微分方程

何震邦

微分方程

一階 ODE 線性 變數可分離

恰當-積分因 伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

以t"x替代數值方法

微分方程

何震邦 <jdh8.org>



2014年12月30日

常微分方程與偏微分方程

微分方程

何震邦

微分方程

一个 ODE 線性 變數可分離 恰當一積分因子

伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

含線性分式 以 t"x 替代

歌拉法

函數方程中,有待解函數的導函數項時,稱為微分方程。例如

$$\sin(x) x'' = (x+1) x' + x^2 e^{-3x}.$$
 (1)

$$x^{(4)} + x''' + x'' + x = \cos(t) \tag{2}$$

以上微分方程只有常導數,所以是**常微分方程** (ODE). 有偏導數的方程是**偏微分方程** (PDE),例如

$$u_{xxt} = u_y + 1. (3)$$

微分方程 何震邦

微分方程

一階 ODE 線性 變數可分離 恰當一積分因子 伯努力 齊次 聯平線性

幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

數值方法 ^{歐拉法} 微分方程的**階**是方程中最高階導數的階。例如 (1) 是二階微分方程,(3) 是三階微分方程,而 (2) 是四階微分方程。

線性微分方程

微分方程 何震邦

微分方程

變數可分離 游次 幾乎線性

歐拉法

線性微分方程可以寫成以下的形式:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(t) x^{(k)}(t) = g(t)$$

其中 t 是自變數, x 是待解函數, f_k 和 g 是已知函數, 如 (2) °

從足微分方程的函數稱為**解**或**特解**。解可能有自變數的範圍限制。

Example

在 t > 0 時, $x = t^{-3/2}$ 是 $4t^2x'' + 12tx' + 3x = 0$ 的解。

Proof.

$$x' = -\frac{3}{2}t^{-5/2}$$
$$x'' = -\frac{15}{4}t^{-7/2}$$

$$4t^2\left(-\frac{15}{4}t^{-7/2}\right) + 12t\left(-\frac{3}{2}t^{-5/2}\right) + 3t^{-3/2} = 0.$$

初始條件

微分方程

何震邦

微分方程

變數可分離

幾乎線性

歐拉法

初始條件形如

例如

$$x_k = x^{(k)}(t_0)$$

$$x_0=x(t_0).$$

初值問題

微分方程

何震邦

微分方程

變數可分離 游次 幾乎線性

歐拉法

初值問題是有適當初始條件的微分方程。

Example

以下是初值問題。

$$t^2x'' + 2tx' + 3x = 0$$

$$x(4) = 1$$

$$x'(4) = 2.$$

有效範圍

微分方程 何震邦

微分方程

以力力生

線性 變數可分離 恰當一積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性 今線性公司

幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

對於有初始條件

$$x_k = x^{(k)}(t_0)$$

的微分方程而言,有效範圍是包含 t_0 且解有效的最大範圍。

微分方程

何震邦

微分方程

一階 OD

線性 變數可分離 恰當—積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

數值方法

通解是微分方程的解的最廣義的形式。

Example

$$2tx' + 4x = 3$$

的通解是

$$x = \frac{c}{t^2} + \frac{3}{4}$$

其中 c 是任意常數。

實際解

微分方程 何震邦

微分方程

變數可分離

幾乎線性

歐拉法

同時符合微分方程與附屬條件(像是初始條件)的解,是實 際解。

Example

求解

$$2tx' + 4x = 3$$
 $x(1) = -4$.

Solution

已經有通解了,所以我們只要代入初始條件,求取待定常數 c °

$$4 = \frac{c}{1^2} + \frac{3}{4} \qquad c = -\frac{19}{4}$$
$$x = \frac{3}{4} - \frac{19}{4t^2}.$$

顯式解與隱式解

微分方程

何震邦

微分方程

線性 變數可分離 恰當—積分因子 伯努力 齊次

伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

數值方法 ^{歐拉法} 若待解函數為x而自變數為t,**顯式解**形如

$$x = f(t)$$
.

以其他方式寫出待解函數與自變數的關係的,為**隱式解**,像 是

$$F(x,t)=0.$$

從隱式解推出顯式解

微分方程

何震邦

微分方程

一階 ODE 線性 變數可分離 恰當-積分因子

恰當一積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性 今線性公式

含線性分式 以 t"x 替代

Example

$$x' = \frac{t}{x} \qquad x(2) = -1$$

的隱式解為

$$x^2 = t^2 - 3$$

求顯式解。

Solution

乍看之下有 $x = \pm \sqrt{t^2 - 3}$ 兩解,但只有負的合初值條件。

$$x = -\sqrt{t^2 - 3}.$$

一階常微分方程

微分方程

何震邦

微分方程

一階 ODE 線性 變數可分離 恰當一積分因子 伯努力 齊次

恰當—積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式 以 t°x 替代

數值方法

一**階常微分方程**為符合以下形式的方程式:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

其中 f 不含微分項。

方法 1:一階線性微分方程

微分方程

何震邦

微分方科

一階 OD

線性 變數可分離 恰當-積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性

幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

數值方法

Theorem

給定微分方程

$$f(t)x'+g(t)x=h(t).$$

設
$$A(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$$
 與 $B(t) = \frac{h(t)}{f(t)}$,將方程化為

$$x' + Ax = B$$
.

則 e^{∫Adt} 為一積分因子,使得通解為

$$x = e^{-\int A dt} \left(c + \int e^{\int A dt} B dt \right).$$

通解的證明

微分方程

何震邦

微分方程

一階 ODI

線性 變數可分離

俗富-- 概分 伯努力

齊次 幾乎線性

含線性分式 以 t"x 替代

數值方法

Proof.

設 $P = \int A dt$,則

$$x' + P'x = B$$
$$e^{P}x' + e^{P}P'x = e^{P}B$$
$$\left(e^{P}x\right)' = e^{P}B$$

此時積分,引進積分常數 c。

$$e^P x = c + \int e^P B dt$$

$$x = e^{-\int A \, dt} \left(c + \int e^{\int A \, dt} B \, dt \right).$$



有效區間

微分方程

何震邦

微分方程

一階 OD

線性 變數可分離 恰當一積分因子 伯努力 齊次 機爭線性分式

數值方法

Theorem

給定微分方程

$$x' + Ax = B$$

與初始條件

$$x_0=x(t_0).$$

若函數 A, B 在區間 (a,b) 中連續,且 $a < t_0 < b$,則 x 在此區間中有唯一解。

證明從略,因為解的形式可以通解 (4) 中獲得。

特殊狀況

微分方程

何震邦

微分方程

一階 OD

線性 變數可分離 恰當-積分因子 伯努力 齊次

伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

數值方法 歐拉法

給定微分方程

$$x' + Ax = B$$
.

若 B 為零,即原方程齊次,則通解成為

$$x = ce^{-\int A dt}$$
.

若 A 為常數,則 $\int A dt = At$,使通解成為

$$x = e^{-At} \left(c + \int e^{At} B dt \right).$$

常係數一階線性微分方程

微分方程

何震邦

微分万柱

一階 OD

線性 變數可分離 恰當一積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

以 t"x 替代 數值方法 給定微分方程

$$x' + Ax = B$$
.

若 A 與 B 皆為常數,即原方程常係數,則設 $x^* = B/A$,

$$x' + A(x - x^*) = 0$$

再設 $y = x - x^*$,原方程簡化成常係數齊次方程 y' + Ay = 0,通解顯然為

$$y = c_1 e^{-Ay}$$
$$x = c_2 e^{-Ax} + x^*$$

其中 c_1 為積分常數,而 $c_2 = c_1 e^{Ax^*}$.

指數衰變

微分方程

何震邦

微分方程

一階 OD

線性 變數可分離 恰當一積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

數值方剂

Example

An exponential decay function $f(t) = y_0 e^{-kt}$ models the among of drug in the blood t hours after an initial dose of $y_0 = 100$ mg is administered. Assume the half-life of a particular drug is 16 hours. How much time is required for the drug to reach 1% of the initial dose (1 mg)?

Solution

$$50 = 100e^{-16k}$$

$$k = \frac{\ln(2)}{16}$$

$$1 = 100e^{-\frac{\ln(2)}{16}t}$$

$$t = 16\log_2(100) \approx 106.30169903639559513$$
(小時).

方法 2:變數可分離的微分方程

微分方程

何震邦

微分方程

一階 OD

線性

變數可分離 恰當-積分因

恰當-積分比 伯努力 齊次

齊次 幾乎線性 全線性分式

含線性分式 以 t"x 替f

Theorem

給定微分方程

$$A(x) B(t) x' = C(x) D(t).$$

通解為

$$\int \frac{A(x)}{C(x)} dx = \int \frac{D(t)}{B(t)} dt.$$

證明從略。

有效區間

微分方程

何震邦

微分方程

一階 ODI

線性 變數可分離

を数可力能 恰當-積分因子 伯努力

齊次 幾乎線性

含線性分式 以 t"x 替作

數值方法

Theorem

給定微分方程

$$P(x)x'=Q(t)$$

與初始條件

$$x_0 = x(t_0)$$

若在 a < t < b 時,函數 P, Q 處處連續,則在此有實際解

$$\int_{x_0}^x P(u) du = \int_{t_0}^t Q(v) dv.$$

由換元積分得證。

Logistic 成長,頁 I

微分方程

何震邦

微分方程

線性 變數可分離 恰當一積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

數值方法

Example

A population grows according to the logistic differential equation y' = 0.0003y (2000 - y). The initial population size is 800. Solve this differential equation and use the solution to predict to population size at time t = 3.

本題為一個初期值問題

$$\begin{cases} y'(t) = 0.0003y(t) (2000 - y(t)) \\ y(0) = 800 \end{cases}$$

原微分方程為變數可分離的微分方程。

$$10000y' = 3y(2000 - y)$$

Logistic 成長,頁 II

微分方程

既然我們要求 y(3), 我們就從 t=0 積到 t=3。

$$\int_{y(0)}^{y(3)} \frac{10000}{3y(2000 - y)} \, dy = \int_{0}^{3} dt$$
$$\int_{800}^{y(3)} \frac{5}{3} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - 2000} \right) dy = 3.$$

此時被積函數有 0 和 2000 兩個不連續點,所以有效區間為 (0,2000) °

$$\ln(y(3)) - \ln(800) - \ln(2000 - y(3)) + \ln(1200) = \frac{9}{5}$$

勞數可分離

Logistic 成長,頁 III

微分方程 何震邦

變數可分離 恰當-積分因 伯努力

齊次 幾乎線性 企物性公式

含線性分式 以 t"x 替代

$$\ln\left(\frac{y(3)}{2000 - y(3)}\right) = \frac{9}{5} + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$\frac{y(3)}{2000 - y(3)} = \frac{2e^{9/5}}{3}$$
$$\frac{2000}{2000 - y(3)} = \frac{2e^{9/5}}{3} + 1$$

$$y(3) = \frac{4000e^{9/5}}{2e^{9/5} + 3} \approx 1602.6304520653167546.$$

方法 3: 恰當微分方程

微分方程

何震邦

微分方程

一階 ODE

線性 變數可分離 恰當-積分因子

伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

以t"x 替f 數值方法

Theorem

給定微分方程

$$P(x,t)x'+Q(x,t)=0$$

其中

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

通解為勢函數

$$F(x,t) = \int Q dt + \int \left(P - \frac{\partial}{\partial x} \int Q dt\right) dx.$$

勢函數的存在

微分方程

何震邦

微分方程

一階 ODE 線性 變數可分離 恰當-積分因子

省高一限が囚す 伯努力 齊次 幾乎線性 全線性分式

含線性分式 以 t"x 替代

軟拉法

Proof.

設有函數 F(x,t) 使得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P$$
 \mathbb{H} $\frac{\partial F}{\partial t} = Q$.

此時若 P, Q, P_t 與 Q_x 在所討論的 xt-平面區域上連續,則 在此區域中由二階導數的對稱性得

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

通解的證明

微分方程

何震邦

微分方程

一个 ODE 線性 變數可分離 恰當-積分因子

恰當-積分因 伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

數值方法

Proof.

設

$$F = \int Q \, dt + \int \left(P - \frac{\partial}{\partial x} \int Q \, dt \right) dx.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int Q \, dt + \frac{\partial}{\partial x} \int Q \, dt = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int Q dt + P - \frac{\partial}{\partial x} \int Q dt = P.$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = Q + \frac{\partial}{\partial t} \int \left(P - \frac{\partial}{\partial x} \int Q \, dt \right) dx$$
$$= Q + \int \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx = Q.$$

積分因子

微分方程

何震邦

微分万程 一階 OD□

線性 變數可分離 恰當-積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性

发于球性 含線性分式 以 t"x 替代

數1直力 i 歐拉法 對於非恰當微分方程

$$P(x,t)x'+Q(x,t)=0$$

我們可以試著尋找積分因子 $\mu(x,t)$ 使得

$$\mu P x' + \mu Q = 0$$

為恰當微分方程,即

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu P = \frac{\partial}{\partial x} \mu Q \tag{5}$$

其中 $\mu \neq 0$ 。

積分因子為單變函數

微分方程

何震邦

微分方程

mar ...

線性 變數可分離 恰當-積分因子

伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

數值方法

Theorem

給定非恰當微分方程

$$P(x,t)x' + Q(x,t) = 0.$$
 (6)

若 $\frac{Q_x - P_t}{P} = h(t)$,則積分因子為

$$\mu(t) = e^{\int h(t) dt}.$$
 (7)

同理,若 $\frac{P_t - Q_x}{Q} = k(x)$,則積分因子為

$$\mu(x) = e^{\int k(x) dx}.$$

(7)式的證明

微分方程

何震邦

微分方程

一階 ODE 線性

線性 變數可分離 恰當-積分因子

伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

Proof.

設 $\mu(t)$ 為(6)的積分因子,則由(5)得

$$\mu \frac{\partial Q}{\partial x} - \mu \frac{\partial P}{\partial t} - P \frac{d\mu}{dt} = 0$$

這是變數可分離的微分方程。我們著手解 μ 。

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_{x} - P_{t}}{P} = h$$

$$\ln \mu = \int h \, dt$$

$$\mu = e^{\int h \, dt}.$$

P與 Q 滿足柯西—黎曼方程時的積分因子

微分方程

何震邦

微分方和

一階 ODI

線性 變數可分離 恰當-積分因子

伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式

數值方法

Theorem

給定微分方程

$$P(x,t)x' + Q(x,t) = 0.$$
 (8)

其中

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{II.} \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

即 P 與 Q 滿足柯西-黎曼方程,此時積分因子為

$$\mu(x,t)=\frac{1}{P^2+Q^2}.$$

方法 4: 伯努力微分方程

微分方程

何震邦

微分方程

原 ODE 線性 變數可分離 恰當-積分因子 伯努力 齊次

作努力 齊次 機手線性 含線性分式 以 t" v 禁代

數值方法

Theorem

給定微分方程

$$f(x) y' + g(x) y + h(x) y^n = 0$$

其中 $n \neq 1$ 。設 $u(x) = y^{1-n}$,則原方程轉為線性的

$$f(x) u' + (1 - n) g(x) u + (1 - n) h(x) = 0.$$

齊次函數

微分方程

何震邦

微分方程

一階 OD

線性 變數可分離 恰當—積分因子

伯努力 **齊次** 幾乎線性

含線性分式 以 t"x 替代

數值方法

Definition

函數 f(x,y) 稱為 n 次齊次函數,等價於

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$
 (9)

其中 n 為常數。

Example

- ▶ $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$ 為 3 次齊次函數。
- ▶ $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ 不是齊次函數。

方法 5: 齊次微分方程

微分方程

何震邦

微分万档

線性 變數可分離 恰當—積分因子

恰當-積分因: 伯努力 齊次 幾乎線性

幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

數值方法

Theorem

給定微分方程

$$P(x, t) x' = Q(x, t)$$

其中 P 與 Q 皆為 x, t 的齊次函數。設 u(t) = x/t,則原方程轉為變數可分離的方程。

方法 6:幾乎線性的微分方程

微分方程

何震邦

微分方程

一階 OD

線性變數可分離

恰當--積分| 伯努力

伯努力 齊次

幾乎線性 含線性分式

數值方法

Theorem

給定微分方程

$$f(t) k'(x) x' + g(t) k(x) = h(t).$$

設 u(t) = k(x), 則原方程轉為線性的

$$f(t) u' + g(t) u = h(t).$$

Remark

這方法在課本上罕見。

方法 7: 含線性分式的微分方程

微分方程

何震邦

微分方程

一階 ODE 線性 變數可分離 恰當—積分因子 伯努力 齊次

幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

數值方法

Theorem

給定微分方程

$$x' = f\left(\frac{a_1x + b_1t + c_1}{a_2x + b_2t + c_2}\right).$$

若 $a_1x + b_1t + c_1 = 0$ 與 $a_2x + b_2t + c_2 = 0$ 聯立方程有唯一解 (x,t) = (h,k),設 X = x - h 與 T = t - k,則原方程轉為齊次的

$$\frac{dX}{dT} = f\left(\frac{a_1X + b_1T}{a_2X + b_2T}\right).$$

方法 8:以 tnx 替代

微分方程 何震邦

散分方程

一階 ODE 線性 變數可分離 恰當-積分因子 伯努力 齊次 機平線性

幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

數值方:

Theorem

給定微分方程

$$x' + \frac{xf(t^n x)}{t} = 0$$

其中 n 為待定常數。設 $y = t^n x$,則原方程轉為變數可分離的

$$\int \frac{1}{y(n-f(y))} dy = \int \frac{1}{t} dt.$$

數值方法

```
微分方程
何震邦
```

```
微分方程
一階 ODE
```

線性 變數可分離 恰當--積分因子 伯努力

齊次 幾乎線性 含線性分式

数值方法 歐拉法

有時

- ▶ 微分方程沒有解析解
- ▶ 計算解析解的成本太大。

此時我們就用數值方法去計算待解函數的近似值。

微分方程與線性近似

微分方程

何震邦

微分方科

一階 OD

線性 變數可分離 恰當—積分因子 伯努力 齊水

齊次 幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

以 t^ox 替代 數值方法

歐拉法

給定一階常微分方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

與初始條件

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0).$$

根據線性近似,當 t 在 to 附近

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}(t_0) + (t - t_0) \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0).$$

歐拉法

微分方程

何震邦

10人/リ /リ 化

—際 OF

線性 變數可分離 恰當一積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性 含線性分式 以 t"x 替代

数值方法

假設代求的函數值是 $\mathbf{x}(t_n)$,且 $t_n > t_0$,不失一般性。我們把區間 $[t_0, t_n]$ 以 t_1, t_2, t_3, \ldots 分成 n 段,再以

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) pprox \mathbf{x}(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

讓 k 從 0 迭代到 n-1,最後獲得 $\mathbf{x}(t_n)$ 的近似值。

謝謝聆聽!

微分方程

何震邦

一階 ODE

變數可分離 恰當-積分因子 伯努力 齊次 幾乎線性 今線性公式

以 t"x 替代

歐拉法



- ▶ 部落格
- ▶ 討論版
- ▶ 系列教材