無理函數的積分

何震邦 <jdh8@ms63.hinet.net>

2014 年 12 月 1 日

方法 5：反三角替代

在被積函數形如以下的無理函數時，進入本節的演算法。

- $f(x)(px+q)^m(a_1x+b_1)^{k_1}(a_2x+b_2)^{k_2}$
- $f(x)(px+q)^m\left(ax^2+bx+c\right)^k$

其中 f 是多項式，m 是整數，k, k_1, k_2 是奇數的一半，a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c, p, q 是常數。

其中 f 是多項式，且 k_1 與 k_2 是奇數的一半。

- 若 $k_1k_2 < 0$，設 $k_1 > 0,\ k_2 < 0$，不失一般性。若 $m \geq 0$，則 $g(x) = f(x)\,(px+q)^m$ 為多項式。

  $$g(x)\,(a_2x+b_2)^{k_2-k_1}\,(a_1x+b_1)^{k_1}\,(a_2x+b_2)^{k_1}$$

  其中 $k_2 - k_1$ 為負整數。
- 否則設 $k_2 \geq k_1$，不失一般性。此時有理化為

  $$h(x)\,(px+q)^m\,(a_1x+b_1)^{k_1}\,(a_2x+b_2)^{k_1}$$

  其中 $h(x) = f(x)\,(a_2x+b_2)^{k_2-k_1}$ 亦為多項式。

$$\int f(x)\,(px+q)^m\left(ax^2+bx+c\right)^k dx$$

其中 f 是多項式，且 k 是奇數的一半。設 $y = px + q$，則原式化為

$$g(y)\left(Ay^2 + By + C\right)^k$$

其中 g 是洛朗級數，A, B, C 為常數。

多項式型

本節我們討論

$$\int f(x)\left(ax^2+bx+c\right)^k$$

其中 f 是多項式，且 k 是奇數的一半。

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

- 若 $a > 0$ 且 $4ac > b^2$，則原式為

$$\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{a}}.$$

- 若 $a > 0$ 且 $4ac < b^2$，則原式為

$$\frac{\ln\left|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b\right|}{\sqrt{a}}.$$

- 若 $a < 0$ 且 $4ac < b^2$，則原式為

$$-\frac{\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)}{\sqrt{-a}}.$$

Solution

設 $y = \sqrt{x-\alpha} + \sqrt{x-\beta}$。

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-\alpha}} + \frac{1}{2\sqrt{x-\beta}} = \frac{\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}}{2\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x-\beta}}.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x-\beta}}\,dx &= \int \frac{2}{y}\,dy \\ &= 2\ln|y| \\ &= 2\ln\left|\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}\right| \\ &= \ln\left|2\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x-\beta}+2x-\alpha-\beta\right|.\end{aligned}$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\ln\left|2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}+2x-\alpha-\beta\right| \\
=&\frac{\dfrac{2x-\alpha-\beta}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}+2}{2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}+2x-\alpha-\beta} \\
=&\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}
\end{aligned}$$

$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$，其中 $a>0$ 且 $4ac<b^2$

設 $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 與 $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

Solution

設 $y = ax$。

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(ax-a\alpha)(ax-a\beta)}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{(y-a\alpha)(y-a\beta)}}\,dy \\
&= \frac{\ln\left|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b\right|}{\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

$$\int_5^{15} \frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}\,dx$$

Solution

當 $5 \leq x \leq 15$ 時，$\sqrt{16x^2-1} = \sqrt{4x+1}\sqrt{4x-1}$。

$$\int \frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}\,dx = \frac{\ln\left|8\sqrt{16x^2-1}+32x\right|}{4}$$

$$\int_5^{15} \frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}\,dx = \frac{\ln\left(8\sqrt{3599}+480\right)}{4} - \frac{\ln\left(8\sqrt{399}+160\right)}{4}$$

$$\approx 0.2747921059353482.$$

$\int_5^{15} \frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}\,dx$，另解

Solution

當 $5 \le x \le 15$ 時，$\sqrt{16x^2-1} = \sqrt{4x+1}\sqrt{4x-1}$。

$$\int \frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}\,dx = \frac{2\ln\left|\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-1}\right|}{4}$$

$$\int_5^{15} \frac{1}{\sqrt{16x^2-1}}\,dx = \frac{2\ln\left(\sqrt{61}+\sqrt{59}\right)}{4} - \frac{2\ln\left(\sqrt{21}+\sqrt{19}\right)}{4}$$

$$\approx 0.2747921059353482.$$

Remark

這個解對人類比較友善，但對機器則否。因為它要多做兩次平方根。

$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx$

- 若 $a > 0$ 且 $b > 0$，則原式為

$$\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{a}}.$$

- 若 $a > 0$ 且 $b < 0$，則原式為

$$\frac{\ln\left|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+b}+2ax\right|}{\sqrt{a}}.$$

- 若 $a < 0$ 且 $b > 0$，則原式為

$$\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{-a}x}{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{-a}}.$$

Solution

設 $y = \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}}\right)$，則 $dx = \frac{\sqrt{b}\cosh(y)}{\sqrt{a}}\,dy$。

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{b}\cosh y}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{a}}\,dy \\
&= \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Solution

設 $y = \arcsin\left(\frac{\sqrt{-ax}}{\sqrt{b}}\right)$，則 $dx = \frac{\sqrt{b}\cos(y)}{\sqrt{-a}}\,dy$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{b}\cos(y)}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{-a}}\,dy \\
&= \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{-ax}}{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{-a}}.
\end{aligned}$$

Solution

設 $y = x + \frac{b}{2a}$。

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{ay+\frac{4ac-b^2}{4a}}}\,dy$$
$$= \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{2ay}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{a}}$$
$$= \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{a}}.$$

Solution

設 $y = x + \frac{b}{2a}$。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{ay - \frac{b^2-4ac}{4a}}}\,dy \\ &= \frac{\arcsin\left(\frac{-2ay}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)}{\sqrt{-a}} \\ &= -\frac{\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)}{\sqrt{-a}}.\end{aligned}$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \\
&= \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \int \frac{q-\frac{bp}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \\
&= \frac{p\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} + \int \frac{2aq-bp}{2a\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.
\end{aligned}$$

$\int \left(ax^2+bx+c\right)^{n+\frac{1}{2}} dx$，其中 $n \in \mathbb{N}_0$

Solution

設 $R = ax^2 + bx + c$。

$$\begin{aligned}
&\int R^{n+\frac{1}{2}} dx \\
&= xR^{n+\frac{1}{2}} - \int \frac{(2n+1)\left(2ax^2+bx\right)R^{n-\frac{1}{2}}}{2} dx \\
&= \frac{xR^{n+\frac{1}{2}}}{2n+2} + \int \frac{(2n+1)(bx+c)R^{n-\frac{1}{2}}}{4n+4} dx \\
&= \frac{(2ax+b)R^{n+\frac{1}{2}}}{(4n+4)a} + \int \frac{(2n+1)\left(4ac-b^2\right)R^{n-\frac{1}{2}}}{(8n+8)a} dx
\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

Solution

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx &= \int \sqrt{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \\
&= \frac{2x+1}{4\sqrt{x^2+x+1}} - \int \frac{8x+5}{8\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \\
&= \frac{2x-3}{4\sqrt{x^2+x+1}} - \int \frac{1}{8\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \\
&= \frac{2x-3}{4\sqrt{x^2+x+1}} - \int \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{8}\,dx
\end{aligned}$$

Hermite reduction

設 n 為正整數。若多項式 R 與 R' 互質。根據多項式的貝祖等式，我們能以擴展的輾轉相除法求兩多項式 B, C 使得

$$\frac{2A}{1-2n} = BR' + CR$$

其中 $\deg(B) < \deg(R)$。因此

$$\begin{aligned}
\frac{A}{R^{n+\frac{1}{2}}} &= \frac{(1-2n)\,BR'}{2R^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{(1-2n)\,C}{2R^{n-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{B'}{R^{n-\frac{1}{2}}} - \frac{(2n-1)\,BR'}{2R^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{B' + (2n-1)\,C}{2R^{n-\frac{1}{2}}} \\
\int \frac{A}{R^{n+\frac{1}{2}}} &= \frac{B}{R^{n-\frac{1}{2}}} - \int \frac{B' + (2n-1)\,C}{2R^{n-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}\,dx$

設 $A = px + q$ 與 $R = ax^2 + bx + c$，其中 $4ac \neq b^2$。

$$\begin{aligned}
4aR &= (2ax + b)\,R' + 4ac - b^2 \\
-2A &= -\frac{pR'}{a} + \frac{bp - 2aq}{a} \\
&= -\frac{pR'}{a} + \frac{(2aq - bp)\left((2ax + b)\,R' - 4aR\right)}{a\left(4ac - b^2\right)}.
\end{aligned}$$

設 $B = \dfrac{(2aq - bp)(2ax + b)}{a\left(4ac - b^2\right)} - \dfrac{p}{a}$ 與 $C = -\dfrac{4\,(2aq - bp)\,R}{4ac - b^2}$。

$$\begin{aligned}
-2A &= BR' + CR \\
\int \frac{A}{R^{3/2}} &= \frac{B}{\sqrt{R}} - \int \frac{B' + C/2}{\sqrt{R}} = \frac{B}{\sqrt{R}}.
\end{aligned}$$

$\int \frac{4x+5}{(x^2+2x+3)^{3/2}}\,dx$

Solution

設 $A = 4x+5$ 與 $R = x^2+2x+3$。

$$\begin{aligned}
2R &= (x+1)\,R' + 4 \\
-2A &= -4R' - 2 = \frac{(x-7)\,R'}{2} - R.
\end{aligned}$$

$$\int \frac{4x+5}{R^{3/2}}\,dx = \frac{x-7}{2\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

$$\int \frac{1}{x^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Solution

設 $y = 1/x$。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= -\int \frac{y^{m-2}}{\sqrt{\frac{b}{y}+\frac{a}{y^2}+c}}\,dy \\ &= -\int \frac{y^{m-2}\,|y|}{\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy.\end{aligned}$$

Remark

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{若 } x > 0 \\ -1 & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

- 若 $c>0$ 且 $4ac>b^2$，則原式為

$$-\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{bx+2c}{\sqrt{4ac-b^2}|x|}\right)}{\sqrt{c}}.$$

- 若 $c>0$ 且 $4ac<b^2$，則原式為

$$-\frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x|}+\frac{2c}{|x|}+b\right|}{\sqrt{c}}.$$

- 若 $c<0$ 且 $4ac<b^2$，則原式為

$$\frac{\arcsin\left(\frac{bx+2c}{\sqrt{b^2-4ac}|x|}\right)}{\sqrt{-c}}.$$

Solution

設 $y = 1/x$。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= -\int \frac{|y|}{y\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy \\ &= -\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{(2cy+b)|y|}{y\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{c}} \\ &= -\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{bx+2c}{\sqrt{4ac-b^2}|x|}\right)}{\sqrt{c}}.\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$，若 $c>0$ 且 $4ac<b^2$

Solution

設 $y = 1/x$。

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= -\int \frac{|y|}{y\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy \\
&= -\frac{\ln\left|2\sqrt{c}\sqrt{cy^2+by+a}+2c|y|+b\right|}{\sqrt{c}} \\
&= -\frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x|}+\frac{2c}{|x|}+b\right|}{\sqrt{c}}.
\end{aligned}$$

$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$，若 $c<0$ 且 $4ac<b^2$

Solution

設 $y = 1/x$。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= -\int \frac{|y|}{y\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy \\ &= \frac{\arcsin\left(\frac{(2cy+b)|y|}{y\sqrt{b^2-4ac}}\right)}{\sqrt{-c}} \\ &= \frac{\arcsin\left(\frac{bx+2c}{\sqrt{b^2-4ac}|x|}\right)}{\sqrt{-c}}.\end{aligned}$$

$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+b}}\,dx$

- 若 $b>0$ 且 $a>0$，則原式為

$$-\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}|x|}\right)}{\sqrt{b}}.$$

- 若 $b>0$ 且 $a<0$，則原式為

$$-\frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{b}\sqrt{ax^2+b}}{|x|}+\frac{2b}{|x|}\right|}{\sqrt{b}}.$$

- 若 $b<0$ 且 $a>0$，則原式為

$$-\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{a}|x|}\right)}{\sqrt{-b}}.$$

$\int \frac{1}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Solution

設 $y = 1/x$。

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \\
&= -\int \frac{|y|}{\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy \\
&= -\frac{y\sqrt{cy^2+by+a}}{c\,|y|} + \int \frac{b\,|y|}{2c^{3/2}y\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy \\
&= -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{cx} + \int \frac{b\,|y|}{2c^{3/2}y\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy.
\end{aligned}$$

$\int \frac{1}{x^3\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Solution

設 $y = 1/x$。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= -\int \frac{y\,|y|}{\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy \\
&= -\int \frac{y\sqrt{cy^2+by+a}}{c\,|y|}\,dy + \int \frac{(by+a)\,|y|}{cy\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy \\
&= -\frac{(2cy+b)\sqrt{cy^2+by+a}}{4c^2} + \int \frac{\left(8bcy+4ac+b^2\right)|y|}{8c^2y\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy \\
&= \frac{(3b-2cy)\sqrt{cy^2+by+a}}{4c^2} + \int \frac{\left(4ac-3b^2\right)|y|}{8c^2y\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy \\
&= \left(\frac{3b}{4c^2x} - \frac{1}{2cx^2}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{\left(4ac-3b^2\right)|y|}{8c^2y\sqrt{cy^2+by+a}}\,dy.
\end{aligned}
$$

Thanks for your attention!