# Projet d'optimisation

Groupe 1

12 mai 2015

## Question 1

### Variables

Le tableau 1 contient les différentes variables $x_{s,\lambda}$ qui correspondent au nombre de smartphones pour chaque semaine $s$ avec la caractéristique $\lambda$.

| Variable | Caractéristiques des smartphones |
|---|---|
| $x_{s,\text{n}}$ | Produits au *salaire normal.* |
| $x_{s,\text{sup}}$ | Produits pendant les *heures supplémentaires.* |
| $x_{s,\text{stock}}$ | Conservés en *stock.* |
| $x_{s,\text{retard}}$ | Vendus une semaine en *retard.* |
| $x_{s,\text{sst}}$ | Sous-traités. |

Table 1 – Variables de la modélisation de la ligne d'assemblage.

### Contraintes

Voici les contraintes du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant. On pose que $\Delta x_{s,\lambda} = x_{s,\lambda} - x_{s-1,\lambda}$.

$$
\begin{aligned}
\Delta x_{s,\text{stock}} + \texttt{demande}(s) &= x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{retard}} + x_{s,\text{sst}} - x_{s-1,\text{retard}} && \forall s \\
x_{s-1,\text{retard}} + \Delta x_{s,\text{stock}} &\leq x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{sst}} && \forall s \\
x_{0,\text{stock}} &= \texttt{stock-initial} \\
x_{T,\text{stock}} &= \texttt{stock-initial} \\
x_{T,\text{retard}} &= 0 \\
x_{s,\text{n}} &\leq 35 \cdot \texttt{nb\_ouvriers}/d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sup}} &\leq \texttt{nb\_max\_heure\_sup} \cdot \texttt{nb\_ouvriers}/d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sst}} &\leq \texttt{nb\_max\_sous\_traitant} && \forall s \\
x_s &\geq 0 && \forall s
\end{aligned}
$$

## Fonction objectif

$$\text{minimiser} \sum_{s=1}^{T} c_m\, x_{s,\mathrm{n}} + (c_m + d_{a,h}\, c_{hs})\, x_{s,\mathrm{sup}} + c_s\, x_{s,\mathrm{stock}} + c_r\, x_{s,\mathrm{retard}} + c_{sst}\, x_{s,\mathrm{sst}}$$

Le tableau 2 contient les abréviations des constantes utilisées.

| Paramètre | Constante représentée |
|---|---|
| $c_m$ | `cout_materiaux` |
| $c_{hs}$ | `cout_heure_sup` |
| $c_s$ | `cout_stockage` |
| $c_r$ | `cout_retard` |
| $c_{sst}$ | `cout_sous_traitant` |
| $d_{a,h}$ | `duree_assemblage`/60 |

Table 2 – Constantes de la modélisation de la ligne d'assemblage.

A ce stade, le fait de ne pas imposer l'intégralité des variables parait problèmatique dans le sens où les solutions ne sont pas garanties d'être entières. Ce qui n'est pas envisageable vu que celles-ci représentent des quantités de smartphones. Par exemple, $x_{s,\mathrm{n}}$ ne sera probablement pas entier si $1/d_{a,h}$ ne l'est pas.

# Question 2

Il est possible de garantir que notre modèle linéaire continu admette toujours une solution entière sous certaines hypothèses. Une première hypothèse est que tous les éléments du vecteur `demande` soient entiers. Il faut également que les constantes `stock-initial`, `nb_max_heure_sup`, `nb_max_sous_traitant`, `nb_ouvriers` et $1/d_{a,h}$ soient entières.

### Preuve

Pour le prouver, nous allons reformuler notre problème sous la forme d'un problème de flot de coût minimum. Soit le graphe orienté G(V,E), où V représente l'ensemble des noeuds et E l'ensemble des arrêtes. Il est utile à ce stade de s'aider d'un schéma représentant le graphe. Celui-ci est repris à la figure 1. V compte un noeud pour chauqe semaine et un noeud initial. On a donc $V := 0, 1, 2, ..., T$ où 0 est le noeud initial et s est le noeud de la semaine s. Définissons maintenant les arrêtes de notre graphe. Pour le noeud 0, on définit

$$V^{-}(0) = \{s_1, s_2, s_3\, \forall s \neq 0\}$$

avec

$$\{(0, s_1), (0, s_2), (0, s_3)\} \in E\, \forall s$$

$s_1, s_2, s_3$ représentent les différentes manières de produire les smartphones, c'est-à-dire les ouvriers au salaire normal, les ouvriers au salaire des heures supplémentaires et la sous-traitance. Il y a donc trois arcs entre les noeuds 0 et s. Pour le noeud initial,

$$V^+(0) = \emptyset$$

Définissons ensuite les arrêtes des noeuds corrspondnats aux semaines

$$V^-(s) = \{s + 1 \, \forall s \neq 0\}$$

avec

$$\{(s, s+1)\} \in E \, \forall s \neq 0, T$$

Et,

$$V^+(s) = s - 1 \, \forall s \neq 0\}$$

avec

$$\{(s, s-1)\} \in E \, \forall s \neq 0, 1$$

Nous devons encore définir les termes sources pour chaques noeuds ainsi que les capacités maximales pour chaque arc. Soit

$$b_s = -demande(s), s \in V \backslash \{0\}$$

Et

$$b_0 = \sum_{s=1}^{T} demande(s)$$

On a aussi

$$b_1 = stock\_initial$$

Et

$$b_T = -stock\_initial$$

Soient $h_{ij}$ avec $(i, j) \in E$ les capacités maximales dans l'arc $(i, j)$. On a $\forall s \neq 0$

$$h_{0,s_1} = 35 \cdot \texttt{nb\_ouvriers}/d_{a,h}$$

$$h_{0,s_2} = \texttt{nb\_max\_heure\_sup} \cdot \texttt{nb\_ouvriers}/d_{a,h}$$

$$h_{0,s_3} = \texttt{nb\_max\_sous\_traitant}$$

Le graphe maintenant défini, on peut définir le problème de minimisation suivant :

**Variables** Soit $x_{ij}$ le flot dans l'arc $(i, j)$.

**Objectif** Le coût total est minimisé.

$$\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

**Equations** Le flot est conservé en chaque noeud

$$\sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} = b_i \ i \in V$$

Les capacités maximales ne sont pas dépassées

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} \ (i,j) \in E$$

On peut maintenant utiliser le théorème suivant pour conclure que, si nos hypothèses sont vérifiées, notre problème admettra au moins une solution entière.

**Théorème** Si les demandes $b_i$ et les capcités $h_{ij}$ d'un problème de flot de coût minimum sont entières alors il existe une solution optimale entière.

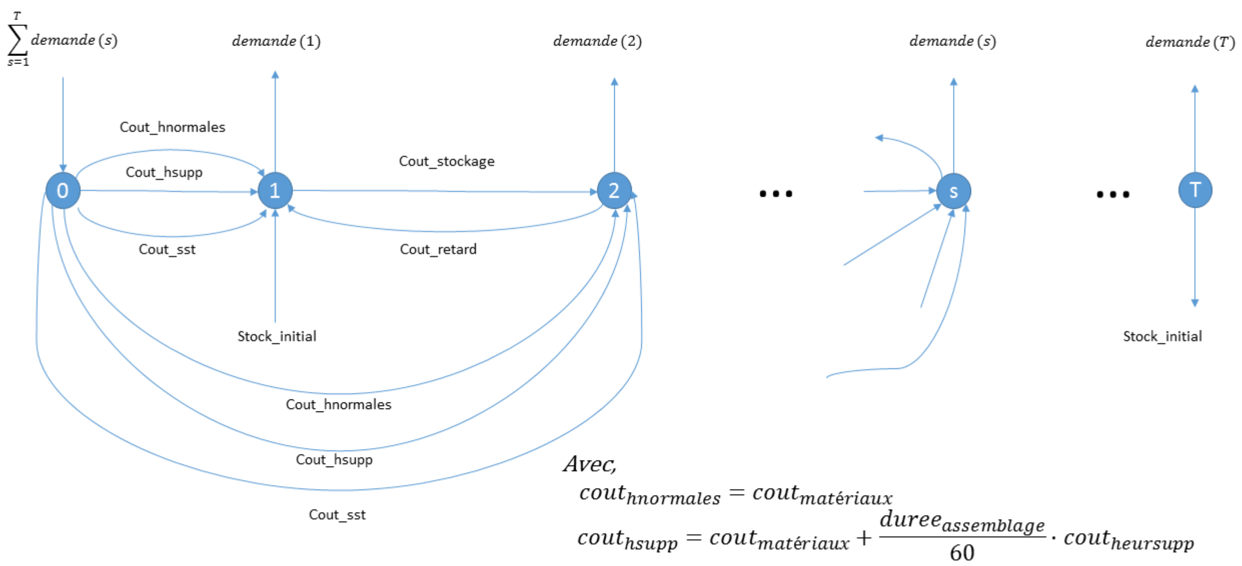


FIGURE 1 – Schéma représentant le graphe utilisé pour définir le problème de flot de coût minimal

# Question 3

# Question 4

Le problème dual nous donne de telles informations. En effet, soit notre problème reformulé sous forme standard :

$$\begin{aligned} \texttt{minimiser } & c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Une partie de vecteur b correspond exactement à la demande. Or, si $y_*$ est solution du dual de ce problème, la variation de la fonction objectif à une modification $\Delta b$ du vecteur $b$ sera exactement égal à $y_*^T \Delta b$.
En particulier donc, si $\Delta b$ est égal à

$$epsilon * delta\_demande$$

aux composantes de $b$ correspondant à la demande et 0 partout ailleurs, $y_*^T \Delta b$ nous donnera la variation de l'objectif causée par cette variation de la demande.