Projet d'optimisation

Groupe 1

12 mai 2015

Question 1

Donnez une formulation linéaire (continue, sans variables entières) du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant. Décrivez successivement variables, contraintes et fonction objectif. A ce stade, le fait de ne pas imposer l'intégralité des variables vous parait-il problématique ?

Variables

Le tableau 1 contient les différentes variables $x_{s,\lambda}$ qui correspondent au nombre de smartphones pour chaque semaine s avec la caractéristique λ.

Variable	Caractéristiques des smartphones
$x_{s,\mathrm{n}}$	Produits au *salaire normal*.
$x_{s,\mathrm{sup}}$	Produits pendant les *heures supplémentaires*.
$x_{s,\mathrm{stock}}$	Conservés en *stock*.
$x_{s,\mathrm{retard}}$	Vendus une semaine en *retard*.
$x_{s,\mathrm{sst}}$	Sous-traités.

TABLE 1 – Variables de la modélisation de la ligne d'assemblage.

Contraintes

Voici les contraintes du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant. On pose que $\Delta x_{s,\lambda} = x_{s,\lambda} - x_{s-1,\lambda}$.

$$\begin{aligned}
\Delta x_{s,\text{stock}} + \texttt{demande}(s) &= x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{retard}} + x_{s,\text{sst}} - x_{s-1,\text{retard}} && \forall s \\
x_{0,\text{stock}} &= \texttt{stock-initial} \\
x_{T,\text{stock}} &= \texttt{stock-initial} \\
x_{T,\text{retard}} &= 0 \\
x_{s-1,\text{retard}} + \Delta x_{s,\text{stock}} &\leq x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{sst}} && \forall s \\
x_{s,\text{n}} &\leq 35 \cdot \texttt{nb_ouvriers}/d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sup}} &\leq \texttt{nb_max_heure_sup} \cdot \texttt{nb_ouvriers}/d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sst}} &\leq \texttt{nb_max_sous_traitant} && \forall s \\
x_s &\geq 0 && \forall s
\end{aligned}$$

Fonction objectif

$$\text{minimiser} \sum_{s=1}^{T} c_m\, x_{s,\text{n}} + (c_m + d_{a,h}\, c_{hs})\, x_{s,\text{sup}} + c_s\, x_{s,\text{stock}} + c_r\, x_{s,\text{retard}} + c_{sst}\, x_{s,\text{sst}}$$

Le tableau 2 contient les abréviations des constantes utilisées.

Paramètre	Constante représentée
c_m	`cout_materiaux`
c_{hs}	`cout_heure_sup`
c_s	`cout_stockage`
c_r	`cout_retard`
c_{sst}	`cout_sous_traitant`
$d_{a,h}$	`duree_assemblage`/60

TABLE 2 – Constantes de la modélisation de la ligne d'assemblage.

A ce stade, le fait de ne pas imposer l'intégralité des variables parait problématique dans le sens où les solutions ne sont pas garanties d'être entières. Ce qui n'est pas envisageable vu que celles-ci représentent des quantités de smartphones. Par exemple, $x_{s,\text{n}}$ ne sera probablement pas entier si $1/d_{a,h}$ ne l'est pas.

Question 2

Démontrez que, sous certaines hypothèses raisonnables, il est possible de garantir que votre modèle linéaire continu admette toujours une solution entière, c'est-à-dire ne comportant que des quantités produites entières chaque semaine. L'une de ces hypothèses est l'intégralité de la demande chaque semaine ; quelles sont les autres ?

Il est possible de garantir que notre modèle linéaire continu admette toujours une solution entière sous certaines hypothèses. Une première hypothèse est que tous les éléments du vecteur `demande` soient entiers. Il faut également que les constantes `stock-initial`, `nb_max_heure_sup`, `nb_max_sous_traitant`, `nb_ouvriers` et $1/d_{a,h}$ soient entières.

Preuve

Pour le prouver, nous allons reformuler notre problème sous la forme d'un problème de flot de coût minimum. Soit le graphe orienté $G(V, E)$, où V représente l'ensemble des noeuds et E l'ensemble des arrêtes. Il est utile à ce stade de s'aider d'un schéma représentant le graphe. Celui-ci est repris à la figure 1. V compte un noeud pour chaque semaine et un noeud initial. On a donc $V := 0, 1, 2, ..., T$ où 0 est le noeud initial et s est le noeud de la semaine s. Définissons maintenant les arrêtes de notre graphe. Pour le noeud 0, on définit

$$V^-(0) = \{s_1, s_2, s_3 \, \forall s \neq 0\}$$

avec

$$\{(0, s_1), (0, s_2), (0, s_3)\} \in E \, \forall s.$$

s_1, s_2, s_3 représentent les différentes manières de produire les smartphones, c'est-à-dire les ouvriers au salaire normal, les ouvriers au salaire des heures supplémentaires et la sous-traitance. Il y a donc trois arcs entre les noeuds 0 et s. Pour le noeud initial,

$$V^+(0) = \emptyset$$

Définissons ensuite les arrêtes des noeuds corrspondnats aux semaines

$$V^-(s) = \{s + 1\} \qquad \forall s \neq 0$$

avec

$$\{(s, s + 1)\} \in E \qquad \forall s \neq 0, T$$

Et,

$$V^+(s) = \{s - 1\} \qquad \forall s \neq 0$$

avec

$$\{(s, s - 1)\} \in E \qquad \forall s \neq 0, 1$$

Nous devons encore définir les termes sources pour chaques noeuds ainsi que les capacités maximales pour chaque arc. Soit

$$b_s = -\texttt{demande}(s) \qquad s \in V \backslash \{0\}$$

Et

$$b_0 = \sum_{s=1}^{T} \texttt{demande}(s)$$

On a aussi

$$b_1 = \texttt{stock\_initial}$$

Et

$$b_T = -\texttt{stock\_initial}$$

Soient h_{ij} avec $(i,j) \in E$ les capacités maximales dans l'arc (i,j). On a $\forall s \neq 0$

$$\begin{aligned}
h_{0,s_1} &= 35 \cdot \texttt{nb_ouvriers}/d_{a,h} \\
h_{0,s_2} &= \texttt{nb_max_heure_sup} \cdot \texttt{nb_ouvriers}/d_{a,h} \\
h_{0,s_3} &= \texttt{nb_max_sous_traitant}
\end{aligned}$$

Le graphe maintenant défini, on peut définir le problème de minimisation suivant :

Variables Soit x_{ij} le flot dans l'arc (i,j).

Objectif Le coût total est minimisé.

$$\sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

Equations Le flot est conservé en chaque noeud

$$\sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} = b_i \qquad i \in V$$

Les capacités maximales ne sont pas dépassées

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} \qquad (i,j) \in E$$

On peut maintenant utiliser le théorème suivant pour conclure que, si nos hypothèses sont vérifiées, notre problème admettra au moins une solution entière.

Théorème Si les demandes b_i et les capcités h_{ij} d'un problème de flot de coût minimum sont entières alors il existe une solution optimale entière.

Question 3

Implémentez sous MATLAB ce modèle linéaire continu, et calculez la solution correspondant aux données fournies sur icampus (utilisez la fonction `linprog`). Commentez l'allure de la solution obtenue.

Notre implémentation se trouve dans le fichier `question3.m`.

Question 4

Décrivez une procédure permettant, avec le moins de nouveaux calculs possibles, d'évaluer les conséquences sur la fonction objectif d'une petite variation de la demande prévue. Plus précisément, analysez l'effet du remplacement du vecteur `demande` par le vecteur `demande + epsilon * delta_demande` où `delta_demande` est un *vecteur de perturbation sur la demande, et* `epsilon` *est un paramètre scalaire dont la valeur est faible.*

La perturbation d'une contrainte Le problème dual nous donne de telles informations. En effet, soit notre problème reformulé sous forme standard :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Une partie du vecteur b correspond exactement à la demande. Or, si y_* est solution du dual de ce problème, la variation de la fonction objectif à une modification Δb du vecteur b sera exactement égal à $y_*^T \Delta b$.
En particulier donc, si Δb est égal à

$$epsilon * delta\_demande$$

aux composantes de b correspondant à la demande et 0 partout ailleurs, $y_*^T \Delta b$ nous donnera la variation de l'objectif causée par cette variation de la demande.

Question 5

Question 6

Si le coût des heures supplémentaires augmentent, la fonction objectif devient

$$\text{minimiser} \sum_{s=1}^{T} c_m \, x_{s,\text{n}} + (c_m + d_{a,h} \, c_{hs,n}) \, x_{s,\text{sup}} + c_s \, x_{s,\text{stock}} + c_r \, x_{s,\text{retard}} + c_{sst} \, x_{s,\text{sst}}$$

avec $c_{hs,n} = c_{hs,0} \sum_{i=0}^{x_{s,\text{sup}} \, d_{a,h}} (0.05)^i \binom{x_{s,\text{sup}} \, d_{a,h} - 1}{i}$. Ce modèle n'est plus linéaire.

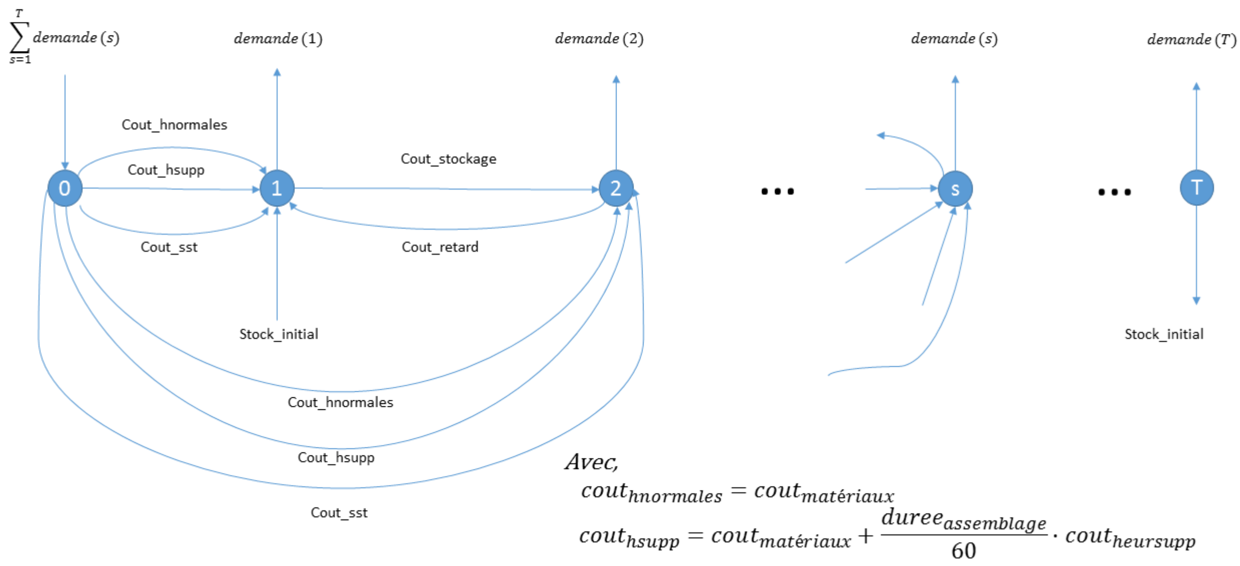

FIGURE 1 – Schéma représentant le graphe utilisé pour définir le problème de flot de coût minimal.