忙总谈数学：实变函数鸟瞰

January 22, 2022

Abstract

实变函数论（real function theory）属于数学分析，是19世纪末20世纪初形成的数学分支，起源于微积分，主要研究对象是自变量（包括多变量）取实数值的函数，研究的问题包括函数的连续性、可微性、可积性、收敛性等，是微积分的深入和发展，实变函数论是现代分析数学各个分支的基础。这篇帖子仍然是介绍数学中的基本思维模式，重点是语言抽象中的公理表达体系，通过实变函数展示公理体系的强大能力。

这篇帖子其实是实变函数+点集拓扑两门课程的介绍，因为实变函数需要点集拓扑为基础知识，所以点集拓扑占的分量比较大。

既然是鸟瞰一下实变函数，所以尽可能用通俗语言。显然这篇帖子不可能让大家真正学习了解实变函数，上帝来也不可能，因为那是一门课，在这个帖子中顶多能够展示实变函数这门课包括什么内容而已。当然还是能够展示数学中的语言抽象能力强大到什么程度的。

豆瓣小组“管理实践与学习”
https://www.douban.com/group/542139/

瞎扯数学分析2：实变函数鸟瞰
来自: wxmang 2019-01-08 16:57:21
https://www.douban.com/group/topic/130968109/

实变函数论（real function theory）属于数学分析（数学分析的本质研究对象就是函数，在微积分那个帖子里，我们介绍过，现代函数的定义就是两个集合之间的一种对应关系，也即一种映射，映射的性质决定了函数的性质），是19世纪末20世纪初形成的数学分支，起源于微积分，主要研究对象是自变量（包括多变量）取实数值的函数，研究的问题包括函数的连续性、可微性、可积性、收敛性等，是微积分的深入和发展，实变函数论是现代分析数学各个分支的基础。

在这一帖中，仍然是介绍数学中的基本思维模式，重点是语言抽象中的公理表达体系，通过实变函数展示公理体系的强大能力。

这篇帖子其实是实变函数+点集拓扑两门课程的介绍，因为实变函数需要点集拓扑为基础知识，所以点集拓扑占的分量比较大。

既然是鸟瞰一下实变函数，所以尽可能用通俗语言。显然这篇帖子不可能让大家真正学习了解实变函数，上帝来也不可能，因为那是一门课，在这个帖子中顶多能够展示实变函数这门课包括什么内容而已。当然还是能够展示数学中的语言抽象能力强大到什么程度的。

对数学感兴趣的人，可以去看那汤松的《实变函数论》，这是苏联莫斯科大学数学系的经典教材，只是知识比较老了，还需要再看看中国科大数学系的教材，徐森林写的《实变函数论》，这本书的特点是习题比较难，这是科大数学系教材的传统，习题难。

1 鸟瞰实变函数

1.1 为什么学习实变函数难

实变函数是大学数学系从古典数学走向现代数学的入门课，是另外一种超出人类直觉的抽象能力的开始：语言抽象。具体说，实变函数=集合语言（这是人类最简单明了的抽象语言体系）+公理体系（这是事物最本质的抽象关系，也即映射抽象）来研究可测函数（这是比微积分研究的连续函数，复变函数研究的解析函数和亚纯函数要一般得多的函数）的积分，连续，收敛等等性质。

集合语言和公理体系本质是语言抽象，这两个难点就是学习实变函数的难点。俗话说：实变学十遍，大多数人还是学不清楚。其实数学系大学本科淘汰学生，实变函数是一关（另外几关分别是抽象代数，泛函分析，微分几何和拓扑，基本这几门课，就把不适合学习数学，或者不具备结构抽象能力，公理化抽象能力（语言抽象能力）和空间抽象能力的学生淘汰了）。

所以如果能够熟悉用集合的语言描述函数或函数列的性质，能够在集合的语言与分析的语言之间相互转换，就能容易入门，这是学习实变函数的诀窍。

1.2 为什么要讨论实变函数

因为在物理和工程中，需要大量使用积分（例如能量是积分，距离是积分、压力是积分、体积面积是积分等等），而99%的工程或物理上碰到的积分，都是无法得出解析解的，都只能依靠数值解计算，而计算数值解，主要方法就是逼近，采用计算技术后，近似计算的精度可以达到任意需要的程度。

近似计算，其实就是用一个比较简单的函数序列的积分去逼近目标函数的积分，这样就要求函数序列必须是收敛到目标函数的，同时这个函数序列的积分

也是收敛的，不然就无法判断近似计算得出的数值解是不是对象函数的积分。

这个问题就是**积分和极限的顺序是否可以交换的问题。**

在黎曼积分中，积分和极限的顺序可以交换需要附加非常强的条件：函数序列一致收敛。

但是绝大多数工程和物理涉及的积分是无法做到一致收敛的，甚至处处收敛都做不到。

例如在微积分那个帖子了，我们提到并不是所有函数的傅里叶展开（这也是一种逼近算法）都能收敛到函数本身。

函数列一致收敛是非常强的条件，函数列的连续性、可积性等性质都能被极限继承下来，但是一致收敛的函数列并不多，所以必须考虑放宽条件。那么怎么放宽呢？

例如，如果一个函数列仅仅是处处收敛，如何放宽条件到类似一致收敛的性质？

看一个例子：$f_n(x) = x^n$，$x \in (0, 1)$，这是一个处处收敛到0但不一致收敛的函数列。导致这个函数列不一致收敛的原因在于区间的右端点，只要我们把右端点的一个充分小邻域挖掉，例如挖掉$(\delta, 1)$，其中δ 充分接近1，那么在剩下的区间$(0, \delta]$上，函数列是一致收敛的。

这个例子就是处理类似问题的思路：也即挖掉导致不一致收敛的点，这些点组成的集合如果是很小的（零测度集），那么对函数列整体性质影响极小。

其实在实变函数课程中，我们能够证明，当一个函数列处处收敛时，导致收敛不具有一致性的仅仅是定义域中测度为零的点集。

所以实变函数一个重要的定理就是：**一个处处收敛的函数列一定可以通过挖掉定义中很少的部分，使得在剩余的部分一致收敛。**

这就是实变函数中非常重要的叶果罗夫定理，稍微严谨的表述是：

如果$\{f_n(x)\}$是有限测度集E上几乎处处有限且几乎处处收敛到$f(x)$ 的可测函数列，那么对任意$\delta > 0$，存在E的可测子集E_δ，使得E_δ 的测度小于δ ，并且$f_n(x)$在$E - E_\delta$ 上一致收敛到$f(x)$ 。

这个定理对于积分与极限交换顺序的证明起着举足轻重的作用。

这种把问题分成正常与奇异两个部分来分别处理，是实变函数的常规方法。

所以不懂实变函数，就不可能真正精通傅里叶分析（要想真正了解傅里叶分析，就必须熟悉实变函数，因为在傅里叶分析中，一个最基本也是最重要的问题是：傅里叶级数是否收敛？按什么方式收敛？这个问题在微积分里是无法搞清楚的，事实上，即使是一个连续函数，其傅里叶级数也可能在某些点发散，魏尔斯特拉斯构造出了一个连续函数，其傅里叶级数是处处发散的。只有实变函数才能解决这个问题），而傅立叶分析是大多数工程和技术使用数学的入门工具，可以说傅利叶分析是一切工程师的混饭吃的基本装备；也不可能懂泛函分析，而泛函分析是所有优化方法和算法的基础工具，是现代管理技术（主要是管理信息系统）、通讯技术、控制技术、计算机技术和机器学习等智能技术的基础工具。

1.3 实变函数要解决的核心问题

微积分是研究连续函数的可微和可积，实变函数是研究可测函数的可积，泛函分析是研究广义函数性质（广义函数是物理学中第一把打开无限维空间几何的钥匙）。

从连续函数到可测函数在抽象能力上是一个巨大飞跃，这个飞跃有两个难度，第一个难度是必须熟悉用抽象的集合语言来研究可测函数性质（例如用集合语言描述集合列和可测函数的极限，连续，可积等等），第二个难度是熟悉推广的度量概念（或者说抽象的度量概念，例如抽象的距离，面积，体积等等，这些概念在泛函分析中会推广到无穷维空间中），也即测度(抽象测度是将区间的长度,区域的面积等概念的共性提炼出来形成一套公理，在此基础上进行逻辑演绎得出一整套的理论，这与其它近代数学分支是类似的)，测度论最困难的地方不是许多定理，而是要习惯公理化体系定义对象，而不是传统微积分中构造定义或几何直观定义。前面介绍微积分时，我们知道在微积分中，主要是从连续性、可微性、黎曼可积性三个方面来讨论函数（包括函数序列的极限函数）。

在微积分中，函数黎曼可积的判别条件是：假设$f(x)$ 是区间$[a,b]$上的函数，则f在$[a,b]$上黎曼可积的充分必要条件是当$\delta(\Delta) \to 0$时，$S^*(\Delta) - S_*(\Delta) \to 0$，其中$S^*(\Delta)$，$S_*(\Delta)$ 分别是对应于分割Δ 的大和与小和。

所以要保证一个函数的Riemann积分存在，必须基本上连续，这就严重限制了可积函数的范围。即使一个函数序列的极限是存在的，其极限函数也未必可积，即使极限函数可积，其函数序列积分的极限也未必等于极限函数的积分。这说明了Riemann可积函数类关于极限不是封闭的，或者说Riemann可积函数全体关于通常意义下的极限（具体地说即逐点极限）是不完备的。

不完备就意味着函数列收敛有很多问题。例如有理数集合不是完备的，也即有理数数列收敛的值不一定还是有理数。实数集合是完备的，所以很多在实数集中成立的结论在有理数集中不成立。所以微积分留下了几个逻辑漏洞需要填补：

★极限收敛唯一性存在性条件的不完备：因为存在极限与积分交换次序后不相等的例子，所以存在极限收敛不唯一的情况。这个问题后来在实变函数中，用勒贝格控制收敛定理完满解决；

★可微和可积的充分必要条件的不完备：魏尔斯特拉斯构造了一个由级数定义的函数，这个函数是连续函数，但是这个函数在任何点上都没有导数，也即存在连续函数但处处不可微；同时狄利克雷也构造出处处连续，但是黎曼积分不存在的函数例子。这个问题，勒贝格通过引进勒贝格测度和勒贝格积分，重新定义积分概念，完满解决；

★级数收敛条件的不完备：也即存在函数展开的级数不一定能够收敛到原来函数的例子。这个问题在实变函数中解决，这个问题的解决方法后来发展成为调和分析的核心内容。所以实变函数要解决的核心问题就是极限交换的问题（其实数学分析中的大部分问题最后都可以归结为极限交换的问题）。

上述问题可以用一个例子来描述：例如用狄里克雷（Dirichlet）函数f可以构造一个黎曼可积的函数序列$\{f_n(x)\}$，这个函数序列是收敛的，但是极限却是个不可积函数，所以此时$\lim \int f_n(x)\,\mathrm{d}x$不等于$\int \lim f_n(x)\,\mathrm{d}x$，也即积分与极限不可交换。

其实还有例子可以证明，就算$\lim f_n(x)$也可积，$\lim \int f_n(x)\,\mathrm{d}x$也不一定等于$\int \lim f_n(x)\,\mathrm{d}x$。

显然上述问题本质是黎曼积分定义有致命的缺陷，导致黎曼可积的充分必要条件太苛刻。实变函数解决这个问题办法很简单：放弃黎曼积分定义，重新定义积分，也即勒贝格积分。

一般来说，要交换两个极限，需要其中一个极限过程具有某种一致收敛性。

一致收敛是数学分析中最重要的概念之一，它给出了极限交换的一个充分条件。然而，这个条件并不好用，因为其限制性过强。而实变函数的核心定理（或核心成就）Lebesgue控制收敛就是一个好用得多的判定条件，这也体现了Lebesgue积分的优越性。

积分与极限可以交换顺序是用数值方法进行近似计算的基础，因为如果函数序列积分的极限不能收敛到极限的积分，那么数值计算就无法进行。所以数值计算为了验证积分与极限的交换性，需要耗费大量的精力，所以极为需要一个判定定理，确定积分与极限可以交换顺序充分必要条件。

可积性问题直到在实变函数中才能彻底得到解决。使用勒贝格控制收敛定理，我们容易得到结论：黎曼可积性充分必要判别条件是区间$[a,b]$上的函数$f(x)$ 的间断点集是个勒贝格零测集。Lebesgue积分弥补了Riemann 积分的缺陷，不仅大大扩大了可积函数的范围，也使得积分与极限交换顺序问题变得异常简单。

1.4 实变函数的思想

实变函数是从推广黎曼积分开始的。

先回忆一下Riemann积分定义：

假设$y = f(x)$ 是区间$[a,b]$上的函数，若存在某个常数A，使得对区间$[a,b]$的任一分割$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$及任意$\xi_i$（$\xi_i \in [x_i x_{i+1}]$，$i = 0, 1, \ldots, n-1$），只要$\max\{0 \le i \le n-1\}(x_{i+1} - x_i) \to 0$，就有：

黎曼和式$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) * (x_{i+1} - x_i) \to A$，则称$f$在$[a,b]$上Riemann可积，$A$称为$f$在$[a,b]$上的定积分。

从上述黎曼积分定义可以看出，如果$f(x)$ 在$[a,b]$上黎曼可积，则对$[a,b]$内任一充分小的邻域，$f(x)$ 在其上值的变化不能太大，否则黎曼和式的极限可能会不存在。由此看来，黎曼和式对函数有特定的要求：它要求这些函数是连续的。由于连续性条件过苛刻，所以Riemann积分的定义有局限。

勒贝格（Lebesgue）从直观几何角度提出了勒贝格积分：

放弃了对函数的定义域进行分割并进而求和的方法，转而对函数的值域进行分割：

$[a,b]$上有界函数$y = f(x)$，假设$m \le f(x) \le M$，对$[m, M]$ 作任意分割：$c_0 < m < c_1 < c_2 <, < M < c_n$，则对$f$的定义域中任意$x$，$f(x)$ 必定位于某个$(c_i, c_{i+1}]$中。考虑所有其值位于$(c_i, c_{i+1}]$中的那些x，即$(c_i, c_{i+1}]$的原像，记作$E_i = \{x | c_i < f(x) \le c_{i+1}\}$。直观上看来，当$y = f(x)$ 连续时，E_i 是一些区间的并。

先假定f是连续的，这样E_i就有长度，即几个（也可能是无穷多个）小区间长度之和，作和式：

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i |E_i| c_i < \xi_i \le c_{i+1}$$

（也可以$f(x_i)$代替ξ_i，$x_i \in E_i$），其中$|E_i|$表示那些小区间长度之和。当$\max_i(c_{i+1} - c_i) \to 0$时，$S(f)$的极限就是$f$的Riemann积分。这就是说，用上述方法分割求和相对于连续函数来说与Riemann 积分是一样的（在一元函数情形，凡Riemann可积函数在这种意义下都是可积的）。

如果f在$[a,b]$上不连续，此时E_i 就未必是区间组成的了，这从狄里克雷函数便可看出，因而E_i 就没有通常的长度了，$S(f)$自然没有意义。要解决这一问题，就有必须对一般的集合E_i 建立长度和面积的概念，这就是测度的概念。

所以测度是实变函数的基础概念，是在无穷集合上推广距离或面积之类量度概念。

显然可以得到定义：使得E_i 勒贝格可测的函数f就是勒贝格可测函数，使得$S(f)$有极限的函数就是勒贝格可积函数。

这种可积定义的角度和观点与黎曼积分不同，价值在于把可积函数的范围扩大了，发现了积分与极限交换顺序等问题的充分必要条件，为泛函分析的产生奠定了基础，也使得概率论成为近代数学的一个分支。

下面介绍实变函数这门课的核心内容。

实变函数这门课的核心是Lebesgue积分，可以说一门实变函数课程，就是介绍了勒贝格积分，和基于勒贝格积分概念得到的积分极限交换条件。

勒贝格积分克服了Riemann积分的缺陷，比如对微积分基本定理, Riemann可积, 积分与极限交换次序等过于苛刻的条件进行放宽，得到了一系列简洁而又非常实用的结果。

2 欧氏空间R^n中的点集拓扑

前面已经说了，实变函数最基础概念是在无穷集合上定义距离和面积等等概念，也即定义测度。而要讨论测度问题，首先得解决距离或面积之类概念在无穷集合下的推广问题，这就是欧氏空间R^n中的点集拓扑要讨论的，这是实变函数的基础。

点集拓扑是数学系二年级的基础课程，培养学生透过现象看本质的能力，通过一些不变量了解对象的本质性质。点集拓扑最著名的定理是布劳尔（L. E. J. Brouwer）不动点定理（简单说就是：每一个从一个欧几里得空间的某个给定的凸紧子集映射到它自身的连续函数$f(x)$ 都有（至少）一个不动点。也即存在一个点x_0，使得$f(x_0) = x_0$。是刻画欧几里得空间之拓扑性质的关键定理。更一般化的定理是Schauder不动点定理：每一个从一个巴拿赫空间的某个给定的凸紧子集射到它自身的连续映射都有（至少）一个不动点。阿罗用不动点定理证明了供需均衡点的存在，这个定理是整个微观经济学能够成立的基础定理。拓扑学在泛函分析、李群论、微分几何、微分方程和其他许多数学分支中都有广泛的应用。

拓扑学的意思是连续几何学或一对一的连续变换群下的几何学，主要研究连续变换下的不变量，而不是传统几何研究的长短、大小、面积、体积等度量性质和数量关系，也不讨论两个图形全等的概念，而是讨论连续变换下等价的概念。这种连续变换又叫拓扑变换，形象的描述是在图形被弯曲、拉大、缩小或任意的变形下保持不变的量，在变形过程中不使原来不同的点重合为同一个点，又不产生新点。也即这种变换的条件是：在原来图形的点与变换了图形的点之间存在着一一对应的关系，并且邻近的点还是邻近的点。所以拓扑学也叫橡皮几何学。

例如在拓扑学中，圆和方形、三角形的形状、大小不同，但是在拓扑变换下，它们都是等价图形。当然环面不具有这个性质，把因为球面不能通过连续变换变成环面。所以球面和环面在拓扑学中是不同的曲面。一般地说，对于任意形状的闭曲面，只要不把曲面撕裂或割破，他的任何变形就是拓扑变换，就存在拓扑等价。

拓扑学目前有两个分支。一个是用分析的方法来研究的，叫做点集拓扑学，或者叫做分析拓扑学，另一个是用代数方法来研究的，叫做代数拓扑。

使用抽象代数来研究拓扑空间就是代数拓扑(Algebraic topology)，代数拓扑是用群环域来表示全部的拓扑不变量。

简单说就是代数拓扑为拓扑空间赋予一系列的群，这些群的结构反映了空间的拓扑性质。拓扑空间之间的拓扑映射诱导了群之间的同态，群同态的行为特征反映了拓扑映射的特质。目前主要是同调群和同伦群。

例如两个流形拓扑等价（拓扑同胚），当且仅当它们对应的代数结构同构。

代数拓扑可以计算拓扑空间的拓扑不变量，从而判定两个空间是否拓扑等价，例如计算曲面同伦群，如果同伦群平庸（即只有单位元），则曲面必为球面（在三维流形上的推广，就是鼎鼎大名的庞加莱猜想）；如果同伦群可交换，则曲面必为轮胎；如果同伦群存在有限阶的子群，则曲面必不可定向等等。拓扑不变量可以进一步将所有拓扑空间分类，例如所有可定向的紧曲面分类。

如果固定两个拓扑空间，考察它们之间所有的映射，代数拓扑方法可以区分映射的同伦类。例如，给定曲面到自身的两个同胚，判定它们是否同伦。

代数拓扑可以解决不动点的存在性和个数问题。许多计算问题最后归结为求解某种不动点：例如大多数的优化问题，解代数方程组问题，解某些偏微分方程等。

下面重点介绍点集拓扑。

2.1 拓扑空间定义

拓扑空间定义：设X是一个非空集合，X的一个幂集族τ（就是X中所有的子集,包括全集和空集构成的集族）称为X的一个拓扑。如果它满足：

★X和空集都属于τ；

★τ中任意多个成员的并集仍在τ中；

★τ中有限多个成员的交集仍在τ中。

称集合X连同它的拓扑τ为一个拓扑空间，记作(X, τ)。

称τ中的成员为这个拓扑空间的开集，开集的补集叫闭集。

这个定义直观解释是：给定任意一个集，在它的每一点赋予一种确定的邻近结构便成为一个拓扑空间。构造邻近结构有多种方法，常用的是指定开集的方法。顺便说一句，拓扑空间并不一定有距离或度量（测度）概念，在拓扑空间上定义距离或度量，就成为度量空间。

一个集合拥有不同拓扑，例如除了由全体开区间生成的拓扑之外，实数集还可以赋予另外一种拓扑——下限拓扑（lower limit topology）。这种拓扑的开集由下列点集构成——空集、全集和由全体半开区间$[a, b)$生成的集合。这种拓扑严格地细于上面定义的欧几里得拓扑；在这种拓扑空间中，一个点列收敛于一点，当且仅当，该点列在欧几里得拓扑中也收敛于这个点。

拓扑空间的定义仅依赖于集合论，是带有连续，连通，收敛等概念的最基本的数学空间。拓扑空间是数学上最重要的概念。

任何集上总可以赋予拓扑。例如X的一切子集组成的族就是X上的一个拓扑,叫离散拓扑，对应的空间叫离散空间；一个拓扑仅由空集与X自己所组成,叫平凡拓扑。如果集X上定义了一个度量或距离函数，那么X内可以用一些开球的并表示的一切子集组成X上的一个拓扑，叫度量拓扑。一切开球组成的集族称为这个拓扑的一个基（拓扑的一个子族B称为X的一个基，是指X的每个元可表为B的一些元的并）。这时,也说拓扑是由B生成的。

一个集合可以拥有不同拓扑，例如除了由全体开区间生成的拓扑之外，实数集还可以赋予另外一种拓扑——下限拓扑（lower limit topology）。这种拓扑的开集由下列点集构成——空集、全集和由全体半开区间$[a, b)$ 生成的集合。这种拓扑严格地细于上面定义的欧几里得拓扑；在这种拓扑空间中，一个点列收敛于一点，当且仅当，该点列在欧几里得拓扑中也收敛于这个点。【整理者注：与前面的一段文字完全重合，原文如此。】

拓扑空间例子：

★n维欧几里得空间R^n构成一个拓扑空间，其上的开集就由开球来生成。欧几里德空间在通常开集的意义下是拓扑空间，它的拓扑就是所有开集组成的集合。

★任何度量空间都可构成一个拓扑空间，如果其上的开集由开球来生成。这中情况包括了许多非常有用的无穷维空间，如泛函分析领域中的Banach空间和希尔伯特空间。

★任何局部域都自然地拥有一个拓扑，并且这个拓扑可以扩张成为这个域上的线性空间。

★流形都是一个拓扑空间。

★每一个单形都是一个拓扑空间。单形是一种在计算几何学中非常有用的凸集。在0、1、2和3维空间中，相应的单形分别是点、线段、三角形和四面体。

★每一个单纯复形都是一个拓扑空间。一个单纯复形由许多单形构成。许多几何体都可以通过单纯复形—来建立模型。

★泛函分析中的许多算子集合可以获得一种特殊的拓扑，在这种拓扑空间中某一类函数序列收敛于零函数。

★任何集合都可以赋予离散拓扑（设X是一个非空集合。则X的幂集$T = 2^X$也是X的一个拓扑。称T为X的离散拓扑。显然X的任意子集都是(X,T)的开集）。在离散拓扑中任何一个子集都是开集。在这种拓扑空间中，只有常数列或者网是收敛的。

★任何集合都可以赋予平庸拓扑（设X是一个非空集合。则集合$t\{X, \varphi\}$是X的一个拓扑。称t为X的平庸拓扑。显然(X, t)只有两个开集，X和φ，φ是空集）。在平庸拓扑中只有空集和全集是开集。在这种拓扑空间中，任和一个序列或者网都收敛于任何一个点，也即一个序列或者网可能不会收敛于唯一的一个点。

★有限补拓扑。设X是一个集合。X的所有有限子集的补集加上空集，构成X上的一个拓扑。相应的拓扑空间称为有限补空间。

★可数补拓扑。设X是一个集合。X的所有可数子集的补集加上空集，构成X上的一个拓扑。相应的拓扑空间称为可数补空间。

★如果Γ 是一个序数，则集合$[0, \Gamma]$是一个拓扑空间，该拓扑可以由区间$(a, b]$生成，此处a和b是Γ 的元素。

★一个具体的拓扑空间例子：设$X = \{1, 2\}$。则$\{X, \emptyset, \{1\}\}$是X的一个拓扑，$\{X, \emptyset, \{2\}\}$也是拓扑，$\{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$也是拓扑。

2.2 连续映射

微积分核心是讨论函数的连续性，可积性和函数列的收敛性等等性质，在实变函数或现代数学分析中，函数概念已经扩展到无穷集合的映射上，讨论映射的连续性和收敛性质。

在微积分中定义函数（映射）的连续性是从局部到整体的，先定义函数在某一点处的连续性，然后再定义函数本身的连续性。而在拓扑中，映射在某一点处的连续性的定义需要先定义邻域的概念。

拓扑空间映射定义：对于拓扑空间X内每一点x,拓扑空间Y内有惟一一点y与它对应。则称f是拓扑空间X到拓扑空间Y的映射。这个y叫x在f下的像,记为$f(x)$。

邻域定义：设(X, P)是一个拓扑空间，$x \in X$. 如果U是X的一个子集，满足条件：存在一个开集$V \in P$使得$x \in V \subset U$，则称U是点x的一个邻域。点x的所有邻域构成的X的子集族称为点x 的邻域系。如果U是包含着点x的一个开集，那么它一定是x的一个邻域，于是我们称U是点x的一个开邻域。

现在我们先将来将度量空间之间的连续映射在一点处的连续性的概念推广到拓扑空间之间的映射中去。

连续映射定义：称f是连续映射是指对Y的每个开集G,其逆像$f-(G) = \{x \in X \mid f(x) \in G\}$是$X$的开集。

f为连续映射的等价条件有很多，例如：

★Y的每一开集的原像是X的开集。

★Y的每一闭集的原像是X的闭集。

★对于任意$x \in X$和$f(x)$ 的任意邻域V，存在x的邻域U使得$f(U) \subseteq V$。

★对于X的每一子集A，有$f(c \setminus A) \subseteq c \setminus f(A)$。

★对于Y的每一子集B，有$f^{-1}(c \setminus B) \supseteq c \setminus f^{-1}(B)$

定理：拓扑空间X的一个子集U是开集的充分必要条件是U是它的每一点的邻域，即只要$x \in U$，U便是x的一个邻域。

局部的连续性概念和整体的连续性概念之间的联系有如下定理：

设X和Y是两个拓扑空间，$f : X \to Y$，则映射f 连续当且仅当对于每一点$x \in X$，映射f 在点x处连续。

这个定义在一般集合上描述了点与点或点与集合邻近的概念，这样就把收敛与连续的研究推广到一般集合上。这样一致性结构概念、抽象距离概念和近似空间概念等等都能够被定义。

由于X的每点有邻域，所以可研究一点的邻近，所以可以仿照微积分的方法定义两个拓扑空间之间的连续映射的概念。

2.3 同胚映射

同胚映射是拓扑一个重要概念，两个同胚集合，在连续意义下是等价的，也即连续有关的性质和定理都可以继承。是一个重要的分类方法。

同胚映射定义：如果集合X内任意两个不同的点有不同的像，就称f是单射。如果集合Y内每一点必是集合X内某一点的像，就称f是满射。从拓扑空间X到拓扑空间Y的每个既单又满映射f 必有逆映射g,它是Y 到X 上的既单又满映射，且$g(y) = x$当且仅当$f(x) = y$。这时如果f和g都连续，便称f为同胚映射。

或者等价于：若一个映射连续，且存在逆映射，逆映射也连续，则称此映射为同胚映射。具有同胚映射的两个拓扑空间称为同胚的（直观地说即两个空间相应的图形从一个可连续地形变为另一个）

两个拓扑空间称为同胚的,是指它们之间存在一个同胚映射。要证明两个空间同胚，只要找到它们之间的同胚映射即可。

例子：n维欧几里得空间R^n的任一开球作为子空间与R^n同胚。当m不等于n时，R^m与R^n不同胚。在欧几里得直线上，作为子空间，两个任意的闭区间同胚；任意两开区间同胚；半开半闭的区间$[c,d)$ 与$[a,b)$ 同胚等等。

与一个度量空间同胚的拓扑空间叫可度量空间。

2.4 常见的拓扑不变性

点集拓扑中常见的拓扑不变性有：连通性、紧性、列紧性、分离性等。

（1）、连通性

连通性是点集拓扑学中的基本概念。其定义如下：

称拓扑空间X为连通的，若X中除了空集和X本身外没有别的既开又闭子集。拓扑空间X的子集E称为连通的，若E作为X的子空间在诱导拓扑下是连通的。等价描述为：

★称拓扑空间X连通，若X不能表示成两个非空不交开集的并。

★称拓扑空间X连通，若当它分成两个非空子集的并$A \cup B$时，有A交B的闭包非空，或B交A的闭包非空。

★称拓扑空间X连通，若X内即开又闭的子集只有X与空集。

连通的性质：

★实数集的子集是连通的，当且仅当它是一个区间。

★连通性由同胚保持，从而是空间的拓扑性质。

★设Ω是X的一族子集，它们的并是整个空间X，每个Ω中的成员连通，且两两不分离（即任意两个集合的闭包有非空交），则X连通。

★若X, Y连通，则乘积空间$X \times Y$连通

（2）、紧性

紧性是实变函数用得比较多的概念。定义如下：

称拓扑空间X紧，若X的任一开覆盖有有限子覆盖。称拓扑空间X的子集K为紧集，若能从X的任一覆盖K的开集族中取有限覆盖。

定理：连续映射把紧空间映成紧空间。

紧性的相关概念包括列紧（称X列紧，若X中的任一序列有收敛子列）；Bolzano-Weierstrass性质（称X具有该性质，若X中的任一序列有聚点）。

紧的性质包括：

★K为拓扑空间X的紧子集，当且仅当K是当其本身作为X的子空间时为紧集。

★Hausdorff空间的紧集为闭集（Hausdorff空间定义是：拓扑空间任意两点的开集都是不相交的空间。开集不相交，就说明无论两点之间如何靠近，它们之间总不会有公共的相邻点。这是一个非常常见的空间，我们在数学分析中能够见到的几乎所有空间都是豪斯道夫空间，例如实数是豪斯多夫空间，所有度量空间都是豪斯多夫空间，拓扑群和拓扑流形在其定义中明确的声明了豪斯多夫条件。豪斯道夫空间中最重要的性质是：在豪斯道夫空间中，极限是唯一的）。

★紧集的闭子集为紧集。

★度量空间中，紧性、列紧型、Bolzano-Weierstrass性质三者等价。

根据拓扑空间中点和集合分离的程度、大小、连通程度、紧性等，可以对拓扑空间进行各种各样的分类。例如：

★拥有代数结构的拓扑空间：一个集合上有某种代数结构，可以定义拓扑结构为代数运算是连续映射即可。例如一个拓扑群G=拓扑空间+连续映射（群乘法）+逆元素。

★有拓扑结构的度量空间：在度量空间中，使得加法与纯量乘法是连续映射即可。这是泛函分析的主要对象。可以类似地定义拓扑环、拓扑域等等。拓扑+代数结构，可以创新出新的领域。

简单介绍一下度量空间概念：

2.5 度量空间(Metric Space)

度量空间定义：设X为一个集合，$d : X \times X \to R$。若对于任何x, y, z属于X，满足下述公理：

★正定性：$d(x, y) \geq 0$,且$d(x, y) = 0$当且仅当$x = y$;

★对称性：$d(x, y) = d(y, x)$;

★三角不等式：$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

则称d为集合X的一个度量。称偶对(X, d)为一个度量空间，或者称X为一个对于度量d 而言的度量空间。

简单直观说就是集合上任意元素之间的距离是可定义的就是度量空间。

度量空间中最典型的例子的三维欧氏空间，也即我们高中学的立体几何讨论的空间。这个空间中的欧几里德度量的定义就是两点之间距离为连接这两点的直线的长度。

其实直到微积分，我们都没跳出过度量空间看世界。

在度量空间中可以用距离定义点列的收敛概念：$x_n \to x_0$ 就是指$d(x_n, x_0) \to 0$。

点列$\{x_n\}$称为柯西点列，是指对任意正实数ε，都存在自然数N，使得$m, n \geq N$时有$d(x_m, x_n) < \varepsilon$。

可以证明收敛点列一定是柯西点列，反过来不成立。

每个柯西点列都收敛的度量空间叫做完备度量空间。这类空间有许多好的性质。例如，完备度量空间中压缩映射原理成立。可以用它证明微分方程、积分方程以及无限线性代数方程组的一系列存在唯一性定理。度量空间X的任何子集Y配上原有的距离也成为度量空间，称作X的子空间。如果每个开球$\{x \in X | d(x_0, x) < r\}$都含有Y 的点，便说$Y$是$X$ 的稠密子空间。一个空间的完备同一个集合的闭包是类似的，例如：

★有理数空间不是完备的，因为$\sqrt{2}$的有限位小数表示是一个柯西序列，但是其极限 $\sqrt{2}$ 不在有理数空间内。

★实数空间是完备的。

★开区间$(0, 1)$不是完备的。因为序列$\{1/n\}, n > 2$ 是柯西序列但其不收敛于$(0, 1)$中任何的点。

在度量空间中，另外一个重要概念是紧致性。

定义：如果X的任意开集作成的覆盖存在有限子覆盖，则称X为紧空间；如果X中的任意序列有收敛子列，则称X是列紧空间。

紧致性等价于：

★任何可数开覆盖都有有限子覆盖；

★每一无限子集都在空间中有聚点；

★每一点列都有收敛子列。

度量空间有如下核心定理：

★定理：度量空间中收敛序列的极限是唯一的。

★定理：每一度量空间X都是另一完备度量空间的稠密子空间，而且由X唯一构造出来。（例如实数直线就是有理数集的完备化。微积分逻辑基础被完善，就是基于这一重要定理）。

★定理：在完备度量空间中可数多个稠密开子集的交仍是稠密集。

不过必须强调的一点是：列紧性是拓扑空间性质，完备性是度量空间性质。直观的说，对度量空间而言，完备性是其中的点列收敛时会不会到度量空间以外的性质，而列紧仅仅是考虑存在收敛子列。对度量空间而言，列紧=紧=完全有界+完备分离公理。

提到分离公理（又叫做Tychonoff分离公理），稍微介绍一下：

2.6 分离公理

★T0公理：对于拓扑空间中任意两个不同的点x和y，至少存在一个x的邻域不包含y或存在一个y的邻域不包含x。（满足这条公理的拓扑空间叫做T0空间。又叫做柯尔莫果洛夫空间）。

★T1公理：对于拓扑空间中任意两个不同的点x和y，存在一个x的邻域不包含y，且存在一个y的邻域不包含x。

★T2公理：对于空间中任意两个不同的点x和y，存在不相交的邻域。（豪斯道夫空间）

其中豪斯道夫空间是常用的，有非常多的性质：

★Hausdorff空间中的每一个紧致子集都是闭集。

★在一个紧致的Hausdorff空间中，一个集合是闭集的充分必要条件是它是一个紧致子集。

★从紧致空间到Hausdorff空间的任何一个连续映射都是闭映射。

★从紧致空间到Hausdorff空间的任何一个既单且满的（即一一的）连续映射都是同胚（因为一个既单且满的开（或闭）的连续映射即是一个同胚）。

2.7 集合的内点与聚点

在微积分中，我们知道欧氏空间中点集的内点、聚点等概念是定义开集、闭集、自密集、完备集、孤立点集、离散点集的基础。下面进行拓扑空间中的推广。

★内点定义：一个点某个邻域内的全部点都在集合里面，包括它本身。

★聚点定义：一个点任意空心邻域内，有集合内部的点，但它本身可以是集合的点，也可以不是。（严格定义：坐标平面上具有某种性质的点的集合，称为平面点集，一般记作E。设P_0是XOY平面上的一个点，δ是某一正数，与点P_0距离小于δ的点的集合，称为P_0的邻域，记为$U(P_0, \delta)$，去心邻域指不包括P_0本身的邻域。给定平面点集H，对于任意给定的$\delta > 0$，点P_0的去心邻域内，含有E中的点，则称为P_0是E的聚点）。（聚点另外的定义：在集合内存在收敛到该点的序列）由聚点的定义可以知道，点集E的聚点P_0本身，可以属于E，也可以不属于E。此聚点要么是内点，要么是边界点。

★外点定义：一个点某个邻域内的全部点都不在集合里面，包括它本身。

★孤立点定义：一个点某个空心邻域内的全部点都不在集合里面，但它本身是集合的点—这是与外点的差别。

★界点定义：一个点任意空心邻域内的点，有不在集合里面的点，也有集合内部的点，但它本身可以是集合的点，也可以不是。

内点和界点是聚点，外点和孤立点不是聚点非孤立的界点才为聚点。

聚点为极限点。

★布尔查诺-魏尔斯特拉斯定理（这是点集拓扑的基本定理）：任何有界序列至少有一个有穷的聚点，如这个聚点是唯一的，则它就是该序列的有穷极限。

再介绍点集拓扑的研究方法：

2.8 超穷归纳法

超穷归纳法不是数学归纳法，但是包含数学归纳法。

数学归纳法的原理很直观，多米诺骨牌可以形象地展示数学归纳法。

超穷归纳法不像数学归纳法那么容易理解。

想了解超穷归纳法，首先得定义良序集。

★良序集定义：如果在一个集合中规定了一种顺序关系（这种序关系满足一些基本的法则，如反身性、对称性、传递性等），且这个集合中的每两个元素间都有序关系，则称该集合为一个全序集，如果全序集的任意非空子集都有最小元（也即存在唯一的最小序的元素），则称该序为良序集，而这种序关系称为良序关系。

良序集的最简单例子是自然数集，全序集但非良序集的最简单例子是实数集（因为实数集合的子集未必有最小元）。

★偏序集定义：如果一个集合中定义了一个序关系，但该集合中并非任意两个元素之间都有序关系，则称该集合为偏序集。

偏序集最典型的例子是复数集，按照通常的大小关系，虚数之间是不可以比较大小的，即没有序关系，只有其实数子集中的元素才有序关系（如果在复数集中重新定义序关系，也可以使得复数集成为一个全序集。

一个集是偏序集还是全序集是相对于特定的序关系而言的。

★定义：设S是一个偏序集，A是S的子集，b是S的元素，如果对A中任意的元素x，都有$x \le b$（$x \ge b$），则称b是A的一个上界（下界）。如果存在S中的元素a，使得S中不存在x，使得$a \le x$（$a \ge x$），且a不等于x，则称a是S的一个极大元（极小元）。

★Zorn引理（超穷归纳法）：如果偏序集S中的任何全序子集在S中都有上界（下界），则S中一定存在极大元（极小元）。

显然，超穷归纳法包含数学归纳法：

假设S_n是与自然数n有关的命题，满足条件：存在n_0使得S_{n_0}成立；若S_n对$n = k > n_0$成立，则对$n = k + 1$也成立，就证明了S_n对一切不小于n_0的自然数成立。

记$N_{n_0} = \{n|n$为不小于n_0的自然数$\}$，$F = \{A|A$是N_{n_0}的子集，且对A中任意的n，S_n成立$\}$，显然F按集合的包含关系构成一个偏序集，假设$F_1 = \{A_b|b \in B\}$是F的全序子集，则$A = \cup_{b \in B} A_b$是F_1的上界，由Zorn引理，F有极大元。假设C是F的极大元，可以证明$C = N_{n_0}$（不小于n_0的自然数集）。事实上，若C不等于Nn_0，任取$n_1 \in Nn_0 - C$，则$C \cup n_1$是包含C的F中元素，这与C为极大元相矛盾，所以必有$C = N_{n_0}$，换句话说S_n对一切不小于n_0的自然数成立。【整理者注：修改了这一段内容里的下标，但不能保证正确。】

最简单的例子是考虑某个集合的子集簇，以集合的包含关系作为序关系，则在此关系下，该子集簇构成一个偏序集，我们可以利用Zorn引理证明这样一件事：假设B是集合A的所有子集构成的集合，则B有唯一的极大元A。

2.9 涉及实变函数的基础定理：实数的完备性公理

牛顿和莱布尼兹创立了微积分，但是当时的逻辑基础还极其不完善，这导致了第二次数学危机，大量优秀的数学家在解决这些问题时，发现了大量的实数完备性公理。

实数完备性有七个基本定理，包括单调有界定理，区间套定理，确界定理，有限覆盖定理，聚点定理，致密性定理，柯西收敛定理，上述七个定理可以互相循环证明，也可以相互证明，是等价定理。

这七个定理是从不同角度描述了实数集的一个性质：实数集关于极限运算是封闭的。即实数的连续性之间相互等价，均可作为公理。可以互相证明说明等价而不是循环论证。

而魏尔斯特拉斯聚点定理是其中重要的。

★魏尔斯特拉斯聚点定理：实轴上的任一有界无限点集S至少有一个聚点。

聚点定理一般形式：列紧空间的任何序列都含有收敛子列（继而含有聚点，但是这个聚点不一定还在这个空间中）。

魏尔斯特拉斯定理是实分析的基础，是研究实数的几何性质的重要工具，因为它是很多拓扑空间所共有的性质（当赋予聚点拓扑含义，并而建立列紧性的概念后（列紧性就是指：对于度量空间X中的集合M，M的任何序列都含有一个收敛的子序列(这个子序列的极限未必还在M中)，列紧性成为衡量度量空间性质的重要标准，是研究度量空间的重要几何概念）。

魏尔斯特拉斯聚点定理也是数学定理公理化第一次实践。

★有限覆盖定理：设H为闭区间$[a,b]$的一个（无限）开覆盖，则从H中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$。

开覆盖的定义：设S为数轴上的点集，H为开区间的集合，（即H中每一个元素都是形如(a,b)的开区间）。若S中的任何一点都含在至少一个开区间内，则称H为S的一个开覆盖，或简称H覆盖S。若H中的开区间的个数是有限的，那么就称H为S的一个有限覆盖。

有限覆盖原理是把数学问题分而治之，做局部化处理，是数学分析常用技巧。

例如微积分中，闭区间上连续函数性质的证明，就可以利用有限覆盖原理来证明（将区域进行剖分来证明的）。

但对区间剖分的方法很难推广到欧氏空间中一般的有界闭集，有限覆盖原理则适用于更一般的情形。

但是有限覆盖只完成了从整体到局部的过程，最终还得还原为整体问题。

★单调有界定理：若数列$\{a_n\}$递增有上界（递减有下界），则数列$\{a_n\}$收敛，即单调有界数列必有极限。具体来说，如果一个数列单调递增且有上界，或单调递减且有下界，则该数列收敛。

★区间套定理：设闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$具有如下性质：$[a_n,b_n]$包含$[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,...$;（其中的意思是$[a_{n+1},b_{n+1})$是$[a_n,b_n]$的子集）；$\lim(b_n-a_n)=0(n\to\infty)$,则称$\{[a_n,b_n]\}$为闭区间套,或简称区间套。若$\{[a_n,b_n]\}$是一个区间套,则在实数$R$中存在唯一的点$\xi$,使得$\xi\in[a_n,b_n],n=1,2,...$,即$a_n\le\xi\le b_n,n=1,2,...$（这个

定理实际上表明了实数的完备性：实数是连续地充满整个数直线而没有间隙,而有理数就不具备这个性质）。

推论：闭区间套定理：有无穷个闭区间，第二个闭区间被包含在第一个区间内部，第三个被包含在第二个内部，以此类推，这些区间的长度组成一个无穷数列，如果数列的极限趋近于0(即这些区间的测度（长度）最终会趋近于0)，则这些区间的左端点最终会趋近于右端点，即左右端点收敛于数轴上唯一一点，而且这个点是此这些区间的唯一公共点。

★确界定理：任一有上界的非空实数集必有上确界(为实数)；同样任一有下界的非空实数集必有下确界（为实数）。（在扩张的实数系R中，非空实数集的上（下）确界为$+\infty$（$-\infty$）。在R中任何非空集都有上、下确界）。

★致密性定理：有界数列必含有收敛子列。

★柯西收敛定理：在实数系中,数列$\{x_n\}$有极限存在的充分必要条件是: 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 当$n > N, m > N$时,有$|x_n - xm| < \varepsilon$。

2.10 分形集简介

分形集就是病态的集合。最简单的分形集例子是康托三分集。

（1）、康托三分集

将区间[0,1]三等分，挖掉中间的开区间$(1/3, 2/3)$，余下两个区间$[0, 1/3]$，$[2/3, 1]$，再将这两个区间三等分，挖掉中间的开区间$(1/9, 2/9)$，$(5/9, 6/9)$，余下四个区间[0,1/9]，[2/9,1/3]，[2/3,7/9]，[8/9,1]，依此方法不断挖下去，操作n次后，最后剩下的集合记为C，称它为康托（Cantor）三分集，是位于一条线段上的一些点的集合，是个测度为0的集，也是一个无处稠密的完备集。（康托三分集的边长$r = (1/3)^n$，边数$N(r) = 2^n$，根据集合维数公式$D = \ln N(r)/ln(1/r)$, $D = \ln 2/\ln 3 = 0.631$，所以康托三分集是分数维的。）

康托三分集有三条性质：

★是完备集。

★没有内点。

★基数为c（[0,1]的集合基数为c）

康托三分集是一个基数为c的疏朗完备集。

康托三分集的发现很重要，因为奠定了现代点集拓扑的基础，也是分形几何的出发点，而分形几何是现在资本市场和期货市场交易模型采用的主要工具。

康托三分集中有无穷多个点，所有的点处于非均匀分布状态。此点集具有自相似性，其局部与整体是相似的，所以是一个分形系统。

简单说，任何一个分形集一定是不含任何区域的集合，例如，直线上的分形集不可能含线段，平面内的分形集一定不含任何圆，不管这个圆的半径多么小，这样的集合无论是局部还是整体都无法用传统的几何语言来描述。

康托三分集具有：自相似性；精细结构；无穷操作或迭代过程；用传统的几何难以描述（既不满足某些简单条件如点的轨迹，也不是任何简单方程的解集。其局部也同样难于描述。因为每一点附近都有大量被各种不同间隔分开的其它点存在）；长度为零；简单与复杂的统一。

康托三分集让传统微积分和传统几何学陷入危机。这也就是点集拓扑发展的另外一个支撑点。例如对区间如何计算长度，对区域如何计算面积，我们根据前面介绍欧式空间性质，根据其连续的假设，都能在定义的度量上用黎曼积分进行计算，但是对康托三分集这种集合，就只能用测度。举例来说，假设E是直线上的一个有界集合。用一列开区间I_n（$n = 1, 2, 3, \ldots$）把它盖住，即I_n的

并集$\cup I_n$包含了E，I_n的长度当然是可以求的，用$|I_n|$表示I_n的长度，如果E有长度的话，当然应该小于盖住它的那些区间序列的长度之和：$\sum |I_n| \geq |E|$（注意—E—尚未定义，只是假设存在）。由于盖住E的开区间序列很多，所以取$\sum |I_n|$ 的最小者，这个最小者可能是达不到的，所以微积分里有个词叫下确界，这个最小者称为E的外测度。

A, B是两个不相交的集合，在集合连续假设下，则应该有$|A \cup B| = |A| + |B|$，但是外测度不一定具有这种性质，于是产生了不可测集的概念（有点象Riemann不可积函数）。满足某种可加性的集合称为可测集，否则称为不可测集。

例如设r_n为有理数全体，对任意的$\varepsilon > 0$，令$I_n = \pounds r_n - \varepsilon/2^n r_n + \varepsilon/2^n)$，则$\cup I_n$包含了rn，于是$\sum |I_n| > |rn|$，$\sum |I_n| = 2\varepsilon$，由于$\varepsilon$ 是任意的，所以$|r_n| = 0$，这就是说，有理数集的长度（测度）为0，

再来看看Cantor集C，第一次挖去了1/3长度，第二次挖去了两个1/9长度，第三次挖去了四个1/27长度，依此类推，第n次挖去了2^{n-1}个$1/3^n$长度，从而挖去的总长度为$\sum 2^{n-1}/3^n = 1$。所以C的测度（长度）=0。直观上C所含的点很少了，所以C在[0,1]中任何点处都不稠密。而有理数集合是处处稠密的，那么直觉上是有理数集所含的点比C中的点多，但是这种直觉是错的，可以证明C中的点与[0,1]区间一样多。这就是康托三分集的特殊之处。

（2）、豪斯道夫维数

上面的勒贝格测度概念显然无法区分有理数集与Cantor集，我们需要更精细的测度。

于是Hausdorff测度就产生了。

勒贝格测度的基本思想是用开区间覆盖给定的集合，从而得到一个级数$\sum |I_n|$，当取最小值时，可能其值等于0，如Cantor集与有理数集。

可是如果给$|I_n|$加上一个小于1的非负指数α，即考察级数$\sum |I_n|^\alpha$，很容易证明，加上指数α后，级数可能收敛也可能发散，这样就出现一个临界状态，即存在某个数d，当$\alpha < d$ 时$\sum |I_n|^\alpha$ 永远等于∞，当$\alpha > d$ 时，$\sum |I_n|^\alpha$ 的最小者（下确界）等于0，只有当$\alpha = d$时$\sum |I_n|^\alpha$ 的最小者才是个非零的有限数。我们把d称为集合的Hausdorff维数，也称为分数维。

说是分数维，其实这个数完全可能是无理数，例如Cantor集的维数是$\ln 2/\ln 3$（可以通过自相似性公式来计算），有理数集的维数是0。

分形几何就建立在分数维上（这是超出直觉的，学过几何都知道，维数是几何的特征量，它是一个点的位置所需的独立坐标数目。在欧氏空间中，平面或球面是二维，直线或曲线是一维，立体几何是三维。通常习惯于整数的维数）。

扯分数维，就不得不扯扯豪斯多夫。波兰人豪斯多夫是一般拓扑学的奠基人，他创建并完成了拓扑和度量空间的理论，直到今天仍是数学的基础理论，他最重要的贡献是建立了完整的公理化研究数学结构和数学空间体系，把希尔伯特(Hilbert)和外尔(Weyl)的公理化方法扩展到整个数学基础，例如把公理化用于微分几何中黎曼曲面的邻域概念，用公理化语言定义了拓扑空间。

豪斯多夫还在拓扑学、连续群理论、泛函分析、数论、概率论、几何学等许多分支中都有建树。（现代数学，波兰人有很重要地位，泛函分析奠基人巴纳赫，斯坦因豪斯，拓扑学奠基人豪斯道夫）

豪斯道夫定义的豪斯道夫维数，把集合维数从离散整数扩展到连续。

1919年，豪斯道夫从测度的角度引入了分数维概念，将维数从整数扩大到分数，从而突破了一般拓扑集维数为整数的界限。豪斯道夫维数本质上是连续空

间的概念,也就是空间维数是可以连续变化的。

分数维是物理学研究混沌吸引子的基础概念，因为混沌的吸引子就是分数维的。（本质分数维展示的是事物非规则的程度）。

豪斯道夫定义分数维基本思想是从直觉开始的。一个集合的维数是描述这个集合中一点所需的独立参数的个数。比如要描述一个平面里的一点需要两个坐标X和Y，那么平面的维数便是2。但是有的不规则的集合，比如分形维数就不是整数。

设想有一个由三维空间内具有有限大小的点组成的集合，N是用来覆盖这个集合内所有点所需的半径为R的球体的最少个数，则这个最小数N是R的一个函数，记作$N(R)$。显然R越小则N越大，假设$N(R)$和R之间存在一个反比的关系，我们把这个关系记作$d=\ln N(R)/\ln R$

当R趋向于0时，我们得到极限d就定义为这个集合的豪斯多夫维。

当然除了球体以外，也可以使用正方体或其它类似的物体来覆盖集合内的点。

如果是在一个二维平面内，则使用圆而非球体。在一个n维空间内，就使用相应的n维物体。

对于一条有限长度的曲线，所需的覆盖物体的个数和它的半径成反比，那么曲线的豪斯多夫维数为1。对于一个平面而言，所需的球体的个数明显和它的半径的平方成反比，那么这个平面的豪斯多夫维数则为2。

设想一个特殊的几何物体，这个物体由n个大小一致且互不重叠的小物体组成，这些小物体的形状和这个物体本身相同。若这些小物体和大物体的大小比例为1:m，那么这个几何物体的豪斯多夫维数为$d=\ln(n)/\ln(m)$。

豪斯多夫维可以给一个任意复杂的点集，比如分形（Fractal）赋予一个维度。对于简单的几何目标比如线、长方形、长方体等豪斯多夫维等同于它们通常的几何维度或者说拓扑维度。

豪斯多夫维的计算很不容易。

（3）、Borel集

Borel集是拓扑空间中的开集经过至多可数次的交、并、差运算得到的σ域中的元素，也可以说成拓扑空间中含开集的最小σ域中的元素。σ代数或σ域是一个集合组，对于这个集合组满足三个条件：

★空集属于这个集合组

★若A属于，那么A的补集也属于

★对于一个集合序列，若它们都属于，那么它们的极限也属于。

对于一个集合X，它的最小的σ代数是空集和它本身组成的集合组，最大的集合组是它的所有子集组成的集合组。

R^n中一切开集构成的开集族，生成的σ代数称为Rn的borelσ代数，它其中的元素称为Borel集。

Borel集对于测度概念非常重要，因为每个定义在开集上或者闭集的测度，都需要在哪个空间的所有的Borel集上定义。

定理：Borel集合的个数与实数的个数一样多。

用二进制很容易完成证明由两个元素组成的所有可能的序列构成的集合与实数一样多。

推而广之：由k个元素组成的所有可能的序列构成的集合与实数一样多。

把交、并、差这三个运算可以看着三个元素，所以由这三个元素组成的所有可能的序列与实数一样多，而一个Borel集可以与一列开集及交、并、差组成的一个序列相对应。而开集的个数与实数的个数一样多，所以在Borel集与一列和

实数一样多的集合之间做一个对应关系，后者与实数一样多，所以Borel集与实数一样多。即：Borel集全体具有连续势。

后面我们会介绍：任何零测集都是Lebegue可测集。Cantor三分集是个零测集（直观上相当于区间的长度为0），然而它的元素与实数一样多（这是超出人类直觉的现象），假如把Cantor集所含元素的个数记着c，那么Cantor集的所有子集构成的集合所含元素个数就是2^c。而零测集的任何子集还是零测集，从而可测，所以可测集的个数不小于2^c。而Lebesgue可测集是欧氏空间的一个子集，而欧氏空间中的点与实数一样多，所以可测集全体不会大于2^c了。由此可见，Lebesgue可测集远比Borel集多。

顺便说一句，目前分形几何在构造股票交易模型中，做得很成功，因为股票交易信息构成的集合是分形集，不符合大数定理，也即按照大数定理和马尔可夫过程为基础构造的资本资产定价模型，时间序列分析模型，统计预测模型，均衡交易模型等等都不符合股票市场实际情况，所以错的机会比较多，基本属于不靠谱的碰运气。分形几何能够比较好的处理股票交易信息分形集特点。这方面有很多英文专著，是一个热点。

3 勒贝格测度

测度直观上就是求面积，按照Riemann积分的思想是将函数的定义域作分割，然后分别用若干小矩形从外面包住曲边梯形，同时用另一些小的矩形从里面尽量填满曲边梯形，随着分割的加细，如果内外小矩形面积之和趋于同一个值，就把这个极限称为对应函数的定积分（曲边梯形的面积）。

显然用矩形从外面包住一个集合并不难，难的是集合的内部未必包含任何矩形，例如，不可能从有理数集合里找到任何区间。所以只能考虑从外部逼近，即用一些小矩形包住一个给定的集合，这就是外测度的思想。

最早勒贝格定义测度是构造一个外测度和内测度，当内测度=外测度时，定义为勒贝格可测，外测度=测度。虽然这个定义很直观，但是内测度很难构造，在实践中不太可行，所以就有了下面的定义。

3.1 外测度的定义

设$E \subset R^n$，记R^n中的开区间$I = \{x = (x_1, x_2, \dots x_n) | a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots n\}$，其中为$a_i \le b_i$为有限数，则称I为区间（显然$R^n = R^1$时，I即为$R^1$上的区间）。$\{I_i\}$是$R^n$中覆盖$E$的任一列开区间，即$E \subset \cup I_i$，把覆盖$E$ 的可数个开区间的体积之和的下确界称为E的勒贝格外测度，简称为E的外测度，记为$m^*(E)$或$|E|_e$，即$m^*E = \inf \sum_{i \in N} |I_i|$，$\{I_i\}$为覆盖$E$的可数个开区间。

$\Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$为区间I的体积。

在R^n中，区间I的外测度等于它的体积，即$m^* I = |I|$。

在R中，开集的外测度等于它的构成区间长度之和，并且对于R^n中任意点集H它的外测度等于包含E的开集G的外测度的下确界，即$m^*(E) = \inf\{m^*(G) | G$是包含$E$的开集$\}$。

下确界定义：有界集合S，如果ξ满足以下条件：

★对一切$x \in S$，有$x \ge \xi$，即ξ 是S的下界;

★对任意$\beta > 0$，存在$x \in S$，使得$x < \beta + \xi$。

则称ξ 为集合S的下确界，记作$\xi = \inf S$

下确界公理：任何有下界的非空数集必有下确界。

3.2 R^n中点集的外测度具有下列基本性质

★非负性：$m^*(E) \geq 0$，$m^*(\emptyset) = 0$。

★单调性：若$E_1 \subset E_2$，则$m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$。

★次可加性：$m^* \cup_k = 1^n E_k \leq \sum_{k=1^n} m^*(E_k)$。

★若集$E_1, E_2 \subset R^n$，它们的距离$\rho(E_1, E_2) > 0$，则$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$（这是开集为可测集的基础）。

3.3 测度的定义

定义：若m^*为R^n上的勒贝格外测度，$E \subset R^n$且满足对任意点集$T \subset R^n$，有

$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap Ec)$（Ec是相对Rn的E补集），则称集$H$为勒贝格可测集，这时测度=外测度。

显然，一个区间[a,b]的勒贝格测度是区间长度$b - a$。开区间(a,b)的长度与闭区间一样，因为两集合的差是零测集。

区间[a, b] 和[c, d]的笛卡尔积，测度为它的面积$(b - a)(d - c)$。

康托三分集是一个勒贝格测度为零的不可数集的例子。

如果用公理定义测度和积分，一般把测度看成定义在集合E的某些子集组成的集合X上的函数（映射）m，它能将实数集的子集H映射为非负实数mE。称这样的映射（集函数）为集合E的测度。

由于Lebesgue测度是面积或体积概念的推广，所以必须保持通常意义下体面积的特性：

★非负性；

★当集合为区间时，其测度即为区间的体积；

★完全可加性即当$\{E_i\}$为一列互不相交的有测度的集合时，$\cup_{i=1}^{\infty} E_i$的测度恰好为每个集的测度之和。

所以函数m具有以下性质：

★mE对于实数集的所有子集H都有定义，若E是勒贝格可测集，则$mE \geq 0$。

★对于一个区间I，mI应当等于其长度（端点数值之差）。

★如果$\{E_n\}$是一列不相交的集合，并且m在其上有定义，那么：

$m(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$

★m具有平移不变性，即如果一个m有定义的集合E的每个元素都加一个相同的实数（定义为$\{x + y \mid x \in E\}$，记作$E + y$），那么$m(E + y) = mE$。

3.4 R^n上的勒贝格测度有如下的性质

★如果E是区间$I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ 的笛卡尔积，那么E是勒贝格可测的，并且$mE = \Pi_{i=1}^{n} |I_i|$,其中$|I_i|$ 表示区间I_i的长度。

★如果E是有限个或可数个两两互不相交的勒贝格可测集的并，那么E也是勒贝格可测的，并且mE就是这些可测集的测度的和（或无穷级数的和）。

★零测集是可测集，外测度为0的集为可测集，零测集的任何子集为零测集，从而也为可测集，至多可数个零测集的并集仍为零测集，从而也为可测集。

★R^n中任何区间I都是可测集，且$mI = |I|$。

★R^n中的开集，闭集及Borel集都是可测集。

★如果E勒贝格可测的，那么它的补集Hc（相对于R^n）也是可测的。

★如果A与E是勒贝格可测的，且A是E的子集，那么$mA \leq mE$。

★可数多个是勒贝格可测集的交或者并仍然是勒贝格可测的。

★如果E是一个开集或闭集，且是R^n的子集，那么E是勒贝格可测的。

★如果E是一个勒贝格可测集，并有$mA = 0$（空集），则E的任何一个子集也是空集。

★如果E是勒贝格可测的，x是R^n 中的一个元素，E关于x的平移（定义为$E + x = \{a + x : a \in E\}$）也是勒贝格可测的，并且测度等于$mE$。

★如果E是勒贝格可测的，$\delta > 0$，则E关于δ 的扩张（定义为$\delta E = \{\delta x : x \in E\}$）也是勒贝格可测的，其测度为$\delta^n * mE$。（推广：设$T$是一个线性变换,$E$是一个$R^n$ 的勒贝格可测子集，则$T(E)$也是勒贝格可测的，其测度为$|det(T)|mE$。（det是determinant的缩写，行列式）

★如果E是R^n勒贝格可测子集，f是一个E到R^n上的连续单射函数（连续函数，且满足对于$x_1, x_2 \in E$，$x_1 \neq x_2$ 推出$f(x_1) \neq f(x_2)$，则$f(E)$也是勒贝格可测的。

用外测度定义的测度，可以为N维欧几里得空间的子集定义测度（广义的面积和体积），可以为R^n的哪些子集拥有测度这个问题提供一个系统性的回答（实际上不可能为R^n的所有子集都定义测度，也即不时所有集合都有面积体积长度的），也即存在不可测量的子集类。

勒贝格测度中，最重要的概念是可测集本质就是有限个区间的并。

另外外测度只有次可加性，那些不满足可加性的集合就是不可测集，可测集都是可加的，这也是判断勒贝格可测集的依据之一。

3.5 抽象测度定义

定义：假设R是非空集合S的一簇非空子集簇，如果R中的元素对于集合的有限或可数交、并、差运算封闭，则称R是S的子集构成的σ环。（例如S是实数集R^1，R是R^1的子集构成的簇）。（群、环、域的概念在介绍伽罗华时我们介绍过，也即在一个集合上定义某种运算，运算服从某种规则，常见的有有限群，交换群，有理数域、实数域等。在实变函数中，也要用到域的概念——σ域）

定义：抽象测度μ 是σ环R上满足如下条件的函数：

★（非负性）对任意$E \in R$，$\mu(E) \geq 0$;

★（单调性）对任意$E, F \in R$，若F是E的子集，则$\mu(F) \leq \mu(E)$;

★（可数可加性）设E_n是R中一列互不相交的序列，$\mu(\cup_n E_n = \sum_n \mu(E_n)$。

则称μ 是R上的测度（也即如果两个集合互不相交，则其并集的测度等于两个集合的测度之和）。

从上述定义，说明抽象测度不过是将Lebesgue测度的基本特征提取出来作为公理。

Kolmogorov就是基于公理化测度定义了概率，建立了现代概率论。所以现代概率就是抽象测度，所以现代概率并不是模糊概念，而是有严格逻辑基础的，概率论也因此成为数学的一个重要分支（在柯尔莫哥洛夫以前，概率不算数学）。

显然，σ域必为环，类似的，可以定义抽象测度。

σ环上的测度定义：设R是非空集合X的一个σ环，μ 是R上的一个集函数（μ 是以集为自变元，取值是实数或$\pm\infty$ 的函数，则称μ 是R上的集函数），如果μ 满足：$\mu(\varphi) = 0$，φ是空集合；非负性；完全可加性；则称μ 是R上的测度。

σ环上测度的一些基本性质：

μ 是σ环R上的测度，则μ 具有

★有限可加性：即如果$E_1, E_2,, E_k$ 是R上有限个两两不交的集，则$\mu\{\cup_{i=1}^{k} E_i\} = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i)$

★单调性：即如果$E_1, E_2 \in R$,且$E_1 E_2$，则$\mu(E_2) \geq \mu(E_1)$

★可减性：即如果$E_1, E_2 \in R$,且$E_1 E_2$，$\mu(E_1) < +\infty$,则$\mu(E_2/E_1)\mu(E_2) - \mu(E_1)$

★次可列可加性：即如果$E_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots, E \in R$,且$E \cup_{n=1}^{\infty} E_n$，则$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

★如果$E_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, 且$E_n, E_{n+1} \in R$, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in R$，则$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$

★如果$E_n \in R, n = 1, 2, \ldots$, 且$E_n, E_{n+1}, \cap_{n=1}^{\infty} E_n \in R$，且存在$E_k$ 使$\mu(E_k) < +\infty$，则$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$

3.6 勒贝格可测集的基本性质

★若E_1, E_2 都可测，则$E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$ 也可测；若$E_i, i = 1, 2, \ldots, m$,都可测,则$\cup_{i=1}^{m} E_i$，$\cap_{i=1}^{m} E_i$ 都可测, 并且当E_i 两两不交时,对任意$T \subset R$, $m^*\{T \cap (\cup_{i=1}^{m} E_i)\} = \sum_{i=1}^{m} m^*(T \cap E_i)$, $T = \cup_{i=1}^{m} E_i$ 时，$m(\cup_{i=1}^{m} E_i) = \sum_{i=1}^{m} mE_i$

★若E_i,$i = 1, 2, \ldots, \infty$,都可测,则$\cup_{i=1}^{\infty} E_i$ 也是可测的，并且当E_i 两两不交时,总有对任意$T \subset R$, $m^* T \cap (\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i)$, $T = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$时，$m(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$；$\cap_{i=1}^{\infty} E_i$ 也可测。也即可测集对集合的至多可数并、交、差（余）及极限运算是封闭的。若M表示R^n中的可测集全体, 则显然M 是一个σ 域。

★设E_n,$n = 1, 2,$为单调上升的可测集列，记$S = \cup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n$，则$\lim_{n\to\infty} mE_n = mS$; 设$E_n(n = 1, 2,)$为单调下降的可测集列，$E = \cap_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n$，若存在某个$E_{n_0}$,使$mE_{n_0} < \infty$, 则$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n$。

4 可测函数

实变函数的基本研究对象是可测函数，而可测函数是建立在集合的可测性基础之上的，也即是通过与函数有关的集合的可测性来定义可测函数的。

4.1 可测函数定义

定义：设f是定义在可测集E上的实函数。如果对每一个实数，集H[f¿a]恒可测（勒贝格可测），则称f是定义在E上的（勒贝格）可测函数。或者设(X, F)为一可测空间，E是一个可测集。$f : E \to R$（实数集）为定义在E上的函数。若对任意实数a，总有$\{x \in E : f(x) < a\} \in F$，则称$f$为$E$上的F-可测函数（简称$E$上的可测函数）。

可测函数判定定理：设f是定义在可测集E上的实函数，下列任一个条件都是在E上（勒贝格）可测的充要条件：

★对任何有限实数a，$E[f \geq a]$都可测；

★对任何有限实数a，$E[f < a]$都可测；

★对任何有限实数a，$E[f \leq a]$都可测；

★对任何有限实数a, b，$E[a \leq f < b]$都可测。

★若可测空间是R^n上的Lebesgue可测空间。E是R^n中的Lebesgue可测集。则E上的可测函数称为Lebesgue可测函数。若可测空间取为R^n上的Borel可测空间，E是R^n中的Borel集，则E上的可测函数称为Borel 可测函数。

如果$(X, \sum)$和$(Y,)$是Borel空间，则可测函数f又称为Borel函数。所有连续函数都是Borel函数，但不是所有Borel函数都是连续函数。（可测函数几乎是连续函数）。

4.2 可测函数性质

★若$f(x)$ 与$g(x)$ 在E上(L)可测，且在E上几乎处处取有限值，则它们的和、差、积、商（分母不为零）均(L)可测；

★若$\{f_n(x)\}$是E上的(L)可测函数列，则下列函数都是E上的(L)可测函数：

$\sup_{n\geq 1} f_n(x)$，$\inf_{n\geq 1} f_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$（上极限）,$\underline{\lim}_{\ n\to\infty} f_n(x)$；可数个可测函数的最小上界也是可测的。如果$\{f_n\}$ 是一个可测函数序列，在$[-\infty, +\infty]$中取值，那么$\lim_n \sup f_n$ 也是可测的；

★若$\{f_n(x)\}$是E上的(L)可测函数列，且以$f(x)$ 为极限，则$f(x)$ 在E上也(L)可测；

★若$f(x)$ 与$g(x)$ 在E上几乎处处相等，则它们或都(L)可测，或都(L)不可测；

★若$f(x)$ 在E上(L)可测，又E_0为E的(L)可测子集，则$f(x)$ 在E_0上也(L)可测；

★若$f(x)$ 在每个E_i 上都(L)可测，则$f(x)$ 在$\cup_{i=1}^{\infty} E_i$和$\cap_{i=1}^{\infty} E_i$上也(L)可测；

★在可测集E上定义的函数可测的充分必要条件是，它可以表示成简单函数列的极限。

★如果函数f是可测的，函数g是可测的，那么复合函数$g * f$是可测的。

★可测函数的逐点极限是可测的。（连续函数的对应命题需要比逐点收敛更强的条件，例如一致收敛。）

★只有可测函数可以进行勒贝格积分。

★一个勒贝格可测函数是一个实函数$f : R \to R$，使得对于每一个实数a，集合$\{x \in R : f(x) > a\}$都是勒贝格可测的集合。

其中最重要的概念就是可测函数就是几乎处处连续函数。

4.3 抽象可测函数

定义：设(Ω, F)和(E, ε)是两个可测空间（可测空间和定义在可测空间上的测度构成测度空间。可测空间是测度的定义域，在一个可测空间上可以定义不止一种测度），f是$\Omega \to E$ 的映射，如果对于一切$A \in \varepsilon$，有$f^{-1}(A) \in F$，则称f是$F^{-1}(A)$可测映射。【整理者注：修改了最后这句话，但不能保证正确。】

简单说，抽象可测函数是可测空间到可测空间上定义了一个函数，这个函数下，开集的原象是可测集。

不过实变函数讨论的勒贝格可测函数，是在R^n中考虑，开集是由若干开区间/小球的并集组成，所有普通的开集生成的σ代数成为一个可测空间得到Borel可测集。最后再完备化成勒贝格可测集，以开集的原象是勒贝格可测集来定义勒贝格可测函数，为此只需的原象是勒贝格可测集即可。

4.4 可测函数列的几种收敛定义

在微积分中通常都是假定函数列或级数是一致收敛的，但实际上大多数情况下做不到一致收敛。收敛概念的主要用途是用简单函数去逼近复杂函数。积分与极限交换顺序问题的本质也是如此，通过容易计算的函数积分去逼近一般函数的积分。多项式逼近连续函数的Weirstrass定理以及三角级数逼近可测函数的Fourier分析都是逼近问题，都必须讨论收敛问题。

由于收敛概念有多种，所以函数逼近相应的也有多种含义；即一致逼近、逐点（处处）逼近、几乎处处逼近、依测度逼近等等。前两种逼近出现在微积分中，后两种逼近出现在实变函数中。

实变函数的收敛不是数列收敛，而是函数列收敛，而且是用函数的值域组成的集合，在上面定义测度来讨论函数性质（包括各种收敛，连续，勒贝格可积等等），这样就从讨论函数性质转为讨论点集的拓扑性质（所以学习实变函数的基础课程是点集拓扑），形象说就是把函数列当成无限维空间中一点集，收敛的概念就是在无限维空间定义一个广义的距离（范数，当然在实变函数里，这个范数是测度），然后模仿$\varepsilon-\delta$语言体系，用公理化语言定义收敛。这点是从古典微积分跃升到现代数学的关键一步，理解不了在抽象空间定义的抽象距离概念基础上用公理化语言构造的逻辑体系，就无法理解现代数学分析。

显然因为勒贝格积分是尽可能弥补黎曼积分定义过于严苛条件带来缺陷，必然是把黎曼积分只能处理连续函数，以及只能处理一致收敛函数列积分极限交换的问题放宽到跟一般的条件，所以必然把可测函数列的收敛性当成一个核心内容。

其实实变函数整个课程都在讨论放宽可测函数列的收敛条件。

（1）、一致收敛

逐点收敛定义：对于任意的$\varepsilon > 0$,对于任意的x在定义域，存在一个$N_x > 0$，使任意的$n > N_x$，$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$，则称$f_n$逐点收敛到$f$。

一致收敛定义：对于任意的$\varepsilon > 0$,存在一个$N > 0$，使对于任意的x在定义域和$n > N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,则称$f_n$一致收敛到$f$。逐点收敛,是每一个点都收敛到极限函数，但收敛快慢没有限制，比如在（0，1）区间$F_n(x) = x^n$会收敛到$F(x) = 0$，但收敛速度有快有慢，x越接近于1，收敛速度越慢。（甚至可以任意慢，对任意$\varepsilon > 0$，任意$N > 0$，存在$n > N,x_0$,使得$|F_n(x_0) - F(x_0)| > \varepsilon$）

一致收敛，不仅仅每一个点都收敛到极限函数，而且收敛速度要好于一个共同的标准（一致性）。比如在(0,0.5)区间$F_n(x) = x^n$会收敛到$F(x) = 0$，虽然收敛速度有快有慢，但是都比0.5^n要快。（对任意$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，任意$n > N,x_0$,使得$|F_n(x_0) - F(x_0)| < \varepsilon$）

逐点收敛收敛速度是和x是有关系的，而一致收敛的速度与x无关，对所有x都适用的。这是最大的区别。也即逐点收敛是在每个点，函数值$f_n(x)$都收敛到$f(x)$，但是不同点收敛快慢可能不一样；一致收敛是所有$f_n(x)$ 同步地收敛到$f(x)$。

（2）、几乎处处收敛

几乎处处逼近（收敛）即去掉一个零测度集后处处收敛，是处处收敛概念的推广。若在X的一个测度为0的子集外，对$x \in X$，均有$f_n(x) - f(x) \to 0$，$n \to \infty$，则称$\{f_n\}$关于**测度几乎处处收敛**于f。

刻画一致收敛与几乎处处收敛的定理是Egoroff（叶戈洛夫）定理。

几乎处处收敛不一定依测度收敛，例如定义函数列$F_n(x) = 1$ 若x属于(0,n)；$F_n(x) = 0$若x属于(n,无穷) 。这个函数列几乎处处收敛于$F(x) = 1$但是却不是依测度收

敛，因为m(n,无穷)＝无穷。

所以当测度有限时几乎处处收敛可以推出依测度收敛，而且可以证明依测度收敛的函数列可以取出一个子列几乎处处收敛。

（3）、依测度收敛

依测度收敛就是对任意正数ε，满足$|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon$的点集的测度随着$n$越来越大而越来越小。

依测度收敛实际上就是不收敛的点列测度为零（所以几乎处处收敛的函数列一定依测度收敛）。

几乎处处收敛是一种点态收敛，依测度收敛是在某一测度下不收敛点全体测度为零。

上述几种收敛概念依次由强到弱。

简单总结一下：在古典数学分析（微积分）中，函数的定义域和值域都是实数区间或有限欧式空间区域，所讨论函数基本上是连续函数，函数列的收敛主要是一致收敛。而实变函数中，函数是两个集合的映射，而主要讨论的集合是可测集，函数是可测函数，函数列的收敛是几乎处处收敛，这是重大区别。

极限是微积分的灵魂，没有极限也就没有微积分，极限某种程度上就是收敛。然而，微积分中与函数序列有关的很多问题的解决强烈依赖于收敛的方式，一个连续的函数序列可以处处收敛到一个Riemann不可积函数，因此积分与极限的交换顺序问题在微积分里是一个非常复杂的问题，很多时候需要经过很繁复的推导来证明积分与极限能否交换顺序。而在勒贝格可积函数下，这个问题就很简单了。

4.5 实变函数的基石定理

可测函数有一个超出人类直觉又很本质的定理：叶果洛夫定理：给出了如何由几乎处处收敛的函数列得到一致收敛的函数列的方法（挖掉测度为零的意外点集），这个定理是实变函数的基石，因为一个函数列一旦一致收敛，积分与极限的交换顺序问题、求导与极限的交换顺序问题以及级数的求和问题都变得简单了。

叶果洛夫很伟大，因为他的定理超出了人类的直觉：人凭直觉是无法想想或不敢相信从处处收敛能得到一致收敛。而连续函数序列的一致收敛极限仍是连续的，一致收敛的可积函数列其极限与积分可以交换顺序。

叶果洛夫定理是运用连续函数逼近可测函数方法（鲁津定理）和Lebesgue控制收敛定理的思想来源。

（1）、可测集构造定理：每个可测集几乎是有限个区间的并，这也是可测集的等价定义；

（2）、鲁津（Lusin）定理：每个可测函数几乎是连续的；或者说可测函数和连续函数差不多；或者说任何有限测度集上几乎处处有限的可测函数都可以在挖掉一个测度充分小的子集之后成为剩下子集上的连续函数。

稍微严谨一点表述是：若$f(x)$是可测集E上几乎处处有限的可测函数，则$f(x)$是近于连续函数：即对任意$\delta>0$，存在闭子集$F_\delta\subset E$, 使得$f(x)$是$F\delta$上的连续函数, 且$m(E\setminus F_\delta)<\delta$。

鲁津定理的逆定理也成立，因此可以作为可测函数的定义。

不过这个定理中的连续函数是一般可测集上的连续函数，与微积分中定义在实数集合上的连续函数完全不同。

鲁津定理如果用我们熟悉的逼近语言表达（用某个函数序列去逼近一个特定的函数），就能把可测函数在一个子集上与连续函数一样说得更直观：设E是R^1中的有界可测集，$f(x)$ 是E上几乎处处有限的可测函数，则对任意$\varepsilon > 0$，存在E的闭子集F及R^1上连续函数$g(x)$，使任意$x \in F$，有$f(x) = g(x)$；$m(E - F) < \varepsilon$。此外，若$|f(x)| < M$（任意$x \in E$），$|g(x)| < M$，（任意$x \in R^1$）。其中$g(x)$ 是微积分中的连续函数。

也可以将上述定理改述成：若$f(x)$ 是E上的可测函数，则对任意$\varepsilon > 0$，存在R^1上的连续函数，使得$mE\{x|f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$，$E\{x|f(x) \neq g(x)\} = \cup_n E\{x \mid |f(x) - g(x)| > 1/n\}$，所以对任意$n$，有$m[E\{x \mid |f(x) - g(x)| > 1/n\}] < \varepsilon$，进一步，对任意$\delta > 0$，有$m[E\{x \mid |f(x) - g(x)| > \delta\}] < \varepsilon$，取一列单调收敛到0的正数序列$\varepsilon_n$，则存在$R^1$上的连续函数$g_n$，使得

$$[E\{x \mid |f(x) - gn(x)| > \delta\}] < \varepsilon_n \to 0$$

这就是逼近。不过在实变函数里，叫测度收敛，在概率论中叫概率收敛。一般定义如下：

定义：设E是可测集，$f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$都是$E$上几乎处处有限的可测函数，如果对于任意$\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{n \to \infty} E\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$$

则称$f_n(x)$在E上依测度收敛到$f(x)$，记作$f_n \to f$。

显然如果学过概率论，这个收敛性定义与概率论中定义的收敛性定义是一回事。

这个定理揭示了可测函数与连续函数本质联系。

（3）、叶果洛夫(Egorov)定理：每个可测函数的收敛序列几乎是一致收敛的；或者说可测函数列的收敛和一致收敛差不多。

这个定理稍微严谨一点表述是：设E是可测集，$m(E) < \infty$，$\{f_n(x)\}(n \in N)$与$f(x)$ 是E上几乎处处有限的可测的有限函数，且$\{f_n(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$。那么，对任意$\delta > 0$，存在集$E_\delta \subset E$，使序列$\{f_n(x)\}$在E_δ上一致收敛性于$f(x)$ 而$m(E - E_\delta) < \delta$。

这个定理说明几乎处处收敛与一致收敛的关系。

也即下列各命题等价：

★$f_n(x)$几乎处处收敛到$f(x)$；

★对任意正数δ,存在E的可测子集E_δ，使得$m(E - E_\delta) < \delta$，而在E_δ上，$f_n(x)$一致收敛到$f(x)$。

前面我们介绍过$f_n(x) = x^n$ $(x \in (0, 1))$不能一致收敛到0的原因在于当x充分接近1时，x^n也接近到1（不管n有多大，只要它固定）。因此，如果x随着n变，x^n的极限有可能不等于零，例如如果令$x_n = 1 - 1/n$，则$f_n(x_n) = (1 - 1/n)^n$的极限为$1/e$。既然问题的关键就出在x不能离1太近，所以给x靠近1的点定义一个邻域：x小于任何给定的小于1的正数就可以，即对任意正数$\delta < 1$，$f_n(x)$在$(0, \delta)$上一定是一致收敛到0。推广这种思想，也即在任何一个处处收敛（几乎处处收敛）的函数列定义域挖掉一个测度充分小的集合后得到一致收敛，这就是Egoroff（叶果洛夫）定理的证明思想。无论是运用连续函数逼近可测函数的鲁津定理还是Lebesgue控制收敛定理，其基本的证明思想都离不开叶果洛夫定理。

这个定理也常常成为处理极限问题的工具，因为通过叶果洛夫定理，可以对不一致收敛的函数列部分地恢复一致收敛。而一致收敛性函数有许多成熟定理。

这三个定理有时就被称为Littlewood三原理。

叶果洛夫和鲁津定理是可测函数中最重要的定理，叶果洛夫定理展示了Lebesgue积分的本质，而鲁津定理则是把可测函数与连续函数联系起来。通过叶果洛夫定理，我们能够得到一致收敛、处处收敛、几乎处处收敛在依测度收敛概念基础上，其实是等价的。

勒贝格可测函数简称(L)可测函数，是比连续函数更广的一类函数，因为定义在(L)零测度集上的任何实值函数以及区间上的半连续函数都是(L)可测函数；定义在(L)可测集上的任何连续函数都是(L)可测函数。但可测函数不一定连续。

5 勒贝格积分

5.1 Lebesgue积分定义

只有勒贝格可测函数才能够进行勒贝格积分。

E上的可测实数值函数积分有两类定义方式，一类是前面介绍勒贝格积分思想时介绍过的几何方法，也即从函数值域分割出发定义，另一类是构造一个简单函数逼近。

下面介绍几何这种定义方式（在前面介绍实变函数思想那一节时，我们已经大概介绍了勒贝格积分是切分函数值域的想法）：

定义1：集H为勒贝格测度有限集（$mE < +\infty$），$f(x)$ 是有界实函数（存在有限开区间(A,B)，使$f(E) \subset (A, B)$, 设$f(x)$ 是在E上的勒贝格可测函数，在[A,B]中任取一分划$D : A = A_0 < A_1 < A_2, < A_n = B$,

记$\delta(D) = \max_k^n(A_k - A_{k-1})$，$E_k = E(x|A_{k-1} \le f(x) < A_k)$,任取$\zeta_k \in [A_{k-1}, A_k]$, 和式：$S(D) = \sum_{i=1}^n \zeta_i mE_i$，$S(D)$为分划D下的和数。

若存在有限实数S，对任意实数$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使对任一分划D，当$\delta(D) = \max_k^n(A_k - A_{k-1}) < \delta$时，有$|S(D) - S| < \varepsilon$，也即$S = \lim_{\delta(D)\to 0} S(D)$，这时就称$f(x)$ 在E上勒贝格可积，其积分值就是S，记作$S = \int Ef(x)\ \mathrm{dm}$

可将有限函数的勒贝格积分定义推广到无界函数在测度无限集上。

下面介绍用函数列逼近构造定义勒贝格积分的方法。

勒贝格可积定义2：

第一步：构造一个非负可测简单函数$h(x) = \sum_{k=1}^n C_k E_i(x)$，其中$E_i(x)$是指标函数，也即当$x \in E_i \subset E$，$E_i(x) = 1$，当$x$不包含于$E_i \subset E$，$E_i(x) = 0$,$E \subset R^n$ 是可测集，$E = \cup_{i=1}^n E_i$，E_i 是互不相交的可测集，C_k是非负实数，$(1 \le k \le n)$

定义：$\int Eh(x)\,\mathrm{dm} = \sum_{k=1}^n C_k m(E \cap A_k)$是非负简单函数$h(x)$在$E$上的勒贝格积分。

第二步：$f(x)$ 是可测集E上非负可测函数，$\{h_n(x)\}$是E上单调增收敛于$f(x)$ 的非负简单函数列，

定义$\int Ef(x)\,\mathrm{dm} = \lim_{n\to\infty} \int Eh_n(x)\,\mathrm{dm}$，其中$x \in E$。称$\int Ef(x)\,\mathrm{dm}$为$f(x)$ 在E上的勒贝格积分，如果$\int Ef(x)\,\mathrm{dm} < +\infty$，则称$f(x)$ 勒贝格可积。（显然这就是用一个简单函数列来逼近$f(x)$，根据前面可测函数性质，这种逼近是存在的，也是可以操作的）

第三步：对一般可测函数$f(x)$，定义$\int Ef(x)\,\mathrm{dm} = \int Ef^{+}(x)\,\mathrm{dm} - \int Ef^{-}(x)\,\mathrm{dm}$，若$\int Ef^{+}(x)\,\mathrm{dm}$，$\int Ef^{-}(x)\,\mathrm{dm}$两者至少有一个有限，则称函数的积分存在，称$\int Ef(x)\,\mathrm{dm}$为$f(x)$ 的勒贝格积分，当$\int E|f(x)|\,\mathrm{dm} < +\infty$，则称$f(x)$ 在E上勒贝格可积。（$f^{+}(x) = [|f(x)| + f(x)]/2$，$f^{-}(x) = [|f(x)| - f(x)]/2$，显然$f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)$,也即把非负的值与负值分成两部分，分别标记为$f^{+}(x), f^{-}(x)$，这两部分都是非负的，显然$|f(x)| = f^{+}(x) + f^{-}(x)$）

这个定义中，$f(x)$ 可以是无界函数。

可以证明上述两个定义等价。

黎曼可积必定勒贝格可积，而且积分值相等，反之未必。

至于重积分，有Fubini定理描述。

★有限测度集上所有的有界可测函数都是Lebesgue可积的。

强调一点，实变函数中允许函数取值为无穷大，当然也允许Lebesgue积分取值为无穷大，所以在Lebesgue积分中，可积与积分存在是不同的概念。

Lebesgue积分的计算：由于可测函数的复杂性，一般情况下，如果一个函数没有具体的表达式，你即使知道积分是存在的，也很难算出它的积分。但是如果函数是一个初等函数或者分段函数，就能计算出它的

Lebesgue积分，因为Riemann可积就意味着Lebesgue可积，两种积分相等。

定理：如果有界函数在闭区间$[a, b]$上是Riemann可积的，则在$[a, b]$上也是Lebesgue可积的，且黎曼积分等于勒贝格积分。

所以当我们需要计算一个具体的积分时，常常是回归到Riemann积分。

5.2 勒贝格积分核心定理

实变函数有四个控制收敛定理，也即判断极限积分可交换的定理，这是整个实变函数这门课的核心。

（1）、Levi定理

设$\{f_n(x)\}$是可测集E上非负可测函数列，若$f_n(x) \le f_n{+}1(x)(n = 1, 2, ...)$；$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$几乎处处收敛于E，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int Ef_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int E\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

也即所谓的单调控制收敛定理。

（2）、Fatou定理

设$\{f_n(x)\}$是可测集E上一个实值的可测正值函数列。那么

$$\int E\left(\lim_{n\to\infty} inf f_n(x)\right)\mathrm{d}x \le \lim_{n\to\infty} inf\left(\int Ef_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

也即下极限的积分不会超过积分的下极限。

用来证明勒贝格控制收敛定理。

（3）、勒贝格控制收敛定理

如果定义在集合E上的几乎处处或依测度收敛的函数列$\{f_n(x)\}$满足$|f_n(x)| \le F(x)$，而$F(x)$ 在E上勒贝格可积，那么积分和取极限就可以交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int Ef_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int E\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

控制收敛定理证明的基本思路是将积分域（集合）分解成两个部分，在测度较大的集合上，函数序列一致收敛（叶果洛夫定理保证），在这个子集上，积分与极限自然可以交换顺序。在测度充分小的集合上，函数序列的积分被控制函数的积分所控制，函数序列的积分值不会产生大的变化，这样由控制函数积分的绝对连续性就能得到函数序列积分的绝对连续性具有一致性。

勒贝格控制收敛定理提供了积分运算和极限运算可以交换运算顺序的一个充分条件。在分析逐点收敛的函数数列的勒贝格积分时，积分号和逐点收敛的极限号并不总是可以交换的。控制收敛定理说明了，如果逐点收敛的函数列的每一项都能被同一个勒贝格可积的函数控制（即对变量的任何取值，函数的绝对值都小于另一个函数），那么函数列的极限函数的勒贝格积分等于函数列中每个函数的勒贝格积分的极限。

控制收敛定理能够成立的一个重要因素是存在一个可积的函数，使得函数列收敛的过程能够控制。可积的控制函数这个条件不能缺少，有例子可以证明，一旦缺少，调换运算次序就不能成功。

勒贝格控制收敛定理是更广泛的法图-勒贝格定理（Fatou–Lebesgue theorem）的特例（控制条件推广为：用一个新的几乎处处或依测度收敛的可积函数列gn来控制原函数列f_n，只要gn满足极限和积分可交换的条件，定理即成立）。

（4）、Vitali定理

若$m(E) < +\infty$，$\{f_n(x)\}$是E上可积函数列，且依测度收敛于$f(x)$，又$\{f_n(x)\}$的积分具有等度绝对连续性（$\{f_n\}$为定义在实数集E上一实数值函数列，称$\{f_n\}$在E上是等度连续的(等度连续定义：如果任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$|x - y| < \delta xy \in E$及$n \geq 1$时，都有$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$。显然，如果$\{f_n\}$在$E$上等度连续，则对每一个$n$，函数$f_n(x)$在$E$上一致连续），则$f(x)$ 是可积函数，且$\lim_{n\to\infty}(\int E f_n(x)\,\mathrm{d}x) = \int E(\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x$

Levi定理，Fatou定理和Lebesgue控制收敛定理是等价的，可以循环证明。

四个积分收敛定理主要讨论积分与极限交换次序的条件。Levi定理, Fatou定理, Lebesgue控制收敛定理是积分与极限交换的充分条件, 是实变函数的核心, 同时三者也是等价的, Vitali收敛定理是可交换次序的充要条件。这些定理集中地体现了Lebesgue积分相对于Reimann积分的优越性，说明了尽管黎曼可积函数空间不完备，但是勒贝格可积函数空间在一定条件下完备。完备的空间能够更好的研究函数的性质，比如可以在勒贝格平方可积空间上研究傅立叶展开而不用担心会不会有函数不收敛。

5.3 在Lebesgue积分意义下的微分

（1）、利普希茨（lipschitz）条件

若存在常数L，使得对定义域E的任意两个不同的实数x_1, x_2 均有：$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\|$成立，则称$f(x)$ 在E上满足利普希茨条件，L 称为利普希茨常数。

显然若$f(x)$ 满足利普希茨条件，则$f(x)$ 一致连续。

利普希茨条件是一个比一致连续更强的光滑性条件。直观上，利普希茨条件限制了连续函数改变的速度。

（2）、有界变差函数

定义：$f(x)$ 定义在区间$[a,b]$上，并能表为两个单调增函数之差的实值函数。则称$f(x)$ 在$[a,b]$中是有界变差的。

有界变差函数性质：

★两有界变差函数的和、差与积也都是有界变差的；

★有界变差函数必为有界函数。

★有界变差函数在$[a,b]$上黎曼可积。

★有界变差函数在$[a,b]$上几乎处处可导，导函数在$[a,b]$上勒贝格可积。

★平面上由$y = f(x)$ 表示的曲线C可求长的充分必要条件是f为有界变差函数。

★连续函数不一定为有界变差函数。

（3）、绝对连续函数

定义：设f (x)是定义在$[a,b]$上的实值函数，若对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得对[a,b]上的任意有限个互不相交的开区间$(a_1,b_1),(a_2,b_2),...,(a_n,b_n)$，当$\sum_{i=1}^{n}(a_i,b_i) < \delta$时，满足$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$，则称$f$ (x)是[a,b]上的绝对连续函数。

★绝对连续函数是连续函数；

★若f,g 是绝对连续函数,α 是实数，则αf和$f + g$ 是绝对连续函数。

★若$g(x)$ 是$[\alpha,\beta]$ 上的绝对连续函数，$a \le g(x) \le b$，$f(x)$ 在$[a,b]$ 上满足利普希茨条件，则$f[g(x)]$ 是$[\alpha,\beta]$ 上的绝对连续函数（但任意两个绝对函数的复合函数未必绝对连续)。

★绝对连续函数一定是有界变差函数，但有界变差函数未必是绝对连续函数。

★若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上绝对连续，且$f'(x) = 0$ 几乎处处等于$[a,b]$，则$f(x)$ 为一常数。

★若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上绝对连续，且$f'(x) \ge 0$几乎处处于$[a,b]$，则$f(x)$ 为一单调增加函数。

★若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上绝对连续，则$f(x)$ 对任何零测度集$H \subset [a,b]$，$f(E)$仍为零测度集。

绝对连续表示函数的光滑性质，比连续和一致连续条件都要严格，比利普希茨条件宽松，是一类极为重要的函数。绝对连续函数几乎处处可微，是它的导函数的广义原函数。

（4）、勒贝格积分下的微积分基本定理

若$f(x)$ 为$[a,b]$上绝对连续函数，则牛顿一莱布尼兹公式成立（一个连续函数在区间$[a,b]$ 上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量）：$(L)\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$。

6 空间和函数空间$L^p(p \ge 1)$

6.1 空间

对数学系而言，实变函数主要用途是为学习泛函分析打基础（泛函分析本质是无穷维线性空间几何+分析+代数），而实变函数到泛函分析的桥梁就是函数空间概念，所以实变函数必须介绍函数空间。空间直观描述是：定义在某集合上的有某些结构的一些对象的集合。

而函数空间是从某一类集合X到集合Y的给定种类的函数的集合。常见的这一类集合是拓扑空间和线性空间（现代数学把函数看成拓扑空间或测度空间的某一类映射）。说空间，就必须先澄清几个概念：结构，空间，关系。

最早结构的概念来源于代数，空间概念来源于几何，关系概念来源于分析（函数就是两个集合之间的映射关系）。

代数是研究结构的，结构就是在集合上定义一个元素间的运算，运算满足一定性质（用公理描述），例如群，环，域，然后结构的研究结构的对称性，完备性等等。

几何是研究空间的，空间就是在集合上定义元素间的关系，这种关系满足一定性质（用公理描述），例如拓扑空间，度量空间，赋范空间等等，然后研究空间的不变量。

分析是研究两个集合之间映射性质的，例如连续，可微，可积等等，当然这两个集合既有可能有结构，也有可能有空间，泛函分析就是研究这种集合的。

现代数学这种概念分类已经被打破，互相融合了。例如当一个代数结构上有空间定义时，就是代数几何和代数拓扑的研究范畴。当然最直接的例子就是线性代数和解析几何，解析几何是用初等代数（在实数集合上定义四则运算和开方）研究三维空间几何，线性代数是用矩阵代数（在n维实数集合上定义矩阵运算）研究n维线性空间几何。

例如在集合上定义距离，就是赋距离空间；集合内元素间满足线性计算，就是线性空间；在集合上定义范数，则就是赋范数空间；在集合上定义上内积，就是内积空间等等。

空间概念很强大，用途极广，例如泛函分析把函数看作是函数空间的点或矢量，这样分析就与代数和几何结合起来了。

顺便唠叨一句，以前有人跟我说他空间抽象能力厉害，能够从三元一次代数方程想像出立体几何图形，我说你这不是抽象能力，只是空间想象能力，能够从内积定义抽象出n维空间的角度定义，才是空间抽象能力。

空间也是现代物理学的基本概念，例如无穷维空间可以用来描述具有无穷个自由度的力学系统的运动，梁的震动问题就是无穷多自由度力学系统的例子（从质点力学过渡到连续介质力学，就要由有穷自由度系统过渡到无穷自由度系统），量子场理论就属于无穷自由度系统。

6.2 L^p空间

函数空间就是由函数组成的空间，也即空间的每一点都是一个函数。其中实变函数课程中介绍的主要是$L^p(p \geq 1)$空间的基本性质和定理。

L^p空间是由p次勒贝格可积函数组成的空间，对应的l^p空间是由p次可和序列组成的空间。

L^2空间中，最重要的一个成果是：傅立叶级数收敛有很好的性质。

在前面介绍微积分时，在傅里叶级数中证明：周期函数只要可积，就有一个Fourier级数展开，但这个函数与他的Fourier展式是不能轻易划等号的，也即一个函数的Fourier级数可能并不收敛到这个函数，就算这个函数是连续的也不一定（现代概率论的创始人苏联的Kolmogorov构造了一个L^1函数，也就是Lebesgue可积的函数，它的Fourier级数处处发散），这样就提出了问题：如果一个函数的Fourier级数不收敛到该函数，盲目展开浪费时间，无意义，如果无条件使用还可能导致严重后果，那么如何判断这个收敛性，在数学上，这曾经是一个很困难的问题，最后由泛函分析的奠基人，两个波兰人，巴纳赫和斯

坦因豪斯证明了连续函数的Fourier级数的发散点集是个稠密集而解决。后来证明了在L2空间中，上述结论总是对的。

根据Stone-Weierstrass定理：闭区间上的连续函数是可以用多项式逼近的，当然也可以用三角多项式逼近，甚至可以是一致逼近。

但是Stone-Weierstrass定理是不实用的，因为逼近一个函数的多项式或者三角多项式的系数是没法确定的。但是傅立叶级数的展开系数是可以确定的，这样就奠定了傅立叶级数和傅立叶变换在实际工作中的地位。L^p空间是勒贝格积分理论的延伸，也是以公理方法处理数学问题的一个范例。$L^p(p \geq 1)$空间是泛函分析最重要的研究对象（是Banach空间一类重要的例子）。L^p空间在工程学领域的有限元分析中广泛应用，也在傅立叶级数和量子力学以及其他领域有着重要的运用，L^p空间与复解析函数相结合便产生了现代解析函数论Hardy空间、Bergman空间，现代微分方程的Sobolev空间是Fourier变换与L^p空间结合的产物。泛函分析主要研究的是实数域或复数域上的完备赋范线性空间，也即巴拿赫空间（巴拿赫空间中最重要的特例被称为希尔伯特空间，其上的范数由一个内积导出）的连续线性算子性质，也就是无限维空间到无限维空间的变换。（你可以近似认为泛函分析是无穷维空间的线性代数，也可以看成无穷维空间的几何学和微积分学）。

6.3 巴纳赫空间

巴纳赫应该是波兰最伟大的数学家。

巴拿赫空间定义：空间X，若有从X到R的函数$\|x\|$使得：$\|x\| \geq 0$，$\|x\| = 0$必须且只须$x = 0$；对$\alpha \in R$,有$\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$；$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$，则称$X$为线性赋范空间，而称$\|x\|$为范数。

显然，范数概念是Rn中向量长度概念的推广。

简单说，巴拿赫空间是一种定义有长度的线性空间，大多数都是无穷空间，可看成通常线性空间的无穷维推广。

具体说，巴纳赫空间是具有范数，并对此范数完备的线性空间。

巴拿赫空间有两种类型：线性空间定义于实数域上的实巴拿赫空间和线性空间定义于复数域之上复巴拿赫空间。

数学分析中常见的无限维函数空间都是巴拿赫空间，例如连续函数（紧致豪斯道夫空间上的连续函数）组成的空间；勒贝格可积函数组成的L空间及由全纯函数组成的哈代空间（复变函数主要讨论对象）。这些空间是

拓扑线性空间中最常见的类型，这些空间的拓扑都来自其范数。

如同有理数系可完备化为实数系，任何线性赋范空间也可按照距离$d(x, y) = \|x - y\|$作为度量空间而完备化。

巴拿赫的主要贡献是引进了线性赋范空间概念，建立了其上的线性算子理论，证明了作为泛函分析基础的三个定理，哈恩–巴拿赫延拓定理，巴拿赫–斯坦豪斯定理（即共鸣定理或一致有界定理）和闭图像定理。（泛函分析的主要定理就是共鸣定理，描述一族有界算子的性质；哈恩–巴拿赫延拓定理，描述了如何将一个算子保范数从一个子空间延拓到整个空间，以及是对偶空间的非平凡性；开映射定理和闭图像定理；上述三个基本定理都来源于巴纳赫。第四个基本定理是谱定理（谱就是矩阵特征值的推广），最常用的结果给出了希尔伯特空间上正规算子的一个积分表达，在量子力学的数学描述中起到了核心作用。更多内容在下一篇介绍泛函分析帖子）。

6.4 希尔伯特空间

希尔伯特空间定义：在一个实向量空间或复向量空间H上的给定的内积$\langle x, y\rangle$，可以按照如下的方式导出一个范数：$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$，如果其对于这个范数来说，任何一个柯西序列都收敛到此空间中的某个元素，即它们与某个元素的范数差的极限为0。此空间称为是一个希尔伯特空间。

希尔伯特空间与欧几里德空间相仿，是一个内积空间，其上有距离和角的概念（及由此引申而来的正交性与垂直性的概念）。

所以希尔伯特空间是一个完备的空间（其上所有的柯西序列等价于收敛序列），从而微积分中的大部分概念都可以无障碍地推广到希尔伯特空间中。

任何一个希尔伯特空间都是巴拿赫空间，但是反之未必。

希尔伯特空间最早是希尔伯特在研究积分方程时首先提出的。他在平方可积的无穷实数列$\{x_n\}$全体所组成的空间L中规定了内积，把空间L看作欧几里得空间向无限维的推广，从而有效地解决了一类积分方程求解及其本征展开的问题。

希尔伯特空间中最重要的概念是正交，因为这是彻底解决傅立叶变换收敛问题的关键。

正交定义：在希尔伯特空间H中，如果x, y满足$(x, y) = 0$，就称x和y正交（或直交），记为$x \perp y$。当$x \perp y$时，勾股定理成立：$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$。

如果x和H的子集M中任何元都正交，就称x和M正交，记为$x \perp M$。

投影定理（是希尔伯特空间理论中的一个基本定理）：当M是H的闭线性子空间时，则对H中每个向量x，必存在M中惟一的y，使得$\|x-y\|$取到y在M中变化时的最小值，也即$z = x-y$必与M正交，即对于闭线性子空间M，分解$x = y+z$不仅惟一，而且$z \perp y$。其中，y称为x在M中的投影（分量）。因为x在M上的投影y是达到极小值的惟一解。

这个性质也称为变分定理，在近似理论（包括有限元方法）、预测理论、最优化等多方面有广泛的应用。

基于上述定理，很容易得到下面结果：

设$\{e_k\}$是内积空间H中一族彼此不同的向量，如果其中任何两个向量都正交，即当$k \neq j$时，$(e_k, e_j) = 0$，则称$\{e_k\}$是一正交系；如果其中每个向量的范数又都是1，即对一切k，$(e_k, e_k) = 1$，则称$\{e_k\}$是规范正交系。

对于希尔伯特空间H的规范正交系$\{e_k\}$,如果包含$\{e_k\}$的最小闭子空间就是H，就称$\{e_k\}$为H的完备规范正交系。

设$\{e_k\}$是规范正交系，则H中任一向量x在e_k方向的投影，即x在$\{e_k\}$生成的一维子空间上的投影，就是$\sum(x, e_k)e_k$；而x在$\{e_k\}$生成的闭子空间M上的投影就是H。

显然有$\sum|(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2$，即向量$x$在某个子空间$M$上的分量长度不超过$x$的长度，它称为贝塞尔不等式。

贝塞尔不等式揭示了希尔伯特空间中的一个元素和它在一个正交序列上的投影之间的关系。

举例来说，平面上的一个向量的长度的平方等于它在两个相互垂直的坐标轴上的投影的平方和，而对于一个三维空间上的向量，它在两个相互垂直的坐标轴上的投影的平方和一般会小于它自身的长度的平方，除非它就在这两个坐标轴构成的平面上。

对于一个希尔伯特空间中的向量来说，它在任意一个正交序列上的投影的平方和也是小于等于它自身的长度的平方。

贝塞尔不等式的等号成立当且仅当正交序列是完全序列。如果$\{e_k\}$是完备规范正交系，那么：$x = \sum (x, e_k)e_k$（傅里叶级数展开式，是微积分中傅里叶级数或一般正交级数展开的推广），$\|x\|^2 = \sum |(x, e_k)|^2$ 这时贝塞尔不等式转化为帕塞瓦尔定理：设H是一个定义了内积（，）的希尔伯特空间。考虑一组规范正交向量的序列：$(e_1, e_2, \ldots, e_n,)$，那么，对于任意一个H中的元素，都有：

$$\sum |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2$$

其中的系数(x, e_k)是x在一个正交向量序列中元素e_k上的投影的长度。

这是是勾股定理在希尔伯特空间或更广泛的内积空间中的推广。

所以希尔伯特空间为基于任意正交系上的多项式表示的傅立叶级数和傅立叶变换提供了一种有效的表述方式，而这也是泛函分析的核心概念之一。

在物理学和工程学中, 帕塞瓦尔定理描述如下：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

其中$X(f) = Fx(t)$,为$x(t)$的连续傅立叶变换（以归一化酉形式），而f代表x的频率分量（非角频率）（是不是很熟悉）。

帕塞瓦尔定理解释了波形$x(t)$依时间域t累积的总能量与该波形的傅立叶变换$X(f)$在频域f累积的总能量相等。

当X为x的离散时间傅立叶变换(DTFT)，而Φ 为x的角频率，对于离散傅立叶变换(DFT)，表达式变换为：

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

其中X(k)为x(n)的离散傅立叶变换，变换前后样本长度皆为N。

在傅立叶分析中，微积分中的结论是：一个给定的函数可以表示成一族给定的基函数和（用三角函数的无穷和描述的），但是不能保证一致收敛。

而在希尔伯特空间中描述的结论是：任何一个希尔伯特空间都有一族标准正交基，而且每个希尔伯特空间中的元素都可以唯一地表示为这族基中的元素或其倍数的和。

这句话的意思就是在泛函分析中，彻底解决了傅立叶变换的收敛唯一性问题，不用再担心傅立叶展开后无法还原原来的函数。

希尔伯特空间是欧几里德空间的一个推广，使其不再局限于有限维的情形。

希尔伯特空间是量子力学的关键性概念之一，是量子力学数学描述的基础，在量子力学中，一个物理系统可以被一个复希尔伯特空间所表示，其中的向量是描述系统可能状态的波函数。所以学习真正的量子力学（而不是科普版的），需要很好的泛函分析基础。

看完上面内容，是不是体会到现代数学与古典数学不是一个世界的事情，惊不惊喜？愉不愉快？说实在的，现代数学的智力美感是古典数学完全无法相提并论的，古典数学只要正常人都能理解一二，现代数学，没受过几年地狱训练，完全摸不着门。

实变函数就瞎扯到这里。错漏之处难免，发现请指出来。符号显示很痛苦，有不少在豆瓣不能显示，慢慢找出来再改。

问答部分（注意：排列不一定是按照时间顺序）

罗阿宝：忙总您最近身体好些了吗？

wxmang：慢慢恢复，需要时间，看到春天是不是可以恢复状态。

wxmang：现在我们只讨论技术问题了。不怕他删帖，因为制定敏感词表的的人不懂数学和系统科学。

罗阿宝：我刚才那个回帖也被秒删，我写啥啦，居然荣获VIP待遇，一脸懵逼表情包......... 好的，我们沉默安静地学数学和系统科学。

罗阿宝：忙总您好好休息，放松心情，别着急工作。我最近看到一个帖子不错，推荐您休息时看看，是电影《七十七天》原型——杨柳松77天穿越羌塘无人区的日记，作者文笔很好，心态平和，文字写得比电影好看多了。《北方的空地，孤身穿越大羌塘无人区（完）》https://www.8264.com/youji/512349.html?from=8264bbs

John：忙总的小学弟袁岚峰博士也发过几个文讲黎曼

wxmang：黎曼很伟大，是古典数学向现代数学过渡的桥梁和领路者，没有黎曼，就没有现代微分几何，也就没有爱因斯坦。

捕风胖子：这两年利用业余时间，把rudin的《数学分析原理》刷了一遍，看前1/3没有障碍，估计再有3年就可以理解全贴了。

wxmang：我们当时微积分的参考书就是菲赫金戈尔茨的《微积分学教程》和鲁丁的《数学分析原理》，鲁丁的书适合当参考书，不适合当教材，微积分教材最好的我觉得还是科大常庚哲老师写的，简单明了，不走弯路。

花晨顾：想问忙总，这些谈论几十年前学的基础知识的文章，是边查阅资料边写，还是心中有了框架之后直接写出来的？如果是后者的话也太厉害了，40年前的知识能够信手拈来

wxmang：细节需要查资料，但是框架不需要，想忘掉都不容易，当时我们的训练是地狱般的。

青紫色的脸颊：真是赶巧，我正在复习实变函数论，用徐森林老师编的《实变函数习题精选》。书的前言说:"中国科学技术大学数学系1977级出了一大批有名的年轻数学家，大量实变函数论的难题的训练是成功的重要关键。"可想忙总当年的训练。。。

wxmang：当时科大很悲壮，我们进校就闹腾回北京（最早的学潮了，这也是后来科大学生动不动上街的起点），当时北京玉泉路校址占领者海军已经同意退出，最后功亏一篑，校长郭沫若大病一场，从此科大就逐渐边缘化。所以老师们的想法就是尽可能提升我们的竞争力，训练比一般学校苦得多，想我们以后有立足之地。当时偏微分方程老师沈尧天去复旦数学系看过回来讲：我们考试的试题，复旦数学系的学生根本看不懂。

稻花生香：好奇忙师上学时,所用教科书或教材,上面这些公式、定理、推论等内容大都有较详细的证明或推导过程吗?还是书上虽然不多,但是老师经常会给出他认为必要的证明过程?还是书上也写着"显然,同理,易证,留给有兴趣的读者自行完成..."老师也不管证明只讲完自己的课完事？如果是后者,对于这些没有

给出的证明,你们当时是自己独立完成吗?还是说对于大部分的公式,定理,不会纠结它是怎么得出来的,保证自己能理解其含义并能通过训练熟练应用就行关于符号显示问题,忙师可以试一下LateX格式,这是排版工具,对于数学公式的支持很完善,初步掌握基本格式用不了十分钟,不过实际用时速度可能有些慢,我没深入了解过,我用的是markdown编辑器typora自带的显示与编辑功能,不知道专门的软件是否支持相关的快捷键等功能可以用来提升速度可能忙师现在就是用的LateX格式, 如果是豆瓣不支持这种格式的话,可以尝试于公式的最后加上（小空格,但于公式的最后是不会显示出来）,这样能强制输出一个PNG图的LateX数学公式,如果这样也不支持,只能用笨办法,先把文章放入可以正常显示的编辑器中,然后把显示的公式的png图下载下来再插入豆瓣的编辑器写好的文章中了

wxmang：教科书上有证明，是其然；老师讲课主要讲所以然，主要讲为什么要这么证明，本质思想和实际背景的来龙去脉，老师不是复读机，不需要照本宣科。在课堂朗诵课本的都是误人子弟。当年科大数学系的老师很多上课是不带书不带笔记本的（教材大多都是他们自己写的），赤手空拳讲课。

Cousteau：忙总是否考虑加一点儿外代数和p-adic的介绍？外代数等工具可以让很多等式的表达式更清晰（熟悉概念的前提下），p-adic和一些古典代数基本定理可以让大家对传统的数域的了解更深入，毕竟直接上泛函怕有些“空中楼阁”

wxmang：不用，泛函分析有很好的应用背景作为基础，一说就明白，比实变函数好懂。再说泛函分析本质是线性代数推广到无穷维空间而已，算子不过是线性变换推广，算子谱不过是特征值推广。

纸飞机：实变函数，个人感觉首先测度论，教科书一般也是测度论开始入手的。然后是Lebesgue积分的工作了，推广了Riemann积分，核心的四个极限定理，Levi, Fatou, Lebesgue dominated, Vitali 然后呢，有积分，就应该有导数，Vitali covering定理和Lebesgue微分定理保证了至少单调函数在可数集外是连续的，然后引入了可以定义导数的有界变差函数，还有牛莱公式成立的绝对连续函数。其它的比如L^p空间以及范数相关不等式，乘积测度与Fubini, Tonelli定理等等泛函和测度论会重新学习。实际数学系实变和泛函是双修的，这俩纠结在一起，实变和泛函我们当年也是一个老师讲。当年我看的是rudin的《实分析和复分析》当年实变要想及格也简单，理解了Lebesgue测度和积分，搞清楚几乎处处收敛、依测度收敛、一致收敛之间的联系，理解了控制收敛定理、单调收敛定理、Fatou引理等几个等价的命题，就差不多可以及格了。

wxmang：这个和各个学校的教学安排有关，我们教实变函数，是为了学习泛函分析，学习泛函分析，是为了学偏微分方程和最优化（科大当年是五年制，第五年，我们的课程已经是中科院数学所硕士研究生的教材和深度）。所以我们把函数空间放在实变函数教，泛函分析除了一般本科要学的拓扑线性空间几何和线性算子和算子谱理论外，我们还要学巴拿赫代数，广义函数和索伯列夫空间等等，比一般大学数学系本科生学得多，大概相当于硕士研究生教材深度。我在本科就学了庞德里亚金的最优化，这是泛函最主要的应用，当然偏微分方程我们也到了要用泛函的程度，去理论物理系听量子力学，也用到泛函分析了。

辣椒炒牛肉：量子力学里讲泛函分析，是一次量子化、希尔伯特空间、谱和最小作用量原理吗？还是路径积分量子化方案？

wxmang：初等量子力学用到泛函分析地方不多，变分法是主要的，其次算子的特征值与谱方法也有一点，到是群论用得多，科大有老师写过一本书，大概意思就是量子力学其实就是群论。到高等量子力学，泛函分析内容就比较多了，首先是量子可观察量的集合（即动量和位形的线性组合）通过Stone－Von Neumann定理，可以证明构成一个Hilbert空间上的算子代数，可观察量表示为自伴算子，这样很多定理都能使用；其次是超算符映射与Kraus方程求解；然后还有QT状态空间（Hilbert空间）的扩充；态矢和算符的极限与收敛，弱收敛与强收敛；算符指数定理和算符极化分解；相位算符和相位差算符；算符完备性的4个定理；路径积分（泛函Jacobi计算，泛函δ函数计算）等等。当然学习量子力学，群论还是基础，建议看看《李群和量子力学》，比看泛函分析更有价值，更能理解量子力学。可以这样说，不懂群论和泛函分析，也能了解一点量子力学，但是群论是学习量子力学的望远镜，可以看得更远，而泛函分析是学习量子力学的显微镜，可以看得更深。当然没有望远镜和显微镜，也无所谓，世界还是那个世界，量子力学还是那个量子力学，只要掌握线性代数和微积分，混过本科量子力学课程考试还是没问题的。中国大多数大学物理系教量子力学的老师和教授，绝大多数不懂群论和泛函分析，就靠线性代数和微积分，也在混日子。

老燕：反正当年教我们量子力学的胡兹甫老师，长得像高个子版的科拉松·阿基诺，她的教学就只用高代和微积分。

wxmang：如果只用线性代数和微积分学习量子力学（还用点偏微分方程），的确只能学点科普知识，例如理解海森堡的矩阵力学和薛定谔的波动力学等价，就必须用到泛函分析，薛定谔用希尔伯特空间理论，在1926年5月证明了波动力学被包含在矩阵力学中，也即任何算符在一个完备正交系的空间中都可以被表示为一个矩阵。但是，他无法证明矩阵力学意义下的矩阵一定对应一个波动力学的算符。1926年秋，狄拉克构造了一般线性变换的理论，给出希尔伯特空间的幺正变换，证明了矩阵隐含的本征矢量实际上对应波动力学里的本征态。因此，矩阵力学和波动力学等价，即矩阵力学中矩阵和波动力学中的态函数和算符可以等价表示。同时，在1926 年，冯·诺依曼也发现算符的本征态张成一个矢量空间（希尔伯特空间），量子态可以看成希尔伯特空间中的一个矢量，测量一个力学量得到的值应该是该力学量的某个本征值；测量后的状态坍缩到对应的本征态上。不过量子力学最大的突破是1927年维格纳(Eugene Wigner)和外尔（Hermann Weyl）一起把群论引入了量子力学，有了群论的量子力学才能理解光谱的各种特征。然后冯·诺依曼932年就写了著名的《量子力学的数学基础》，核心就是用希尔伯特空间的厄密算子理论作为量子力学的数学基础。当然现在看来落后了，不过当时推动了量子力学发展。

老燕：我量子力学根本就没学明白，还好考试题发下来居然非常简单，于是70多分过关了。倒是热统，考的时候还以为挺好，结果出成绩才68，自己一头雾水。这两门在同一学期。

wxmang：统计物理其实学好的难度不次于量子力学，因为需要很好的偏微分方程和随机过程基础。而且在处理偏微分方程中，需要大量的算子计算技术。

欧拉陀螺：这么说来，那么物理系开量子力学前先要学习泛函理论。我毕业的大学是中等985，记得讲高等量子力学的时候只是学了高数和线性代数，老师讲空间对称性的时候补充了一点点群知识。至于忙总说的提到的这些泛函理论，想来都见过，不过当时只是当做技巧来处理，没有上升的系统理论高度。想请教忙总的问题是，精力有限，有没有必要工作中经常涉及的每一门数学理

论，都要系统的掌握，还是学会主要技巧就可以了。两者怎么平衡？

wxmang：我觉得如果不是做研究，以实用为主，例如你的工作需要使用偏微分方程，有限元，小波分析，傅立叶变换，优化等等工具，学点泛函分析是必要的，如果搞材料，固体物理，弹性力学，学点群论也是必要的。无用的东西就不必学了，人没有这么多精力。

欧拉陀螺：那么忙总经常说的"不懂xxx数学学科，就不可能真正理解xx学"，是不是针对的是这些学科的专业研究人士。我日常经常和偏微分方程打交道，例如模拟流体运动和固体热分布或形变过程，通常直接采用商业软件（例如Ansys），按照软件的介绍固定套路运行，需要自己动脑的是边界条件的设定（不过这方面也有文献给出了流程）。即使了解些泛函知识，也没有很难给出更优化的流程，当然我学艺不精也是原因。我想请教忙总的问题是：对于我们已经束缚在岗位上的人，忙总介绍的这些知识开拓了视野，落实的着力点在什么地方（是积累经验还是重新拿起书本阅读文献）。不然总是有天马行空的感觉，自己感觉似乎看远了，但是处理问题的时候又回到了老路子。

wxmang：应用某一学科的确需要学习相关知识，但是与研究某一学科需要的知识谱系是不同的，研究需要全面，相当于购买一个万能工具箱，而应用只需要购买自己用得着的工具。当然基础概念还是必须全面了解的。其实看自己能力和时间，兴趣，喜欢就多看看，没有一定之规，只是要优化时间安排，争取价值最大化。

纸飞机：因为我们当时讲这门课的老师是搞方程的，所以泛函讲的稍微多点。而且都是为以后研究打基础的。比如比如在偏微分方程中，证明二阶线性椭圆型方程弱解的存在性，利用Hilbert 空间的Riesz表示定理和Lax-Milgram定理。泛函基本跟方程紧密相关。高年级还有一们非线性泛函，可以说几乎是博士准备研究方程方向的基础课了。也是那个搞方程的老师讲，记得主要是4部分，1 线性化主要涉及的是一般Banach空间上的微积分，最重要的是隐函数定理，这个定理可以引导出「连续性」方法还能证明很多偏微分方程的存在性。2 不动点，有一种是基于序结构的不动点。这种方法就是pde里面一种上下解技巧的抽象版本。在椭圆形pde中具有非常大的作用，还有就是Schauder不动点，它和博弈论发生了相关；3单调算子理论，单调算子理论有线性和非线性两种。高阶课程主要是非线性，主要处理完全非线性椭圆形方程4 变分法/最优化；一个变分问题等价于某个最大单调算子方程的存在性，主要思路是「拉格朗日乘子法」，主要解决是各种带有（光滑）限制条件的变分问题。后续还有啥Ljusternik-Schirelman理论，这些东西在研究分歧理论，特征值问题，周期震动问题上特别有效。所以数学系老师还是非常重要，如果不是这个搞方程的老师讲，大部分学泛函都会是云里雾里的，这个老师讲的就非常透彻。当年我们系搞几何的老师不在，导致我们那届整体几何都比较弱。

wxmang：泛函分析作为高级工具，相当于线性代数作为低级工具的待遇，或者说线性代数是螺丝刀，泛函分析是电钻。泛函分析是非常常用的，例如傅里叶变换，小波分析，最优化，偏微分方程数值解，有限元等等，不学泛函分析，基本走投无路。

stevezhouxj：邱成栋教授以前曾批评过国内的数学本科教育，网上找到的文章链接：

http://club.kdnet.net/dispbbs.asp?id=12519452&boardid=1

比如文章开头就说："以目前的本科教育模式，国内不可能培养出一流

人才，中国大学生的基础水平，尤其是修养和学风在下降。哈佛毕业生的论文水平比国内有些院士的文章都好，如果不重视学风建设，中国科技至少后退20年。”。。。。。。。。。我是外行人，数学白痴，难道国内数学真的就是如此之差吗？

wxmang：现在情况的确很糟糕，按照中国数学会的说法，现在有能力做数学研究的大学数学老师和科研机构研究人员，全国大概十多万人，可是还在做原创工作的不足千人，大多数都只是在做翻译工作，或者追踪介绍工作，更糟糕的是抄袭或者不断“发明”他们的老师或太老师在20年前或50年前就证明的定理。产生这种现象的主要原因是个管理体制，要求每年必须多少论文。而原创工作带有很强的偶然性，基本上有时能否突破靠运气，没法到点交货。所以为了位置和基金，大多数人选择了投机：抄袭和翻译。我一个搞微分几何的国际级大腕同学，前几年国内某著名大学数学系邀请他，他的要求就一条：不能限定每年必须交几篇论文，结果人家不同意，只好继续留在美国。获得1994年诺贝尔经济学奖的约翰·纳什，十多年不出论文，普林斯顿大学数学系照样聘请他。我们急功近利，很难作出好的工作来。我一个从普林斯顿数学系回国的同学，被迫把一篇论文拆成四篇发表，在圈内成为笑谈。

Billy Joel：论文指标确实不好，但是大学里混子太多，如果没有论文指标，估计很多人直接不做学术了。两难，也不知道什么样的学术体制才是好的。

wxmang：不能急功近利，也要内行来评价。现在评价的人大多是行政官员，他们只能简单化处理：靠数量取胜。

青紫色的脸颊：忙总，现在科大要全套引进法国的培养体系了。据说是想先学习法国人的培养方式，再在数学系搞教改。——————————中新网合肥1月16日电(记者吴兰)中国科学技术大学“中法数学英才班”启动仪式16日举行。该英才班旨在为中国培养一批学术思想活跃、国际视野开阔、发展潜力巨大的基础科学领域未来学术领军人才。中国科学技术大学校长包信和、法国驻上海总领事馆文化教育合作处FabienCHAREIX、法兰西科学院LaurentLAFFORGUE院士、巴黎第七大学MarcROSSO教授等出席仪式。包信和院士说，法国在数学领域有着强大的实力和雄厚的人才储备，中法之间在高等数学教育上的合作有着相当长的历史。中法数学英才班的创建将成为中国科大数学学科继华罗庚班之后又一人才培养的新尝试。中法数学英才班每年拟招收学员25人，其中，通过中国科大自主招生、少年班、创新班招生15人，通过中国科大校内选拔10人。获得中学生数学或物理竞赛省级赛区一等奖及更高奖项、通过中国科大自主招生考试的高中生，以及数学成绩突出的、通过少年班、创新班招生考试的高中生，可以申请进入中法班。据悉，中国科大和法国的合作方已安排好专项资助经费，计划每年有9人通过中国科大与法国方面的资助前往法国读博士，每人获得的资助期限是4年。其余学生可以通过考试进入巴黎高等师范学院和巴黎综合理工等著名大学。巴黎高等师范学院是培养未来科学家特别是数学家的圣地，其校友包括12位诺贝尔奖得主和10位菲尔兹奖得主，其数学领域是竞争最激烈的领域，每年仅在全世界招收3-5名外籍学生。中国科大数学科学学院近年来已经有10 多位毕业生录取至巴黎高等师范学院数学系。

wxmang：这应该是是771李皓张罗的，他现在就在巴黎高等师范数学系当教授，很多科大数学系的学生去法国，都是他联系的。法国数学不错，目前超过俄罗斯，坐三望二，仅次于美国和德国。法国的数学传统很强大，尤其在分析和拓扑领域，法国人重构了至今为止最完整的数学研究体系：公理结构体系。

舍瓦：师伯怎么看田刚老师办的国际数学中心呢，刘若川、刘毅包括韦东

奕，将来还是能挑起这个梁吧

wxmang：不了解，科大数学系和北大数学系是两个体系，也是中国唯一能够高水平开全所有数学专业基础课和专业课的两个数学系（复旦都不行，复旦的几何和代数都有遗憾）。科大传统上受苏联影响更大，基础更扎实，北大受欧美影响大，视野更开阔。总的来讲，以前科大后劲足，北大机会多。不过现在北大领先了。