UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

Planification de la production d'une ligne d'assemblage de smartphones

Groupe 1

John DE WASSEIGE (5224-1300)
Antoine LEGAT (4776-1300)
Quentin LÉTÉ (6642-1300)

2014 - 2015[1]

1. Image tirée de Pear Phones. (2014). *Pear Phone*. En ligne sur le site web de Pear Phone `http://www.pear-phones.com/`.

Première partie

Modélisation et implémentation de la ligne d'assemblage simple

Question 1

Donnez une formulation linéaire (continue, sans variables entières) du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant. Décrivez successivement variables, contraintes et fonction objectif. A ce stade, le fait de ne pas imposer l'intégralité des variables vous parait-il problématique ?

Variables

Le tableau 1 contient les différentes variables $x_{s,\lambda}$ qui correspondent au nombre de smartphones pour chaque semaine s avec la caractéristique λ.

Variable	Caractéristiques des smartphones
$x_{s,\text{n}}$	Produits au *salaire normal.*
$x_{s,\text{sup}}$	Produits pendant les *heures supplémentaires.*
$x_{s,\text{stock}}$	Conservés en *stock.*
$x_{s,\text{retard}}$	Vendus une semaine en *retard.*
$x_{s,\text{sst}}$	Sous-traités.

Table 1 – Variables de la modélisation de la ligne d'assemblage simple.

Contraintes

Voici les contraintes du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant. On pose que $\Delta x_{s,\lambda} = x_{s,\lambda} - x_{s-1,\lambda}$. Voici les contraintes du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel constant, s étant un naturel allant de 1 à T.

$$
\begin{aligned}
\Delta x_{s,\text{stock}} + \texttt{demande}(s) &= x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{sst}} + \Delta x_{s,\text{retard}} && \forall s \\
x_{T,\text{stock}} &= \texttt{stock\_initial} \\
x_{T,\text{retard}} &= 0 \\
x_{s-1,\text{retard}} + \Delta x_{s,\text{stock}} &\leq x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{sst}}\ {}^{2} && \forall s \\
x_{s,\text{n}} &\leq 35 \cdot \texttt{nb\_ouvriers}/d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sup}} &\leq \texttt{nb\_max\_heure\_sup} \cdot \texttt{nb\_ouvriers}/d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sst}} &\leq \texttt{nb\_max\_sous\_traitant} && \forall s \\
x_{s,\lambda} &\geq 0 && \forall s, \lambda
\end{aligned}
$$

2. Pour limiter les retards à une seule semaine.

Fonction objectif

$$\text{minimiser coût}_{\text{tot}} = \sum_{s=1}^{T} \text{coût}(s)$$

où coût(s) est le coût pour la semaine s et vaut

$$c_m\, x_{s,\text{n}} + (c_m + d_{a,h}\, c_{hs})\, x_{s,\text{sup}} + c_s\, x_{s,\text{stock}} + c_r\, x_{s,\text{retard}} + c_{sst}\, x_{s,\text{sst}}.$$

Le tableau 2 contient les abréviations des constantes utilisées.

Paramètre	Constante représentée
c_m	`cout_materiaux`
c_{hs}	`cout_heure_sup`
c_s	`cout_stockage`
c_r	`cout_retard`
c_{sst}	`cout_sous_traitant`
$d_{a,h}$	`duree_assemblage`/60, [heures]

Table 2 – Constantes de la modélisation de la ligne d'assemblage simple.

On observe tout de suite que $1/d_{a,h}$ représente le nombre de smartphones assemblables par heure pour un ouvrier.

On remarquera que le terme associé au coût des heures normales des ouvriers a été omis dans la fonction objectif puisqu'il n'est pas nécessaire. En effet, les ouvriers ne sont pas payés en fonction du nombre d'heures qu'ils travaillent réellement mais bien à la semaine et donc pour un nombre d'heures constant. Ceci correspond au terme $35 \cdot$ `cout_horaire` $\cdot$ `nb_ouvriers` qu'il est impossible de minimiser. Cela n'aura donc pas d'impact sur notre solution, il faudra seulement modifier le coût total de la manière suivante

$$\text{coût}_{\text{tot}} \leftarrow \text{coût}_{\text{tot}} + T \cdot 35 \cdot \texttt{cout\_horaire} \cdot \texttt{nb\_ouvriers}$$

A ce stade, le fait de ne pas imposer l'intégralité des variables parait problématique dans le sens où les solutions ne sont pas garanties d'être entières. Ce qui n'est pas envisageable vu que celles-ci représentent des quantités de smartphones. Par exemple, il est possible que $x_{s,\text{n}}$ ne soit pas entier si $35 \cdot$ `nb_ouvriers`$/d_{a,h}$ ne l'est pas.

Question 2

Démontrez que, sous certaines hypothèses raisonnables, il est possible de garantir que votre modèle linéaire continu admette toujours une solution entière, c'est-à-dire ne comportant que des quantités produites entières chaque semaine. L'une de ces hypothèses est l'intégralité de la demande chaque semaine ; quelles sont les autres ?

Il est possible de garantir que notre modèle linéaire continu admette toujours une solution entière sous certaines hypothèses. Une première hypothèse est que tous les éléments du vecteur `demande` soient entiers. Il faut également que les constantes `stock_initial`, `nb_max_sous_traitant` et `nb_ouvriers` soient entières bien sûr, sinon cela n'aurait d'ailleurs pas de sens physique. Mais il est également nécessaire que `nb_max_heure_sup` soit entier et que $d_{a,h}$ soit multiple de $35 \cdot$ `nb_ouvriers` et de `nb_max_heure_sup` $\cdot$ `nb_ouvriers`, ce qui implique qu'il soit aussi entier. Notons enfin que nous supposons ces constantes positives, sans quoi notre modèle produirait des résultats aberrants, voire pas de résultat du tout.

Preuve

Pour le prouver, nous allons reformuler notre problème sous la forme d'un problème de flot de coût minimum. Soit le graphe orienté $G(V, E)$, où V représente l'ensemble des noeuds et E l'ensemble des arêtes. Il est utile à ce stade de s'aider d'un schéma représentant le graphe. Celui-ci est repris à la figure 1. V compte un noeud pour chaque semaine et un noeud initial. On a donc $V := 0, 1, 2, ..., T$ où 0 est le noeud initial et s est le noeud de la semaine s. Définissons maintenant les arêtes de notre graphe. Pour le noeud 0, on définit [3]

$$V^+(0) = \{s_1, s_2, s_3 \quad \forall s \neq 0\}$$

avec

$$\{(0, s_1), (0, s_2), (0, s_3)\} \in E \quad \forall s.$$

s_1, s_2, s_3 représentent les différentes manières de produire les smartphones, c'est-à-dire les ouvriers au salaire normal, les ouvriers au salaire des heures supplémentaires et la sous-traitance. Il y a donc trois arcs entre les noeuds 0 et s. Pour le noeud initial,

$$V^-(0) = \emptyset$$

Définissons ensuite les arêtes des noeuds correspondants aux semaines

$$V^+(s) = \{s + 1\} \qquad \forall s \neq 0$$

avec

$$\{(s, s + 1)\} \in E \qquad \forall s \neq 0, T$$

Et,

$$V^-(s) = \{0, s - 1\} \qquad \forall s \neq 0$$

avec

$$\{(s - 1, s)\} \in E \qquad \forall s \neq 0, 1$$

Nous devons encore définir les termes sources pour chaque noeud ainsi que les capacités maximales pour chaque arc. Soit

$$b_s = -\texttt{demande}(s) \qquad s \in V \backslash \{0\}$$

Et

$$b_0 = \sum_{s=1}^{T} \texttt{demande}(s)$$

On a aussi

$$b_1 = \texttt{stock\_initial}$$

3. Notations : $V^-(s)$ désigne l'ensemble des noeuds dont l'arête "rentre" dans le noeud s, à l'inverse $V^+(s)$ désigne les "sortants".

Et

$$b_T = -\texttt{stock\_initial}$$

Soient h_{ij} avec $(i, j) \in E$ les capacités maximales dans l'arc (i, j). On a $\forall s \neq 0$

$$\begin{aligned} h_{0,s_1} &= 35 \cdot \texttt{nb\_ouvriers}/d_{a,h} \\ h_{0,s_2} &= \texttt{nb\_max\_heure\_sup} \cdot \texttt{nb\_ouvriers}/d_{a,h} \\ h_{0,s_3} &= \texttt{nb\_max\_sous\_traitant} \end{aligned}$$

Le graphe maintenant défini, on peut définir le problème de minimisation suivant :

Variables Soit x_{ij} le flot dans l'arc (i, j).

Objectif Le coût total est minimisé.

$$\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Equations Le flot est conservé en chaque noeud

$$\sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} = b_i \qquad i \in V$$

Les capacités maximales ne sont pas dépassées

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} \qquad (i, j) \in E$$

On peut maintenant utiliser le théorème suivant pour conclure que, si nos hypothèses sont vérifiées, notre problème admettra au moins une solution entière.

Théorème Si les demandes b_i et les capacités h_{ij} d'un problème de flot de coût minimum sont entières alors il existe une solution optimale entière. [4]

Nous devons donc imposer que `stock_initial` et tous les éléments du vecteur `demande` soient entiers afin que tous les b_i le soient. Pour trouver les hypothèses relatives aux h_{ij}, nous procédons de la manière suivante. `nb_ouvriers` doit être entier, sans quoi cela n'a pas de sens physique. Or, pour que h_{0,s_1} soit entier, $35 \cdot \texttt{nb\_ouvriers}$ doit être divisible par $d_{a,h}$, ce qui équivaut à dire que $d_{a,h}$ est multiple de $35 \cdot \texttt{nb\_ouvriers}$. On en conclut aussi que $d_{a,h}$ est entier. Nous raisonnons de la même manière pour h_{0,s_2} et trouvons que $d_{a,h}$ doit également être multiple de $\texttt{nb\_max\_heure\_sup} \cdot \texttt{nb\_ouvriers}$. On en déduit que `nb_max_heure_sup` est lui aussi entier. Enfin, `nb_max_sous_traitant` doit lui aussi être entier.

On note que les deux hypthèses "$d_{a,h}$ est multiple de ..." seront satisfaites si `nb_ouvriers` est multiple de $d_{a,h}$ (ou même encore plus simplement si $1/d_{a,h}$ est entier). Mais il faut être attentif au fait que cette condition, bien que suffisante, n'est *pas nécessaire*. En effet, on peut considérer l'exemple où $\texttt{nb\_ouvriers} = 1$, $d_{a,h} = 5$ et $\texttt{nb\_max\_heure\_sup} = 10$. Les hypothèses sont alors remplies sans que `nb_ouvriers` ne soit multiple de $d_{a,h}$ (et sans que $1/d_{a,h}$ ne soit entier).

4. En regardant de plus près la démonstration de ce résultat, on note également que chaque sommet est entier. Cependant, ce théorème ne nous dit *pas* que *toutes* les solutions optimales sont entières.

Question 3

Implémentez sous MATLAB ce modèle linéaire continu, et calculez la solution correspondant aux données fournies sur icampus (utilisez la fonction `linprog`). Commentez l'allure de la solution obtenue.

Notre implémentation se trouve dans le fichier `question3.m`. Il nous parait important d'expliquer en quelques mots le rôle de la fonction `kron`. Celle-ci effectue le produit tensoriel de Kronecker entre deux matrices. C'est-à-dire que pour `kron(A,B)`, chaque élément de A multiplie la matrice B. En l'utilisant de manière appropriée avec des matrices nulles et diagonales, on peut effectuer un remplissage des matrices des contraintes très efficace.

Un exemple d'utilisation de cette fonction pour remplir la matrice des contraintes se trouve dans l'annexe A.

Les résultats obtenus sont représentés graphiquement à la figure 2. Comme on pouvait s'y attendre, la solution optimale utilise presque chaque semaine au maximum la ressource la moins chère, en l'occurence la production par les ouvriers payés au salaire normal. On observe également que la solution optimale constitue un stock dans la première partie de la planification pour faire face au pic de demande situé entre les semaines 5 et 8. La demande est particulièrement importante à la semaine 7, et on voit que notre stock constitué s'épuise totalement lors de cette semaine. On commence également à avoir recours au retard.

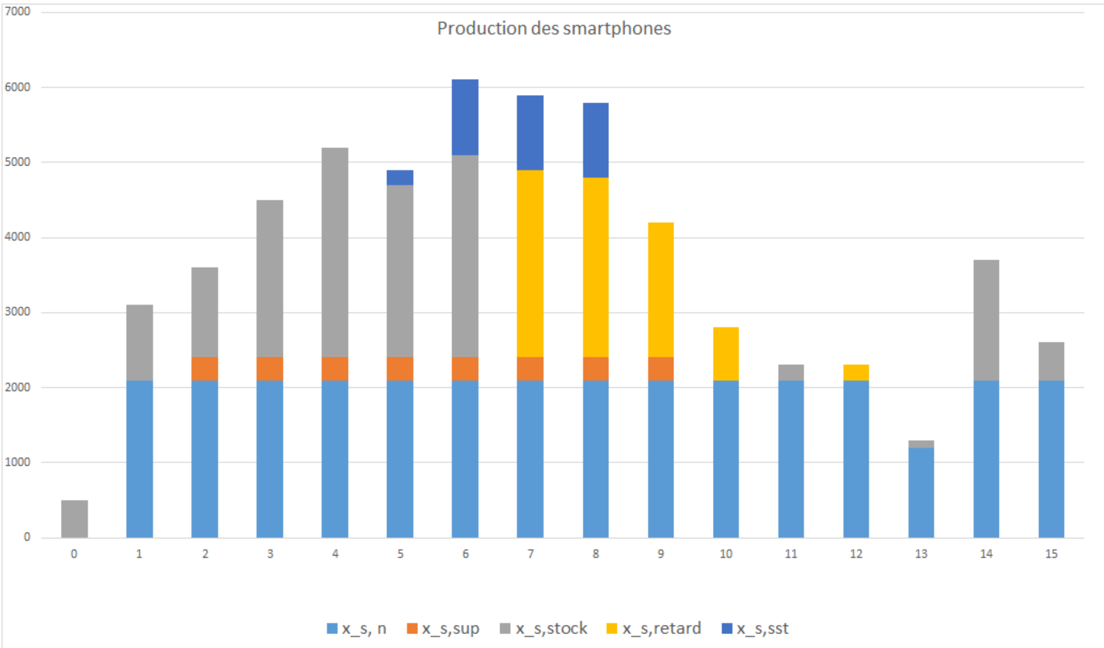

FIGURE 2 – Répartition du moyen de production des smartphones en fonction des semaines.

Question 4

Décrivez une procédure permettant, avec le moins de nouveaux calculs possibles, d'évaluer les conséquences sur la fonction objectif d'une petite variation de la demande prévue. Plus précisément, analysez l'effet du remplacement du vecteur `demande` par le vecteur *`demande + epsilon * delta_demande` où `delta_demande` est un vecteur de perturbation sur la demande, et `epsilon` est un paramètre scalaire dont la valeur est faible.*

Le dual du problème nous permet d'évaluer assez simplement les conséquences sur la fonction objectif d'une petite variation de la demande prévue.

En effet, notre problème peut être simplifié sous la forme

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } c^T x \\ &\qquad a_i^T x = b_i && i = 1, ..., T, ..., T+7 \\ &\qquad a_i^T x \leq b_i && i = T+8, ..., end \\ &\qquad x_j \geq 0 && \forall j \end{aligned}$$

On obtient ensuite sa forme duale

$$\begin{aligned} &\text{maximiser } b^T y \\ &\qquad y_i \text{ libre} && i = 1, ..., T, ..., T+7 \\ &\qquad y_i \leq 0 && i = T+8, ..., end \\ &\qquad A_j^T y \leq c_j && \forall j \end{aligned}$$

On remarque qu'une perturbation des contraintes dans le problème primal correspond à une perturbation de la fonction objectif dans le problème dual. Il nous suffit donc simplement de calculer une solution optimale du dual y^* puis d'effectuer le produit scalaire

$$\Delta z^* = (\Delta b)^T y^*$$

pour chaque perturbation Δb pour connaître l'impact Δz^* sur le cout.

Ce résultat n'est valable que pour des petites variations de b. En effet, pour l'obtenir, il faut supposer que l'on connaît un sommet optimal admissible. Or, en changeant le problème, il n'est pas garanti que ce sommet reste optimal et admissible. Plus la perturbation est importante, plus il y a de chances que notre sommet optimal change.

Question 5

Testez sous MATLAB la procédure du point précédent avec les données fournies. Comparez ensuite la prédiction obtenue par cette procédure avec la valeur obtenue en résolvant à nouveau complètement le modèle, et ce pour un échantillon de valeurs du paramètre `epsilon` comprises entre 0 *et* 1 *(par exemple `0:.1:1`). Commentez (éventuellement en vous aidant d'un graphique).*

Comparaison À FAIRE.

Notre fonction `compareDuality.m` permet de prouver l'efficacité du problème dual lorsqu'on perturbe le vecteur des contraintes. En effet, si l'on décide d'analyser via le problème primal ce qu'il se passe lorsque les contraintes sont modifiées, il est nécessaire de résoudre le problème à chaque perturbation (plusieurs appels à `linprog`). Tandis que pour le problème dual, il suffit d'effectuer plusieurs combinaisons linéaires de la fonction objectif avec *une seule* solution y^* (c'est-à-dire un apppel à `linprog`). On retrouve les résultats des tests d'efficacité sur le graphe de la figure 4.

Cependant, comme expliqué dans la section précédente, ce résultat n'est valable que pour des petites variations des contraintes. Si `epsilon` devient trop grand, l'analyse par le primal pourrait diverger de la solution du primal. C'est ce que nous obtenons en implémentant ces deux méthodes, comme représenté à la figure 3

Question 6

Décrivez (sans l'implémenter) l'adaptation qu'il serait nécessaire à apporter au modèle si le coût de l'heure supplémentaire pris en compte était variable. Plus concrètement, considérez qu'après la première heure supplémentaire (facturée au coût horaire `cout_heure_sup` *standard), chaque heure supplémentaire (éventuellement) est facturée à un coût horaire supérieur de 5% à celui de l'heure supplémentaire précédente. Est-il toujours possible de formuler (ou reformuler) le problème sous forme linéaire ? Expliquez. Et que se passerait-il si le coût horaire des supplémentaires* diminuait *lorsque le nombre d'heure prestées augmente ? Justifiez.*

Si le coût des heures supplémentaires n'est plus constant mais augmente au fur et à mesure de leur utilisation, le coût de celles-ci dépenderait directement du nombre de smartphones produits de cette manière.

En effet, on peut réécrire notre fonction objectif comme

$$\text{minimiser} \sum_{s=1}^{T} c_m\, x_{s,\text{n}} + c_m\, x_{s,\text{sup}} + \mathcal{C}_{hs}(x_{s,\text{sup}}) + c_s\, x_{s,\text{stock}} + c_r\, x_{s,\text{retard}} + c_{sst}\, x_{s,\text{sst}}$$

avec

$$\mathcal{C}_{hs}(x_{s,\text{sup}}) = \texttt{cout\_heure\_sup} \cdot \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (0.05)^i$$

Par soucis de lisibilité, on a posé

$$\alpha = x_{s,\text{sup}}\, d_{a,h} - 1$$

α correspond donc au nombre d'heures supplémentaires qui auront un cout différent de `cout_heure_sup`.

On remarque immédiatement que la fonction $\mathcal{C}_{hs}$ est *non-linéaire* en $x_{s,\text{sup}}$ puisque

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha!}{i!\,(\alpha - i)!}$$

De même, si le coût des heures supplémentaires *diminuait* avec un taux de 0.05, on aurait

$$c_{hs}(x_{s,\text{sup}}) = \texttt{cout\_heure\_sup} \cdot \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i (0.05)^i \binom{\alpha}{i}$$

Deuxième partie

Modélisation et implémentation

de la ligne d'assemblage avec gestion du personnel

Question 7

Donnez à présent une formulation linéaire (continue, sans variables entières) du problème de la planification de la ligne d'assemblage incluant le gestion du personnel, en vous basant sur le modèle déjà construit à la Question 1. Décrivez successivement variables, contraintes et fonction objectif.

Le nombre d'ouvriers n'étant plus constant, nous allons rajouter trois variables par semaine pour modéliser le problème :

- ◇ $n_{s,\text{emb}}$ le nombre d'ouvriers embauchés au début de la semaine s,
- ◇ $n_{s,\text{lic}}$ le nombre d'ouvriers licienciés au début de la semaine s,
- ◇ $n_{s,\text{ouv}}$ le nombre d'ouvriers au début de la semaine s, après les embauches et les licenciements.

Dans la fonction objectif, il faut maintenant tenir compte du cout de ces recrutements et ces licenciements ainsi que du coût du salaire des ouvriers, non constant.

En ce qui concerne les contraintes, il faut modifier celles sur le nombre de smartphones maximum produits dans l'entreprise. Il faut également ajouter les contraintes correspondants au nombre d'ouvriers (maximum et minimum).

Fonction objectif

$$\begin{aligned}\text{minimiser} \sum_{s=1}^{T} c_m\, x_{s,\text{n}} + (c_m + d_{a,h}\, c_{hs})\, x_{s,\text{sup}} + c_s\, x_{s,\text{stock}} + c_r\, x_{s,\text{retard}} + c_{sst}\, x_{s,\text{sst}} \\ + 35\, c_h\, n_{s,\text{ouv}} + c_{emb}\, n_{s,\text{emb}} + c_{lic}\, n_{s,\text{lic}}\end{aligned}$$

Le tableau 3 contient les nouvelles abréviations des constantes utilisées.

Paramètre	Constante représentée
c_h	`cout_horaire`
c_{emb}	`cout_embauche`
c_{lic}	`cout_licenciement`

TABLE 3 – Constantes de la modélisation de la ligne d'assemblage avec gestion du personnel.

Contraintes

Voici les contraintes du problème de la planification de la ligne d'assemblage à personnel variable.

$$
\begin{aligned}
\Delta x_{s,\text{stock}} + \texttt{demande}(s) &= x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{retard}} + x_{s,\text{sst}} - x_{s-1,\text{retard}} && \forall s \\
\Delta n_{s,\text{ouv}} &= n_{s,\text{emb}} - n_{s,\text{lic}} && \forall s \\
x_{0,\text{n}} &= 0 \\
x_{0,\text{sup}} &= 0 \\
x_{0,\text{stock}} &= \texttt{stock\_initial} \\
x_{0,\text{retard}} &= 0 \\
x_{0,\text{sst}} &= 0 \\
n_{0,\text{ouv}} &= \texttt{nb\_ouvriers} \\
n_{0,\text{emb}} &= 0 \\
n_{0,\text{lic}} &= 0 \\
x_{T,\text{stock}} &= \texttt{stock\_initial} \\
x_{T,\text{retard}} &= 0 \\
x_{s-1,\text{retard}} + \Delta x_{s,\text{stock}} &\leq x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{sst}} && \forall s \\
x_{s,\text{n}} &\leq 35 \cdot n_{s,\text{ouv}} / d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sup}} &\leq \texttt{nb\_max\_heure\_sup} \cdot n_{s,\text{ouv}} / d_{a,h} && \forall s \\
x_{s,\text{sst}} &\leq \texttt{nb\_max\_sous\_traitant} && \forall s \\
n_{s,\text{ouv}} &\leq \texttt{nb\_max\_ouvriers} && \forall s \\
x_s, n_s &\geq 0 && \forall s
\end{aligned}
$$

Question 8

Implémentez sous MATLAB ce modèle linéaire continu, et calculez la solution correspondant aux données fournies sur icampus. Commentez l'allure de la solution obtenue, et comparez à la solution du modèle simplifié. Commentez également l'intégralité des variables de la solution ; celle-ci présente-t-elle un aspect problématique ?

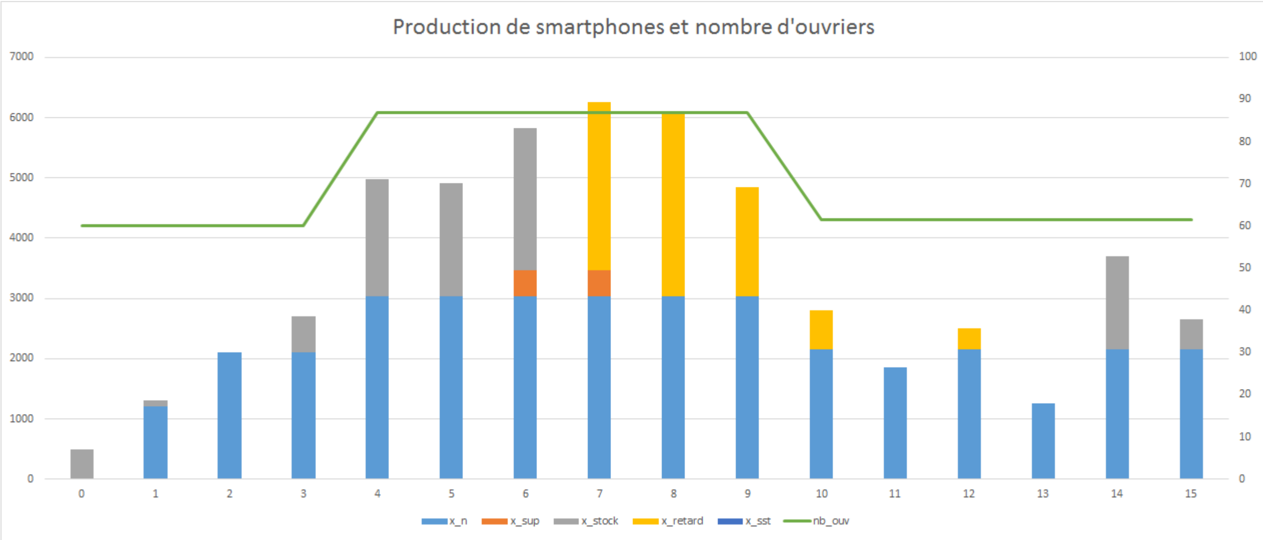

FIGURE 5 – Répartition du moyen de production des smartphones en fonction des semaines et évolution du nombre d'ouvriers dans le cas non entier.

Les résultats de cette nouvelle implémentation sont présentés à la figure 5. Les résultats obtenus ne sont plus entiers car le problème ne peut plus être reformulé comme un problème de flot. Ceci est problématique car il serait impossible de réaliser cette production exacte en pratique. Pour les applications, il est plus intéressant de chercher la solution otimale entière. C'est pourquoi nous commenterons l'allure de la solution à la question 9 où nous avons résolu le problème en variables entières. Néanmoins, nous pouvons déjà faire deux remarques à ce stade :

— Le coût est ici de 3.755.214 unités. En comparaison, le coût obtenu par résolution en variables entières est de 3.755.300 unités. Il y a donc une différence de coût, certes très faible. La nouvelle contrainte appliquée au système, celle de résoudre en variables entières, nous fait perdre en efficacité.
— Les résultats du modèle en variables continues sont très semblables à ceux du modèle en variables entières, présentés à la figure 6. La seule différence notable est l'utilisation de retard à la place d'ouvriers payés au salaire des heures supplémentaires lors de la huitième semaine, probablement due à la faible différence de coût entre les deux possibilités.

Question 9

Résolvez à nouveau ce modèle en imposant à présent l'intégralité des variables pour lesquelles c'est absolument indispensable (utilisez la fonction `intlinprog`*). Commentez l'allure de la solution obtenue, et comparez aux solutions obtenues précédemment.*

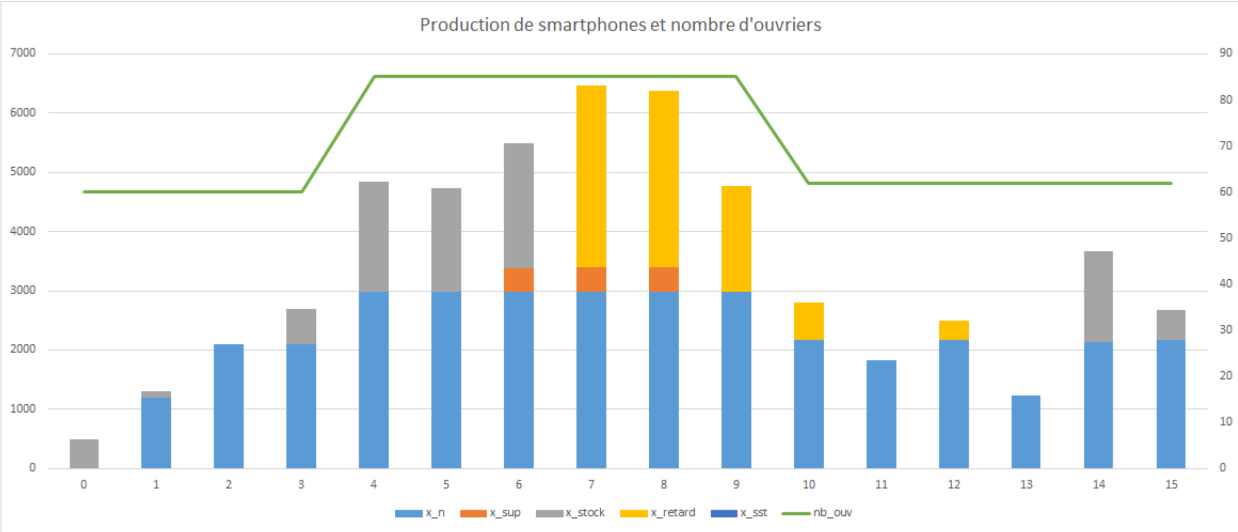

FIGURE 6 – Répartition du moyen de production des smartphones en fonction des semaines et évolution du nombre d'ouvriers dans le cas entier.

Les résultats obtenus sont présentés à la figure 6. On observe que la possibilité d'engager et de licencier des ouvriers est bien utilisée. La solution optimale consiste à engager 25 ouvriers pour faire face à l'important pic de demande, puis d'en licencier 23 une fois ce pic dépassé. Cette nouvelle possibilité fait apparaître 3 grande différences entre les solutions :

1. Nous ne devons plus faire appel à la sous-traitance.
2. Nous avons beaucoup moins recours aux heures supplémentaires des ouvriers. Ceux-ci n'en effectuent que lors de 3 semaines, comparé à 8 pour le modèle simplifié.
3. Le stock constitué pour faire face au pic de demande est moins important car notre usine peut absorber une plus grande demande.

Il est également intéressant de remarquer que le nombre d'ouvriers ne change que lors de 2 semaines. On n'engage et on ne licencie qu'une seule fois. Ceci est probeblement dû au coût d'embauche et de licenciement et on voit qu'il était donc très important de l'inclure dans le modèle.

Enfin, le coût a bien baissé grâce à cette nouvelle possibilité. Il est descendu à 3.755.300 unités alors qu'il était de 3.902.000 unités à personnel constant.

Question 10

Critiquez les modèles proposés dans ce projet. Sont-ils réalistes ? Des approximations ont-elles été faites et, si oui sont-elles justifiées ? Quelles améliorations pourriez-vous proposer (sans rentrer dans les détails), avec quel impact potentiel sur la résolution du problème.

Il est intéressant de souligner la différence relativement grande que nous avons obtenue pour les deux types de modèles. Simplifier le modèle peut conduire à des différences importantes. Or, en pratique, on est toujours obligé de simplifier, c'est d'ailleurs le propre d'un modèle. Nous n'obtiendrons probablement jamais la solution qui minimiserait effectivement le coût mais ces modèles nous permettent de nous faire une idée de cette solution, de l'approcher et de baser nos décisions sur des considérations rationnelles.

Un exemple de simplification utilisée dans notre modèle est la valeur fixée à priori du coût de retard. En pratique, il est difficile d'évaluer un tel coût. Il y aura peut-être des coûts directs comme une petite réduction sur le prix fait au client si son produit lui arrive en retard, mais il y aura surtout des coûts indirects liés notamment à la dégradation de l'image de l'entreprise. Nous tentons donc d'appliquer un modèle mathématique à l'économie qui, au contraire des mathématiques, est plutôt une science humaine que scientifique basée notamment sur le risque : est il profitable de prendre le risque de mécontenter des clients pour économiser quelques euros ?

A Utilisation de la fonction `kron`

Afin de comprendre l'utilité et l'efficacité de la fonction `kron`, voici son application pour la contrainte

$$\Delta x_{s,\text{stock}} + \texttt{demande}(s) = x_{s,\text{n}} + x_{s,\text{sup}} + x_{s,\text{retard}} + x_{s,\text{sst}} - x_{s-1,\text{retard}} \qquad \forall s$$

pour une planification sur deux semaines ($T = 2$).

Voici le code correspondant

```
1  dSeg    = [1  1  -1  1  1];
2  dpSeg   = [0  0  1  -1  0];
3  Aeq  =  [kron([eye(T),zeros(T,1)],dpSeg) ...
4        + kron([zeros(T,1),eye(T)],dSeg)];
5  beq  =  [d.demande'];
```

Rappelons la forme de notre vecteur x_s

$$x_s = \begin{pmatrix} x_{s,\text{n}} & x_{s,\text{sup}} & x_{s,\text{stock}} & x_{s,\text{retard}} & x_{s,\text{sst}} \end{pmatrix}^T.$$

Nous avons tout d'abord la matrice créée à la ligne 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ensuite celle créée à la ligne 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela donne comme voulu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0,\text{n}} \\ x_{0,\text{sup}} \\ x_{0,\text{stock}} \\ x_{0,\text{retard}} \\ x_{0,\text{sst}} \\ x_{1,\text{n}} \\ x_{1,\text{sup}} \\ x_{1,\text{stock}} \\ x_{1,\text{retard}} \\ x_{1,\text{sst}} \\ x_{2,\text{n}} \\ x_{2,\text{sup}} \\ x_{2,\text{stock}} \\ x_{2,\text{retard}} \\ x_{2,\text{sst}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \texttt{demande}(1) \\ \texttt{demande}(2) \end{pmatrix}.$$

Cette méthode s'avère simple et efficace puisque ces 5 lignes de code suffisent à remplir notre matrice peu importe le nombre de semaines.

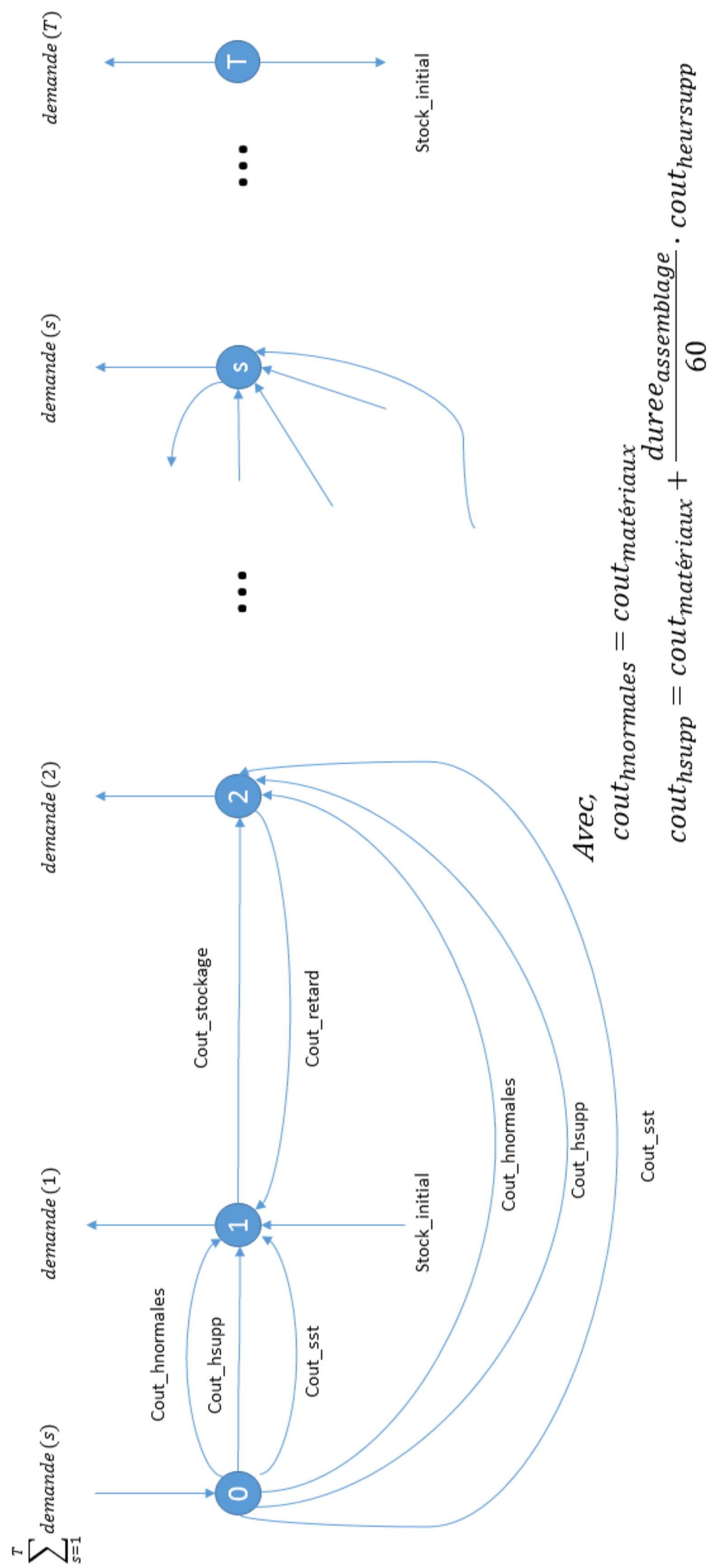

FIGURE 1 – Schéma représentant le graphe utilisé pour définir le problème de flot de coût minimal.

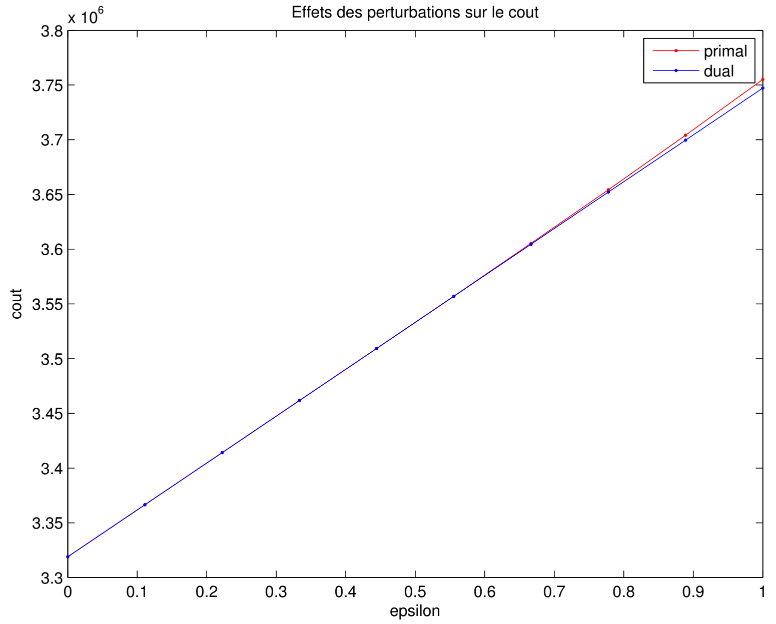

FIGURE 3 – Comparaison de la réponse aux perturbations du primal et dual. On remarque que les valeurs restent égales jusqu'à $\epsilon \approx 0.6$.

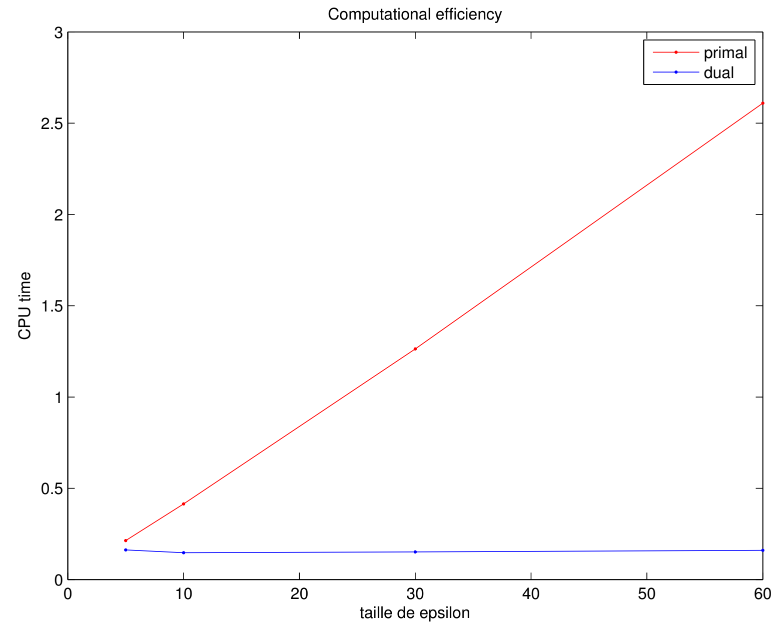

FIGURE 4 – Comparaison de l'efficacité du primal et dual lors de l'analyse de perturbations sur les contraintes.