數值積分

何震邦 <jdh8.org>

2014 年 12 月 1 日

黎曼和

Theorem

設 $[a, b]$ 分割為 n 個子區間，每個區間的長度皆為 $h = \dfrac{b-a}{n}$。由左黎曼和得

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

由右黎曼和得

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

牛頓–寇次公式

Theorem

若 $n \in \mathbb{N}$，則

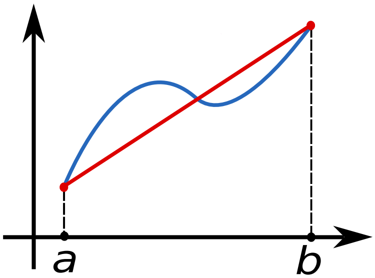
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{n+1}\right).$$

w_i 是由 n 決定的常數。梯形法則和辛普森法則分別是 n 為 *1* 和 *2* 的情況。

梯形法則

Theorem

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right).$$



分割區間後套用梯形法則

Theorem

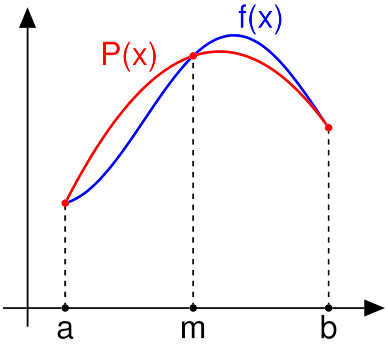
設 $[a, b]$ 分割為 n 個子區間，每個區間的長度皆為 $h = \dfrac{b-a}{n}$。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \\ &\approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right).\end{aligned}$$

辛普森法則

Theorem

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$



分割區間後套用辛普森法則

Theorem

設 $[a, b]$ 分割為 n 個子區間，其中 n 為偶數，每個區間的長度皆為 $h = \dfrac{b-a}{n}$。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + f(x_n) \right).$$

謝謝聆聽！

- 部落格
- 討論版
- 系列教材