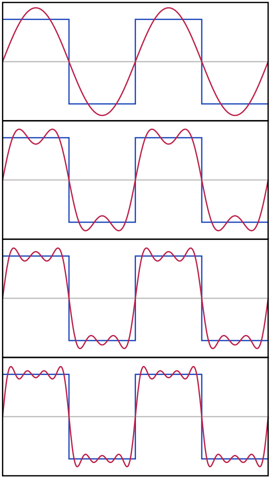
積分

何震邦 <jdh8@ms63.hinet.net>

2014 年 12 月 1 日

積分的用途

- 求面積與體積
  - 求轉動慣量
- 解微分方程
  - 變力作功
  - 訊號處理



區間的分割

閉區間 $[a, b]$ 的一個**分割**是指在此區間中取有限的序列 x_i 使得 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$。每個閉區間 $[x_i, x_{i+1}]$ 叫做一個**子區間**。

黎曼–達布和

設 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是有界函數，且 $P : x_0, \dots, x_n$ 是閉區間 $[a, b]$ 的一個分割。設

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

f 在分割 P 下的上黎曼和為

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

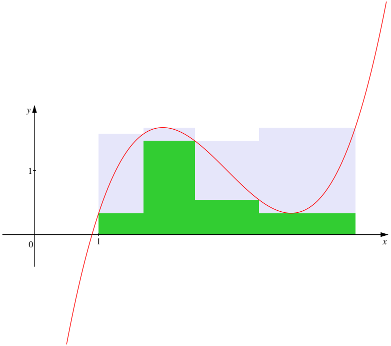
而下黎曼和為

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \left(x_{i+1} - x_i\right).$$

黎曼–達布積分

f 的**上達布積分**是所有上黎曼和的下確界，而 f 的**下達布積分**是所有下黎曼和的上確界。若 f 的上下達布積分相等，則我們說 f 是黎曼–達布可積，且定義此積分為

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$



微積分基本定理，第一部份

設 f 是在閉區間 $[a, b]$ 中連續的實函數。設 F 在區間 $[a, b]$ 中定義為

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

則 F 在 $[a, b]$ 連續，在開區間 (a, b) 可導，且 $\forall x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x).$$

微積分基本定理，第二部份

設 f 和 F 在閉區間 $[a, b]$ 上有定義，且 F 的導函數為 f，即 $\forall x \in [a, b]$

$$F'(x) = f(x).$$

若 f 在 $[a, b]$ 黎曼可積則

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

符號積分的困難

- 初等函數的導函數仍是初等函數。
- 初等函數的反導函數就**不一定**是初等函數。

換元積分法

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Proof.

設函數 F 使得 $F'(x) = f(x)$。

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\,g'(t).$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

分部積分法

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Proof.

$$(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$
$$\int_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$
$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx. \qquad \square$$

冪函數與指數函數的積分

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \qquad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)}.$$

$\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - x$

Proof.

設 $u = \ln|x|$，則 $du = \dfrac{1}{x}\,dx$。

$$\begin{aligned}\int \ln|x|\,dx &= \int u\,dx \\ &= xu - \int x\,du \\ &= x\ln|x| - \int dx \\ &= x\ln|x| - x.\end{aligned}$$

□

三角函數的積分

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

$$\int \tan(x)\,dx = \ln|\sec(x)|$$

$$\int \cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)|$$

$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\tan(x) + \sec(x)|$$

$$\int \csc(x)\,dx = -\ln|\csc(x) + \cot(x)|.$$

$\int \tan(x)\,dx = \ln|\sec(x)|$

Proof.

設 $u = \cos(x)$。

$$\begin{aligned}\int \tan(x)\,dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \\ &= \int -\frac{1}{u}\,du \\ &= -\ln|u| \\ &= \ln|\sec(x)|.\end{aligned}$$

$\square$

$\int \cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)|$

Proof.

設 $u = \sin(x)$。

$$\begin{aligned}\int \cot(x)\,dx &= \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx \\ &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u| \\ &= \ln|\sin(x)|.\end{aligned}$$

□

$\int \sec(x)\,dx = \ln|\tan(x)+\sec(x)|$

Proof.

設 $u = \tan(x) + \sec(x)$。

$$\begin{aligned}
\int \sec(x)\,dx &= \int \frac{u\sec(x)}{u}\,dx \\
&= \int \frac{\sec(x)\tan(x) + \sec(x)^2}{\tan(x)+\sec(x)}\,dx \\
&= \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln|u| \\
&= \ln|\tan(x)+\sec(x)|.
\end{aligned}$$

□

$\int \csc(x)\,dx = -\ln|\csc(x)+\cot(x)|$

Proof.

設 $u = \csc(x) + \cot(x)$。

$$\begin{aligned}
\int \csc(x)\,dx &= \int \frac{u\csc(x)}{u}\,dx \\
&= \int \frac{\csc(x)^2 + \csc(x)\cot(x)}{\csc(x)+\cot(x)}\,dx \\
&= \int -\frac{1}{u}\,du \\
&= -\ln|u| \\
&= -\ln|\csc(x)+\cot(x)|.
\end{aligned}$$

□

雙曲函數的定義

$$
\begin{aligned}
\cosh(x) &\triangleq \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\sinh(x) &\triangleq \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\tanh(x) &\triangleq \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\
\coth(x) &\triangleq \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \\
\operatorname{sech}(x) &\triangleq \frac{1}{\cosh(x)} \\
\operatorname{csch}(x) &\triangleq \frac{1}{\sinh(x)}.
\end{aligned}
$$

雙曲函數的性質

將三角函數的公式以 cos 和 sin 展開，若欲轉換為 cosh 和 sinh，則需每逢 2 個 sin 相乘**變號**。

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

$$\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x).$$

原因：

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

雙曲函數的導函數

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x)\\
\frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x)\\
\frac{d}{dx}\tanh(x) &= \operatorname{sech}(x)^2\\
\frac{d}{dx}\coth(x) &= -\operatorname{csch}(x)^2\\
\frac{d}{dx}\operatorname{sech}(x) &= -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)\\
\frac{d}{dx}\operatorname{csch}(x) &= -\coth(x)\operatorname{csch}(x).
\end{aligned}
$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Proof.

設 $y = \operatorname{arsinh}(x)$，則 $x = \sinh(y)$。

$$\frac{dx}{dy} = \cosh(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

□

雙曲函數的積分

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)$$

$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)$$

$$\int \tanh(x)\,dx = \ln(\cosh(x))$$

$$\int \coth(x)\,dx = \ln\left|\sinh(x)\right|$$

$$\int \operatorname{sech}(x)\,dx = \arctan(\sinh(x))$$

$$\int \operatorname{csch}(x)\,dx = \ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

$\int \operatorname{sech}(x)\,dx = \arctan(\sinh(x))$

Proof.

設 $u = \sinh(x)$。

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sech}(x)\,dx &= \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)^2 + 1}\,dx \\ &= \int \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \arctan(u) \\ &= \arctan(\sinh(x)).\end{aligned}$$

$\square$

Proof.

設 $u = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$。

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{csch}(x)\,dx &= \int \frac{1}{2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx \\
&= \int \frac{\operatorname{sech}\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx \\
&= \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln|u| \\
&= \ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right|.
\end{aligned}$$

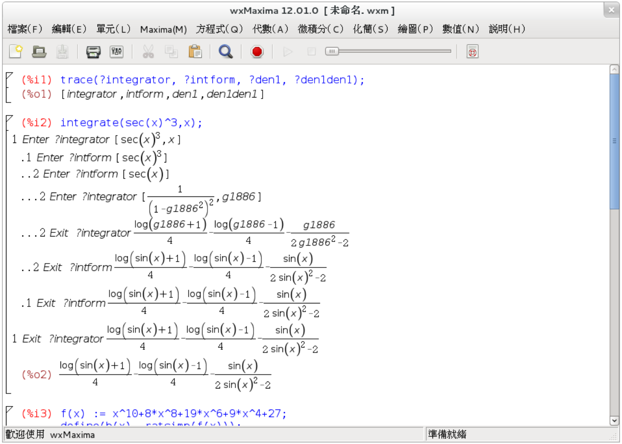
□

Maxima——一套强大的電腦代數系統

- 原始碼可在許多系統上編譯，包括 Windows、Linux、Mac OS X。
- 它的前身 Macsyma 是 1960 年代由 MIT 研發的。
  - 感謝其自由開放的傳統，目前大型商業套件如 Maple 和 Mathematica 也是以它為藍本。
- Maxima 是 GPL v2 下的自由軟體，我們可自由使用、研究、散布、改良。
  - 我們可以站在巨人的肩膀上，不必重新發明輪子。

wxMaxima——Maxima 的介面

多語言圖形介面，含中文，還有漂亮的輸出。



Thanks for your attention!