

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

微積分的基石

函數、極限、初等函數

何震邦 <jdh8@ms63.hinet.net>

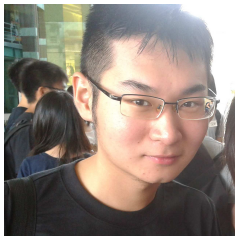


2012 年 10 月 17 日

關於我

微積分的基石

何震邦



函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ jdh8@ms63.hinet.net
- ▶ jdh863@gmail.com
- ▶ 我的臉書
- ▶ 0918-319823
 - ▶ 真是充滿火藥味的號碼

函數就像射飛鏢

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 飛鏢只有一個鏢頭，函數的值是唯一的
- ▶ 可以說函數是一種特殊的映射（mapping）
 - ▶ 映射就沒有啥限制了，可以用霸王鏢

檔案: /home/jdh8/invSqrt.c

1 / 1 頁

```
float invSqrt(float x)
{
    float t;
    int32_t i;

    t = x * 0.5f;
    i = *(int32_t*) &x;
    i = 0x5f3759df - (i >> 1); // evil floating point bit level hacking
    x = *(float*) &i;          // what the fuck?
    x = x * (1.5f - (t * x * x)); // 1st iteration
    //x = x * (1.5f - (t * x * x)); // 2nd iteration, this can be removed

    return x;
}
```

誰規定函數只能有一個輸入值？

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

► $\text{add}(x, y) := x + y$

► $\text{mul}(x, y) := xy$

► $B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

以函數的形式分類

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 線性函數
- ▶ 多項式
- ▶ 有理函數
- ▶ 代數函數
- ▶ 初等函數

線性函數

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

Definition

線性函數就是具有可加性與齊次性的函數

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(cx) = cf(x)$$

- ▶ 最簡單的例子，乘號！它是雙線性！
 - ▶ 左邊也線性，右邊也線性，不就雙線性？
 - ▶ 乘號不一定要有交換律噢！像外積跟矩陣乘積

多項式

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

Definition

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

- ▶ 多項式可以表示為自變數與常數有限次的加、減、乘
- ▶ 多項式是平滑函數
 - ▶ 平滑函數無窮可微
 - ▶ 可微必連續

有理函數

微積分的基石

何震邦

Definition

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

其中 P 和 Q 是多項式，且 $Q \neq 0$

- ▶ 有理函數可以表示為自變數與常數有限次的四則運算
- ▶ 在微積分上，我們常把有理函數分解成部份分式
 - ▶ 微分跟積分都是線性算子
 - ▶ 處理 $\frac{1}{ax+b}$ 比 $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ 容易多了！

$$\frac{x^3 - 5x + 88}{x^2 + 3x - 28} = x - 3 + \frac{32x + 4}{x^2 + 3x - 28} = x - 3 + \frac{20}{x + 7} + \frac{12}{x - 4}$$

代數函數

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

Definition

代數函數 y 是以下函數方程的解，其中係數 $a_i(x)$ 都是整係數多項式：

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_0(x) = 0$$

- ▶ 代數函數可以表示為自變數與常數有限次的加、減、乘、除和開方的運算（有理運算）
- ▶ $\sqrt{x^2 + 1}$ 是代數函數，但不是有理函數

初等函數

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

Definition

初等函數是由冪函數 (x^a)、指數函數、對數函數、三角函數、反三角函數與常數經過有限次的有理運算和/或函數複合所產生

- ▶ 初等函數就是可以用解析式表示的函數
- ▶ $\lfloor x \rfloor$ 不是初等函數
- ▶ $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 不是初等函數
- ▶ 但 $|x|$ 不小心在實數域上是初等函數（為什麼？）

為什麼我們需要極限？

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 我們很容易就能從自然數建構整數，再從整數建構有理數
- ▶ 接下來，人類學會建構代數數。代數數可以是整係數多項方程的解
- ▶ 但是有些不是代數數的數（超越數）就自動跑出來了，像是 e 、 π 、 $2^{\sqrt{2}}$ 等
- ▶ 對於這些數，我們如果要取值，只能用逼近的

正實數的實數幕

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 正實數的有理次幕，可以用開方來獲得
- ▶ 但是 $2^{\sqrt{2}}$ 一定是開不出來的啦！
 - ▶ 注意，證明做不出來，跟目前沒有人做出來，是不同的
 - ▶ Lindermann–Weierstrass theorem: 如果 α 是非零代數數，則 e^{α} 是超越數
 - ▶ Gelfond–Schneider theorem: 如果 α 和 β 都是代數數，其中 $\alpha \neq 0$ 且 $\alpha \neq 1$ ，且 β 不是有理數，那麼 α^{β} 是超越數
- ▶ 它的平方根 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 也是一個超越數
 - ▶ 無理數的無理數次方可以有理數，如 $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$
- ▶ $2^{\sqrt{2}} = \lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} 2^t$

極限的定義

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

Definition

若對於所有正數 ϵ ，必存在一正數 δ 使得

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

則

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

函數的連續性

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

Definition

若函數 f 在 c 點連續，則符合以下條件

- ▶ $f(c)$ 有定義
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 存在
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

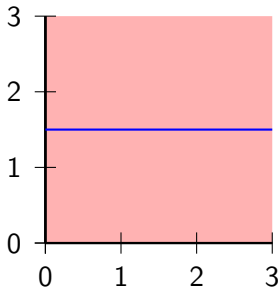
$$\lim_{x \rightarrow c} r = r$$

微積分的基石

何震邦

Proof.

1. 若 $0 < |x - c| < \delta$ 則 $|r - r| = 0$
2. 對於所有正數 ϵ ，存在 δ 使得若 $0 < |x - c| < \delta$ 則 $|r - r| = 0$



函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c$$

微積分的基石

何震邦

Proof.

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

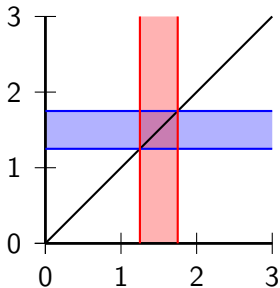
無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

1. 設 $\delta := \epsilon$
2. 若 $0 < |x - c| < \delta$, 則 $|x - c| < \delta = \epsilon$



$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

微積分的基石

何震邦

Proof.

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

1. 設 $L := \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, $M := \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

2. 設一任意正數 ϵ , 則我們有

- ▶ 存在正數 δ_1 使得 $0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$
- ▶ 存在正數 δ_2 使得 $0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$

3. 設 $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, 則

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} g(x)} f(u)$$

微積分的基石

何震邦

Proof.

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

1. 設 $M := \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ ，並重新定義 $f(M) := \lim_{u \rightarrow M} f(u)$ 使 f 在 M 上連續，不失一般性
2. 設一任意正數 ϵ
 - ▶ 存在正數 δ_1 使得 $0 < |u - M| < \delta_1 \Rightarrow |f(u) - f(M)| < \epsilon$
 - ▶ 當 $u = M$ ，我們也有 $f(u) = f(M)$ 即 $|f(u) - f(M)| = 0$
 - ▶ 存在正數 δ_1 使得 $|u - M| < \delta_1 \Rightarrow |f(u) - f(M)| < \epsilon$
3. 設 $\epsilon_1 := \delta_1$
 - ▶ 存在正數 δ 使得 $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon_1$
 - ▶ 若 $|g(x) - M| < \delta_1$ 則 $|f(g(x)) - f(M)| < \epsilon$
4. 所以 $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(M) = \lim_{u \rightarrow M} f(u)$



初等函數在定義域上連續

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 只有以上四個命題需要使用 ϵ - δ 論述證明
- ▶ 連續函數的反函數也連續

$$\lim_{u \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x)} f^{-1}(u) = \lim_{x \rightarrow c} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow c} x = c$$

- ▶ 代數函數、冪函數、指數函數都可以用常數、變數、加法、複合函數、反函數這五者組合出來
- ▶ 下次我們將證明三角函數也在定義域上連續

多項式是連續函數

微積分的基石

何震邦

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

$$\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{n} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{n} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} bf(x) = b \lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad b \in \mathbb{Q}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} af(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\left(\lim_{b \rightarrow a} b \right) f(x) \right) = a \lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad b \in \mathbb{Q}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left(f(x) \lim_{x \rightarrow c} g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

初等函數在定義域上連續

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \quad g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^k = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^k \quad k \in \mathbb{Z}, f(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \quad n \in \mathbb{N}, f(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^b = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^b \quad b \in \mathbb{Q}, f(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^a = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^a \quad f(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^{g(x)} \quad f(x) > 0$$

無窮極限

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

Definition

若對於所有正數 r ，均能找到一正數 δ 使得
 $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > r$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

若對於所有負數 r ，均能找到一正數 δ 使得
 $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < r$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

► ∞ 就是比任何一個實數都大！

單邊極限

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

Definition

若對於所有正數 ϵ ，均能找到一正數 δ 使得
 $c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

若對於所有正數 ϵ ，均能找到一正數 δ 使得
 $c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

- ▶ 先前我們觀察的區間是 $0 < |x - c| < \delta$ ，所以會觀察到 x 在 c 兩側的行為
- ▶ 如果只觀察 $0 < x - c < \delta$ ，就只會觀察到右側，反之亦然。

複習初等函數

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 在高中的時候，我們已經把初等函數學得差不多了，除了
 - ▶ 自然指數、自然對數
 - ▶ 反三角函數

指數函數

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 有理數具有稠密性，所以我們可以用有理數列來逼近一個無理數，像這樣

$$\lim_{b \rightarrow r} b = r, \quad b \in \mathbb{Q}, \quad r \in \mathbb{R}$$

- ▶ 自然指數就是以 e 為底的指數函數，其中

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828$$

- ▶ 這個數列的收斂速度非常慢，到了第 n 項大概只有 $\log n$ 位的有效位數
- ▶ 我們有更有效的方法來計算 e^x

e^x 的圖形

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

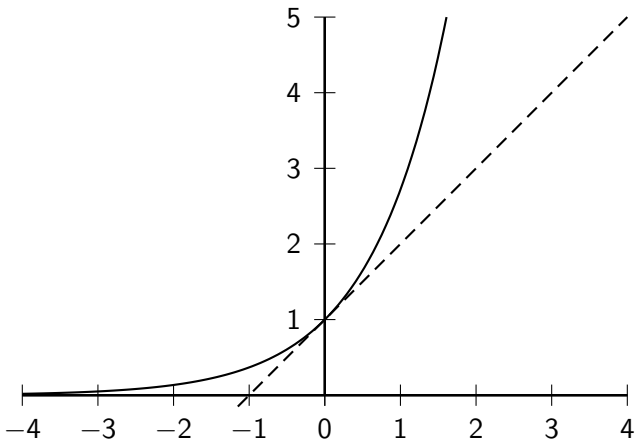
極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數



對數函數

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 人類是先有對數才有指數！
- ▶ 不過就現代數學而言，通常把 $\log_b x$ 定義為 b^x 的反函數。其中 $\ln := \log_e$
- ▶ 為什麼要拿這麼奇怪的數字當底數呢？

自然對數

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 在沒有計算機的年代，算乘法是大工程
 - ▶ n 位數加法的時間複雜度： $O(n)$
 - ▶ n 位數直式的乘法的時間複雜度： $O(n^2)$
- ▶ 對數表可以把乘法映射（map）到加法，加完再用反對數映射回去
- ▶ 對數表要怎麼製作呢？
 - ▶ 乘方比開方好算
 - ▶ 算 x^n 頂多只要 $2 \log_2 n$ 次乘法（不是 $n-1$ ？）
 - ▶ 底數要小到接近 1 才能避免開方

納皮爾對數

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ 納皮爾（John Napier，1550–1617）先以 $\left(1 + \frac{1}{10^7}\right)$ 為底算出對數值，再把結果除以 10^7 。也就是製作以 $\left(1 + \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ 為底的對數表
- ▶ 當後來要求的精度越來越精確，我們逐步把 10^7 提升到更高的數字，最後乾脆取極限

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

三角函數的定義

微積分の基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

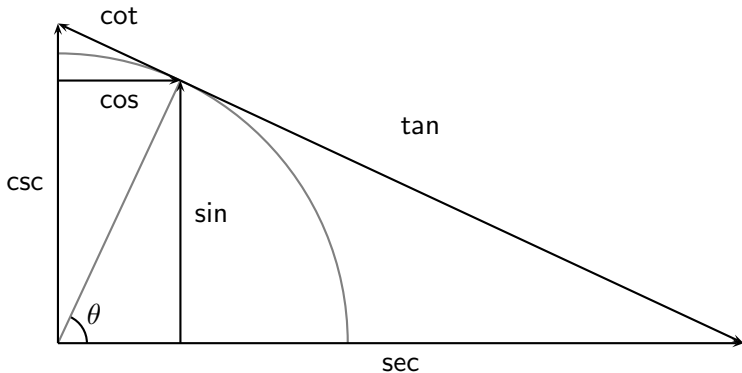
極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數



三角函數的性質

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

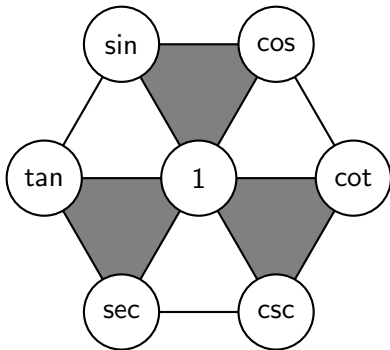
極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數



餘弦差角公式

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

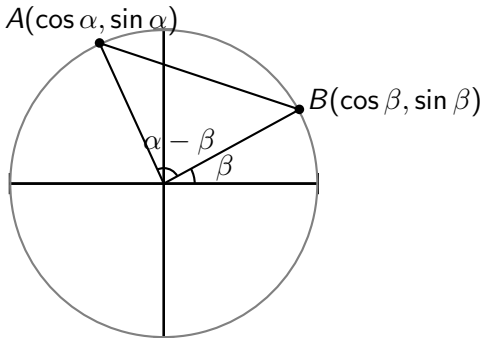
極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數



$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)\end{aligned}$$

$$\overline{AB}^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

反三角函數

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

- ▶ Wait! 每個三角函數都有 2π 這個週期，所以鐵定不是一對一函數啊！怎麼會有反函數咧？
- ▶ 我們可以把他們限制在一個區間內，讓他在區間內是一對一函數
 - ▶ 為了方便，我們會讓區間包含 0 和 1，讓數字看起來比較舒服

函數	受限的定義域	值域
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	\mathbb{R}
$\cot x$	$(0, \pi)$	\mathbb{R}
$\sec x$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc x$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

微積分的基石

何震邦

函數

函數的種類

極限

極限與連續性

ϵ - δ 論證

極限的運算

無窮極限、單邊極限

初等函數

指數與對數

三角函數

Thanks for your attention!