

# Projet d'optimisation

Groupe 1

10 mai 2015

## Question 1

### Variables

Le tableau 1 contient les différentes variables  $x_{s,\lambda}$  qui correspondent au nombre de smartphones pour chaque semaine  $s$  avec la caractéristique  $\lambda$ .

Variable	Caractéristiques des smartphones
$x_{s,n}$	Produits au <i>salaire normal</i> .
$x_{s,sup}$	Produits pendant les <i>heures supplémentaires</i> .
$x_{s,stock}$	Conservés en <i>stock</i> .
$x_{s,retard}$	Vendus une semaine en <i>retard</i> .
$x_{s,sst}$	Sous-traités.

TABLE 1 – Variables de la modélisation de la ligne d'assemblage.

### Contraintes

Voici les contraintes du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant. On pose que  $\Delta x_{s,\lambda} = x_{s,\lambda} - x_{s-1,\lambda}$ .

$$\begin{aligned}\Delta x_{s,stock} + \text{demande}(s) &= x_{s,n} + x_{s,sup} + x_{s,retard} + x_{s,sst} - x_{s-1,retard} && \forall s \\ x_{s-1,retard} + \Delta x_{s,stock} &\leq x_{s,n} + x_{s,sup} + x_{s,sst} && \forall s \\ x_{0,stock} &= \text{stock-initial} \\ x_{T,stock} &= \text{stock-initial} \\ x_{T,retard} &= 0 \\ x_{s,n} &\leq 35 \cdot \text{nb\_ouvriers} / d_{a,h} && \forall s \\ x_{s,sup} &\leq \text{nb\_max\_heure\_sup} \cdot \text{nb\_ouvriers} / d_{a,h} && \forall s \\ x_{s,sst} &\leq \text{nb\_max\_sous\_traitant} && \forall s \\ x_s &\geq 0 && \forall s\end{aligned}$$

## Fonction objectif

$$\text{minimiser } \sum_{s=1}^T c_m x_{s,n} + (c_m + d_{a,h} c_{hs}) x_{s,\text{sup}} + c_s x_{s,\text{stock}} + c_r x_{s,\text{retard}} + c_{sst} x_{s,\text{sst}}$$

Le tableau 2 contient les abréviations des constantes utilisées.

Paramètre	Constante représentée
$c_m$	<code>cout_materiaux</code>
$c_{hs}$	<code>cout_heure_sup</code>
$c_s$	<code>cout_stockage</code>
$c_r$	<code>cout_retard</code>
$c_{sst}$	<code>cout_sous_traitant</code>
$d_{a,h}$	<code>duree_assemblage/60</code>

TABLE 2 – Constantes de la modélisation de la ligne d’assemblage.

A ce stade, le fait de ne pas imposer l’intégralité des variables paraît problématique dans le sens où les solutions ne sont pas garanties d’être entières. Ce qui n’est pas envisageable vu que celles-ci représentent des quantités de smartphones. Par exemple,  $x_{s,n}$  ne sera probablement pas entier si  $1/d_{a,h}$  ne l’est pas.

## Question 2

Il est possible de garantir que notre modèle linéaire continu admette toujours une solution entière sous certaines hypothèses. Une première hypothèse est que tous les éléments du vecteur **demande** soient entiers. Il faut également que les constantes **stock-initial**, **nb\_max\_heure\_sup**, **nb\_max\_sous\_traitant**, **nb\_ouvriers** et  $1/d_{a,h}$  soient entières.

### Preuve

Pour le prouver, nous allons reformuler notre problème sous la forme d’un problème de flot de coût minimum. Soit le graphe orienté  $G(V,E)$ , où  $V$  représente l’ensemble des noeuds et  $E$  l’ensemble des arrêtes.  $V$  compte un noeud pour chaque semaine et un noeud initial. On a donc  $V := 0, 1, 2, \dots, T$  où 0 est le noeud initial et  $s$  est le noeud de la semaine  $s$ . Définissons maintenant les arrêtes de notre graphe. Pour le noeud 0, on définit

$$V^-(0) = \{s_1, s_2, s_3 \mid \forall s \neq 0\}$$

avec

$$\{(0, s_1), (0, s_2), (0, s_3)\} \in E \forall s$$

$s_1, s_2, s_3$  représentent les différentes manières de produire les smartphones, c'est-à-dire les ouvriers au salaire normal, les ouvriers au salaire des heures supplémentaires et la sous-traitance. Il y a donc trois arcs entre les noeuds 0 et s. Pour le noeud initial,

$$V^+(0) = \emptyset$$

Définissons ensuite les arrêtes des noeuds correspondants aux semaines

$$V^-(s) = \{s + 1 \mid s \neq 0\}$$

avec

$$\{(s, s + 1)\} \in E \forall s \neq 0, T$$

Et,

$$V^+(s) = \{s - 1 \mid s \neq 0\}$$

avec

$$\{(s, s - 1)\} \in E \forall s \neq 0, 1$$

Nous devons encore définir les termes sources pour chaque noeuds ainsi que les capacités maximales pour chaque arc. Soit

$$b_s = -demande(s), s \in V \setminus \{0\}$$

Et

$$b_0 = \sum_{s=1}^T demande(s)$$

On a aussi

$$b_1 = stock\_initial$$

Et

$$b_T = -stock\_initial$$

Soient  $h_{ij}$  avec  $(i, j) \in E$  les capacités maximales dans l'arc  $(i, j)$ . On a  $\forall s \neq 0$

$$h_{0,s_1} = 35 \cdot nb\_ouvriers / d_{a,h}$$

$$h_{0,s_2} = nb\_max\_heure\_sup \cdot nb\_ouvriers / d_{a,h}$$

$$h_{0,s_3} = nb\_max\_sous\_traitant$$

Le graphe maintenant défini, on peut définir le problème de minimisation suivant :

**Variables** Soit  $x_{ij}$  le flot dans l'arc  $(i, j)$ .

**Objectif** Le coût total est minimisé.

$$\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

**Equations** Le flot est conservé en chaque noeud

$$\sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} = b_i \quad i \in V$$

Les capacités maximales ne sont pas dépassées

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} \quad (i, j) \in E$$

On peut maintenant utiliser le théorème suivant pour conclure que, si nos hypothèses sont vérifiées, notre problème admettra au moins une solution entière.

**Théorème** Si les demandes  $b_i$  et les capacités  $h_{ij}$  d'un problème de flot de coût minimum sont entières alors il existe une solution optimale entière.