微積分的基石

函數、極限、初等函數

何震邦 <jdh8.org>

2012 年 10 月 17 日

關於我

- jdh8.org
- jdh863@gmail.com
- 我的臉書
- 0918-319823
  - 真是充滿火藥味的號碼

函數就像射飛鏢

- 飛鏢只有一個鏢頭，函數的值是唯一的
- 可以說函數是一種特殊的映射（mapping）
  - 映射就沒有啥限制了，可以用霸王鏢

檔案：/home/jdh8/invSqrt.c 1 / 1 頁

```
float invSqrt(float x)
{
  float t;
  int32_t i;

  t = x * 0.5f;
  i = *(int32_t*) &x;            // evil floating point bit level hacking
  i = 0x5f3759df - (i >> 1);     // what the fuck?
  x = *(float*) &i;
  x = x * (1.5f - (t * x * x));  // 1st iteration
//x = x * (1.5f - (t * x * x));  // 2nd iteration, this can be removed

  return x;
}
```

誰規定函數只能有一個輸入值？

- $\mathrm{add}(x, y) := x + y$
- $\mathrm{mul}(x, y) := xy$
- $\mathrm{B}(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

以函數的形式分類

- 線性函數
- 多項式
- 有理函數
- 代數函數
- 初等函數

線性函數

Definition

線性函數就是具有可加性與齊次性的函數

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(cx) = cf(x)$$

- 最簡單的例子，乘號！它是雙線性！
  - 左邊也線性，右邊也線性，不就雙線性？
  - 乘號不一定要有交換律噢！像外積跟矩陣乘積

多項式

Definition

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

- 多項式可以表示為自變數與常數有限次的加、減、乘
- 多項式是平滑函數
  - 平滑函數無窮可微
  - 可微必連續

有理函數

Definition

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

其中 P 和 Q 是多項式，且 $Q \neq 0$

- 有理函數可以表示為自變數與常數有限次的四則運算
- 在微積分上，我們常把有理函數分解成部份分式
    - 微分跟積分都是線性算子
    - 處理 $\dfrac{1}{ax+b}$ 比 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ 容易多了！

$$\frac{x^3 - 5x + 88}{x^2 + 3x - 28} = x - 3 + \frac{32x + 4}{x^2 + 3x - 28} = x - 3 + \frac{20}{x+7} + \frac{12}{x-4}$$

代數函數

Definition

代數函數 y 是以下函數方程的解，其中係數 $a_i(x)$ 都是整係數多項式：

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_0(x) = 0$$

- 代數函數可以表示為自變數與常數有限次的加、減、乘、除和開方的運算（有理運算）
- $\sqrt{x^2+1}$ 是代數函數，但不是有理函數

初等函數

Definition

初等函數是由冪函數（x^a）、指數函數、對數函數、三角函數、反三角函數與常數經過有限次的有理運算和/或函數複合所產生

- 初等函數就是可以用解析式表示的函數
- $\lfloor x \rfloor$ 不是初等函數
- $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ 不是初等函數
- 但 $|x|$ 不小心在**實數**域上**是**初等函數（為什麼？）

為什麼我們需要極限？

- 我們很容易就能從自然數建構整數，再從整數建構有理數
- 接下來，人類學會建構代數數。代數數可以是整係數多項方程的解
- 但是有些不是代數數的數（超越數）就自動跑出來了，像是 e、π、$2^{\sqrt{2}}$ 等
- 對於這些數，我們如果要取值，只能用逼近的

正實數的實數冪

- 正實數的有理次冪，可以用開方來獲得
- 但是 $2^{\sqrt{2}}$ 一定是開不出來的啦！
  - 注意，證明做不出來，跟目前沒有人做出來，是不同的
  - Lindermann–Weierstrass theorem: 如果 α 是非零代數數，則 e^{α} 是超越數
  - Gelfond–Schneider theorem: 如果 α 和 β 都是代數數，其中 $\alpha \neq 0$ 且 $\alpha \neq 1$，且 β 不是有理數，那麼 α^{β} 是超越數
- 它的平方根 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 也是一個超越數
  - 無理數的無理數次方可以是有理數，如 $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$
- $2^{\sqrt{2}} = \lim_{t \to \sqrt{2}} 2^t$

極限的定義

Definition

若對於所有正數 ϵ，必存在一正數 δ 使得

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

則

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

函數的連續性

Definition

若函數 f 在 c 點連續，則符合以下條件

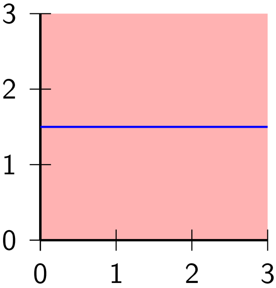
- $f(c)$ 有定義
- $\lim_{x \to c} f(x)$ 存在
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

$$\lim_{x \to c} r = r$$

Proof.

1. 若 $0 < |x - c| < \delta$ 則 $|r - r| = 0$
2. 對於所有正數 ϵ，存在 δ 使得若 $0 < |x - c| < \delta$ 則 $|r - r| = 0$

$\square$

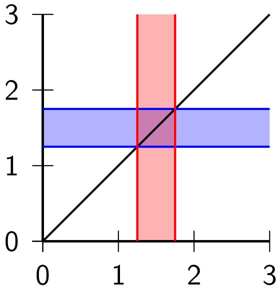


$$\lim_{x \to c} x = c$$

Proof.

1. 設 $\delta := \epsilon$
2. 若 $0 < |x - c| < \delta$, 則 $|x - c| < \delta = \epsilon$

$\square$



$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

Proof.

1. 設 $L := \lim_{x \to c} f(x), \; M := \lim_{x \to c} g(x)$
2. 設一任意正數 ϵ，則我們有
   - 存在正數 δ_1 使得 $0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$
   - 存在正數 δ_2 使得 $0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$
3. 設 $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$，則

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \le |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

$\square$

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = \lim_{u \to \lim_{x \to c} g(x)} f(u)$$

Proof.

1. 設 $M := \lim_{x \to c} g(x)$，並重新定義 $f(M) := \lim_{u \to M} f(u)$ 使 f 在 M 上連續，不失一般性
2. 設一任意正數 ϵ
   - 存在正數 δ_1 使得 $0 < |u - M| < \delta_1 \Rightarrow |f(u) - f(M)| < \epsilon$
   - 當 $u = M$，我們也有 $f(u) = f(M)$ 即 $|f(u) - f(M)| = 0$
   - 存在正數 δ_1 使得 $|u - M| < \delta_1 \Rightarrow |f(u) - f(M)| < \epsilon$
3. 設 $\epsilon_1 := \delta_1$
   - 存在正數 δ 使得 $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon_1$
   - 若 $|g(x) - M| < \delta_1$ 則 $|f(g(x)) - f(M)| < \epsilon$
4. 所以 $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(M) = \lim_{u \to M} f(u)$

$\square$

初等函數在定義域上連續

- 只有以上四個命題需要使用 ϵ-δ 論述證明
- 連續函數的反函數也連續

$$\lim_{u \to \lim_{x \to c} f(x)} f^{-1}(u) = \lim_{x \to c} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \to c} x = c$$

- 代數函數、冪函數、指數函數都可以用常數、變數、加法、複合函數、反函數這五者組合出來
- 下次我們將證明三角函數也在定義域上連續

多項式是連續函數

$$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x) \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{n} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{n} \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to c} bf(x) = b\lim_{x\to c} f(x) \qquad b\in\mathbb{Q}$$

$$\lim_{x\to c} af(x) = \lim_{x\to c}\left(\left(\lim_{b\to a} b\right) f(x)\right) = a\lim_{x\to c} f(x) \qquad b\in\mathbb{Q}$$

$$\lim_{x\to c} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to c}\left(f(x)\lim_{x\to c} g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x)\lim_{x\to c} g(x)$$

初等函數在定義域上連續

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to c}f(x)}{\lim\limits_{x\to c}g(x)} \qquad g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to c}f(x)^k=\left(\lim_{x\to c}f(x)\right)^k \qquad k\in\mathbb{Z},\ f(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c}f(x)} \qquad n\in\mathbb{N},\ f(x)>0$$

$$\lim_{x\to c}f(x)^b=\left(\lim_{x\to c}f(x)\right)^b \qquad b\in\mathbb{Q},\ f(x)>0$$

$$\lim_{x\to c}f(x)^a=\left(\lim_{x\to c}f(x)\right)^a \qquad f(x)>0$$

$$\lim_{x\to c}f(x)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to c}f(x)\right)^{g(x)} \qquad f(x)>0$$

無窮極限

Definition

若對於所有正數 r，均能找到一正數 δ 使得 $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(c) > r$，則

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

若對於所有負數 r，均能找到一正數 δ 使得 $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(c) < r$，則

$$lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

- ∞ 就是比任何一個實數都大！

Definition

若對於所有正數 ϵ，均能找到一正數 δ 使得 $c < x < c + \delta \Rightarrow |f(c) - L| < \epsilon$，則

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

若對於所有正數 ϵ，均能找到一正數 δ 使得 $c - \delta < x < c \Rightarrow |f(c) - L| < \epsilon$，則

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

- 先前我們觀察的區間是 $0 < |x - c| < \delta$，所是會觀察到 x 在 c 兩側的行為
- 如果只觀察 $0 < x - c < \delta$，就只會觀察到右側，反之亦然。

複習初等函數

- 在高中的時候，我們已經把初等函數學得差不多了，除了
  - 自然指數、自然對數
  - 反三角函數

指數函數

- 有理數具有稠密性，所以我們可以用有理數列來逼近一個無理數，像這樣

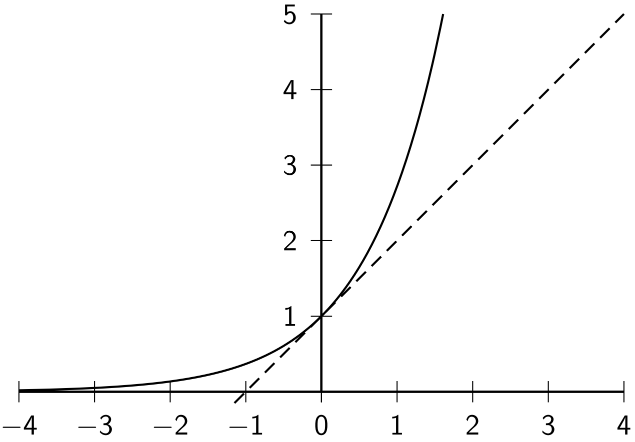
$$\lim_{b \to r} b = r, \ \ b \in \mathbb{Q}, \ \ r \in \mathbb{R}$$

- 自然指數就是以 e 為底的指數函數，其中

$$\mathrm{e} := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828$$

  - 這個數列的收斂速度非常慢，到了第 n 項大概只有 $\log n$ 位的有效位數
  - 我們有更有效的方法來計算 e^x

e^x 的圖形



對數函數

- 人類是先有對數才有指數！
- 不過就現代數學而言，通常把 $\log_b x$ 定義為 b^x 的反函數。其中 $\ln := \log_e$
- 為什麼要拿這麼奇怪的數字當底數呢？

自然對數

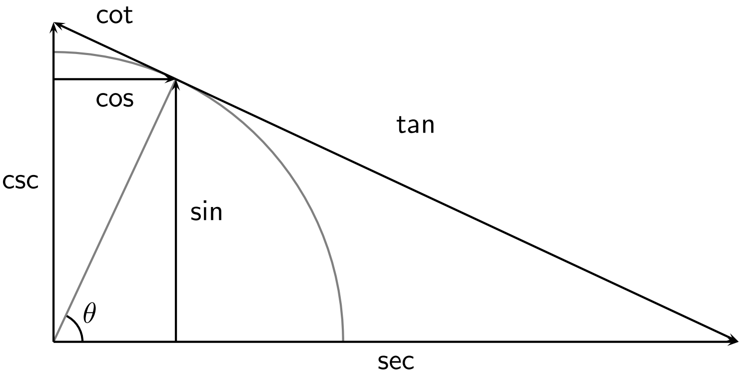
- 在沒有計算機的年代，算乘法是大工程
  - n 位數加法的時間複雜度：$O(n)$
  - n 位數直式的乘法的時間複雜度：$O(n^2)$
- 對數表可以把乘法映射（map）到加法，加完再用反對數映射回去
- 對數表要怎麼製作呢？
  - 乘方比開方好算
  - 算 x^n 頂多只要 $2\log_2 n$ 次乘法（不是 $n-1$？）
  - 底數要小到接近 1 才能避免開方

納皮爾對數

- 納皮爾（John Napier，1550–1617）先以 $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)$ 為底算出對數值，再把結果除以 10^7。也就是製作以 $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ 為底的對數表
- 當後來要求的精度越來越精確，我們逐步把 10^7 提升到更高的數字，最後乾脆取極限

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

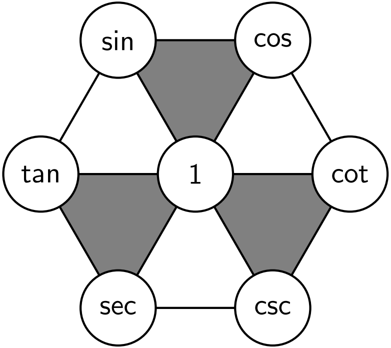
三角函數的定義



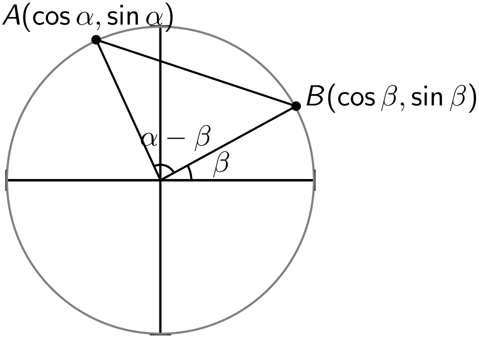
三角函數的性質

微積分的基石

何震邦



餘弦差角公式



$$\overline{AB}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$
$$\overline{AB}^2 = 1 + 1 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

反三角函數

- Wait! 每個三角函數都有 2π 這個週期，所以鐵定不是一對一函數啊！怎麼會有反函數咧？
- 我們可以把他們限制在一個區間內，讓他在區間內是一對一函數
  - 為了方便，我們會讓區間包含 0 和 1，讓數字看起來比較舒服

函數	受限的定義域	值域
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$(0, \pi)$	$\mathbb{R}$
$\sec x$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc x$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

謝謝聆聽！

- 部落格
- 討論版
- 系列教材