指數函數

何震邦 <jdh8.org>

2015 年 11 月 4 日

定義 1. 對於所有 $x \in \mathbb{C}$，我們把指數函數定義為

$$\exp(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

其中我們也定義 $0^0 \triangleq 1$。另外，在本文中，我們定義級數 S 為

$$S_n(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

定理 2. 比值審斂法用來測試級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是否收斂，其中每一項都是實數或複數，且當 n 足夠大時 $a_n \neq 0$。

我們設

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

則

- 若 $L < 1$ 則此級數絕對收斂[1]。
- 若 $L > 1$ 則此級數發散
- 若是其他狀況則沒有定論。

Proof. 當 $L < 1$，設 $r = \dfrac{L+1}{2}$。則 $L < 1 < r$ 且存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得若 $n > N$ 則 $|a_{n+1}| < r\,|a_n|$。因此對於所有 $n > N$ 及 $k > 0$，我們都有 $|a_{n+k}| < r^k\,|a_n|$。所以

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| < \sum_{k=1}^{\infty} r^k\,|a_{N+1}| = |a_{N+1}| \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r\,|a_{N+1}|}{1-r} < \infty$$

即此級數絕對收斂。 □

定理 3. 對於所有 $x \in \mathbb{C}$，級數 S 絕對收斂。

[1] **絕對收斂**即絕對值收斂至某一非負實數。

Proof.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1. \qquad \square$$

定理 4. 對於所有 $x, y \in \mathbb{C}$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Proof. 我們有

$$\begin{aligned}
S_{2n}(x+y) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(x+y)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=k}^{2n} \frac{x^k y^{j-k}}{k!\,(j-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-k} \frac{x^k y^j}{k!\,j!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=n+1}^{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-k}\right)\frac{x^k y^j}{k!\,j!}.
\end{aligned}$$

所以

$$S_{2n}(x+y) - S_n(x)\,S_n(y) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=n+1}^{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-k}\right)\frac{x^k y^j}{k!\,j!}.$$

因此

$$|S_{2n}(x+y) - S_n(x)\,S_n(y)| \le S_{n-1}(|x|)\left(S_{2n}(|y|) - S_n(|y|)\right) - S_n(|y|)\left(S_{2n}(|x|) - S_n(|x|)\right).$$

因為級數 S 絕對收斂，所以

$$\lim_{n\to\infty} |S_{2n}(x+y) - S_n(x)\,S_n(y)| = 0. \qquad \square$$

定義 5. 我們定義數學常數 e 如下：

$$\mathrm{e} \triangleq \exp(1)$$

因此

$$\mathrm{e}^x = \exp(x).$$

定理 6.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

Proof. 定義序列 T 使得

$$T_n(x) \triangleq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

對於所有 $n > 2$

$$S_n(x) - T_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right).$$

當 $k \geq 2$

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1 + \cdots + (k-1)}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}$$

所以

$$|S_n(x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^k}{(k-2)!} = \frac{x^2 S_{n-2}(|x|)}{2n}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \mathrm{e}^x. \qquad \square$$

定理 7. 由定義 *1* 得

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} &= \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.\end{aligned} \qquad \square$$

定理 8. 由定理 *6* 得

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} &= \frac{1}{h}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n - 1\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{h}{n}\right)^k - 1\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{h}{n}\right)^k\right) \\ &= 1 + h\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{h^{k-2}}{n^k}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1.$$

由導函數的定義得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^x &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^x}{h}\\ &= \mathrm{e}^x\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}\\ &= \mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

□