



UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

Estudio de la solución del problema del regulador lineal cuadrático con horizonte infinito

PROPUESTA PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

Autor:

SEBASTIAN BARRAZA

MARIMÓN

COD: 202142031

Asesor:

DR. ALFREDO R. ROA NARVÁEZ

7 DE ABRIL DE 2022

Resumen

En el siguiente trabajo de grado desarrollamos el problema del regulador lineal cuadrático de horizonte infinito invariante en el tiempo, el cual consiste en determinar una entrada de control que estabiliza un sistema lineal y, a su vez, minimiza un funcional de costo cuadrático que depende del estado del sistema y de la propia entrada de control. Bajo condiciones de controlabilidad y observabilidad impuestas al sistema, presentamos la construcción de la entrada óptima estabilizante a partir de la solución de una ecuación matricial algebraica de Riccati. Adicionalmente, estudiamos dos métodos numéricos para determinar la solución de la ecuación algebraica de Riccati antes mencionada; uno de éstos, es un método exacto basado en una técnica de diagonalización y, el otro, un método iterativo que genera recursivamente, a través de una ecuación matricial en diferencias de Riccati, una sucesión de matrices que converge a la solución exacta. Finalmente, desarrollamos un ejemplo numérico ilustrativo reportado en la literatura y contrastamos la solución obtenida en el trabajo original con aquella que nos resultó de la implementación de los dos métodos anteriormente citados.

Índice general

1. Introducción	2
2. Preliminares	5
2.1. ¿Qué es un sistema de control?	5
2.2. Sistemas lineales	8
2.2.1. Problema de valor inicial	8
2.2.2. Sistemas lineales no homogéneos	11
2.3. Propiedades de un sistema lineal controlado	12
2.3.1. Alcanzabilidad y Controlabilidad	13
2.3.2. Observabilidad y Reconstructibilidad	15
2.3.3. Estabilidad	18
3. Problema LQR óptimo de horizonte infinito	23
3.1. Problema LQR de horizonte finito	23
3.1.1. Programación Dinámica	24
3.1.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman	26
3.1.3. Solución del problema LQR óptimo de horizonte finito	29
3.2. Solución del problema LQR óptimo de horizonte infinito	31
3.2.1. Existencia de la solución	33
3.2.2. Optimalidad de la solución	35
3.3. Estabilidad en el problema LQR óptimo invariante en el tiempo	37
4. Resultados numéricos	41
4.1. Solución numérica del problema LQR óptimo de horizonte infinito	41
4.1.1. Solución por diagonalización	41
4.1.2. Solución a través de un método iterativo	43
4.2. Ejemplo ilustrativo	44
5. Conclusiones	58
Bibliografía	60

Capítulo 1

Introducción

La teoría de control moderna presenta algunos métodos para la resolución de interrogantes sobre las propiedades del movimiento, particularmente, aquellas relacionadas con el equilibrio y que son conocidas bajo la denominación de estabilidad e inestabilidad. En ese sentido, es de gran relevancia el estudio de estos métodos para determinar la estabilidad de sistemas de control lineales y no lineales. En este trabajo consideraremos un sistema de control lineal, cuya planta controlada admite observación completa del estado y es dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

donde, para cada $t \geq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ son, respectivamente, el estado y la entrada de control del sistema, y los parámetros A y B son matrices de dimensiones apropiadas. El problema objeto de estudio del presente trabajo consiste en determinar, dada cualquier condición inicial x_0 del sistema, una función entrada de control $u(t) = \mu(x(t), t)$, $t \geq 0$, que estabilice el sistema en (1.1), o sea, tal que $x(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. La selección de la función $u(t)$, a su vez, debe ser tal que minimice un funcional de costo de horizonte infinito, dado por una integral impropia de un funcional cuadrático del estado del sistema dada cualquier condición inicial. El funcional de costo es definido por:

$$J_u(x_0) = \int_0^{\infty} (x(t)'Q(t)x(t) + u(t)'R(t)u(t))dt \quad (1.2)$$

donde las matrices Q y R son semidefinida positiva y definida positiva, respectivamente.

La minimización del funcional en (1.2), sujeto al sistema en (1.1), es un problema de control óptimo conocido como el problema del Regulador Lineal Cuadrático (LQR por su sigla en inglés) de horizonte infinito, el cual fue presentado en la obra seminal [1], encontrada también en [2], publicada por Rudolf E. Kalman en 1960. Existe una gran motivación en el estudio del problema LQR, generando resultados para la extensión de éste en sistemas más generales, por ejemplo aquellos presentados en [3, 4] o más recientemente en [5], en el contexto de sistemas lineales con dinámica de salto en sus parámetros. Asimismo, el estudio de este problema es de gran relevancia en aplicaciones de la teoría de control en distintas áreas de la ciencia [6] e ingeniería [7].

En este trabajo, introducimos en primer lugar una revisión bibliográfica preliminar que muestra la estructura genérica de un sistema de control lineal a tiempo continuo. En particular, consideraremos un sistema de control lineal invariante en el tiempo, descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo como en (1.1), el cual es conocido como ecuación de estado o planta controlada. Presentamos las condiciones de existencia, unicidad, continuación y continuidad con respecto a los parámetros de la solución de la ecuación de estado del sistema, y establecemos propiedades fundamentales como la controlabilidad, observabilidad y estabilidad, siendo éstas de gran importancia en la obtención de los resultados de esta investigación.

Seguido, abordamos la solución del problema LQR, estudiando en principio el caso de horizonte finito, apoyados en el algoritmo de la programación dinámica, para luego establecer la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellmann y un Teorema de suficiencia asociado a ésta, que resulta útil para determinar la entrada de control óptima. Posteriormente, extendemos la formulación del problema LRQ al escenario de horizonte infinito y, bajo la hipótesis de controlabilidad sobre el sistema, mostramos la existencia de la entrada de control óptimo que minimiza el funcional de costo cuadrático como en (1.2) (ver Teorema 11), diseñada a partir de la solución límite de una ecuación diferencial matricial de Riccati con condición terminal nula en un cierto parámetro T , toda vez que este parámetro tiende a infinito (ver Teorema 10). Más aún, asumiendo invariancia en el tiempo en las matrices de ponderación del funcional de costo cuadrático e imponiendo de una cierta manera la condición de observabilidad sobre el sistema, mostramos que la entrada de control óptima, solución del problema LQR de horizonte infinito, es además estabilizante (ver Teorema 12).

Por último, como complemento al desarrollo analítico que produce la solución del problema propuesto aquí, se presentan también dos métodos numéricos, uno exacto [8] y otro iterativo [9], que permiten determinar dicha solución computacionalmente. Estos

métodos son implementados para validar los resultados obtenidos en un problema de aplicación presentado en [7]. El problema consiste en hacer que un satélite, estimulado por ondas electromagnéticas emitidas desde la tierra a través de radares, pueda mantenerse en una posición relativa a ellos y no depender del continuo enfoque de los radares. Un satélite de comunicación está sujeto a continuas perturbaciones debido a diferentes fuerzas que interactúan con el objeto en el espacio, como las fuerzas gravitatorias y la presión solar. El análisis de control óptimo asociado al sistema nos permite controlar la órbita geoestacionaria óptima. La teoría estudiada en este trabajo nos permite asegurar con certeza que, con el sistema orbital del satélite controlado y estable, podemos asegurar un alto rendimiento de control como demostrado en [7]. En primer lugar, recreamos la solución reportada en el citado trabajo, obtenida a través del comando `lqr` del software MATLAB® [10], evidenciando la estabilización de la trayectoria de estado a través de la entrada de control óptima determinada. Y, en segundo lugar, contrastamos esta solución, específicamente el valor de la matriz \bar{P} que satisface una cierta ecuación algebraica matricial de Riccati, con la que obtuvimos al implementar los dos métodos numéricos mencionados anteriormente, notando coincidencia en el valor de \bar{P} para el caso del método exacto y convergencia hacia dicha matriz por parte de la secuencia de matrices que generada a través del método iterativo.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. ¿Qué es un sistema de control?

En general, un sistema de control propone el estudio estructural y de aplicaciones de los sistemas dinámicos, caracterizados por la presencia de elementos que influyen su funcionamiento a lo largo del tiempo, con el fin de conseguir, mediante la manipulación de unas variables llamadas de control, un dominio sobre unas variables llamadas de salida de modo que estas alcancen ciertos valores prescritos. Así, la operación del sistema surge del estímulo que genera una señal de entrada, produciendo en consecuencia una señal de respuesta o salida. Los componentes básicos (vea Figura 1) de un sistema de control son: *la planta*, que es el sistema a ser controlado; *el controlador*, el cual ajusta y produce la señal de entrada a la planta con base en las comparaciones de las mediciones de la salida y/o de ciertos valores deseados o de referencia; *los actuadores*, que son mecanismos por los cuales el controlador actúa sobre la planta haciendo efectiva la operación de la misma; y *los sensores*, los cuales suministran información acerca de la planta. Problemas asociados a un sistema de control pueden ser reducidos a una estructura más simple, debido a que en la mayoría de los casos no es posible identificar claramente todos los componentes básicos y sus funciones. Por tanto, es apropiado diseñar la operación del sistema mediante un diagrama conteniendo solamente dos bloques. De esta forma podemos referirnos a un sistema de control como aquel compuesto de la planta, a la cual se agregan los sensores como dispositivos de la misma, y el controlador, que contiene a los actuadores como partes de él. La planta y el controlador pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales o en diferencias, dependiendo de si sus comportamientos se rigen de acuerdo a una evolución continua en el tiempo (t

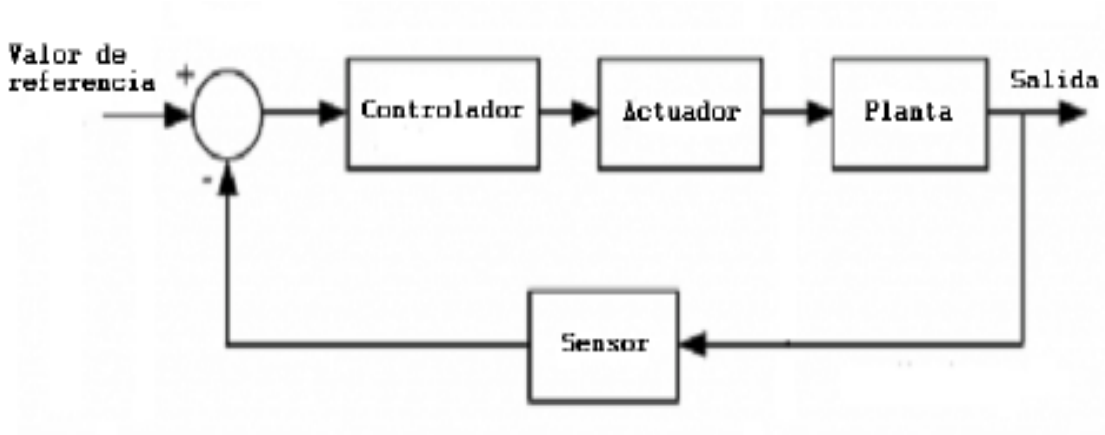


Figura 2.1: Diagrama de bloque de un sistema de control. Adaptado de [8].

real) o discreta en el tiempo (t entero). El desarrollo teórico en el cual se enmarca este trabajo está basado principalmente en el estudio de modelos de sistemas de control lineales a tiempo continuo.

Consideramos la planta de un sistema de control dada por (vea [8]):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + v_p(t) \\
 y(t) &= C(t)x(t) + v_m(t) \\
 z(t) &= D(t)x(t),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

con $x(t_0) = x_0$ la condición inicial del sistema; $x(t)$ es la llamada variable de estado de la planta; $y(t)$ la variable observada (medición de la salida de la planta); $u(t)$ la variable entrada; $z(t)$ la variable controlada (salida de la planta); y, por último, $v_p(t)$ la variable de perturbación y $v_m(t)$ la variable de ruido en la medición de la salida, siendo estas variables procesos estocásticos que afectan la dinámica del estado y la salida de la planta, respectivamente. Adicionalmente, asociamos a la planta una variable de referencia $r(t)$ con la cual se establece el objetivo del sistema de control: *generar una entrada $u(t)$ tal que la variable controlada $z(t)$ rastree la variable de referencia $r(t)$ a partir de un cierto instante inicial t_0* . De esto, se define el error de rastreamiento dado como $e(t) = z(t) - r(t)$. El controlador produce la entrada a la planta (es decir, la entrada a la planta es la variable de salida del controlador) que puede ser de dos tipos: de malla abierta, cuando la entrada generada es tal que:

$$u(t) = \mu(r(\tau)), \quad t_0 \leq \tau \leq t;$$

o de malla cerrada, cuando la entrada generada es tal que:

$$u(t) = \mu(r(\tau), y(\tau)), \quad t_0 \leq \tau \leq t,$$

siendo este tipo de entrada el más deseable dada su eficiencia en la operación del sistema. En ese sentido, un controlador en general se define mediante el sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= L(t)q(t) + K_r(t)r(t) - K_f(t)y(t); \quad q(t_0) = q_0, \\ u(t) &= F(t)q(t) + H_r(t)r(t) - H_f(t)y(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

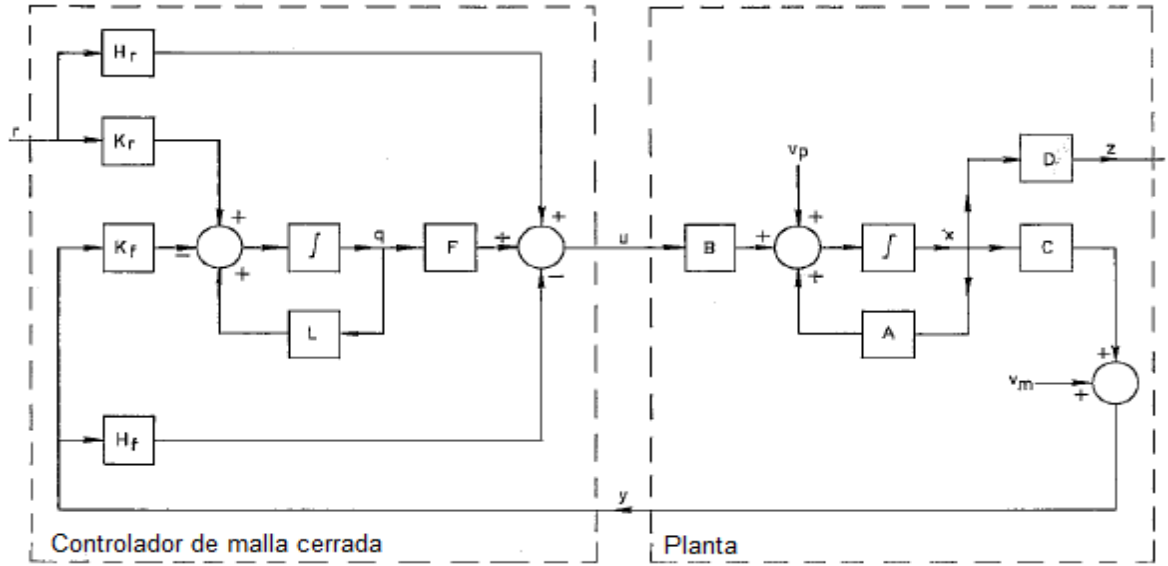


Figura 2.2: Planta de un sistema de control interconectada con un controlador de malla cerrada (Adaptada de [8]).

Así, usando una técnica de “aumento de estado”, obtenemos el modelo general de un sistema de control lineal:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(t) - B(t)H_f(t)C(t) & B(t)F(t) \\ -K_f(t)C(t) & L(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B(t)H_r(t) \\ K_r(t) \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} I & -B(t)H_f(t) \\ 0 & K_f(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p(t) \\ v_m(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} -H_f(t)C(t) & F(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + H_r(t)r(t) - H_f(t)v_m(t).$$

Ahora bien, el controlador se dice ser de *orden cero* toda vez que la dimensión del sistema de control sea igual a la dimensión de la planta y por tanto haya ausencia de dinámica en el controlador. En tal caso, el modelo para un controlador de orden cero viene dado por:

$$u(t) = H_r(t)r(t) - H_f(t)y(t), \quad (2.4)$$

y de esta manera, la planta interconectada con un controlador de orden cero constituyen el modelo más común de un sistema de control, siendo este dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A(t) + B(t)\mathcal{L}(t))x(t) + B(t)H_r(t)r(t) + v_p(t) - B(t)H_f(t)v_m(t) \\ u(t) &= \mathcal{L}(t)x(t) + H_r(t)r(t) - H_f(t)v_m(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $\mathcal{L}(t) = -H_f(t)C(t)$ es conocida como la *matriz de ganancia* del sistema de control. Por último, se considera en algunas ocasiones sistemas de control simplificados, libre de perturbaciones actuando en la dinámica del estado del sistema, asumiendo medición perfecta y completa de la salida del sistema, es decir $y(t) = x(t)$ y, también, la variable controlada siendo tal que $z(t) = x(t)$. Así, si adicionalmente la referencia es el punto de equilibrio del sistema, $r(t) = 0$, el sistema de control simplificado estará dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A(t) + B(t)\mathcal{L}(t))x(t) \\ u(t) &= \mathcal{L}(t)x(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

el cual se conoce como sistema de control por realimentación de estado, siendo principalmente este tipo de modelo el objeto de estudio de este trabajo.

2.2. Sistemas lineales

Como vimos, los sistemas de control poseen unas variables denominadas estados que contienen toda la información relevante del sistema. Ahora bien, a partir de un estado dado en cualquier instante de tiempo presente y una entrada de control se determinan los estados futuros del sistema. Siguen a continuación algunos resultados concernientes a la solución de sistemas lineales (vea [11, 12]).

2.2.1. Problema de valor inicial

Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío y conexo. Considere además funciones $f_i \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$. Un sistema de ecuaciones de primer orden es dado por:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

El sistema anterior puede escribirse como:

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad (2.8)$$

donde $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$, y $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ es el vector de estado, siendo sus componentes x_i las variables de estado, con $i = 1, \dots, n$. Una solución del sistema en (2.8) consiste de n funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, continuamente diferenciables definidas en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, tales que $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in D$, $t \in J$, y además $\dot{\varphi}_i(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, para todo $i = 1, \dots, n$. Ahora bien, un problema de valor inicial (PVI) asociado a al sistema en (2.8) es definido como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

cuya solución se obtiene de resolver la ecuación integral:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds. \quad (2.10)$$

Considere $S \subset D$ un bloque en \mathbb{R}^{n+1} de manera que $(t, x) \in S$ toda vez que $|t - t_0| \leq a$ y $|x - x_i(t_0)| \leq b_i$, con $a, b_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Como $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$, entonces es acotada en S (compacto), e por tanto existen $M_i > 0$ tales que $|f_i(t, x)| < M_i$, para todo $(t, x) \in S$, $i = 1, \dots, n$. Tomemos $c_i := \min\{a, b_i/M_i\}$, $i = 1, \dots, n$, y $c := \min\{c_1, \dots, c_n\}$. Enunciaremos sin demostración los siguientes teoremas que garantizan existencia, unicidad, continuación y continuidad respecto a parámetros de la solución del PVI en (2.9).

Teorema 1 (De existencia de Peano). Sea $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$. Entonces, para cualquier $(t_0, x_0) \in D$ el PVI en (2.9) tiene una solución definida sobre $[t_0, t_0 + c)$.

Teorema 2 (De unicidad). Sea $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$. Si para cualquier compacto $K \subset D$, f satisface la condición de Lipschitz con respecto a x sobre D , entonces el PVI en (2.9) tiene a lo más una solución sobre el intervalo $[t_0, t_0 + c)$.

Teorema 3 (De continuación). Sea $f \in \mathcal{C}(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ para algún intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$ y además f satisface la condición de Lipschitz con respecto a x sobre $J \times \mathbb{R}$. Entonces, para cualquier $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}$ el PVI en (2.9) tiene una solución única que existe en todo J .

Teorema 4 (De continuidad respecto a los parámetros). Considere el PVI:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x, \lambda) \\ x(\tau) &= \xi_\lambda,\end{aligned}\tag{2.11}$$

donde ξ_λ es una función con valores en \mathbb{R}^n que depende continuamente de $\lambda \in G \subset \mathbb{R}^m$. Sea $f \in \mathcal{C}(J \times \mathbb{R}^n \times G, \mathbb{R}^n)$, con $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Asumamos además que para cada par de subconjuntos compactos $J_0 \subset J$ y $G_0 \subset G$, f satisface la condición de Lipschitz: $\|f(t, x, \lambda) - f(t, y, \lambda)\| \leq L\|x - y\|$, para todo $(t, \lambda) \in J_0 \times G_0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $L := L(J_0, G_0) > 0$. Entonces el PVI en (2.11) tiene una solución única $\phi(t, \tau, \lambda)$, donde $\phi \in \mathcal{C}(J \times J \times G, \mathbb{R}^n)$. Más aun, si D es un conjunto tal que para cada $\lambda_0 \in D$ existe $\epsilon > 0$ tal que $[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \cap D \subset D$, entonces $\phi(t, \tau, \lambda) \rightarrow \phi(t, \tau_0, \lambda_0)$ uniformemente para $t_0 \in J_0$, siempre que $(\tau, \lambda) \rightarrow (\tau_0, \lambda_0)$, donde J_0 es un subconjunto compacto cualquiera de J .

La demostración de los teoremas anteriores pueden ser encontradas por ejemplo en [11]. Cuando se satisface el teorema de unicidad de solución, es posible aproximar de forma arbitrariamente cercana las soluciones únicas del PVI en (2.9) a través del método de aproximaciones sucesivas (o iteraciones de Picard). Para $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$, si $K \subset D$ es un conjunto compacto y $(t_0, x_0) \in K$, las aproximaciones sucesivas para el PVI en (2.9) están definidas por:

$$\phi_0(t) = x_0$$

$$\phi_{m+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_m(s))ds, \quad m = 0, 1, \dots,$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + c]$. De esta manera, dado que $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ y si además es continua de Lipschitz con respecto a x en S , es posible mostrar que ϕ_m existe para todo $m \geq 0$ en $[t_0, t_0 + c]$, son continuas allí, y convergen uniformemente a la solución única del PVI en (2.9) (vea [11]).

2.2.2. Sistemas lineales no homogéneos

Con relación al tipo de sistemas objeto de interés de este trabajo, consideremos ahora un sistema de ecuaciones diferenciales lineales dado por:

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), \quad (2.12)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^{n \times n})$ y $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$, siendo J algún intervalo abierto. Entonces, para cualquiera que sea $t_0 \in J$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el sistema en (2.12) tiene solución única que satisface $x(t_0) = x_0$. Esta solución existe sobre todo J y es continua en (t, t_0, x_0) . Además, es de la forma (fórmula de variación de constantes):

$$\phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)g(s)ds, \quad (2.13)$$

donde $\Phi(t, t_0)$ denota la matriz de transición de estados y se obtiene de la solución del sistema lineal homogéneo ($g(t) \equiv 0$) asociado a (2.12). De hecho, el método de aproximaciones sucesivas aplicado al sistema homogéneo, $\dot{x} = A(t)x$, produce una sucesión $\{\phi_m\}_{m \geq 0}$ de términos:

$$\begin{aligned} \phi_m(t, t_0, x_0) = & \left[I + \int_{t_0}^t A(s_1)ds_1 + \int_{t_0}^t A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2)ds_2ds_1 + \cdots \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) \cdots \int_{t_0}^{s_{m-1}} A(s_m)ds_m \cdots ds_1 \right] x_0, \end{aligned}$$

que converge uniformemente, sobre subconjuntos compactos de D , a la solución única $\phi_h(t, t_0, x_0)$ de dicho sistema. Esto es:

$$\phi_h(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0,$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) = & I + \int_{t_0}^t A(s_1)ds_1 + \int_{t_0}^t A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2)ds_2ds_1 + \cdots \\ & + \int_{t_0}^t A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) \cdots \int_{t_0}^{s_{m-1}} A(s_m)ds_m \cdots ds_1 + \cdots, \end{aligned}$$

la cual es conocida como la serie de Peano-Baker. Note claramente que $\Phi(t, t) = I$ y, tomando derivada de $\Phi(t, t_0)$ con respecto a t , se obtiene:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0).$$

Además, $\Phi(t, t_0)$ es no singular para todo t, t_0 , y cumple con la propiedad de semigrupo $\Phi(t, \tau)\Phi(\tau, t_0) = \Phi(t, t_0)$. Ahora bien, si el sistema lineal homogéneo es particularmente invariante en el tiempo, es decir $A(t) \equiv A$, para todo t (A constante), entonces puede verse que:

$$\Phi(t, t_0) := \Phi(t - t_0) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k(t - t_0)^k}{k!}.$$

Finalmente, para una matriz U cuadrada, si introducimos la notación e^U que define la matriz exponencial:

$$e^U = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U^k}{k!},$$

tendríamos, en el caso de que la matriz $A(t)$ sea invariante en el tiempo, la solución del sistema en (2.12) escrita como:

$$\phi(t, t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}g(\tau)d\tau, \quad (2.14)$$

la cual representa el estado $x(t)$ de dicho sistema en el instante $t \geq t_0$.

2.3. Propiedades de un sistema lineal controlado

En esta sección consideramos la planta controlada de un sistema de control lineal:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.15a)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (2.15b)$$

invariante en el tiempo (matrices A, B, C constantes), con condición inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, variable de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$, continua por partes, y variable observada $y(t) \in \mathbb{R}^\ell$ (note que la ecuación en (2.15a) es un caso especial de aquella presentada en (2.12) con $g(t) = Bu(t)$, $t \geq 0$). Para este sistema introduciremos los conceptos de controlabilidad/alcanzabilidad (transferencia del estado de un punto a otro al aplicar una entrada $u(t)$ apropiada en un intervalo de tiempo finito), observabi-

lidad/constructibilidad (determinación del estado del sistema a partir de la información presente en las variables de entrada y observada sobre algún intervalo de tiempo finito), y estabilidad (capacidad de la trayectoria de estado de permanecer acotada en un período largo de tiempo y converger al origen). Estos conceptos son de gran importancia en el estudio de controladores de malla cerrada y de los observadores de estado de un sistema de control.

Observación. Nos referimos al sistema en (2.15) como un *sistema lineal* en el sentido de que este cumple con el llamado *principio de superposición* en términos de la entrada u y la correspondiente salida y del sistema toda vez que $x_0 = 0$, y en términos de las condiciones iniciales x_0 y la correspondiente salida y toda vez que $u(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Esto es, si y_1 y y_2 son salidas del sistema correspondientes a entradas u_1 y u_2 respectivamente, con condición inicial $x_0 = 0$, entonces, la salida y correspondiente a cualquier combinación lineal $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, puede verse que es dada por $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. Asimismo, si y_1 y y_2 son salidas del sistema correspondientes a condiciones iniciales $x_0^{(1)}$ y $x_0^{(2)}$ respectivamente, con entrada $u \equiv 0$, entonces, la salida correspondiente a cualquier combinación lineal $x_0 = \alpha_1 x_0^{(1)} + \alpha_2 x_0^{(2)}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, se tiene que es igual a $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$.

2.3.1. Alcanzabilidad y Controlabilidad

Se dice que un estado $x_1 \in \mathbb{R}^n$ es *alcanzable* si existe $u(t)$, $t \in [0, T]$, que transfiere al estado $x(t)$ desde el origen en $t = 0$ hasta x_1 en algún tiempo finito T . El *subespacio alcanzable* del sistema, notado como R_a , es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n que contiene todos los estados alcanzables. En general, decimos que el sistema en (2.15a), o bien el par (A, B) es alcanzable, si $R_a = \mathbb{R}^n$. Por otro lado, un estado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es *controlable* si existe $u(t)$, $t \in [0, T]$, que transfiere el estado $x(t)$ desde x_0 en $t = 0$ hasta el origen en algún tiempo finito T . Asimismo, definimos el *subespacio controlable* del sistema, notado como R_c , como el subespacio vectorial de \mathbb{R}^n que contiene todos los estados controlables. Luego, decimos que el sistema en (2.15a), o bien el par (A, B) es controlable, si $R_c = \mathbb{R}^n$. Ahora bien, para el par (A, B) y $T > 0$ dado, definimos la transformación integral dada por:

$$L(u; 0, T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad (2.16)$$

que hace corresponder una entrada $u(t)$, $t \in [0, T]$, con un elemento en el subespacio alcanzable R_a , puesto que, en virtud de la ecuación en (2.14), un elemento en tal subespacio, digamos $x_T \in R_a$, es tal que para él existe una entrada $u(t)$, $t \in [0, T]$, con $x_T = L(u; 0, T)$. Definimos también los *gramanianos* de alcanzabilidad $W_a(0, T)$, y controlabilidad $W_c(0, T)$, dados por las matrices:

$$W_a(0, T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B' e^{A'(T-\tau)} d\tau,$$

y,

$$W_c(0, T) = \int_0^T e^{-A\tau} B B' e^{-A'\tau} d\tau,$$

donde $(\cdot)'$ denota la transpuesta de cualquier matriz;

Además, presentamos la matriz $m \times nm$:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B],$$

la cual se conoce como la *matriz de alcanzabilidad* (o de controlabilidad desde el origen). La caracterización del sistema (A, B) ser alcanzable deviene del hecho de que es posible mostrar que $\mathcal{R}(L(u, 0, T)) = \mathcal{R}(W_a(0, T)) = \mathcal{R}(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{R}(\cdot)$ denota el conjunto imagen de una cierta transformación y/o matriz. En este sentido, el sistema (A, B) es alcanzable si:

$$\mathcal{R}(L(u, 0, T)) = \mathcal{R}(W_a(0, T)) = \mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^n. \quad (2.17)$$

o, equivalentemente, $\text{rango}(\mathcal{C}) = n$, la cual es una condición mucho más viable para verificar en la práctica (vea [11]).

En general, la alcanzabilidad de (A, B) implica la existencia de una entrada u que transfiere cualquier estado x_0 en $t = 0$ a cualquier estado x_T en $t = T$. De hecho, tal entrada es la misma que transfiere el origen en $t = 0$ al estado $x_T - e^{AT}x_0$, la cual es dada por:

$$u(t) = B' e^{A'(T-t)} W_a^{-1}(0, T) (x_T - e^{AT}x_0), \quad t \in [0, T]. \quad (2.18)$$

En efecto, la transformación integral $L(u; 0, T)$ en (2.16) evaluada en la entrada u en (2.18) produce claramente el vector $x_T - e^{AT}x_0$ en $R_a = \mathbb{R}^n$; y, asimismo, usando (2.14)

con $g(t) = Bu(t)$, $t \in [0, T]$, esta misma entrada es tal que:

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}BB'e^{A'(T-\tau)}W_a^{-1}(0, T)(x_T - e^{AT}x_0)d\tau \\ &= e^{AT}x_0 + W_a(0, T)W_a^{-1}(0, T)(x_T - e^{AT}x_0) \\ &= x_T. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Lo anterior nos muestra particularmente que, si (A, B) es alcanzable y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es cualquiera, entonces x_0 está en R_c , o sea, (A, B) es controlable. Más aún, del hecho que:

$$W_a(0, T) = e^{AT}W_c(0, T)e^{A'T}, \tag{2.20}$$

y la no singularidad de e^{AT} para todo T , se tiene que $\text{rango}(W_a(0, T)) = \text{rango}(W_c(0, T))$, y, por tanto, (A, B) es alcanzable si y solo si es controlable. Finalmente, presentamos las siguientes caracterizaciones adicionales de la controlabilidad/alcanzabilidad del sistema (A, B) involucrando autovalores y autovectores (éstas son útiles para relacionar el concepto de controlabilidad con el de estabilidad):

1. **Prueba de autovectores para la controlabilidad.** El sistema (A, B) es controlable si y solo si no existe vector propio de A' en el espacio nulo de B' .
2. **Prueba PBH para la controlabilidad.** El sistema (A, B) es controlable si y solo si:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

2.3.2. Observabilidad y Reconstructibilidad

En diversas aplicaciones, muchas veces no podemos acceder al estado $x(t)$ del sistema en (2.15), y contamos apenas con mediciones u observaciones $y(t)$, como en (2.15b), de la respuesta del sistema a alguna entrada $u(t)$ sobre un cierto período de tiempo. La pregunta que surge entonces es, ¿podemos determinar el estado del sistema con esta información? Cuando existe la inversa de C , por ejemplo, podemos reconstruir instantáneamente el estado del sistema, a partir de la observación $y(t)$ y la entrada $u(t)$, despejando $x(t)$ en (2.15b): $x(t) = C^{-1}y(t)$. Sin embargo, resulta obvio que esto solamente sería posible si el número de salidas fuese igual al número de estados, es decir, si C fuera $n \times n$. En general, una respuesta afirmativa a la pregunta anterior podrá ser dada si el sistema en (2.15) es observable o reconstruible.

Decimos que el sistema en (2.15) es *observable* (en $t = 0$), o que el par (A, C) es

observable, si el conjunto de estados x_0 tales que

$$Ce^{At}x_0 = 0, \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (2.21)$$

es igual a $\{0\}$. Si (A, C) es no observable, aquellos x_0 distintos del origen que satisfagan (2.21) se llaman *estados no observables*. Los estados no observables no pueden ser distinguidos del origen si se conocen únicamente las observaciones $y(t)$, $t \geq 0$, de la salida. De hecho, si x_0 es un estado no observable, entonces:

$$\tilde{y}(t) := y(t) - C \int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau = Ce^{At}x_0 = 0, \quad (2.22)$$

es decir, el estado no observable x_0 y el estado cero producen la misma salida. Por otro lado, decimos que el par (A, C) es *reconstruible* en $T \geq 0$, si el conjunto de estados x_T tales que

$$Ce^{A(t-T)}x_T = 0, \quad \text{para todo } t \leq T, \quad (2.23)$$

es igual a $\{0\}$. Si (A, C) es no reconstruible, los estados x_T distintos del origen en T que satisfagan (2.23) se llaman *estados no reconstruibles* en T . Ahora bien, definimos el gramiano de observabilidad de (A, C) como siendo la matriz $n \times n$:

$$W_o(0, T) = \int_0^T e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau, \quad (2.24)$$

y el gramiano de reconstructibilidad de (A, C) como siendo la matriz $n \times n$:

$$W_r(0, T) = \int_0^T e^{A'(\tau-T)} C' C e^{A(\tau-T)} d\tau. \quad (2.25)$$

Note que un estado no observable x_0 está en el espacio nulo, $\mathcal{N}(W_o(0, T))$, del gramiano de observabilidad para todo $T \geq 0$. Recíprocamente, si x_0 está en $\mathcal{N}(W_o(0, T))$ cualquiera que sea $T \geq 0$, se obtiene $x_0' W_o(0, T) x_0 = 0$, lo que implica en $\|Ce^{At}x_0\|^2 = 0$ para todo $t \geq 0$; esto es, x_0 es no observable. De lo anterior, vemos que el subespacio de estados no observables es igual a $\mathcal{N}(W_o(0, T))$, para todo $T \geq 0$. Es decir, si (A, C) es observable y x_0 es cualquiera distinto del origen, entonces $x_0 \notin \mathcal{N}(W_o(0, T))$ para algún $T > 0$; o sea, existe $T > 0$ tal que $\mathcal{N}(W_o(0, T)) = \{0\}$, o, mejor, $\mathcal{R}(W_o(0, T)) = \mathbb{R}^n$, o equivalentemente, $\text{rango}(W_o(0, T)) = n$. Más aún, siendo (A, C) observable, multiplicando a la izquierda en la igualdad $\tilde{y}(t) = Ce^{At}x_0$ por $e^{A't}C'$, e integrando el resultado

en $[0, T]$, podemos acceder a x_0 resolviendo el sistema:

$$W_o(0, T)x_0 = \int_0^T e^{A't} C' \tilde{y}(t) d\tau,$$

de forma que:

$$x_0 = W_o^{-1}(0, T) \int_0^T e^{A't} C' \tilde{y}(t) d\tau.$$

Claramente, una vez determinado x_0 podemos acceder al estado $x(t)$, $t \geq 0$, a través de la ecuación en (2.14) con $g(t) = Bu(t)$, $t \in [0, T]$. Por otro lado, del hecho que:

$$W_o(0, T) = e^{A'T} W_r(0, T) e^{AT}, \quad (2.26)$$

y la no singularidad de e^{AT} para todo T , se tiene $\text{rango}(W_o(0, T)) = \text{rango}(W_r(0, T))$, y, por tanto, (A, C) es observable si y solo si es reconstruible. Finalmente, introducimos la *matriz de observabilidad* $\ell n \times n$:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

la cual es útil en la caracterización práctica de la observabilidad/reconstructibilidad de (A, C) . De hecho, es posible mostrar que $\mathcal{N}(\mathcal{O}) = \mathcal{N}(W_o(0, T))$ para todo $T > 0$; y, de aquí, claramente se obtiene que (A, C) es observable/reconstruible si y solo si $\text{rango}(\mathcal{O}) = n$ (vea [11]). Al igual que con los conceptos de controlabilidad/alcanzabilidad, encontramos resultados análogos que caracterizan la observabilidad/constructibilidad de (A, C) :

1. **Prueba de autovectores para la observabilidad.** El sistema (A, C) es observable si y solo si ningún autovector de A está en el espacio nulo de C .
2. **Prueba PBH para la observabilidad.** El sistema (A, C) es observable si y solo si:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Observación. Se define el *sistema dual* a aquel presentado en (2.15) como el dado

por:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A'\tilde{x}(t) + C'\tilde{u}(t) \quad (2.27a)$$

$$\tilde{y}(t) = B'\tilde{x}(t), \quad (2.27b)$$

con $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^\ell$, $\tilde{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$. En este sentido, puede verificarse entonces que el sistema en (2.15), o bien el par (A, B) , es controlable/alcanzable si y solo si el sistema dual en (2.27), o bien el par (A', B') , es observable/construible. Asimismo, el sistema en (2.15), o bien el par (A, C) , es observable/construible si y solo si el sistema dual en (2.27), o bien el par (A', C') , es controlable/alcanzable.

2.3.3. Estabilidad

Los sistemas dinámicos en la naturaleza o los diseñados por el hombre generalmente operan en algún modo específico llamado punto de operación o *equilibrio*. Presentaremos aquí un concepto concerniente al comportamiento cualitativo de los equilibrios: la *estabilidad*. Un primer enfoque tiene que ver con la *estabilidad asintótica* de un equilibrio, que establece que al ser perturbado el estado del sistema, desplazado con relación al punto de equilibrio, entonces se espera que el estado retorne a dicho equilibrio. Por otro lado, presentaremos el concepto de *estabilidad entrada-salida*, que se refiere a la propiedad de producir salidas acotadas toda vez que las entradas del sistema sean acotadas, y a que cambios pequeños en la salida sean resultados de pequeños cambios en las entradas. Considere el sistema lineal homogéneo invariante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.28)$$

con condición inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, y $t \geq 0$. Un punto $x_e \in \mathbb{R}^n$ es llamado un equilibrio (en $t = 0$) del sistema en (2.28) si $Ax_e = 0$. Note que si $x(0) = x_e$, entonces $x(t) = x_e$, para todo $t \geq 0$. Asumiremos que un punto de equilibrio x_e del sistema en (2.28) será siempre aislado, en el sentido de que existe $r > 0$ tal que $B(x_e, r)$ no contiene puntos de equilibrio del sistema en (2.28) distintos de x_e . Particularmente consideraremos el punto de equilibrio $x_e = 0$, el cual es conocido como la solución trivial del sistema en (2.28), y claramente es el único punto de equilibrio de dicho sistema si y solo si A es no singular.

Estabilidad asintótica

Decimos que $x_e = 0$, equilibrio del sistema en (2.28), es (uniformemente) estable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que:

$$\|x(t)\| = \|e^{At}x_0\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{siempre que } \|x_0\| < \delta.$$

El equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) se dice ser (uniformemente) asintóticamente estable si:

- i. es estable,
- ii. $\exists \delta_0 > 0$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x_0 = 0, \quad \text{siempre que } \|x_0\| < \delta_0.$$

El conjunto de todos los puntos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ es llamado *dominio de atracción* del equilibrio $x_e = 0$ y a dicho punto de equilibrio se le dice ser un *equilibrio atractivo*. Además, si el dominio de atracción es todo \mathbb{R}^n , decimos que el equilibrio $x_e = 0$ es globalmente asintóticamente estable. Por otro lado, si $x_e = 0$ es un equilibrio asintóticamente estable, tenemos que, por definición, $x_e = 0$ es estable, y además $\exists \delta > 0$ tal que si $\epsilon = \delta/4$, $\exists T = T(\epsilon) > 0$ con:

$$\|e^{A(t+T)}x_0\| < \frac{\delta}{4}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{siempre que } \|x_0\| < \delta.$$

Ahora bien,

$$\|e^{A(t+T)}x_0\| = \frac{\|x_0\|}{\frac{\delta}{2}} \frac{\|e^{A(t+T)}(\frac{\delta}{2}x_0)\|}{\|x_0\|}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{donde } \left\| \frac{\frac{\delta}{2}x_0}{\|x_0\|} \right\| < \delta.$$

Por tanto, $\|e^{A(t+T)}x_0\|/\|x_0\| < 1/2$, $\forall t \geq 0$, y en consecuencia, $\|e^{A(t+T)}\| \leq 1/2$, $\forall t \geq 0$. Así, si $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\|e^{A(t+nT)}\| \leq \|e^{AT}\|^{n-1} \|e^{A(t+T)}\| \leq 2^{-n}$, $\forall t \geq 0$. Luego:

$$\|e^{A(t+nT)}x_0\| \leq 2\|x_0\|e^{-\alpha(n+1)T}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{donde } \alpha = \frac{\ln 2}{T}.$$

En particular, cualquiera que sea $0 \leq t < T$, tenemos:

$$\|e^{A(t+nT)}x_0\| \leq 2\|x_0\|e^{-\alpha(t+nT)}. \quad (2.29)$$

En conclusión, la estabilidad asintótica del equilibrio $x_e = 0$ no solamente implica la convergencia de la solución hacia dicho punto de equilibrio, sino que tal convergencia es tanto o más rápida que la de la exponencial en (2.29) cuando $t \rightarrow \infty$. Esta cualidad es conocida como estabilidad exponencial del equilibrio $x_e = 0$. En general, decimos que $x_e = 0$, equilibrio del sistema en (2.28) es *exponencialmente estable* si $\exists \alpha > 0$, y $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, tales que:

$$\|e^{At}x_0\| \leq \epsilon e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{siempre que } \|x_0\| < \delta. \quad (2.30)$$

De lo anterior, puede verse que un sistema es asintóticamente estable si y solo si es exponencialmente estable. Además, presentamos el siguiente resultado que caracteriza también la estabilidad asintótica global sin tener que calcular la solución $x(t)$ del sistema en (2.28).

Teorema 5 ([11]). El equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) es globalmente asintóticamente estable, o equivalentemente, globalmente exponencialmente estable, si y solo si todos los autovalores de A tienen parte real negativa. Cuando se cumplen estas condiciones, la matriz A se le llama *matriz de estabilidad*.

Con base en el teorema anterior, decimos que el equilibrio $x_e = 0$ es *inestable* si y solo si al menos uno de los autovalores de A tiene, o bien parte real positiva, o tiene parte real nula con un bloque de Jordan de orden mayor que 1.

Ecuación Matricial de Lyapunov

Consideraremos a continuación las funciones de Lyapunov, las cuales pueden ser vistas como “funciones distancia generalizadas” del estado al equilibrio $x_e = 0$. En general, una función $v : U \rightarrow \mathbb{R}$, con U vecindad cualquiera de $x_e = 0$, es denominada *función de Lyapunov* para el sistema en (2.28) cuando satisface ([13]):

- i. v es continua en U y continuamente diferenciable en $U - \{0\}$.
- ii. $v(0) = 0$, $v(x) > 0$, $\forall x \in U$, $x \neq 0$.
- iii. $\langle \nabla v(x), Ax \rangle < 0$, $\forall x \in U - \{0\}$.

Las propiedades de estabilidad son deducidas de las propiedades de las funciones de Lyapunov y de sus derivadas en el tiempo cuando evaluadas en las soluciones del sistema

en (2.28). Consideremos la función

$$v(x) = x'Px, \quad (2.31)$$

donde P es una matriz $n \times n$ real y simétrica. Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(t)) &:= \langle \nabla v(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = 2\langle Px(t), Ax(t) \rangle = \langle Px(t), Ax(t) \rangle + \langle Px(t), Ax(t) \rangle \\ &= \langle A'Px(t), x(t) \rangle + \langle x(t), PAx(t) \rangle = \langle A'Px(t), x(t) \rangle + \langle PAx(t), x(t) \rangle \\ &= x(t)'(A'P + PA)x(t). \end{aligned}$$

Note que,

$$Q = A'P + PA, \quad (2.32)$$

es una matriz real simétrica y, si A y P son tales que $\dot{v}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$, entonces es razonable que la distancia del estado $x(t)$ al equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) sea decreciente con el incremento del tiempo, y por tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Es decir, con esto se espera que el equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) sea asintóticamente estable, o equivalentemente, exponencialmente estable. La ecuación en (2.32) es conocida como *ecuación matricial de Lyapunov*. En el teorema a seguir se dan las condiciones para que v en (2.31) sea una función de Lyapunov para el sistema en (2.28), caracterizando así la estabilidad asintótica del equilibrio $x_e = 0$ de dicho sistema.

Teorema 6 ([11]). El equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) es globalmente exponencialmente estable, o equivalentemente, globalmente asintóticamente estable, si y solo si existe una matriz real simétrica P definida positiva tal que la matriz Q en (2.32) es definida negativa.

Finalmente, presentamos una caracterización más de la estabilidad asintótica del equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) relacionada con la controlabilidad/observabilidad del sistema y la ecuación matricial de Lyapunov.

Teorema 7 ([12]). El equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) es globalmente exponencialmente estable, o equivalentemente, globalmente asintóticamente estable, si y solo si para cualquier matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}/C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ para la cual el par $(A, B)/(A, C)$ es controlable/observable, existe una solución única P de la ecuación matricial de Lyapunov:

$$AP + PA' = -BB' \quad / \quad A'P + PA = -C'C. \quad (2.33)$$

Estabilidad entrada-salida

Presentaremos aquí el concepto de estabilidad de entrada-acotada/salida-acotada (estabilidad BIBO por su sigla en inglés) en general para el sistema en (2.15). Decimos que el sistema en (2.15) es (uniformemente) BIBO estable si $\exists L > 0$ tal que las condiciones $x(0) = 0$ y $\|u(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$, impliquen que $\|y(t)\| \leq L, \forall t \geq 0$.

De la definición anterior se puede mostrar que la estabilidad BIBO es equivalente al hecho de que la integral:

$$\int_0^t \|Ce^{A(t-\tau)}B\|d\tau,$$

sea acotada para todo $t \geq 0$. Con esto, puede verse también que si el equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) es exponencialmente estable, entonces el sistema en (2.15) es BIBO estable. En efecto:

$$\begin{aligned} \int_0^t \|Ce^{A(t-\tau)}B\|d\tau &\leq \|C\|\|B\| \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\|d\tau \\ &\leq \delta\|C\|\|B\| \int_0^t \|e^{-\lambda(t-\tau)}\|d\tau \\ &= \frac{\delta\|C\|\|B\|}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \leq \frac{\delta\|C\|\|B\|}{\lambda} := L, \end{aligned} \tag{2.34}$$

para ciertas constantes positivas δ y λ , de acuerdo a lo presentado en (2.30). Finalmente, la estabilidad BIBO del sistema en (2.15) es caracterizada por la estabilidad exponencial del equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) cuando son impuestas condiciones de controlabilidad y observabilidad en (2.15).

Teorema 8 ([11]). Considere el sistema en (2.15) y suponga que (A, B) es controlable y (A, C) es observable. Entonces, el sistema en (2.15) es BIBO estable si y solo si el equilibrio $x_e = 0$ del sistema en (2.28) es exponencialmente estable.

Capítulo 3

Problema LQR óptimo de horizonte infinito

3.1. Problema LQR de horizonte finito

A continuación presentaremos el estudio de un problema de control óptimo asociado a un sistema de control lineal, conocido como el *problema del regulador lineal cuadrático óptimo*, LQR. De manera preliminar trataremos el problema de horizonte finito, el cual consiste en encontrar una entrada $u^*(t) = \mu(x(t))$, $t \in [0, T]$, con μ lineal con relación al estado $x(t)$, para un sistema como en (2.15a), o bien como en (2.6), a fin de minimizar un funcional cuadrático en términos de una integral definida en $[0, T]$. Así, el problema de optimización a considerar lo podemos escribir como:

$$\min_{u \in \mathbf{U}} \int_0^T [x(t)'Q(t)x(t) + u(t)'R(t)u(t)] dt + x(T)'Q_T x(T) \quad (3.1)$$

$$\text{s.a.: } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

donde \mathbf{U} es el conjunto admisible de las funciones entrada u dadas por $u(t) = \mathcal{L}(t)x(t)$, $t \in [0, T]$, con $\mathcal{L}(t)$ siendo una función de valor matricial de dimensión $m \times n$ para todo t . Asumimos que $Q(t)$ y $R(t)$, $t \in [0, T]$, son funciones matriciales continuas y se supone además que las matrices $Q(t)$, para todo t , y Q_T son semidefinidas positivas, y que $R(t)$, para todo t , es definida positiva. De las varias formas de abordar la solución del problema en (3.1), presentaremos aquí un abordaje informal (vea [14]) inspirado en la programación dinámica y que reduce el problema a la solución de una ecuación

en derivadas parciales denominada *ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB).

3.1.1. Programación Dinámica

El algoritmo de programación dinámica es una técnica utilizada para resolver problemas de optimización asociados a sistemas dinámicos a tiempo discreto. Consideremos el sistema:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

donde x_k es un elemento de un cierto espacio \mathbf{S}_k , el control u_k es un elemento de un cierto espacio \mathbf{C}_k con valores en un subconjunto dado no vacío $\mathbf{U}(x_k) \subseteq \mathbf{C}_k$ que depende del estado x_k ; es decir, $u_k \in \mathbf{U}(x_k)$, para todo $x_k \in \mathbf{S}_k$ y k . Consideremos además la clase de las acciones o leyes de control que consisten de secuencias $\pi = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}\}$ de funciones μ_k que hacen corresponder estados x_k con controles $u_k = \mu_k(x_k)$, de forma que $\mu_k(x_k) \in \mathbf{U}(x_k)$, para todo $x_k \in \mathbf{S}_k$. Tales acciones o leyes de control se denominan admisibles. Dado un estado inicial x_0 , una acción de control admisible $\pi = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}\}$, definimos el funcional:

$$J_\pi(x_0) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k)) + g_N(x_N), \quad (3.3)$$

donde las funciones g_k , $k = 0, \dots, N$, son conocidas. Para el estado inicial x_0 , una acción de control óptima π^* es aquella que minimiza el funcional en (3.3), o sea, π^* es óptima si y solo si $J_{\pi^*}(x_0) = \min_{\pi} J_\pi(x_0)$. Un aspecto interesante de la programación dinámica es que es posible determinar una acción de control óptima π^* que minimiza el funcional en (3.3) cualquiera que sea el estado inicial x_0 . En este sentido, el valor óptimo del funcional en (3.3) es denotado por $J^*(x_0)$ (esta misma notación será usada también para el valor mínimo en (3.1)); esto es, J^* es una función que asigna a cada x_0 el valor óptimo $J^*(x_0) = \min_{\pi} J_\pi(x_0)$ y es conocida como *función costo óptimo*. El algoritmo de la programación dinámica se soporta en una idea muy simple que presentaremos a continuación.

Principio de optimalidad [14]. Sea $\pi^* = \{\mu_0^*, \mu_1^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$ una acción de control óptima que minimiza el costo $J_\pi(x_0)$. Asuma que al usar π^* , un estado x_i cualquiera ocurre en un cierto instante i . Consideremos el subproblema en el que estando en x_i ,

en el instante i , queremos minimizar:

$$\sum_{k=i}^{N-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k)) + g_N(x_N). \quad (3.4)$$

Entonces, la acción de control $\{\mu_i^*, \mu_{i+1}^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$ es óptima para dicho subproblema.

En general, el principio de optimalidad sugiere que π^* sea construida poco a poco a partir de subproblemas de “colas”, iniciando con la construcción de una acción de control óptima para el último período o etapa de la operación del sistema, extendiendo la acción de control óptima para los dos últimos períodos, y continuando de esta forma hasta obtener la acción de control óptima π^* para el problema completo.

Algoritmo de programación dinámica [14]. Para cada estado inicial x_0 , el costo óptimo $J^*(x_0)$ es igual a $J_0(x_0)$, donde J_0 se obtiene en el último paso del siguiente algoritmo que procede de forma reversa en el tiempo de $N - 1$ a 0:

$$J_N(x_N) = g_N(x_N) \quad (3.5)$$

$$J_k(x_k) = \min_{u_k \in \mathbf{U}(x_k)} \{g_k(x_k, u_k) + J_{k+1}(x_{k+1})\}, \quad k = N - 1, \dots, 0. \quad (3.6)$$

Más aun, si $u_k^* = \mu_k^*(x_k)$ satisface el lado derecho en (3.6) para cada x_k y k , entonces la acción de control $\pi^* = \{\mu_0^*, \mu_1^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$ es óptima.

Para demostrar que $J^*(x_0) = J_0(x_0)$, introducimos la función $J^*(k, x_k)$ como siendo el costo óptimo para el problema correspondiente a los $N - k$ períodos, comenzando en un estado cualquiera x_k en el instante k y terminando en el instante N , la cual es conocida *función valor* o *costo de continuación*. Esto es, definimos $J^*(N, x_N) = g_N(x_N)$, y para $k = N - 1, \dots, 0$:

$$J^*(k, x_k) = \min_{\pi^k} \left\{ \sum_{i=k}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i)) + g_N(x_N) \right\}, \quad (3.7)$$

donde $\pi^k := \{\mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_{N-1}\}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, para una acción de control admisible cualquiera $\pi = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}\}$. De aquí, es posible mostrar (vea [14]) por inducción sobre k que $J^*(k, \cdot) = J_k(\cdot)$ y, por tanto, para $k = 0$ se llega al resultado deseado, pues $J^*(0, x_0) = J^*(x_0)$ es el valor mínimo del funcional en (3.3).

3.1.2. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Consideraremos aquí una versión continua del sistema en (3.2), siendo esta dado por el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Suponga $u \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, donde \mathbf{U} es el conjunto de valores admisibles de la entrada $u(t)$ continua por partes en $[0, T]$. Asumiremos la función f del sistema en (3.8) continuamente diferenciable con respecto a x y continua con respecto a u . Vimos antes que dada una entrada admisible $u(t)$ $t \in [0, T]$, el sistema en (3.8) tiene solución única $x(t)$. El problema consiste ahora en encontrar una entrada $u(t)$, $t \in [0, T]$, junto con la trayectoria correspondiente $x(t)$, $t \in [0, T]$ que minimice el funcional de costo dado por:

$$\int_0^T g(x(t), u(t)) dt + h(x(T)),\tag{3.9}$$

donde g y h son continuamente diferenciables con respecto a x y g es continua a u . Para aplicar el algoritmo de programación dinámica en la minimización del funcional en (3.9) es necesaria una discretización del problema. Para ello, tomemos una partición $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$ del intervalo $[0, T]$ y supongamos $t_{k+1} - t_k = \delta > 0$, para todo $k = 0, \dots, N-1$, con lo cual $t_k = k\delta$, para $k = 0, \dots, N$. Denotemos también $x(t_k) = x(k\delta)$ como x_k y $u(t_k) = u(k\delta)$ como u_k . Con base en esto, el sistema en (3.8) puede aproximarse por:

$$x_{k+1} = x_k + \delta f(x_k, u_k) + o(\delta),\tag{3.10}$$

donde $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{o(\delta)}{\delta} = 0$. Así, si desconsideramos el “término de error $o(\delta)$ ”, obtenemos la discretización del sistema en (3.8) dada por las ecuaciones en diferencias:

$$x_{k+1} = x_k + \delta f(x_k, u_k).\tag{3.11}$$

Además, el funcional de costo queda escrito como:

$$\sum_{k=0}^{N-1} g(x_k, u_k) \delta + h(x_N).\tag{3.12}$$

En estas condiciones, podemos aplicar el algoritmo de programación dinámica para minimizar el funcional en (3.12) sujeto a la dinámica de estado en (3.11). Denotemos

por $J^*(t, x)$ la función valor o costo de continuación asociado al funcional en (3.9), con t un instante cualquiera en $[0, T]$ y estado x cualquiera en este instante, dado por:

$$J^*(t, x) = \min_{u(\tau) \in \mathbf{U}} \left\{ \int_t^T g(x(\tau), u(\tau)) d\tau + h(x(T)) \right\}, \quad (3.13)$$

con la función $u = u(\tau)$ definida en $[t, T]$. Asimismo, definamos la función valor $\tilde{J}^*(t_k, x)$, con $t = t_k$ cualquiera y estado $x_k = x$ cualquiera, dada por:

$$\tilde{J}^*(t_k, x) = \min_{u_k, \dots, u_{N-1} \in \mathbf{U}} \left\{ \sum_{i=k}^{N-1} g(x_i, u_i) \delta + h(x_N) \right\}. \quad (3.14)$$

Entonces, el algoritmo de programación dinámica establece que:

$$\tilde{J}^*(t_N, x) = h(x) \quad (3.15)$$

$$\tilde{J}^*(t_k, x) = \min_{u \in \mathbf{U}} \{g(x, u) \delta + \tilde{J}^*(t_{k+1}, x_{k+1})\}, \quad k = N - 1, \dots, 0. \quad (3.16)$$

Asumiendo propiedades de diferenciabilidad en \tilde{J}^* , hacemos su expansión en Taylor de primer orden en torno de (t_k, x_k) :

$$\begin{aligned} \tilde{J}^*(t_{k+1}, x_{k+1}) &= \tilde{J}^*(t_k + \delta, x + f(x, u) \delta) \\ &= \tilde{J}^*(t_k, x) + \nabla_t \tilde{J}(t_k, x) \delta + \nabla_x \tilde{J}(t_k, x)' f(x, u) \delta + o(\delta), \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{o(\delta)}{\delta} = 0$, ∇_t representa la derivada parcial con relación a t y ∇_x representa el gradiente con relación a x . Sustituyendo la ecuación anterior en (3.16) obtenemos:

$$\tilde{J}^*(t_k, x) = \min_{u \in \mathbf{U}} \{g(x, u) \delta + \tilde{J}^*(t_k, x) + \nabla_t \tilde{J}(t_k, x) \delta + \nabla_x \tilde{J}(t_k, x)' f(x, u) \delta + o(\delta)\}. \quad (3.18)$$

Luego, cancelando el término $\tilde{J}^*(t_k, x)$ en (3.18), dividiendo por δ y tomando límite cuando $\delta \rightarrow 0$, asumiendo que cuando esto ocurre $\tilde{J}^*(t_k, x) \rightarrow J^*(t, x)$ con $t_k = t$ siempre que $k \rightarrow \infty$, llegamos a:

$$0 = \min_{u \in \mathbf{U}} \{g(x, u) + \nabla_t J(t, x) + \nabla_x J(t, x)' f(x, u)\}, \quad \forall t, x. \quad (3.19)$$

La anterior ecuación en derivadas parciales, con la condición de frontera $J^*(T, x) = h(x)$, es conocida como la ecuación HJB. Obsérvese que para obtener dicha ecuación usamos la diferenciabilidad de la función $J^*(t, x)$, aunque anticipadamente no podríamos saber si esta función cuenta con tal propiedad. Sin embargo, si somos capa-

ces de resolver la ecuación HJB en general, bien sea analítica o computacionalmente, podemos entonces obtener una acción de control óptima minimizando el lado derecho de esta ecuación, como lo explica el siguiente resultado.

Teorema 9 (De Suficiencia [14]). Suponga $V(t, x)$ solución de la ecuación HJB. Esto es, V es continuamente diferenciable en x y t tal que:

$$0 = \min_{u \in \mathbf{U}} \{g(x, u) + \nabla_t V(t, x) + \nabla_x V(t, x)' f(x, u)\}, \quad \forall t, x, \quad (3.20)$$

$$V(T, x) = h(x), \quad \forall x. \quad (3.21)$$

Suponga también que $\mu^*(t, x)$ alcanza el mínimo en (3.20) para todo t y x . Sea $x^*(t)$, $t \in [0, T]$, la trayectoria obtenida dada una condición inicial $x(0) = x_0$ y asociada a la entrada de control dada por $u^*(t) = \mu^*(t, x)$, $t \in [0, T]$. Entonces, V es la solución única de la HJB y es tal que:

$$V(t, x) = J^*(t, x), \quad \forall t, x.$$

Más aún, la acción de control $u^*(t) = \mu^*(t, x(t))$, $t \in [0, T]$, es óptima.

En efecto, consideremos cualquier acción de control admisible $\hat{u}(\tau)$, $\tau \in [t, T]$, cualquiera que sea $0 \leq t < T$, y la trayectoria correspondiente $\hat{x}(\tau)$, $\tau \in [t, T]$, con condición inicial $\hat{x}(t) = x$ cualquiera. Entonces, de la ecuación en (3.20) tenemos para todo $\tau \in [t, T]$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) + \nabla_\tau V(\tau, \hat{x}(\tau)) + \nabla_x V(\tau, \hat{x}(\tau))' f(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) \\ &= g(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) + \dot{V}(\tau, \hat{x}(\tau)), \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $\dot{V}(\tau, \hat{x}(\tau))$ denota la derivada total con respecto a τ de la composición de la función $\tau \mapsto (\tau, \hat{x}(\tau))$, $\tau \in [t, T]$, con la solución $V(t, x)$ de la ecuación en (3.20). Así, integrando sobre $[t, T]$ la expresión en (3.22) tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_t^T g(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) d\tau + V(T, \hat{x}(T)) - V(t, \hat{x}(t)) \\ &= \int_t^T g(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) d\tau + h(\hat{x}(T)) - V(t, x), \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$V(t, x) \leq \int_t^T g(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) d\tau + h(\hat{x}(T)). \quad (3.23)$$

De aquí, claramente, si usamos $u^*(t)$ y $x^*(t)$ en lugar de $\hat{u}(t)$ y $\hat{x}(t)$, respectivamente, la desigualdad anterior se convierte en la igualdad:

$$V(t, x) = \int_t^T g(x^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau + h(x^*(T)). \quad (3.24)$$

Por tanto, la función costo a partir de un instante cualquiera $0 \leq t < T$ y estado x cualquiera en este instante, correspondiente a $u^*(\tau)$, $\tau \in [t, T]$, es igual a $V(t, x)$ y además no supera ningún otro costo, a partir de t y estado x , correspondiente a cualquier otra acción de control admisible $\hat{u}(\tau)$, $\tau \in [t, T]$. O sea,

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \min_{u(\tau) \in \mathbf{U}} \left\{ \int_t^T g(x(\tau), u(\tau)) d\tau + h(x(T)) \right\}, \\ &= J^*(t, x), \quad \forall t, x. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ahora bien, con $t = 0$ en particular, la acción de control óptima $u^*(t)$, $t \in [0, T]$, produce el valor $J^*(x_0) := J^*(0, x(0))$ de la función de costo óptimo y así, de la expresión en (3.25), vemos que dicho valor puede ser calculado como $V(0, x(0))$.

3.1.3. Solución del problema LQR óptimo de horizonte finito

Consideremos el problema en (3.1). La ecuación HJB para este problema es dada por:

$$0 = \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{x'Q(t)x + u'R(t)u + \nabla_t V(t, x) + \nabla_x V(t, x)(Ax + Bu)\} \quad (3.26)$$

$$V(T, x) = x'Q_T x.$$

En concordancia con el funcional costo cuadrático en (3.1), propongamos una forma cuadrática para la solución $V(t, x)$:

$$V(t, x) = x'P(t)x, \quad \text{con } P(t) = P(t)', \quad \forall t. \quad (3.27)$$

Veamos bajo qué condiciones la expresión en (3.27) de hecho satisface la ecuación en (3.26). Tenemos que $\nabla_t V(t, x) = x'\dot{P}(t)x$ y $\nabla_x V(t, x) = 2P(t)x$. Luego, sustituyendo en (3.26) obtenemos:

$$0 = \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{x'Q(t)x + u'R(t)u + x'\dot{P}(t)x + 2x'P(t)Ax + 2x'P(t)Bu\}. \quad (3.28)$$

El mínimo en la expresión anterior es alcanzado derivando con relación a u e igualando a cero:

$$2R(t)u + 2B'P(t)x = 0,$$

de donde, despejando u , se obtiene:

$$u = \mu(t, x) = -R^{-1}(t)B'P(t)x. \quad (3.29)$$

Así, la sustitución en (3.28) del $u = \mu(t, x)$ obtenido produce:

$$0 = x'[Q(t) + P(t)BR^{-1}(t)B'P(t) + \dot{P}(t) + P(t)A + A'P(t) - 2P(t)BR^{-1}(t)B'P(t)]x,$$

para todo t, x , donde $2x'P(t)Ax = x'P(t)Ax + x'P(t)Ax = x'P(t)Ax + x'A'P(t)x = x'[P(t)A + A'P(t)]x$. Reduciendo términos semejantes obtenemos finalmente:

$$0 = x'[\dot{P}(t) + A'P(t) + P(t)A + Q(t) - P(t)BR^{-1}(t)B'P(t)]x.$$

Luego, una condición para que $V(t, x) = x'P(t)x$ sea la solución de la ecuación HJB en (3.26), es $P(t)$ satisfacer la conocida como *ecuación diferencial matricial de Riccati*:

$$\dot{P}(t) + A'P(t) + P(t)A + Q(t) - P(t)BR^{-1}(t)B'P(t) = 0, \quad (3.30)$$

con condición terminal $P(T) = Q_T$. Ahora bien, si lo que tenemos es la solución $P(t)$ de la ecuación diferencial matricial de Riccati en (3.30) entonces, claramente, la función $V(t, x) = x'P(t)x$ satisface la ecuación HJB en (3.26). Por tanto, por el Teorema De Suficiencia, se tiene:

$$J^*(t, x) = x'P(t)x, \quad \forall t, x,$$

y la acción de control óptima $u^*(t)$, $t \in [0, T]$, que minimiza el funcional en (3.1), es aquella obtenida de la expresión en (3.29), o sea:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'P(t)x(t), \quad t \in [0, T].$$

3.2. Solución del problema LQR óptimo de horizonte infinito

En esta sección consideraremos el problema (vea [15, 16]):

$$\min_{u \in \mathbf{U}} \int_0^\infty [x(t)'Q(t)x(t) + u(t)'R(t)u(t)] dt \quad (3.31)$$

$$\text{s.a.: } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

donde \mathbf{U} ahora es el conjunto admisible de las funciones entrada $u(t) = \mathcal{L}(t)x(t)$, $t \geq 0$, siendo $\mathcal{L}(t)$, como antes, una función de valor matricial de dimensión $m \times n$ para todo t . Asumimos además para este problema que $Q(t)$, $R(t)$, $t \geq 0$, son funciones matriciales continuas y acotadas sobre $[0, \infty)$, con $Q(t)$ y $R(t)$ semidefinida positiva y definida positiva, respectivamente, para todo $t \geq 0$.

No siempre es posible resolver el problema en (3.31) tal y como está propuesto.

Ejemplo 1. Consideramos el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

con funcional de costo definido por las matrices $R(t) \equiv 1$ y $Q(t) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, para

todo $t \geq 0$. Entonces, debemos encontrar un acción de control óptima $u^*(t)$, $t \geq 0$, que minimice:

$$\int_0^\infty \left[e^{2t} + \left(\int_0^t e^{t-\tau} u(\tau) d\tau \right)^2 + u^2(t) \right] dt. \quad (3.33)$$

Si quisiéramos minimizar el funcional en (3.33) de alguna manera, observamos que esta expresión toma un valor menor para $u \equiv 0$ con relación a cualquier otro valor de u ; a pesar de esto, la integral sigue siendo infinita. Este hecho se debe a las siguientes tres razones:

1. El estado $x_1(0) = 1$ es no controlable, cualquiera que sea t .
2. La trayectoria de estado correspondiente a la componente no controlable es ines-

table: $x_1(t) = e^t \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$.

3. La componente inestable de la trayectoria de estado del sistema influye en el valor del funcional de costo: $x_1^2(t) = e^{2t}$ es parte del integrando en (3.33).

Como vimos, es claro que cualquier problema del regulador lineal cuadrático óptimo de horizonte infinito en el cual se presentan situaciones como las descritas en 1, 2 y 3 del ejemplo anterior no puede tener como solución un valor óptimo finito. Por otro lado, si el problema tiene solución, una acción de control óptima que permita que el estado del sistema crezca ilimitadamente es de ninguna manera aceptable.

Ejemplo 2. Consideremos el sistema escalar $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$, $t \geq 0$, para el cual se pretende minimizar el funcional:

$$\int_0^\infty u^2(t) dt. \quad (3.34)$$

Es inmediato ver que la entrada $u \equiv 0$ en $[0, \infty)$ produce el valor óptimo del funcional anterior. Sin embargo, el sistema realimentado o de malla cerrada $\dot{x}(t) = x(t)$ obtenido de la entrada óptima $u \equiv 0$ es tal que $x(t) = x_0 e^t \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, y por tanto es inestable. Aquí, se presentan dos factores que contribuyen a esta dificultad:

1. El sistema de malla abierta original es inestable, pues $\int_0^t |e^{(t-\tau)}| d\tau = e^t - 1$, la cual no es una función acotada en $[0, \infty)$.
2. La trayectoria de estado no contribuye de manera alguna al índice de desempeño en (3.34). En cierto sentido, los estados del sistema no son observados por el funcional de costo.

La versión de horizonte infinito del problema LQR óptimo puede considerarse una extensión de la versión de horizonte finito de dicho problema cuando el horizonte T en (3.1) tiende a infinito. En este sentido, estamos interesados en estudiar el comportamiento asintótico de la solución del problema LQR óptimo en (3.1) cuando $T \rightarrow \infty$. Para ello, asumimos T un parámetro variable en el funcional cuadrático dado en (3.1), con $Q_T = 0$. Luego, para enfatizar la dependencia sobre el parámetro T en el problema, denotaremos por J_T^* la función valor o costo de continuación o, equivalentemente, consideraremos la notación V_T para la solución única de la ecuación HJB, o sea, $V_T = J_T^*$; denotaremos así mismo por $P(t, T)$ la solución de la ecuación diferencial matricial de Riccati en (3.30), con condición terminal $P(T, T) = 0$; además, denotaremos por u_T^* y x_T^* la acción de control óptima y la trayectoria de estado óptima, respectivamente, en

$[0, T]$. Con base en esto, tenemos entonces que:

$$u_T^*(t) = -R^{-1}(t)B'P(t, T)x_T^*(t), \quad (3.35)$$

y

$$V_T(t, x) = J_T^*(t, x) = x'P(t, T)x, \quad (3.36)$$

donde $V_T(0, x_0) = x_0'P(0, T)x_0$ es el costo óptimo del problema LQR óptimo de horizonte finito correspondiente al parámetro T .

3.2.1. Existencia de la solución

Para cada $t \in [0, T]$, estudiaremos el comportamiento de $P(t, T)$ como una función de T con el objetivo de establecer que $\lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T)$ existe bajo ciertas condiciones.

Teorema 10. Si el par (A, B) es controlable, entonces, para cada $t \in [0, T]$, existe el límite $\bar{P}(t) := \lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T)$. Más aún, $\bar{P}(t)$ satisface la ecuación diferencial de Riccati.

Demostración: Veamos que $V_T(t, x_T^*(t)) = x_T^*(t)'P(t, T)x_T^*(t)$, para $t \in [0, T]$ arbitrario (pero fijo), es una función creciente en términos del parámetro variable T . De hecho, si $T_2 > T_1$, entonces:

$$\begin{aligned} x_{T_2}^*(t)'P(t, T_2)x_{T_2}^*(t) &= V_{T_2}(t, x_{T_2}^*(t)) \\ &= \int_t^{T_2} (x_{T_2}^*(\tau)'Q(\tau)x_{T_2}^*(\tau) + u_{T_2}^*(\tau)'R(\tau)u_{T_2}^*(\tau)) d\tau \\ &= \int_t^{T_1} (x_{T_2}^*(\tau)'Q(\tau)x_{T_2}^*(\tau) + u_{T_2}^*(\tau)'R(\tau)u_{T_2}^*(\tau)) d\tau \\ &\quad + \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} (x_{T_2}^*(\tau)'Q(\tau)x_{T_2}^*(\tau) + u_{T_2}^*(\tau)'R(\tau)u_{T_2}^*(\tau)) d\tau}_{\geq 0} \\ &\geq \int_t^{T_1} (x_{T_2}^*(\tau)'Q(\tau)x_{T_2}^*(\tau) + u_{T_2}^*(\tau)'R(\tau)u_{T_2}^*(\tau)) d\tau \\ &\geq \int_t^{T_1} (x_{T_1}^*(\tau)'Q(\tau)x_{T_1}^*(\tau) + u_{T_1}^*(\tau)'R(\tau)u_{T_1}^*(\tau)) d\tau \\ &= V_{T_1}(t, x_{T_1}^*(t)) = x_{T_1}^*(t)'P(t, T_1)x_{T_1}^*(t). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por otro lado, del par (A, B) ser controlable se tiene que para algún $\bar{T} > t$ existe una entrada $\bar{u}(\tau)$, $\tau \in [t, \bar{T}]$, que transfiere el estado $x_T^*(t)$, en $\tau = t$, al origen en $\tau = \bar{T}$.

Ahora bien, definamos $\bar{u} \equiv 0$ en $[\bar{T}, \infty)$. De aquí, la acción de control \bar{u} produce una trayectoria de estado \bar{x} que satisface $\bar{x}(\tau) = 0$, $\tau \in [\bar{T}, \infty)$. Entonces para cualquier $T \geq \bar{T}$:

$$\begin{aligned}
x_T^*(t)' P(t, T) x_T^*(t) &= V_T(t, x_T^*(t)) \\
&= \int_t^T (x_T^*(\tau)' Q(\tau) x_T^*(\tau) + u_T^*(\tau)' R(\tau) u_T^*(\tau)) d\tau \\
&\leq \int_t^T (\bar{x}(\tau)' Q(\tau) \bar{x}(\tau) + \bar{u}(\tau)' R(\tau) \bar{u}(\tau)) d\tau \\
&= \int_t^{\bar{T}} (\bar{x}(\tau)' Q(\tau) \bar{x}(\tau) + \bar{u}(\tau)' R(\tau) \bar{u}(\tau)) d\tau
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Como la última integral no depende de T , está provee una cota superior uniforme para la función de costo óptimo V_T cualquiera que sea $T > 0$. De esta manera, como V_T es creciente y acotada, existe el límite de V_T cuando $T \rightarrow \infty$. A partir de esto, mostremos entonces que existe también $\lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T)$. Como $x_T^*(t)$ es cualquiera, considere en particular $x_T^*(t) = e_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$ cualquiera, donde e_i es elemento i -ésimo de la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n . Entonces, $x_T^*(t)' P(t, T) x_T^*(t) = e_i' P(t, T) e_i = P_{ii}(t, T)$, de donde, tomando límite cuando $T \rightarrow \infty$, se tiene que $\lim_{T \rightarrow \infty} P_{ii}(t, T)$ existe para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Más aún, si $x_T^*(t) = e_i + e_j$, para $i \neq j$ cualesquiera en $\{1, \dots, n\}$, dada la simetría de $P(t, T)$ tenemos que:

$$x_T^*(t)' P(t, T) x_T^*(t) = (e_i + e_j)' P(t, T) (e_i + e_j) = P_{ii}(t, T) + 2P_{ij}(t, T) + P_{jj}(t, T), \tag{3.39}$$

de donde,

$$P_{ij}(t, T) = \frac{1}{2} [(e_i + e_j)' P(t, T) (e_i + e_j) - P_{ii}(t, T) - P_{jj}(t, T)],$$

y así, tenemos que $\lim_{T \rightarrow \infty} P_{ij}(t, T)$ también existe, pues el límite cuando $T \rightarrow \infty$ en el miembro derecho de la igualdad anterior existe. En conclusión, $\lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T)$ existe y digamos que este sea una matriz $\bar{P}(t)$, para cada $t \in [0, T]$. Finalmente, veamos que $\bar{P}(t)$ satisface la ecuación diferencial matricial de Riccati en (3.30). De hecho, dados $T > 0$ y Q_T semidefinida negativa, denotamos por $\Pi(t, Q_T, T)$ la solución de la ecuación diferencial en (3.30) para $0 \leq t < T$, con condición terminal Q_T en $t = T$. Así, para cualquiera que sea $s \in [0, T]$, con $t \leq s \leq T$, tenemos:

$$\Pi(t, 0, T) = \Pi(t, \Pi(s, 0, T), s).$$

De esta manera, usando el Teorema 4, la solución de la ecuación en (3.30) es continua

con relación a sus parámetros y por tanto:

$$\begin{aligned}\bar{P}(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi(t, 0, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi(t, \Pi(s, 0, T), s) = \Pi(t, \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi(s, 0, T), s) \\ &= \Pi(t, \bar{P}(s), s).\end{aligned}\tag{3.40}$$

3.2.2. Optimalidad de la solución

Introducimos aquí la notación $J_\infty^*(t, x)$ para el valor óptimo de la función de costo cuadrático de horizonte infinito. Esto es,

$$J_\infty^*(t, x) = \min_{u \in \mathbf{U}} \int_t^\infty (x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u(\tau)'R(\tau)u(\tau))d\tau.\tag{3.41}$$

Teorema 11. $J_\infty(t, x(t)) = x(t)' \bar{P}(t)x(t)$, con $u^*(t) = -R^{-1}(t)B' \bar{P}(t)x(t)$, $t \geq 0$.

Demostración: Para $t \geq 0$ arbitrario, evaluamos la derivada total con respecto a τ de la función $\tau \mapsto x(\tau)' \bar{P}(\tau)x(\tau)$, donde $\dot{x}(\tau) = Ax(\tau) + Bu^*(\tau)$, $\tau \geq t$. Esto es:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} (x(\tau)' \bar{P}(\tau)x(\tau)) &= \frac{d}{d\tau} (x(\tau)' \bar{P}(\tau)) x(\tau) + x(\tau)' P(\tau) \frac{dx(\tau)}{d\tau} \\ &= \left[\dot{x}(\tau)' \bar{P}(\tau) + x(\tau)' \dot{\bar{P}}(\tau) \right] x(\tau) + x(\tau)' \bar{P}(\tau) \dot{x}(\tau) \\ &= \left[(Ax(\tau) - BR^{-1}(\tau)B' \bar{P}(\tau)x(\tau))' \bar{P}(\tau) + x(\tau)' \dot{\bar{P}}(\tau) \right] x(\tau) \\ &\quad + x(\tau)' \bar{P}(\tau) (Ax(\tau) - BR^{-1}(\tau)B' \bar{P}(\tau)x(\tau)) \\ &= x(\tau)' \left[A \bar{P}(\tau) - \bar{P}(\tau) B R^{-1}(\tau) B' \bar{P}(\tau) + \dot{\bar{P}}(\tau) + \bar{P}(\tau) A \right. \\ &\quad \left. - \bar{P}(\tau) B R^{-1}(\tau) B' \bar{P}(\tau) \right] x(\tau)\end{aligned}\tag{3.42}$$

y, como $\bar{P}(\tau)$ satisface la ecuación de Riccati, o sea:

$$\dot{\bar{P}}(\tau) = -A \bar{P}(\tau) - A P(\tau) - Q(\tau) + \bar{P}(\tau) B R^{-1}(\tau) B' \bar{P}(\tau),$$

obtenemos finalmente que:

$$-\frac{d}{dt} (x(\tau)' \bar{P}(\tau)x(\tau)) = x(\tau)' [Q(\tau) + \bar{P}(\tau) B R^{-1}(\tau) B' \bar{P}(\tau)] x(\tau).\tag{3.43}$$

Ahora bien, evaluamos el funcional de costo cuadrático sobre un intervalo $[t, T]$, con $T > t$ cualquiera, en términos de $u^*(t)$ y $x(t)$, solución correspondiente a $\dot{x}(t) =$

$Ax(t) + Bu^*(t)$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
& \int_t^T [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u^*(\tau)'R(\tau)u^*(\tau)]d\tau \\
&= \int_t^T x(\tau)'[Q(\tau) + \bar{P}(\tau)BR^{-1}(\tau)B'\bar{P}(\tau)]x(\tau)d\tau \\
&= - \int_t^T \frac{d}{d\tau}(x(\tau)'\bar{P}(\tau)x(\tau))d\tau \\
&= x(t)'\bar{P}(t)x(t) - x(T)'\bar{P}(T)x(T) \\
&\leq x(t)'\bar{P}(t)x(t),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

donde la última desigualdad proviene del hecho de que $\bar{P}(T)$ es una matriz semi-definida positiva. De aquí, tomando límite cuando $T \rightarrow \infty$ en la desigualdad anterior se produce:

$$\int_t^\infty [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u^*(\tau)'R(\tau)u^*(\tau)]d\tau \leq x(t)'\bar{P}(t)x(t),$$

con lo cual el funcional de costo cuadrático de horizonte infinito, a la izquierda de la desigualdad anterior, es finito. Por otro lado,

$$x(t)'P(t, T)x(t) = J_T^*(t, x(t)) \leq \int_t^T [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u^*(\tau)'R(\tau)u^*(\tau)]d\tau,$$

y entonces,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x(t)'P(t, T)x(t) = x(t)'\bar{P}(t)x(t) \leq \int_t^\infty [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u^*(\tau)'R(\tau)u^*(\tau)]d\tau.$$

Así,

$$\int_t^\infty [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u^*(\tau)'R(\tau)u^*(\tau)]d\tau = x(t)'\bar{P}(t)x(t).$$

Finalmente, veamos que $J_\infty^*(t, x(t)) = x(t)'\bar{P}(t)x(t)$. Para ello, mostremos que:

$$J_\infty^*(t, x(t)) = \int_t^\infty [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u^*(\tau)'R(\tau)u^*(\tau)]d\tau.$$

En efecto, sabemos que:

$$J_\infty^*(t, x(t)) \leq \int_t^\infty [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u^*(\tau)'R(\tau)u^*(\tau)]d\tau.$$

Luego, afirmamos que no es posible asumir la desigualdad anterior de forma estricta. De hecho, si así fuera tendríamos que para alguna acción de control \tilde{u} , diferente de u^* , se cumpliría que:

$$\int_t^\infty [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + \tilde{u}(\tau)'R(\tau)\tilde{u}(\tau)]d\tau = J_\infty^*(t, x(t)). \quad (3.45)$$

También, como $J_T^*(t, x(t)) = x(t)'P(t, T)x(t)$, entonces:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T^*(t, x(t)) = x(t)'\bar{P}(t)x(t) = \int_t^\infty [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u^*(\tau)'R(\tau)u^*(\tau)]d\tau.$$

De donde,

$$\int_t^\infty [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + \tilde{u}^*(\tau)'R(\tau)\tilde{u}^*(\tau)]d\tau < \lim_{T \rightarrow \infty} J_T^*(t, x(t))$$

Luego, por la ley de permanencia del signo, tenemos que existe $T > 0$ tal que:

$$\int_t^T [x(\tau)'Q(\tau)x(\tau) + u^*(\tau)'R(\tau)u^*(\tau)]d\tau < J_T^*(t, x(t)),$$

lo cual es una contradicción pues, para cualquier $T > 0$, $J_T^*(t, x(t))$ es valor mínimo sobre todos los funcionales de costo cuadrático. Con esto, concluimos:

$$J_\infty^*(t, x(t)) = x(t)'\bar{P}(t)x(t). \quad (3.46)$$

3.3. Estabilidad en el problema LQR óptimo invariante en el tiempo

Estamos interesados aquí en determinar si sistemas invariantes en el tiempo se corresponden con acciones de control lineales invariantes en el tiempo de manera tal que el sistema de malla cerrada sea estable, bajo la hipótesis ahora de que el funcional de costo cuadrático de horizonte infinito es invariante en el tiempo. Esto es, para cada $t \geq 0$, asumiremos $Q(t) \equiv Q$ y $R(t) \equiv R$; o sea, las matrices de ponderación son de valor constante, con Q semi-definida positiva y R definida positiva. Así, el problema

en (3.31) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathbf{U}} \int_0^\infty [x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t)] dt \\ \text{s.a.: } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (3.47)$$

En general, asumiendo la hipótesis de controlabilidad del par (A, B) , vimos por el Teorema 10 que, para $t \geq 0$, existe $\lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T)$, donde $P(t, T)$ es la solución de la ecuación diferencial matricial de Riccati con condición terminal $P(T, T) = 0$. Además, se obtuvo que tal límite es una función de t denotada por $\bar{P}(t)$ que satisface la ecuación diferencial matricial de Riccati para toda condición terminal semi-definida positiva y que genera la acción de control lineal óptima $u^*(t)$ obtenida en el Teorema 11. En este sentido para el caso del regulador invariante en el tiempo veremos que se obtiene una acción de control lineal óptima invariante en el tiempo y además estabilizante. De hecho, dada la invariancia en el tiempo tanto del sistema como del regulador, se tiene que $P(t, T)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ arbitrario, solución de la Riccati invariante en el tiempo:

$$\dot{P}(t, T) + AP(t, T) + A'P(t, T) - P(t, T)BR^{-1}BP(t, T) + Q = 0, \quad (3.48)$$

con condición terminal $P(T, T) = 0$, es tal que:

$$P(t, T) = P(0, T - t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.49)$$

Por tanto, el límite cuando $T \rightarrow \infty$ de la matriz en (3.49) no depende de t y, en consecuencia, tal límite es una matriz constante, digamos \bar{P} . Esto es,

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} P(0, T - t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} P(0, T - t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} P(t, T). \quad (3.50)$$

Con esto, como \bar{P} satisface también la ecuación diferencial matricial de Riccati, tenemos en particular que:

$$\bar{P}A + A'\bar{P} - \bar{P}BR^{-1}B'\bar{P} + Q = 0, \quad (3.51)$$

la cual es conocida como ecuación algebraica de Riccati, y la acción de control óptima correspondiente es dada entonces por $u^*(t) = -R^{-1}B'\bar{P}x(t)$, $t \geq 0$. Ahora bien, como vimos en el Ejemplo 2, una acción de control óptima que permita que el estado del sistema crezca ilimitadamente es de ninguna manera aceptable. En consecuencia, es natural pensar cuál condición adicional en el sistema impediría una situación indeseable

como la inestabilidad. Es bien sabido que toda matriz Q simétrica semi-definida positiva es posible factorizarla como $Q = C'C$ (vea por ejemplo [17]) para alguna matriz C de dimensión $\ell \times n$, donde $\ell \leq n$. Introduciendo la ecuación auxiliar de salida,

$$y(t) = Cx(t),$$

el funcional de costo cuadrático se reescribe como:

$$\int_0^\infty (y(t)'y(t) + u(t)'Ru(t)) dt.$$

Teorema 12. Si el par (A, C) es observable, el sistema invariante de malla cerrada,

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B'\bar{P})x(t), \quad (3.52)$$

es globalmente exponencialmente estable, o equivalentemente, globalmente asintóticamente estable.

Demostración: Mostraremos que los autovalores de la matriz $A - BR^{-1}B'\bar{P}$ tienen todos parte real negativa, con lo cual, por el Teorema 5, el sistema en (3.52) es globalmente exponencialmente estable, o lo que es lo mismo, la matriz $A - BR^{-1}B'\bar{P}$ es de estabilidad. Para ello, observe que la matriz \bar{P} , solución de la ecuación algebraica de Riccati, satisface también:

$$(A - BR^{-1}B'\bar{P})'\bar{P} + \bar{P}(A - BR^{-1}B'\bar{P}) = -C'C - \bar{P}BR^{-1}B'\bar{P},$$

donde $Q = C'C$. Considere $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $A - BR^{-1}B'\bar{P}$, con autovector correspondiente $v \neq 0$; esto es, $(A - BR^{-1}B'\bar{P})v = \lambda v$. Entonces,

$$\begin{aligned} v^* \left[(A - BR^{-1}B'\bar{P})'\bar{P} + \bar{P}(A - BR^{-1}B'\bar{P}) \right] v &= -v^*(C'C + \bar{P}BR^{-1}B'\bar{P})v \\ &= -\|Cv\|^2 - v^*\bar{P}BR^{-1}B'\bar{P}v, \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde v^* denota el vector transpuesto conjugado de v . Así, obtenemos:

$$\bar{\lambda}v^*\bar{P}v + \lambda v^*\bar{P}v = 2 \operatorname{Re}\lambda v^*\bar{P}v = -\|Cv\|^2 - v^*\bar{P}BR^{-1}B'\bar{P}v, \quad (3.54)$$

donde $\bar{\lambda}$ y $\operatorname{Re}\lambda$ denotan, respectivamente, el conjugado y la parte real del complejo λ . Luego, dada la observabilidad del par (A, C) , tenemos entonces que, usando la prueba de autovalores para la observabilidad, v no está en el núcleo de C , o sea, $\|Cv\| > 0$.

Por otro lado, dada la positividad de R , tenemos también que $v^* \bar{P} B R^{-1} B' \bar{P} v \geq 0$. Por tanto:

$$2 \operatorname{Re} \lambda v^* \bar{P} v < 0,$$

con lo cual $\operatorname{Re} \lambda < 0$, concluyendo así que la matriz $A - B R^{-1} B' \bar{P}$ es de estabilidad como queríamos.

Observación. Dada la observabilidad de (A, C) , afirmamos que la matriz \bar{P} es definida positiva. En efecto, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fuese tal que $x_0' \bar{P} x_0 = 0$, entonces tendríamos que:

$$\int_0^\infty (x(t)' C' C x(t) + u^*(t)' R u^*(t)) dt = 0.$$

La igualdad anterior solo es posible si $Cx(t) = 0$, $t \geq 0$, y $u^*(t) \equiv 0$, pues R es definida positiva. De aquí, si $x(0) = x_0$, tendríamos que $Cx(t) = C e^{At} x_0 = 0$, $t \geq 0$. Ahora bien, como (A, C) es observable, se tiene en consecuencia que $x_0 = 0$, lo cual concluye que \bar{P} , siendo semidefinida positiva, es ahora definida positiva.

Capítulo 4

Resultados numéricos

En este capítulo presentaremos distintos métodos de solución del problema LQR óptimo de horizonte infinito, consistiendo éstos en la determinación de la matriz \bar{P} que satisface la ecuación matricial algebraica de Riccati en (3.51) que a su vez permite establecer la entrada de control óptima $u^*(t) = \mathcal{L}x(t)$, $t \geq 0$, en términos de la *matriz de ganancia* $\mathcal{L} = -R^{-1}B'\bar{P}$. Posteriormente, usaremos dichos métodos en la solución de un problema de diseño de una órbita de control óptima para un satélite de comunicación, presente en [7]. Los métodos a ser implementados están basados en: 1. La solución por diagonalización del problema en (3.47) reportada en [8]; 2. Una técnica basada en la determinación de \bar{P} a partir de la solución de una ecuación en diferencias de Riccati presente en [9]; y, 3. El uso del comando `lqr` de MATLAB[®] [10]. En la siguiente sección veremos en qué consisten los primeros dos métodos.

4.1. Solución numérica del problema LQR óptimo de horizonte infinito

4.1.1. Solución por diagonalización

Este método fue extraído de [8] y consiste en el abordaje de la solución del problema LQR en (3.1) invariante en el tiempo, con horizonte finito T considerado como parámetro y asumiendo la factorización $Q = C'C$. Allí, usando principios del cálculo

variacional, se tiene que la trayectoria óptima $x_T^*(t)$ satisface:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_T^*(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} x_T^*(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

con Z la matriz constante,

$$Z = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -C'C & -A' \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

y $p(t)$, denominada *variable co-estado*, siendo relacionada con $x_T^*(t)$ por:

$$p(t) = \Pi(t, Q_T, T)x_T^*(t), \quad (4.3)$$

donde $\Pi(t, Q_T, T)$ es la solución de la Riccati en (3.30), con condición terminal, en $t = T$, igual a Q_T . Luego, si en (4.3) se escoge $Q_T = \bar{P}$, se obtiene:

$$\Pi(t, \bar{P}, T) = \Pi(t, \lim_{\ell \rightarrow \infty} \Pi(T, 0, \ell), T) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \Pi(t, \Pi(T, 0, \ell), T) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \Pi(t, 0, \ell) = \bar{P}. \quad (4.4)$$

Con esto, la solución del sistema en (4.1) puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} x_T^*(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = e^{Zt} \begin{bmatrix} x_0 \\ \bar{P}x_0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.5)$$

Teorema 13 (Adaptado de [8]). Considere el problema en (3.47) y suponga que el par (A, B) es controlable y el par (A, C) observable. Asuma además que la matriz Z en (4.2) tiene $2n$ autovalores distintos. Entonces:

- (a) Si λ es un autovalor de Z , $-\lambda$ también lo es. La matriz Z no tiene autovalores con parte real igual a cero.
- (b) Los autovalores asociados a la dinámica de estado estacionario de la trayectoria óptima en (3.52) son aquellos autovalores de Z con parte real negativa.
- (c) Si Z es diagonalizada en la forma:

$$Z = W \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix} W^{-1}, \quad (4.6)$$

donde la matriz diagonal Λ tiene como elementos diagonales los autovalores de

Z con parte real positiva, la solución de estado estacionario \bar{P} de la ecuación algebraica de Riccati en (3.51) puede ser escrita como:

$$\bar{P} = W_{22}W_{12}^{-1} = -V_{12}^{-1}V_{11}, \quad (4.7)$$

con W_{ij} y V_{ij} , $i, j = 1, 2$, siendo obtenidas al particionar las matrices W y $V := W^{-1}$, respectivamente.

(d) La trayectoria óptima de estado estacionario dada en (3.52) puede ser escrita como:

$$x(t) = W_{12}e^{-\Lambda t}W_{12}^{-1}x_0. \quad (4.8)$$

Ahora bien, los pasos que nos permiten determinar \bar{P} , evitando el hecho de lidiar con aritmética compleja a través de una transformación lineal no singular, son los siguientes (vea [8]):

Paso 1. Construya la matriz Z y calcule aquellos autovectores de Z que correspondan a autovalores con parte real negativa.

Paso 2. Construya, a partir de los n autovectores encontrado en el Paso 1, una matriz

$$\begin{bmatrix} \tilde{W}_{12} \\ \tilde{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

donde \tilde{W}_{12} y \tilde{W}_{22} son $n \times n$ submatrices, tales que: si w es un autovector real, entonces w es una de las columnas de la matriz en (4.9); y, si w y \bar{w} son un par de autovectores conjugados, entonces $\text{Re}w$ es una columna de la matriz en (4.9) y $\text{Im}w$ es otra columna.

Paso 3. Calcule \bar{P} como:

$$\bar{P} = \tilde{W}_{22}\tilde{W}_{12}^{-1}. \quad (4.10)$$

4.1.2. Solución a través de un método iterativo

Introduciremos aquí un método iterativo de solución al problema LQR óptimo de horizonte infinito e invariante en el tiempo presentado en [9]. La estrategia de este método consiste en obtener la solución \bar{P} de la ecuación matricial algebraica de Riccati en (3.51) (con $Q = C'C$) a través de la convergencia de una sucesión de matrices obtenidas recursivamente de una ecuación matricial en diferencias de Riccati, dada una

condición inicial cualquiera simétrica semidefinida positiva. El algoritmo para obtener \bar{P} a través de este método es presentado en el siguiente teorema.

Teorema 14 (Adaptado de [9]). Sean (A, B) controlable y (A, C) observable. Sea \bar{P} la única solución positiva semidefinida en la ecuación (3.51) con $Q = C'C$. Entonces, para cualquier real $\alpha > 0$ que no sea igual a un autovalor real positivo de A , tenemos:

$$\bar{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma(k),$$

donde $\Sigma(\cdot)$ es la solución de la ecuación matricial en diferencias:

$$\Sigma(k+1) = F'\Sigma(k)F - (F'\Sigma(k)G + H)(U + G'\Sigma(k)G)^{-1}(G'\Sigma(k)F + H') + S, \quad (4.11)$$

cuyos coeficientes están relacionados con los de la ecuación en (3.51) por:

$$\begin{aligned} F &= (\alpha I - A)^{-1}(\alpha I + A), \\ G &= \alpha\sqrt{2}(\alpha I - A)^{-1}B, \\ S &= 2\alpha(\alpha I - A')^{-1}C'C(\alpha I - A)^{-1}, \\ H &= \frac{\sqrt{2}}{2}SB, \\ U &= \alpha R + \frac{1}{2}B'SB. \end{aligned}$$

La solución de la ecuación en (4.11) converge a \bar{P} para cualquier condición inicial simétrica semidefinida positiva $\Sigma(0)$.

4.2. Ejemplo ilustrativo

En esta sección presentaremos la implementación de las distintas técnicas mencionados en la sección anterior, con el fin resolver un problema LQR de horizonte infinito invariante en el tiempo extraído de [7] y tratando del diseño de una órbita de control óptima para un satélite de comunicación. El movimiento de un satélite de comunicaciones dependen de la emisión y recepción de ondas electromagnéticas (desde y hacia radares situados en la superficie terrestre). A fin de no tener que estar moviendo estos radares para apuntar continuamente al satélite, se intenta que éste ocupe una posición fija relativamente a ellos. Ahora, los satélites de comunicaciones están en continua perturbación debido a diferentes fuerzas que interactúan con el objeto en el espacio.

El diseño y el análisis de un control óptimo nos permite encontrar y controlar la órbita geoestacionaria óptima. La teoría estudiada en este trabajo nos permite asegurar que con el sistema orbital del satélite controlado y estable podemos asegurar un alto rendimiento de control por parte del satélite como lo es demostrado en [7]. Para complementar su investigación y trabajo, ilustraremos la equivalencia de los métodos mencionados en el capítulo anterior y mostrar las soluciones numéricas para el diseño planteado. El análisis de esta situación a estudiar depende de la obtención del modelo espacio-estado no lineal de la dinámica orbital del satélite artificial, el cual deberá ser linealizado para luego determinar la trayectoria de dicha órbita a partir del modelo linealizado.

La obtención del modelo no lineal será dada por medio de leyes físicas clásicas. Luego se presentará el sistema ya linealizado. Posteriormente, para simplificar el modelo supondremos que el movimiento del satélite se hace en el plano del Ecuador. Tomaremos el centro de la tierra como origen de coordenadas, usaremos coordenadas polares (r, θ) . Denotamos la masa de la tierra por M_T ($5,973 \times 10^{19} \text{ } kg$, aproximadamente), M_S como masa del satélite, por G la constante de gravitación universal ($6,67428 \times 10^{11} \text{ } NM^2/Kgr^2$) y por Ω la velocidad angular de la tierra ($7,27 \times 10^{-5} \text{ } rad/seg$). Supondremos que el satélite esta dotado de 2 propulsores que pueden impulsarlos en la dirección radial y tangencial con fuerzas F_1 y F_2 . La fuerza gravitacional ejercida sobre el satélite está dada por la ley clásica de Newton

$$F_g = M g_h, \quad (4.12)$$

entendida mediante las expresiones $F_g = |F_t - F_s|$ y $M = \frac{M_T M_S}{r^2}$, donde g_h puede verse como la aceleración de la gravedad a la altura h con respecto al nivel del mar, F_t la fuerza ejercida por el planeta tierra y F_s la fuerza ejercida por el satélite. Además la variabilidad del campo gravitatorio de la tierra con la variabilidad de la altitud puede ser escrita como:

$$g_h = g_0 \left(\frac{R}{R + h} \right)^2, \quad (4.13)$$

donde g_0 es la aceleración de la gravedad al nivel del mar y R es el radio de la tierra. La ecuación en (4.2) es una variación de la ecuación clásica

$$g = -\frac{GM}{r^2} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \quad (4.14)$$

Ahora, si $r(t)$ es la distancia desde el centro de la tierra hasta el centro del satélite, entonces:

$$R + h = r(t). \quad (4.15)$$

Usando la ecuación (4.12) y (4.2):

$$F_g = Mg \left(\frac{R}{R + h} \right)^2, \quad (4.16)$$

y por (4.15) en (4.16), obtenemos:

$$F_g = Mg \left(\frac{R}{r(t)} \right)^2. \quad (4.17)$$

Este sistema implica un movimiento circular con excentricidad menos que 1 alrededor de un centro. Asumamos que el sistema está preparado para aceptar una variable F_1 como dirección radial y F_2 en la dirección tangencial, vea Figura 4.1.

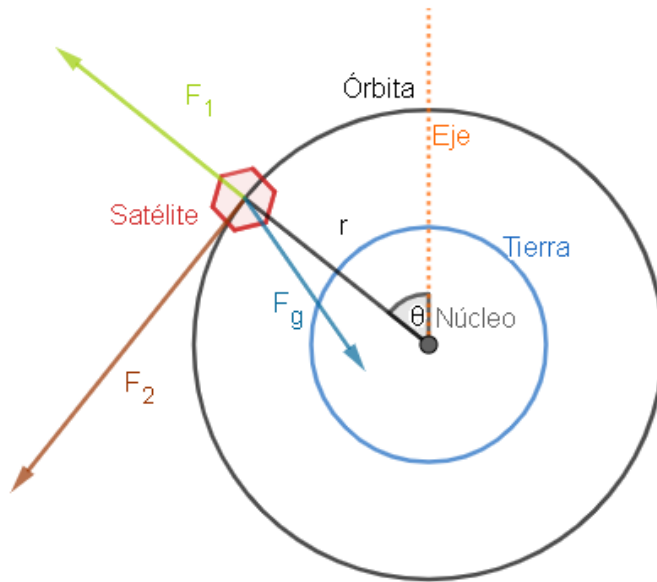


Figura 4.1: Ilustración del comportamiento orbital del movimiento del satélite.

Por conveniencia describimos esta representación con la representación exponencial de los complejos. Luego, denotamos:

$r(t)$ como el vector posición del satélite.

$$r(t) = re^{i\theta}$$

F_1 como el vector empuje o impulso radial.

$$F_1 = F_1 re^{i\theta} \quad (4.18)$$

F_2 como el vector empuje o impulso tangencial.

$$F_2 = F_2 re^{i(\theta+90^\circ)} \quad (4.19)$$

F_g como el vector de fuerza gravitacional.

$$F_g = -Mg \left(\frac{R}{r} \right)^2 re^{i\theta} \quad (4.20)$$

F como el vector fuerza ficticia o fuerza de inercia.

$$F = Ma \quad (4.21)$$

Ahora bien, por las leyes de Newton, tenemos que:

$$F_1 + F_2 + F_g = Ma. \quad (4.22)$$

Así, usando (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) y (4.22) obtenemos:

$$F_1 re^{i\theta} + F_2 re^{i(\theta+90^\circ)} + -Mg \left(\frac{R}{r} \right)^2 re^{i\theta} = \frac{Md^2r(t)}{dt^2} re^{i\theta}.$$

Dividiendo a ambos lados de la ecuación anterior por r y usando relaciones trigonométricas, se tiene:

$$F_1 e^{i\theta} + F_2 i e^{i\theta} + -Mg \left(\frac{R}{r} \right)^2 e^{i\theta} = \frac{Md^2r(t)}{dt^2} e^{i\theta}$$

Recordemos que, $F_2(e^{i(\theta+90^\circ)}) = F_2(e^{i\theta}e^{i90^\circ})$. Pero, $e^{i90^\circ} = \cos(90^\circ) + i\sin(90^\circ) = 0 + 1i$ por lo que $e^{i90^\circ} = i$. Ahora,

$$F_1e^{i\theta} + F_2ie^{i\theta} + -Mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 e^{i\theta} = M(\ddot{r}e^{i\theta} + 2i\dot{r}\ddot{\theta}e^{i\theta} + ir\ddot{\theta}e^{i\theta} - r\dot{\theta}^2e^{i\theta}). \quad (4.23)$$

Procediendo a explicar la parte derecha de la ecuación tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r(t)}{dt^2}e^{i\theta} &= \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dr(t)}{dt}e^{i\theta}\right) &= \\ \frac{d}{dt}\left(\dot{r}e^{i\theta} + i\dot{\theta}re^{i\theta}\right) &= \\ \ddot{r}e^{i\theta} + i\dot{r}\dot{\theta}e^{i\theta} + i(\dot{r}\dot{\theta}e^{i\theta} + r(\ddot{\theta}e^{i\theta} + i\dot{\theta}\dot{\theta}e^{i\theta})) &= \\ \ddot{r}e^{i\theta} + i\dot{r}\dot{\theta}e^{i\theta} + i\dot{r}\dot{\theta}e^{i\theta} + ir\ddot{\theta}e^{i\theta} + i^2\dot{r}\dot{\theta}^2e^{i\theta} &= \\ \ddot{r}e^{i\theta} + 2i\dot{r}\dot{\theta}e^{i\theta} + ir\ddot{\theta}e^{i\theta} - \dot{r}\dot{\theta}^2e^{i\theta} \end{aligned}$$

Cancelando $e^{i\theta}$ e igualando la parte real y la parte imaginaria de la ecuación en (4.23), tenemos:

$$\begin{cases} F_1 = M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + Mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 \\ F_2 = 2M\dot{r}\dot{\theta} + Mr\ddot{\theta} \end{cases} \quad (4.24)$$

Para simplificar eventuales problemas numéricos, las unidades de tiempo, distancia y las variables de fuerza son normalizadas a magnitudes adimensionales:

$$\begin{cases} \tau = \frac{t}{\frac{R}{g}} \\ \rho = \frac{r}{R} \\ u_1 = \frac{F_1}{Mg} \\ u_2 = \frac{F_2}{Mg} \end{cases} \quad (4.25)$$

Con esto, de (4.24) y (4.25), se obtiene:

$$\begin{cases} u_1 = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 + \frac{1}{\rho^2} \\ u_2 = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \end{cases} \quad (4.26)$$

Para la obtención del modelo no lineal de la dinámica orbital del satélite artificial, el estado y vectores de entrada del modelo son escogidos de la siguiente manera:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

donde $x_1 = \rho, x_2 = \theta, x_3 = \dot{x}_1 = \dot{\rho}, x_4 = \dot{x}_2 = \dot{\theta}, \dot{x}_3 = \ddot{\rho}, \dot{x}_4 = \ddot{\theta}$. Entonces, un modelo de espacio-estado no lineal $\dot{x} = f(x, u)$ de la dinámica orbital del satélite es obtenido como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_4^2 - \frac{1}{x_1} u_2 \\ \dot{x}_4 = -\frac{2x_3 x_4}{x_1} + \frac{u_2}{x_1} \end{cases} \quad (4.27)$$

En procura de obtener un modelo linealizado, es asumido que el satélite se mantiene en órbita geoestacionaria en torno a la tierra, donde la velocidad angular de la órbita del satélite es $\omega = 15,04^\circ$ por hora. Es supuesto además que el estado de equilibrio se mantiene solo por la fuerza de gravedad, por lo que las componentes de estado de dos vectores de empuje son cero. Para la reducción del consumo de energía, los empujes solamente se aplican al tomar medidas correctivas transitorias y así eliminar el error, luego el estado estacionario del satélite es $u_1 = 0; u_2 = 0; x_3 = 0; x_4$ (velocidad angular)=constante.

En [7] es presentada la linealización del sistema (4.27) alrededor de la solución de estado estacionario para obtener el sistema en forma de sistema de control lineal $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. En este trabajo no se presenta cómo se efectúa la linealización de un sistema no lineal (véase en [11] para información al respecto). La linealización de la función que rige la dinámica del sistema en (4.27) se efectúa en torno de $x = [x_1 \ 0 \ 0 \ x_4]^T$ y $u = [0 \ 0]^T$:

$$\hat{f}(x, u) = \partial f_x(x, u)x + \partial f_u(x, u)u \equiv Ax(t) + Bu(t), \quad (4.28)$$

donde, ∂f_x y ∂f_u denotan las derivadas parciales de f con respecto a x y u respectiva-

mente, y además:

$$A = \partial f_x(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4^2 + \frac{2}{x_1} & 0 & 0 & 2x_1x_4 \\ 0 & 0 & \frac{-2x_4}{x_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \partial f_u(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Ahora bien, $\omega = 15,0^\circ/h = \pi/43200$ radian/seg, corresponde a una velocidad angular normalizada $x_4 = (R/g)^{1/2}\omega = 0,0587$ donde R (radio de la tierra) = $6879km$. Además $x_1 = \rho = 6,6108$, y por último $x_2 = \theta(t)$, donde θ es la posición angular del satélite. Luego, el reemplazo de estos valores en las expresiones en (4.29) produce:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,01036 & 0 & 0 & 0,7757 \\ 0 & 0 & -0,01775 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0,1513 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u \quad (4.30)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u \quad (4.31)$$

En lo que sigue, se presenta un funcional de costo a ser minimizado a través de una entrada de control que nos proporcione a su vez una trayectoria de estado estable. El funcional de costo V es definido como:

$$\begin{aligned} V(x(t), u(t), t) &= \int_0^\infty e(t)' Q e(t) + u(t)' R u(t) dt \\ &= \int_0^\infty [(z(t) - x(t))' Q (z(t) - x(t)) + u(t)' R u(t)] dt, \end{aligned}$$

donde $x(t)$ es el vector estado n -dimensional, $y(t)$ es el vector de salida m -dimensional, $z(t)$ es el vector de referencia m -dimensional, $u(t)$ es el vector de control r -dimensional, y $e(t) = z(t) - x(t)$ es el vector error de rastreamiento. Es muy común ver en situaciones reales como los sistemas orbitales de satélites son sometidos a perturbaciones

que alteran el comportamiento de la planta del sistema e intervienen en los procesos afectando directamente el estado original. Observemos que, si el propósito es mantener mantenemos el estado del sistema cerca del estado cero, entonces $z(t) = 0$, $C = I$, y el error $e(t) = 0 - x(t)$ es, en sí mismo, el estado del sistema. Se presenta entonces un funcional de costo adecuado a este nuevo escenario:

$$V = \int_0^\infty [x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t)]dt.$$

Las matrices Q y R son conocidas como matriz de ponderación del error y matriz de ponderación del control, respectivamente. Lo que se desea es que el error $e(t)$ se mantenga lo más pequeño posible; por tanto, la integral de la expresión $\frac{1}{2}e(t)'Qe(t)$ debería ser no negativa y muy pequeña, lo cual exige que Q deba ser semidefinida positiva. Por otro lado, la expresión $\frac{1}{2}u'Ru$ indica que se tendría que pagar un costo más alto por un mayor esfuerzo de control; así, como el costo de control debe ser una cantidad positiva, la matriz R debe ser una matriz definida positiva. En [7] es aclarada la importancia de saber escoger estas matrices; en este trabajo no se hará énfasis en el proceso que se sugiere para elegir tales matrices. Tomamos la elección hecha en [7], la cual se basa en la regla de Bryson's. Acorde con la regla, se eligen las diagonales de Q y R , de manera que:

$$\begin{cases} Q_{ii} = \frac{1}{\text{valor máx aceptable } x_i^2}, & i \in \{1, 2, \dots, l\}, \\ R_{jj} = \rho \left[\frac{1}{\text{valor máx aceptable } u_j^2} \right] & j \in \{1, 2, \dots, k\}, \end{cases}$$

donde ρ es una constante que establece la relación entre la señal de salida controlada y la señal de entrada de control de manera que si ρ es muy grande, la forma más efectiva de minimizar V es implementarle una pequeña entrada de control a expensas de una salida controlada grande. Ahora, si elegimos ρ muy pequeña, la forma más efectiva de minimizar V es obtener una salida controlada muy pequeña, aún cuando para eso se necesite aplicar una entrada de control grande. En fin, las matrices Q y R son dadas como:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

El objetivo será encontrar la entrada de control u para obtener la acción de control

óptima,

$$u^*(t) = \mathcal{L}x^*(t),$$

para poder dirigir el trayectoria de estado del sistema en (4.27) desde un estado distinto de cero al estado cero, de modo que el funcional de costo sea minimizado. Como vimos, la matriz de ganancia óptima \mathcal{L} está dada como:

$$\mathcal{L} = -R^{-1}B'\bar{P}$$

donde \bar{P} es la matriz constante $n \times n$ simétrica definida positiva, solución de la ecuación algebraica de Riccati:

$$A'\bar{P} + \bar{P}A - \bar{P}BR^{-1}B'\bar{P} + Q = 0,$$

y la trayectoria óptima x^* es la solución de

$$\dot{x}^*(t) = (A + B\mathcal{L})x^*(t). \quad (4.33)$$

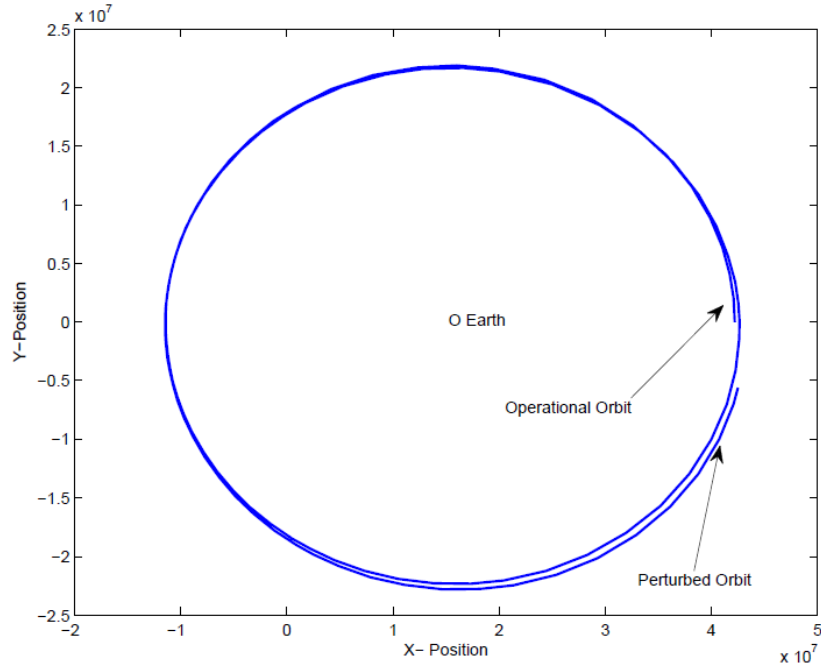


Figura 4.2: Trayectoria deseada vs trayectoria perturbada. Tomada de [7].

Debemos tener presente que cuando un controlador satelital está moviéndose en una órbita circular, las continuas perturbaciones afectan la trayectoria ideal del satélite,

como se ve en la Figura (4.2) (extraída de [7]), sometido durante 24 horas la ruta programada del satélite bajo operación. Para corregir la desviación se hace uso de los propulsores del satélite que lleva incorporado; uno en dirección radial y otro en dirección tangencial.

Los propulsores deben ser activados bajo ciertas condiciones de controlabilidad; haciendo uso de la teoría se procede a encontrar la matriz de controlabilidad asociada al sistema orbital. Luego, para el sistema orbital satelital linealizado tenemos que la matriz de controlabilidad es dada por:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

que al calcularla nos da,

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,11736 & -0,0034 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1513 & -0,01775 & 0 & 0 & -0,00208 \\ 1 & 0 & 0 & 0,11736 & -0,0034 & 0 & 0 & -0,0004 \\ 0 & 0,1513 & -0,01775 & 0 & 0 & -0,00208 & 0,00006 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Usando el comando **rank** de MATLAB®, aplicado sobre la matriz de controlabilidad \mathcal{C} , encontramos que el rango de esta matriz es igual a 4, el orden del sistema orbital del satélite, y por tanto éste es controlable.

Por otro lado, es sabido que aún cuando exista una entrada de control que optimice el funcional de costo V , es indeseable que el sistema de malla cerrada en (4.33) sea inestable. Por tanto, es necesario evaluar el cumplimiento de la condición de observabilidad del sistema para garantizar la inestabilidad del mismo. De hecho, usando el comando **chol** sobre la matriz Q , encontramos que esta admite la factorización $Q = C'C$, donde C es la matriz triangular inferior dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8367 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Luego, calculando la matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix},$$

encontramos que ésta es dada por:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8367 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,0073 & 0 & 0 & 0,5485 \\ 0 & 0 & -0,0149 & 0 \\ 0,0104 & 0 & 0 & 0,7757 \\ 0 & 0 & -0,0177 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0024 & 0 \\ -0,0002 & 0 & 0 & -0,0115 \\ 0 & 0 & -0,0034 & 0 \\ -0,0002 & 0 & 0 & -0,0138 \\ -0,0000 & 0 & 0 & -0,0019 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0 \end{bmatrix},$$

y usando nuevamente el comando **rank**, encontramos que el rango de la matriz \mathcal{O} es igual a 4, lo cual confirma que el sistema, o bien el par (A, C) es observable, y a su vez que la la trayectoria óptima x^* es estable. A partir del cumplimiento de las hipótesis de controlabilidad y observabilidad en el problema LQR asociado al sistema en (4.30)-(4.31), procedemos a encontrar la solución del mismo calculando la matriz \bar{P} y la matriz de ganancia \mathcal{L} coeficiente de la entrada óptima u^* que, además, lleva un estado cualquiera distinto de cero del sistema orbital del satélite al estado cero. Primeramente, haciendo uso del comando $[\mathcal{L}, P] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ de MATLAB[®], se obtiene:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1,0074 & -0,0781 & 1,5771 & 0,5651 \\ 0,0781 & 0,9969 & 0,0854 & 3,8014 \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

y,

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1,5882 & 0,0790 & 1,0074 & 0,5170 \\ 0,0790 & 3,8062 & -0,0781 & 6,5966 \\ 1,0074 & -0,0781 & 1,5771 & 0,5651 \\ 0,5170 & 6,5966 & 0,5651 & 25,1531 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Con esto, a través del comando `expm(t(i)*(A+B*L))*x0`, determinamos la trayectoria de estado óptima $x^*(t)$ en (4.33), en un intervalo de tiempo de 30 segundos y con condición inicial x_0 arbitraria no nula. Como puede verse en la Figura 4.3, la trayectoria es asintóticamente estable.

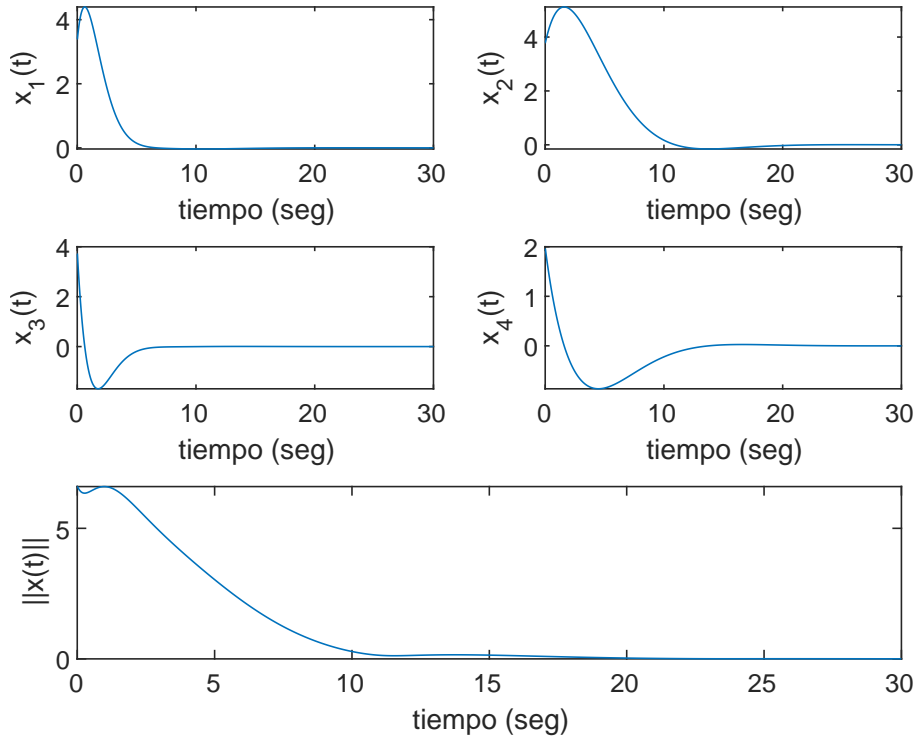


Figura 4.3: Componentes y norma de la trayectoria de estado óptima estable $x^*(t)$.

En lo que sigue, contrastaremos el resultado obtenido a través del comando `lqr` con el que producen las técnicas ya citadas en la sección anterior, a saber, el método de solución por diagonalización y el método iterativo asociado a una Riccati en diferencias. Para la implementación del método de solución por diagonalización usamos el comando `eig` aplicado sobre la matriz Z en (4.2) para determinar los autovalores y autovectores de esta matriz que, en particular, resultaron todos (los autovectores) complejos. Así,

tomando aquellos autovectores correspondientes a autovalores con parte real negativa, extrajimos de éstos su parte real y su parte imaginaria para construir la matriz en (4.9), de manera que las matrices \tilde{W}_{12} y \tilde{W}_{22} resultaron:

$$\tilde{W}_{12} = \begin{bmatrix} -0,1183 & 0,4471 & 0,0087 & 0,0097 \\ 0,0069 & 0,0154 & -0,0137 & 0,1384 \\ 0,3690 & -0,2789 & 0,0000 & -0,0051 \\ 0,0041 & -0,0163 & 0,0400 & -0,0364 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

y,

$$\tilde{W}_{22} = \begin{bmatrix} 0,1864 & 0,4218 & 0,0334 & 0,0024 \\ 0,0149 & 0,0079 & 0,2124 & 0,2880 \\ 0,4645 & 0 & 0,0324 & -0,0296 \\ 0,2953 & -0,2360 & 0,9200 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Usamos entonces el comando `inv` sobre la matriz \tilde{W}_{12} para determinar su inversa y así calcular luego el producto $\tilde{W}_{22}\tilde{W}_{12}^{-1}$, de lo cual se verifica que:

$$\tilde{W}_{22}\tilde{W}_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5882 & 0,0790 & 1,0074 & 0,5170 \\ 0,0790 & 3,8062 & -0,0781 & 6,5966 \\ 1,0074 & -0,0781 & 1,5771 & 0,5651 \\ 0,5170 & 6,5966 & 0,5651 & 25,1531 \end{bmatrix},$$

siendo este exactamente el mismo resultado obtenido en (4.38) para la matriz \bar{P} . Finalmente, implementamos el método iterativo presente en [9] que calcula la matriz \bar{P} como el límite de una sucesión de matrices $\Sigma(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Para obtener la solución \bar{P} , iteramos la ecuación en diferencias en (4.11), con valor inicial $\Sigma(0)$ igual a la matriz nula de dimensión 4×4 . Siguiendo lo sugerido en [9], el parámetro α , influyente en la velocidad de convergencia del método, fue considerado como siendo la media aritmética de los módulos de los autovalores de A . Al cabo de aproximadamente 60 iteraciones encontramos que las matrices $\Sigma(k)$ toman valores que se aproximan a la matriz \bar{P} calculada anteriormente:

$$\Sigma(60) = \begin{bmatrix} 1,5708 & 0,0808 & 0,9920 & 0,5211 \\ 0,0808 & 3,8060 & -0,0771 & 6,5961 \\ 0,9920 & -0,0771 & 1,5491 & 0,5691 \\ 0,5211 & 6,5961 & 0,5691 & 25,1518 \end{bmatrix} \approx \bar{P}. \quad (4.41)$$

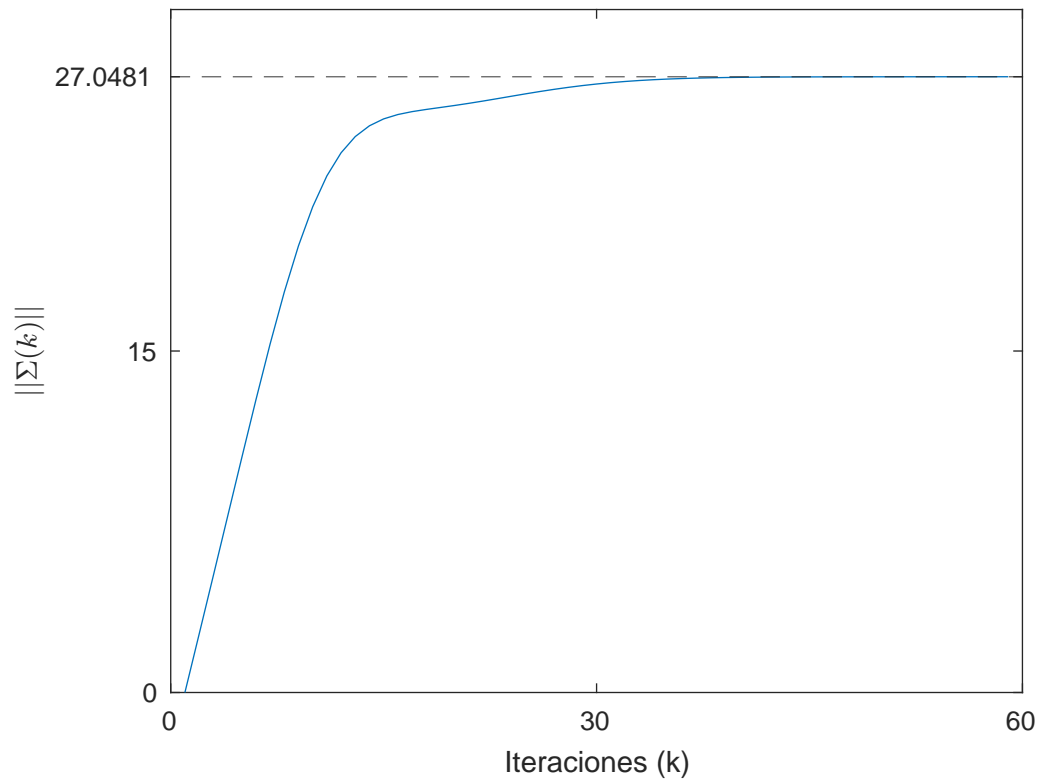


Figura 4.4: Norma de las matrices $\Sigma(k)$ obtenidas de la recurrencia en (4.11).

Asimismo, la norma de estas matrices presentaban ya un comportamiento estable, con valores de hecho muy próximos a $||\bar{P}|| = 27,0492$, vea Figura 4.4.

Capítulo 5

Conclusiones

A continuación, se dan a conocer aquí las conclusiones derivadas del trabajo de investigación realizado y de los resultados obtenidos, concernientes con la solución del problema LQR de horizonte infinito y la implementación computacional de métodos numéricos para determinar la solución en un problema de aplicación. Para empezar, fuimos capaces de presentar una solución analítica del problema, con base en un abordaje distinto a las ideas variacionales usadas por ejemplo en [1, 15, 16] para el caso previo de horizonte finito, a partir de las cuales se obtiene la ecuación diferencial matricial de Riccati y que luego se transforma en una ecuación matricial algebraica cuando el horizonte tiende a infinito. En su lugar, nosotros obtenemos tal ecuación algebraica partiendo de la ecuación diferencial matricial de Riccati que resulta de la aplicación del Teorema de suficiencia y el algoritmo de programación dinámica, como en [14]. Luego, bajo las hipótesis de controlabilidad y observabilidad, mostramos que la entrada de control que se construye con base en la solución de la Riccati algebraica, genera una trayectoria de estado estable y minimizadora. Es de resaltar que para mostrar este conjunto de hechos hicimos visibles detalles que no se ven en las demostraciones reportadas por ejemplo en [1, 8, 15, 16], e inclusive en algunos pasajes decidimos proceder basándonos en ideas propias, no reproduciendo lo hecho en las referencias anteriormente citadas. Mencionamos también que el resultado que se obtiene como solución del problema LQR de horizonte infinito puede darse también con hipótesis menos exigentes para el sistema, como lo son las condiciones de estabilizabilidad y de detectabilidad, las cuales no fueron consideradas en este trabajo pero son usadas por ejemplo en [15].

Por otro lado, para complementar el desarrollo analítico con miras a encontrar la solución del problema LQR de horizonte infinito, estudiamos dos métodos numéricos

que nos permiten establecer dicha solución computacionalmente, lo cual es de gran importancia en aplicaciones. De hecho, usamos el software MATLAB® para implementar dichos métodos y resolver un problema de aplicación presente en [7]. Recreamos la solución reportada en el citado trabajo y la contrastamos con la obtenida a partir de los métodos estudiados, produciendo resultados satisfactorios en la comparación. Esto es importante pues, con relación al método iterativo en particular, se tiene una alternativa eficaz (estable y rápida) de obtener la solución en el caso que sea requerido un software de lenguaje más básico a la hora de resolver el problema.

Bibliografía

- [1] R. E. Kalman, “Contributions to the theory of optimal control,” *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, vol. 5, pp. 102–119, 1960.
- [2] T. Basar, *Contributions to the Theory of Optimal Control*, pp. 147–166. 2001.
- [3] E. F. Costa and J. B. R. do Val, “On the detectability and observability of continuous-time Markov jump linear systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 41, no. 4, pp. 1295–1314, 2002.
- [4] M. D. Fragoso and O. L. V. Costa, “A separation principle for the continuous-time lq-problem with markovian jump parameters,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 12, pp. 2692–2707, 2010.
- [5] A. R. R. Narváez and E. F. Costa, “Control of continuous-time linear systems with markov jump parameters in reverse time,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 65, no. 5, pp. 2265–2271, 2020.
- [6] P. D. Giamberardino and D. Iacoviello, “A linear quadratic regulator for nonlinear sirc epidemic model,” in *2019 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, pp. 733–738, 2019.
- [7] S. K. Choudhary, “Design and analysis of an optimal orbit control for a communication satellite,” *International Journal of Communications*, vol. 9, pp. 28–35, 2015.
- [8] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972.
- [9] K. L. Hitz and B. D. O. Anderson, “Iterative method of computing the limiting-solution of the matrix Riccati differential equation,” *Proc. IEE*, vol. 119, no. 9, pp. 1402–1406, 1972.
- [10] “The mathworks, Inc..” <https://www.mathworks.com/>.

- [11] P. J. Antsaklis and A. N. Michel, *Linear Systems*. Birkhauser, 2006.
- [12] J. P. Hespanha, *Linear Systems Theory*. Princeton University Press, 2009.
- [13] J. Baumaister and A. Leitão, *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*. IMPA, 2014.
- [14] D. P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control*. Belmont, Mass.: Athena Scientific, 1995.
- [15] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control*. London: Prentice-Hall, first ed., 1989.
- [16] D. Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. Princeton University Press, 2011.
- [17] G. H. Golub and C. V. Loan, *Matrix Computation*. London: Johns Hopkins Press, third ed., 1996.