

PROJET ENJEU : SANTÉ ET BIOTECHNOLOGIES

ÉTUDE DOCUMENTAIRE ET BIBLIOGRAPHIQUE

Développement d'outils mathématiques pour l'agriculture de précision

Client et Référent Pédagogique

Pierre CARMIER
Paul-Henry COURNÈDE

P2018 : groupe SBT-11

John DE WASSEIGE
Nayef DERWICHE
Alexis MATHEY
Daina ZHENG

10 décembre 2015

Table des matières

1	Résumé	2
2	Étude bibliographique	3
2.1	Concepts d'agriculture de précision	3
2.2	Fonctionnement et développement de la plante	4
2.2.1	Généralités	4
2.2.2	Photosynthèse	5
2.3	Histoire de la modélisation de la croissance des plantes	6
2.3.1	Débuts de la botanique et de l'agronomie	6
2.3.2	Les premiers modèles	7
2.3.3	Informatique et modèles géométriques	8
2.3.4	Le modèle GreenLab	10
2.4	Méthodologie de modélisation et modèle LNAS betterave	12
2.4.1	Introduction	12
2.4.2	Caractéristiques propres aux modèles de croissance de plantes	13
2.4.3	Bonnes pratiques en modélisation	13
2.4.4	Modèle LNAS betterave	14
2.5	Modèle LNAS blé	15
3	Contexte et objectifs	17
3.1	Contexte	17
3.2	Présentation du client	17
3.3	Objectifs poursuivis	17
4	Organisation du groupe	19
4.1	Outils de travail collaboratif	19
4.2	Gestion de la bibliographie	20
4.3	Organisation et partage des tâches	20
4.4	Risques, difficultés et problèmes potentiels	21
	Conclusion	22
	Remerciements	23
	Bibliographie	24
A	Planning	25
B	Fiche objectif	26
C	Arbre de pertinence	27
D	Modèle LNAS appliqué au blé	28

1 Résumé

Ce rapport a été réalisé dans le cadre du projet enjeu Santé et Biotechnologies à CentraleSupélec. Le but premier de ce projet est de se retrouver face à un problème ouvert où il n'existe pas forcément de solution exacte comme nous sommes habitués à avoir dans nos autres cours. Un autre but poursuivi est de se retrouver en situation concrète de collobaration avec un client extérieur, ce qui change complètement du cadre habituel des travaux de groupes. Finalement, ce projet nous a appris à travailler en autonomie ainsi qu'à mener des recherches selon une démarche scientifique.

Notre projet enjeu se concentre sur le *développement d'outils mathématiques pour l'agriculture de précision* avec l'équipe Digiplante. La première partie de ce titre est assez compréhensible, la deuxième cependant suscite des nombreuses questions qui méritent des réponses. La croissance exponentielle de la population au cours des dernières années ont obligé la science à avancer dans le domaine de l'agriculture. Le contexte de réchauffement climatique oblige également à suivre une démarche scientifique qui se veut respectueuse de l'environnement.

Dans un premier temps, nous exposons une *synthèse documentaire* balayant le plus largement possible le sujet de l'agriculture de précision, synthèse qui est le fruit de notre étude bibliographique. Les références utilisées se trouvent en annexe. Au cours de cette synthèse, nous commençons par poser les bases nécessaires, en introduisant le concept d'agriculture de précision, des notions de physiologie des plantes ainsi qu'un bref historique de la compréhension des plantes. Nous entrons ensuite dans le vif du sujet en détaillant quelques modèles et leurs caractéristiques mathématiques.

On retrouve ensuite une partie sur le contexte et les objectifs détaillés du projet. Les différents outils qui nous ont aidé dans la réalisation de cette partie se trouvent en annexe.

Nous finirons par expliquer l'organisation interne du groupe ainsi que les moyens mis en œuvre pour assurer le bon déroulement du projet.

2 Étude bibliographique

Afin d’avoir une première approche globale du sujet, nous commençons par introduire le concept d’agriculture de précision et son rôle de plus en plus important. Il semble en effet important de commencer par expliquer *pourquoi* des laboratoires comme DigiPlante existent et plus généralement *pourquoi* faire des progrès dans le domaine de l’agriculture de précision est nécessaire.

On présente ensuite des concepts généraux sur la physiologie des plantes ainsi que la réaction de photosynthèse, critique dans la création de biomasse. Ceux-ci permettront par la suite de comprendre plus aisément les modèles mathématiques utilisés pour décrire la croissance des plantes.

Une fois le contexte général posé, nous expliquons l’histoire de la modélisation des plantes. Ceci va nous permettre de comprendre quelles ont été les différentes sources d’influences tout au long de l’étude de la modélisation des plantes.

On décrira finalement le modèle LNAS appliqué au blé, ceci en se rappelant que l’objectif poursuivi est de prédire le rendement de la biomasse totale de la plante.

2.1 Concepts d’agriculture de précision

La croissance exponentielle de la population [14] au cours des dernières décennies et par conséquent la nécessité de nourrir tout le monde, ne laisse pas d’autres choix que d’optimiser l’agriculture. Cependant le concept d’optimisation de l’agriculture peut paraître assez flou et général. Une définition assez intuitive d’une agriculture optimisée peut être d’essayer d’obtenir les récoltes les plus bénéfiques en ayant une consommation minimum d’énergie et d’intrants (eau, engrais...) en tenant compte de facteurs à la fois agronomiques, environnementaux et économiques [13].

C’est précisément ce que vise l’agriculture de précision. Globalement, on dira que « l’agriculture de précision désigne l’ensemble des techniques culturales basées sur l’utilisation des nouvelles technologies de mesure et de traitement de l’information spatialisée » [7]. Le principe général consiste à caractériser le milieu dans toute sa variabilité spatiale et non comme un ensemble homogène. On va donc segmenter les parcelles agricoles en sous-parcelles que l’on considère comme homogènes vis-à-vis de certains paramètres. À l’aide des informations récoltées sur l’ensemble des parcelles, on va pouvoir cartographier le domaine. Un exemple type de l’application de ce principe à un champ est donné dans la Figure 1.

À ce jour, les coûts engendrés par les installations technologiques nécessaires pour utiliser les systèmes d’agriculture de précision sont très élevés mais l’investissement est souvent rentabilisé à long terme, surtout dans le cas de grandes parcelles. En effet, cette nouvelle forme d’agriculture ne permet pas seulement d’être bénéfique pour les sols et nappes phréatiques, elle engendre également une diminution des dépenses de l’agriculteur par une consommation moins importante d’engrais et d’eau.

À cette diminution d’utilisation d’engrais s’associe une réduction des émissions de particules néfastes pour l’environnement telles que des nitrates, phosphates et

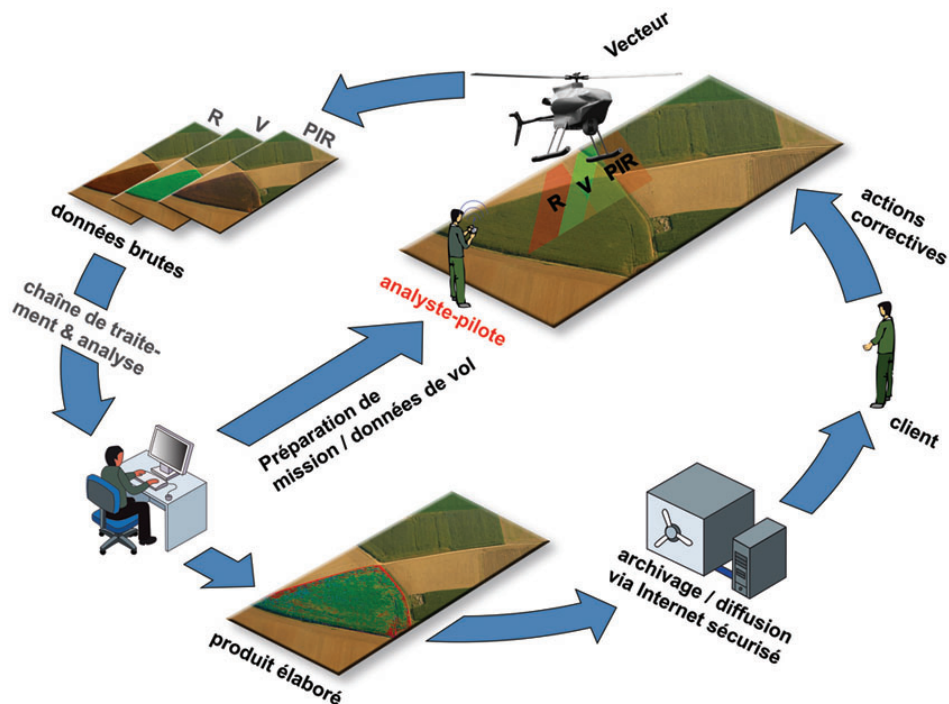


FIGURE 1 – Représentation d’une application d’agriculture de précision [1]. On retrouve un système d’acquisition d’images sur drones ainsi qu’une analyse rétroactive des données récupérées.

pesticides [8]. Ce dernier point semble d’autant plus important dans le contexte écologique actuel où le respect de l’environnement est devenu nécessaire tant d’un point de vue légal que moral.

2.2 Fonctionnement et développement de la plante

2.2.1 Généralités

Tout d’abord, présentons succinctement comment se développe et fonctionne une plante. La science qui décrit l’ensemble des mécanismes qui participent à l’édification d’un organisme vivant est appelée morphogénèse

Chez les plantes, la morphogénèse commence avec la germination de la graine et s’arrête à la mort de la plante. [2, p. 22]. Celle-ci diffère d’une plante à l’autre, et dépend également de l’environnement de la plante.

Ce sont les méristèmes¹ qui permettent à la plante de se développer, en allongeant des organes déjà existants ou en créant de nouveaux organes. Lors de la germination de la graine, au stade embryonnaire, des méristèmes permettent déjà le développement de la plante (méristèmes racinaires, caulinaires). On distingue les méristèmes végétatifs, à l’origine des organes végétatifs (tige, feuilles, racines) et les

1. Le méristème est un tissu formé de cellules indifférenciées (embryonnaires) qui se divisent activement et permettent la croissance.

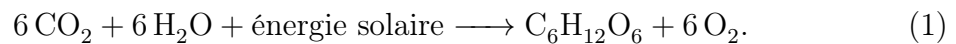
méristèmes reproducteurs, à l'origine des fleurs. On distingue également les méristèmes primaires, qui permettent à la plante de croître en longueur (tiges et racines) et les méristèmes secondaires, qui permettent la croissance en épaisseur de la plante. La création de nouveaux organes est réalisée par alignement de nouvelles briques élémentaires (formée par les méristèmes), constituées :

- d'un noeud, auquel sont liés les feuilles
- d'un entrenoeud
- d'un bourgeon situé à la base du noeud, à l'aisselle des feuilles

Ces briques élémentaires sont appelées *phytomères*. Cette caractéristique permet de simplifier la modélisation de la croissance d'une plante.

2.2.2 Photosynthèse

Sans doute que la particularité la plus intéressante des plantes, et qui justifie le mieux leur étude est leur capacité à synthétiser de la matière organique (des glucides...) à partir de CO_2 , d'eau et d'énergie solaire. C'est la célèbre photosynthèse qui permet ainsi à la plante de transformer de la matière *minérale* en matière *organique*, selon l'équation



Tous les éléments de la plante participent à ce processus de photosynthèse :

- les racines puisent dans le sol l'eau et les sels minéraux nécessaires
- les feuilles captent l'énergie solaire et le dioxyde de carbone (grâce aux cellules chlorophylliennes et aux stomates²⁾)

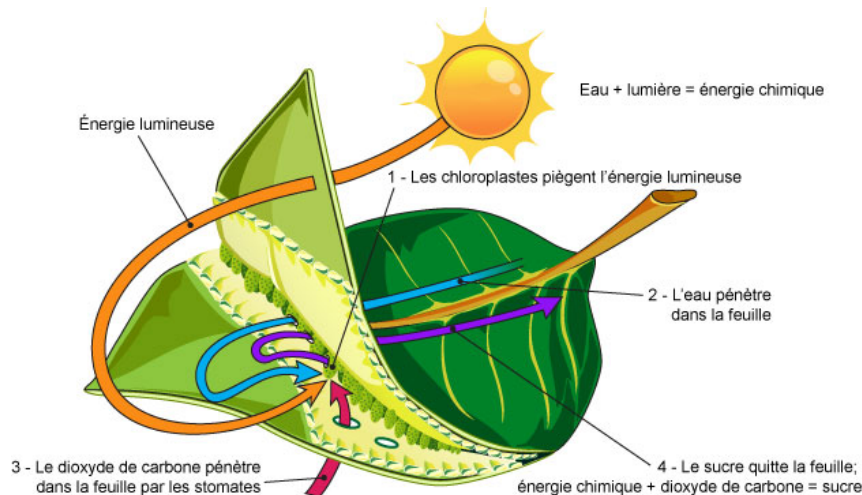


FIGURE 2 – Schéma de la photosynthèse illustrant les différents mécanismes qui permettent à celle-ci d'avoir lieu.

Les sucres ainsi formés apportent l'énergie nécessaire au fonctionnement de la plante et assurent son développement en permettant la synthèse de cellulose qui est

2. Orifice de petite taille situé sur les feuilles qui permet les échanges gazeux entre l'air et la plante.

l'élément constitutif principal des plantes. On identifie ainsi les éléments qui agissent sur la croissance de la plante :

- la lumière
- l'eau
- le dioxyde de carbone
- la température : car la température agit sur l'ouverture des stomates et donc sur le flux des échanges gazeux
- l'azote, qui permet à la plante de construire les acides aminés nécessaires à l'élaboration des protéines
- d'autres minéraux, comme le potassium qui favorise les transferts au sein de la plante

Tous les organes de la plante s'unissent donc pour aboutir à la production de biomasse. Cette biomasse est ensuite distribuée aux organes pour permettre leur développement.

Parce que ce mécanisme permet de synthétiser de la matière minérale en matière organique et de capter du CO_2 , gaz à effet de serre notoire, il est crucial de comprendre ce mécanisme de photosynthèse. C'est pourquoi il est, au même titre que la croissance des plantes l'objet de nombreuses recherches (avec comme application : créer de l'électricité propre en dissociant H_2O en Oxygène et en Hydrogène, capter du CO_2 ...

2.3 Histoire de la modélisation de la croissance des plantes

Nous présentons dans cette partie tout d'abord l'origine de la botanique et de l'agronomie. Les premiers modèles de croissance des plantes seront ensuite décrits, puis on expliquera les avancées potentielles apparues avec l'avènement de l'informatique. Finalement, un modèle particulièrement intéressant, le modèle GreenLab, sera présenté.

Cette section reprend la démarche suivie dans l'article *Une histoire de la modélisation des plantes*, COURNÈDE et al., 2009 [12].

2.3.1 Débuts de la botanique et de l'agronomie

L'étude des plantes a très tôt été un domaine privilégié du savoir humain. En effet, les plantes sont un élément majeur des écosystèmes dans lesquels l'homme évolue. Elles sont source de nourriture, de remèdes, de médicaments, de matériaux, d'esthétique. Enfin, elles sont un objet scientifique d'intérêt qui a très tôt aiguisé le sens de l'observation, l'esprit d'analyse, de synthèse, de déduction des hommes. La connaissance des plantes s'est accrue lors de l'histoire des hommes, qui ont développé la cueillette, l'agriculture, l'usage des plantes médicinales. La connaissance et l'inventaire des variétés de plante ont ainsi été des enjeux majeurs car ils permettaient la connaissance de nouveaux remèdes et étaient sources de nourritures et matériaux. L'homme a ainsi cherché à regrouper, croiser, faire croître et conserver les espèces qui lui étaient utiles.

La botanique, issue de l'étude de l'anatomie des plantes, est une science très ancienne. En témoignent les traités de classification de plantes, comme ceux d'Aristote (vers -300), ou encore l'inventaire et la description de centaines de plantes médicinales par Dioscoride (1er siècle), ainsi que les traités chinois qui inventorient les espèces utiles à l'agriculture et à la médecine traditionnelle avec de premiers efforts de classification. Efforts de classification qui se poursuivront vraiment en Europe à partir du XVIIème siècle avec les premières distinctions par famille, par genre, par espèce, par structure de graine (*Les éléments de Botanique* par Joseph Pitton de Tournefort en 1656 – 1708, *Systema naturae* en 1735 et *Philosophia botanica* en 1751 par Linné et les travaux de la famille de Jussieu pendant le XVIIIème siècle). Ces classifications ne sont pas objectives, elles sont le fruit d'un raisonnement *empirique*.

En parallèle, l'agronomie se développe au XVIIème siècle en Europe et s'intéresse au processus de croissance et développement des plantes. Des travaux d'abord très pratiques sont réalisés sur des méthodes agricoles (labour, ensemencement, taille, greffes...), notamment ceux de Jean-Baptiste de la Quintinie et d'Olivier de Serres.

Au XIXème, les processus biologiques commencent à être étudiés de façon plus précise, en particulier la provenance du carbone, de l'azote, de l'oxygène et de l'eau dans la plante. On s'intéresse également aux problématiques de nutrition et au rôle de organes, comme en témoignent les ouvrages *Recherches chimiques sur la végétation* de Théodore de Saussure en 1804. Quelques années plus tard, on découvre la respiration, la photosynthèse (voir équation 1 à la page 5).

La physiologie, science qui étudie le fonctionnement des plantes, se sépare alors de la botanique qui se contente de les classer.

2.3.2 Les premiers modèles

La modélisation mathématique précise (qui va au-delà de la simple description qualitative et fournit une description quantitative avec des capacités prédictives) n'arrive pas tout de suite en biologie. Le développement de la biologie n'a pas suivi le même schéma que celui de nombreuses autres sciences comme la physique, où l'observation a permis de tirer des concepts quantitatifs au niveau macroscopique (loi de Mariotte par exemple) avant de les expliquer par des lois qui s'appliquent au niveau microscopique (Boltzmann). De même pour la mécanique, l'optique, l'électricité avec des applications qui n'ont pas eu à attendre la compréhension au niveau atomique. La biologie végétale par contre a paradoxalement été mieux comprise au niveau cellulaire et microscopique sans que des lois précises macroscopiques en soient tirées.

Trois types de modèles vont se développer et vont changer cela : les modèles de l'architecture botanique, les modèles de production en agronomie et les modèles géométriques en informatique. Ainsi la convergence de ces trois modèles initialement séparés va permettre récemment les débuts de la modélisation précise de la croissance des plantes à la fin du XXème siècle.

L'architecture botanique va considérer la structure des plantes non plus comme

une description statique issue de la classification traditionnelle mais comme le résultat de l'organogénèse des méristèmes, la cinétique de mise en place des axes feuillés, en se basant sur une combinatoire des modes de croissance, de ramification et de floraison. (Francis Hallé et Roelof Oldeman).

En parallèle, l'agronomie s'est attaquée à la prédiction de la production surfacique de biomasse. Les modèles hollandais comme celui de De Witt (1970) en sont les précurseurs. On ne considère plus la plante en elle-même mais la surface foliaire au mètre carré LAI³ et la production végétale par mètre carré. Les organes ne sont plus considérés individuellement mais par compartiments. A chaque compartiment est allouée une certaine quantité de la biomasse créée en fonction de sa force de puits. La force de puits d'un organe est proportionnelle à la quantité de biomasse qui sera allouée à cet organe.[6, p.229–231]

Les agronomes ont ainsi montré que la production de biomasse est proportionnelle au LAI, ainsi qu'à l'énergie utile de la lumière incidente : PAR⁴, à la lumière interceptée : I et à un facteur d'efficacité énergétique : LUE⁵. On se reporte à la loi de Beer-Lambert pour trouver la quantité de lumière interceptée, qu'on note I :

$$I = 1 - e^{-k \cdot \text{LAI}}$$

Ce qui permet ensuite de trouver la production de biomasse Q en déterminant le LUE et en mesurant la PAR.

$$Q = \text{LUE} \times \text{PAR} \times I$$

Dernier concept empirique développé, celui de temps thermique⁶. En effet, si on modélise la croissance de la plante en fonction du temps, cette croissance est très irrégulière et se fait par à coup. Mais si l'on considère le temps thermique on peut trouver une relation quasi-linéaire.

2.3.3 Informatique et modèles géométriques

L'arrivée des ordinateurs a révolutionné les méthodes de simulation ainsi que de modélisation des systèmes et l'étude des plantes en a bien sûr profité. Les ordinateurs ont fait leur apparition presque en même temps que les modèles agronomes et botaniques. Ainsi, très vite, ils ont été vus comme un moyen de simuler la structure géométrique complexe des plantes avec le développement d'arbres combinatoires,

3. LAI : Leaf Area Index. Cela correspond au ratio entre la surface totale supérieure des feuilles vertes et la surface de sol sur laquelle se développe la culture.

4. PAR : Photosynthetically Active Radiation.

5. LUE : Light Use Efficiency.

6. Le temps thermique correspond à l'accumulation de températures dépassant un certain seuil :

$$\tau^{(n+1)} = \tau^{(n)} + \max[0, \underline{T^{(n)}} - T_c],$$

où $\underline{T^{(n)}}$ est l'écart de température constaté et T_c est le seuil de variation de température qu'on impose.

binaires et fractals. Mais ces structures purement géométriques et trop rigides ne simulent pas encore bien le développement complexe des plantes. Les travaux d'Aristide Lindenmayer aboutissent à une grammaire au formalisme puissant, grammaire générative basée sur le principe de réécriture [9].

Qu'est-ce qu'un L-Système ? Un L-Système est noté :

$$\{V, S, \omega, P\}$$

Une grammaire formelle qui comprend :

- Un ensemble alphabet **V** : Ensemble de variable du L-Système
- Un ensemble de constantes **S** : Ensemble de constantes servant notamment lors du dessin géométrique.
- Un axiome de départ ω : État initial.
- Un ensemble de règles **P** : Règles de production.

Un exemple simple : Algues de Lindenmayer

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \{A, B\} \\ S = \{\} \\ \omega = A \\ P = (A \rightarrow AB) \wedge (B \rightarrow A) \end{array} \right.$$

Avec le résultat sur 6 générations :

- $n = 0$, A
- $n = 1$, AB
- $n = 2$, AB A
- $n = 3$, AB A AB
- $n = 4$, AB A AB AB A
- $n = 5$, AB A AB AB A AB A AB
- $n = 6$, AB A AB AB A AB A AB AB A AB AB A

Une suite de symboles générée par L-Système peut être prise en entrée par un programme informatique qui s'en servira pour générer une structure géométrique, le plus simple étant d'utiliser un turtle en 2D voire en 3D, ou encore dans un langage orienté objet avec des pointeurs on peut générer une chaîne cellulaire qui évolue. Les symboles dans V sont les parties des plantes dessinées et les symboles dans S donnent des informations sur la façon dont elles sont dessinées, leur orientation par exemple.

Ces modèles de L-système conviennent bien à la simulation des structures des plantes, elles marchent d'autant mieux combinées à la notion de temps thermique qui ordonne la dynamique de croissance et permettent d'aboutir in fine à une architecture fidèle. On constate cependant qu'elles n'intègrent pas la notion de production de biomasse et si elles permettent de prédire une structure finale aussi fidèle que possible, elles ne permettent pas de prédire le rythme de production. Les éco-physiologistes se sont alors efforcés d'intégrer des mécanismes de plus en plus fins, avec une simulation locale et géométrique de la photosynthèse, des échanges entre

organes par un système de transport-résistance avec la notion de force de puits, de organes puits qui puisent la biomasse produite par les organes sources etc... Ces systèmes complexes qui permettent enfin une simulation fine au niveau individuel ne sont pourtant pas adaptés à la simulation et encore moins la modélisation d'un grand ensemble de plantes et ceux pour deux raisons :

1. *Le coût en ressources de calcul* : il croît avec le temps de la simulation et le nombre d'individus considérés, encore plus si l'on doit considérer les interactions entre les individus.
2. *La difficulté à paramétrer* : dû au grand nombre de paramètres notamment par rapport aux données que l'on peut raisonnablement récolter.

2.3.4 Le modèle GreenLab : entre modèle individuel et modèle de production

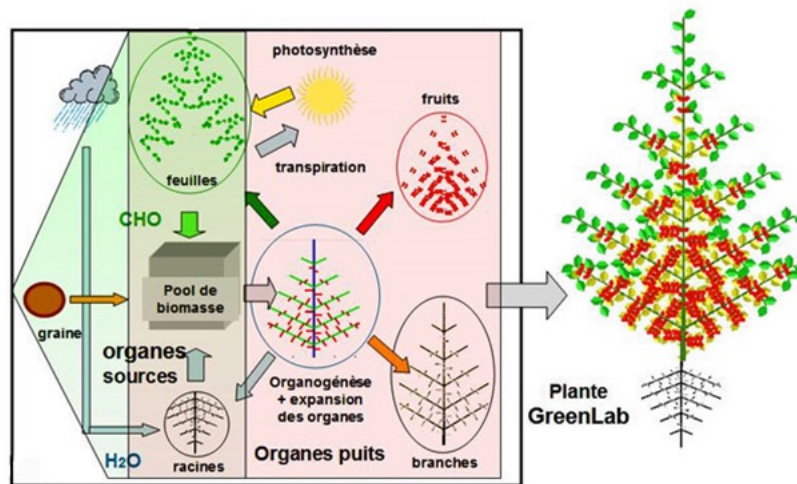


FIGURE 3 – Schéma type d'un modèle GreenLab.

Le modèle GreenLab propose une alternative. Il reprend des simplifications utiles du modèle agronome au niveau de la production : la prise en compte de l'architecture individuelle de la plante n'est pas utile au niveau d'un champ, on considère plutôt la distribution des différents types d'organes (densité de feuilles...). Autrement dit, les aspects géométriques peuvent être négligés mais pas la composition quantitative des structures. On fait alors l'hypothèse d'un *pool de biomasse* commun dans lequel les organes vont piocher, et on ne considère que la photosynthèse nette, ie les proportions de glucides qui servent effectivement à la construction de matière sèche des organes.

Au niveau de l'allocation, cette approche décrit précisément des compartiments d'organes se comportant de façon similaire, ce qui rend l'allocation de biomasse plus facile à modéliser entre organes sources et organes puits et permet de se passer d'une description géométrique ou même topologique exhaustive. Les organes sont générés par cohortes (groupes générés en même temps) de même type grâce à des équations de production des méristèmes selon leur âge physiologique, et des lois de

probabilités qui déterminent la croissance, la sénescence et le branching. Et comme tous les organes d’une même cohorte d’organe du même type ont le même état, on peut opérer facilement une factorisation en sous-structures qui rend les calculs plus léger, ainsi le temps de calcul n’est plus proportionnel au nombre d’organe mais seulement à l’âge de la plante. En particulier en multipliant le nombre d’organe de chaque cohorte par la force de puit correspondante et en additionnant le tout on obtient la demande de la plante.

Ensuite l’augmentation δq de biomasse de chaque organe est obtenu avec la formule suivante :

$$\delta q = \phi \cdot Q/D$$

Avec ϕ la force de puit, Q la pool de biomasse global et D la demande totale de la plante.

La masse des organes est la somme cumulée de l’augmentation des biomasses, on peut donc obtenir rapidement les dimensions (longueur, diamètre, surface) des organes en utilisant de simples lois géométriques (beaucoup plus simple que celles utilisées lorsque la géométrie est prise en compte dans la production).

Puis pour que le cycle se répète, la biomasse des compartiments s’obtient en sommant les cohortes de même organes, en particulier on peut obtenir la masse du feuillage puis la surface foliaire ce qui permettra de déterminer la production de biomasse au prochain cycle. La boucle est bouclée.

Pour résumer, ce modèle est un modèle dynamique de croissance des plantes qui marche par rétroaction entre croissance (production de biomasse) et développement (allocation quantitative et architecture). Le calcul de la production ne prend que peu en compte l’architecture de la plante mais seulement l’équation global de production et les relations sources-puits, ce qui permet des économies de calcul intéressantes et n’empêche pas dans un second temps de générer des structures géométriques fidèles issus d’un modèle de production simplifié mais robuste. Ainsi la plasticité des plantes est très bien représenté par ce modèle et on peut rendre compte de différents phénotypes d’une même espèce dans deux environnement très différents.

Cela permet notamment la visualisation en images de synthèse très fidèles et complexes de plantes dont la croissance a été modélisé sans prendre en compte le détail géométrique de cette même structure, donc avec un temps de calcul très intéressant. L’augmentation de biomasse de chaque organe a déjà été simplement déterminée grâce aux équations précédentes, dont on déduit également la forme et le volume, de simples règles géométriques positionnent ces organes dans l’architecture selon l’empilement des entre-nœuds autour d’un axe, la phyllotaxie, l’angle de branchement, la courbure des axes, comme on peut le visualiser en Figure 4.

Comme montré dans la Figure 5, on peut même simuler des paysages entiers grâce à ces méthodes, avec le raffinement des paysages fonctionnels qui prennent en compte raffinement les interactions plantes-environnement, la distribution des ressources hydriques et des radiations lumineuses entre plantes qui sont en compétition.



FIGURE 4 – Exemple de plantes générées grâce à GreenLab.

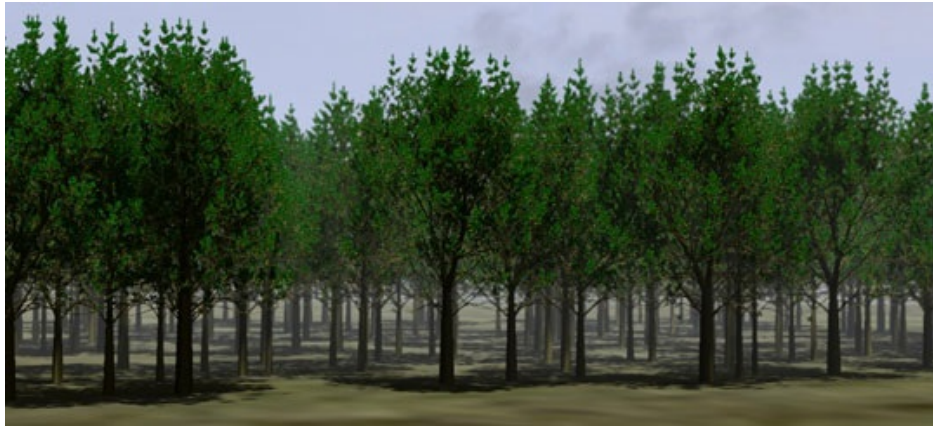


FIGURE 5 – Paysage fonctionnel généré grâce à GreenLab

2.4 Méthodologie de modélisation et modèle LNAS appliqué à la betterave

2.4.1 Introduction

Après avoir fait un historique rapide nous présentons ici des généralités sur la modélisation et un exemple de modèle simple : le modèle LNAS betterave.

Les modèles mathématiques de modélisation de la croissance des plantes sont généralement caractérisés par un grand nombre de processus en interaction, un grand nombre de paramètres et une acquisition coûteuse des données expérimentales [4].

Nous présentons des éléments de bonnes pratiques de modélisation afin de donner un aperçu global des différentes étapes de modélisation dans le cadre de la croissance des plantes.

Le modèle LNAS est présenté comme illustration de ces méthodes, ici appliqué à la betterave. Ce modèle a une intéressante capacité de prédiction lorsqu'il est couplé à de bonnes méthodes d'acquisition de données.

2.4.2 Caractéristiques propres aux modèles de croissance de plantes

Une complexité importante au niveau des processus et des paramètres.

Une paramétrisation difficile à cause de cette complexité ainsi que du coût important des données.

Un besoin croissant de techniques sophistiquées en informatique, mathématiques et statistiques.

Une importante diversité de modèles existants sans benchmarking entre les différentes approches (lacune de méta-études statistiques).

Les solutions mathématiques et statistiques classiques et généralistes ne sont pas immédiatement adaptées à la modélisation des plantes et nécessitent un travail d'adaptation important pour prendre en compte ses spécificités.

D'un autre côté les logiciels de modélisations spécialisés, bien que performants, ne prennent pas assez en compte l'aspect de paramétrisation et d'évaluation statistiques.

Les logiciels développés récemment dans ce domaine offrent des solutions intéressantes mais elles sont peu compatibles entre elles et limitent donc la comparaison, le benchmarking des modèles.

L'objectif est donc à la fois de bien situer les bonnes pratiques de modélisation, et de proposer une implémentation pratique, notamment à travers la plateforme Pygmalion en C++ qui fournit un template générique de modèle, des structures de données, des méthodes, des classes et framework appropriés, ainsi qu'une méthodologie statistique.

2.4.3 Bonnes pratiques en modélisation

Analyse du modèle Etude des comportements généraux du modèle, au niveau théorique et numérique par des simulations. Pour déterminer les données nécessaires à la paramétrisation, et faire une analyse de sensibilité pour repérer les paramètres importants.

Identification du modèle Confronter les modèles à des données expérimentales. Identification de la structure : pour identifier dans la famille du modèle la plus intéressante. Identification des paramètres : pour identifier la valeur des paramètres pour la structure choisie.

Evaluation du modèle Vérifier qualitativement (comportement générale et aptitude de simulation) et quantitativement (comparaison aux données réelles) si le modèle atteint ses objectifs, c'est-à-dire vérifier la correspondance aux données actuelles (goodness of fit), tester ses capacités prédictives et évaluer son niveau d'incertitude.

Ces étapes ne sont *pas linéaires*, en effet, des allers retours sont nécessaires pour ajuster finement le modèle.

2.4.4 Modèle LNAS betterave

Nous décrivons ici le modèle LNAS (Long Normal Allocation and Senescence) appliqué à la betterave. C'est un modèle innovant et suffisamment simple pour illustrer tous les enjeux du projet. Il est plutôt robuste étant donné sa simplicité, et le faible nombre de données et paramètres requis le rend pratique à l'utilisation. Il traite la production de biomasse au niveau compartemental et peut être considéré comme une simplification du modèle Greenlab qui décrit les mêmes processus au niveau des organes. C'est un modèle Markovien en temps discret.

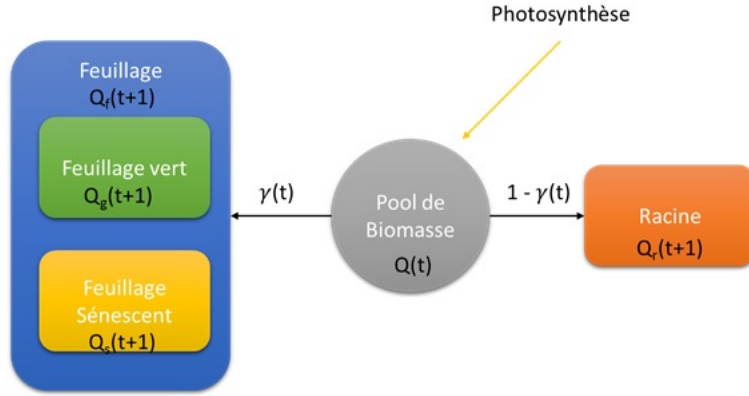


FIGURE 6 – Schéma du modèle LNAS appliqué à la betterave.

Production de Biomasse :

$$Q(t) = (\mu \cdot \text{PAR}(t)(1 - e^{-\lambda Q_g(t)}) \cdot (1 + \eta_Q(t))$$

Allocation au feuillage :

$$Q_f(t + 1) = Q_f(t) + \gamma(t) \cdot Q(t)$$

Allocation à la racine :

$$Q_r(t + 1) = Q_r(t) + (1 - \gamma(t)) \cdot Q(t)$$

Fonction d'allocation :

$$\gamma(t) = (\gamma_0 + (\gamma_f - \gamma_0) \cdot G_a(\tau(t))) \cdot (1 + \eta_\gamma(t))$$

Fonction de sénescence :

$$Q_s(t) = G_s(\tau(t) - \tau_{sen})Q_f(t)$$

Part de la biomasse produite allouée aux feuilles vertes :

$$Q_g(t) = Q_f(t) - Q_s(t)$$

- $Q(t)$: Production de biomasse au jour t par unité de surface.
- μ : Efficacité énergétique
- $1 - e^{-\lambda Q_g(t)}$: Fraction des radiations interceptées
- $PAR(t)$: quantité de radiations photosynthétiquement actives par unité de surface.
- λ : paramètre
- $Q_g(t)$: masse total des feuilles vertes au jour t
- $Q_f(t)$: masse total du feuillage au jour t
- $Q_s(t)$: masse total du feuillage sénescant au jour t
- γ_0, γ_f : paramètres
- $\eta(t)$: variables aléatoires normales
- $G(t)$: variables aléatoires lognormales
- $\tau(t)$: temps thermique au jour t (température cumulée depuis l'émergence de la plante)
- τ_{sen} : temps thermique où la sénescence commence.
- Les paramètres des variables aléatoires font parti des paramètres du modèle.

2.5 Modèle LNAS blé

Nous décrivons ici succinctement le modèle LNAS (Long Normal Allocation and Senescence) appliqué au blé qui est similaire au modèle de la betterave mais plus complexe car plus de compartiments sont modélisés, ainsi que les notions de stres hydrique et thermique et toute la problématique d'humidité du sol. C'est aussi un modèle Markovien en temps discret.

Le modèle décrit comment la biomasse produite quotidiennement est allouée aux différents organes avec des fonctions d'allocations propres à chaque types d'organes :

$$o = \{g : \text{grain}, s : \text{tige}, r : \text{racines}, g : \text{feuilles vertes}\}$$

La circulation de la biomasse est décrite par trois fonctions α, β et γ qui représentent respectivement l'allocation de la biomasse disponible à chaque type d'organe, la remobilisation de la biomasse d'un organe dans le pool commun de biomasse et la sénescence d'un organe.

A chaque temps n , on redistribue la biomasse disponible, notée $q^{(n)}$, qui est la somme de la biomasse produite par photosynthèse et de la biomasse réallouée par les organes.

On formalise ce modèle par leurs expressions mathématiques : la biomasse de l'organe o , noté Q_o est donnée par :

$$Q_o^{(n+1)} = (1 - \beta_o^{(n)} - \gamma_o^{(n)})(Q_o)^{(n)} + \alpha_o^{(n)}q^{(n)}$$

On accède ainsi à chaque instant à la biomasse des feuilles par exemple grâce à Q_l .

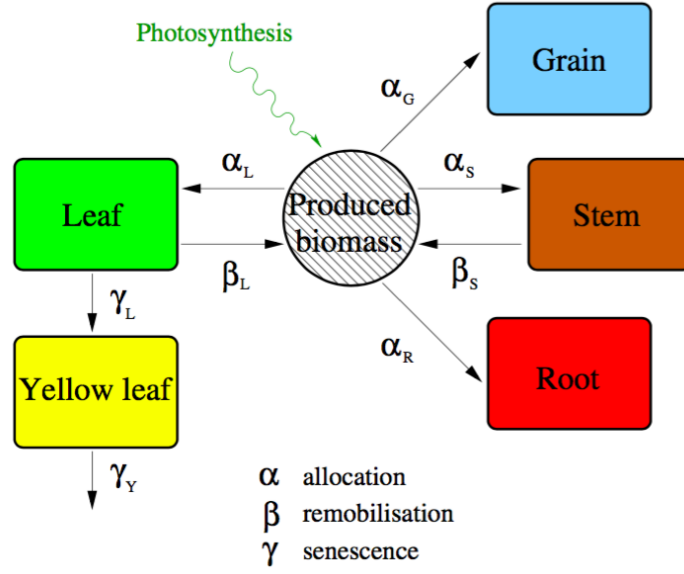


FIGURE 7 – Modélisation de la circulation de biomasse au sein de la plante (modélisée comme un ensemble de compartiments d’organes différents) par des fonctions d’allocation, de remobilisation et de sénescence.

En supposant que la répartition de biomasse ne commence qu’après un temps caractéristique τ_g nous pouvons paramétrer la fonction d’allocation α avec la loi log-normale :

$$\alpha_g^{(n)} = F_{\log N(\mu_s, \sigma_g)}(\tau^{(n)} - \tau_g) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left[\frac{1}{\sigma_g \sqrt{2}} \log \left(\frac{\tau^{(n)} - \tau_g}{t_{1/2} - \tau_g} \right) \right] \right)$$

Les autres fonctions d’allocations β et γ peuvent se déduire de l’expression de $\alpha_g^{(n)}$. Ces trois fonctions α , β et γ sont paramétrées par rapport au temps thermique qui peut s’écrire :

$$\tau^{(n+1)} = \tau^{(n)} + \max[0, \underline{T}^{(n)} - T_c]$$

La quantité de biomasse disponible au jour n est donnée par l’expression de $q^{(n)}$:

$$q^{(n)} = \text{RUE} \cdot \min[SSI^{(n)}, TSI_{\uparrow}^{(n)}] \underline{PAR}^{(n)} (1 - e^{-\lambda LAI^{(n)}}) + \sum_o \beta_o^{(n)} Q_o^{(n)}$$

Nous nous baserons sur un document fourni par le client lors de l’implémentation de ce modèle, ce document contient les formules mathématiques nécessaires.

Pour plus de détails et d’explications le lecteur se référera à l’Annexe D.

3 Contexte et objectifs

3.1 Contexte

Le problème des ressources *énergétiques* et *alimentaires* est un sujet crucial du 21ème siècle. Il faudra être capable de nourrir plus de 9 milliards d’humains en 2050 [14]. De plus, les ressources fossiles et l’eau douce viennent à manquer dans certaines régions agricoles (comme en Californie). Pourtant, l’agriculture nécessite l’apport d’eau, et est grande consommatrice d’énergie. L’agriculture est ainsi responsable de l’émission de près de 20% des gaz à effet de serre [11].

À l’avenir, il faudra donc optimiser l’agriculture en améliorant les rendements (pour nourrir une population plus grande), tout en réduisant le volume des ressources utilisées (eau et intrants). D’autre part, le développement de technologies de plus en plus sophistiquées (GPS, drones, etc.) nous permet d’obtenir des données de plus en plus précises. Cela permet d’envisager le développement d’une agriculture intelligente qui exploiterait ces données grâce à des modèles décisionnels, précis et pratiques et permettrait d’atteindre ce double objectif. On peut ainsi imaginer qu’un jour, un tracteur géolocalisé disperse plus ou moins de graines dans certaines zones d’un même champ, afin d’obtenir de meilleurs rendements.

Pour notre part, nous allons nous intéresser à la modélisation de la croissance des plantes et à la pertinence des mesures à réaliser.

3.2 Présentation du client

Notre client Pierre Carmier, ainsi que notre référent pédagogique Paul-Henry Cournède sont des chercheurs au laboratoire MAS. Ce laboratoire travaille notamment sur les modèles mathématiques de croissance des plantes, en collaboration avec la startup Digiplante. Ils ont notamment travaillé sur le modèle LNAS que nous avons décrit dans notre étude bibliographique.

3.3 Objectifs poursuivis

Avant d’expliquer en détails les objectifs poursuivis par le projet, nous proposons au lecteur d’avoir une vision globale sur ces objectifs. Pour ce faire, une *fiche objectif* comme celle présentée lors de la conférence sur la méthode du Ludion⁷ semble parfaitement adaptée. Nous y avons par conséquent accordé une importance fondamentale lors de la rédaction de cette section. Celle-ci se trouve à la Figure 9 dans l’Annexe B. On trouvera également à la Figure 10 dans l’Annexe C, l’arbre de pertinence qui nous a permis de rappeler le but poursuivi ainsi que de décomposer le projet en un ensemble de sous-objectifs.

7. Conférence du 5 novembre 2015 sur la méthode de Ludion par Paul-Hubert des MESNARDS.

Notre objectif est de travailler sur le modèle LNAS adapté à la modélisation du blé et plus particulièrement de l’implémenter sur la plateforme PyGMAIion-Julia du laboratoire Digiplante.

Il s’agit donc en premier lieu de comprendre comment les modèles sont représentés sur la plateforme. On rappellera notamment qu’en informatique tout est discrétisé que ce soit implicitement ou explicitement. À titre d’exemple, calculer une intégrale est un problème qui nécessite d’intégrer sur un domaine qui est théoriquement continu, l’ordinateur cependant utilisera toujours des méthodes qui discrétise l’aire sous une courbe. L’exemple explicite semble une façon adéquate d’aborder la façon dont un modèle est considéré sous PyGMAIion. En effet, il s’agit de construire un système dynamique discret, c’est-à-dire où le temps est découpé en un nombre fini d’intervalles t_n . Le système est alors représenté sous la forme

$$X_{n+1} = f_n(X_n, U_n, P)$$

où X_n correspond aux variables d’état du système (la production de biomasse) au temps n , P les paramètres (qui dépendent des types de plantes en question) et U_n qui représente les variables environnementales telles que la quantité de radiation, température, teneur en eau du sol. Une fois ces 3 groupes identifiés, il s’agit de déterminer la fonction f_n qui relie les variables d’état entre elles. La dernière étape de modélisation consiste à déterminer les fonctions qui régissent la répartition de biomasse à travers les différents organes de la plante. Ceci dépendra évidemment du type de plante considéré (le cas de la betterave est par exemple considérablement plus simple que celui du blé).

Il y a environ 30 paramètres dans le modèle. Une fois le modèle implémenté, nous essaierons donc d’estimer ces paramètres par calibration, grâce à des outils statistiques.

De plus, les mesures expérimentales étant difficiles à réaliser et ayant un coût, on ne peut pas mesurer toutes les variables tout le temps. À terme, le but serait « d’obtenir une méthode permettant d’optimiser le choix des variables à mesurer expérimentalement »⁸, et ainsi déterminer celles qui ont la plus grande influence et dont les mesures sont accessibles. Nous pourrions ainsi réduire l’incertitude sur les prédictions du modèle, en optimisant la calibration.

8. Fiche de présentation du projet enjeu. DIGIPLANTE, 2015.

4 Organisation du groupe

Nous présenterons dans cette section l'organisation générale du groupe. On abordera d'abord les outils que nous avons utilisés pour partager notre travail le plus efficacement possible. On présentera ensuite notre manière de gérer la bibliographie ainsi que les logiciels utilisés pour ne pas perdre les sources visitées. On détaillera par après l'organisation interne du groupe, plus précisément le système mis en place pour optimiser la communication ainsi que la manière dont les tâches ont été réparties pendant ce premier semestre. On décrira finalement les problèmes, difficultés et risques qui pourraient survenir, ainsi que nos craintes pour le déroulement du projet. Cette dernière partie sera présentée sous la forme *problème - solution*, afin de décrire les moyens que nous mettons en œuvre pour pallier à ces problèmes.

4.1 Outils de travail collaboratif

Pour des raisons pratiques et esthétiques, nous avons décidé d'écrire nos rapports en \LaTeX . Il s'agissait donc de trouver la meilleure façon de partager le code source et de pouvoir contrôler les changements apportés au document. Une première idée pourrait être d'utiliser ShareLaTeX qui propose une plate-forme de compilation en ligne ainsi qu'un système de gestion de versions assez simple à utiliser. Nous n'avons pas choisi cette solution notamment pour les raisons suivantes. L'utilisateur doit être connecté dès qu'il veut travailler sur le projet, le système de compilation est assez lent et l'utilisateur n'est pas libre d'utiliser son éditeur de texte ou son visualisateur de PDF favori.

Pour palier aux problèmes décrits ci-dessus, le logiciel `git` associé à GitHub est une très bonne alternative. Il permet en effet à chaque membre du groupe de travailler sans être connecté ainsi que d'utiliser son éditeur et compilateur favori. Chaque membre travaille donc de son côté en faisant des *commits* et lorsqu'il juge que son travail est utile pour les autres, il *push* sur le serveur. L'algorithme de fusion, *merge*, permet également de fusionner intelligemment les lignes d'un fichier qui ont été modifiées par plusieurs membres. Le dernier point à souligner est que `git` permet une gestion des branches, particulièrement pratique lorsqu'on veut développer une partie du projet sans risquer de créer des erreurs dans le programme principal.

Nous combinons donc ces deux outils pour

1. implémenter le modèle LNAS blé dans la plateforme Pygmalion en `JULIA` (une description plus détaillée de l'objectif attendu pour cette partie est décrite dans la section 3 à la page 17) pour le client dont le code source est sur la plateforme GitLab,
2. rédiger l'étude documentaire en partageant le code \LaTeX à l'aide d'un dossier sur GitHub⁹.

9. <https://github.com/jdewasseige/projet-sbt11>

4.2 Gestion de la bibliographie

Pour la gestion de la bibliographie au sein du document, nous utilisons le package `biblatex`. Celui-ci permet d'écrire l'ensemble de nos références dans un fichier `.bib` sous la forme suivante.

```
@online{histoire_mod_plantes,  
  title = {Une histoire de la modélisation des plantes},  
  author = {Philippe de Reffye and Marc Jaeger  
and Paul-Henry Cournède},  
  url = {https://interstices.info/jcms/c_38032/une-histoire-de-  
la-modelisation-des-plantes},  
  year = {2009},  
  month = "04",  
}
```

La mise en page est alors automatique en fonction des informations fournies et le rendu de l'exemple est présenté ci dessous.

- [3] Philippe de REFFYE, Marc JAEGER et Paul-Henry COURNÈDE. *Une histoire de la modélisation des plantes*. Avr. 2009. URL : https://interstices.info/jcms/c_38032/une-histoire-de-la-modelisation-des-plantes.

Cela paraît à priori assez lourd d'écrire soi-même toutes les informations en suivant cette syntaxe mais il existe des logiciels comme Zotero qui font le travail à notre place. Les sources trouvées sur Google Scholar peuvent également être exportées aisément au format BibTex.

4.3 Organisation et partage des tâches

Il nous reste un dernier point à décrire, celui de la *communication* au sein du groupe. Nous utilisons Slack¹⁰ qui est un logiciel de plus en plus utilisé pour les travaux de groupe ainsi que dans les start-ups. Il permet d'éviter de devoir alterner entre plusieurs applications comme les mails, DropBox et Twitter, puisqu'il permet d'être connecté à celles-ci au sein de l'application. On peut également créer plusieurs *channels* pour séparer la communication entre les différentes tâches. Par exemple dans ce projet nous avons les *channels* suivantes : **general**, **etude-documentaire**, **planning** et **dev_plate-forme**. On trouve aussi un système d'historique et de gestion de fichiers efficace.

L'ensemble des tâches ainsi que leur répartition pendant l'année est associé au planning GANTT qui se trouve dans l'Annexe A à la page 25.

10. <https://slack.com/>

4.4 Risques, difficultés et problèmes potentiels

Nous avons identifié plusieurs risques, difficultés et problèmes qui pourrait survenir durant le projet et ralentir sa mise en oeuvre :

- Une perte partielle ou totale de nos données, à cause d’une mauvaise manipulation sur les plateformes de travail, dont le contenu peut être modifié/supprimé par chaque utilisateur.
- Nous n’arrivons pas à acquérir les compétences informatiques nécessaires pour implémenter et travailler sur les modèles informatiques de modélisation de plantes.
- Un seul élève du groupe réalise la plupart du travail (parce qu’il est le seul à savoir coder par exemple). Cela conduirait à une perte de communication et de motivation au sein du groupe.
- Peu de communication avec notre client, et en conséquence mauvaise compréhension du projet et de ses objectifs.

Pour éviter que cela n’arrive, nous allons :

- utiliser la plateforme GitHub qui permet de récupérer les sauvegardes précédentes.
- nous partager équitablement les tâches
- faire en sorte que chaque membre du groupe comprenne chacune des étapes de notre travail.
- échanger et essayer de rencontrer régulièrement notre client, profitant de sa proximité, étant chercheur au laboratoire MAS de Centrale.

Conclusion

Les perspectives qu'offre l'étude de la croissance des plantes sont des plus stimulantes. En effet, les enjeux sont cruciaux. Les plantes sont un élément clé de notre économie. A la base de nos régimes alimentaires, elles sont également source d'oxygène, d'énergie avec l'émergence des agro-carburants, et sont utilisées dans la construction, l'industrie des vêtements et même dans l'industrie pharmaceutique.

Dans le même temps, pour répondre à une demande de plus en plus forte, l'agriculture a recours à l'irrigation intensive, aux engrais et aux pesticides pour augmenter ses rendements. Malheureusement, ces méthodes ont un impact négatif sur l'environnement et leur utilisation n'est pas viable, comme en témoigne par exemple le quasi-assèchement de la mer d'Aral à cause d'une culture intensive du coton [10].

Heureusement, la science, aidées des mathématiques et d'une collecte de données devenue omniprésente, semble plus que jamais capable de développer une agriculture viable et productive. Pour cela, elle bénéficie de plusieurs siècles d'études des plantes qui ont permis d'affiner leurs connaissances.

Remerciements

Nous tenons tout d’abord à remercier notre client Pierre Carmier, pour sa pédagogie et son temps précieux accordé. Nous remercions également Mme Le Chevalier et Mme Lopes, qui encadrent le projet de façon motivante et efficace. Leurs remarques et retours sur nos présentations ainsi que sur l’avancement de notre projet nous ont été très utiles pour prendre le recul nécessaire à la rédaction de ce rapport.

Références

- [1] VisioDrones SA. Service d'imagerie par système de drones. URL : <http://www.visiodrones.com/produits/vegedrones/>.
- [2] Charlotte BAEY. « Modelling inter-individual variability in plant growth models and model selection for prediction ». Theses. Ecole Centrale Paris, fév. 2014. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00985747>.
- [3] Pierre CARMIER. « LNAS model for wheat with soil coupling ». In : (nov. 2015).
- [4] Paul-Henry COURNÈDE et al. « Development and Evaluation of Plant Growth Models : Methodology and Implementation in the PYGMALION platform ». In : *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* 8.4 (juin 2013), p. 112–130. URL : <https://hal-ecp.archives-ouvertes.fr/hal-00860902>.
- [5] Martine GUÉRIF et Dominique KING. *Agriculture de précision*. Éditions Quæ, 2007.
- [6] William G HOPKINS. *Physiologie végétale*. De Boeck Supérieur, 2003.
- [7] A JULLIEN et P HUET. *Agriculture de précision*. 2005. URL : <https://tice.agroparistech.fr/coursenligne/courses/SIAFEEAGRONOMIE9cea/document/machinisme/themes/documents/synthese.pdf>.
- [8] *Les émissions agricoles de particules dans l'air*. Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie. URL : http://www.chambres-agriculture.fr/fileadmin/user_upload/thematiques/Produire_durablement/Energies_biomasse/Emissions_agricoles_particules.pdf.
- [9] Przemyslaw PRUSINKIEWICZ et Aristid LINDENMAYER. *The algorithmic beauty of plants*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] *Quatre gigantesques plans d'eau menacés de disparition*. 2014. URL : http://www.francetvinfo.fr/monde/environnement/en-images-quatre-gigantesques-plans-d-eau-menaces-de-disparition_708841.html.
- [11] *Quelle contribution de l'agriculture française à la réduction des émissions de gaz à effet de serre ?* 2013. URL : <http://institut.inra.fr/Missions/Eclairer-les-decisions/Etudes/Toutes-les-actualites/Etude-Reduction-des-GES-en-agriculture>.
- [12] Philippe de REFFYE, Marc JAEGER et Paul-Henry COURNÈDE. *Une histoire de la modélisation des plantes*. Avr. 2009. URL : https://interstices.info/jcms/c_38032/une-histoire-de-la-modelisation-des-plantes.
- [13] WIKIPEDIA. *Agriculture de précision — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Agriculture_de_pr%C3%A9cision.
- [14] WIKIPEDIA. *Population mondiale — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Population_mondiale.
- [15] WIKIPEDIA. *Stomate — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. URL : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Stomate>.
- [16] Philippe ZWAENEPOEL et Jean-Michel LE BARS. « L'agriculture de précision ». In : *Ingénieries-EAT* 12 (1997), p-67.

Annexes

A Planning

Pour réaliser notre planning, nous avons utilisé le logiciel GANTTPROJECT qui permet d'assigner des tâches sur une certaine période à différents membres. Les couleurs nous permettent également de rassembler les tâches en différents sous-groupes, on retrouvera par exemple la couleur rouge pour les rapports finaux. On peut voir dans la Figure 8 que cela nous permet également d'avoir une vision générale des tâches qu'il reste à réaliser.

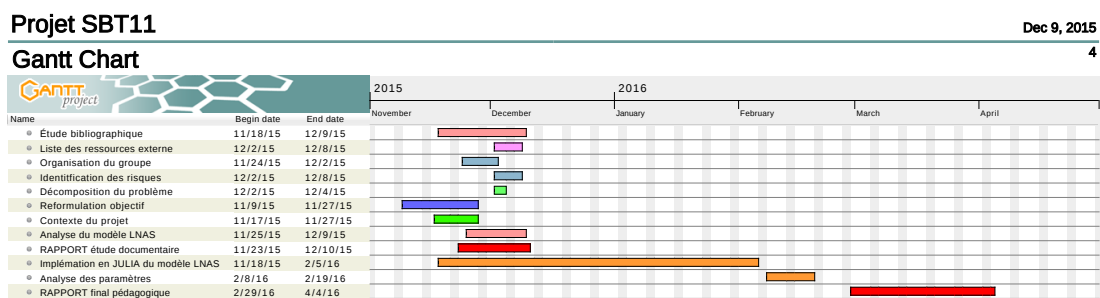


FIGURE 8 – Planning GANTT des différentes tâches.

B Fiche objectif

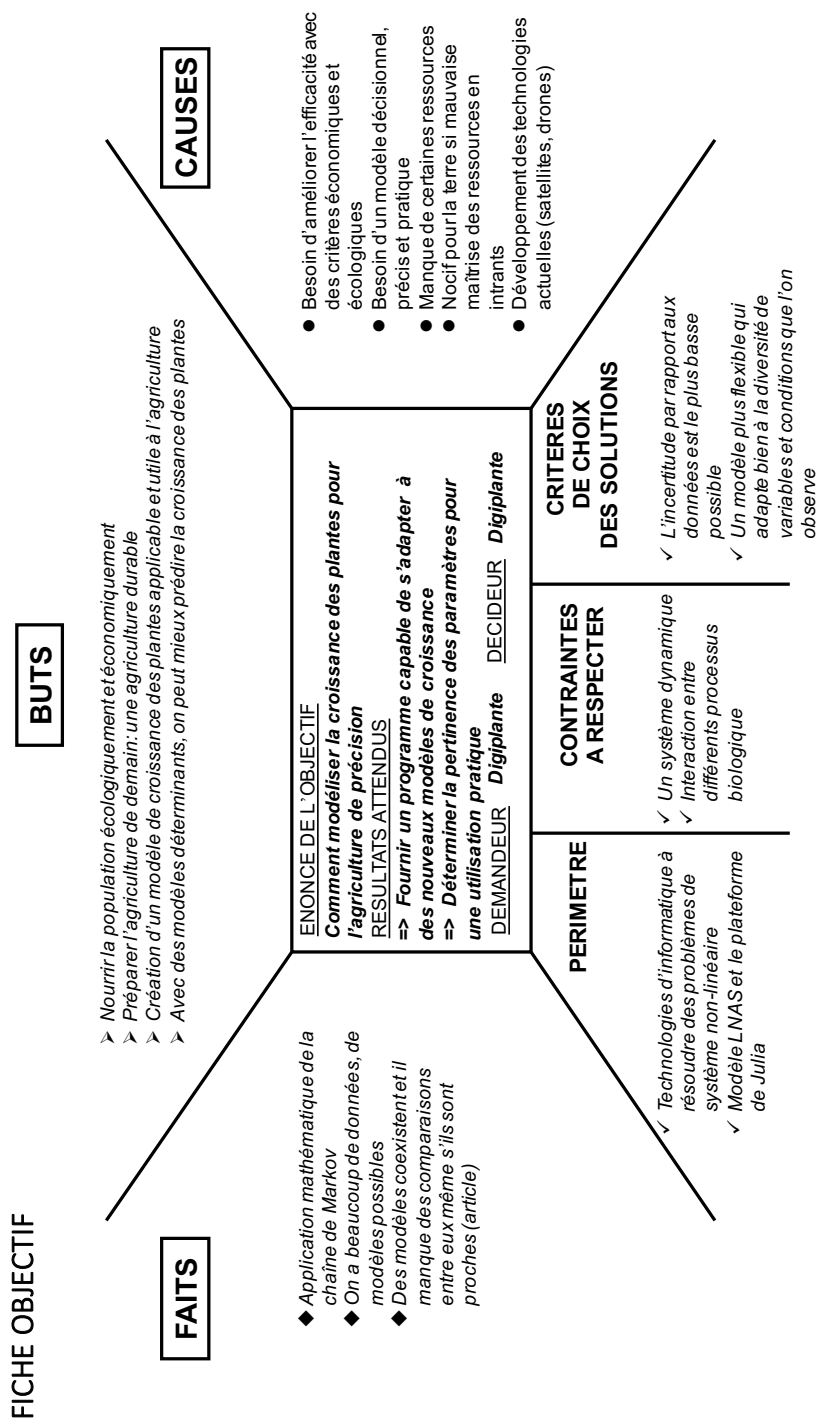


FIGURE 9 – Fiche objectif représentant une analyse globale du projet.

C Arbre de pertinence

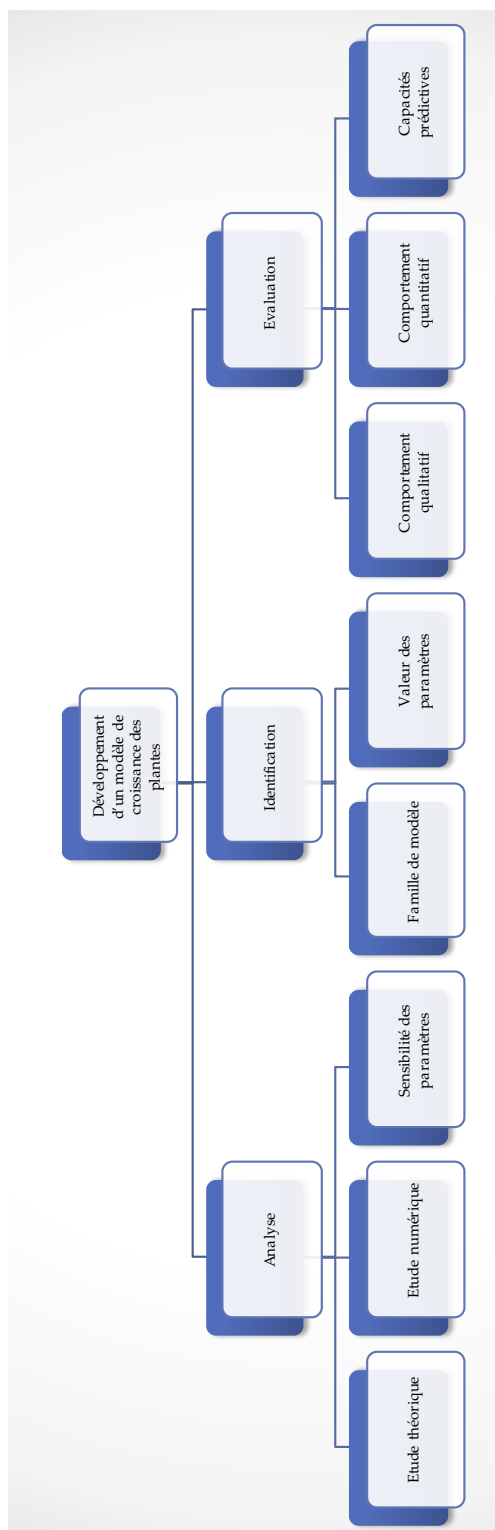


FIGURE 10 – Arbre de pertinence.

D Modèle LNAS appliqué au blé

Le modèle décrit par des fonctions d'allocation comment la biomasse produit quotidiennement est allouée aux différents organes, avec

$$o = \{g : \text{grain}, s : \text{tige}, r : \text{racines}, g : \text{feuillesvertes}\}$$

$$Q_o^{(n+1)} = (1 - \beta_o^{(n)} - \gamma_o^{(n)})(Q_o)^{(n)} + \alpha_o^{(n)}q^{(n)}$$

Pour les feuilles jaunes la fonction est différente car elles sont issues de la sénescence des feuilles vertes Q , la production de biomasse. Dans ce cas,

$$Q_y^{(n+1)} = (1 - \gamma_y^{(n)})Q_y^{(n)} + Y_l^{(n)}Q_l^{(n)}$$

Les différentes fonctions de circulations dépendent du temps thermique qui peut s'écrire :

$$\tau^{(n+1)} = \tau^{(n)} + \max[0, T_-^{(n)} - T_c]$$

En supposant que la répartition de biomasse ne commence qu'après un temps caractéristique τ_g nous pouvons paramétrer la fonction d'allocation α avec la loi log-normale :

$$\alpha_g^{(n)} = F_{\log N(\mu_s, \sigma_g)}(\tau^{(n)} - \tau_g) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}[\frac{1}{\sigma_g \sqrt{2}} \log(\frac{\tau^{(n)} - \tau_g}{t_{1/2} - \tau_g})])$$

Les autres fonctions d'allocations peuvent en première approximation être définies comme complémentaires de α_g . Le stress hydrique et thermique non détaillé dans ce premier rapport affine notamment la répartition entre racines, tiges et feuilles en plus d'être un possible facteur limitant dans la production de biomasse.

De même pour les fonction de remobilisation β et de sénescence γ , on a

$$\beta_o = \eta_o F_{\log N(\mu_l, \sigma_l)}(\tau - \tau_l)$$

$$\gamma_l = (1 - \eta_l) F_{\log N(\mu_l, \sigma_l)}(\tau - \tau_l)$$

$$\gamma_y = F_{\log N(\mu_y, \sigma_y)}(\tau - \tau_y)$$

Le pool de biomasse est la somme de biomasse produit par photosynthèse et de biomasse remobilisée :

$$q^{(n)} = RUE_{min}[SSI^{(n)}, TSI_{\uparrow}^{(n)}]PAR^{(n)}(1 - e^{-\lambda LAI^{(n)}}) + \sum_o \beta_o^{(n)}Q_o^{(n)}$$

- $Q(n)$: Production de biomasse au jour n par unité de surface.
- α : fonction de répartition

- β_o : fonction de remobilisation
- γ : fonction de sénescence
- $q^{(n)}$: production de biomasse au jour n
- $\mu_g = \log(\tau_{1/2} - \tau_g)$: espérance de la distribution
- σ_g : variance de la distribution
- $\tau_{1/2}$: temps thermique où α_g vaut 1/2
- $erf(x)$: fonction d'erreur
- η_o : fraction de biomasse
- RUE : efficacité de l'utilisation lumineuse
- $PAR(t)$: quantité de radiations photosynthétiquement actives par unité de surface
- $LAI^{(n)} = S_l^{(n)}/S = \rho_l Q_l^{(n)}$: Leaf Area Index pour la loi de Beer-Lambert
- $\lambda = \sin(\psi)$ avec ψ l'angle moyen des feuilles avec lumière incidente.
- $SSI^{(n)}$: indice de stress stomatique (partie hydrique)
- $TSI^{(n)}$: indice de stress thermique

L'équation d'équilibre de l'eau

$$R^{(n+1)} = R^{(n)} + W^{(n)} - Es^{(n)} - Tp(n) - d(n)$$

L'eau dans la terre dépend de la profondeur z,

$$R^{(n)} = \int_0^{z_M} dz \theta^{(n)}(z)$$

L'évaporation et la transpiration demandées par la plante sont exprimées comme

$$Espot^{(n)} = K_s ET0^{(n)} e^{-\lambda LAI^{(n)}}$$

$$Tppot^{(n)} = K_c ET0^{(n)} (1 - e^{-\lambda LAI^{(n)}})$$

L'eau effectivement transpirée ou évaporée sera le minimum entre l'évaporation/-transpiration requise et l'évaporation/transpiration maximale qui sont calculées selon les propriétés du sol et de la plante (non détaillé dans ce document).

- $R^{(n)}$: l'eau dans la terre du jour n
- $W^{(n)}$: l'eau issue de l'irrigation et de précipitations au jour n
- $Es^{(n)}$: l'eau perdue par évaporation depuis la terre
- Tp : transpiration
- d : fonction qui prend en compte la saturation d'eau dans la terre