Projet d'optimisation

Groupe 1

16 mai 2015

Question 1

Donnez une formulation linéaire (continue, sans variables entières) du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant. Décrivez successivement variables, contraintes et fonction objectif. A ce stade, le fait de ne pas imposer l'intégralité des variables vous parait-il problématique ?

Variables

Le tableau 1 contient les différentes variables $x_{s,\lambda}$ qui correspondent au nombre de smartphones pour chaque semaine s avec la caractéristique λ.

Variable	Caractéristiques des smartphones
$x_{s,\text{n}}$	Produits au *salaire normal*.
$x_{s,\text{sup}}$	Produits pendant les *heures supplémentaires*.
$x_{s,\text{stock}}$	Conservés en *stock*.
$x_{s,\text{retard}}$	Vendus une semaine en *retard*.
$x_{s,\text{sst}}$	Sous-traités.

Table 1 – Variables de la modélisation de la ligne d'assemblage simple.

Contraintes

Voici les contraintes du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant. On pose que $\Delta x_{s,\lambda} = x_{s,\lambda} - x_{s-1,\lambda}$.

$$\begin{aligned}
\Delta x_{s,\text{stock}} + \texttt{demande}(s) &= x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{retard}} + x_{s,\text{sst}} - x_{s-1,\text{retard}} && \forall s \\
x_{0,\text{n}} &= 0 \\
x_{0,\text{sup}} &= 0 \\
x_{0,\text{stock}} &= \texttt{stock-initial} \\
x_{0,\text{retard}} &= 0 \\
x_{0,\text{sst}} &= 0 \\
x_{T,\text{stock}} &= \texttt{stock-initial} \\
x_{T,\text{retard}} &= 0 \\
x_{s-1,\text{retard}} + \Delta x_{s,\text{stock}} &\leq x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{sst}} && \forall s \\
x_{s,\text{n}} &\leq 35 \cdot \texttt{nb_ouvriers}/d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sup}} &\leq \texttt{nb_max_heure_sup} \cdot \texttt{nb_ouvriers}/d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sst}} &\leq \texttt{nb_max_sous_traitant} && \forall s \\
x_s &\geq 0 && \forall s
\end{aligned}$$

Fonction objectif

$$\text{minimiser} \sum_{s=1}^{T} c_m\, x_{s,\text{n}} + (c_m + d_{a,h}\, c_{hs})\, x_{s,\text{sup}} + c_s\, x_{s,\text{stock}} + c_r\, x_{s,\text{retard}} + c_{sst}\, x_{s,\text{sst}}$$

Le tableau 2 contient les abréviations des constantes utilisées.

Paramètre	Constante représentée
c_m	`cout_materiaux`
c_{hs}	`cout_heure_sup`
c_s	`cout_stockage`
c_r	`cout_retard`
c_{sst}	`cout_sous_traitant`
$d_{a,h}$	`duree_assemblage`/60

TABLE 2 – Constantes de la modélisation de la ligne d'assemblage simple.

On remarquera que le terme associé au cout des heures normales des ouvriers a été omis dans la fonction objectif puisqu'il n'est pas nécessaire. En effet, les ouvriers ne sont pas payés en fonction du nombre d'heures qu'ils travaillent réellement mais bien à la semaine et donc pour un nombre d'heures constant. Ceci correspond au terme $35 \cdot \texttt{cout\_horaire} \cdot \texttt{nb\_ouvriers}$ qu'il est impossible de minimiser. Cela n'aura donc pas d'impact sur notre solution, il faudra seulement modifier le cout final de la manière suivante

$$\text{cout} \leftarrow \text{cout} + T \cdot 35 \cdot \texttt{cout\_horaire} \cdot \texttt{nb\_ouvriers}$$

A ce stade, le fait de ne pas imposer l'intégralité des variables parait problématique dans le sens où les solutions ne sont pas garanties d'être entières. Ce qui n'est pas envisageable vu que celles-ci représentent des quantités de smartphones. Par exemple, $x_{s,\text{n}}$ ne sera probablement pas entier si $1/d_{a,h}$ ne l'est pas.

Question 2

Démontrez que, sous certaines hypothèses raisonnables, il est possible de garantir que votre modèle linéaire continu admette toujours une solution entière, c'est-à-dire ne comportant que des quantités produites entières chaque semaine. L'une de ces hypothèses est l'intégralité de la demande chaque semaine ; quelles sont les autres ?

Il est possible de garantir que notre modèle linéaire continu admette toujours une solution entière sous certaines hypothèses. Une première hypothèse est que tous les éléments du vecteur `demande` soient entiers. Il faut également que les constantes `stock-initial`, `nb_max_heure_sup`, `nb_max_sous_traitant`, `nb_ouvriers` et $1/d_{a,h}$ soient entières.

Preuve

Pour le prouver, nous allons reformuler notre problème sous la forme d'un problème de flot de coût minimum. Soit le graphe orienté $G(V, E)$, où V représente l'ensemble des noeuds et E l'ensemble des arrêtes. Il est utile à ce stade de s'aider d'un schéma représentant le graphe. Celui-ci est repris à la figure 1. V compte un noeud pour chaque semaine et un noeud initial. On a donc $V := 0, 1, 2, ..., T$ où 0 est le noeud initial et s est le noeud de la semaine s. Définissons maintenant les arrêtes de notre graphe. Pour le noeud 0, on définit

$$V^-(0) = \{s_1, s_2, s_3 \, \forall s \neq 0\}$$

avec

$$\{(0, s_1), (0, s_2), (0, s_3)\} \in E \, \forall s.$$

s_1, s_2, s_3 représentent les différentes manières de produire les smartphones, c'est-à-dire les ouvriers au salaire normal, les ouvriers au salaire des heures supplémentaires et la sous-traitance. Il y a donc trois arcs entre les noeuds 0 et s. Pour le noeud initial,

$$V^+(0) = \emptyset$$

Définissons ensuite les arrêtes des noeuds corrspondnats aux semaines

$$V^-(s) = \{s + 1\} \qquad \forall s \neq 0$$

avec

$$\{(s, s + 1)\} \in E \qquad \forall s \neq 0, T$$

Et,

$$V^+(s) = \{s-1\} \qquad \forall s \neq 0$$

avec

$$\{(s, s-1)\} \in E \qquad \forall s \neq 0, 1$$

Nous devons encore définir les termes sources pour chaques noeuds ainsi que les capacités maximales pour chaque arc. Soit

$$b_s = -\texttt{demande}(s) \qquad s \in V \backslash \{0\}$$

Et

$$b_0 = \sum_{s=1}^{T} \texttt{demande}(s)$$

On a aussi

$$b_1 = \texttt{stock\_initial}$$

Et

$$b_T = -\texttt{stock\_initial}$$

Soient h_{ij} avec $(i, j) \in E$ les capacités maximales dans l'arc (i, j). On a $\forall s \neq 0$

$$\begin{aligned}
h_{0,s_1} &= 35 \cdot \texttt{nb_ouvriers}/d_{a,h} \\
h_{0,s_2} &= \texttt{nb_max_heure_sup} \cdot \texttt{nb_ouvriers}/d_{a,h} \\
h_{0,s_3} &= \texttt{nb_max_sous_traitant}
\end{aligned}$$

Le graphe maintenant défini, on peut définir le problème de minimisation suivant :

Variables Soit x_{ij} le flot dans l'arc (i, j).

Objectif Le coût total est minimisé.

$$\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Equations Le flot est conservé en chaque noeud

$$\sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} = b_i \qquad i \in V$$

Les capacités maximales ne sont pas dépassées

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} \qquad (i, j) \in E$$

On peut maintenant utiliser le théorème suivant pour conclure que, si nos hypothèses sont vérifiées, notre problème admettra au moins une solution entière.

Théorème Si les demandes b_i et les capcités h_{ij} d'un problème de flot de coût minimum sont entières alors il existe une solution optimale entière.

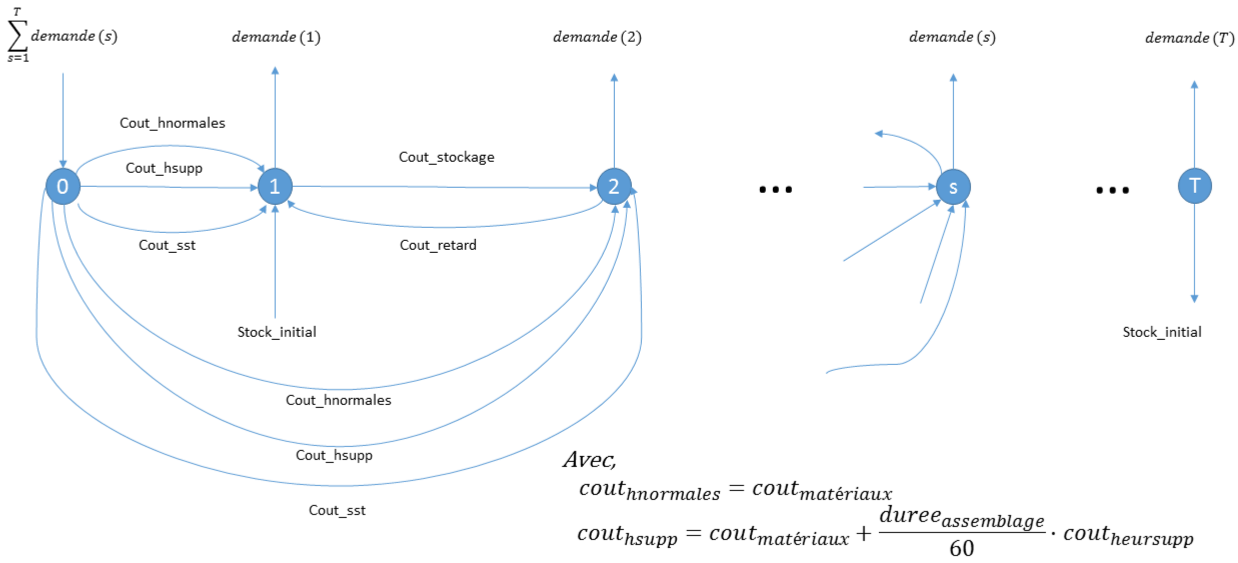

FIGURE 1 – Schéma représentant le graphe utilisé pour définir le problème de flot de coût minimal.

Question 3

Implémentez sous MATLAB ce modèle linéaire continu, et calculez la solution correspondant aux données fournies sur icampus (utilisez la fonction `linprog`). Commentez l'allure de la solution obtenue.

Notre implémentation se trouve dans le fichier `question3.m`. Il nous parait important d'expliquer en quelques mots le rôle de la fonction `kron`. Celle-ci effectue le produit tensoriel de Kronecker entre deux matrices. C'est-à-dire que pour `kron(A,B)`, chaque élément de A multiplie la matrice B. En l'utilisant de manière appropriée avec des matrices nulles et diagonales, on peut effectuer un remplissage des matrices des contraintes très efficace.

Un exemple d'utilisation de cette fonction pour remplir la matrice des contraintes se trouve dans l'annexe A.

Les résultats obtenus sont représentés graphiquement à la figure 2. Comme on pouvait s'y attendre, la solution optimale utilise presque chaque semaine au maximum la ressource la moins chère, en l'occurence la production par les ouvriers payés au salaire normal. On observe également que la solution optimale constitue un stock dans la première partie de la planification pour faire face au pic de demande situé entre les semaines 5 et 8. La demande est particulièrement importante à la semaine 7, et on voit que notre stock constitué s'épuise totalement lors de cette semaine. On commence également à avoir recours au retard.

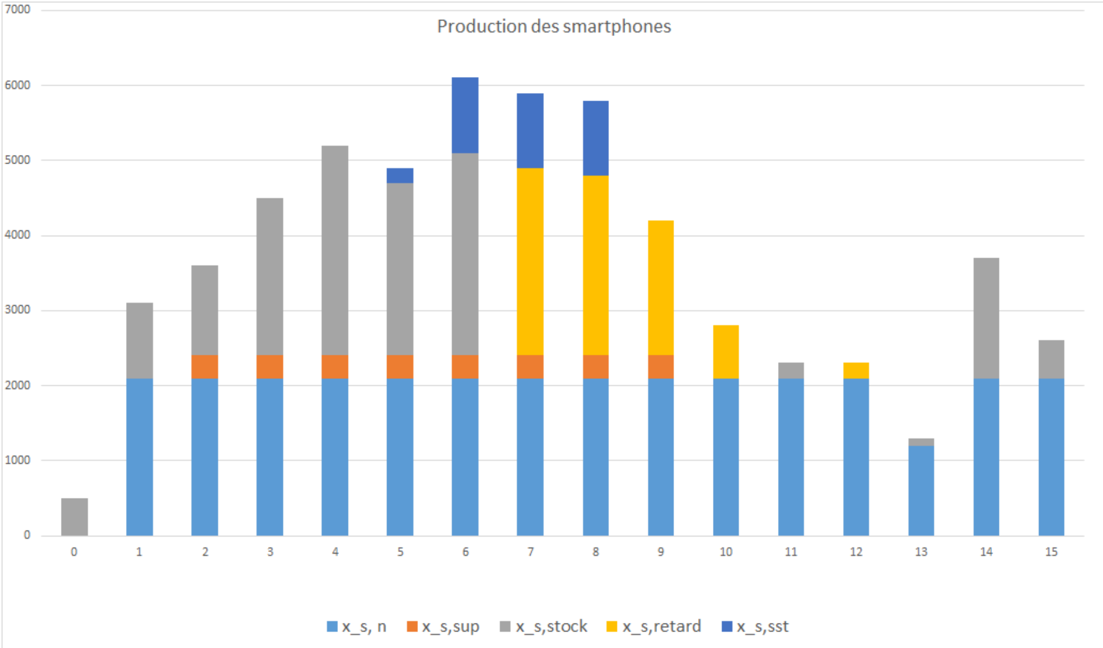

FIGURE 2 – Répartition du moyen de production des smartphones en fonction des semaines.

Question 4

Décrivez une procédure permettant, avec le moins de nouveaux calculs possibles, d'évaluer les conséquences sur la fonction objectif d'une petite variation de la demande prévue. Plus précisément, analysez l'effet du remplacement du vecteur `demande` *par le vecteur* `demande + epsilon * delta_demande` *où* `delta_demande` *est un vecteur de perturbation sur la demande, et* `epsilon` *est un paramètre scalaire dont la valeur est faible.*

Le dual du problème nous permet d'évaluer assez simplement les conséquences sur la fonction objectif d'une petite variation de la demande prévue.

En effet, notre problème peut être simplifié sous la forme

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } c^T x \\ &\qquad a_i^T x = b_i \qquad && i = 1, ..., T, ..., T+7 \\ &\qquad a_i^T x \leq b_i \qquad && i = T+8, ..., end \\ &\qquad x_j \geq 0 \qquad && \forall j \end{aligned}$$

On obtient ensuite sa forme duale

$$
\begin{aligned}
\text{maximiser } & b^T y & \\
& y_i \text{ libre} & i = 1, ..., T, ..., T+7 \\
& y_i \leq 0 & i = T+8, ..., end \\
& A_j^T y \leq c_j & \forall j
\end{aligned}
$$

On remarque qu'une perturbation des contraintes dans le problème primal correspond à une perturbation de la fonction objectif dans le problème dual. Il nous suffit donc simplement de calculer une solution optimale du dual y^* puis d'effectuer le produit scalaire

$$\Delta z^* = (\Delta b)^T y^*$$

pour chaque perturbation Δb pour connaître l'impact Δz^* sur le cout.

Ce résultat n'est valable que pour des petites variations de b. En effet, pour l'obtenir, il faut supposer que l'on connaît un sommet optimal admissible. Or, en changeant le problème, il n'est pas garanti que ce sommet reste optimal et admissible. Plus la perturbation est importante, plus il y a de chances que notre sommet optimal change.

Question 5

Testez sous MATLAB la procédure du point précédent avec les données fournies. Comparez ensuite la prédiction obtenue par cette procédure avec la valeur obtenue en résolvant à nouveau complètement le modèle, et ce pour un échantillon de valeurs du paramètre `epsilon` *comprises entre* 0 *et* 1 *(par exemple* `0:.1:1`*). Commentez (éventuellement en vous aidant d'un graphique).*

Comparaison À FAIRE.

Notre fonction `compareDuality.m` permet de prouver l'efficacité du problème dual lorsqu'on perturbe le vecteur des contraintes. En effet, si l'on décide d'analyser via le problème primal ce qu'il se passe lorsque les contraintes sont modifiées, il est nécessaire de résoudre le problème à chaque perturbation (plusieurs appels à `linprog`). Tandis que pour le problème dual, il suffit d'effectuer plusieurs combinaisons linéaires de la fonction objectif avec *une seule* solution y^* (c'est-à-dire un apppel à `linprog`). On retrouve les résultats des tests d'efficacité sur le graphe de la figure 4.

Cependant, comme expliqué dans la section précédente, ce résultat n'est valable que pour des petites variations des contraintes. Si `epsilon` devient trop grand, l'analyse par le primal pourrait diverger de la solution du primal. C'est ce que nous obtenons en implémentant ces deux méthodes, comme représenté à la figure 3

Question 6

Décrivez (sans l'implémenter) l'adaptation qu'il serait nécessaire à apporter au modèle si le coût de l'heure supplémentaire pris en compte était variable. Plus concrètement, considérez qu'après la première heure supplémentaire (facturée au coût horaire `cout_heure_sup` *standard), chaque heure supplémentaire (éventuellement) est*

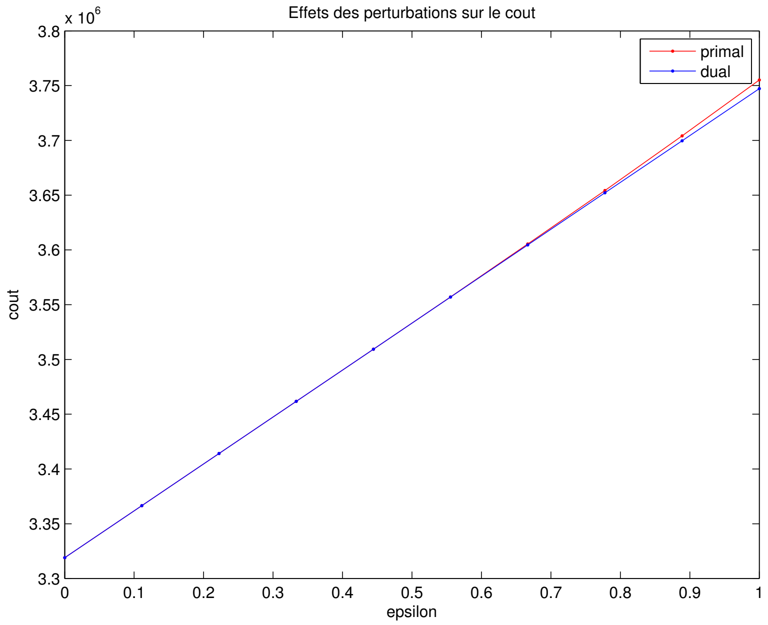

FIGURE 3 – Comparaison de la réponse aux perturbations du primal et dual. On remarque que les valeurs restent égales jusqu'à $\epsilon \approx 0.6$.

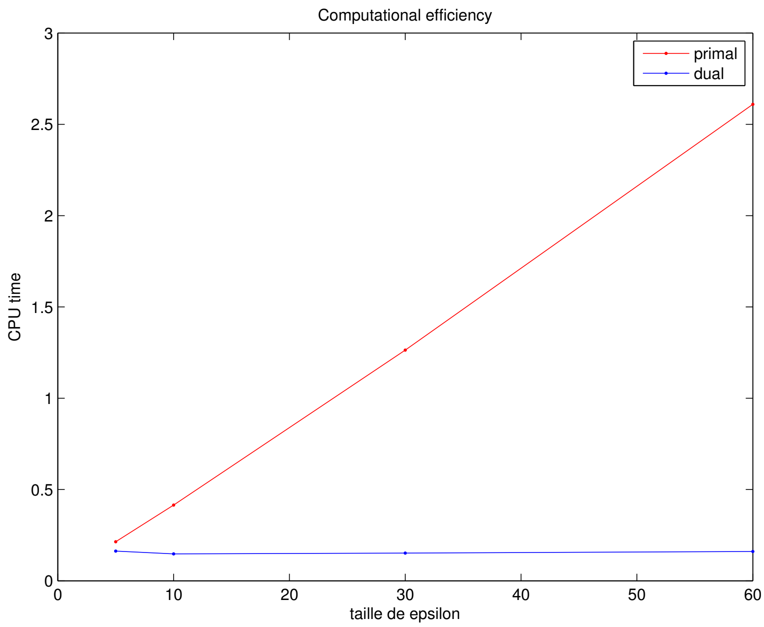

FIGURE 4 – Comparaison de l'efficacité du primal et dual lors de l'analyse de perturbations sur les contraintes.

facturée à un coût horaire supérieur de 5% à celui de l'heure supplémentaire précédente. Est-il toujours possible de formuler (ou reformuler) le problème sous forme linéaire ? Expliquez. Et que se passerait-il si le coût horaire des supplémentaires diminuait *lorsque le nombre d'heure prestées augmente ? Justifiez.*

Si le coût des heures supplémentaires n'est plus constant mais augmente au fur et à mesure de leur utilisation, le coût de celles-ci dépenderait directement du nombre de smartphones produits de cette manière.

En effet, on peut réécrire notre fonction objectif comme

$$\text{minimiser} \sum_{s=1}^{T} c_m\, x_{s,\text{n}} + c_m\, x_{s,\text{sup}} + \mathcal{C}_{hs}(x_{s,\text{sup}}) + c_s\, x_{s,\text{stock}} + c_r\, x_{s,\text{retard}} + c_{sst}\, x_{s,\text{sst}}$$

avec

$$\mathcal{C}_{hs}(x_{s,\text{sup}}) = \texttt{cout\_heure\_sup} \cdot \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (0.05)^i$$

Par soucis de lisibilité, on a posé

$$\alpha = x_{s,\text{sup}}\, d_{a,h} - 1$$

α correspond donc au nombre d'heures supplémentaires qui auront un cout différent de `cout_heure_sup`.

On remarque immédiatement que la fonction $\mathcal{C}_{hs}$ est *non-linéaire* en $x_{s,\text{sup}}$ puisque

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha!}{i!\,(\alpha - i)!}$$

De même, si le coût des heures supplémentaires *diminuait* avec un taux de 0.05, on aurait

$$c_{hs}(x_{s,\text{sup}}) = \texttt{cout\_heure\_sup} \cdot \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i (0.05)^i \binom{\alpha}{i}$$

Question 7

Donnez à présent une formulation linéaire (continue, sans variables entières) du problème de la planification de la ligne d'assemblage incluant le gestion du personnel, en vous basant sur le modèle déjà construit à la Question 1. Décrivez successivement variables, contraintes et fonction objectif.

Le nombre d'ouvriers n'étant plus constant, nous allons rajouter deux variables par semaine pour modéliser le problème :

- ⋄ $x_{s,\text{emb}}$ le nombre d'ouvriers embauchés au début de la semaine s
- ⋄ $x_{s,\text{lic}}$ le nombre d'ouvriers licienciés au début de la semaine s.

Dans la fonction objectif, il faut maintenant tenir compte du cout de ces recrutements et ces licenciements ainsi que du coût du salaire des ouvriers, non constant.

En ce qui concerne les contraintes, il faut modifier celles sur le nombre de smartphones maximum produits dans l'entreprise. Il faut également ajouter les contraintes correspondants au nombre d'ouvriers (maximum et minimum).

Fonction objectif

$$\text{minimiser} \sum_{s=1}^{T} c_m\, x_{s,\mathrm{n}} + (c_m + d_{a,h}\, c_{hs})\, x_{s,\mathrm{sup}} + c_s\, x_{s,\mathrm{stock}} + c_r\, x_{s,\mathrm{retard}} + c_{sst}\, x_{s,\mathrm{sst}}$$
$$+35\, c_h\, (n_{ouv} + \sum_{i=1}^{s} x_{i,emb} - x_{i,lic}) + c_{emb}\, x_{s,\mathrm{emb}} + c_{lic}\, x_{i,lic}$$

Le tableau 3 contient les nouvelles abréviations des constantes utilisées.

Paramètre	Constante représentée
c_h	`cout_horaire`
c_{emb}	`cout_embauche`
c_{lic}	`cout_licenciement`
n_{ouv}	`nb_ouvriers`

TABLE 3 – Constantes de la modélisation de la ligne d'assemblage avec gestion du personnel.

Contraintes

Voici les contraintes du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel variable.

$$\begin{aligned}
\Delta x_{s,\mathrm{stock}} + \texttt{demande}(s) &= x_{s,\mathrm{n}} + x_{s,\mathrm{sup}} + x_{s,\mathrm{retard}} + x_{s,\mathrm{sst}} - x_{s-1,\mathrm{retard}} && \forall s \\
x_{0,\mathrm{n}} &= 0 \\
x_{0,\mathrm{sup}} &= 0 \\
x_{0,\mathrm{stock}} &= \texttt{stock-initial} \\
x_{0,\mathrm{retard}} &= 0 \\
x_{0,\mathrm{sst}} &= 0 \\
x_{T,\mathrm{stock}} &= \texttt{stock-initial} \\
x_{T,\mathrm{retard}} &= 0 \\
x_{s-1,\mathrm{retard}} + \Delta x_{s,\mathrm{stock}} &\leq x_{s,\mathrm{n}} + x_{s,\mathrm{sup}} + x_{s,\mathrm{sst}} && \forall s \\
x_{s,\mathrm{n}} &\leq 35 \cdot (n_{ouv} + \sum_{i=1}^{s} x_{i,emb} - x_{i,lic})/d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\mathrm{sup}} &\leq \texttt{nb_max_heure_sup} \cdot \left(n_{ouv} + \sum_{i=1}^{s} x_{i,emb} - x_{i,lic} \right) /d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\mathrm{sst}} &\leq \texttt{nb_max_sous_traitant} && \forall s \\
n_{ouv} + \sum_{i=1}^{s} x_{i,emb} - x_{i,lic} &\leq \texttt{nb_max_ouvriers} && \forall s \\
x_s &\geq 0 && \forall s
\end{aligned}$$

A Utilisation de la fonction `kron`

Afin de comprendre l'utilité et l'efficacité de la fonction **`kron`**, voici son application pour la contrainte

$$\Delta x_{s,\text{stock}} + \texttt{demande}(s) = x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{retard}} + x_{s,\text{sst}} - x_{s-1,\text{retard}} \qquad \forall s$$

pour une planification sur deux semaines ($T = 2$).

Voici le code correspondant

```
1  dSeg    = [1 1 -1 1 1];
2  dpSeg   = [0 0 1 -1 0];
3  Aeq = [kron([eye(T),zeros(T,1)],dpSeg) ...
4        + kron([zeros(T,1),eye(T)],dSeg)];
5  beq = [d.demande'];
```

Rappelons la forme de notre vecteur x_s

$$x_s = \begin{pmatrix} x_{s,\text{n}} & x_{s,\text{sup}} & x_{s,\text{stock}} & x_{s,\text{retard}} & x_{s,\text{sst}} \end{pmatrix}^T .$$

Nous avons tout d'abord la matrice créée à la ligne 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ensuite celle créée à la ligne 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela donne comme voulu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0,\text{n}} \\ x_{0,\text{sup}} \\ x_{0,\text{stock}} \\ x_{0,\text{retard}} \\ x_{0,\text{sst}} \\ x_{1,\text{n}} \\ x_{1,\text{sup}} \\ x_{1,\text{stock}} \\ x_{1,\text{retard}} \\ x_{1,\text{sst}} \\ x_{2,\text{n}} \\ x_{2,\text{sup}} \\ x_{2,\text{stock}} \\ x_{2,\text{retard}} \\ x_{2,\text{sst}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \texttt{demande}(1) \\ \texttt{demande}(2) \end{pmatrix}.$$

Cette méthode s'avère simple et efficace puisque ces 5 lignes de code suffisent à remplir notre matrice peu importe le nombre de semaine.