忙总谈数学：瞎扯现代数学的基础

January 22, 2022

Abstract

这篇帖子更多是从认识论的角度，用数学为例子解释人类思想能够达到的边界和逼近边界的过程。不完全是在介绍数学。

写这个帖子的另外一个目的就是想说明，数学除了是工程师的计算工具，物理学家的建模和解释工具，他是能够单独存在的，是具有智力审美价值的，不是仅仅只是一些数值计算和逻辑证明，更多的是对人类思想极限的挑战。当然由于是瞎扯，就不能深入，而且这里不能用数学符号，所以也无法具体介绍过程。

豆瓣小组“管理实践与学习”
https://www.douban.com/group/542139/

瞎扯现代数学的基础
来自: wxmang 2016-02-18 21:38:07
https://www.douban.com/group/topic/83808893/

我想尽可能不用数学符号，瞎扯一下现代数学的基础。这篇帖子更多是从认识论的角度，用数学为例子解释人类思想能够达到的边界和逼近边界的过程。不完全是在介绍数学。不过我也不知道是否足够通俗易懂。

写这个帖子的另外一个目的就是想说明数学除了是工程师的计算工具，物理学家的建模和解释工具，他是能够单独存在的，是具有智力审美价值的，不是仅仅只是一些数值计算和逻辑证明，更多的是对人类思想极限的挑战。当然由于是瞎扯，就不能深入，而且这里不能用数学符号，所以也无法具体介绍过程。

以前我说过，大学工科学习的所谓高等数学，其实还是初等数学，不过是学会了怎么计算初等函数的微分（例如加速度，边际效益等等）和积分（例如体积，面积，重量），也能用行列式解一次方程组，有的可能还能计算傅利叶变换等等，但是也只是掌握一点计算工具而已，大多数学生还是无法了解这些工具是怎么构造的，是怎么来的。

数学系的学生当然也要学习计算，但是在整个课程中占的比例极少，可能不到5%，大多数时间，还是在学习如何构造工具现有工具的来龙去脉，但是更重要的是在培养一种精细的思维方式和逻辑结构框架，只有具备了这些思维方式和逻辑框架，人才能超越直觉和常识，进入一种抽象的审美境界（当然达到这个境界的人不多，因为达到了，就是大数学家了）。

下面瞎扯一点基于数学系学生的角度了解的现代数学基础。

1　数学是什么

先扯扯我认为的数学是什么。

我们在中学，学习的数学定义是：数学是研究空间形式和数量关系的科学（也即数学是研究客观规律的科学），其实这个定义是不对的，柯朗就认为数学不能通过语意学定义。

我不认为数学是一种技术（当然可以作为计算工具和计算技术），也不是一门科学（当然可以作为物理学，化学，生物学等等科学的工具存在），数学是独立于所有学科的一个存在（独立于哲学，科学，文学，艺术等等）。举例来讲，很多学科的基础定理或原则，如果不存在人，可能就不存在，因为依赖于人的参与，甚至物理学也是如此，没有人的观测，物理学的基础可能就不存在，但是数学不同，例如π这个常数，不管是不是有人，甚至是不是有地球，有时间，有宇宙，都是存在的。

所以我认为数学更是一种人类认识世界的思想和一种思维方式。这种思维方式的特殊性在于他不是实证的，也不是形象类比的，而是基于逻辑的高度抽象，其概念完全可以没有任何现实背景，而仅仅是语义上的概念或凭空定义的概念，完全可以脱离现实而独立存在。

法国数学家普洛克鲁斯（Proclus）认为数学是：她提醒你有无形的灵魂；她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神,澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。

2　康托的朴素集合论

现代数学的基础是集合论。

现代数学不管是分析，几何，代数，还是其他专业，其基础就是集合论。因为现代数学基础语言、基础结构和基础表达方式就是集合。

朴素集合论是德国数学家康托(G.Cantor)于19世纪末创立的。

康托创立集合论，是基于解决微积分的逻辑基础问题（微积分的逻辑基础问题以后有机会介绍），为了使微积分里面采用的无穷小概念有一个清晰的逻辑基础，康托开始定义实数点集，并在上面定义了算法，进一步对其性质就行研究，把成果在发表在1874年的《克雷尔数学杂志》上，这一系列论文是奠定现代数学基础的革命性成果。

康托要做这个工作，是因为不管是牛顿，还是莱布尼兹所创立的微积分理论逻辑上都是不严格的，两人的理论都建立在无穷小分析之上，但他们对作为基本概念的无穷小量的理解与运用却是混乱的（例如牛顿就认为它必须既是0，又不是0）。

贝克莱大主教对牛顿的理论进行了攻击，其中就是贝克莱悖论（无穷小量究竟是否为0），其实本质就是有限与无限，无穷小与零，零与非零的逻辑矛盾。

由于无穷概念没有精确的定义，微积分遇到严重的逻辑困难，19世纪初，法国数学家柯西企图用极限概念来弥补这个缺陷。给出了极限的定义：若代表某变量的一串数值无限地趋向于某一数值时，其差可任意小，则该固定值称为这一串数值的极限。并在极限这基础上建立起连续、导数、微分、积分以及无穷级数的理论。

但是，柯西并没有彻底完成微积分的严密化，柯西的思想会产生逻辑矛盾。19世纪后期的数学家们发现使柯西产生逻辑矛盾的原因是奠定微积分基础的极限概念上。严格地说柯西的极限概念并没有真正地摆脱几何直观，并没有确实地建立在纯粹严密的算术的基础上。

于是，许多大量的数学家开始致力于微积分的严格化，柯西之后，魏尔斯特拉斯，戴德金也做过类似工作，但是进展不大，责难不少。在这一过程中，他们都发现一定要涉及对微积分的基本研究对象——连续函数的描述，这是一个绕不过去的坎，因为在数与连续性的定义中，必须涉及无限集合这个概念。

因此，无限集合就成为数学严密化的拦路虎。所以为寻求微积分彻底严密的算术化，必须解决无限集合的性质，这成了集合论产生的一个重要原因。

对无穷小的最深刻责难是黎曼在1854年的就职论文《关于用三角级数表示函数的可能性》中首次提出唯一性问题：

如果函数$f(x)$ 在某个区间内除间断点外所有点上都能展开为收敛于函数值的三角级数，那么这样的三角级数是否是唯一的？

函数可用三角级数表示，最早是1822年傅立叶提出来的。此后对于间断点的研究，越来越成为分析领域中引人注目的问题，从19世纪30年代起，不少杰出的数学家从事着对不连续函数的研究，并且都在一定程度上与集合这一概念挂起了钩。这就为康托最终建立集合论创造了条件。

1870年，海涅证明：当$f(x)$ 连续，且它的三角级数展开式一致收敛时，展开式是唯一的。海涅然后进一步证明：如果表示一个函数的三角级数在区间$[-\pi,\pi]$中去掉函数间断点的任意小邻域后剩下的部分上是一致收敛的，那么级数是唯一的。进一步的问题是：当$f(x)$ 具有无穷多个间断点时，唯一性能否成立？这个问题海涅没能解决。海涅推荐康托来解决这个问题。

所以康托建立集合论的出发点问题是：任意函数的三角级数的表达式是否唯一？

为了给出最有普遍性的解，康托引进了一些新的概念。康托实际上就是就是通过对这个唯一性问题的研究，认识到无穷集合的重要性，并开始从事无穷集

合的一般理论研究。直到康托利用实数集合建立了完整的实数体系，才完成了微积分的逻辑奠基工作。

在其后的三年中，康托先后发表了五篇有关这一题目的文章。康托先在1870年和1871年两次在《数学杂志》上发表论文，证明了函数$f(x)$的三角级数表示的唯一性定理，而且证明了即使在有限个间断点处不收敛，定理仍然成立。1872年他在《数学年鉴》上发表了一篇题为《三角级数中一个定理的推广》的论文，把海涅的一致收敛的严酷条件推广到允许间断点是某种无穷的集合的情形。为了描述这种集合，他首先定义了点集的极限点，然后引进了点集的导集和导集的导集等有关重要概念。康托1872年的论文是从间断点问题过度到点集论的极为重要的环节，使无穷点集成为明确的研究对象。这是从唯一性问题的探索向点集论研究的开端，并为点集论奠定了理论基础。

下面稍微介绍一下康托的工作。

康托对集合的定义：把若干确定的，有区别的（不论是具体的或抽象的）事物合并起来，看作一个整体，其中各事物称为该集合的元素（其实现代系统论定义系统也是基于康托对集合的定义，只是系统有目标）。

为了彻底解决无穷小的逻辑问题，康托29岁（1874）时在《数学杂志》上发表了一篇论文《论所有实代数数集体的一个性质》。

在这篇论文中，康托的第一个要解决的问题是：正整数的集合(n)与实数的集合(x)之间能否把它们一一对应起来。1873年12月7日，康托写信给戴德金，说他已能成功地证明实数的“集体”是不可数的，也就是不能同正整数的“集体”一一对应起来。这一天应该看成是集合论的诞生日。

康托的《论所有实代数数集体的一个性质》这篇文章1874年发表，提出了“可数集”概念，并以一一对应为准则对无穷集合进行分类，证明了如下重要结果：

一切代数数是可数的；

任何有限线段上的实数是不可数的；

超越数是不可数的；

一切无穷集并非都是可数的，无穷集同有穷集一样也有数量（基数）上的区别。

上述结论的意思是：代数数集和有理数集是可数的和实数集是不可数的。这是一个超出直觉和想象力的结果。

为证明上述定理，康托假设了连续统公理（Cantor公理，后来被哥德尔证明与策梅洛选择公理协调）。

连续统公理：无穷集合中，除了整数集的基数，实数集的基数是最小的。（实数集即直线上点的集合为连续统）

利用连续统公理，康托证明：任何一个集合的幂集（即它的一切子集构成的集合）的势都大于这个集合的势，人们才认识到无穷集合也可以比较大小。

自然数集是最小的无穷集合，自然数集的势记作阿列夫零。康托证明连续统势等于自然数集的幂集的势。

是否存在一个无穷集合，它的势比自然数集的势大，比连续统势小？这个问题被称为连续统问题。

康托尔猜想这个问题的解答是否定的，即连续统势是比自然数集的势大的势中最小的一个无穷势，记作C1；自然数集的势记作C0。这个猜想就称为连续统假设。（这个假设后来得到证明）

这篇文章所用的方法是康托集合论。

康托的集合论是从定义一个元素o和集合A之间的二元关系开始的：若o是A的元素，可表示为$o \in A$。上述关系也可以用在集合和集合的关系。

另外一种二个集合之间的关系，称为包含关系。若集合A中的所有元素都是集合B中的元素，则称集合A为B的子集，符号为$A \subseteq B$。例如$\{1, 2\}$ 是$\{1, 2, 3\}$ 的子集，但$\{1, 4\}$ 就不是$\{1, 2, 3\}$ 的子集。依照定义，任一个集合也是本身的子集，不考虑本身的子集称为真子集。集合A为集合B的真子集当且仅当集合A为集合B的子集，且集合B不是集合A的子集。

数的算术中有许多一元及二元运算，集合论也有许多针对集合的一元及二元运算：

集合A和B的并集，符号为$A \cup B$，是在至少在集合A或B中出现的元素，集合$\{1, 2, 3\}$ 和集合$\{2, 3, 4\}$ 的联集为集合$\{1, 2, 3, 4\}$ 。

集合A和B的交集，符号为$A \cap B$，是同时在集合A及B中出现的元素，集合$\{1, 2, 3\}$ 和集合$\{2, 3, 4\}$ 的交集为集合$\{2, 3\}$ 。

集合U和A的相对差集，符号为$U \setminus A$，是在集合U中,但不在集合A中的所有元素，相对差集$\{1, 2, 3\}$ $\{2, 3, 4\}$ 为$\{1\}$ ，而相对差集$\{2, 3, 4\}$ $\{1, 2, 3\}$ 为$\{4\}$ 。当集合A是集合U的子集时，相对差集$U \setminus A$也称为集合A 在集合U中的补集。

集合A和B的对称差，符号为$A \vartriangle B$或$A \oplus B$，是指只在集合A及B中的其中一个出现，没有在其交集中出现的元素。例如集合$\{1, 2, 3\}$ 和$\{2, 3, 4\}$ 的对称差为$\{1, 4\}$ ，也是其并集和交集的相对差集$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$，或是二个相对差集的联集$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$。

集合A和B的笛卡儿积，符号为A ×B，是一个由所有可能的有序对(a,b)形成的集合，其中第一个是A的成员，第二个是B的成员。例如$\{1, 2\}$和$\{红, 白\}$的笛卡儿积为$\{(1, 红), (1, 白), (2, 红), (2, 白)\}$。

集合A的幂集是指是以A的全部子集为元素的集合，例如集合$\{1, 2\}$ 的幂集为{{},{1},{2},{1,2}} 。

一些重要的基本集合包括空集（唯一没有元素的集合），整数集合及实数集合。

1874年1月5日，康托给戴德金写信，进一步提出下面的问题：

是否能把一块曲面（如包含边界在内的正方形）一意地映射到一条线（如包含端点在内的线段），使得面上每一点对应线上一点而且反过来线上每一点对应面上一点？（这是一个颠覆人类想象的结论，直观说就是相当于太平洋的点与一根火柴的点一样多）。

1877年6月20日，他给戴德金写信，告诉他已经证明这个问题，信中说“我看到了它，但我简直不能相信它”。这是一个更伟大的工作，实际上证明了一条线段上的点能够和正方形上的点建立一一对应，从而证明了直线上，平面上，三维空间乃至高维空间的所有点的集合，都有相同的势。

从直观上说，平面上的点显然要比线上的点要多得多。康托自己起初也是这样认识的。但三年后，康托宣布：不仅平面和直线之间可以建立一一对应，而且一般的n维连续空间也可以建立一一对应。这一结果是出人意外的。就连康托本人也觉得“简直不能相信”。然而这又是明摆着的事实，它说明直观是靠不住的，只有靠理性才能发现真理，避免谬误。

这篇论文揭示了度量空间维数的本质，标志点集拓扑的开始。

这个工作其实揭示的是集合论里的核心难点：无穷集合这个概念本身。

从希腊时代以来，无穷集合很自然地引起数学家们和哲学家们的注意。而这种集合的本质以及看来是矛盾的性质，很难象有穷集合那样来把握它。所以对这种集合的理解没有任何进展。早在中世纪，人们已经注意到这样的事实：如

果从两个同心圆出发画射线，那么射线就在这两个圆的点与点之间建立了一一对应，然而两圆的周长是不一样的。16世纪，伽俐略还举例说，可以在两个不同长的线段ab与cd之间建立一一对应，从而想象出它们具有同样的点。

他又注意到正整数可以和它们的平方构成一一对应，只要使每个正整数同它们的平方对应起来就行了:

1 2 3 4 ……n ……

1 4 9 16 ……n^2 ……

但这导致无穷大的不同的“数量级”，伽俐略以为这是不可能的.因为所有无穷大都一样大。

不仅是伽俐略，在康托之前的数学家大多不赞成在无穷集之间使用一一对应的比较手段，因为它将出现部分等于全体的矛盾。高斯明确表态：“我反对把一个无穷量当作实体，在数学中是从来不允许的。无穷只是一种说话的方式……”柯西也不承认无穷集合的存在。他不能允许部分同整体构成一一对应这件事。

但是康托认为一个无穷集合能够和它的部分构成一一对应不是什么坏事，它恰恰反应了无穷集合的一个本质特征。对康托来说，如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应，它就是无穷的。它定义了基数,可数集合等概念。

既然n维连续空间与一维连续统具有相同的基数，于是，康托在1879到1884年间集中于线性连续统的研究，相继发表了六篇系列文章，汇集成《关于无穷的线性点集》。其中前四篇同以前的论文类似，讨论了集合论的一些数学成果，包括集合论在函数论等方面的应用。第五篇发表于1883年，它的篇幅最长，内容也最丰富。它不仅超出了线性点集的研究范围，而且给出了超穷数的一个完全一般的理论，其中借助良序集的序型引进了超穷序数的整个谱系。同时还专门讨论了由集合论产生的哲学问题，包括回答反对者们对康托所采取的实无穷立场的非难。这篇文章对康托是极为重要的。1883年，康托将它以《一般集合论基础》为题作为专著单独出版。第六篇论文是第五篇的补充。

《一般集合论基础》主要成果是引进了作为自然数系的独立和系统扩充的超穷数，从内容到叙述方式都同现代的朴素集合论基本一致，所以该书标志着点集论体系的建立。

《一般集合论基础》，引进了无穷点集的一些概念，如：基数，势，序数等，试图把不同的无穷离散点集和无穷连续点集按某种方式加以区分。康托在这篇文章中的主要贡献是引进超穷数。

为构造超穷数的序列。康托应用了以下几条原则：

第一生成原则：从任一给点的数出发，通过相继加1（个单位）可得到它的后继数。

第二生成原则：任给一个其中无最大数的序列，可产生一个作为该序列极限的新数，它定义为大于此序列中所有数的后继数。

第三（限制）原则：保证在上述超穷序列中产生一种自然中断，使第二数类有一个确定极限，从而形成更大数类。

反复应用三个原则，就得到超穷数的序列：

ω，$\omega 1$，$\omega 2$，…

利用先前引入的集合的势的概念，康托证明第一数类（Ⅰ）和第二数类（Ⅱ）的重要区别在于（Ⅱ）的势大于（Ⅰ）的势。还给出了良序集和无穷良序集编号的概念，指出整个超穷数的集合是良序的，而且任何无穷良序集，都存在唯一的一个第二数类中的数作为表示它的顺序特性的编号。康托还借助良序集定义了超穷数的加法、乘法及其逆运算。

他另外一个重要工作是构造了实变函数论中著名的Cantor集。

康托集是一个无处稠密的完备集，简单说康托集是个测度为0的集，直观的解析几何说法就是这函数图像面积为0。

通过考虑这个集合，康托奠定了现代点集拓扑学的基础。（实际上斯梅尔的马蹄映射也会形成康托集）。

最常见的构造康托集方法是取一条长度为1的直线段，将它三等分，去掉中间一段，留剩下两段，再将剩下的两段再分别三等分，各去掉中间一段，剩下更短的四段，……，将这样的操作一直继续下去，直至无穷，由于在不断分割舍弃过程中，所形成的线段数目越来越多，长度越来越小，在极限的情况下，得到一个离散的点集，这就是康托集。

康托点集的极限图形长度趋于0，线段数目趋于无穷，实际上相当于一个点集。操作n次后，边长$r = (1/3)^n$，边数$N(r) = 2^n$，根据公式$D = \ln N(r)/\ln(1/r)$，$D = \ln 2/\ln 3 = 0.631$。

所以康托点集分数维是0.631。

康托集中有无穷多个点，所有的点处于非均匀分布状态。此点集具有自相似性，其局部与整体是相似的，所以是一个分形系统。

康托集具有：自相似性；精细结构；无穷操作或迭代过程；长度为零；简单与复杂的统一。

康托集的出现，导致传统几何学陷入危机。用传统的几何学术语难以描述，它既不满足某些简单条件，如点的轨迹，也不是任何简单方程的解集。其局部也同样难于描述。因为每一点附近都有大量被各种不同间隔分开的其它点存在。

康托于1895年和1897年先后发表了两篇对超限数理论具有决定意义的论文。在该文中,他改变了早期用公理定义(序)数的方法，采用集合作为基本概念。他给出了超限基数和超限序数的定义，引进了它们的符号；依势的大小把它们排成一个序列；规定了它们的加法，乘法和乘方。

但是集合论的内在矛盾开始暴露出来。康托自己首先发现了集合论的内在矛盾。他在1895年的文章中遗留下两个悬而未决的问题：一个是连续统假说；另一个是所有超穷基数的可比较性。

他虽然认为无穷基数有最小数而没有最大数，但没有明显叙述其矛盾之处。一直到1903年罗素发表了他的著名悖论。集合论的内在矛盾才突出出来，成为20世纪集合论和数学基础研究的出发点。

不过康托的集合论是数学上最具有革命性的理论，因为他精确定义和构造了数学的最基础概念：无穷集合。

康托的集合论是人类认识史上第一次给无穷建立起抽象的形式符号系统和确定的运算。并从本质上揭示了无穷的特性，使无穷的概念发生了一次革命性的变化，并渗透到所有的数学分支，从根本上改造了数学的结构，促进了数学许多新的分支的建立和发展，成为实变函数论、代数拓扑、群论和泛函分析等理论的基础，还给逻辑学和哲学也带来了深远的影响。

康托的工作一开始是不受待见的，康托集合论的出现冲击了传统的观念，颠倒了许多前人的想法，康托的成果超越了大多数人的想象边界和常识边界。

因为19世纪被普遍承认的关于存在性的证明是构造性的。你要证明什么东西存在，那就要具体造出来。因此，人只能从具体得数或形出发，一步一步经过有限多步得出结论来。至于“无穷”，许多人更是认为它是一个超乎于人的能力所能认识的世界，不要说去数它，就是它是否存在也难以肯定，而康托竟然

“漫无边际地”去数它，去比较它们的大小，去设想没有最大基数的无穷集合的存在。

反对康托最激烈的是德国数学大师克罗内克（Kronecker，康托的老师）。克罗内克认为，数学的对象必须是可构造出来的，不可用有限步骤构造出来的都是可疑的，不应作为数学的对象，他反对无理数和连续函数的理论，恶毒攻击康托的无穷集合和超限数理论不是数学而是神秘主义。他说康托的集合论空空洞洞毫无内容，康托是精神病。

除了克罗尼克之外，庞加莱（Poincare）也说：“我个人，而且还不只我一人，认为重要之点在于，切勿引进一些不能用有限个文字去完全定义好的东西”。他把集合论当作一个有趣的“病理学的情形”来谈，并且预测说：“后一代将把（Cantor）集合论当作一种疾病”。

外尔（Weyl）认为，康托关于基数的等级观点是“雾上之雾”。克莱因（Klein）也不赞成集合论的思想。施瓦兹原来是康托的好友，但他由于反对集合论而同康托断交。埃里特·比修普驳斥集合论是“上帝的数学，应该留给上帝”。维特根斯坦特别对无限的操作有疑问。当罗素给出集合论的悖论出现之后，他们开始认为集合论根本是一种病态。

1884年，由于连续统假设长期得不到证明，再加上与克罗内克的尖锐对立，精神上屡遭打击康托精神崩溃，神经分裂，住进精神病院，1918年1月6日在哈勒大学精神病院去世。不过偶尔恢复常态时，他的思想变得超乎寻常的清晰，继续他的集合论的工作（他的很多重要工作都是精神病发病间歇期做出来的）。谁说数学家战斗力弱？

康托的集合论得到公开的承认是在瑞士苏黎世召开的第一届国际数学家大会上霍尔维茨（Hurwitz）明确地阐述康托集合论对函数论的进展所起的巨大推动作用，阿达玛（Hadamard），也报告康托对他的工作的重要作用。

希尔伯特(Hilbert)高度赞誉康托的集合论“是数学天才最优秀的作品”，“是人类纯粹智力活动的最高成就之一”，“是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”。在1900年第二届国际数学家大会上，希尔伯特高度评价了康托工作的重要性，并把康托的连续统假设列入20世纪初有待解决的23个重要数学问题之首。

二十余年后，集合论价值才得到认可。二十世纪初数学家们已经普遍认为从算术公理系统出发，只要借助集合论的概念，便可以建造起整个数学的大厦。按现代数学观点，数学各分支的研究对象或者本身是带有某种特定结构的集合如群、环、拓扑空间，或者是可以通过集合来定义的（如自然数、实数、函数）。从这个意义上说，集合论可以说是整个现代数学的基础。

在1900年第二次国际数学大会上，庞加莱（这家伙改正错误倒是快得很）就兴高采烈的说：数学已被算术化了，我们可以说，现在数学已经达到了绝对的严格。

3 公理化集合论

在康托集合论得到认可的大好形势下，也有不信邪的。传说1902年英国数学家罗素（Russel）给康托写了一封信：“在一个村庄里住着一位理发师，这位理发师只给这个村庄里那些不给自己刮胡子的人刮胡子，请问这位理发师给不给自己刮胡子呢？”（也即理发师悖论），也即集合论是有漏洞的。其实不止罗素一人，当时很多数学家对数学的严密性是很怀疑的。

悖论的发现动摇了数学大厦的基础。（后面我们会介绍集合论是现代一切数学以及相关科学理论的基础）。

其实这种传说有夸张行为，罗素的工作要严谨得多。罗素构造了一个所有不属于自身（即不包含自身作为元素）的集合R，现在问R是否属于R?

如果R属于R，则R满足R的定义，因此R不应属于自身，即R不属于R;

如果R不属于R，则R不满足R的定义，因此R应属于自身,即R属于R。

这样,不论何种情况都存在着矛盾（为了使罗素悖论更加通俗易懂,罗素本人在1919年将其改写为理发师悖论）。

这样建立在集合论基础上的号称“天衣无缝”，“绝对严密”的数学就陷入了自相矛盾之中，这就是数学史上的第三次数学危机。

尽管后来在希尔伯特（Hilbert）领导下，世界上第一流的数学家们进行了100多年的基础弥补工作，但是直到今天，数学的基础仍然是晃悠的，扎实基础并未能完全建立起来。现在能够做到的就是凑合：给集合论附加了一些公理，避免悖论矛盾（这就是公理化集合论）。

公理化方法,就是从尽可能少的无需定义的基本概念（例如集合论的基本概念只有集合（set），关系（relation），函数（function），等价（equivalence）等4个）和尽可能少的一组不加证明的原始命题（基本公理或公设）出发，应用严格的逻辑推理规则，用演绎推理得到基础定理。

公理系统要求无矛盾性，完备性和独立性。也即在公理系统中不能推出自相矛盾的结论，公理系统应尽可能多地推出这门科学中已经客观存在的结论，最好是能推出全部的结论，要求基本公理不多不少，任何一条公理都不能从其他公理中推出来。

公理化的目的是在于通过一个演绎系统+基本概念+公理，获得全部定理，确保学科的逻辑严谨。

公理化集合论是1908年德国数学家策梅罗（E.Zermelo）提出的，通过集合论公理化来消除悖论。他认为悖论的出现是由于康托没有把集合的概念加以限制，康托尔对集合的定义是含混的。策梅罗认为简洁的公理能使集合的定义及其具有的性质更为显然，这就是现代数学里面的ZF公理系统（除ZF系统外，集合论的公理系统还有多种，如冯诺伊曼提出的NBG系统等）。

具体来说ZF公理系统包括（由策梅洛和A.A.弗伦克尔提出）外延公理、空集公理、无序对公理、并集公理、幂集公理、无穷公理、分离公理模式、替换公理模式、正则公理和选择公理。

利用上述公理可以定义出空集、序对、关系、函数等集合，还可以给出序关系、良序关系、序数、基数，也可以给出自然数、整数、实数等概念。

在ZF公理系统中，集合的元素都是集合，自然数可用皮亚诺公理系统表示，如$3 = \{0, 1, 2\} = \{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$。

外延公理:一个集合完全由它的元素所决定。如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的。

空集合存在公理:存在一集合s，它没有元素。

无序对公理:任给两个集合x、y，存在第三个集合z，而$w \in z$当且仅当$w = x$或者$w = y$。

并集公理:任给一集合x，可以把x的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合。（对任意集合x，存在集合y，$w \in y$当且仅当存在z使$z \in x$且$w \in z$）。

幂集公理：任意的集合x，$P(x)$也是一集合（对任意集合x，存在集合y，使$z \in y$当且仅当对z的所有元素w，$w \in x$）。

无穷公理：存在一集合x，它有无穷多元素（存在一个集合，使得空集是其元素，且对其任意元素x，$x \cup \{x\}$也是其元素。根据皮亚诺公理系统对自然数的描述，此即存在一个包含所有自然数的集合）。

替换公理：对于任意的函数$F(x)$，对于任意的集合t，当x属于t时，$F(x)$都有定义（ZF系统中唯一的对象是集合，以$F(x)$必然是集合）成立的前提下，就一定存在一集合s，使得对于所有的x属于t，在集合s 中都有一元素y，使$y = F(x)$。也就是说，由$F(x)$所定义的函数的定义域在t中的时候，那么它的值域可限定在s中。

正则公理:也叫基础公理。所有集都是良基集。说明一个集合的元素都具有最小性质，例如，不允许出现x属于x的情况（对任意非空集合x，至少有一元素y使$x \cap y$为空集）

选择公理：对任意集c存在以c为定义域的选择函数g，使得对c的每个非空元集x，$g(x) \in x$。

策梅罗的主要工作是引入了选择公理。

下面重点介绍选择公理（Axiom of Choice）：任意的一群非空集合，一定可以从每个集合中各拿出一个元素。

这是显然的命题，就象平面内两点确定一条直线易于理解。但是这个命题能演绎出一些超出人类直觉的结论,例如巴拿赫–塔斯基分球定理:

一个球，能分成五个部分，对它们进行一系列刚性变换（平移旋转）后，能组合成两个一样大小的球。

下面直观的来描述一下这个数学大厦基础公理的价值。

没有选择公理很多问题将无解。假设我们要在N个批次的轮胎中每个批次抽一个出来送检，如果N是有限的，显然没问题，但是如果N是无限的，比如N与无理数一样多，怎么办？逻辑上就不可能保证每个批次能够选出一个了，因为无穷大是无法排队的，也就是没法挨个选。而选择公理告诉我们：可以选得出来。所以这个公理非常不平凡。

1904年，策梅罗通过选择公理证明了良序定理。这个公理有极多的等价形式，例如代数中常用的佐恩引理（Zorn's Lemma），也被称为库那图斯克-佐恩引理（Kuratowski-Zorn）（在任何一个非空的偏序集中，如果任何链（即一个全序子集）都有上界，那么这个偏序集必然存在一个极大元素，可以证明与选择公理等价）。

选择公理的用途很大，许多学科的基本定理都依赖依赖于选择公理才能成立。例如泛函分析中的哈恩-巴拿赫定理(关于巴拿赫空间上的线性泛函的可扩张性)，拓扑学的吉洪诺夫定理(关于任意多紧空间的直积为紧)；布尔代数的斯通表示定理，每个布尔代数皆同构于集代数；自由群论的尼尔森定理，自由群的子群也是自由的；拓扑学的Baire 纲定理；实分析（测度理论）的Lebesgue 不可测集的存在性；泛函分析的Banach–Steinhaus 定理（一致有界定理），开映射定理，闭图像定理等等。其他还有许多定理，如果没有选择公理也不行。

现代数学中，基于集合论的基础，有数学分析（Analysis）和抽象代数（Algebra）。至于微分几何，代数几何，代数拓扑和概率论等等，他们的基础是数学分析和抽象代数，所以可以说，现代数学的基础，就是集合论。

当然公理化的集合论也是形式语义学和程序理论的基础，其实现在公理语义学是软件开发工具的基本语言。

公理化集合论建立后，希尔伯特激动万分，老泪丛横：没有人能把我们从康托为我们创造的乐园中赶出去。不过庞加莱认为一些基本问题并未获得解决：

公理化集合论，仅仅是为了防备狼，羊群用篱笆围了起来，但不知道圈内有没有狼。

庞加莱这次说对了，因为哥德尔（Godel）后来又证明完备的公理系统是不存在的，所以数学大厦的基础仍然在晃悠，仍然需要修补。

顺便补充一句，ZF如果另加选择公理（AC），则所得的公理系统简记为ZFC。现在已经证明，ZF对于发展集合论足够了,它能避免已知的集合论悖论，并在数学基础研究中提供了一种方便的语言和工具。在ZF中，几乎所有的数学概念都能用集合论语言表达，数学定理也大都可以在ZFC内得到形式证明，因而作为整个数学的基础，ZFC是完备的，数学的无矛盾性可以归结为ZFC的无矛盾性。

选择公理和连续统假设有重要地位，是集合论中长期研究的课题。选择公理成为数学史上继平行公理之后最有争议的公理，连续统假设是1878年康托提出来的，简单的说，就是关于直线上有多少点的问题。

1938年，哥德尔证明了：从ZF推不出选择公理的否定，从ZFC推不出连续统假设的否定，即选择公理对于ZF，连续统假设对于ZFC是相对无矛盾的。1963年，科恩证明了选择公理对于ZF,连续统假设对于ZFC的相对独立性,即从ZF推不出选择公理,从ZFC推不出连续统假设。综合这两个结果,得出选择公理在ZF中,连续统假设在ZFC中都是不可判定的。

4 布尔巴基的数学结构

数学界另外一座公理化的高峰是法国布尔巴基学派（Bourbaki）的工作，这个是必须介绍的，没法绕过去。

20世纪30年代后期，法国数学期刊上发表了若干数学论文，所论问题深刻，内容详尽，署名为尼古拉·布尔巴基。1939年出版了一本《数学原理》，这是一套关于现代数学的综合性丛书的第一卷，水平绝对秒杀世界上大多数数学家，作者也是尼古拉·布尔巴基。

谁是布尔巴基，成为当时世界数学家的一大猜想。后来还是布尔巴基自己解密：他们就是一群年轻的法国数学家。

布尔巴基里面牛人辈出，例如韦伊（Weil）、H.嘉当（H. Cartan）、让·迪多内（Dieudonné）、薛华荔（Chevalley）、塞尔（Serre）、格罗登迪克（Grothendieck）等人。布尔巴基成员之中，产生了许多具有世界意义的数学大师，例如让·迪多内，发表了大量论文，他本人的《Treaiseon Analysis》是具有世界影响的现代分析着作；韦伊在代数数论和代数几何上的工作十分深刻，是20世纪中叶以后世界上最重要的数学家之一；H.嘉当以多复变函数和同调代数驰名天下；成员之一薛华荔，建立了李（Lie）理论和有限群之间的桥梁等等。在布尔巴基成员中，获得菲尔兹奖的有施瓦兹（Schwartz，广义函数的奠基人）、格罗申第克（Grothendick，现代代数几何学家），塞尔（Serre，《数学原本》代数部分的主要贡献者），爱伦伯格（S. Eilenderg，同调代数的制定者）。而且塞尔是世界上第一个数学“三冠王”，最重要的三个国际数学大奖——阿贝尔奖、沃尔夫奖、菲尔兹奖的获得者。

布尔巴基主要成就就是编写了多卷集的《数学原理》（超过40册），这是一部影响现代数学格局的伟大著作。

《数学原理》这本书是基于公理化基础+数学结构概念来写的，下面先介绍他们的公理化基础。

前面我们说过，数学的“公理化体系”（Axiomatic Systems）是由一组公理（Axioms）与相关定义（或规定，即Definitions）构建起来的一种逻辑演绎体系（也叫”数学结构“）。当这种数学结构是客观现象的“模型”时，基于这种数学结构的的逻辑推理能够提供关于这种客观现象的理解（洞察）与预测。

布尔巴基将空集合（Empty Set）用”$\emptyset$”表示，定义自然数：数字$0 = \emptyset$（空集本身），$1 = \{\emptyset\}$（空集作为集合的元素），$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$，$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$，$4 = \{......\}\}\}\}$（注意，这里有4个“}”右括号），因此存在顺序关系：$0 \le 1$，$1 \le 2$，$2 \le 3$，......和包含关系$0 \in 1, 1 \in 2, 2 \in 3, ...$（符号“$\in$”是包含在内的意思，即前者是后者的元素，前者包含在后者的里面）。

根据上述定义，我们有了自然数系N，整数系Z，加上定义的加法，和乘法，就继有了有理数系Q，实数系R，以及超实数系$^*R$（注意：星号“$*$”必须打在实数系R符号的左上方，这是非标准分析的规矩。超实数系$^*R$ 里面包含有“无穷小”）。至此，我们有了各种数系。

布尔巴基的公理系统很复杂，下面只简单介绍一下实数系的公理系统：

代数公理：

A. 封闭律：0与1 是实数。如果a与b是实数，则$a + b$，ab以及$-a$均为实数；

B. 交换律：$a + b = b + a$，$ab = ba$；

C. 结合律：$a + (b + c) = (a + b) + c$，$a(bc) = (ab)c$；

D. 单元律：$0 + a = a$，$1a = a$；

E. 逆元律：$a + (-a) = 0$，$a(1/a) = 1$ $(a\neq0)$；

F. 分配律：$a(b + c) = ab + ac$；

定义：正整数是：1，2=1+1，3 =1+1+1，4=1+1+1+1，......

次序公理：

A.$0 < 1$；

B. 传递律：如果$a < b$以及$b < c$，则$a < c$；

C. 分配律：$a < b$、$a = b$ 或$b < a$，其中只有一个式子成立；

D. 加法律：如果$a < b$，则$a + c < b + c$；

E. 乘法律：如果$a < b$，而且$0 < c$，则$ac < bc$；

F.. 求根律：如果$a > 0$，对于任意正整数n，存在一个实数b，使得b的n次方等于a；

完备公理：

如果A为实数集合，其中x，y属于A，而且x与y之间的任何实数均属于A，则A为一个实数区间。

然后布尔巴基在各种数系上引入不同的公理系统与相关概念的“定义”，使其成为不同的“数学结构”。例如布尔巴基利用实数系R构建“连续统”（Continium，物理量的模型），其实就是数学上的“实数轴”。再进一步构建平面坐标系（即坐标平面），再进而构建三维空间，......，等等。

简单点说，布尔巴基认为现代数学就是空集$\emptyset$的逻辑延伸物（也即无中生有，与中国道家的无极生太极，太极生两仪，两仪生四象，四象生八方，八方生万物是一致的）。

再说说结构。布尔巴基认为数学是研究抽象结构的理论。

结构就是以初始概念和公理出发的演绎系统。布尔巴基认为只有三种基本的抽象结构：有三种基本的抽象结构：代数结构（群，环，域……），序结构（偏序，全序……），拓扑结构（邻域，极限，连通性，维数……）。他们把全部数学看作按不同结构进行演绎的体系。

用实数举例，实数可以比较大小，也就是定义一个元素x小于或等于另一个元素y，比如记为$x\mathrm{R}y$。它满足一些公理：

1、对任何x，$x\mathrm{R}x$；

2、由$x\mathrm{R}y$和$y\mathrm{R}x$可以推出$x = y$；

3、$x\mathrm{R}y$且$y\mathrm{R}z$推出$x\mathrm{R}z$。

满足这组公理的集合就被称为有序结构。

同样，实数可以加减乘除（除数不为0），所以它们满足域公理，这就是代数结构。

实数还有邻域、开集等等概念，由此可以引出极限、连续等等概念，这就是拓扑结构（即满足拓扑空间的公理）。

有些集合只有一两个结构，比如：素数集合只有序结构；整数集合没有拓扑结构；矩阵只有代数结构。

数学结构是布尔巴基学派的一大重要发明。这一思想的来源是公理化方法，布尔巴基反对将数学分为分析、几何、代数、数论的经典划分，而要以同构概念对数学内部各基本学科进行分类。他们认为全部数学基于三种母结构：代数结构、序结构、和拓扑结构。

所谓结构就是"表示各种各样的概念的共同特征仅在于他们可以应用到各种元素的集合上。而这些元素的性质并没有专门指定，定义一个结构就是给出这些元素之间的一个或几个关系，人们从给定的关系所满足的条件（他们是结构的公理）建立起某种给定结构的公理理论就等于只从结构的公理出发来推演这些公理的逻辑推论。"

于是一个数学学科可能由几种结构混合而成，同时每一类型结构中又有着不同的层次。比如实数集就具有三种结构：一种由算术运算定义的代数结构；一种顺序结构；最后一种就是根据极限概念的拓扑结构。

三种结构是有机结合在一起的，比如李群是特殊的拓扑群，是拓扑结构和群结构相互结合而成。

因此布尔巴基著作中，数学的分类不再象过去那样划分成代数、数论、几何、分析等部门，而是依据结构的相同与否来分类。比如线性代数和初等几何研究的是同样一种结构，也就说它们"同构"，可以一起处理。这样，他们从一开始就打乱了经典数学世界的秩序。

布尔巴基说：从现在起，数学具有了几大类型的结构理论所提供的强有力的工具，它用单一的观点支配着广大的领域，它们原先处于完全杂乱无章的状况，现在已经由公理方法统一起来了。由这种新观点出发，数学结构就构成数学的唯一对象，数学就表现为数学结构的仓库。

基于结构的思想，布尔巴基把代数拓扑学、同调代数、微分拓扑学、微分几何学、多复变量函数论、代数几何学、代数数论、李群和代数群理论、泛函分析等数学领域汇合在一起，形成一个整体。

布尔巴基认为，数学主要考虑抽象的数学结构，强调考虑的是对象的集合之间的关系，而对对象（元素）究竟是数、是形、是函数还是运算并不关心；只考虑抽象的数学结构，不关心对象具体是什么。这与经典数学关心具体的数学对象是大不相同的。

"数学家研究的不是客体，而是客体之间的关系。"他们感兴趣的对象是某些"集合"的"元素"以及它们之间的某些"关系"。

布尔巴基的结构数学在方法论和认识论上都有重要意义，一方面，从适当选定的少数公理能够得出在证明中特别有用的大量结论；另一方面在极为丰富多彩的数学对象中能够识别出这些结构，结果把它所带给自己的工具变成整个数

学工具库的一部分。并且，数学结构是分成层次的，代数结构（如李群、群、环、域等）、拓扑结构（如拓扑空间等）、序结构（如偏序、全序、格等）是比较基本的3大类结构。两种或多种结构可以复合而成更复杂的结构，它们之间通过映射或运算联系在一起；两种或多种结构还可以同时出现在同一集合上，它们之间通过一定关系彼此相容，形成多重的结构；多重结构经过组合，就形成更为复杂的结构。

数学研究的种种对象经过分析可以发现其中的种种结构。

这样数学家的工作浓缩为要着重解决两大问题，一是对于某种类型的结构把不同构的结构加以分类；二是两种结构何时看成是同构的。

他们认为只有抽象和综合才真正导致了本来就很特殊的情况和经常掩盖着事情本质的那些现象的消失，才能够弄清楚外表完全不同的问题之间的深刻联系；进而弄清楚整个数学的深刻的统一性。例如最早被认识和研究了的结构，是由伽罗华（Galois）所发现的‘群’的结构。

布尔巴基学派产生的原因是在1914年到1918年的第一次世界大战中，法国年轻的优秀数学家们有三分之二参军上战场牺牲。所以一战结束后，法国数学已经严重落后于欧洲和世界，因为数学是个年轻人的行业，法国活下来的数学家都是老头子，他们水平还停留在20年前，对现代数学的发展一无所知，例如对莫斯科拓扑学派和波兰的拓扑和泛函分析学派一无所知，也不理解冯•诺依曼和黎兹的工作，对阿廷（Artin，抽象代数奠基人之一）、诺特（Noether，一般理想理论）所创立的抽象代数学，西格尔（Siegel）和海塞（Hasse）在任意代数数系数的二次型研究上获得重要结果，范。德。瓦尔登（Waerden）划时代的著作《近世代数学》，希尔伯特的泛函分析，巴拿赫的线性算子理论，盖尔范德、豪斯多夫等人的微分拓扑和代数拓扑，另外李群、李代数、代数数论、代数几何、现代分析（由泛函分析所推动分析）、和广义函数论、偏微分方程理论上巨大的突破都一无所知（其中代数拓扑学和微分拓扑学被称为现代数学的女王），还是只在函数论这个法国传统领域做道场，而且对法国自己的e•嘉当的工作也不理解（超出他同时代人的水平20多年）。而这个时候，德国数学突飞猛进，涌现了一批第一流的数学家，例如诺特、西格尔、阿廷、哈塞等等。当时法国最年轻一代数学家，例如韦伊、H.嘉当、让•迪多内、薛华荔、塞尔、格罗登迪克等人（这些人就是布尔巴基的第一代核心成员），不满足于法国数学界的现状，认识到了法国数学同世界先进水平的差距，他们认为必须改革法国数学，不然世界就会忘掉法国数学，使法国的二百多年大师辈出的传统中断，这就是产生布尔巴基学派的原因。

一般把传统模型数学称为第一代，结构数学称为第二代，布尔巴基写的《数学原理》创造了第二代数学。这套书有七千多页，是有史以来篇幅最大的数学巨著，包含了集合论、代数学、一般拓扑学、一元实变量函数、拓扑向量空间、积分论、交换代数学、微分簇及解析簇、李群和李代数、谱理论等卷，把代数拓扑学、同调代数、微分拓扑学、微分几何学、多复变量函数论、代数几何学、代数数论、李群和代数群理论、泛函分析等数学领域整合在一起成为一个整体，而不是各个专业。其实布尔巴基初衷只是撰写一本用于教授微积分的教材，并以此取代当时法国较为流行的分析教材，不想搞成一座摩天大厦。

《数学原理》的各分册都是按照严格的逻辑顺序来编排的。在某一处用到的概念或结果，一定都在以前各卷、各分册中出现过。全书特点是简洁而清晰，论述和证明都没有废话。所以《数学原理》能够成为标准参考书，并且是战后的数学文献中被人引用次数最多的书籍之一。

20世纪中期，世界数学界是布尔巴基集体的寡头统治的时代，在二战后的

十几年间，布尔巴基的声望达到了顶峰，使法国数学在第二次世界大战之后又能保持先进水平，而且影响着整个现代数学的发展。《数学原理》成为新的经典，经常作为文献征引。布尔巴基讨论班的成果就是当时世界数学的最新成果。不过数学是年轻人的科学，所以布尔巴基成员50岁退休。

1970年左右，布尔巴基比较忽视的分析数学、概率论、应用数学、计算数学，特别是理论物理和动力系统理论开始蓬勃发展，而他们熟悉的代数拓扑学、微分拓扑学、多复变量函数论等相对平稳，数学家的兴趣更集中于经典的、具体的问题，而对于大的理论体系建设并不热衷，数学研究更加趋于专业化、技术化，在这种情况下，20世纪70年代以来，在论文中引用布尔巴基《数学原理》的人越来越少了。布尔巴基终于进入黄昏。

不过后来的数学重大进展，例如莫德尔猜想的证明、费马大定理证明，椭圆曲线是模曲线的完全证明等等都是布尔巴基数学的开花结果。在1980年以后出现的非交换几何、量子群理论、M.Gromov的群论和辛几何也少不了布尔巴基结构数学的框架。

布尔伯特说过“只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。”康托也说过，“问题是数学的心脏”。而会提重要的或有价值的问题，按照陈省身说法，需要审美能力。

中国数学家目前最大问题是没有提有价值问题的能力。

华罗庚说过，问题提得好，就解决一半。很多大数学家，例如陈省身，吴文俊，丘成桐，陈希孺等人，很欣赏在课堂上提好问题的学生，吴文俊先生甚至会赞不绝口：你真的是一个好问题，好问题，多遍重复后，有时会邀请提问题学生上讲台与他共同商量解决问题，让学生在黑板上解释自己想法。陈希孺先生甚至会在黑板上开始企图解决学生的问题，直接展示大师是如何做研究的过程。

估计这篇帖子能够看到这里的不多。有十个人就不错了。

问答部分（注意：排列不一定是按照时间顺序）

stranger：和原来看数学史之类的差不多，学的也忘的差不多了，陈卿老师说的对，我还是该学计算机

wxmang：你是陈卿的学生？如果去学计算机，岂不是要落入顾乃杰的魔爪？781现在在科大的还有数学系的陈卿，胡森，李平，计算机系的顾乃杰和数理统计系的侯波。陈卿号称数学系最帅的，会吃会玩，懂生活，五好男人，给他当博士生，应该很愉快。胡森搞数学物理，弦论，给他当博士生难度最大，因为这哥们知识很丰富，需要学生有几把刷子，不过如果你理学学得好，能够跟他谈得来，博士论文他可以帮你搞定。胡森在大学三年级被我忽悠看杨伯峻的《论语译注》，从此沉迷于中。这家伙是郭沫若奖学金获得者，当年是满分大王，5年本科，所有数学课程都是满分。李平是脾气最好，最平等和谐的，就算他的博士生错得一塌糊涂，他还会说你看这样好不好或者建议你这样改一下更好。顾乃杰是技巧大王，跟他混博士生不太容易，不过你如果喜欢足球，就好办了，他能放你一马。这家伙曾经在离散数学课堂上突然脑袋短路，大讲特讲足球战术，布局。侯波是对学生最好的老师，可以为自己学生的前途，向781同学寻求建议和咨询，学生都称为侯妈妈（她是胡森的夫人），她的学生

连恋爱问题都找她咨询。所以如果在侯波手下，学生是比较幸福的。

吃狼的绵羊：看完了，写的非常好。说下我个人的观点：80后的我从小也学习数学一直到工科研究生，虽然成绩还不错，高考和考研都在130以上（满分150），可是我之前一直总觉得数学是很没有意思的课程，就是不停的做题，把各种典型题目背下来，然后玩弄一些解题技巧，很多东西考完试就忘了。比如我读大学时就觉得概率很好玩，当时还有很多疑惑一直没解决，反正考试也过了就没管。后来去年底无意中听了几节可汗学院的课，突然觉得很有趣，这段时间就又把概率统计重新学习了一遍（只是最基础的浙大版本教材，到不了测度论这样的高度），正好忙总前段时间发了关于概率统计的帖子，感触很深。回忆之前我读大学时，就一直对很多东西很有疑惑，比如概率的公理化定义，当时觉得古典定义很容易理解，为啥要搞个公理化定义？老师没有讲，考试也不会考，这个疑问一直留到最近。直到我最近重新学习时，上知乎去翻，再后来看了忙总推荐的陈希孺的《数理统计学简史》（其实知乎的回答也基本来自于这本书），才觉得有豁然开朗的感觉。再比如正态分布，当时直接就是背它的公式，然后做题，为什么会有个正态分布？为啥它的公式是这样？也不知道。也是上知乎看讨论，和看了《数理统计学简史》才清晰理解。还有大数定律、中心极限定律，之前也不知道到底是啥意思，就是死记硬背，因为这两章其实考试也不怎么考。老师也不会太讲他们的核心意思。现在我倒觉得，数学最终要的是它背后的东西，而不是解题技巧或者计算什么的。。。感觉也不好说，有点类似哲学的意思吧，水平有限瞎写了一堆，呵呵

鹦鹉：所以忙总的帖子最后会说中国数学家提不出好问题。另外，所谓的奥数，在中国这里就变成了各种解题技巧了。

[已注销]：在生存压力和实用主义风气影响下，很少有人会去太深入地思考事物的本质问题。

荷兰猪：所以说好老师很重要。。。

wxmang：不是数学系的，的确不需要搞得太深，没必要，因为数学对其他学科就是工具。我们用计算机，并不不需要自己会造。

slyypp：学实分析，看书上的证明还好懂，做小证明还行，一到大题，一到大构造，两眼一蒙，只能哀叹，终究考不上中国第一流的几所高校，智商欠缺啊……

wxmang：学数学需要天赋的。

猬心：简单梳理一下，不知道正确否，1、集合论=公理化集合论+存在悖论集合论；公理化集合论以结构为出发点解构自身。2、集合论本身特性使得数学规律可解释/应用不同纬度空间，从而使得数学本身成为具有观测解释构建世界工具意义。由此引申，形象思维应该也有数学表达式，只是结构和集合尚未形成。

wxmang：你试试以解决的问题为核心来梳理，就能看出妙处。

wxmang：你没看懂。

wxmang：数学也需要熟能生巧的，很多东西学习多了，成为本能，就简单了。

qt12345678：看忙总的“瞎扯现代数学的基础”。感受如下：1. 数学是人对客观世界运动规律认识的总结。要点是认识到事物内部规律或者说元素之间的作用形式以及这种内部作用适用的边界条件。物理抽象后就是数学。2. 数学，或者说认识的特点就是抓主要矛盾，将事物的运行规律的细节抽象后形成逻辑并指导人的下一步行动。数学是最简单和普遍的表达形式。3. 从有限到无限，从离散到连续的认识过程，可能是人对世界的认识过程，先认为世界是离散的，在找到规律后认为连续，发现现有认识的规律不足以说明运动后再研究离散。关于数学原理的管理应用上：1. 每个企业，或者说组织，进行活动计算投入产出比的时候，应该是有内部特征变量的，如劳动生产率指标，市场占有率指标，人员构成指标，财务运行指标等，之间应该是相互联系的，可能可以构成一个矩阵，是否是这矩阵的秩就是这个组织的主要重点？或者说是基础变量，其他状态指标是可以通过这几个指标进行推断？2. 数学上的矩阵的乘积和企业合并是什么关系？矩阵的乘法不满足交换律，是否是说企业合并的主体不同对合并后导致的主要矛盾也不同？

wxmang：数学不是什么客观规律提取，现代数学完全可以独立于现实发展和存在。他是第三空间的东西。

zhangcz：我现在开始学大学的数学给自己长脑子了，下了您说的经济学书单，活的要明白些。。。

wxmang：读书要有人指导，不然容易成为移动书橱。

longriyao：忙叔，请问一下，您这些逻辑关系是怎么理清楚的啊？我也看了很多的数学史，没能达到您这种了如指掌的感觉啊。很赞同您的说法啊我也感觉数学是一个独立的世界，只是现在数学世界公理化的根基还不是很稳定，正在完善而已。

wxmang：有个好老师就够了，我们集合论的老师是熊金诚老师，他顺便把拓扑学也讲了，他的拓扑学讲义，至今仍然是科大数学系的经典。

东南光华通明：能提出有价值的问题，关键在于对相关问题凝神静气的理解与灵机一动的领悟。百思以求一解，为解决问题打开了一扇最可能的门。

wxmang：提问题需要创造力，我们大学培养创造力办法很少，甚至不重视。

乌金沙：我现在疑心，提问题的能力培养，除了运气外，可能更多依赖家传或师承体系，但这里头也有很多运气问题。站在这个角度，我觉得我们中国传统上极端重视历史这学科是有道理的。只是今人偏狭，以为历史就是故纸堆，技术史、技术社会史等等都不是历史。

wxmang：数学系好老师会教学生怎么提问题，当年陈希孺的学生白志东和赵林成（现在也是中国数理统计的大腕牛人，78年中国第一届博士），就在课堂上展示过怎么学习提问题。

刹那芳华：看着好像回到以前读书的时候。印象最深的是高数老师，总是拿着粉笔叽叽喳喳在黑板上推导。四块黑板（上下可移动，左右各两块）都密密麻麻，而且还会擦了第一块。阶梯教室坐满了人，第三排最难抢位置。。。还有离散数学的老师，集合论和拓扑是他课上打下的基础。学习零元和幺元，为了提高我们学习的兴趣，各种探案分析，还带着扑克，用数学方法快速算牌，

那些小技巧我在回家的火车上唬了不少人。。

刹那芳华：高数课我的笔记当初经常被同学借去抄录，后来有复印，也被大量复印，视为班级小宝典，也是我的小得意。。。当初老师四块黑板轮流使用，我边听边记边理解，黑笔是板书，还用红笔标出重点，蓝笔是老师的话。甚至还记下其他同学提问及回答。复习看看笔记，就像又上了一次课。

wxmang：好学生。华罗庚的名著《高等数学讲义》就是女同学的笔记出版。华罗庚自己讲课是没有任何书面讲义和备课准备的，上来问第一排女同学上次课讲到什么地方了，就开始往下讲。这才是大师风范。

ilktym：忙总能多给我们讲讲这些大师平日里的生活是怎么样的吗？究竟大师和普通人的境界在何处不同?对人，对事，对自己，对世道。以前的文章倒是能零零星星看到一点对大师们的描述。

wxmang：没什么区别，也要吃饭睡觉，也要发脾气，也要骂人。

东南光华通明：法国的数学实力不容忽视，虽然法国是个容易在很多方面掉链子的国家。拥有那么些顶尖数学家，是法国值得骄傲之处。

wxmang：法国数学一直是大师辈出的。这个传统太强大。我们数学就不说跟美国，德国，法国，英国，俄罗斯比，甚至还不如以色列，日本，匈牙利，捷克，波兰等等。

slyypp：日本人比中国认真。看过老版的日本中学数学教材和教辅，编纂地更成体系，细节也更透彻。《高等数学讲义》的前言，华罗庚说是王元帮助整理的，原来是前排女同学，哈哈。

wxmang：日本数学有自己的传统。Kobayashi和Nomizu的两卷本Foundations of Differential Geometry是微分几何的经典教材。1960年仅37岁就因病去世的Yamabe是当时几何分析领域的绝对权威。Oka在二十世纪三，四十年代解决了一系列多复变函数论的难题，代数数论中Iwasawa理论就是岩泽健吉的杰作，成为后来Wiles证明费马大定理的主要工具之一。高木贞治创立类域论，合作解决Hilbert第9问题。永田雅宜(M.Nagata)给出Hilbert第14问题的反例。谷山丰-志村五郎(Taniyama-Shimura)猜想最终导致了费马大定理的完全证明。日本获得菲尔兹奖的有3位：小平邦彦；广中平祐和森重文。日本获得沃尔夫数学奖有3位：伊藤清，佐藤幹夫，小平邦彦。王元只是把女同学的笔记收集，校对而已。王元当时是华罗庚的助教。

香辣蟹：法国数学很强大，大学校预科的难度和深度就基本比肩普林斯顿的数学系硕士课程了。很多人有误解：美国人法国人不是数学不好，算数都算不明白吗？

wxmang：柯朗说过一句名言：忘掉你学过的中学数学吧，他们其实不是数学，只是看图识字。所以普通人是不可能知道什么是真正数学的。

东南光华通明：数学看似无用，实则大用，是真有智慧的人才能从事学术研究，是真能实用的技术加速器。

[已注销]：我觉得如果从有用无用出发看待数学，也许可以学好数学，但很难成为好的数学家。数学和音乐一样，都是可以触动人类心灵核心的。

wxmang：除了职业数学家，大多数人看数学，其实是检验自己大脑水平的极限（不限于逻辑能力，也有直觉能力）。

[已注销]：逻辑能力的极限是数学，但直觉能力的极限是不是数学，我比较怀疑

wxmang：你显然对数学的猜想不熟悉。

所有数学猜想都是自觉能力的极限产物，例如我们熟知的四色定理；庞加莱猜想；卡塔兰猜想；希尔伯特-史密斯猜想；西塔潘猜想；Abc猜想；欧拉猜想；考拉兹猜想(角谷猜想)；梅森素数分布猜测；阿廷猜想(新梅森猜想)；哥德巴赫猜想；孪生素数猜想；克拉梅尔猜想；哈代-李特尔伍德第二猜想；六度空间理论；P与NP问题；杨-米尔理论；黎曼假设等等。其实数学家寻找问题，经常依赖直觉，或者只有直觉可以依赖，就像在浓雾中找出路一样，只有直觉才有用。

例如著名的希尔伯特问题就是直觉的产物。(1)康托的连续统基数问题；(2)算术公理系统的无矛盾性；(3)只根据合同公理证明等底等高的两个四面体有相等之体积是不可能的；(4)两点间以直线为距离最短线问题；(5)拓扑学成为李群的条件(拓扑群)；(6)对数学起重要作用的物理学的公理化；(7)某些数的超越性的证明（如果α 是代数数，β是无理数的代数数，那么$\alpha\beta$一定是超越数或至少是无理数(例如，$2\sqrt{2}$和$e\pi$)；(8)素数分布问题，尤其对黎曼猜想、哥德巴赫猜想和孪生素数问题；(9)一般互反律在任意数域中的证明；(10) 能否通过有限步骤来判定不定方程是否存在有理整数解；(11)一般代数数域内的二次型论；(12)类域的构成问题；(13)一般七次代数方程以二变量连续函数之组合求解的不可能性；(14) 某些完备函数系的有限的证明（域K上的以$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为自变量的多项式$f_i(i = 1, \ldots, m)$，R为$K(X_1, \ldots, X_m)$上的有理函数$F(X_1, \ldots, X_m)$构成的环，并且$F(f_, \ldots, f_m) \in K[x_1, \ldots, x_m]$试问$R$是否可由有限个元素$F_1, \ldots, F_N$的多项式生成）(15) 建立代数几何学的基础；注——舒伯特(Schubert)计数演算的严格基础；(16)代数曲线和曲面的拓扑研究；(17)半正定形式的平方和表示；(18)用全等多面体构造空间；(19) 正则变分问题的解是否总是解析函数；(20) 研究一般边值问题；(21) 具有给定奇点和单值群的Fuchs类的线性微分方程解的存在性证明；(22)用自守函数将解析函数单值化；(23)发展变分学方法的研究。

这23个凭直觉给出的问题，引领了100 年数学发展方向。

[已注销]：对这些猜想至少有所耳闻。但它们依然是从具体事物抽象归纳而来的，在某些更基本假设的框架下有效的局部问题。或者说，数学本身所遵循的逻辑是绝对的，还只是人类的某些未经（无需）推敲的最底层的直觉？如果是后者，那数学也不过是某种主观唯心学说的阐发罢了。当然，我也不是唯物主义者，我找不到脱离自身局限观察世界的办法。

wxmang：你完全不了解数学，所以我没法说清楚。

香辣蟹：看完了，确实如忙书所说，工科生学的高等数学确实还是初等数学。我当年机缘巧合，学了数学系的集合论，数学分析I，II，拓扑学，实变分析，泛函分析，复变分析，概率论。得到的结论是，我还是比较去搞控制和系统吧。纯数学，学这些课程（特别是泛函和复变）就觉得费劲了，当代前沿的岂不是更困难？但是我学概率论倒是非常轻松愉快，哈哈！

wxmang：其实就是手熟尔。

土豆烧牛肉：很多概念在那汤松版的《实变函数》里讲得挺详细，比徐森林版的好些。

wxmang：徐森林的书不好读，尤其他写的《流形上的微积分》。

Cousteau：请教下忙总怎么看直觉学派和Brouwer？数学学科在一个方向上

或一种认识观点的基础上上火树银花般产生很多成果并不意味着它的基础更加牢固，也不意味着我们更深入地理解了数学本身。一个不恰当的比喻就像古希腊罗马文明很灿烂，但在中古时代阿拉伯的快马弯刀面前，少量被接受并继承了过来，很多就永远湮没了几乎不再提起。

wxmang：数学的很多重要定理都是直觉的结果，丘成桐在数学所介绍他获得菲尔兹奖的工作时，就说完全是灵机一动，就像写诗来了灵感，瞬间突破。直觉是主要的动力。这也就是吴文俊先生机器证明走入死胡同的原因：没直觉。

长湖：还好我选修过离散数学，基本上能看下来。完全没想到集合论有这么重要的地位。忙总能不能再写个群论的科普？

wxmang：等过几天，我介绍一下抽象代数，这玩意太重要了，是人思维方式的框架。

土豆烧牛肉：能不能顺便讲讲泛函的思想？

wxmang：可以，不过要想介绍实变函数论才行（勒贝格测度），不然无法介绍，介绍实变函数，就得先介绍微积分的核心问题：极限，变换，逼近和分解，所以只能慢慢来，篇幅太大。

lotus：非常期待下文。一点小小的补充：《关于用三角级数表示函数的可能性》应该是黎曼1953年的求职论文，也非常有价值。但他在1954年的就职演讲共准备了三个题目，高斯选择了黎曼自己准备最不充分的《关于几何学基础的假设》，十年前写论文时看过英文版，非常伟大，而且写的非常清晰。

wxmang：黎曼的确是伟大的，其实大数学家把握要点的能力都是超强的。都能够直接了当达到本质，不需要任何绕弯子。笨蛋才在外围转圈圈进不去。

心宿二：看忙总的文章，等于复习了一遍。本科初学的时候很震撼，原来数学的抽象还能再抽象。读研学习完拓扑之后，再读道德经就豁然开朗了。

far8008：聊聊吧，为什么和道德经有关系

心宿二：两者很多可以互相提供思路的东西，比方无和有（忙总已写），体和用（不同领域的数学有同构结构）等。经用文字和逻辑表达，数用符号语言演算展示，两者用不同的工具来讲述一些共通的道理。两者互为指引，因此豁然开朗了。

wxmang：抽象的过程就是去除物质思想载体的过程，例如数学从线性代数的欧几里得空间抽象到拓扑空间等价与狭义相对论抽象到广义相对论，因为都把度量抽象掉了，只留下最本质的的东西。抽象代数从计算过程（因式分解或解方程都是一种计算过程）想抽象到只考虑结构与经典理学抽象到量子力学等价，都把计算过程抽象掉，只考虑结构特征。

baogesj：工科的本科生当年看《古今数学思想》，看到第二册变分法时，就看不懂了。忙总觉得变分是不是和微积分一样，是初等数学的伟大工具？

wxmang：变分法需要泛函分析基础，变分法的核心问题就是求泛函的极值函数和相应的极值。泛函的直观定义就是函数的函数。稍微严格一点定义是：给定一个函数集合Y，若对Y中的每一函数y按某一确定的规则J有一确定的实数$J[y]$与之对应，就说在集合Y上给定了一个泛函J。极值问题就是：若泛函J在Y中的y_0处取的值$J[y_0]$是J在Y中所有的y处所取值$J[y]$中的最大（小）的一

个，则说$J[y_0]$ 是最大（小）值，y_0 称为最大（小）值函数。设$Y^{\vdash}$是Y中在y_0附近的函数组成的子集，若$J[y_0]$是J在$Y^{\vdash}$上取的最大（小）值，则称$J[y_0]$是极大（小）值，而y_0称为极大（小）值函数。极大（小）值统称极值，极大值函数和极小值函数统称极值函数。

土豆烧牛肉：最后一段为何要强调范围是$\{Y^{\vdash}: Y$中在y_0附近的函数组成的子集$\}$呢？和在Y上取值有何不同？

wxmang：极大值是指在某个区域内，在一个小范围内的函数值均比该值小。而最大值是指在某个区域内，所有的函数值均比该值小。极大值可能是最大值，也可能不是最大值，两个是不一样的概念。

包子：忙总，现代数学会有重要的应用出口吗？对大部分搞科研的来说确实数学是“工程师的计算工具，物理学家的建模和解释工具”，而且初等数学似乎就够用了。还是说数学家根本不削于考虑应用场景？

wxmang：你说的是工程师，其实工程师不懂数学也行，只要会用计算软件即可。当时物理学家，化学家不懂数学不行，例如不懂群论，就不懂量子力学，不懂泛函分析，就不可能懂最优控制，变分，傅利叶分析，所以也就不可能懂规范场论。其实只要时对称的科学，例如量子力学，量子化学，都不可能离开群论。现在物理学，例如凝聚态物理学，基本上代数几何和代数拓扑是标准配置或者说最低配置，搞宏观经济学，泛函分析+代数拓扑也是标准配置。

柯贤达：工程师有时候也需要数学基础，应用数学解决问题比较少，但实现算法要求能看懂。我最近在优化一个基础软件的加密算法，看论文时涉及到抽象代数的基本概念，比如galois field伽罗瓦域。虽然学过一点简单的离散数学。但感觉自己并没有深入理解，照葫芦画瓢可以，但不能理解为何群域环等这些概念被抽象出来，有啥用。没有一种直觉/简洁的理解。所以很期待芒总对抽象代数的介绍。

wxmang：要了解伽罗华理论，必须了解拉格朗日对代数方程的工作，而了解伽罗华理论，才能真正理解群，环，域是怎么来的，才能理解数学从计算变成研究结构这一步是怎么跨出来的，才算摸着现代数学的大门了。传统数学到现代数学（从计算到结构）的关键一步就是伽罗华理论。豆瓣不能贴数学公式，写这一部分，不能没公式（因为必须介绍代数方程求解的历史过程，才能看出群论的概念其实是水到渠成自然产生的），而word上的公式到豆瓣上，就会成为乱码，这个比较痛苦。

必须勤力：我想出来的一个可行性方案：因为豆瓣主贴可以贴照片的，所以如果把word上写好的文章，用电脑截屏，依次贴上来即可。

wxmang：这个其实更麻烦，还得去找图床，而图床又是不稳定的，随时就没了。还是慢慢打字吧，用可能接受的模式写，实在不行，只能口水话解释。

必须勤力：不用图床的，豆瓣发帖时用“添加图片”这个功能从电脑里选取粘贴，跟粘贴文字一样方便，这个跟以前用过的几个论坛不一样的。只是只能用于主贴，跟贴不能发图。

Cousteau：Galois那个美国和苏联都有两种以上风格的相关教材，（莫宗坚的代数学也没用放过，不过写得不很清楚，阿亭的好一些）。我理解的Galois的原始工作，就是他给出了一些现代代数学基本概念的典型事例，并做出了一个杰出的应用，忙总可以先把几个概念单列出来如分裂域、自同构群等等做介绍。拉格朗日的先期工作其实有不少很清晰的科普文章。另：苏联的Arnold为中学生写过一本《Abel’s Theorem in Problems and Solutions》，很清

楚，可惜还没见到翻译版本。http://vdisk.weibo.com/s/yTVIsAnaH9Mtu

wxmang：其实你也可以写。我不是代数专业的，我写运筹学或者管理科学可能更胜任愉快。伽罗华本质工作是给我们打开一扇门：数学核心不是计算，而是结构。研究结构比计算重要，结构可以让我们超越常识，进入一个抽象思想能够达到的极限。可以说，伽罗华的工作，让我们知道了抽象是一个人类超越自我的工具，也是一个人类逼近知识边界的工具，人类因此成为货真价实的万生之灵，成为地球上仅次于上帝能够触摸超越常识边界的种群。其实这也是我喜欢看数学和理论物理书籍（当然是菜鸟级别的，不入流）的原因，因为他们的方法，思想，成果让人震撼，让人感到人类抽象能力的伟大。

曦义：忙总其实抽象思维不限于数学领域，乃是最独特的人类大脑处理信息方式，从一堆不相干的不同事物中抽提出它们“同构”的本质。这个过程其实是一种信息压缩。不远的未来，我想认知神经科学也会直接揭示出人类大脑的这种运作模式，并加以模拟，实现彻底替代人脑的人工智能。在我们的文化中，最早探讨这种思维模式的是先秦时代的名墨家，比如“白马非马”“命题，在一大堆白色红色黑色的马匹中，抽离出马的形象这一本质属性（抛弃马的颜色这种”非本质“的属性）。只可惜这种思维模式没有进一步发展下去，于是整个古代中国一直仅仅停留在个别现象描述的阶段，而没有发展出一般化、抽象化描述世界的科学体系。甚至直到今天，官方哲学也只是强调实证的重要性，而忽略抽象概念构建的重要性。

wxmang：中国古代的逻辑学与现代逻辑学不同。不具备数理化的基础。

[已注销]：忙总了解印度人的因明学吗？

wxmang：不了解。

九曲通洋：忙总你可以用画图，然后贴图

wxmang：其实基本内容书上都有，我只是写点个人感受而已。这部分主要有一些置换需要描述，这玩意画图也没用，他就是一些数学变换的初级符号。

wxmang：其实国内的教材也是多种多样的，有各种流派的（十有八九都是山寨德国，美国好苏联的）。不过普及类的抽象代数教材很少，大多数是贾克波逊或者范德瓦尔登模式的。

塔里木河：忙总，在实数集合，与某个整数是否有最接近的某个数值，这个数应该是无理数还是有理数？或者无法确定？

wxmang：实数集合包含整数集合。不过布尔巴基学派构造整数是用公理方法，不是逼近方法。逼近是传统数学分析思想。

土壤：当年老师讲伽罗瓦死于决斗，学群论的时候，回想这位天才，心里总嘀咕，自己肯定没有如此剧烈的感情，能学好吗。

wxmang：为一个妓女决斗而死，一个超级数学天才，20岁就创造出数学从计算跨越到结构研究的妖孽，可能真的是天命，就像中国的贾谊，王弼，王勃，等等天才都是如此，一道流星闪过天空，瞬间消失。

stevezhouxj：抱歉，歪个楼。忙总，最近全国的环保督察活动非常厉害，不同于以往的走过场或软弱无力，这次的环保督察活动受到各地方政府的大力甚至是超常配合。而地方政府的手法基本都很类似：一刀切。管你小企业是否已经有了环保测评报告，全部断水断电。什么养殖，小五金，小铸造锻造件，小化工等统统全部切断电源。这些小企业目前完全处于停工停产状态。而从地域方面，不管远在西北还是东部沿海，都有波及。这次是刮得什么风？难道全国的环境整治真到了危如累卵的地步了？还是因为这次的行动还是新的官场现

象？就像去年某些省份街头抽查行人的24字和谐价值观，背不过就不让走，要当场学习，背过了才让走，这次环保风也是这种将中央精神“夸张扩大”表现的形式吗？还是说北京的新市长的背景有这么大辐射影响力？！这些小企业，很多都属于低端，但就您所讲，中国产业升级的最终目标是要在高中低全吃，中低端主要解决就业问题。虽然目前的环保问题确实很大，但只要制定个详细的5年计划或10年计划，总会逐步改善，但如这次的“一刀切”的方法，虽然粗暴简单好用，但对小企业及相关行业的伤害不小。请问您对此有什么看法，方便讲一讲吗？

路人丁：去产能而已，供给侧改革

JohnMu的地盘：确实很蹊跷。以前这种吃力不讨好的事情地方政府总是阳奉阴违，能糊弄过去就糊弄过去，都指望死道友不死贫道。现在却执行的这么卖力，而且是所有的地方。

stevezhouxj：我个人感觉，其实过去几年的去产能之类，主要目的是将落后的民营小企业淘汰，壮大国企亲儿子在市场上的占有率。比如，过去几年的煤炭、钢铁产能过剩，国企煤矿和钢厂们亏损严重。去产能后，小煤矿，小钢铁厂纷纷关闭，而现在国企煤矿和钢铁厂纷纷转为盈利。而近期钢铁价格大涨，对应的钢铁库存也直线下降。所以，这个去产能过程其实基本完成了帮国企扩大市场份额进而盈利的任务目标。而这次的环保督察，说实话，有些地方都是已经乱作为了，比如有些地方甚至禁止农村普通村民养猪，农民养猪的传统都几百年了，现在却说要禁止养猪。更别提什么民间小砖厂、采砂场之类的传统环境破坏生产了。而且在微信群里，我都看到这样的视频：某地群众举着“要环保更要民生”的标语都搞上街散步活动了，都散步到当地市政府了。至于这次的风向，我也纳闷为啥地方政府一个个像打了鸡血一样，用“一刀切”的手法搞环保搞得雷厉风行？以本人的简单知识和智商，我只能这样猜测原因：1.北京新市长的环保背景，给官场提供了一个信号，对各位有志于更近一步的官员，提出了一个新的上位方式和出政绩的通道。就如当年计划生育刚施行时，山东某地官员就用“百日无孩”的一刀切方式染红自己的顶戴花翎一样。2.过去几年的纪委巡视组威力明显，各地不主动维护中央权威的，都被办进去了，这不重庆那位刚进去了，罪名之一就是清除XX余毒不力，所以各地人人自危，一看派出了环保督察组，那就干脆大办特办，用力过猛都不要紧，就怕用力不够。3. 再过几个月，就是金秋10月了，马上要办新一届运动会了，要从各方面给运动会提供良好环境，包括天气环境，所以这是政治任务。4.这是新时期的“浮夸风”或者“反右扩大化”，只不过以环保的形式表现出来，本质都是地方消极对抗。5. 其他原因，本人实在想不出。（注：为啥本人关心这个事，因为我是做小五金出口的，现在工厂停工了，我们也受到很大影响，所以关心，打扰各位，见谅）

wxmang：当年国企大下岗也一样，只要拿乌纱帽做威慑，什么花样都会出来。

狮子山：文科生看完。具体内容毫无概念，但能进一步理解忙总说的数学有助于透过现象抓本质和精细化思维，本文也确实体现了忙总牢牢抓住本质，以及框架性思维的功力。结合忙总经济野球拳、复杂系统等文章，看来数学确实不能包打天下，或者说预测复杂事物仍有很大的局限性，有时还是要靠直觉、勇气和运气。非常有帮助，非常感谢忙总。另外忙总提到吴文俊先生机器证明遇到没有直觉的障碍，这是否也会是现在AI发展的一个障碍，还是说现在AI的

发展可以帮助克服这一问题？

wxmang：我还是接受华罗庚当年批评吴文俊搞数学机器证明的说法：数学的核心价值不是在既定的概念体系下证明几个定理，而是创造一种概念体系，因为概念体系是人类对现实世界理解的进步。数学机器证明永远不可能创造概念体系。按照华罗庚的说法，数学机器证明只是民工，矿工，而大数学家应该创造概念体系，为人类理解现实世界作出贡献，而不是去挖矿。所以华罗庚认为吴文俊从此将退出世界大数学家舞台。华罗庚说对了。吴先生其实从离开拓扑研究后，一事无成。目前为止，华人数学家里面，能够名列人类有史以来最伟大的100名数学家，只有华罗庚+陈省身二人而已。

castigliano：忙总，您这么说是否可以理解为证明猜想之类的工作也是民工矿工等级的贡献？

大脚丫：定理也好猜想也罢，都是以提出的人命名的，不是以证明者命名的。不过和盖房子一样，有人画图纸有人砌砖块，都是工作的一部分，但是没有人把砌砖的人叫建筑大师，可是没有他们房子就不是房子而是图纸。如果做不了大师就只好老老实实地当矿工了。

wxmang：看问题深度和在解决问题中创造性的发明，例如伽罗华在证明一般五次以上方程不可代数解中，创造出群论，就不是民工，而是顶级大师。

老燕：当年复变函数学了个蒙差差，现在要是介绍实变函数不知能否看懂了。实变函数是国内研究生课程吧。另一门是泛函分析，反正当年六系是这样设的。对了，复变函数是殷慰萍老师教的。感觉比史济怀，张声雷，还有严镇军，季孝达几位老师有差距，似乎是表达能力上的差距。

wxmang：复变函数是数学分析里面最简单的，如果微积分的难度是0，那么复变函数的难度是-1，泛函分析难度是1，实变函数难度是2。数学分析最难的课程是实变函数，科大数学系的说法是：实变学十遍还是学不完。复变函数主要讨论解析函数（全纯函数，也即定义在复平面C的开子集上并在每点复可微。这是比实可微强得多的条件，它表示函数无穷可微并可以用它的泰勒级数描述）和亚纯函数（复平面开子集上除一个或若干个孤立点集合之外的区域全纯的函数），处理的函数性质比微积分的好得多。你觉得不好学，我想有两个原因，一个是课时不够，没有介绍复变函数主要概念的实际背景和来源，所以理解不了为什么是这样；第二个原因是几何基础不够，复变函数是微分几何和拓扑与数学分析之间的桥梁，不了解几何背景，很难理解很多技巧的理所当然。

复变函数真正的概念来源于法国达朗贝尔在流体力学中处理连续体积分问题（也即著名的达朗贝尔-欧拉方程，你有兴趣可以上网查），然后柯西和黎曼推广到柯西-黎曼条件，这就是复变函数奠基概念来源。复变函数主要用途是计算复杂函数，例如茹柯夫斯基用复变函数计算飞机气动外形。现在易经大量用于微分方程、积分方程、概率论和数论等的计算，现在的流体力学和固体力学的薄壳理论计算基础就是复变函数。复变函数与几何的联系，起源于黎曼曲面理论，黎曼曲面理论是复变函数域和几何间的一座桥梁，能够使人们把比较深奥的函数的解析性质和几何联系起来，也是拓扑学的桥梁。现在复变函数干脆一个分支就是几何函数论，复变函数可以通过共形映象为函数的性质提供几何说明。例如导数处处不是零的解析函数所实现的映像就都是共形映象，共形映像也叫做保角变换。共形映象在流体力学、空气动力学、弹性理论、静电场理论等方面都得到了广泛的应用。总的来讲，复变函数是一种处理连续函数的计算

技巧，在数学概念创造上，价值远远不能与实变函数和泛函分析相提并论。不过工程师必须熟练掌握复变函数，因为这是一门计算利器。

wxmang：科大数学系本科必修课就有实变函数和泛函分析，而且用的教材极难（徐森林老师的），这本教材难度相当于美国二流大学数学系博士生专业课教材。所以当年我们数学系本科教材难度说是天下第一系（最过分的是李炯生老师的《线性代数》，号称亚洲最难教材，给大一新生介绍微分流形的常庚哲老师的微积分教材都算良心教材了，因为李炯生老师讲线性代数，同时在介绍交换群和域）。