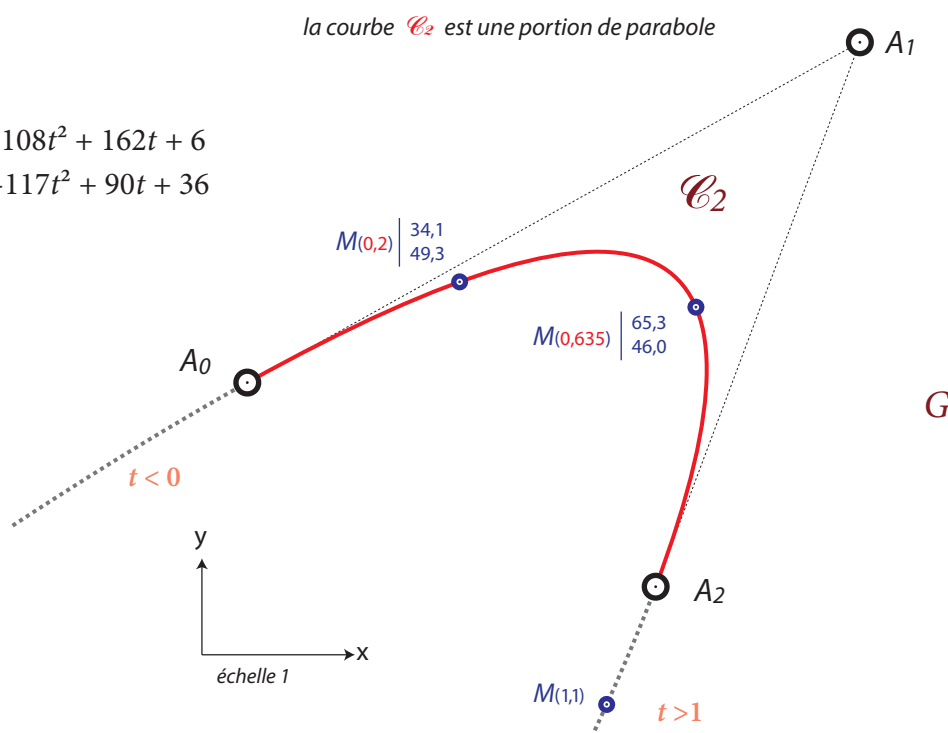
$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^2 (xA_0 - 2xA_1 + xA_2) + 2t(xA_1 - xA_0) + xA_0 \\ y = g(t) = t^2 (yA_0 - 2yA_1 + yA_2) + 2t(yA_1 - yA_0) + yA_0 \end{cases}$$

Exemple

\mathcal{C}_2	X	Y
A_0	6	36
A_1	87	81
A_2	60	9

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ y = g(t) = -117t^2 + 90t + 36 \end{cases}$$

t	$xM(t)$	$yM(t)$
1	60	9
0,2	34,1	49,3
0,3	44,9	52,5
0,4	53,5	53,3
0,5	60	51,8
0,635	65,3	46,0
0,7	66,5	41,7
1,1	53,5	-6,6
0	6	36



Les vecteurs $\overrightarrow{A_0 A_1}$ et $\overrightarrow{A_2 A_1}$ sont respectivement tangents à \mathcal{C}_2 en A_0 et A_2

Équations de la dérivée première des courbes de Bézier de degré 2 appelé aussi Hodographe premier

a') selon les polynômes de Bernstein

$$\overrightarrow{OH}_1(t) = 2[(1-t) (\overrightarrow{A_0 A_1}) + t (\overrightarrow{A_1 A_2})]$$

$$M'(t) \begin{cases} xH_1(t) = 2[(1-t) (xA_1 - xA_0) + t (xA_2 - xA_1)] \\ yH_1(t) = 2[(1-t) (yA_1 - yA_0) + t (yA_2 - yA_1)] \end{cases}$$

ou $\overrightarrow{OH}_1(t) = -2[(1-t)A_0 - (1-2t)A_1 - tA_2]$

b') canonique (selon les puissances de t)

$$\overrightarrow{OH}_1(t) = 2t(\overrightarrow{A_1 A_0} + \overrightarrow{A_1 A_2}) + 2(\overrightarrow{A_0 A_1})$$

$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 2t (xA_0 - 2xA_1 + xA_2) + 2(xA_1 - xA_0) \\ y' = g'(t) = 2t (yA_0 - 2yA_1 + yA_2) + 2(yA_1 - yA_0) \end{cases}$$

Dérivée seconde

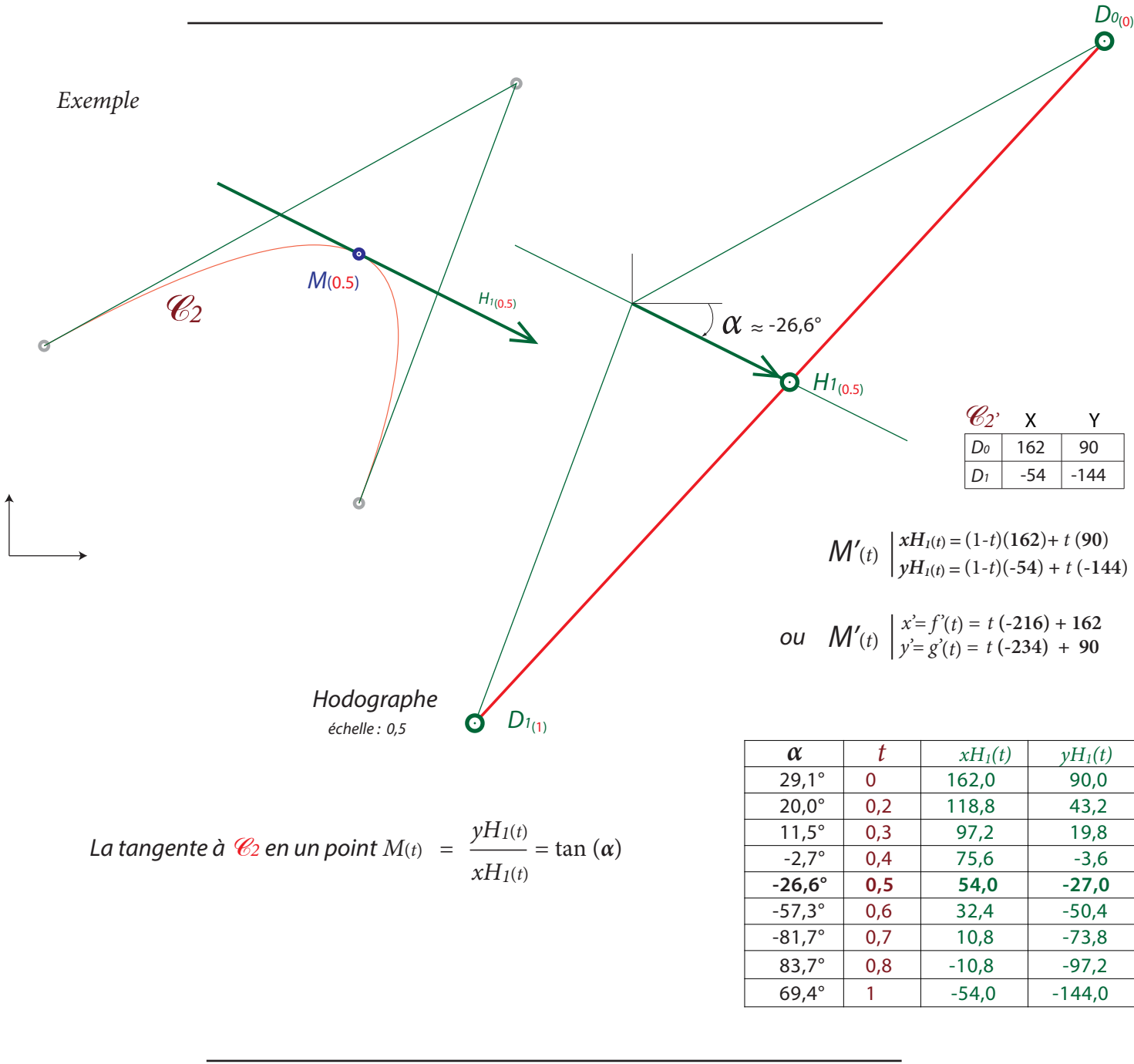
$$M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 2 (xA_0 - 2xA_1 + xA_2) \\ y'' = g''(t) = 2 (yA_0 - 2yA_1 + yA_2) \end{cases}$$

* l'usage veut que le paramètre $t \in [0, 1]$

Hodographe

L'hodographe H_I est la représentation graphique de la dérivée première de la courbe \mathcal{C}_2 .

La dérivée ' permet de connaître le coef. directeur de la tangente à \mathcal{C}_2 au point $M(t)$.



Définition matricielle d'une B2

matrice de passage

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xA & yA \\ xA_0 & yA_0 \\ xA_1 & yA_1 \\ xA_2 & yA_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \end{bmatrix}$$

\mathcal{T}_n \mathcal{M}_2 (\overrightarrow{OA}) $\overrightarrow{OM(t)}$

Définition vectorielle, canonique, matricielle des pts. d'une courbes de Bézier de degré 3 [1]

a) Définition selon les polynômes de Bernstein.

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^3 \overrightarrow{OP_0} + 3t(1-t)^2 \overrightarrow{OP_1} + 3t^2(1-t) \overrightarrow{OP_2} + t^3 \overrightarrow{OP_3}$$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = (1-t)^3 xP_0 + 3t(1-t)^2 xP_1 + 3t^2(1-t) xP_2 + t^3 xP_3 \\ yM(t) = (1-t)^3 yP_0 + 3t(1-t)^2 yP_1 + 3t^2(1-t) yP_2 + t^3 yP_3 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}'(t) = 3[(1-t)^2 (\overrightarrow{P_0P_1}) + 2t(1-t) (\overrightarrow{P_1P_2}) + t^2 (\overrightarrow{P_2P_3})]$$

$$M'(t) \begin{cases} xM'(t) = 3[(1-t)^2 (xP_1 - xP_0) + 2t(1-t)(xP_2 - xP_1) + t^2(xP_3 - xP_2)] \\ yM'(t) = 3[(1-t)^2 (yP_1 - yP_0) + 2t(1-t)(yP_2 - yP_1) + t^2(yP_3 - yP_2)] \end{cases}$$

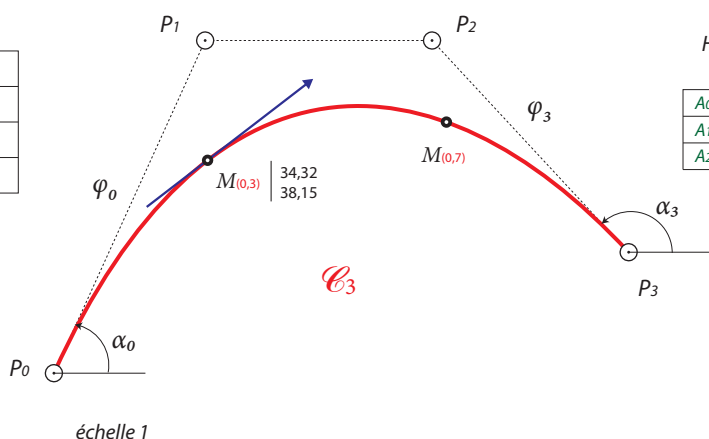
$$\overrightarrow{OM}''(t) = 6[(1-t) (\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2}) + t (\overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_2P_3})]$$

$$M''(t) \begin{cases} xM''(t) = 6[(1-t) (xP_2 - xP_0) + t (xP_1 - 2xP_2 + xP_3)] \\ yM''(t) = 6[(1-t) (yP_2 - yP_0) + t (yP_1 - 2yP_2 + yP_3)] \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}'''(t) = 6[(\overrightarrow{P_0P_3}) + 3(\overrightarrow{P_2P_1})]$$

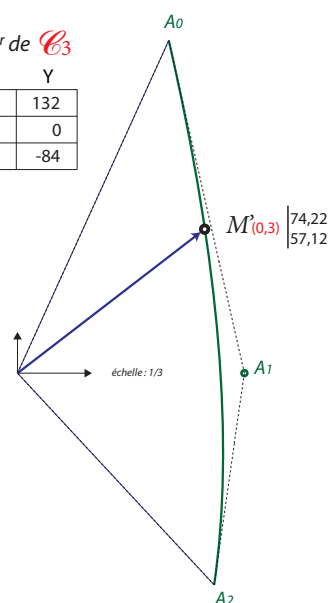
$$M'''(t) \begin{cases} xM'''(t) = 6[xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2)] \\ yM'''(t) = 6[yP_3 - yP_0 + 3(yP_1 - yP_2)] \end{cases}$$

\mathcal{C}_3	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26



Hodographe 1^{er} de \mathcal{C}_3

	X	Y
$A_0 = 3(\overrightarrow{P_0P_1})$	60	132
$A_1 = 3(\overrightarrow{P_1P_2})$	90	0
$A_2 = 3(\overrightarrow{P_2P_3})$	78	-84



Les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_2P_3}$ sont respectivement tangents à \mathcal{C}_3 en P_0 et P_3

Définition matricielle.

$$\begin{matrix} t & 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0,3 & 0,1 & 0,027 \\ 0,7 & 1 & 0,7 & 0,5 & 0,343 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{matrice de passage} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} xP & yP \\ \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 34 & 54 \\ 64 & 54 \\ 90 & 26 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} xM(t) & yM(t) \\ \begin{bmatrix} 14,00 & 10,00 \\ 34,32 & 38,15 \\ 65,90 & 43,21 \\ 90,00 & 26,00 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

\mathcal{T}_n \mathcal{M}_3 (\overrightarrow{OP}) $\overrightarrow{OM}(t)$

b) Définition avec $P_0 P_1 P_2 P_3$ isolés .

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = (1-t)^3 xP_0 + 3t(1-t)^2 xP_1 + 3t^2(1-t) xP_2 + t^3 xP_3 \\ y = g(t) = (1-t)^3 yP_0 + 3t(1-t)^2 yP_1 + 3t^2(1-t) yP_2 + t^3 yP_3 \end{cases}$$

$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = -3[(1-t)^2 xP_0 - (1-t)(1-3t) xP_1 - t(2-3t) xP_2 - t^2 xP_3] \\ y' = g'(t) = -3[(1-t)^2 yP_0 - (1-t)(1-3t) yP_1 - t(2-3t) yP_2 - t^2 yP_3] \end{cases}$$

$$M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 6[(1-t) xP_0 - (2-3t) xP_1 + (1-3t) xP_2 + t xP_3] \\ y'' = g''(t) = 6[(1-t) yP_0 - (2-3t) yP_1 + (1-3t) yP_2 + t yP_3] \end{cases}$$

$$M'''(t) \begin{cases} x''' = f'''(t) = 6[xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2)] \\ y''' = g'''(t) = 6[yP_3 - yP_0 + 3(yP_1 - yP_2)] \end{cases}$$

c) Définition vecteurs et contraintes .

En posant : $V_0 = \overrightarrow{OP_0}$; $V_1 = (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0})$; $V_2 = (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$; $V_3 = (\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_2})$

$$\overrightarrow{OM}(t) = V_0 + (1-(1-t)^3) (V_1) + (3t^2-2t^3) (V_2) + t^3 (V_3)$$

$$\overrightarrow{OM}'(t) = 3[(1-t)^2 (V_1) + 2t(1-t) (V_2) + t^2 (V_3)]$$

$$\overrightarrow{OM}''(t) = -6[(1-t) (V_1) - (1-2t) (V_2) - t (V_3)]$$

$$\overrightarrow{OM}'''(t) = 6[(V_1) - 2 (V_2) + (V_3)]$$

d) Définition canonique (selon les puissances de t).

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OC_0}t^3 + \overrightarrow{OC_1}t^2 + \overrightarrow{OC_2}t + \overrightarrow{OC_3} \quad \text{En posant : } \begin{aligned} xC_0 &= x_3 = (xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2)) \\ xC_1 &= x_2 = 3(xP_0 + xP_2 - 2xP_1) \\ xC_2 &= x_1 = 3(xP_1 - xP_0) \\ xC_3 &= x_0 = xP_0 \end{aligned} \quad (\text{Resp. pour les } y)$$

Réciproquement

$$\begin{aligned} xP_0 &= x_0 & (\text{Resp. pour les } y) \\ xP_1 &= \frac{x_1}{3} + xP_0 \\ xP_2 &= \frac{x_2}{3} - xP_0 + 2xP_1 \\ xP_3 &= x_3 + xP_0 - 3(xP_1 - xP_2) \end{aligned}$$

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 \\ y = g(t) = y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 \end{cases} \quad M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 3x_3t^2 + 2x_2t + x_1 \\ y' = g'(t) = 3y_3t^2 + 2y_2t + y_1 \end{cases} \quad M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 6x_3t + 2x_2 \\ y'' = g''(t) = 6y_3t + 2y_2 \end{cases} \quad M'''(t) \begin{cases} x''' = 6x_3 \\ y''' = 6y_3 \end{cases}$$

Donc dans notre exemple les points de \mathcal{C} sont aussi définis par : $M(t) \begin{cases} x = f(t) = -14t^3 + 30t^2 + 60t + 14 \\ y = g(t) = 16t^3 - 132t^2 + 132t + 10 \end{cases}$

Et matriciellement avec : $(\overrightarrow{OC}) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{OM}(t) = {}^T(\overrightarrow{OC}) \mathcal{T}_n$

e) Définition canonique avec $P1$ et $P3$ définis par coordonnées polaires .

avec $\alpha_0 = \text{angle orienté } \overrightarrow{PoP_1}$ et $\varphi_0 = \|\overrightarrow{PoP_1}\|$ et $\alpha_3 = \text{angle orienté } \overrightarrow{P_3P_2}$ et $\varphi_3 = \|\overrightarrow{P_3P_2}\|$

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^3 (2xP_0 + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2xP_3) - 3t^2 (xP_0 + 2\varphi_0 \cos(\alpha_0) - \varphi_3 \cos(\alpha_3) - xP_3) + 3t \varphi_0 \cos(\alpha_0) + xP_0 \\ y = g(t) = t^3 (2yP_0 + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2yP_3) - 3t^2 (yP_0 + 2\varphi_0 \sin(\alpha_0) - \varphi_3 \sin(\alpha_3) - yP_3) + 3t \varphi_0 \sin(\alpha_0) + yP_0 \end{cases}$$

e1) Avec $P1$ connus et fixe .

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^3 (-xP_0 + 3xP_1 - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2xP_3) + 3t^2 (xP_0 - 2xP_1 + \varphi_3 \cos(\alpha_3) + xP_3) + 3t (xP_1 - xP_0) + xP_0 \\ y = g(t) = t^3 (-yP_0 + 3yP_1 - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2yP_3) + 3t^2 (yP_0 - 2yP_1 + \varphi_3 \sin(\alpha_3) + yP_3) + 3t (yP_1 - yP_0) + yP_0 \end{cases}$$

e2) Avec $P2$ connus et fixe .

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^3 (2xP_0 + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3xP_2 + xP_3) - 3t^2 (xP_0 + 2\varphi_0 \cos(\alpha_0) - xP_2) + 3t \varphi_0 \cos(\alpha_0) + xP_0 \\ y = g(t) = t^3 (2yP_0 + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3yP_2 + yP_3) - 3t^2 (yP_0 + 2\varphi_0 \sin(\alpha_0) - yP_2) + 3t \varphi_0 \sin(\alpha_0) + yP_0 \end{cases}$$

f) Définition par coordonnées polaires avec éléments isolés.

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = (1-t)^2(2t+1) xP_0 + 3t(1-t)^2 \varphi_0 \cos(\alpha_0) + 3t^2(1-t) \varphi_3 \cos(\alpha_3) + t^2(3-2t)xP_3 \\ y = g(t) = (1-t)^2(2t+1) yP_0 + 3t(1-t)^2 \varphi_0 \sin(\alpha_0) + 3t^2(1-t) \varphi_3 \sin(\alpha_3) + t^2(3-2t)yP_3 \end{cases}$$

$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 3 \left[-2t(1-t) xP_0 + (1-t)(1-3t) \varphi_0 \cos(\alpha_0) + t(2-3t) \varphi_3 \cos(\alpha_3) + 2t(1-t)xP_3 \right] \\ y' = g'(t) = 3 \left[-2t(1-t) yP_0 + (1-t)(1-3t) \varphi_0 \sin(\alpha_0) + t(2-3t) \varphi_3 \sin(\alpha_3) + 2t(1-t)yP_3 \right] \end{cases}$$

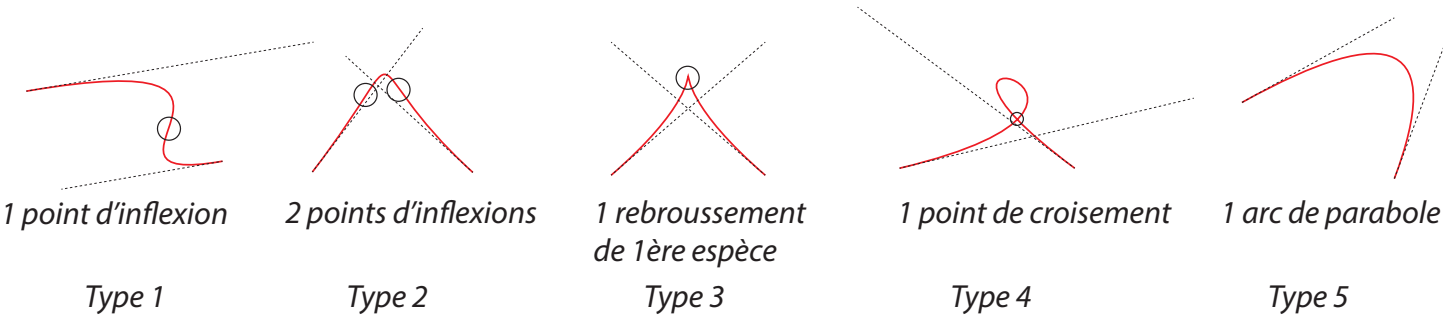
$$M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 6 \left[-(1-2t) xP_0 - (2-3t) \varphi_0 \cos(\alpha_0) + (1-3t) \varphi_3 \cos(\alpha_3) + (1-2t)xP_3 \right] \\ y'' = g''(t) = 6 \left[-(1-2t) yP_0 - (2-3t) \varphi_0 \sin(\alpha_0) + (1-3t) \varphi_3 \sin(\alpha_3) + (1-2t)yP_3 \right] \end{cases}$$

$$M'''(t) \begin{cases} x''' = f'''(t) = 6 \left[2xP_0 + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2xP_3 \right] \\ y''' = g'''(t) = 6 \left[2yP_0 + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2yP_3 \right] \end{cases}$$

Les définitions e) et f) sont très pratiques pour certains calculs.

Courbes de Bézier de degré 3 spéciales.

a) Les différents types de courbes de degré 3.



b) Courbe B₃ qui est une portion de parabole

Dans la plupart des logiciels de dessin vectoriel seules les courbes de Bézier de degré 3 sont utilisées.
Voici une méthode pour afficher un vrai segment de parabole avec une B₃.

Il faut que P₁ soit au $\frac{2}{3}$ de $\overrightarrow{A_0A_1}$ et P₂ au $\frac{2}{3}$ de $\overrightarrow{A_2A_1}$

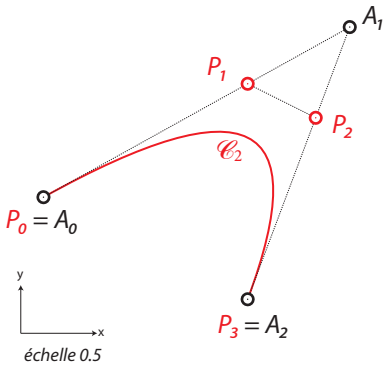
\mathcal{C}_2

	X	Y
A ₀	6	36
A ₁	87	81
A ₂	60	9

=

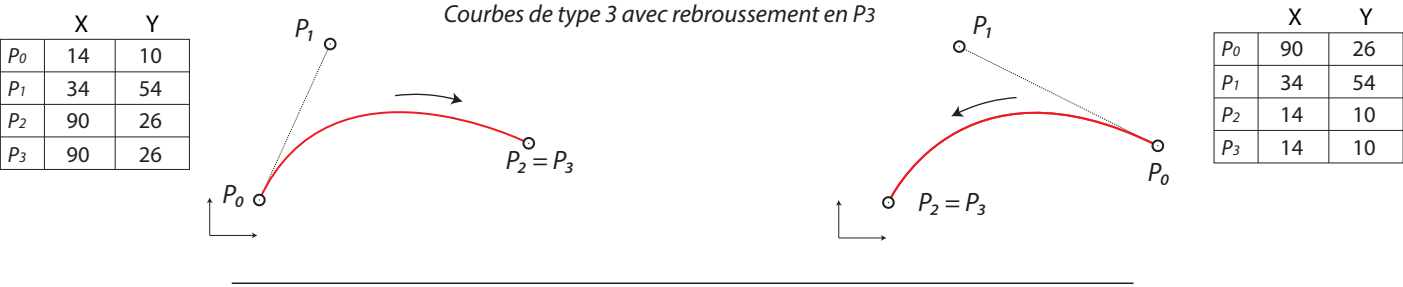
\mathcal{C}_2

	X	Y
P ₀	6	36
P ₁	60	66
P ₂	78	57
P ₃	60	9



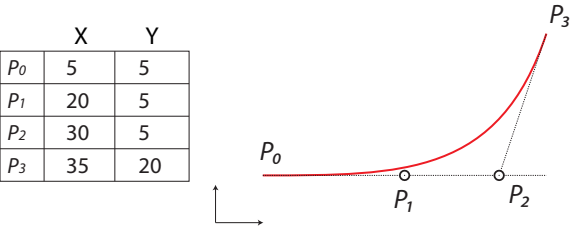
c) Courbe définie par «3 points» utilisée dans le système Postscript.

La courbe est définie avec les points P₀ P₁ P₂ P₃ mais P₂ est confondu avec P₃.



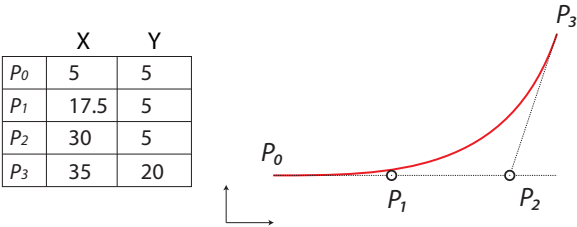
d) Courbe avec P₂ sur la tangente en P₀

Courbe de type 2 avec deux inflexions dont une en P₀



e) Courbe avec P₂ sur la tangente en P₀ et P₁ au milieu de P₀P₂

Courbe de type 1 avec une inflexion en P₀



Changement de paramètres d'une B3 par rotation et / ou translation

Nous utiliserons la définition canonique d'une B3 => $M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3 t^3 + x_2 t^2 + x_1 t + x_0 \\ y = g(t) = y_3 t^3 + y_2 t^2 + y_1 t + y_0 \end{cases}$

Exemple avec une courbe "gauche" et ses hodographes

\mathcal{C}_4	X	Y
P_0	1	3
P_1	5	8
P_2	4	1
P_3	6	5

courbe de type 2

$$\mathcal{C}_4 \begin{cases} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases}$$

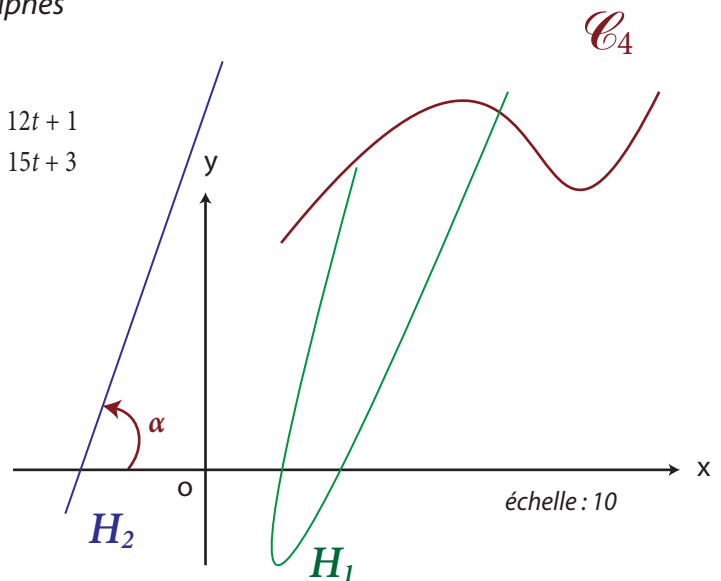
$$\vec{a} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{23}{8} \Rightarrow \alpha \approx 70,821^\circ$$

$$\vec{b} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-36}{-15} \Rightarrow \beta \approx 67,380^\circ$$

$$\vec{c} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{15}{12} \Rightarrow \gamma \approx 51,340^\circ$$

$$\vec{d} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{1} \Rightarrow \delta \approx 71,565^\circ$$

$$NB: \vec{a} = \mathcal{C}_4'''$$



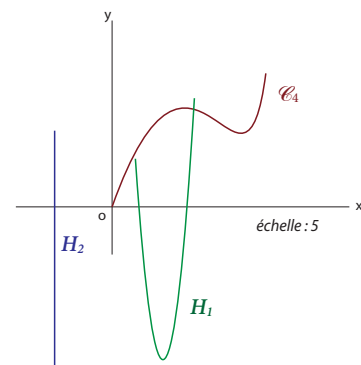
Méthode pour "dégauchir" et simplifier une courbe B3 par rotation et translation.

Appliquer une rotation* de $(90^\circ - \alpha) \approx 19^\circ 17'$ de centre $P_0|_3^1$ et une translation de $-P_0|_{-3}^1$

$$\approx$$

\mathcal{C}_4	X	Y
P_0	0	0
P_1	2,14	6,04
P_2	3,49	-0,90
P_3	4,07	3,53

$$\mathcal{C}_4 \begin{cases} f(t) \approx 0 t^3 - 2,34 t^2 + 6,41 t + 0 \\ g(t) \approx 24,35 t^3 - 38,93 t^2 + 18,11 t + 0 \end{cases}$$



Avec une rotation de $-\alpha$ c'est le coefficient y_3 qui sera nul.

De la même manière une rotation impliquant β les coef. x_2 ou y_2 seront = 0 etc...

Ces changements de paramètres peuvent permettre de simplifier des équations notamment pour déterminer le point de croisement d'une courbe de type 4 (voir page 15)

En fait l'invariance affine du paramètre t autorise ces changements.

Nous pouvons dans certains cas exprimer une équation d'une manière différente et arriver indirectement à un résultat pour revenir à une méthode directe.

* Rotation à l'aide d'une formule du changement de base (voir page 35)

Intersection d'une droite avec une B3, calcul du paramètre t

Il est très utile de déterminer le paramètre t d'un point de la courbe dont on connaît l'abscisse ou l'ordonnée

Cela revient à calculer l'intersection de la courbe avec une droite d'équation $x = x(M)$ ou $y = y(N)$

Exemple 1

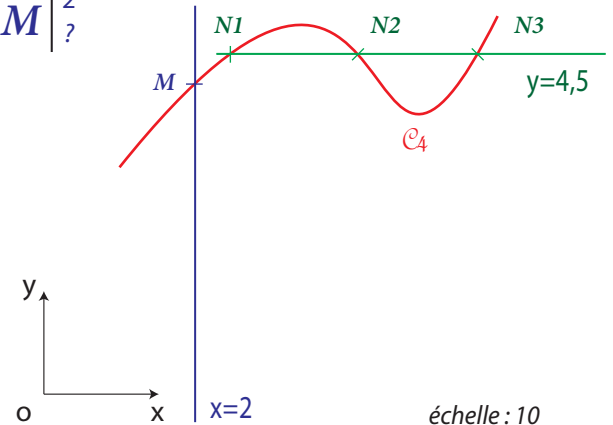
\mathcal{C}_4	X	Y
P_0	1	3
P_1	5	8
P_2	4	1
P_3	6	5

$$\mathcal{C}_4 \begin{cases} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases} \quad M \begin{vmatrix} 2 \\ ? \end{vmatrix}$$

$$xM(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 = 2$$

Donc il faut résoudre : $8t^3 - 15t^2 + 12t - 1 = 0$

$\Rightarrow 1$ solution réelle : $t_1 \approx 0,0938 \Rightarrow M \begin{vmatrix} 2 \\ 4,11 \end{vmatrix}$



Exemple 2 avec \mathcal{C}_4 et $N \begin{vmatrix} ? \\ 4,5 \end{vmatrix}$

$$yM(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 = 4,5$$

$$23t^3 - 36t^2 + 15t - 1,5 = 0 \Rightarrow 3 \text{ solutions réelles : } \begin{matrix} t_1 \approx 0,1470 & t_2 \approx 0,4660 & t_3 \approx 0,9523 \\ N1 \begin{vmatrix} 2,47 \\ 4,5 \end{vmatrix} & N2 \begin{vmatrix} 4,14 \\ 4,5 \end{vmatrix} & N3 \begin{vmatrix} 5,73 \\ 4,5 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Intersection d'une B3 avec une droite définie par un point E et son coef. directeur a

Exemple 3

$$\mathcal{C}_4 \begin{cases} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases} \quad E \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad a = 1$$

Posons : $\frac{y_{\mathcal{C}_4} - y_D}{x_{\mathcal{C}_4} - x_D} = a$

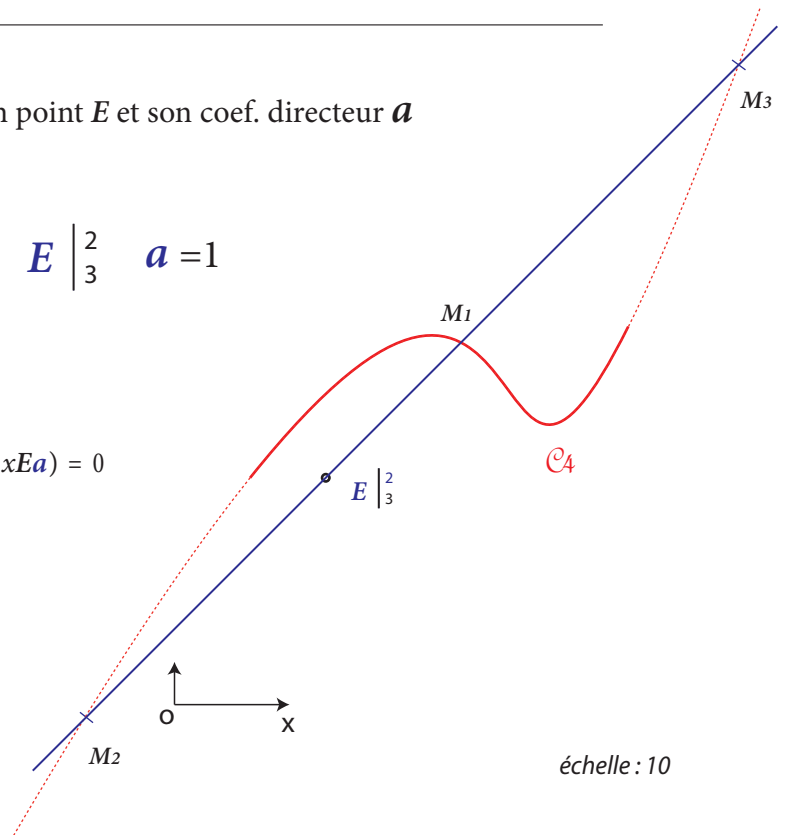
$$\Rightarrow (y_3 - ax_3)t^3 + (y_2 - ax_2)t^2 + (y_1 - ax_1)t + (y_0 - ax_0 - y_E + x_E a) = 0$$

En développant $\Rightarrow 15t^3 - 21t^2 + 3t + 1 = 0$

$\Rightarrow 3$ solutions réelles :

$$t_1 \approx 0,3692 \quad t_2 \approx -0,1526 \quad t_3 \approx 1,1834$$

$$M1 \begin{vmatrix} 3,78 \\ 4,78 \end{vmatrix} \quad M2 \begin{vmatrix} -1,21 \\ -0,21 \end{vmatrix} \quad M3 \begin{vmatrix} 7,45 \\ 8,45 \end{vmatrix}$$



Intersection de 2 courbes B3

Un algorithme s'impose \Rightarrow <https://pomax.github.io/bezierinfo/#intersections>

L'avantage est que l'algorithme calcule sur l'intervalle $[0, 1]$ donc pas de confusions possible.

Nous pouvons constater que le calcul de t implique souvent 3 solutions.

Et pour éviter certaines confusions j'ai situé les exemples de courbes dans le premier quadrant du cercle trigonométrique afin d'avoir une pseudo équivalence avec une fonction.

Cela implique que le calcul de t avec la définition canonique $f(t)$ accepte une seule solution sur l'intervalle $[0 \ 1]$.

D'où l'utilité parfois d'effectuer un changement de paramètre par rotation et ou translation pour effectuer certains calculs.

Dans la réalité, notamment dans le domaine du design avec des logiciels «vectoriels» seule la portion continue des courbes sont utilisées (en majorités ce sont des courbes de type 2 ou 4).

Si par le calcul un point stationnaire est situé sur $[0 \ 1]$ il est préférable de diviser la courbe en ce point.

Estimation du paramètre t

Dans certains calculs, il est parfois nécessaire d'estimer le paramètre t d'un ou plusieurs points .

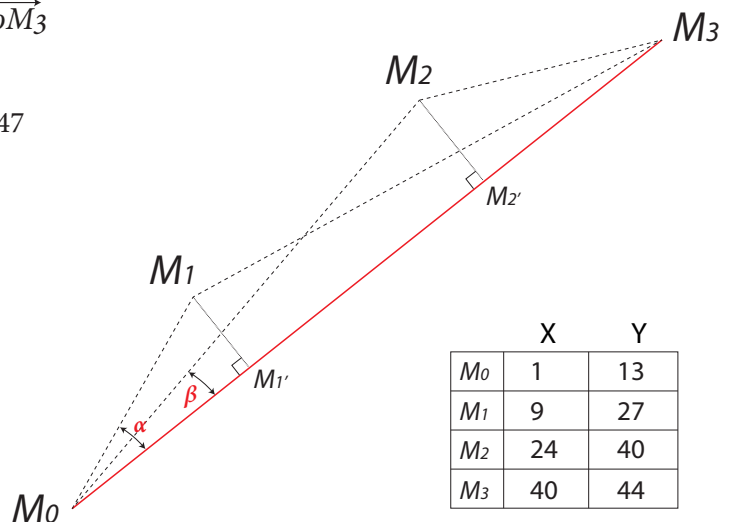
Voici 2 méthodes :

Exemple 1 : méthode du projeté orthogonal sur $\overrightarrow{M_0M_3}$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{M_0M_3}\| &\approx 49,82 & \|\overrightarrow{M_0M_1}\| &\approx 16,13 & \|\overrightarrow{M_0M_2}\| &\approx 35,47 \\ \alpha &\approx 11,171^\circ & \beta &\approx 1,754^\circ \end{aligned}$$

$$t_{(M_1)} = \frac{\|\overrightarrow{M_0M_1}\| \cos(\alpha)}{\|\overrightarrow{M_0M_3}\|} \approx 0,3175$$

$$t_{(M_2)} = \frac{\|\overrightarrow{M_0M_2}\| \cos(\beta)}{\|\overrightarrow{M_0M_3}\|} \approx 0,7116$$



Exemple 2 : méthode des normes

Avec : $\|\overrightarrow{M_0M_3}\| \approx 49,82$ $\|\overrightarrow{M_0M_1}\| \approx 16,13$ $\|\overrightarrow{M_0M_2}\| \approx 35,47$

$$t_{(M_1)} = \frac{\|\overrightarrow{M_0M_1}\|}{\|\overrightarrow{M_0M_3}\|} \approx 0,3237 \quad t_{(M_2)} = \frac{\|\overrightarrow{M_0M_2}\|}{\|\overrightarrow{M_0M_3}\|} \approx 0,7119$$

Nous pouvons constater que la méthode des normes engendre 2 solutions. Nous pourrions par exemple faire la moyenne des 2 estimations de t .

Et aussi avec : $\|\overrightarrow{M_0M_3}\| \approx 49,82$ $\|\overrightarrow{M_3M_1}\| \approx 35,36$ $\|\overrightarrow{M_3M_2}\| \approx 16,49$

$$t_{(M_1)} = 1 - \frac{\|\overrightarrow{M_3M_1}\|}{\|\overrightarrow{M_0M_3}\|} \approx 0,2903 \quad t_{(M_2)} = 1 - \frac{\|\overrightarrow{M_3M_2}\|}{\|\overrightarrow{M_0M_3}\|} \approx 0,6690$$

$$t_{(M_1)\text{moyen}} \approx 0,3070$$

$$t_{(M_2)\text{moyen}} \approx 0,6905$$

Parabole B2 : calcul de son axe A, son sommet S et son foyer F

Calcul du sommet S

$$\text{le coef dir. de l'axe A de la parabole} = \vec{a} = \frac{y\mathcal{C}_2''}{x\mathcal{C}_2''}$$

$$\text{La tangente au sommet S} = \vec{d} = -\frac{1}{\vec{a}}$$

A l'aide de l'équation de la dérivée première et de \vec{d} calculer le paramètre t du sommet S

$$\vec{d} = \frac{2t(yA_0 - 2yA_1 + yA_2) + 2(yA_1 - yA_0)}{2t(xA_0 - 2xA_1 + xA_2) + 2(xA_1 - xA_0)} \quad \text{donc } t_{(\text{sommet})} = \frac{(yA_1 - yA_0) - \vec{d}(xA_1 - xA_0)}{\vec{d}(xA_0 - 2xA_1 + xA_2) - (yA_0 - 2yA_1 + yA_2)}$$

Exemple

\mathcal{C}_2	X	Y
A ₀	6	36
A ₁	87	81
A ₂	60	9
S	62,6	50,0

$$\vec{a} = \frac{117}{108} \quad \vec{d} = -\frac{108}{117} \quad \text{donc } t_{(\text{sommet})} \approx 0,552716$$

$$\mathcal{C}_2 \left| \begin{array}{l} xM(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ yM(t) = -117t^2 + 90t + 36 \end{array} \right.$$

$$S \left| \begin{array}{l} xS(t_{\text{sommet}}) \approx 62.547 \\ yS(t_{\text{sommet}}) \approx 50.002 \end{array} \right.$$

Calcul du foyer F

Il faut savoir que l'intersection d'une tangente à \mathcal{C}_2 (par exemple A₂A₁) avec son axe A => L
et que l'intersection de la médiatrice de A₂L avec l'axe A de la parabole est son foyer F.

Exemple*

$$L = (S; \vec{a}) \cap \overrightarrow{A_2A_1}$$

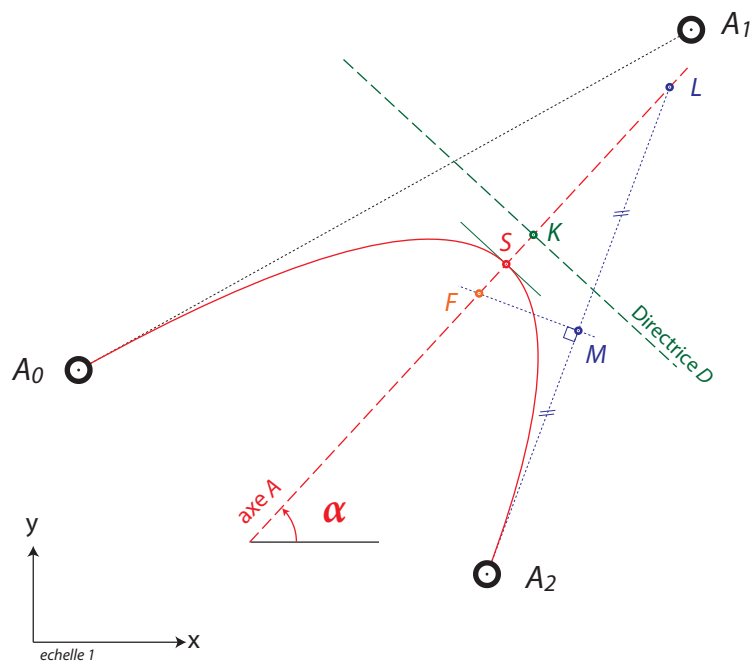
	X	Y	coef dir.
A ₂	60	9	2.6667 (coef dir. de $\overrightarrow{A_2A_1}$)
S	62.55	50.00	1.0833 (\vec{a})
L	84.15	73.41	

$$F = (S; \vec{a}) \cap \text{médiatrice de } \overrightarrow{A_2L}$$

	X	Y	coef dir.
S	62.55	50	1.0833 (\vec{a})
M	72.08	41.2	-0.3750 ($-1 \div 2.6667$)
F	58.96	46.12	
K	66.13	53.88	

Et nous pouvons aussi calculer le point K situé sur la directrice et qui est le symétrique de F par rapport à S

* voir page 24 intersection de 2 droites à l'aide de la formule de Delambre.



$$\mathcal{C}_2 \begin{cases} xM(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ yM(t) = -117t^2 + 90t + 36 \end{cases}$$

$$S \begin{cases} xS \approx 62.547 \\ yS \approx 50.002 \end{cases}$$

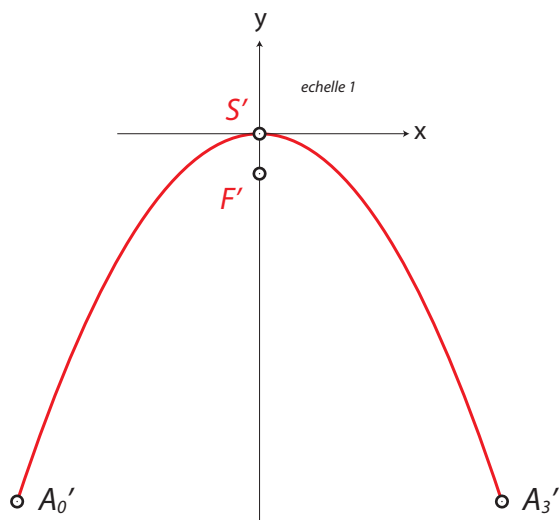
Calcul du foyer F : méthode indirecte

Dans un premier temps il faut que le sommet de la parabole soit à l'origine du repère et son axe A doit coïncider avec l'axe OY .

Nous allons donc effectuer un changement de base avec une rotation de $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ dont le centre Ω est le sommet S et une translation de $-xS$ et $-yS$.

$$\text{avec } \alpha = \arctan\left(\frac{117}{108}\right) \approx 42,7094^\circ$$

$$\text{Donc dans ce cas la avec } \Omega = S \begin{cases} xS \approx 62,547 & \Delta x \approx -62,547 \\ yS \approx 50,002 & \Delta y \approx -50,002 \end{cases}$$



$$A_0' \begin{cases} xA_0' = \cos\alpha (xA_0 - xS) - \sin\alpha (yA_0 - yS) \approx -32.054 \\ yA_0' = \sin\alpha (xA_0 - xS) + \cos\alpha (yA_0 - yS) \approx -48.643 \end{cases}$$

$$A_3' \text{ est la symétrique de } A_0' \begin{cases} xA_3' \approx 32,054 \\ yA_3' \approx -48,643 \end{cases}$$

En interpolant les points A_0', S', A_3' par la méthode de Newton

$$\text{la paramètre } a \text{ de la parabole} = \frac{yA_0'}{(xA_0')^2} \approx -0,047344$$

$$\text{le foyer est définis par : } F' \begin{cases} xF' = 0 \\ yF' = \frac{1}{4a} = \frac{(xA_0')^2}{4yA_0'} \approx -5,281 \end{cases}$$

Donc directement avec $A = (xA_0 - xS)$, $B = (yA_0 - yS)$, et son sommet S

$$F \begin{cases} xF = \sin(\alpha) (yF') + xS = \frac{(\cos\alpha A - \sin\alpha B)^2}{4(A + \cotan\alpha B)} + xS \\ yF = \cos(\alpha) (yF') + yS = \frac{(\cos\alpha A - \sin\alpha B)^2}{4(\tan\alpha A + B)} + yS \end{cases}$$

NB : le calcul peut se faire sur \mathbb{R}^2 avec $A_0 = n'importe quel point de la parabole hormis son sommet.$

Points stationnaires et point de croisement d'une B3

Pour déterminer les points stationnaires utilisons la formule suivante : le déterminant de $[B_3'(t), B_3''(t)] = 0$

Avec : $B_3' \Rightarrow \begin{cases} x' = f'(t) = 3x_3t^2 + 2x_2t + x_1 \\ y' = g'(t) = 3y_3t^2 + 2y_2t + y_1 \end{cases}$ et $B_3'' \Rightarrow \begin{cases} x'' = f''(t) = 6x_3t + 2x_2 \\ y'' = g''(t) = 6y_3t + 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} f'(t) & f''(t) \\ g'(t) & g''(t) \end{bmatrix} = f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t) = 0$

En développant : $\Rightarrow (x_2y_3 - x_3y_2)t^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)t + (x_1y_2 - x_2y_1)/3 = At^2 + Bt + C = 0$

Si $\Delta > 0$ et $A=0 \Rightarrow 1$ pt d'inflexion

Si $\Delta=0 \Rightarrow 1$ pt rebroussement

Si $A=0$ et $B=0 \Rightarrow 1$ arc de parabole

Si $\Delta > 0$ et $A \neq 0 \Rightarrow 2$ pt d'inflexions

Si $\Delta < 0 \Rightarrow 1$ pt croisement

1) courbe de type 1 (acceptant un point d'inflexion)

$$\mathcal{C}_{31}$$

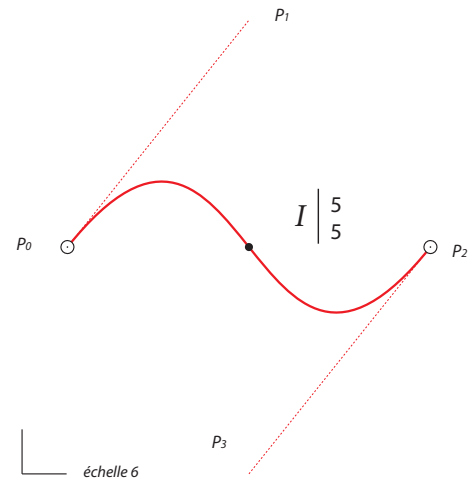
	X	Y
P_0	1	5
P_1	5	10
P_2	5	0
P_3	9	5

$$\mathcal{C}_{31} \mid \begin{cases} f(t) = 8t^3 - 12t^2 + 12t + 1 \\ g(t) = 30t^3 - 45t^2 + 15t + 5 \end{cases}$$

$$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 0t^2 + 240t - 120 = 0 \quad (\Delta = 57600 \text{ et } A=0)$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2 = 0,5$$

1 point d'inflexion en $I_{(0,5)} \mid \begin{smallmatrix} 5 \\ 5 \end{smallmatrix}$



2) courbe de type 2 (acceptant deux points d'inflexion)

$$\mathcal{C}_{32}$$

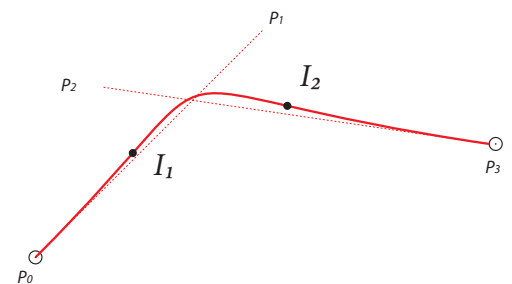
	X	Y
P_0	1	1
P_1	3	3
P_2	1.6	2.5
P_3	5	2

$$\mathcal{C}_{32} \mid \begin{cases} f(t) = 8,2t^3 - 10,2t^2 + 6t + 1 \\ g(t) = 2,5t^3 - 7,5t^2 + 6t + 1 \end{cases}$$

$$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 36t^2 - 34,2t + 5,4 = 0 \quad (\Delta = 36)$$

$$\Rightarrow t_1 \approx 0,2 \quad t_2 \approx 0,75$$

2 points d'inflexions en $I_1 \mid \begin{smallmatrix} 1.858 \\ 1.920 \end{smallmatrix} \quad I_2 \mid \begin{smallmatrix} 3.222 \\ 2.336 \end{smallmatrix}$



3) courbe de type 3 (acceptant un point de rebroussement de 1ère espèce)

$$\mathcal{C}_{33}$$

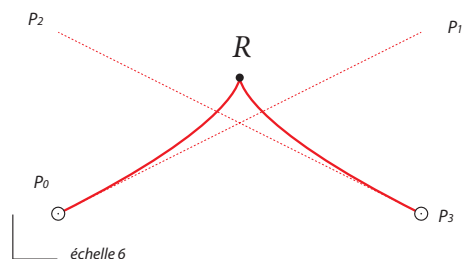
	X	Y
P_0	1	1
P_1	9	5
P_2	1	5
P_3	9	1

$$\mathcal{C}_{33} \mid \begin{cases} f(t) = 32t^3 - 48t^2 + 24t + 1 \\ g(t) = 0t^3 - 12t^2 + 12t + 1 \end{cases}$$

$$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 384t^2 - 384t + 96 = 0 \quad (\Delta = 0)$$

$$\Rightarrow t = 0,5$$

1 point de rebroussement en $R \mid \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}$



4) courbe de type 4 (acceptant un point de croisement ou point double)

$$\mathcal{C}_{34}$$

	X	Y
P ₀	4	2
P ₁	7	6
P ₂	1	4
P ₃	7	3

$$\mathcal{C}_{34} \left| \begin{array}{l} f(t) = 21t^3 - 27t^2 + 9t + 4 \\ g(t) = 7t^3 - 18t^2 + 12t + 2 \end{array} \right.$$

$$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 189t^2 - 189t + 54 = 0 \quad (\Delta = -5103)$$

donc la courbe \mathcal{C}_{34} accepte un point double

Calcul du point double D $\left| \begin{array}{l} f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow x_3t_1^3 + x_2t_1^2 + x_1t_1 + x_0 = x_3t_2^3 + x_2t_2^2 + x_1t_2 + x_0 \\ g(t_1) = g(t_2) \Rightarrow y_3t_1^3 + y_2t_1^2 + y_1t_1 + y_0 = y_3t_2^3 + y_2t_2^2 + y_1t_2 + y_0 \end{array} \right.$

$$f(t_1) - f(t_2) = 0 \Rightarrow x_3(t_1^3 - t_2^3) + x_2(t_1^2 - t_2^2) + x_1(t_1 - t_2) = 0$$

$$f(t_1) - f(t_2) = 0 \Rightarrow x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0$$

A présent le but est de définir t_2 à partir de t_1 , nous allons donc faire en sorte que dans $(f(t_1) - f(t_2))$ $x_3 = 0$ en appliquant une rotation $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ sur $(f(t_1) - f(t_2))$ avec $\tan(\alpha) = y_3/x_3$

A l'aide de la formule du changement de base (rotation des axes) \Rightarrow

$$X_2 = x_2 \sin(\alpha) - y_2 \cos(\alpha)$$

$$X_1 = x_1 \sin(\alpha) - y_1 \cos(\alpha)$$

Donc $f(t_1) - f(t_2) \Rightarrow X_2(t_1 + t_2) + X_1 = 0 \Rightarrow t_2 = -\frac{X_1}{X_2} - t_1$

Résoudre $\left\{ \begin{array}{l} x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0 \\ t_2 = -\frac{X_1}{X_2} - t_1 \end{array} \right.$ avec $G = \frac{X_1}{X_2} = \frac{x_2 \tan(\alpha) - y_1}{x_1 \tan(\alpha) - y_2} = \frac{x_1 \frac{y_3}{x_3} - y_1}{x_2 \frac{y_3}{x_3} - y_2} = \frac{x_1 y_3 - y_1 x_3}{x_2 y_3 - y_2 x_3}$

$$\Rightarrow \frac{t_1^2}{G} + t_1 + G + \frac{x_1}{x_3 G} - \frac{x_2}{x_3} = 0 \quad \text{ou} \quad t_1^2 + Gt_1 + G^2 + \frac{x_1 - x_2 G}{x_3} = 0$$

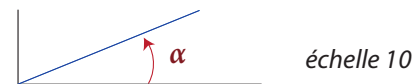
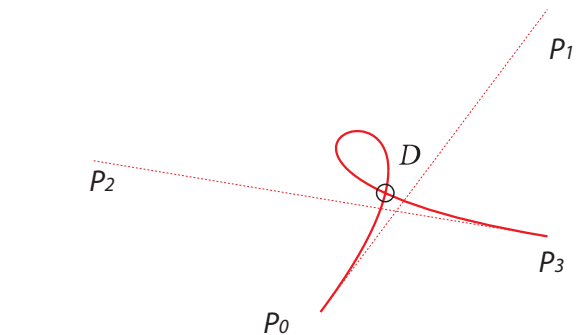
Exemple avec $\mathcal{C}_{34} \left| \begin{array}{l} f(t) = 21t^3 - 27t^2 + 9t + 4 \\ g(t) = 7t^3 - 18t^2 + 12t + 2 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow G = -1$$

$$\Rightarrow -t_1^2 + t_1 - \frac{1}{7} = 0 \quad (\Delta = \frac{3}{7})$$

$$\Rightarrow t_1 \approx 0,1727 \quad t_2 \approx 0,8273$$

1 point de croisement en D $\left| \begin{array}{l} 4.857 \\ 3.571 \end{array} \right.$



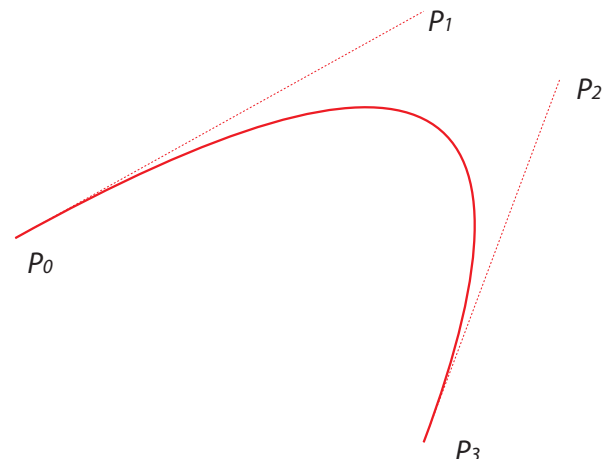
5) courbe de type 5 (arc de parabole)

Exemple \mathcal{C}_2

	X	Y
P ₀	6	36
P ₁	60	66
P ₂	78	57
P ₃	60	9

$$\mathcal{C}_2 \left| \begin{array}{l} f(t) = 0t^3 - 108t^2 + 162t + 6 \\ g(t) = 0t^3 - 117t^2 + 90t + 36 \end{array} \right.$$

$$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 0t^2 + 0t - 3078 = 0$$



Subdivisions récursives d'une B_2 avec la méthode de "De Casteljau" [1]

Cette méthode permet de calculer les coordonnées d'un point $M(t)$ sans passer par les équations traditionnelles.

Les points $A_0 A_1 A_2$ sont les points de définitions d'une courbe paramétrique de Bézier de degré 2.
Et B un point de cette courbe de paramètre $t = 0.4$

$$Q_1 = (1-t)A_0 + t A_1 \quad \text{ou} \quad t (A_1 - A_0) + A_0$$

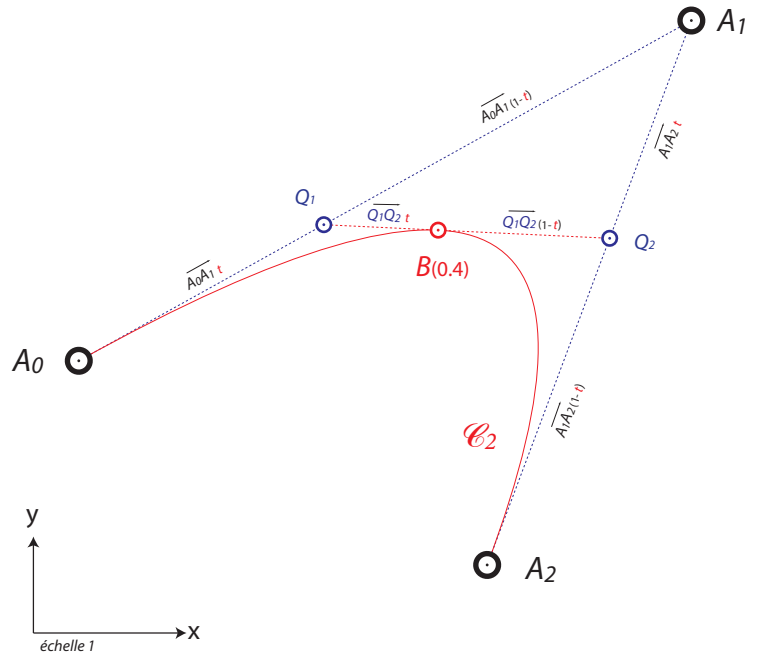
$$Q_2 = (1-t)A_1 + t A_2 \quad \text{ou} \quad t (A_2 - A_1) + A_1$$

$$B = (1-t)Q_1 + t Q_2 \quad \text{ou} \quad t (Q_2 - Q_1) + Q_1$$

\mathcal{C}_2	X	Y
P_0	6	36
P_1	87	81
P_2	60	9

donc avec $t = 0.4$

	X	Y
Q_1	38,4	54
Q_2	76,2	52,2
B	53,5	53,3



Subdivisions récursives d'une B_3

Les points $P_0 P_1 P_2 P_3$ sont les points de définitions d'une courbe paramétrique de Bézier de degré 3
et M un point de cette courbe de paramètre $t = 0.4$

$$Q_1 = (1-t)P_0 + t P_1$$

$$Q_2 = (1-t)P_1 + t P_2$$

$$Q_3 = (1-t)P_2 + t P_3$$

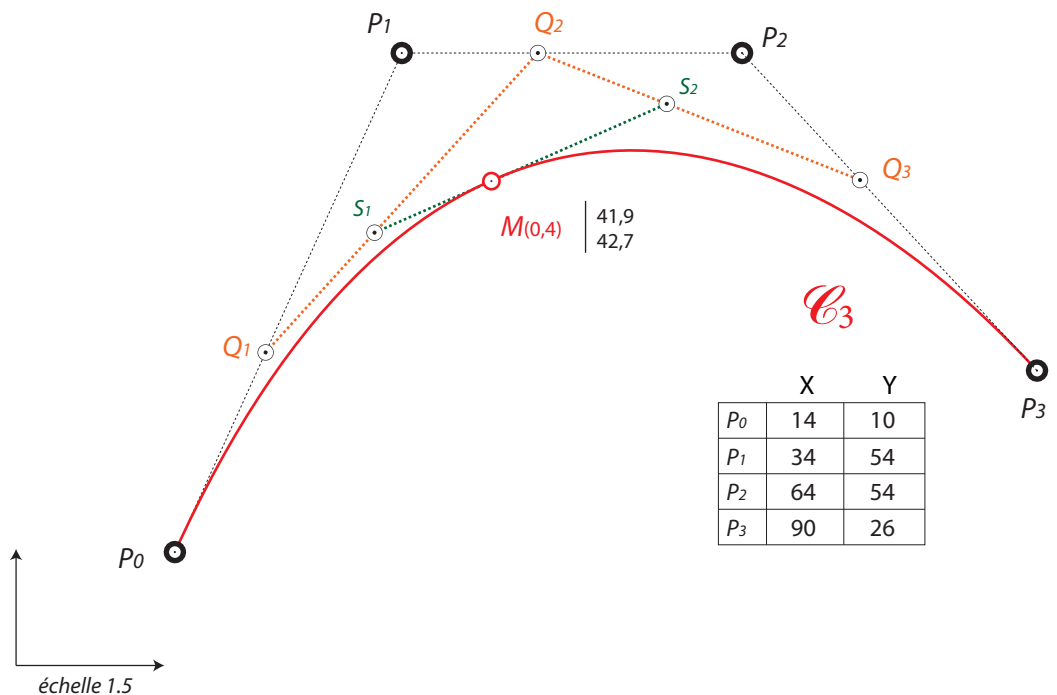
$$S_1 = (1-t)Q_1 + t Q_2$$

$$S_2 = (1-t)Q_2 + t Q_3$$

$$M = (1-t)S_1 + t S_2$$

donc avec $t = 0.4$

	X	Y
Q_1	22	27,6
Q_2	46	54
Q_3	74,4	42,8
S_1	31,6	38,2
S_2	57,4	49,5
M	41,9	42,7



Et de ce fait nous pouvons diviser la courbe \mathcal{C}_3 en $M_{(0,4)}$ en 2 courbes définies par :

\mathcal{C}_{3a} $P_0 Q_1 S_1 M$

\mathcal{C}_{3b} $M S_2 Q_3 P_3$

Quelques applications pour une B3

Méthode pour calculer les points de définition des courbes \mathcal{C}_{3a} et \mathcal{C}_{3b} avec \mathcal{C}_3 et $t=0,4$

$$\mathcal{C}_3$$

	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

$$\begin{aligned} A_0 &= P_0 \\ A_1 &= t(P_1 - P_0) + P_0 \\ A_2 &= t[t(P_2 - P_1) + P_1 - A_1] + A_1 \\ A_3 &= M(t) \end{aligned}$$

avec $t = 0,4$

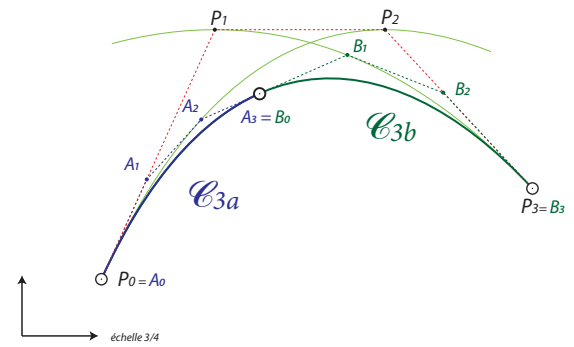
$$\mathcal{C}_{3a}$$

	X	Y
A_0	14	10
A_1	22	27,6
A_2	31,6	38,160
A_3	41,904	42,704

$$\mathcal{C}_{3b}$$

	X	Y
B_0	41,904	42,704
B_1	57,360	49,552
B_2	74,4	42,8
B_3	90	26

$$\begin{aligned} B_0 &= M(t) \\ B_1 &= (1-t)[t(P_2 - P_1) + P_1 - B_2] + B_2 \\ B_2 &= t(P_3 - P_2) + P_2 \\ B_3 &= P_3 \end{aligned}$$



Nous remarquons que A_2 est sur la parabole définie par $P_0P_1P_2$ et B_1 sur la parabole $P_1P_2P_3$

Méthode pour prolonger une courbe B_3 jusqu'au point E de paramètre $t > 1$

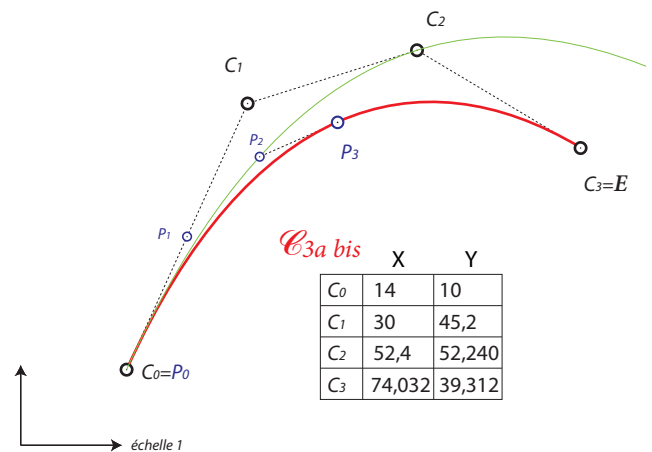
$$\mathcal{C}_{3a}$$

	X	Y
P_0	14	10
P_1	22	27,6
P_2	31,6	38,160
P_3	41,904	42,704

$$t \text{ en } E = 2 \quad \text{donc } E_{(2)} \left| \begin{array}{l} 74,032 \\ 39,312 \end{array} \right.$$

avec $t = 2$

$$\begin{aligned} C_0 &= P_0 \\ C_1 &= t(P_1 - P_0) + P_0 \\ C_2 &= (1-t)C_1 + t(1-t)P_1 + t^2P_2 \\ C_3 &= E(t) \end{aligned}$$



Méthode pour prolonger une courbe B_3 jusqu'au point H de paramètre $t < 0$

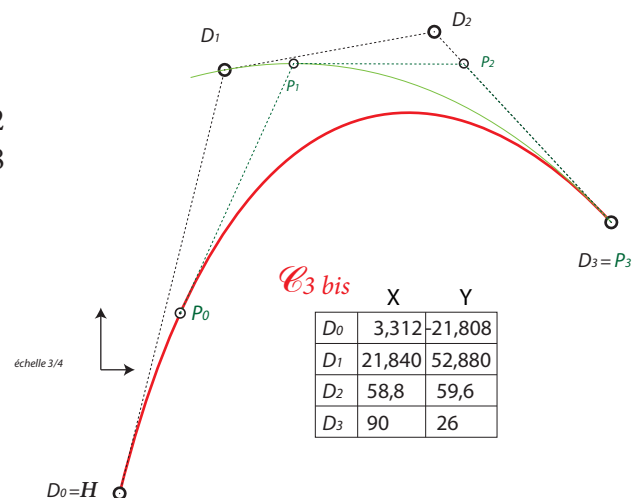
$$\mathcal{C}_3$$

	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

$$t \text{ en } H = -0.2 \quad \text{donc } H_{(-0.2)} \left| \begin{array}{l} 3,312 \\ -21,808 \end{array} \right.$$

avec $t = -0.2$

$$\begin{aligned} D_0 &= H(t) \\ D_1 &= (1-t)^2P_1 + t(1-t)P_2 + tD_2 \\ D_2 &= t(P_3 - P_2) + P_2 \\ D_3 &= P_3 \end{aligned}$$



$$\mathcal{C}_3 \text{ bis}$$

	X	Y
D_0	3,312	-21,808
D_1	21,840	52,880
D_2	58,8	59,6
D_3	90	26

Réunion de 2 courbes de Bézier de degré 3

La subdivision De Casteljau implique une formule simple pour effectuer cette réunion.

Exemple 1 : soit 2 courbes \mathcal{Q} et \mathcal{B} ayant un raccordement de classe C^1 ($A_3' = B_0'$).

\mathcal{Q}	X	Y
A_0	8	18
A_1	25	30
A_2	40	35
A_3	56	35

$$\mathcal{Q} \begin{cases} x = f(t) = 3t^3 - 6t^2 + 51t + 8 \\ y = g(t) = 2t^3 - 21t^2 + 36t + 18 \end{cases}$$

\mathcal{B}	X	Y
B_0	56	35
B_1	72	35
B_2	92	30
B_3	104	14

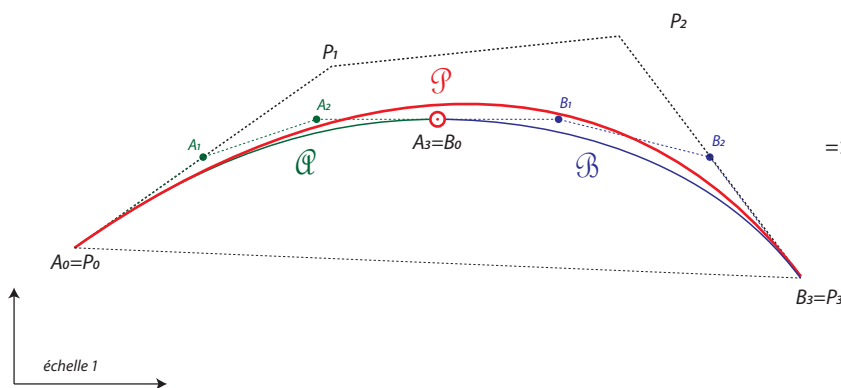
$$\mathcal{B} \begin{cases} x = f(t) = -12t^3 + 12t^2 + 48t + 56 \\ y = g(t) = -6t^3 - 15t^2 + 0t + 35 \end{cases}$$

à l'aide de la subdivision récursive des B_3 nous pouvons «naïvement» réunir \mathcal{Q} et \mathcal{B} en posant :

$$A_1 = t(P_1 - A_0) + A_0 \Rightarrow P_1 = \frac{A_1 - A_0(1-t)}{t}$$

$$B_2 = t(B_3 - P_2) + P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{B_2 - tB_3}{(1-t)}$$

$$t = \frac{\|\overrightarrow{A_2A_3}\|}{\|\overrightarrow{A_2A_3}\| + \|\overrightarrow{B_0B_1}\|} = 0,5$$



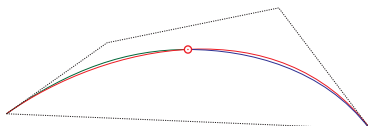
$$\Rightarrow \mathcal{P} \begin{cases} x = f(t) = -18t^3 + 12t^2 + 102t + 8 \\ y = g(t) = -16t^3 - 60t^2 + 72t + 18 \end{cases}$$

NB : cette méthode respecte les tangentes en P_0 et Q_3 mais \mathcal{P} ne passe pas par P_3 .

Nous verrons à la section courbe passant par 1 point page 29 qu'il est possible de faire varier P_1 ou P_2 afin que \mathcal{P}_{bis} passe strictement par A_3 tout en conservant les tangentes en P_0 et P_3 (voir ci dessous).

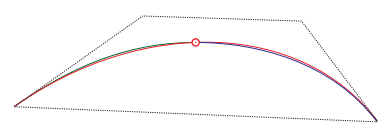
\mathcal{P}_{bis}	X	Y
P_0	8	18
P_1	34,61	36,78
P_2	80	46
P_3	104	14

variation sur P_1



\mathcal{P}_{bis}	X	Y
P_0	8	18
P_1	42	42
P_2	84,02	40,64
P_3	104	14

variation sur P_2



Exemple 3 : idem Exemple 1 mais avec un raccordement de classe C^0 ($A_3' \neq B_0'$) avec

\mathcal{Q}	X	Y
A_0	8	18
A_1	25	30
A_2	40	40
A_3	56	35

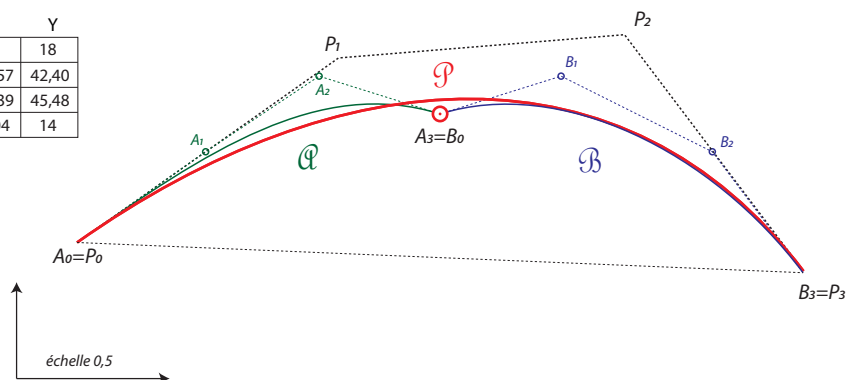
+

\mathcal{B}	X	Y
B_0	56	35
B_1	72	40
B_2	92	30
B_3	104	14

=>

\mathcal{P}	X	Y
P_0	8	18
P_1	42,57	42,40
P_2	80,39	45,48
P_3	104	14

$$t = \frac{\|\overrightarrow{A_2A_3}\|}{\|\overrightarrow{A_2A_3}\| + \|\overrightarrow{B_0B_1}\|} = 0,5$$



Dans ce cas la et personnellement je pense que visuellement le résultat est correct car la réunion épouse au mieux les courbes \mathcal{Q} et \mathcal{B} .

Distance d'un point à une courbe B_3 .

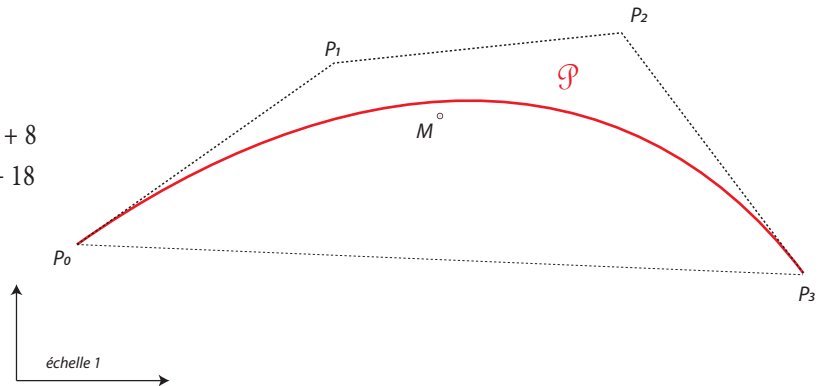
Lors d'un lissage d'une suite de points par approximation avec une ou plusieurs courbes B_3 il est souvent utile de savoir si le ou les points de départ ne sont pas trop éloignés des B_3 calculées.

Cela implique qu'il faut se fixer une tolérance de $\pm \lambda$.

Exemple : avec une courbe \mathcal{P} et un point $M \begin{vmatrix} 56 \\ 35 \end{vmatrix}$

\mathcal{P}	X	Y
P_0	8	18
P_1	42	42
P_2	80	46
P_3	104	14

$$\mathcal{P} \begin{cases} x = f(t) = -18t^3 + 12t^2 + 102t + 8 \\ y = g(t) = -16t^3 - 60t^2 + 72t + 18 \end{cases}$$



Le problème est de calculer le point M' situé sur la courbe \mathcal{P} dont la normale passe par le point M .

Déterminons les équations pour résoudre le problème.

$$\text{la normale en un point de paramètre } t \text{ de } \mathcal{P} = -\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

$$\text{Nous pouvons donc poser : } -\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(t) - x_M}{g(t) - y_M} \Rightarrow f'(t)(g(t) - y_M) + g'(t)(f(t) - x_M) = 0$$

En utilisant la définition canonique d'une B_3

$$\Rightarrow (3x_3t^2 + 2x_2t + x_1)(y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 - y_M) + (3y_3t^2 + 2y_2t + y_1)(x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 - x_M) = 0$$

En développant

$$\Rightarrow h(t) = 3(y_3^2 + x_3^2)t^5 + 5(y_3y_2 + x_3x_2)t^4 + [4(y_3y_1 + x_3x_1) + 2(y_2^2 + x_2^2)]t^3 + [3(y_2y_1 + y_3(y_0 - y_M) + x_2x_1 + x_3(x_0 - x_M))]t^2 + [y_1^2 + 2y_2(y_0 - y_M) + x_1^2 + 2x_2(x_0 - x_M)]t + y_1(y_0 - y_M) + x_1(x_0 - x_M)$$

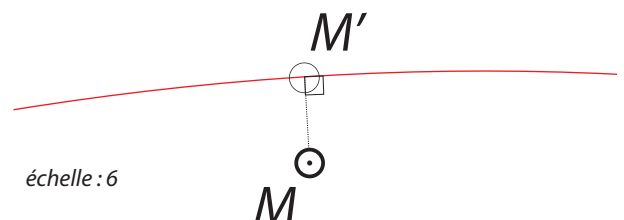
Dans notre exemple \Rightarrow

$$\begin{aligned} h(t) &= 1740t^5 + 3720t^4 - 4464t^3 - 5880t^2 + 16476t - 6120 \\ h'(t) &= 8700t^4 + 14880t^3 - 13392t^2 - 11760t + 16476 \end{aligned}$$

Et en résolvant $h(t)=0$ par la méthode de Raphson Newton $\Rightarrow t_{(M')} \approx 0,4617252$ $M' \approx \begin{vmatrix} 55.882 \\ 36.878 \end{vmatrix}$ [5]

$$\text{donc } \|\overrightarrow{MM'}\| \approx 1,882$$

Dans cet exemple il existe une seule solution sur l'intervalle $[0 \ 1]$.



Vecteur vitesse , accélération , rayon de courbure (cercle osculateur) [4]

exemple avec :

	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = -14t^3 + 30t^2 + 60t + 14 \\ y = g(t) = 16t^3 - 132t^2 + 132t + 10 \end{cases}$$

Le vecteur vitesse d'une courbe B3 en un point $M(t)$
est la norme du vecteur dérivé premier au point $M(t)$

$$M'_{(0,3)} \begin{cases} x' = f'_{(0,3)} = -42t^2 + 60t + 60 = 74,22 \\ y' = g'_{(0,3)} = 48t^2 - 264t + 132 = 57,12 \end{cases} \text{ sa norme} \approx 93,66$$

Le vecteur accélération d'une courbe B3 en un point $M(t)$
est la norme du vecteur dérivé second au point $M(t)$

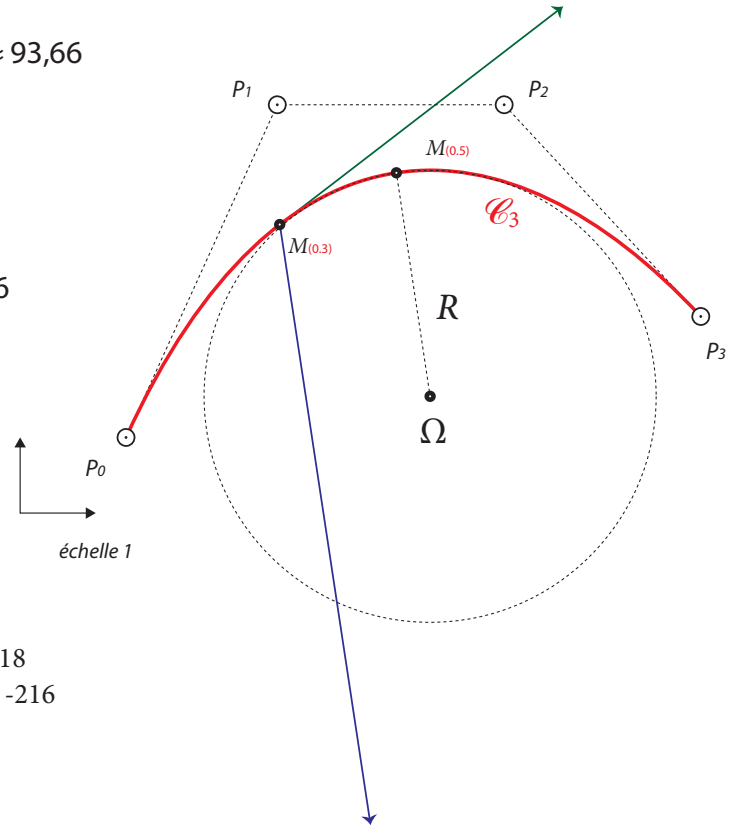
$$M''_{(0,3)} \begin{cases} x'' = f''_{(0,3)} = -84t + 60 = 34,8 \\ y'' = g''_{(0,3)} = 96t - 264 = -235,2 \end{cases} \text{ sa norme} \approx 237,76$$

calcul du rayon de courbure R en un point $M(t)$

$$R \text{ en } M(t) = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$$

avec $M'_{(0,5)} \begin{cases} x' = f'_{(0,5)} = 79,5 \\ y' = g'_{(0,5)} = 12 \end{cases} \quad M''_{(0,5)} \begin{cases} x'' = f''_{(0,5)} = 18 \\ y'' = g''_{(0,5)} = -216 \end{cases}$

$$R \text{ en } M_{(0,5)} = \left| \frac{519729,318}{-17388} \right| \approx 29,89$$



Calcul du centre de courbure Ω

Dans le repère de Frenet en $M_{(0,5)} \begin{pmatrix} 49,75 \\ 45 \end{pmatrix}$ nous avons

$$\vec{N} \begin{cases} \frac{(-y')C}{(x'^2 + y'^2)^{0,5}} = \frac{-12(1)}{80,4} \approx 0,15 \\ \frac{(x')C}{(x'^2 + y'^2)^{0,5}} = \frac{(79,5)(1)}{80,4} \approx -0,99 \end{cases}$$

NB : si au point $M(t)$ $x'y'' - x''y' < 0$ la courbe est concave en $M(t)$ donc $C = 1$ si non $C = -1$

$$\Omega_{(0,5)} \begin{cases} (xN)(R)(1) + xM_{(0,5)} = 54,21 \\ (yN)(R)(1) + yM_{(0,5)} = 15,44 \end{cases}$$

Donc directement : avec $x = f(t)$ et $y = g(t)$

$$x \Omega(t) = \frac{(x'^2 + y'^2)(-y')}{x'y'' - y'x''} + x M(t) \quad y \Omega(t) = \frac{(x'^2 + y'^2)(x')}{x'y'' - y'x''} + y M(t)$$

Paramétrisation d'une fonction du second ou troisième degré sur un intervalle borné.

Exemple

Soit la fonction : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 1$ que l'on veut paramétrer sur l'intervalle $[-1 \ 0,5]$.

Pour y arriver nous allons nous servir de la définition matricielle d'une B_3

en choisissant 4 points : M_0 qui est au début de l'intervalle

M_1, M_2 , 2 points intermédiaires et M_3 à la fin de la courbe B_3

a) calcul de $\overrightarrow{OM}(t)$

	x	f(x)
M_0	-1	1
M_1	-0,5	1
M_2	0	1
M_3	0,5	2,5

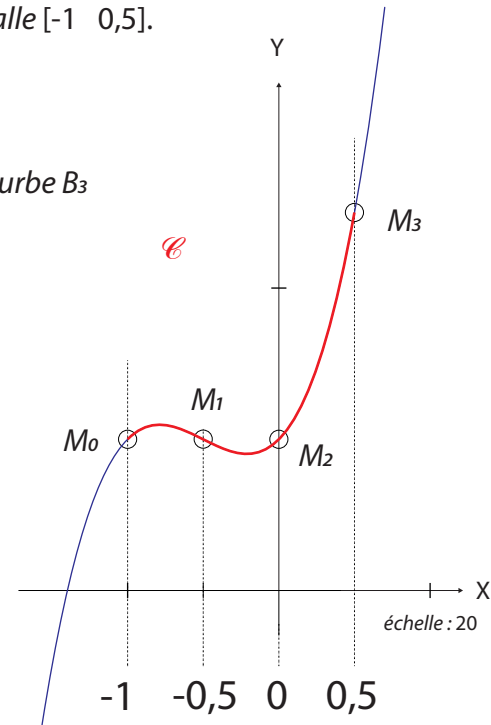
b) calcul des paramètres t en M_0, M_1, M_2, M_3

Dans ce cas là le calcul est simple car t est proportionnel aux abscisses.

t en $M_0 = 0$ t en $M_3 = 1$

$$t \text{ en } M_1 = \frac{xM_1 - xM_0}{xM_3 - xM_0} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$$

$$t \text{ en } M_2 = \frac{xM_2 - xM_0}{xM_3 - xM_0} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$



$$\begin{matrix} t & 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0,33 & 0,11 & 0,037 \\ 2/3 & 1 & 0,67 & 0,44 & 0,296 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{matrice de passage} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{bmatrix} xP & yP \\ xP_0 & yP_0 \\ xP_1 & yP_1 \\ xP_2 & yP_2 \\ xP_3 & yP_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \\ -1 & 1 \\ -0,5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0,5 & 2,5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

\mathcal{T}_n \mathcal{M}_3 \overrightarrow{OP} $\overrightarrow{OM}(t)$

donc $\overrightarrow{OP} = [\mathcal{T}_n \times \mathcal{M}_3]^{-1} \times \overrightarrow{OM}(t) \Rightarrow$

	X	Y
P_0	-1	1
P_1	-0,5	1,5
P_2	0	-0,25
P_3	0,5	2,5

\mathcal{C} est une B_3 de type 1.

NB : pour une parabole la méthode est identique.

La réciproque est possible à l'aide d'une interpolation de type Hermite ou Lagrange.

Mais pour avoir des résultats cohérents la courbe de Bézier doit être de type 1 ou 5 et «dégauchie».

Aire d'une courbe de Bézier de degré 3.

Il existe plusieurs méthodes plusieurs méthodes pour calculer la superficie d'une courbe B_3 .

Notamment la forme : $\text{aire} = \frac{1}{2} \int_0^1 (g(t)f'(t) - f(t)g'(t))$ qui permet de calculer l'aire d'une B_3 fermée.

Et aussi $\int_a^b (g(t)f'(t))$ permettant un calcul sur un intervalle donné [a b]

Mais quelque soit la méthode utilisée et pour avoir des résultats probants et compréhensible il est préférable d'effectuer un changement de paramètre de la courbe par translation de $-xP_0$ et $-yP_0$.

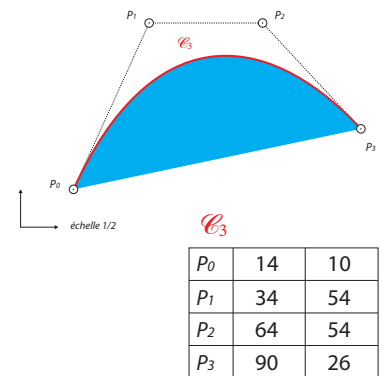
a) Aire d'une courbe B_3 fermée sur son domaine de définition [0 1] (méthode WEB).

En posant exceptionnellement : $X_0=xP_0, Y_0=yP_0 ; X_1=xP_1, Y_1=yP_1$ etc...

$$\begin{aligned} \text{Aire} = 3 / 20 [& (Y_1-Y_0) (X_2 + X_3 - 2X_0) \\ & - (X_1-X_0) (Y_2 + Y_3 - 2Y_0) \\ & - 2[X_0(Y_2-Y_3) + Y_0(X_3-X_2) + Y_3X_2 - Y_2X_3]] \end{aligned}$$

NB : La translation de $-P_0$ est intégrée dans la formule et fonctionne sur \mathbb{R}^2

Dans cet exemple Aire de $\mathcal{C}_3 = 1414,8 \text{ mm}^2$



b) Aire d'une courbe B_3 fermée acceptant un point d'inflexion sur son domaine de définition [0 1].

Aire de $\mathcal{C}_4 = 1,2 \text{ mm}^2$ Que représente ce chiffre ?

En fait c'est l'aire du segment de courbe de P_0 à $M = A_1$
+ l'aire du segment de M à $P_3 = A_2$

$A_1 \approx 2,177$ et $A_2 \approx -0,977$ donc $A_1 + A_2 = 1,2 \text{ mm}^2$

Le point M est l'intersection de la droite P_0P_3 avec \mathcal{C}_4 .

Voici son calcul dans le cas général.

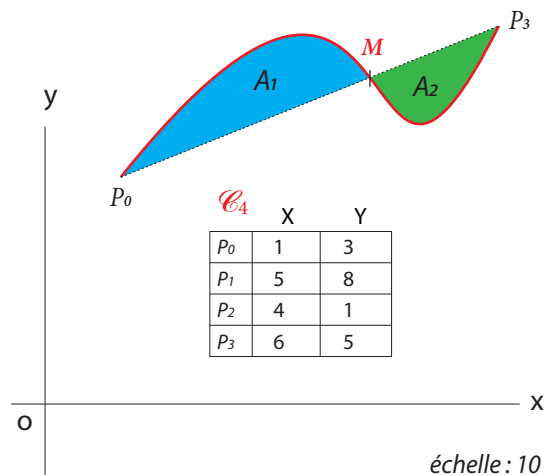
$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 \\ y = g(t) = y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 \end{cases} \quad d = \frac{yP_3 - yP_0}{xP_3 - xP_0} \quad P_0 \begin{cases} xP_0 = x_0 \\ yP_0 = y_0 \end{cases}$$

$$d = \frac{g(t) - yP_0}{f(t) - xP_0} = \frac{g(t) - y_0}{f(t) - x_0} \Rightarrow (y_3 - dx_3)t^3 + (y_2 - dx_2)t^2 + (y_1 - dx_1)t = 0 \Rightarrow At^3 + Bt^2 + Ct = 0$$

Ce polynôme accepte 2 racines réelles : $t_1 = 0$ et $t_2 = 1 \Rightarrow (0-t)(1-t) = (t^2 - t)$

nous pouvons donc diviser $At^3 + Bt^2 + Ct$ par $(t^2 - t) \Rightarrow At_3 + A + B = 0$ donc $t_3 = -(1 + \frac{B}{A}) = -(1 + \frac{(y_2 - dx_2)}{(y_3 - dx_3)})$

Dans cet exemple $\mathcal{C}_4 \begin{cases} xM(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases} \quad d=0,4 \quad t_{(M)} \approx 0.51515151 \quad M \begin{cases} 4,295 \\ 4,318 \end{cases}$



c) Aire d'une courbe B_3 sur un intervalle $[a \ b]$.

En utilisant la formule : aire = $\int_a^b (g(t)f'(t))$ et la définition canonique d'une B_3 $M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 \\ y = g(t) = y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 \end{cases}$

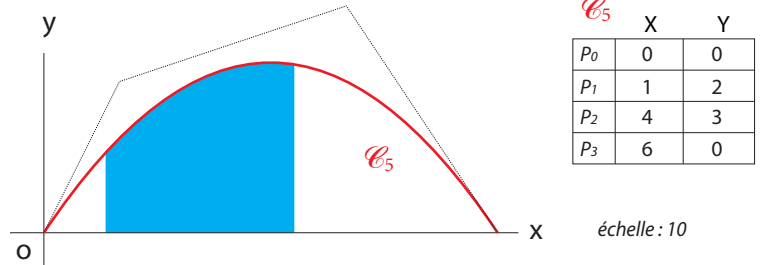
$$g(t)f'(t) = h(t) = 3x_3y_3t^5 + (3x_3y_2 + 2x_2y_3)t^4 + (3x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3)t^3 + (3x_3y_0 + 2x_2y_1 + x_1y_2)t^2 + (2x_2y_0 + x_1y_1)t + x_3y_0$$

Dans cet exemple :

$$\begin{aligned} f(t) &= -3t^3 + 6t^2 + 3t + 0 \\ g(t) &= -3t^3 - 3t^2 + 6t + 0 \end{aligned}$$

$$h(t) = 27t^5 - 9t^4 - 99t^3 + 63t^2 + 18t + 0$$

$$H(t) = 4,5t^6 - 1,8t^5 - 24,75t^4 + 21t^3 + 9t^2 + C$$



L'aire de C_5 sur l'intervalle $[0,2 \ 0,6] = H(0,6) - H(0,2) \approx 4,15 \text{ mm}^2$

Abscisse curviligne S ou longueur d'un arc d'une courbe de Bézier de degré 3.

la théorie veut que la longueur d'un arc d'une courbe paramétrique = $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

$$\text{Pour une courbe } B_3 \ S = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} = \int_a^b \sqrt{(3x_3t^2 + 2x_2t + x_1)^2 + (3y_3t^2 + 2y_2t + y_1)^2}$$

NB : les variables a et b sont les valeurs possible du paramètre t

Mais dans la pratique il est quasiment impossible de calculer cette intégrale d'où la nécessité de procéder à une approximation.

Pour ma part je divise la courbe en 100 parties sur l'intervalle $[a \ b]$ avec un pas de $(b-a) / 100$.

Je calcule les coordonnées des points M correspondants allant de M_0 à M_{100} .

Je détermine le centre du cercle passant par $M_0 M_1 M_2$

Je peut donc calculer son rayon, la corde $M_0 M_2$ de l'arc, sont angle au centre θ et enfin sa longueur.

Et ainsi de suite avec $M_2 M_3 M_4$, $M_4 M_5 M_6$ etc... jusque $M_{98} M_{99} M_{100}$

Exemple avec C_5 sur l'intervalle $[0,2 \ 0,6] \Rightarrow \text{pas} = (0,6 - 0,2) / 100 = 0,004$

Donc S de C_5 sur $[0,2 \ 0,6] \approx 2,705 \text{ mm}$

t	n	xM	yM		xC	yC	corde	rayon	θ	Lg, arc
0,200	0	0,8160	1,0560	}	3,15	-1,60	0,05	3,53	0,015 rad	0,05
0,204	1	0,8362	1,0737							
0,208	2	0,8566	1,0912							
0,212	3	0,8771	1,1086							
0,216	4	0,8977	1,1258	}	3,15	-1,59	0,05	3,53	0,015 rad	0,05
⋮	⋮	⋮	⋮							
⋮	⋮	⋮	⋮							
⋮	⋮	⋮	⋮							
0,584	96	3,2008	1,8833	}	2,96	-1,07	0,06	2,97	0,019 rad	0,06
0,588	97	3,2286	1,8809							
0,592	98	3,2564	1,8782							
0,596	99	3,2842	1,8752							
0,600	100	3,3120	1,8720	}	2,96	-1,08	0,06	2,97	0,019 rad	0,06
⋮	⋮	⋮	⋮							
⋮	⋮	⋮	⋮							
⋮	⋮	⋮	⋮							

Simulation d'un arc de cercle avec une B_3^*

(pour avoir une bonne précision l'angle au centre de l'arc doit être $\leq 90^\circ$)

Calculs préliminaires avec

Pts	X	Y
M ₁	1	1,5
M ₂	4	6
M ₃	8	7

Le centre Ω du cercle passant par $M_1 M_2 M_3$ est déterminé par l'intersection des médiatrices de $\overline{M_1 M_2}$ et $\overline{M_2 M_3}$.

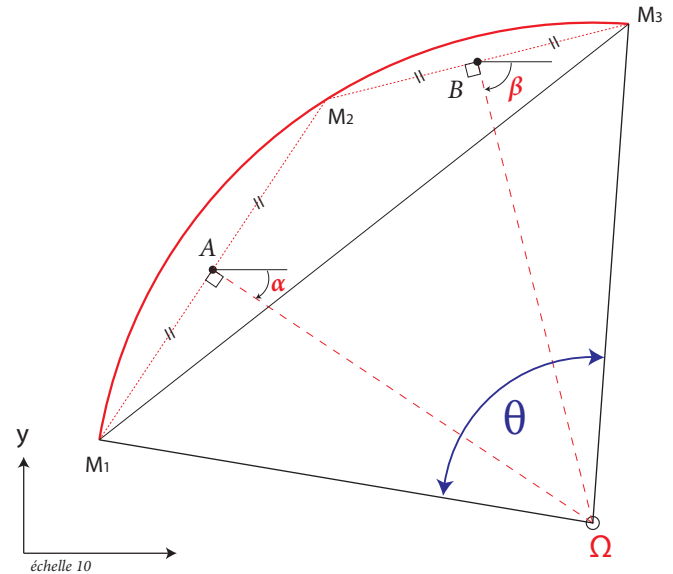
Calcul de l'intersection par la méthode de Delambre.

$$x\Omega = xA + \frac{(yA - yB) - (xA - xB)\tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)} \approx 7,525$$

$$y\Omega = yA + (x\Omega - xA)\tan(\alpha) = 0,4$$

$$\text{rayon } R = \|\overrightarrow{M_1 \Omega}\| \approx 6,617 \quad \text{corde } C = \|\overrightarrow{M_1 M_3}\| \approx 8,902$$

$$\theta = 2 \arcsin\left(\frac{C}{2R}\right) \approx 84,542^\circ$$



Calcul de la courbe de bézier B_3

Astuce : ne connaissant pas le paramètre t en M_2 déterminer le point M_2' qui est sur la bissectrice de $\widehat{M_1 \Omega M_3}$. (t en $M_2' = 0,5$).

Calculer les angles orientés suivants : $\alpha_0 \approx 80,431^\circ$ et $\alpha_3 \approx 175,884^\circ$

Pts	X	Y
P ₀ = M ₁	1	1,5
M _{2'}	3,437	5,603
P ₃ = M ₃	8	7
I	2	7,432

Polynôme de Bernstein avec $t=0.5$

B_0	B_1	B_2	B_3
$(1-t)^3$	$3t(1-t)^2$	$3t^2(1-t)$	t^3
0,125	0,375	0,375	0,125

Avec P_1 et P_2 déterminés par coordonnées polaires :

$$\Rightarrow xM_2' = B_0 xP_0 + B_1 (\varphi_0 \cos(\alpha_0) + xP_0) + B_1 (\varphi_3 \cos(\alpha_3) + xP_3) + B_3 xP_3$$

\Rightarrow

$$\Rightarrow \varphi_0 = \varphi_3 = \frac{xM_2' - 0,5 (xP_0 + xP_3)}{0,375 [\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha_3)]} \approx 3,410940045$$

	X	Y
P ₀	1	1,5
P ₁	1,567	4,863
P ₂	4,598	7,245
P ₃	8	7

*D'autres méthodes existent entre autre celle de monsieur krauss voir :

http://d.krauss.free.fr/documents/Transverses/Bezier/Arc_cercle/Arc_Cercle.htm

Voici la méthode Krauss

Avec : $S = \sin(\theta)$, $C = \cos(\theta)$

$$x = -0.118433799202707$$

$$K_o = \frac{1}{3} \left[-S + \sqrt{S^2 + 6(1-C)} \right]$$

$$K_1 = \frac{4}{3} \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)$$

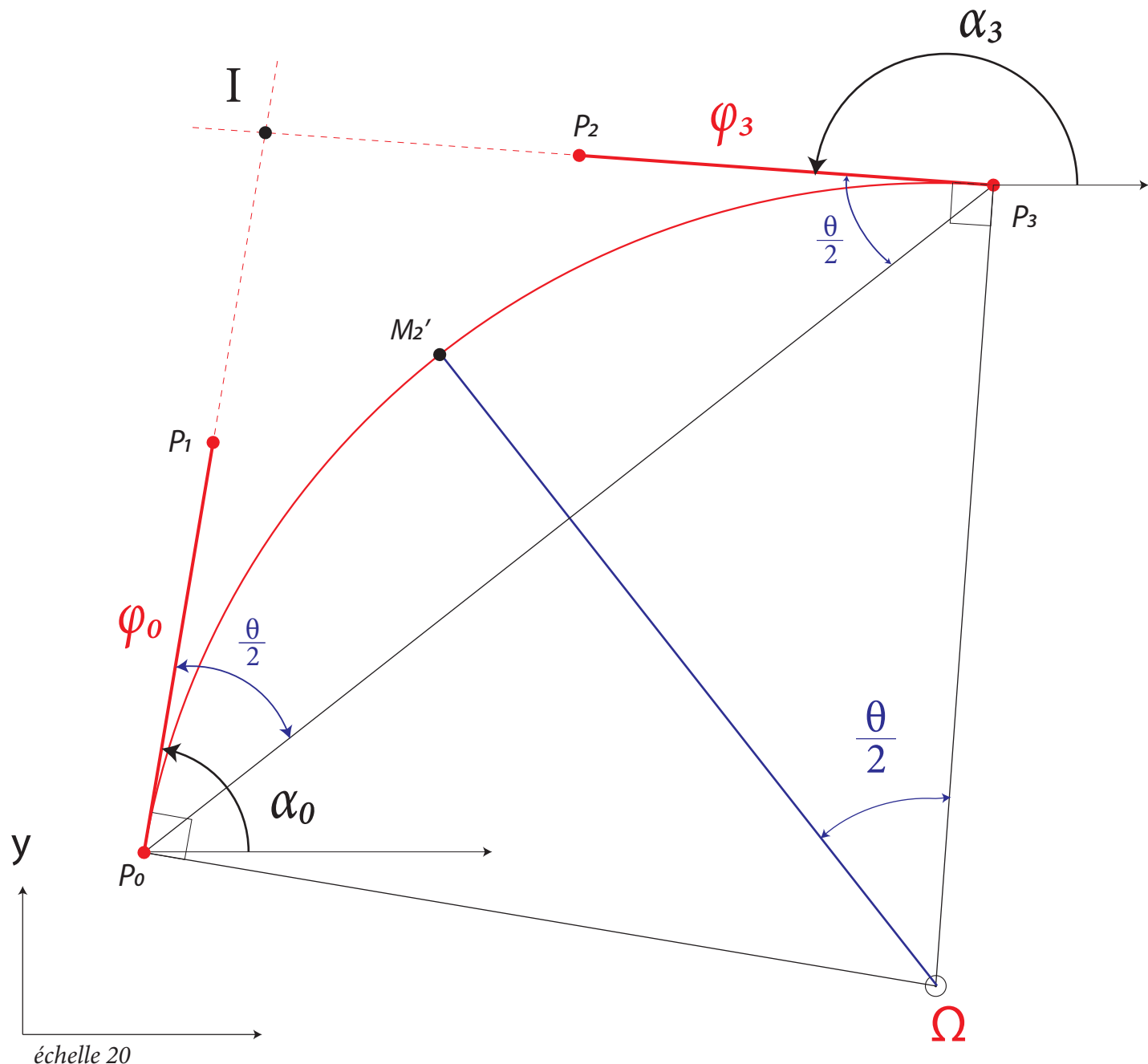
$$\alpha = 6 \left(3K_o + S \right)$$

$$\beta = 9 \left((1-C)K_1 + 12 S \right)$$

$$K_{idéal} = \frac{\beta K_1 - \alpha x K^\circ}{\beta - \alpha x}$$

$$\varphi_0 = \varphi_3 = K_{idéal} \cdot \text{Rayon} \approx 3,409176983$$

t	ΔR perso	ΔR Krauss	écart
0	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,00069	0,00058	0,00011
0,2	0,00123	0,00088	0,00036
0,3	0,00094	0,00032	0,00062
0,4	0,00031	-0,00051	-0,00020
0,5	0,00000	-0,00089	-0,00089
0,6	0,00031	-0,00051	-0,00020
0,7	0,00094	0,00032	0,00062
0,8	0,00123	0,00088	0,00036
0,9	0,00069	0,00058	0,00011
1	0,00000	0,00000	0,00000



La clothoïde [2] [3]

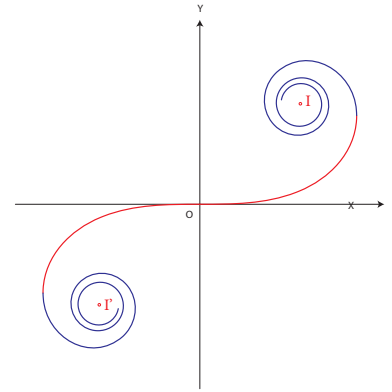
Avant propos.

La particularité d'une clothoïde, appelée aussi spirale de «Cornu», est que son rayon de courbure est progressif au fur et à mesure l'on avance sur la courbe.

C'est pour cela que dans le domaine des travaux public le début de la spirale est utilisé pour raccorder des axes routiers par une partie courbe en permettant d'aborder une partie circulaire progressivement sans changement brusque de direction.

La législation impose un virage avec un rayon de courbure minimal à respecter pour chaque catégories de route.

Par exemple pour une autoroute de catégorie L120 où la vitesse est limitée à 130 Km/h le rayon du virage circulaire doit être \geq à 665m.



Quelques définitions mathématiques [2][3] [géogébra] .

coordonnées de I: $x = y = \frac{A\sqrt{\pi}}{2}$

A est appelé paramètre de la clothoïde

Soit: S l'abscisse curviligne de la clothoïde

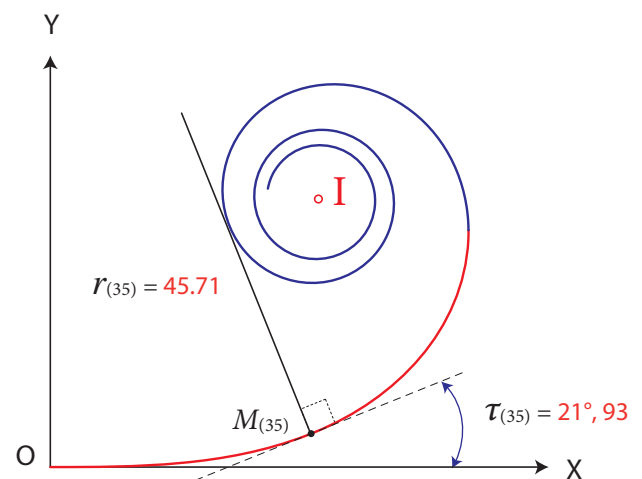
r son rayon de courbure

τ l'angle en radian d'une tangente de la courbe

L'équation intrinsèque de la spirale est: $S r = A^2$

$$\tau = \frac{s^2}{2A^2} = \frac{s}{2r}$$

Exemple 1



Les coordonnées d'un point de la courbe sont :

$$x = \int \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds \quad y = \int \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds$$

Ces intégrales dites de Fresnel ne peuvent pas s'exprimer à partir de fonctions élémentaires, mais le calcul à l'aide d'un développement limité au voisinage de 0 est possible :

$$xM(s) = s - \frac{s^5}{40A^4} + \frac{s^9}{3456A^8} - \frac{s^{13}}{599040A^{12}} + \dots \quad yM(s) = \frac{s^3}{6A^2} - \frac{s^7}{336A^6} + \frac{s^{11}}{42240A^{10}} - \frac{s^{15}}{9676800A^{14}} + \dots$$

dans l'exemple 1 avec $S = 35$ et $A = 40$

$$xM_{(35)} = 34,49 \quad yM_{(35)} = 4,42$$

$$\tau_{(35)} = 21^\circ, 93 \quad r_{(35)} = 45.71$$

Simulation d'un arc de clothoïde par une courbe de Bézier de degré 3.

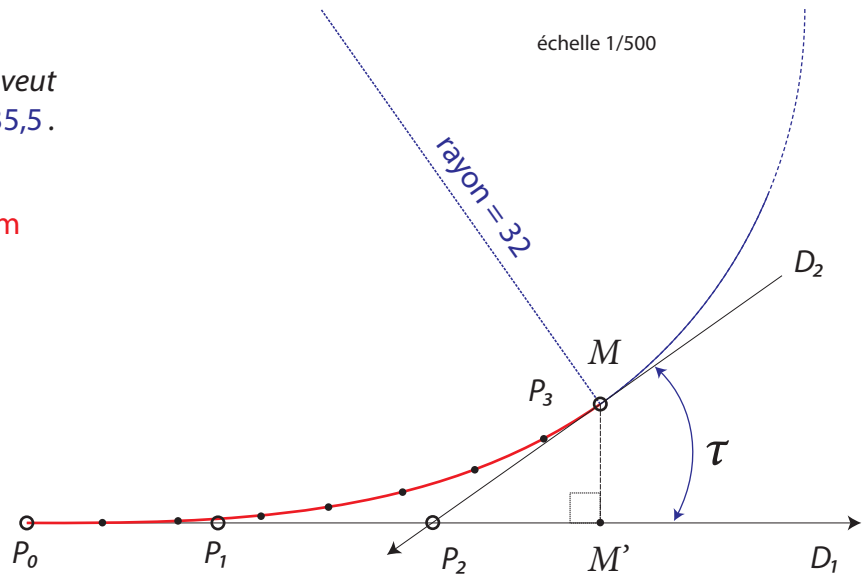
Exemple 2

Soit un arc de cercle de rayon 32 m que l'on veut raccorder par une clothoïde de paramètre 35,5.

$$s \cdot r = A^2 \text{ donc } s_{(32)} = 35,5^2/32 \approx 39,383 \text{ m}$$

$$\tau_{(39,383)} = \frac{39,383}{2 \cdot 32} \approx 35,257^\circ$$

$$xM_{(39,383)} \approx 37,917 \quad yM_{(39,383)} \approx 7,862$$



Définition de la courbe de Bézier

Soit : les droites D_1 et D_2 et M' qui est le projeté orthogonal de M sur la droite D_1

P_0 est à l'origine de la clothoïde

P_1 est à $1/3$ de $\overline{P_0M'}$

P_2 est l'intersection de D_1 et D_2

P_3 est le point M

donc la courbe de Bézier \approx

	X	Y
P_0	0	0
P_1	12,639	0
P_2	26,796	0
P_3	37,917	7,862

Tableaux comparatifs

Calcul traditionnel	abscisse curviligne tous les 5 m			
param. A	35,5	rayon de l'arc de cercle à raccorder 32 m		
s	X	Y	τ	r
0,00	0,000	0,000	0,000°	infinis
5,00	5,000	0,017	0,568°	252,05
10,00	9,998	0,132	2,273°	126,03
15,00	14,988	0,446	5,115°	84,02
20,00	19,950	1,056	9,093°	63,01
25,00	24,847	2,057	14,207°	50,41
30,00	29,620	3,538	20,459°	42,01
35,00	34,182	5,575	27,847°	36,01
39,383	37,917	7,862	35,257°	32,00

approximation par la courbe de bézier				A moyen 35,6	
X	Y	écart des Y	r estimé	s estimé	A estimé
0,000	0,000	0,000	infinis		
5,000	0,017	-0,001	248,5	5,00	35,3
9,998	0,135	-0,002	128,6	10,00	35,9
14,988	0,446	0,000	86,0	15,00	35,9
19,950	1,048	0,008	63,5	20,00	35,6
24,847	2,038	0,019	49,7	25,00	35,2
29,620	3,515	0,023	40,9	30,00	35,0
34,182	5,563	0,012	35,9	35,00	35,4
37,917	7,862	0,000	34,1	39,389	36,6

Nous pouvons constater que avec un angle de $\tau \approx 35^\circ$ la précision se dégrade vers la fin de la courbe.

Si $\tau \approx 20^\circ$ l'écart maxi est de 0,014 et avec $\tau \approx 40^\circ$ l'écart maxi est de 0,040.

Donc la précision diminue si τ augmente.

L'utilité de cette approximation est que la courbe de Bézier peut être calculée sur \mathbb{R}^2 sans effectuer un changement de base par rotation et ou translation, d'où peut être visualiser un avant projet à petite échelle. Et aussi le "A moyen" me semble correct.

Mais ATTENTION : la méthode traditionnelle fait Foi et Loi.

Courbes de Bézier passant strictement par 3 points

a) Paraboles passant par 3 points

1) Les tangentes en A_0 et A_2 sont libres.

Dans ce cas il existe une infinités de solutions car tout dépend de l'estimation du paramètre t en M_1 .

Exemple 1

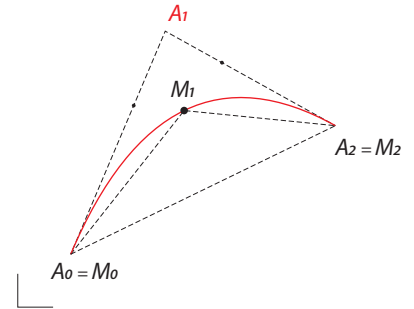
soit

	X	Y
$A_0 = M_0$	7	7
M_1	22	26
$A_2 = M_2$	42	24

t estimé en $M_1 = 0,5$

$$xA_1 = (xM_1 - (1-t)^2 xA_0 - t^2 xA_2) / 2t(1-t) = 19,5$$

$$yA_1 = (yM_1 - (1-t)^2 yA_0 - t^2 yA_2) / 2t(1-t) = 36,5$$



2) La tangente en A_0 est imposée .

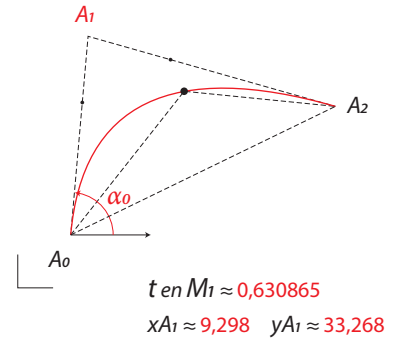
Dans ce cas il faut calculer le paramètre t en M_1 .

Exemple 2 : avec les mêmes points que l'exemple 1 et $\alpha_0 = 85^\circ$

Pour calculer t en M_1 il faut résoudre :

$$\begin{cases} xM_1 = t^2(xA_0 + xA_2 - 2xA_1) + 2t(xA_1 - xA_0) + xA_0 \\ yM_1 = t^2(yA_0 + yA_2 - 2yA_1) + 2t(yA_1 - yA_0) + yA_0 \\ \vec{\alpha}_0 = \frac{yA_1 - yA_0}{xA_1 - xA_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^2 (\vec{\alpha}_0(xA_0 - xA_2) + yA_2 - yA_0) + \vec{\alpha}_0(xM_1 - xA_0) + yA_0 - yM_1 = 0$$



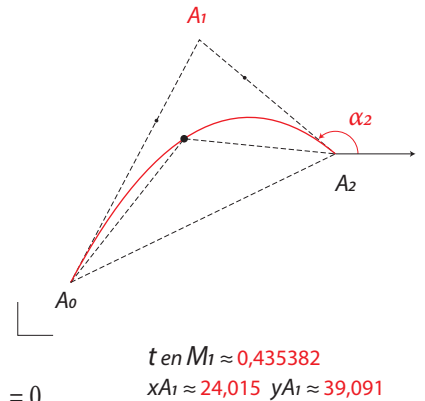
3) La tangente en A_2 est imposée .

Exemple 3 : avec $\alpha_2 = 140^\circ$

Calcul de t en M_1 :

$$\begin{cases} xM_1 = t^2(xA_0 + xA_2 - 2xA_1) + 2t(xA_1 - xA_0) + xA_0 \\ yM_1 = t^2(yA_0 + yA_2 - 2yA_1) + 2t(yA_1 - yA_0) + yA_0 \\ \vec{\alpha}_2 = \frac{yA_1 - yA_2}{xA_1 - xA_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^2 [\vec{\alpha}_2(xA_2 - xA_0) + yA_0 - yA_2] + 2t [\vec{\alpha}_2(xA_0 - xA_2) + yA_2 - yA_0] + \vec{\alpha}_2(xM_1 - xA_0) - yM_1 + yA_0 = 0$$

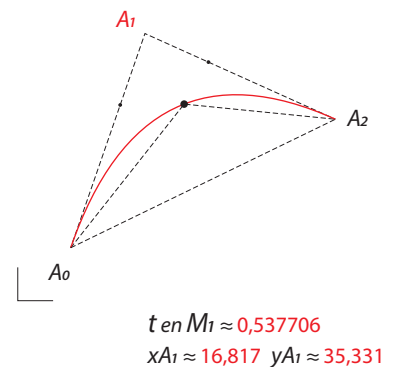


4) M_1 est le sommet de la parabole .

Il faut donc résoudre à l'aide des équations des dérivées 1ère et secondes :

$$\begin{cases} xM_1 = t^2(xA_0 + xA_2 - 2xA_1) + 2t(xA_1 - xA_0) + xA_0 \\ yM_1 = t^2(yA_0 + yA_2 - 2yA_1) + 2t(yA_1 - yA_0) + yA_0 \\ \frac{g'(t)}{f'(t)} = - \frac{f''(t)}{g''(t)} \end{cases} \quad \text{et en posant } \begin{matrix} xA_0 = x_0 & yA_0 = y_0 \\ xA_2 = x_2 & yA_2 = y_2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & t^3 [(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2] \\ & - 3t^2 [(x_0^2 + x_0x_2 + x_0xM_1 - x_2xM_1) + (y_0^2 + y_0y_2 + y_0yM_1 - y_2yM_1)] \\ & + t [(3x_0^2 - x_0x_2 - 5x_0xM_1 + x_2xM_1 + 2xM_1^2) + (3y_0^2 - y_0y_2 - 5y_0yM_1 + y_2yM_1 + 2yM_1^2)] \\ & - (x_0 - xM_1)^2 - (y_0 - yM_1)^2 = 0 \end{aligned}$$



b) Cubiques passant par 3 points

5) P_1 est fixe et la tangente en P_3 est imposée .

Exemple 5 : avec : $xP_1=11$ $yP_1=22$ et $\alpha_3 = 120^\circ$

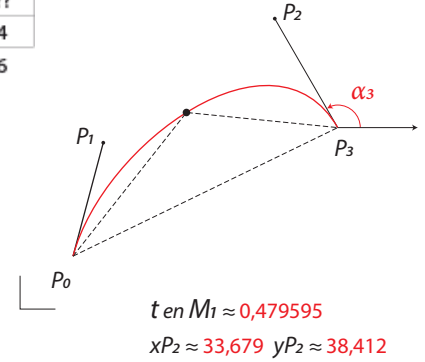
Pour calculer t en M_1 il faut résoudre :

$$\begin{cases} xM_1 = t^3 (-xP_0 + 3xP_1 - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2xP_3) + 3t^2 (xP_0 - 2xP_1 + \varphi_3 \cos(\alpha_3) + xP_3) + 3t (xP_1 - xP_0) + xP_0 \\ yM_1 = t^3 (-yP_0 + 3yP_1 - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2yP_3) + 3t^2 (yP_0 - 2yP_1 + \varphi_3 \sin(\alpha_3) + yP_3) + 3t (yP_1 - yP_0) + yP_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^3 [\vec{\alpha}_3(xP_0 - 3xP_1 + 2xP_3) - (yP_0 - 3yP_1 + 2yP_3)] + 3t^2 [\vec{\alpha}_3(-xP_0 + 2xP_1 - xP_3) - (-yP_0 + 2yP_1 - yP_3)] + 3t [\vec{\alpha}_3(xP_0 - xP_1) - (yP_0 - yP_1)] + \vec{\alpha}_3(xM - xP_0) - (yM - yP_0) = 0$$

Donc $xP_2 = [xM_1 - (1-t)^3 xP_0 - 3t(1-t)^2 xP_1 - t^3 xP_3] / [3t^2(1-t)]$ et similairement pour yP_2

P_0	7	7
P_1	11	22
P_2	???	???
P_3	42	24
M	22	26



6) P_2 est fixe et la tangente en P_0 est imposée .

Exemple 6 : avec : $xP_2=40$ $yP_2=34$ et $\alpha_0 = 60^\circ$

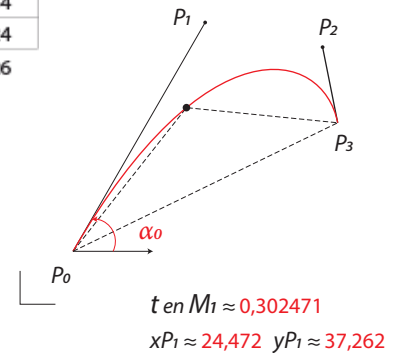
Résoudre :

$$\begin{cases} xM_1 = t^3 (2xP_0 + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3xP_2 + xP_3) - 3t^2 (xP_0 + 2\varphi_0 \cos(\alpha_0) - xP_2) + 3t \varphi_0 \cos(\alpha_0) + xP_0 \\ yM_1 = t^3 (2yP_0 + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3yP_2 + yP_3) - 3t^2 (yP_0 + 2\varphi_0 \sin(\alpha_0) - yP_2) + 3t \varphi_0 \sin(\alpha_0) + yP_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^3 [\vec{\alpha}_0(-xP_3 - 2xP_0 + 3xP_2) - (-yP_3 - 2yP_0 + 3yP_2)] + 3t^2 [\vec{\alpha}_0(xP_0 - xP_2) - (yP_0 - yP_2)] + \vec{\alpha}_0(xM - xP_0) - (yM - yP_0) = 0$$

Donc $xP_1 = [xM_1 - (1-t)^3 xP_0 - 3t^2(1-t) xP_2 - t^3 xP_3] / [3t(1-t)^2]$ et idem pour yP_1

P_0	7	7
P_1	???	???
P_2	40	34
P_3	42	24
M	22	26



Courbes de Bézier passant strictement par 4 points

Source : http://d.krauss.free.fr/documents/Transverses/Bezier/Simulation_Bezier/Simulation_Bezier.htm

soit

	X	Y
$P_0=M_0$	7	7
M_1	22	26
M_2	36	31
$P_3=M_3$	42	24

Dans ce cas il faut estimer t_1 en M_1 et t_2 en M_2

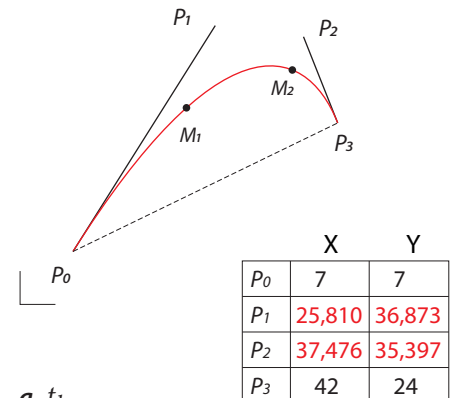
Exemple avec $t_1 = 0,3$ et $t_2 = 0,7$

Résoudre

$$\begin{cases} 3t_1(1-t_1)^2 xP_1 + 3t_1^2(1-t_1) xP_2 = xM_1 - (1-t_1)^3 xP_0 - t_1^3 xP_3 \\ 3t_2(1-t_2)^2 xP_1 + 3t_2^2(1-t_2) xP_2 = xM_2 - (1-t_2)^3 xP_0 - t_2^3 xP_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-t_1) xP_1 + t_1 xP_2 = \frac{a_1}{a_2} \\ (1-t_2) xP_1 + t_2 xP_2 = \frac{a_1}{a_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xP_1 = \frac{a_1 t_2 - a_2 t_1}{t_2 - t_1} \\ xP_2 = \frac{a_2(1-t_1) - a_1(1-t_2)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

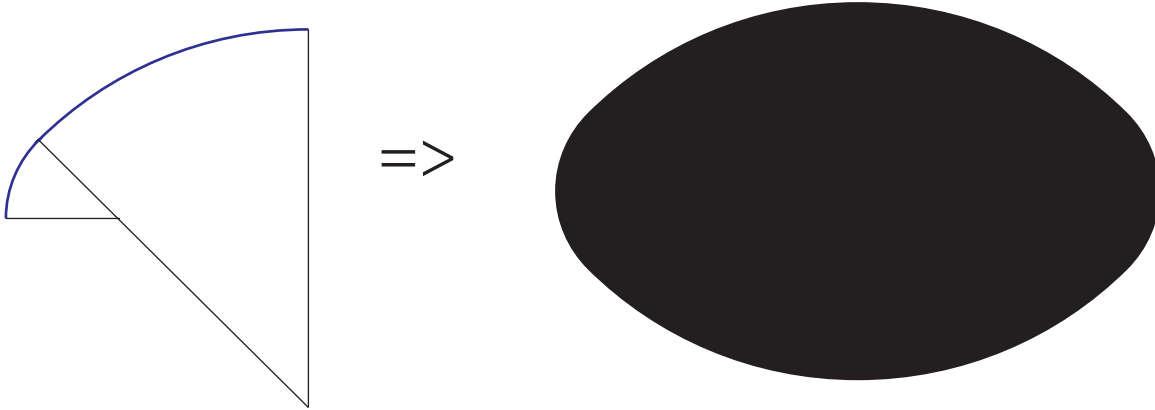
idem pour les y



NB : toutes ces définitions strictes peuvent engendrer des résultats incohérents ou pas du tout de solutions.

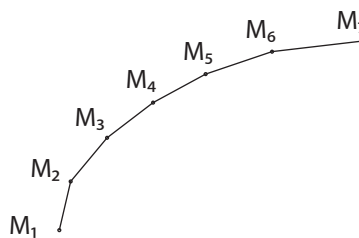
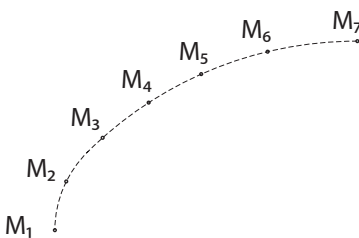
Lissage d'un polygone par approximation dichotomique.

Pour bien comprendre ma méthode je vais prendre l'exemple d'un quart d'ovale définis par 2 arcs de cercles.



A mon avis, visuellement, le résultat n'est pas correct car je distingue des «pics» au point de tangence des cercles.
Donc je vais «améliorer» l'effet visuel en lissant le quart d'ovale par une B_3 .

Dans un premier temps je vais choisir 7 points qui vont me servir au lissage.



	X	Y
M1 = P0	0.000	0.000
M2	1.502	6.441
M3	6.317	12.215
M4	12.4	16.868
M5	19.349	20.64
M6	28.128	23.613
M7 = P3	40	25

En second je définis les données de départ.

$$P_0 = M_1 \quad P_3 = M_7 \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \quad \alpha_3 = \pi$$

$$T_0 = \|P_0 T\| \quad T_3 = \|P_3 T\|$$

1 A) En suite avec la formule (page 29 paragraphe 5 je calcule les paramètres des points $M(n)$ respectifs.

NB : au début $P_1 = T$

Cela me permet de calculer 5 valeurs possibles :

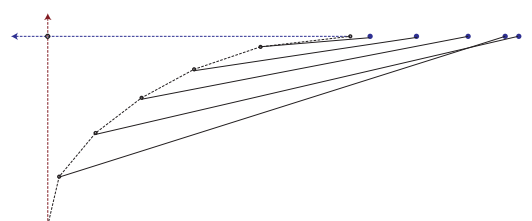
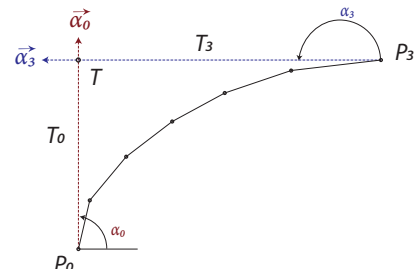
Puis je détermine les 5 normes suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_{3(M_2)} &= \|P_3 P_{2(M_2)}\| & \|M_2 P_{2(M_2)}\|^{-1} &= W_2 \\ \varphi_{3(M_3)} &= \|P_3 P_{2(M_3)}\| & \|M_3 P_{2(M_3)}\|^{-1} &= W_3 \\ \varphi_{3(M_4)} &= \|P_3 P_{2(M_4)}\| & \|M_4 P_{2(M_4)}\|^{-1} &= W_4 \\ \varphi_{3(M_5)} &= \|P_3 P_{2(M_5)}\| & \|M_5 P_{2(M_5)}\|^{-1} &= W_5 \\ \varphi_{3(M_6)} &= \|P_3 P_{2(M_6)}\| & \|M_6 P_{2(M_6)}\|^{-1} &= W_6 \end{aligned}$$

Et enfin je fait la moyenne pondérée suivante :

$$\frac{\varphi_{3(M_2)} W_2 + \varphi_{3(M_3)} W_3 + \varphi_{3(M_4)} W_4 + \varphi_{3(M_5)} W_5 + \varphi_{3(M_6)} W_6}{W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6} = \varphi_{3(\text{Moyen})} \Rightarrow P_3(\text{Moyen})$$

$$\begin{aligned} &t^3 [\vec{\alpha}_3(xP_0 - 3xP_1 + 2xP_3) - (yP_0 - 3yP_1 + 2yP_3)] \\ &+ 3t^2 [\vec{\alpha}_3(-xP_0 + 2xP_1 - xP_3) - (-yP_0 + 2yP_1 - yP_3)] \\ &+ 3t [\vec{\alpha}_3(xP_0 - xP_1) - (yP_0 - yP_1)] \\ &+ \vec{\alpha}_3(xM - xP_0) - (yM - yP_0) = 0 \end{aligned}$$

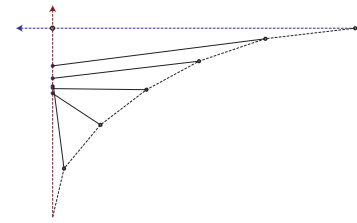
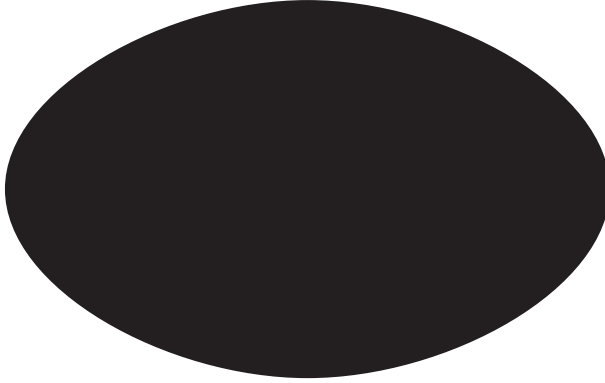


1 B) De façon similaire avec la formule (page 29 paragraphe 6 je calcule le P1(moyen) avec le P2 (moyen) précédent

$$t^3 [\alpha_0(-xP_3 - 2xP_0 + 3xP_2) - (-yP_3 - 2yP_0 + 3yP_2)] \\ + 3t^2 [\alpha_0(xP_0 - xP_2) - (yP_0 - yP_2)] \\ + \alpha_0(xM - xP_0) - (yM - yP_0) = 0$$

2 A) idem 1A avec P1 de 1B etc....

=>



1/4 d'ovale lissé

	X	Y
P ₀	0	0
P ₁	0	13.2
P ₂	21.23	25
P ₃	40	25

$$\varphi_0 = 13.20$$

$$\varphi_3 = 18.77$$

Le résultat c'est amélioré mais si cela n'est pas encore probant, il faut effectuer un autre lissage avec un déplacement (interactif) d'un ou plusieurs points M.

Pour vérifier la précision du lissage je calcule les distances des points M(n) à la courbe de bézier.

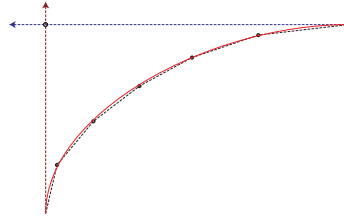
$$\|M_2 B_3\| = 0.143$$

$$\|M_3 B_3\| = 0.177$$

$$\|M_4 B_3\| = 0.202$$

$$\|M_5 B_3\| = 0.035$$

$$\|M_6 B_3\| = 0.062$$



NB : voir les détails numériques page 33

Quelques conseils.

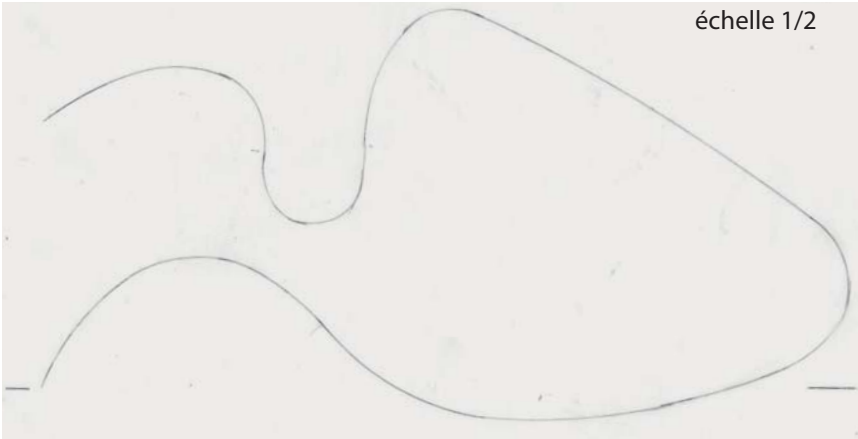
La dichotomie est «simple» pour ce genre de calcul mais à chaque itération il faut vérifier certains points.

- 1) Les φ ne doivent pas dépasser le point de tangence **T** si non la courbe aura un point d'inflexion sur son domaine de définition [0 1] donc bloquer le φ concerné .
- 2) Le calcul des paramètres **t** peuvent aussi être hors domaine [0 1] => attribuer un poids nul sur le ou les points M respectifs peut y remédier.
- 3) La convergence de la dichotomie peut engendrer un déséquilibre des φ (un φ très petit par rapport à l'autre) le blocage du φ concerné avec une valeur équilibrée résout le problème.
- 4) Quant cela est possible la précision peut être améliorée en faisant varier légèrement un α .
- 5) Faire en sorte qu'un point d'inflexion soit la fin et ou le début de la courbe à traiter.

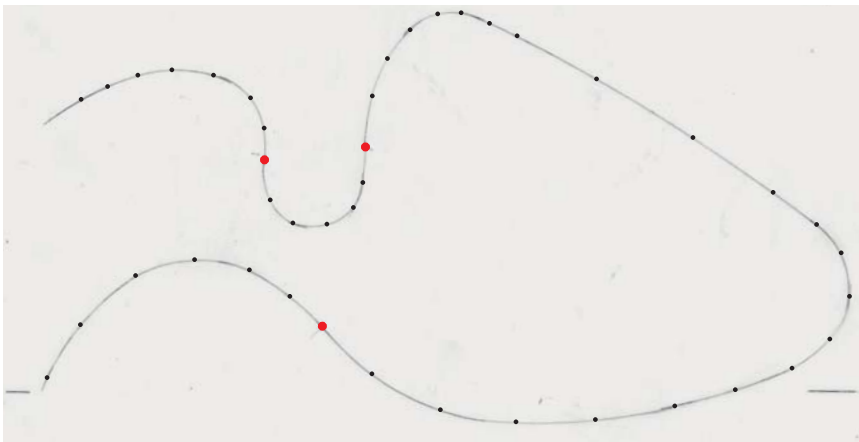
J'ai sciemment fait le contraire dans l'exemple du lissage (dans le méandre).

Lissage d'un polygone complexe par 4 points.

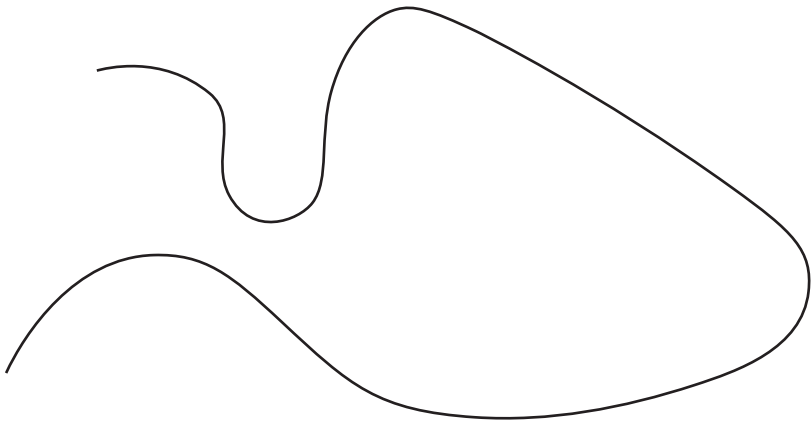
Dessin d'origine.



Définition des points de lissage



Courbes Lissées avec raccordements de classe C1



	X	Y
M1	1	13
M2	9.8	27
M3	24.4	40
M4	40	44.2
M5	54.5	41.5
M6	65.2	34.5
M7	73.8	26.6
M8	86.9	14
M9	105	4.5
M10	125	1.3
M11	146	1.9
M12	167	5.5
M13	183	9.8
M14	198	15.5
M15	208	23.2
M16	213.2	34.5
M17	211	46
M18	204.5	53.5
M19	193	62
M20	171.8	76.5
M21	146.3	92
M22	125.3	103.4
M23	118	106.7
M24	110.5	109.5
M25	104.3	109.2
M26	97	105
M27	91	97.4
M28	87	87.5
M29	85.2	74
M30	84.5	64.6
M31	82	58
M32	75	53.6
M33	66	53.9
M34	60	60
M35	58.5	70.6
M36	58.4	79
M37	54.8	87
M38	45	93
M39	34	94.4
M40	25	93
M41	17	90

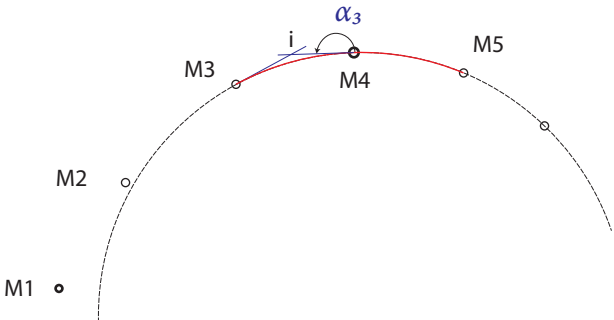
Note importante.

Pour réaliser ce type de lissage il faut à chaque fois déterminer les α_3 cohérents.

Ils doivent anticiper la courbe suivante => $\alpha_{0(+n)} = \alpha_{3(n-1)} + \pi$

Voici ma méthode.

Je calcule le cercle passant par M3 M4 M5
et je détermine aisément α_3 .



Exemple avec les 2 premières courbes du lissage classe C1

1ère courbe A				2ème courbe B			
		X	Y			X	Y
$\varphi_0 = 11.53$	P_0	1	13	$\varphi_0 = 13.43$	P_0	40	44
	P_1	5.829	23.475		P_1	53.423	44.591
	P_2	19.254	43.596		P_2	60.302	39.225
$\varphi_3 = 20.75$	P_3	40	44	$\varphi_3 = 18.48$	P_3	74	27

$A''_{\text{en } P_3} = -2.66605$ $B''_{\text{en } P_0} = 0.87972$

Dés à présent le but est de faire varier φ_0 et ou φ_3 avec $A''_{\text{en } P_3}$ et à l'aide des formules suivantes :

$$\varphi_{0 \text{ de B}} = \frac{A''(xP_3 - xP_0) + yP_0 - yP_3 + \varphi_3 [\cos(\alpha_3)A'' - \sin(\alpha_3)]}{2 \cos(\alpha_0)A'' - 2 \sin(\alpha_0)}$$

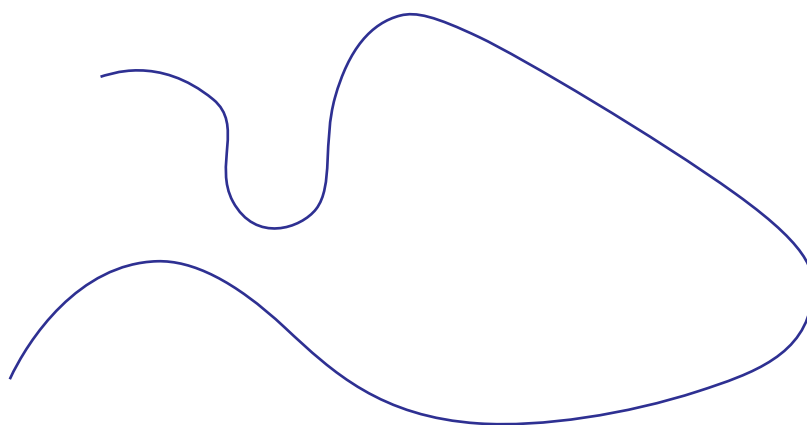
$$\varphi_{3 \text{ de B}} = \frac{A''(xP_3 - xP_0) + yP_0 - yP_3 + 2 \varphi_0 [\sin(\alpha_0) - \cos(\alpha_0)A'']}{\sin(\alpha_3) - \cos(\alpha_3)A''}$$

Variation de φ_0 avec $A'' = -2.66605 * 0,7 = -1.86624$ et pour $\varphi_3 A'' = -2.66605$

2ème courbe B classe C2

		X	Y	
$\varphi_0 = 8.69$	P_0	40	44	$B''_{\text{en } P_0} = -2.66605$
	P_1	48.682	44.453	
	P_2	58.945	40.494	
$\varphi_3 = 20.34$	P_3	74	27	

=>



		X		Y																			
T	0.000	0.000	$\alpha 0=1.57 \text{ rad}$	$xT=0$	$T0=25$	P2-M2	$\alpha 3=3.14 \text{ rad}$	$\varphi 0=25$	$t1(M2)=0.095$	$\varphi 3=20.5$	poid												
M2	1.502	6.441	$\alpha 3=3.1 \text{ rad}$	$yT=25$	$T3=40$	P2-M3	3.14	25.00	$t1(M3)=0.200$	$\varphi 3=22.3$	0.017	xP0=0	yP0=0	xP1=0	yP1=25	xP2=60.48	yP2=25	xP3=40	yP3=25	P1-M2	$\alpha 0=1.57 \text{ rad}$	$\varphi 3=9.75$	$t2(M)$
M3	6.317	12.215				P2-M4	3.14	25.00	$t1(M4)=0.312$	$\varphi 3=15.58$	0.023	xP0=0	yP0=0	xP1=0	yP1=25	xP2=62.28	yP2=25	xP3=40	yP3=25	P1-M3	1.57	9.75	$t2(M)$
M4	12.400	16.868				P2-M5	3.14	25.00	$t1(M5)=0.441$	$\varphi 3=8.7$	0.034	xP0=0	yP0=0	xP1=0	yP1=25	xP2=55.58	yP2=25	xP3=40	yP3=25	P1-M4	1.57	9.75	$t2(M)$
M5	19.349	20.640				P2-M6	3.14	25.00	$t1(M6)=0.619$	$\varphi 3=2.6$	0.069	xP0=0	yP0=0	xP1=0	yP1=25	xP2=48.75	yP2=25	xP3=40	yP3=25	P1-M5	1.57	9.75	$t2(M)$
M6	28.128	23.613	1A	Début								xP0=0	yP0=0	xP1=0	yP1=25	xP2=42.62	yP2=25	xP3=40	yP3=25	P1-M6	1.57	9.75	$t2(M)$
M7 = P3	40	25	$\alpha 3=3.1 \text{ rad}$	moyenne pondérée $\varphi 3=9.75$											1B		moyenne p						

Rotation d'une courbe en utilisant une formule du « changement de base ».

Il est utile de connaître cet outil car il permettra de simplifier certaines équations.

Le but est d'effectuer à la courbe une rotation α ayant pour centre de rotation un point Ω et éventuellement une translation Δx , Δy de cette courbe.

Notation Matricielle

$$P' \begin{pmatrix} x^{P'} \\ y^{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x^P - x\Omega) \\ (y^P - y\Omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Omega + \Delta x \\ y\Omega + \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{donc } P' \begin{cases} x^{P'} = \cos \alpha (x^P - x\Omega) - \sin \alpha (y^P - y\Omega) + x\Omega + \Delta x \\ y^{P'} = \sin \alpha (x^P - x\Omega) + \cos \alpha (y^P - y\Omega) + y\Omega + \Delta y \end{cases}$$

Exemple

\mathcal{P}	X	Y
P_0	45	15
P_1	72	60
P_2	15	45
P_3	75	15
Origine	0	0

avec

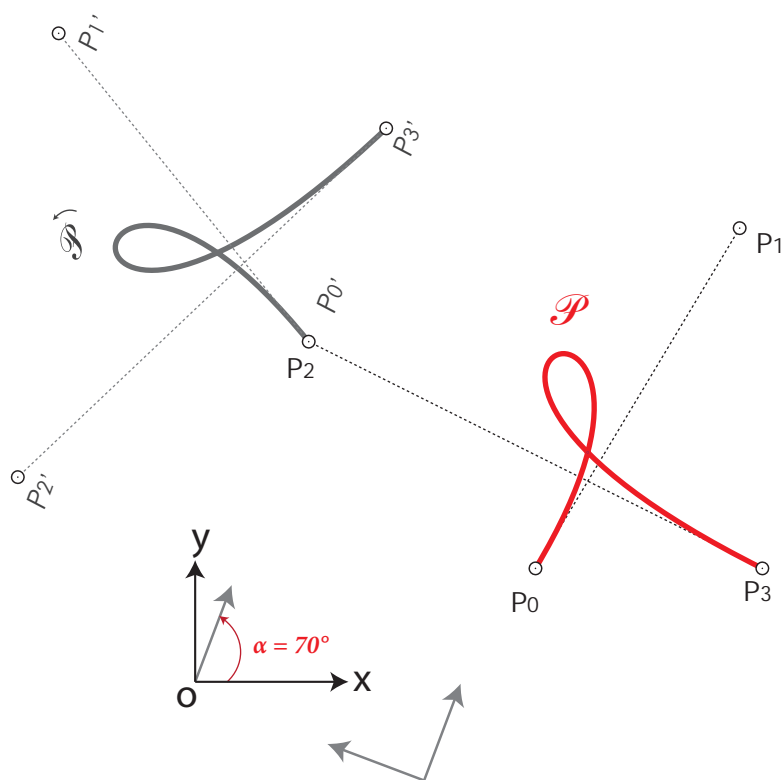
$\alpha = 70^\circ$

$\Omega \begin{vmatrix} 45 \\ 15 \end{vmatrix}$

$P_2 - P_0 \begin{vmatrix} \Delta x = -30 \\ \Delta y = 30 \end{vmatrix}$

\Rightarrow

\mathcal{P}'	X	Y
$P_{0'}$	15	45
$P_{1'}$	-18,1	85,8
$P_{2'}$	-23,5	27,1
$P_{3'}$	25,3	73,2
Origine'	19,81	-2,19



Opération réciproque

$$P \begin{pmatrix} x^P \\ y^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x^{P'} - x\Omega - \Delta x) \\ (y^{P'} - y\Omega - \Delta y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Omega \\ y\Omega \end{pmatrix} \quad \text{OU} \quad \begin{pmatrix} x^P \\ y^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x^{P'} - x\Omega - \Delta x) \\ (y^{P'} - y\Omega - \Delta y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Omega \\ y\Omega \end{pmatrix}$$

$$P \begin{cases} x^P = \cos(-\alpha)(x^{P'} - x\Omega - \Delta x) - \sin(-\alpha)(y^{P'} - y\Omega - \Delta y) + x\Omega \\ y^P = \sin(-\alpha)(x^{P'} - x\Omega - \Delta x) + \cos(-\alpha)(y^{P'} - y\Omega - \Delta y) + y\Omega \end{cases}$$

$$P \begin{cases} x^P = \cos(\alpha)(x^{P'} - x\Omega - \Delta x) + \sin(\alpha)(y^{P'} - y\Omega - \Delta y) + x\Omega \\ y^P = -\sin(\alpha)(x^{P'} - x\Omega - \Delta x) + \cos(\alpha)(y^{P'} - y\Omega - \Delta y) + y\Omega \end{cases}$$

Comment résoudre un équation du 3ème degré ?

L'équation se présente sous la forme : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Dans un premier temps nous allons simplifier les termes de cette équation

1) on divise tous les coefficients par : a

$$\frac{ax^3}{a} + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

2) on change de variable en posant : $x = \left(z - \frac{B}{3}\right)$

$$\Rightarrow 1 \left(z - \frac{B}{3}\right)^3 + B \left(z - \frac{B}{3}\right)^2 + C \left(z - \frac{B}{3}\right) + D = 0$$

3) En développant et simplifiant $\Rightarrow z^3 + pz + q = 0$

$$\text{avec : } p = \left(C - \frac{B^2}{3}\right) \quad \text{et} \quad q = \left(\frac{2B^3}{27} + D - \frac{BC}{3}\right)$$

$$\text{Le discriminant } \Delta \text{ de } z^3 + pz + q = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

Le signe et la valeur du discriminant impliquent 3 cas

1er cas : si $\Delta > 0$ il existe 1 racine réelle :

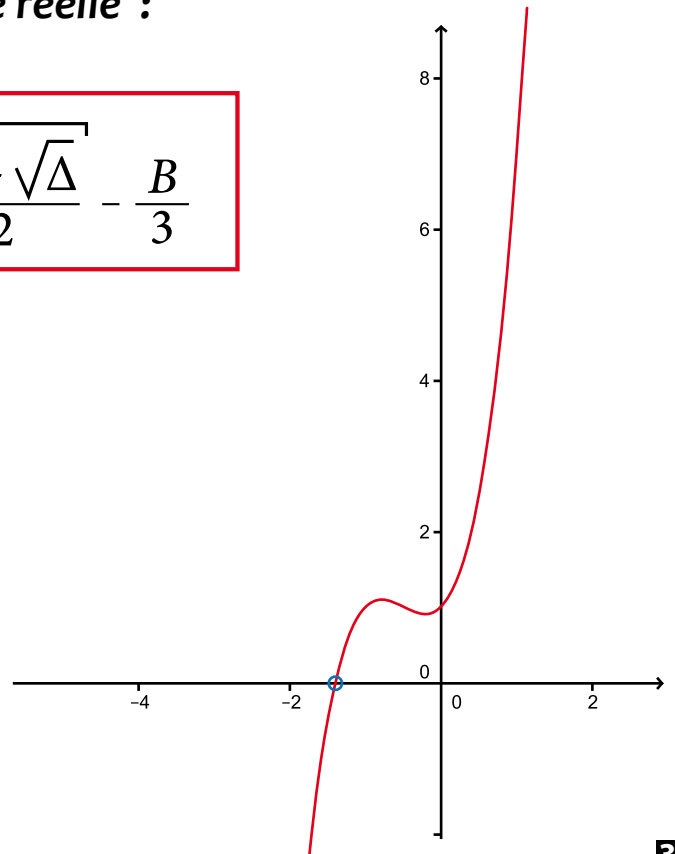
$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} - \frac{B}{3}$$

Exemple 1 $2x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$

$$\Rightarrow z^3 - 0,25z + 0,5 = 0$$

$$\Delta \approx 0,25$$

$$x_1 \approx -1,398$$



2 ème cas : si $\Delta = 0$ il existe 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{3q}{p} - \frac{B}{3} \quad x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p} - \frac{B}{3}$$

Exemple 2 $x^3 - 15x^2 + 27x - 13 = 0$

$$x_1 = 13$$

$$\Rightarrow z^3 - 48z - 128 = 0 \quad \Delta = 0$$

$$x_2 = x_3 = 1$$

3 ème cas : si $\Delta < 0$ il existe 3 racines réelles :

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{\arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right)}{3} \right) - \frac{B}{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{\arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) + 2\pi}{3} \right) - \frac{B}{3}$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{\arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) + 4\pi}{3} \right) - \frac{B}{3}$$

Exemple 3 $2x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\Rightarrow z^3 - 2.75z - 0.25 = 0$$

$$\Delta \approx -3,02$$

$$x_1 \approx 2,02$$

$$x_2 \approx -1,11$$

$$x_3 \approx 0,41$$

