

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

微分方程

何震邦 <jdh8.org>



2014 年 12 月 1 日

一階常微分方程

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

一階常微分方程為符合以下兩者之一的方程式：

1. $P(x, y) y' + Q(x, y) = 0$

2. $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 。

若我們解出方程，通解可用以下形式表達：

$$\phi(x, y) = c$$

其中 c 是積分常數。

方法 1：一階線性微分方程

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努利

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定微分方程

$$f(x) y' + g(x) y + h(x) = 0.$$

設 $P(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 與 $Q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$ ，則通解為

$$e^{\int P dx} y + \int e^{\int P dx} Q dx = c.$$

通解的證明

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Proof.

$$f(x)y' + g(x)y + h(x) = 0$$

$$y' + Py + Q = 0$$

$$e^{\int P dx} y' + e^{\int P dx} Py + e^{\int P dx} Q = 0$$

$$\left(e^{\int P dx} y\right)' + e^{\int P dx} Q = 0$$

$$e^{\int P dx} y + \int e^{\int P dx} Q dx = c.$$



指數衰變

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Example

An exponential decay function $f(t) = y_0 e^{-kt}$ models the amount of drug in the blood t hours after an initial dose of $y_0 = 100$ mg is administered. Assume the half-life of a particular drug is 16 hours. How much time is required for the drug to reach 1% of the initial dose (1 mg)?

Solution

$$50 = 100e^{-16k}$$

$$k = \frac{\ln(2)}{16}$$

$$1 = 100e^{-\frac{\ln(2)}{16}t}$$

$$t = 16 \log_2(100) \approx 106.30169903639559513 \text{ (小時)}.$$



方法 2：變數可分離的微分方程

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定微分方程

$$A(x) B(y) dx + C(x) D(y) dy = 0.$$

通解為

$$\int \frac{A(x)}{C(x)} dx + \int \frac{D(y)}{B(y)} dy = c.$$

證明從略。

Logistic 成長，頁 1

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Example

A population grows according to the logistic differential equation $y' = 0.0003y(2000 - y)$. The initial population size is 800. Solve this differential equation and use the solution to predict to population size at time $t = 3$.

本題為一個初期值問題

$$\begin{cases} y'(t) = 0.0003y(t)(2000 - y(t)) \\ y(0) = 800 \end{cases}$$

Logistic 成長，頁 II

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

原微分方程為變數可分離的微分方程。

$$\begin{aligned}10000y' - 3y(2000 - y) &= 0 \\10000dy - 3y(2000 - y) dt &= 0 \\ \int \frac{10000}{3y(2000 - y)} dy - \int dt &= c \\ \int \frac{5}{3} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - 2000} \right) dy - \int dt &= c \\ \frac{5 \ln|y|}{3} - \frac{5 \ln|y - 2000|}{3} - t &= c.\end{aligned}$$

代入初期值條件 $y(0) = 800$ 以求取積分常數

$$c = \frac{5 \ln|800|}{3} - \frac{5 \ln|-1200|}{3} = \frac{5 \ln(2)}{3} - \frac{5 \ln(3)}{3}.$$

Logistic 成長，頁 III

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

代回原方程，因為 $0 < 800 < 2000$ ，整理得：

$$\ln y - \ln(2000 - y) = \frac{3t}{5} + \ln(2) - \ln(3)$$

$$\frac{y}{2000 - y} = \frac{2e^{\frac{3t}{5}}}{3}$$

$$\frac{y(3)}{2000 - y(3)} = \frac{2e^{9/5}}{3}$$

$$y(3) = \frac{4000e^{9/5}}{2e^{9/5} + 3} \approx 1602.6304520653167546.$$

方法 3：恰當微分方程

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努利

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

其中

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1)$$

通解為

$$\int P dx + \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right) dy.$$

(1)式的充要條件

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努利

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^m y$ 替代

Theorem

(1)式等價於存在函數 $\phi(x, y)$ 使得

$$d\phi = P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (2)$$

若(1)則(2)

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Proof.

設

$$\phi = \int P dx + \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right) dy.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= P + \frac{\partial}{\partial x} \int \left(Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right) dy \\ &= P + \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = P. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P dx + Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx = Q.$$



若(2)則(1)

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^m y$ 替代

Proof.

根據偏導數的定義，

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy. \quad (3)$$

比較(2)與(3)得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P \quad \text{且} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q.$$

若 P, Q, P_y 與 Q_x 在所討論的平面區域上連續，則在此區域中

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$



積分乘數

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

對於非恰當微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

我們可以試著尋找積分乘數 $\mu(x, y)$ 使得

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0$$

為恰當微分方程，即

$$\frac{\partial}{\partial y} \mu P = \frac{\partial}{\partial x} \mu Q \quad (4)$$

其中 $\mu \neq 0$ 。

積分乘數為單變函數

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定非恰當微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (5)$$

若 $\frac{P_y - Q_x}{Q} = h(x)$ ，則積分乘數為

$$\mu(x) = e^{\int h(x) dx}. \quad (6)$$

同理，若 $\frac{Q_x - P_y}{P} = k(y)$ ，則積分乘數為

$$\mu(y) = e^{\int k(y) dy}.$$

(6)式的證明

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Proof.

設 $\mu(x)$ 為(5)的積分乘數，則由(4)得

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{d\mu}{dx} = 0$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx = h dx$$

$$\ln \mu = \int h dx$$

$$\mu = e^{\int h dx}.$$



P 與 Q 滿足柯西-黎曼方程時的積分乘數

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (7)$$

其中

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{且} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

即 P 與 Q 滿足 柯西-黎曼方程，此時積分乘數為

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P^2 + Q^2}.$$

方法 4：伯努力微分方程

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定微分方程

$$f(x) y' + g(x) y + h(x) y^n = 0$$

其中 $n \neq 1$ 。設 $u(x) = y^{1-n}$ ，則原方程轉為線性的

$$f(x) u' + (1 - n) g(x) u + (1 - n) h(x) = 0.$$

齊次函數

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Definition

函數 $f(x, y)$ 稱為 n 次齊次函數，等價於

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \quad (8)$$

其中 n 為常數。

Example

- ▶ $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$ 為 3 次齊次函數。
- ▶ $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ 不是齊次函數。

方法 5：齊次微分方程

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努利

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

其中 P 與 Q 皆為 x, y 的齊次函數。設 $u(x) = y/x$ ，則原方程轉為變數可分離的方程。

方法 6：幾乎線性的微分方程

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定微分方程

$$f(x) k'(y) y' + g(x) k(y) + h(x) = 0.$$

設 $u(x) = k(y)$ ，則原方程轉為線性的

$$f(x) u' + g(x) u + h(x) = 0.$$

Remark

這方法在課本上罕見。

方法 7：含線性分式的微分方程

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努力

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定微分方程

$$y' + F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = 0.$$

若在 xy -平面上，直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 與 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 交於 (h, k) ，設 $X = x - h$ 與 $Y = y - k$ ，則原方程轉為齊次的

$$\frac{dY}{dX} + F\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = 0.$$

方法 8：以 $x^n y$ 替代

微分方程

何震邦

一階 ODE

線性

變數可分離

恰當-積分乘數

伯努利

齊次

幾乎線性

含線性分式

以 $x^n y$ 替代

Theorem

給定微分方程

$$y' + \frac{yH(x^n y)}{x} = 0$$

其中 n 為待定常數。設 $u(x) = x^n y$ ，則原方程轉為變數可分離的

$$\frac{du}{u(n - H(u))} = \frac{dx}{x}.$$

