

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

微分

極限、微分、番外篇

何震邦 <jdh8@ms63.hinet.net>



2012 年 10 月 24 日

前情提要

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

- ▶ 上回有些關於極限的東西被略過了，這次要來把它補完
 - ▶ 上確界、下確界
 - ▶ 上極限、下極限
 - ▶ 夾擠定理
 - ▶ 一些常用的極限值
- ▶ 我們現在討論的範圍是實數，因為複數不能比大小

上確界與下確界

微分

何震邦

極限

極限的存在

夾擠定理

三角函數的連續性

常用的極限值

微分

微分的定義

微分法則

微分技巧

微分初等函數

隱函數與反函數

微分與線性近似

番外篇

比較係數法

線性回歸

Definition

對於一個實數的集合 S ，它的上確界 $\sup(S)$ 是大於等於 S 中所有成員的最小實數

- ▶ $\sup\{1, 2, 3\} = 3$
- ▶ $\sup\{0 < x < 1\} = \sup\{0 \leq x \leq 1\} = 1$
- ▶ $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = 1$
 - ▶ 這是個有理數的集合，但它的上確界是無理數！
 - ▶ 所以有理數是不完備的，也就是 \mathbb{Q} 這個集合有洞
- ▶ $\sup \mathbb{N} = \infty$
- ▶ $\sup \emptyset = -\infty$

Definition

對於一個實數的集合 S ，它的下確界 $\inf(S)$ 是小於等於 S 中所有成員的最大實數

$$\inf(S) = -\sup(-S)$$

上極限與下極限

微分

何震邦

Definition

函數的上極限與下極限定義為

$$\limsup_{x \rightarrow c} f(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sup\{f(x) : 0 < |x - c| < \delta\})$$

$$\liminf_{x \rightarrow c} f(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0} (\inf\{f(x) : 0 < |x - c| < \delta\})$$

當 δ 縮小時，右式的範圍也單調地縮小。所以以上兩式也可以寫作

$$\limsup_{x \rightarrow c} f(x) := \inf_{\delta > 0} (\sup\{f(x) : 0 < |x - c| < \delta\})$$

$$\liminf_{x \rightarrow c} f(x) := \sup_{\delta > 0} (\inf\{f(x) : 0 < |x - c| < \delta\})$$

極限

極限的存在

夾擠定理

三角函數的連續性

常用的極限值

微分

微分的定義

微分法則

微分技巧

微分初等函數

隱函數與反函數

微分與線性近似

番外篇

比較係數法

線性回歸

極限的存在

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Theorem

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ 等價於以下敘述

- ▶ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$
- ▶ $\limsup_{x \rightarrow c} f(x) = L$ 且 $\liminf_{x \rightarrow c} f(x) = L$
- ▶ 除了用傳統的 ϵ - δ 證明，我們也可以利用極限的方向來驗證極限是否存在
- ▶ 反正就是 D&C

Divide and conquer!

上下極限必存在

微分

何震邦

極限

極限的存在

夾擠定理

三角函數的連續性

常用的極限值

微分

微分的定義

微分法則

微分技巧

微分初等函數

隱函數與反函數

微分與線性近似

番外篇

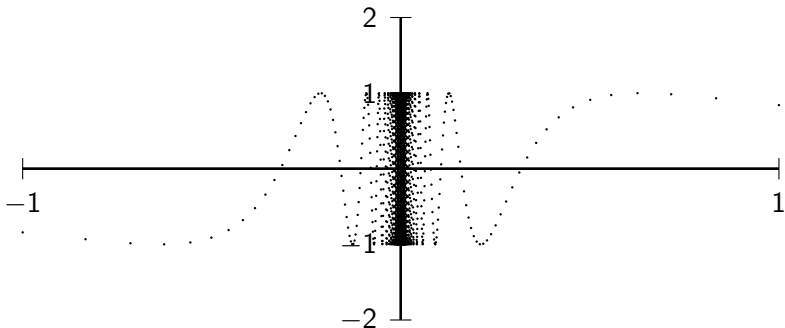
比較係數法

線性回歸

- ▶ 左右極限可能不存在，但上下極限必存在

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \quad \liminf_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1$$

- ▶ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 與 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 均不存在



夾擠定理

微分

何震邦

Theorem

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

- ▶ 設一包含 c 點的區間 I ，又 f, g, h 為定義在 $I \setminus \{c\}$ 上的函數
- ▶ 對於所有 $x \in I \setminus \{c\}$ ，均有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Proof.

$$L = \lim_{x \rightarrow c} g(x) \leq \liminf_{x \rightarrow c} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$



假夾擠，真詐財

微分

何震邦

極限

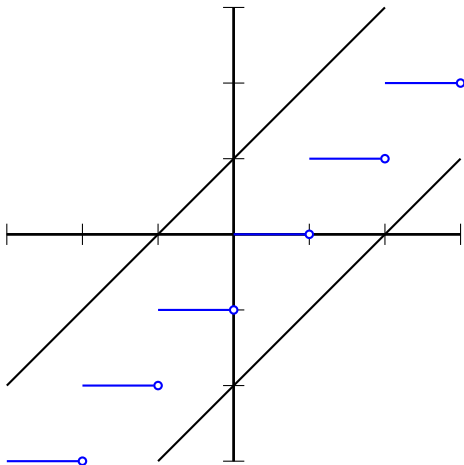
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



$$f(x) := \lfloor x \rfloor$$

$$g(x) := x + 1$$

$$h(x) := x - 2$$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在!}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$$

微分

何震邦

極限

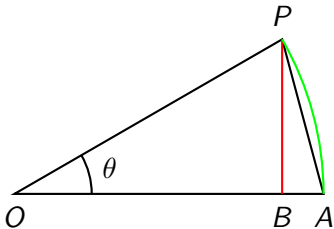
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



Proof.

當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$0 < \triangle OAP < \text{扇形 } OAP$$

$$0 < \sin \theta < \theta$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} 0 = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \theta = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \sin \theta = - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta = 0$$



三角函數是連續函數

微分

何震邦

Proof.

▶ 若 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

▶ \sin 是連續函數

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(c + h) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin c \cos h + \cos c \sin h) \\&= 1 \sin c + 0 \cos c \\&= \sin c\end{aligned}$$

▶ 其他三角函數均可以自變數與 \sin 的有理式表達

極限

極限的存在

夾擠定理

三角函數的連續性

常用的極限值

微分

微分的定義

微分法則

微分技巧

微分初等函數

隱函數與反函數

微分與線性近似

番外篇

比較係數法

線性回歸

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

微分

何震邦

極限

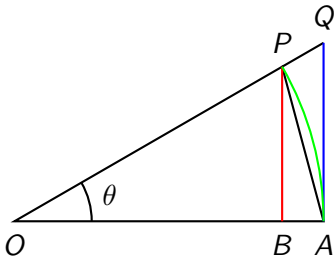
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



Proof.

當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\triangle OAQ > \text{扇形 } OAP > \triangle OAP$$

$$\tan \theta > \theta > \sin \theta$$

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0, \text{ 天啓解法}$$

微分

何震邦

Proof.

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta} \right) \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= 0\end{aligned}$$



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0, \text{ 幾何解法}$$

微分

何震邦

Proof.

極限

極限的存在

夾擠定理

三角函數的連續性

常用的極限值

微分

微分的定義

微分法則

微分技巧

微分初等函數

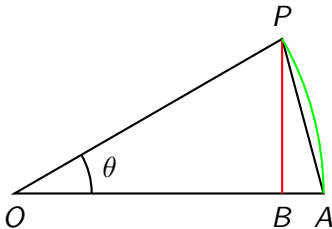
隱函數與反函數

微分與線性近似

番外篇

比較係數法

線性回歸



$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AB}}{\text{弧 } AP} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{BP} \tan \angle APB}{\text{弧 } AP} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \tan \frac{\theta}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = -0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

微分

何震邦

Proof.

極限

極限的存在

夾擠定理

三角函數的連續性

常用的極限值

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

微分

微分的定義

微分法則

微分技巧

微分初等函數

隱函數與反函數

微分與線性近似

▶ 當 $x > 0$, $1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$

▶ 當 $x < 0$, $1 - x > x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$



$y = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ 的圖形

微分

何震邦

極限

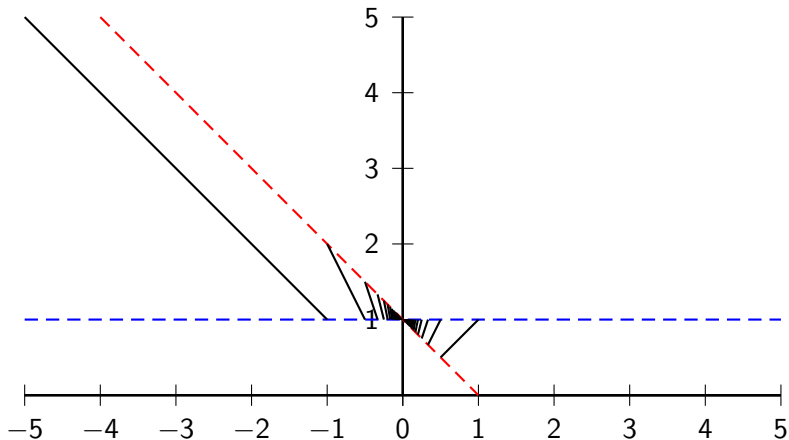
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



微分的用途

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

- ▶ 最佳化
 - ▶ 手繪函數圖形
- ▶ 微分方程
 - ▶ 微分就是變化，所以常用來描述物理/化學變化
- ▶ 級數逼近
 - ▶ 用多項式或有理函數來逼近無理函數
 - ▶ 數值上，我們只會算四則運算！
- ▶ 處理隱函數
 - ▶ 圓錐曲線

割線與切線

微分

何震邦

極限

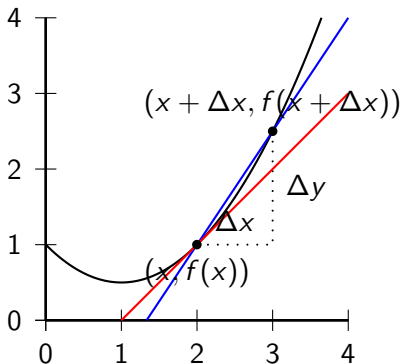
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



Lemma

- ▶ 切線是割線的極限
- ▶ 割線的斜率為

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- ▶ 切線的斜率為

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

導數 (derivative)

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Theorem

對於函數 $y = f(x)$ ，它的在 $x = c$ 處的導數定義為

$$f'(c) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- ▶ 導數也是函數在該點的切線斜率
- ▶ 導數是微分 (differential) 的商，故又稱微商
- ▶ 求導的過程叫微分 (differentiation)

導函數

微分

何震邦

極限

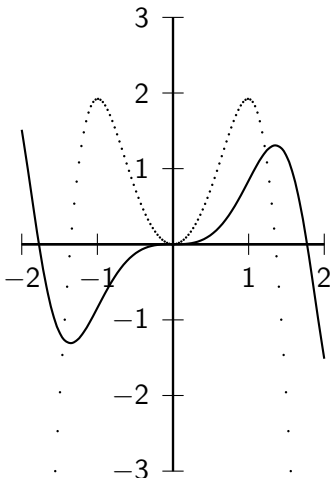
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



對於定義域中找得到 $f'(c)$ 的 c ，可以把這些導數們又當成一個函數來看，就是導函數

Definition

對於函數 $y = f(x)$ ，它的導函數 $y' = f'(x)$ 如下

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

導函數的記法

微分

何震邦

- ▶ 拉格朗日 (Lagarange) 記法

$$y' = f'(x)$$

- ▶ 萊布尼茲 (Leibniz) 記法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

- ▶ 牛頓記法

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{a}$$

- ▶ 算子記法，由黑維塞 (Heaviside) 發明

$$Dy = D_x y = Df(x)$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

從定義計算導函數

微分

何震邦

Example

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\&= (-\sin x) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} \right) + (\cos x) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) \\&= \cos x\end{aligned}$$

可微必連續

微分

何震邦

Theorem

若函數 f 在 c 上可微，則它必在此連續

Proof.

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left(\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) (x - c) + f(c) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x \rightarrow c} (x - c) + \lim_{x \rightarrow c} f(c) \\ &= f(c)\end{aligned}$$



高階導函數

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Definition

把導函數拿來微分，結果就是二階導函數

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$n + 1$ 階導函數，是 n 階導函數的導函數

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x)$$

高階導函數的記法

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

一階導數	$y' = f'(x)$	$Dy = Df(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$
二階導數	$y'' = f''(x)$	$D^2y = D^2f(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$
三階導數	$y''' = f'''(x)$	$D^3y = D^3f(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3}f(x)$
四階導數	$y^{(4)} = f^{(4)}(x)$	$D^4y = D^4f(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4}{dx^4}f(x)$
n 階導數	$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$	$D^n y = D^n f(x)$	$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}f(x)$

微分法則

微分

何震邦

Theorem

▶ 線性法則

$$\begin{aligned}(u + v)' &= u' + v' \\ (cy)' &= cy'\end{aligned}$$

▶ 乘法法則

$$(uv)' = u'v + uv'$$

▶ 連鎖法則

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

線性法則

微分

何震邦

Proof.

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\&= f'(x) + g'(x) \\(cf(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\&= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= cf'(x)\end{aligned}$$



乘法法則

微分

何震邦

Proof.

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}& (f(x)g(x))' \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$



連鎖法則 I

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \right) \left(\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right)\end{aligned}$$

$$\text{設一分段定義函數 } Q(y) := \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(c))}{y - g(c)}, & y \neq g(c) \\ f'(g(c)), & y = g(c) \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow g(c)} Q(y) = \lim_{y \rightarrow g(c)} \frac{f(y) - f(g(c))}{y - g(c)} = f'(g(c))$$

連鎖法則 II

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} Q(g(x)) \left(\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow c} Q(g(x)) \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\&= f'(g(x)) g'(x)\end{aligned}$$

連續使用乘法法則和連鎖法則

微分

何震邦

Theorem

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$g(x) := \prod_{i=1}^n f_i(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_i \left(f'_i(x) \prod_{j \neq i} f_j(x) \right) \\ &= f'_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x) + f_1(x) f'_2(x) \cdots f_n(x) + \cdots \\ &\quad + f_1(x) f_2(x) \cdots f'_n(x) \end{aligned}$$

$$y := f_1(f_2(\cdots f_n(x) \cdots))$$

$$\frac{dy}{dx} = \prod_{i=1}^{n-1} f'_i(f_{i+1}(f_{i+2}(\cdots f_n(x) \cdots))) = \frac{df_1}{df_2} \frac{df_2}{df_3} \cdots \frac{df_{n-1}}{df_n}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

微分

何震邦

Proof.

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right)}{x} \\&= \frac{\ln \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{x} = \frac{\ln e}{x} \\&= \frac{1}{x}\end{aligned}$$



$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

微分

何震邦

Proof.

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

- ▶ 當 $x > 0$, $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
- ▶ 當 $x < 0$

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln |x| &= \frac{d}{dx} \ln(-x) \\ &= \left(\frac{d}{du} \ln u \right) \frac{du}{dx} & u = -x \\ &= \left(\frac{1}{u} \right) (-1) \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

番外篇

比較係數法
線性回歸



對數微分法 (logarithmic differentiation)

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

當實函數 $y := f(x)$ 難於微分時，先取其絕對值的對數
 $\ln |f(x)|$

$$\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \left(\frac{d}{dy} \ln |y| \right) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{y} \right) f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

廣義冪法則

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\ln |f(x)^{g(x)}| = g(x) \ln |f(x)|$$

$$(g(x) \ln |f(x)|)' = g'(x) \ln |f(x)| + \frac{f'(x) g(x)}{f(x)}$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \left(\frac{f'(x) g(x)}{f(x)} + g'(x) \ln |f(x)|\right)$$

除法法則

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} f(x) g(x)^{-1} \\ &= f'(x) g(x)^{-1} - f(x) g(x)^{-2} g'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

有理函數的導函數

微分

何震邦

Example

Given $f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}$, find $f'(2)$.

Solution

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x^2(1-x)^3)'}{1+x} - \frac{x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} \\&= \frac{2x(1-x)^3 - 3x^2(1-x)^2}{1+x} - \frac{x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} \\f'(2) &= \frac{-4-12}{3} + \frac{4}{9} = \frac{-44}{9}\end{aligned}$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

微分

Proof.

何震邦

極限

極限的存在

夾擠定理

三角函數的連續性

常用的極限值

微分

微分的定義

微分法則

微分技巧

微分初等函數

隱函數與反函數

微分與線性近似

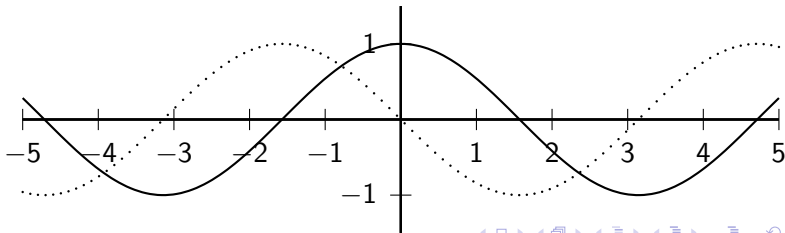
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cos x &= \frac{d}{dx} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ &= -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ &= -\sin x\end{aligned}$$



番外篇

比較係數法

線性回歸



$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

微分

何震邦

極限

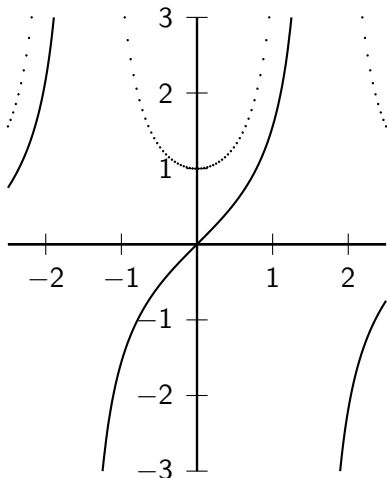
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



Proof.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

□

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

微分

何震邦

極限

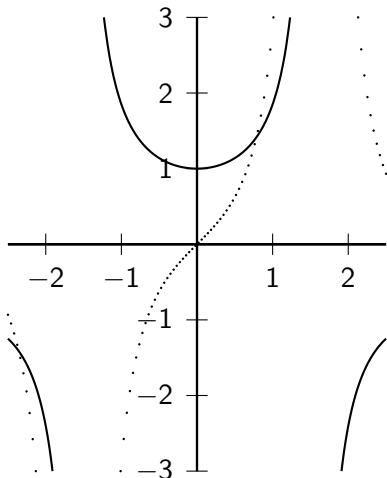
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



Proof.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sec x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x} \\ &= -\frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \sec x \tan x \end{aligned}$$



初等函數的導函數 I

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Example

Given $f(x) = \ln(\sec^4 x + \tan^2 x)$, find $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Solution

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sec^4 x + \tan^2 x) &= 4(\sec^3 x)(\sec x \tan x) + 2\sec^2 x \tan x \\ &= 4\sec^4 x \tan x + 2\sec^2 x \tan x \\ f'(x) &= \frac{4\sec^4 x \tan x + 2\sec^2 x \tan x}{\sec^4 x + \tan^2 x} \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{16 + 4}{4 + 1} = 4\end{aligned}$$

初等函數的導函數 II

微分

何震邦

Example

給定 $f(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$ ，求 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Solution

$$\ln |f(x)| = \sin x \ln (x^2 + 1)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln (x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = (x^2 + 1)^{\sin x} \left(\cos x \ln (x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1} \right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) \left(\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4} + 1}\right) = \pi$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

隱函數

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

- ▶ 有時候兩個變數的關係並非函數關係，而是
 - ▶ 隱函數 $\phi(x, y) = 0$ ，如 $x^2 + y^2 = 1$
 - ▶ 參數式 $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$
- ▶ 當我們要做 $d\phi/dx$ 時，因為 y 會隨 x 變動，所以不能視為常數，要用連鎖法則把他做掉
- ▶ 詳細原理、證明等期中考後我們有空再來解決，它跟多變數的微分有關

回顧錐線切線公式 I

微分

何震邦

求錐線 $\phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 上一點 (x_0, y_0) 上的切線

$$\frac{d\phi}{dx} = 2ax + b(y + xy') + 2cyy' + d + ey' = 0$$

$$\frac{d\phi}{dx}(x_0, y_0) = (bx_0 + 2cy_0 + e)y' + 2ax_0 + by_0 + d = 0$$

$$y' = -\frac{2ax_0 + by_0 + d}{bx_0 + 2cy_0 + e}$$

代入點斜式得切線為

$$y - y_0 = \left(-\frac{2ax_0 + by_0 + d}{bx_0 + 2cy_0 + e} \right) (x - x_0)$$

咦，怎麼沒有 f ？這不是高中背的樣子啊！

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

回顧錐線切線公式 II

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$(2ax_0 + by_0 + d)(x - x_0) + (bx_0 + 2cy_0 + e)(y - y_0) = 0$$

$$\begin{aligned} & 2ax_0x + b(y_0x + x_0y) + 2cy_0y + d(x + x_0) + e(y + y_0) \\ &= 2(ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0) \\ &= -2f \end{aligned}$$

$$ax_0x + b\left(\frac{y_0x + x_0y}{2}\right) + cy_0y + d\left(\frac{x + x_0}{2}\right) + e\left(\frac{y + y_0}{2}\right) + f = 0$$

求曲線上的切線

微分

何震邦

Example

Find the equation of the tangent line of the curve
 $y^3 - xy^2 + xy = -14$ at $(1, -2)$

Solution

$$3y^2y' - (2xyy' + y^2) + (xy' + y) = 0$$

$$(3y^2 - 2xy + x)y' = y^2 - y$$

$$y'(1, -2) = \frac{(-2)^2 - (-2)}{3(-2)^2 - 2(1)(-2) + 1} = \frac{6}{17}$$

故切線方程式為

$$y + 2 = \frac{6(x - 1)}{17}$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

求曲線上的法線

微分

何震邦

Example

Find the equation of the normal line of the curve $y^3 - xy^2 + xy = -14$ at $(1, -2)$

Solution

$$\begin{aligned} y'(1, -2) &= \frac{6}{17} \\ \frac{-1}{y'(1, -2)} &= \frac{-17}{6} \end{aligned}$$

故法線方程式為

$$y + 2 = \frac{-17(x - 1)}{6}$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$y^3 - xy^2 + xy = -14$ 的特寫

微分

何震邦

極限

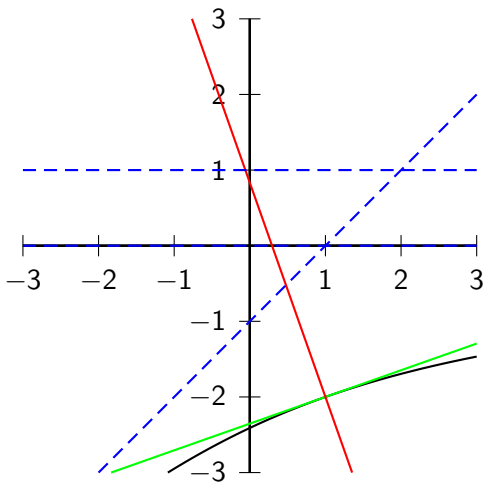
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



$y^3 - xy^2 + xy = -14$ 的全貌

微分

何震邦

極限

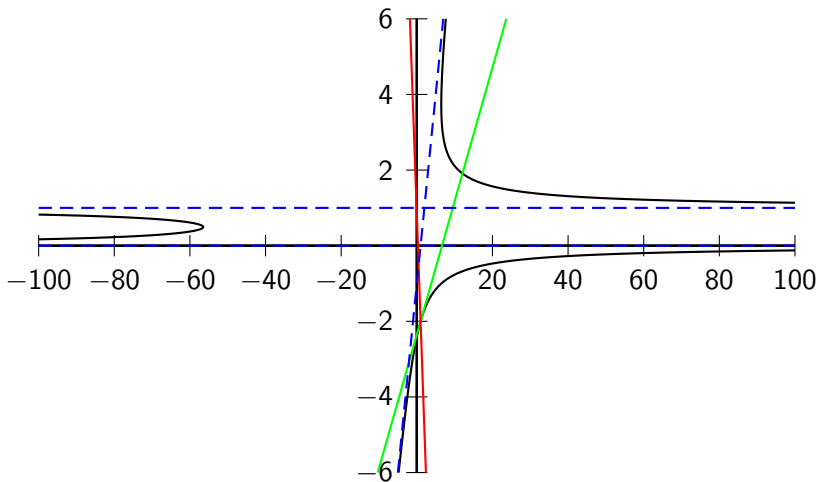
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



反函數的導數

微分

何震邦

Theorem

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$(f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}$$

Proof.

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x \\ f'(f^{-1}(x)) (f^{-1})'(x) &= 1 \\ (f^{-1})'(c) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(c))} \end{aligned}$$



$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

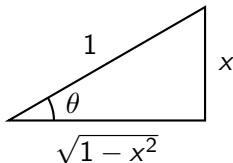
微分

何震邦

Proof.

設 $\theta := \arcsin x$ ，則 $x = \sin \theta$ 且 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$



極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}$$

微分

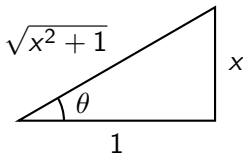
何震邦

Proof.

設 $\theta := \arctan x$ ，則 $x = \tan \theta$ 且 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2 \theta = \frac{1}{x^2 + 1}$$



極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

反三角函數的圖形

微分

何震邦

極限

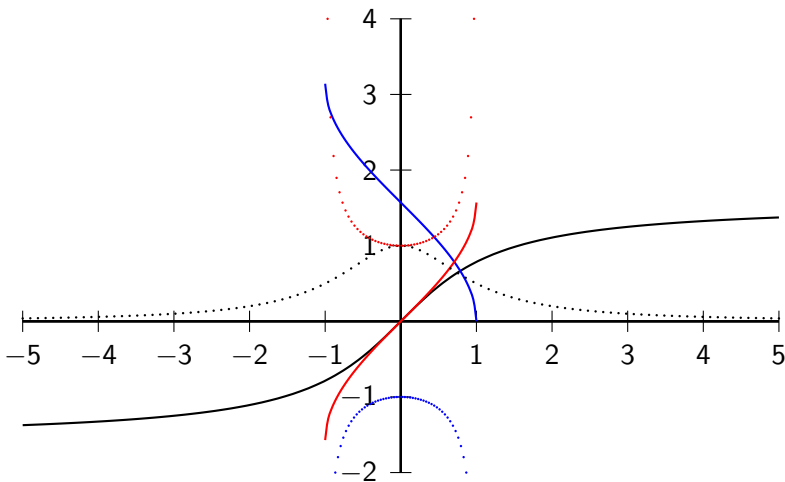
極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸



微分 (differential)

微分

何震邦

Definition

對於函數 $y = f'(x)$ 而言，它的微分 dy 為

$$dy := f'(x)dx$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

Theorem

- ▶ 它具有線性性

$$d(u + v) = du + dv$$

$$d(cy) = c dy$$

- ▶ 乘法定則

$$d(uv) = u dv + v du$$

番外篇

比較係數法
線性回歸

例題

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Example

In the late 1830s, French physiologist Jean Poiseuille discovered the formula we use today to predict how much the radius of a particular clogged artery decreases the normal volume of flow. His formula,

$$V = kr^4$$

say that volume of fluid flowing through a small pipe or tube in a unit of time at a fixed pressure is a constant times the fourth power of the tube's radius r . How does a 10% decrease in r affect V ?

解題

微分

何震邦

Solution

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

- ▶ 標準答案：

$$dV = 4kr^3 dr$$
$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3 dr}{kr^4} = \frac{4dr}{r}$$

- ▶ V 的相對變化率為 r 的四倍，故減少 40%
- ▶ 嘴炮答案：

$$(1 - 0.1)^4 = 0.6561$$

- ▶ 故變為原本的 65.61%

線性近似

微分

何震邦

線性近似就是用函數的切線來對該函數進行近似。當 $x \approx c$

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c)$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Example

Use the differentials to approximate the quantity $\sqrt{4.6}$ to four decimal places.

Solution

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{c} + \frac{x - c}{2\sqrt{c}}$$

$$\sqrt{4.6} \approx 2 + \frac{4.6 - 4}{4} = 2.15$$

$$\sqrt{4.6} \approx 2.15 + \frac{4.6 - (2.15)^2}{4.3} = \frac{3689}{1720} \approx 2.145$$

無關微積分的題目

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

- ▶ 期中考的範圍其實蠻簡單的
- ▶ 為了湊滿 10 題，考卷中會有一些醬油題
- ▶ 去年醬油題的題型是
 - ▶ 比較係數法
 - ▶ 線性回歸

比較係數法

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Example

Water boils at 212°F at sea level and 200°F at an elevation of 6000 ft. Assume that the boiling point B varies linearly with altitude α . Find the function $B = f(\alpha)$ that describes the dependence. Comment on whether a linear function gives a realistic model.

Solution

設 $f(\alpha) := m\alpha + k$

$$f(0) = k = 212$$

$$f(6000) = 6000m + 212 = 200$$

$$m = \frac{200 - 212}{6000} = -0.002$$

$$B = f(\alpha) = -0.002\alpha + 212$$

線性回歸 I

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

- ▶ 假設我們想要觀察 p 個自變數 x_1, \dots, x_p 如何影響 y
- ▶ 我們收集了 n 組數據 $\{y_i, x_{i1}, \dots, x_{ip}\}_{i=1}^n$
- ▶ 我們試圖用線性關係來表達它，其中仍有誤差 ϵ_i

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{i1} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}$$

線性回歸 II

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

► 包裝成矩陣的樣子就是

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

什麼是內積

微分

何震邦

Definition

在幾何向量空間 \mathbb{R}^n 中，向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的內積為

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

- ▶ 對稱性（交換律）

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

- ▶ 雙線性

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle = c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

- ▶ 向量與自身的內積不為負，且等號僅發生於零向量

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$

推廣到複向量空間

微分

何震邦

- 實向量空間所定義的內積，在 \mathbb{C}^n 仍然有效嗎？

$$\|i\mathbf{x}\|^2 = \langle i\mathbf{x}, i\mathbf{x} \rangle = -\|\mathbf{x}\|^2 ?$$

- 這違反了我們對距離不為負值的期待！

Definition

在複向量空間 \mathbb{C}^n 中，向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的內積為

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$$

- 其中 \bar{x} 代表 x 的共軛複數，而 \mathbf{x}^* 為 \mathbf{x} 的共軛轉置

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

內積空間

微分

何震邦

Definition

符合以下四個條件，即廣義內積條件，的向量空間，稱為內積空間

- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$
- ▶ $\langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle = c \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- ▶ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ 且 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

常見的例子有

- ▶ 實向量空間和複向量空間的標準內積
- ▶ 矩陣標準內積

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}^* \mathbf{B})$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

正射影是最佳的近似

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Theorem

在內積空間 V 中有一向量 \mathbf{v} ，而空間 W 為該內積空間的子空間，則 W 中對 \mathbf{v} 的最佳近似值為 $\text{proj}_W \mathbf{v}$

Proof.

- ▶ 對於所有 W 中的向量 \mathbf{w} ，我們有

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (\mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v}) + (\text{proj}_W \mathbf{v} - \mathbf{w})$$

- ▶ 因為 $\text{proj}_W \mathbf{v}$ 和 \mathbf{w} 都在 W 中，所以 $\text{proj}_W \mathbf{v} - \mathbf{w}$ 也是
- ▶ $\mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v} = \text{proj}_{W^\perp} \mathbf{v}$ ，故與 W 中任一向量垂直

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v}\|^2 + \|\text{proj}_W \mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$$

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v}\|$$

\mathbf{A}^* 的零空間與 \mathbf{A} 的行空間垂直

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Theorem

對矩陣 \mathbf{A} 而言，若有一向量 \mathbf{x} 滿足 $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，則 \mathbf{x} 與 \mathbf{A} 的所有行向量垂直

Proof.

$$\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n)$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{x} \rangle \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$



► 行是 column，列是 row

最小平方法

微分

何震邦

- ▶ 最小平方法的目標，在於讓 $\|\epsilon\|$ 最小
- ▶ $\epsilon = \mathbf{y} - \mathbf{X}\beta$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

Solution

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\hat{\beta} &= \text{proj } \mathbf{y} \\ \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta} &= \text{proj}_{\perp} \mathbf{y} \\ \mathbf{X}^*(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{X}^*\mathbf{X}\hat{\beta} &= \mathbf{X}^*\mathbf{y}\end{aligned}$$

單變數線性回歸

微分

何震邦

當 $p = 1$ 且 \mathbf{X} 是實矩陣

Solution

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\beta_0 = \frac{\sum y_i - \beta_1 \sum x_i}{n}$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

例題

微分

何震邦

Example

In a study of five industrial areas, a researcher obtained these data relating the average number of units of a certain pollutant in the air and the number of incidences (per 100 000 people) of a certain disease:

Units of pollutant	3	4	5	8	10
Incidences of the disease	48	52	58	70	96

Find the equation of the least-square line $y = Ax + B$ (to two decimal places.)

$$\text{Given that } A = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \text{ and } B = \frac{\sum y - A \sum x}{n}.$$

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

解題

微分

何震邦

Solution

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

x	y	x^2	xy	
3	48	9	144	
4	52	16	208	
5	58	25	290	
8	70	64	560	
10	96	100	980	
Σ	30	324	214	2162

$$A = \frac{109}{17}, \quad B = \frac{2238}{85}$$

$$y = 6.41x + 26.33$$

微分

何震邦

極限

極限的存在
夾擠定理
三角函數的連續性
常用的極限值

微分

微分的定義
微分法則
微分技巧
微分初等函數
隱函數與反函數
微分與線性近似

番外篇

比較係數法
線性回歸

Thanks for your attention!