有理函數的積分

地表最快演算法

何震邦 <jdh8@ms63.hinet.net>

2014 年 12 月 1 日

重點提要

本次我們的重點在於

- 多項式除法
- 最大公因式
- Squarefree 多項式。

多項式除法

對於任意兩個多項式 A, B，其中 $B \neq 0$，我們都可以找到商 Q 和餘式 R 使得

$$A = BQ + R \tag{1}$$

其中 $\deg(R) < \deg(B)$。(1)式又可寫作

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Definition

為了方便，對於以上除法式，我們定義以下新符號：

$$\begin{aligned} \lfloor A/B \rfloor &= Q \\ \lceil B \rceil A &= R. \end{aligned}$$

除法演算法

Algorithm 1 多項式的除法 $A = BQ + R$

Require: A, B 是多項式且 $B \neq 0$

Ensure: $A = BQ + R$

$Q := 0$

$R := A$

while $\deg(R) \geq \deg(B)$ **do** /* 長除法 */

  S 為 R 的領導項除以 B 的領導項

  $Q := Q + S$

  $R := R - BS$

end while

最大公因式

輾轉相除法最早的記錄是在歐幾里德的《幾何原本》中，故在西方常稱為歐幾里德演算法（Euclidean algorithm）。

> *[The Euclidean algorithm] is the granddaddy of all algorithms, because it is the oldest nontrivial algorithm that has survived to the present day.*
>
> Donald Knuth, *The Art of Computer Programming, Vol. 2: Seminumerical Algorithms,* 2nd edition (1981), p. 318.

輾轉相除法

Algorithm 2 輾轉相除法求最大公因式 $\gcd(A, B)$

Require: A, B 是多項式

1: $R_0 := A$
2: $R_1 := B$
3: $k := 1$
4: **while** $R_k \neq 0$ **do**
5: $\quad R_{k+1} := \lceil R_k \rceil R_{k-1}$
6: $\quad k := k + 1$
7: **end while**
8: **return** R_{k-1} $\quad$ /* $R_k = 0$ */

分數的計算很麻煩！

- 有時候對於係數為有理數的多項式 A, B，我們不需要知道確切的餘式 $\lceil B \rceil\, A$，而可以接受答案為餘式的常數倍。此時為了避免分數的計算，我們可以在過程中縮放多項式，使計算過程全為整數。
- 如輾轉相除法。

多項式的容度（content）

Definition

對整係數多項式 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 而言，它的**容度** $\operatorname{cont}(f)$ 為所有係數的最大公因數。

Definition

若 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 即 f 是係數為有理數的多項式，則必存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $nf \in \mathbb{Z}[x]$。我們定義 f 的容度為

$$\operatorname{cont}(f) = \frac{\operatorname{cont}(nf)}{n}.$$

Definition

本原多項式就是容度為 1 的多項式。

求餘式的常數倍，並為本原多項式

Algorithm 3 求 $R = \lceil B \rceil cA$，其中常數 c 使 $\operatorname{cont}(R) = 1$

Require: $\{A, B\} \subset \mathbb{Q}[x]$

$A := A / \operatorname{cont}(A)$
$B := B / \operatorname{cont}(B)$ /* 理論上不需要，但可簡化計算 */
while $\deg(A) \geq \deg(B)$ **do**
  a 與 b 分別為 A 與 B 的領導係數
  $m := b / \gcd(a, b)$
  $n := \deg(A) - \deg(B)$
  $A := \lceil Bx^n \rceil mA$ /* A 至少降一次且仍為 $\mathbb{Z}[x]$ */
  $A := A / \operatorname{cont}(A)$
end while
return $R := A$

$P = x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27$，求 $\gcd(P, P')$

$$
\begin{aligned}
R_0 &= x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27 \\
R_1 &= 5x^9 + 32x^7 + 57x^5 + 18x^3 \\
R_2 &= 8x^8 + 38x^6 + 27x^4 + 135 \\
R_3 &= 22x^7 + 107x^5 + 48x^3 - 225x \\
R_4 &= 2x^6 - 21x^4 - 180x^2 - 297 \\
R_5 &= x^5 + 6x^3 + 9x \\
R_6 &= x^4 + 6x^2 + 9 \\
R_7 &= 0.
\end{aligned}
$$

$$\gcd\left(P, P'\right) = x^4 + 6x^2 + 9.$$

多項式的互質

Definition

若一群多項式的最大公因式為常數，則我們說它們**互質**。

Theorem

多項式互質等價於它們沒有共同的根。

Example

- $x+2$ 與 $x+3$ 互質
- x^2+2x+1 與 $x-1$ 互質
- 非零常數與任意多項式互質。

質式

Definition

質式或稱**不可約多項式**為無法分解為較低次多項式的積的多項式。

Theorem

所有一次多項式是質式。

Squarefree 多項式

Definition

若不存在多項式 U 使得 $\deg(U) > 0$ 且 U^2 整除多項式 P，則我們說 P 是 **Squarefree 多項式**。

Theorem

- *Squarefree* 多項式就是沒有重根的多項式。
- 多項式為 *squarefree* 等價於它與自己的導函數互質。

Squarefree 多項式與自己的導函數互質

Proof.

設一任意 squarefree 多項式 P，它可分解為

$$P = P_1 P_2 \cdots P_n$$

其中對於所有 $k \in \mathbb{N}$ 且 $1 \le k \le n$，P_k 是質式。因此

$$P' = P_1' P_2 \cdots P_n + P_1 P_2' \cdots P_n + \cdots + P_1 P_2 \cdots P_n'.$$

因為對於所有 P_k，$\gcd(P_k, P_k') = 1$，所以

$$\gcd\left(P, P'\right) = 1.$$

□

與自己的導函數互質的多項式必為 squarefree

Proof.

假設有一任意非 squarefree 多項式 P 與它的導函數互質。它可分解為

$$P = UV^m$$

其中 $\deg(V) > 0$ 且 $m \in \mathbb{N}$ 且 $m \geq 2$。因此

$$P' = U'V^m + mUV^{m-1}V' = V^{m-1}\left(U'V + mUV'\right).$$

所以

$$V^{m-1} \middle| \gcd\left(P, P'\right)$$

矛盾！所以假設錯誤。 $\square$

Squarefree 分解

Definition

顧名思義，就是不先急著做多項式 D 的質因式分解，而只做到因式是 squarefree 多項式為止，即

$$D = D_1 D_2^2 \cdots D_m^m$$

其中 D_i 為 squarefree 且兩兩互質。

Yun 演算法

Algorithm 4 求多項式 D 的 squarefree 分解

Require: D 是多項式

Ensure: $D = D_1 D_2^2 \cdots D_m^m$ 是 D 的 squarefree 分解

```
P := D
Q := D'
m := 0
while deg(P) > 0 do
    D_m := gcd(P, Q)
    P := P / D_m
    Q := Q / D_m − P'
    m := m + 1
end while
```

Yun 演算法是有效的

Proof.

設 $D = D_1 D_2^2 \cdots D_m^m$ 是 D 的 squarefree 分解。

$$\begin{aligned} P &= D_1 D_2^2 \cdots D_m^m \\ Q &= D_2 D_3^2 \cdots D_m^{m-1} \left(D_1' D_2 \cdots D_m + \cdots + m D_1 D_2 \cdots D_m'\right) \\ D_0 &= D_2 D_3^2 \cdots D_m^{m-1} \end{aligned}$$

對於所有 $i \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq i \leq m$

$$\begin{aligned} P &= D_i D_{i+1} \cdots D_m \\ Q &= D_i \left(D_{i+1}' D_{i+2} \cdots D_m + \cdots + (m-i) D_{i+1} D_{i+2} \cdots D_m'\right) \\ D_i &= \gcd(P, Q) \end{aligned}$$

□

分解 $D = x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27$

Solution

$$
\begin{aligned}
P &= x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27 \\
Q &= 10x^9 + 64x^7 + 114x^5 + 36x^3 \\
D_0 &= x^4 + 6x^2 + 9 \\
P &= x^6 + 2x^4 - 2x^2 + 3 \\
Q &= 4x^5 - 4x^3 + 4x \\
D_1 &= x^4 - x^2 + 1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
P &= x^2 + 3 \\
Q &= 2x \\
D_2 &= 1 \\
P &= x^2 + 3 \\
Q &= 0 \\
D_3 &= x^2 + 3
\end{aligned}
$$

$$D = \left(x^4 - x^2 + 1\right)\left(x^2 + 3\right)^3.$$

方法 8：有理函數的積分

當被積函數為最簡分式 N/D，執行多項式除法，即

$$N = PD + A$$

其中 $\deg(A) < \deg(D)$。則

$$\int \frac{N}{D} = \int P + \int \frac{A}{D}.$$

多項式 P 可輕易積分，而最簡真分式 A/D 的積分就是本節的重點了。

$\int \frac{1}{ax^2+b}\,dx$，其中 $ab>0$

Solution

設 $y = \arctan\left(\frac{ax}{\sqrt{ab}}\right)$，則 $dx = \frac{\sqrt{ab}\sec(y)^2}{a}\,dy$。

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{ax^2+b}\,dx &= \int \frac{\sqrt{ab}\sec(y)^2}{a\left(b\tan(y)^2+b\right)}\,dy \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{ab}}\,dy \\
&= \frac{\arctan\left(\frac{ax}{\sqrt{ab}}\right)}{\sqrt{ab}}.
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$，其中 $4ac > b^2$

Solution

設 $y = x + \dfrac{b}{2a}$。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{1}{ay^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}}\,dy \\
&= \frac{\arctan\left(\frac{ay}{\sqrt{4ac-b^2}/2}\right)}{\sqrt{4ac-b^2}/2} \\
&= \frac{2\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{4ac-b^2}}.
\end{aligned}
$$

Solution

ax^2+bx+c 的兩根為 $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{x-\beta} - \frac{1}{x-\alpha}\right)$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = \frac{\ln\left|\frac{x-\beta}{x-\alpha}\right|}{\beta-\alpha} = \frac{\ln\left|\frac{2ax-2a\beta}{2ax-2a\alpha}\right|}{\beta-\alpha}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx \\
&= \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{q-\frac{bp}{2a}}{ax^2+bx+c}\,dx \\
&= \frac{p\ln\left|ax^2+bx+c\right|}{2a} + \int \frac{2aq-bp}{2a\left(ax^2+bx+c\right)}\,dx.
\end{aligned}$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,dx \\
&= \int \frac{2x-2}{2\left(x^2-2x+2\right)}\,dx + \int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx \\
&= \frac{\ln\left|x^2-2x+2\right|}{2} + \arctan\left(\frac{2x-2}{2}\right) \\
&= \frac{\ln\left|x^2-2x+2\right|}{2} + \arctan(x-1).
\end{aligned}$$

多項式的貝祖等式

Theorem

若 G 是多項式 A 與 B 的最大公因式，則存在多項式 X, Y 使得

$$AX + BY = G$$

其中

$$\begin{aligned}\deg(X) &< \deg(B) - \deg(G) \\ \deg(Y) &< \deg(A) - \deg(G).\end{aligned}$$

擴展的輾轉相除法

Algorithm 5 擴展的輾轉相除法

Require: A, B 是多項式

Ensure: G, X, Y 符合貝祖等式 $AX + BY = G$

```
(R_0, X_0, Y_0) := (A, 1, 0)      /* 1A + 0B */
(R_1, X_1, Y_1) := (B, 0, 1)      /* 0A + 1B */
k := 1
while R_k ≠ 0 do
    Q := ⌊R_{k-1} / R_k⌋
    R_{k+1} := ⌈R_k⌉ R_{k-1}
    X_{k+1} := X_k − Q X_{k-1}
    Y_{k+1} := Y_k − Q Y_{k-1}
    k := k + 1      /* A X_k + B Y_k = R_k */
end while
(G, X, Y) := (R_{k-1}, X_{k-1}, Y_{k-1})
```

Hermite reduction

假設 $m \geq 2$ 否則 D 已經 squarefree 了。首先設 $V = D_m$ 與 $U = D/V^m$。因為 UV' 與 V 互質，我們能以擴展的輾轉相除法求兩多項式 B, C 使得

$$\frac{A}{1-m} = BUV' + CV$$

其中 $\deg(B) < \deg(V)$。兩端同乘 $(1-m)/(UV^m)$ 得

$$\begin{aligned}
\frac{A}{UV^m} &= \frac{(1-m)\,BV'}{V^m} + \frac{(1-m)\,C}{UV^{m-1}} \\
&= \frac{B'}{V^{m-1}} - \frac{(m-1)\,BV'}{V^m} - \frac{B'U + (m-1)\,C}{UV^{m-1}} \\
\int \frac{A}{UV^m} &= \frac{B}{V^{m-1}} - \int \frac{B'U + (m-1)\,C}{UV^{m-1}}.
\end{aligned}$$

$\int \frac{x^8+7x^6+42x^4+48x^2+30}{x^{10}+8x^8+19x^6+9x^4+27}\,dx$，頁 I

設 $A = x^8 + 7x^6 + 42x^4 + 48x^2 + 30$，又設 $U = x^4 - x^2 + 1$ 及 $V = x^2 + 3$。

$$\begin{aligned}
UV' &= \left(2x^3 - 8x\right) V + 26x \\
-78 &= xUV' - \left(2x^4 - 8x^2 + 26\right) V \\
\frac{A}{-2} &= -\left(\frac{x^6}{2} + 2x^4 + 15x^2 - 21\right) V - 78 \\
&= xUV' - \left(\frac{x^6}{2} + 4x^4 + 7x^2 + 5\right) V.
\end{aligned}$$

即 $B = x$ 與 $C = -\left(\frac{x^6}{2} + 4x^4 + 7x^2 + 5\right)$ 滿足

$$\frac{A}{-2} = BUV' + CV.$$

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{UV^3} &= \frac{B}{V^2} - \int \frac{B'U+2C}{UV^2} \\ &= \frac{x}{V^2} + \int \frac{x^6+7x^4+15x^2+9}{UV^2} \\ &= \frac{x}{x^4+6x^2+9} + \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx.\end{aligned}$$

部份分式分解，分母為 squarefree

Theorem

若被積函數為最簡真分式 A/D，先因式分解

$$D = D_1 D_2 \cdots D_n$$

其中 D_k 兩兩互質。則 A/D 可以表達為

$$\frac{A_1}{D_1} + \frac{A_2}{D_2} + \cdots + \frac{A_n}{D_n}$$

其中 $\deg(A_k) < \deg(D_k)$ 均成立。

部份分式分解是有效的

Proof.

設多項式 A, P, Q 兩兩互質且 $\deg(A) < \deg(PQ)$。根據多項式的貝祖等式，存在多項式 B, C 使得

$$
\begin{aligned}
A &= BQ + CP \\
\frac{A}{PQ} &= \frac{B}{P} + \frac{C}{Q}
\end{aligned}
$$

其中 $\deg(B) < \deg(P)$ 且 $\deg(C) < \deg(Q)$。不斷重複此步驟，即得 $A/(PQ)$ 的部份分式分解。 $\square$

擴展的餘式算子

Definition

設 B, D, N, R 皆為多項式，其中 B 與 D 互質，我們定義

$$\lceil B \rceil \frac{N}{D} = R$$

等價於

$$\lceil B \rceil N = \lceil B \rceil DR$$

其中 $\deg(R) < \deg(B)$。

餘式算子的性質

Theorem

設 B, D, N 為多項式，F 與 G 為有理函數且 B 與 D 互質。

- $\lceil B \rceil (F + G) = \lceil B \rceil F + \lceil B \rceil G$
- $\lceil B \rceil FG = \lceil B \rceil (\lceil B \rceil F \lceil B \rceil G)$
- $\lceil B \rceil \dfrac{N}{D} = \lceil B \rceil \dfrac{\lceil B \rceil N}{\lceil B \rceil D}$

餘式的最快算法

Algorithm 6 擴展的餘式算子

Require: B, D 是非零多項式，N 是多項式

Ensure: 回傳 $\lceil B \rceil N/D$

```
N := ⌈B⌉ N
D := ⌈B⌉ D
while deg(D) > 0 do
    Q := ⌊B/D⌋
    D := −⌈D⌉ B    /* ⌈B⌉ DQ */
    N := ⌈B⌉ NQ
end while
return N/D    /* D 是常數 */
```

部份分式分解算法

Theorem

對於最簡真分式 A/D，其中

$$D = D_1 D_2 \cdots D_n$$

且 D_k 兩兩互質。則 A/D 可以表達為

$$\frac{A_1}{D_1} + \frac{A_2}{D_2} + \cdots + \frac{A_n}{D_n}$$

其中對於所有 k，若 $1 \leq k \leq n$ 則

$$A_k = \lceil D_k \rceil \frac{AD_k}{D}.$$

部份分式分解算法是有效的

Proof.

對於所有 k 使得 $1 \leq k \leq n$

$$\lceil D_k \rceil \frac{AD_k}{D} = \lceil D_k \rceil \frac{A_k D + D_k Q}{D}$$

其中

$$Q = \frac{A_1 D}{D_1} + \cdots + \frac{A_{k-1} D}{D_{k-1}} + \frac{A_{k+1} D}{D_{k+1}} + \cdots + \frac{A_n D}{D_n}$$

為多項式。所以

$$\lceil D_k \rceil \frac{AD_k}{D} = \lceil D_k \rceil \frac{A_k D}{D} = A_k. \qquad \square$$

分解 $\dfrac{1}{x^5+x+1}$

Solution

首先質因式分解 x^5+x+1 得

$$x^5+x+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right).$$

設 $D_1=x^2+x+1$ 與 $D_2=x^3-x^2+1$。

$$\begin{aligned}\lceil D_1\rceil\frac{1}{D_2}&=\lceil D_1\rceil\frac{1}{x+3}=\frac{x-2}{-7}\\ \lceil D_2\rceil\frac{1}{D_1}&=\lceil D_2\rceil\frac{x-2}{-x-3}=\frac{5x^2-20x+25}{35}.\end{aligned}$$

$$\frac{1}{x^5+x+1}=\frac{x^2-4x+5}{7\left(x^3-x^2+1\right)}-\frac{x-2}{7\left(x^2+x+1\right)}.$$

設 $A = 6x^2 - 15x + 22$，又設 $U = x + 3$ 及 $V = x^2 + 2$。

$$
\begin{aligned}
UV' &= 2V + 6x - 4 \\
18V &= (3x+2)(6x-4) + 44 \\
&= (3x+2)\left(UV' - 2V\right) + 44 \\
44 &= (3x+2)\,UV' + (14x-6)\,V \\
-A &= -6V + 15x - 10 \\
&= -6V + \frac{5(6x-4)}{2} \\
&= \frac{5UV'}{2} - 11V.
\end{aligned}
$$

$$
\int \frac{A}{UV^2} = \frac{5}{2V} + \int \frac{11}{UV}.
$$

$\displaystyle\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)\left(x^2+2\right)^2}\,dx$，頁 II

分解部份分式：

$$\begin{aligned}
\lceil x+3\rceil\,\frac{11}{x^2+2} &= \frac{11}{11}\\
\lceil x^2+2\rceil\,\frac{11}{x+3} &= \frac{11\,(x-3)}{-11}.
\end{aligned}$$

$$\frac{11}{(x+3)\left(x^2+2\right)} = \frac{1}{x+3}+\frac{3-x}{x^2+2}.$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)\left(x^2+2\right)^2}\,dx\\
={}& \frac{5}{2x^2+4}+\ln|x-3|-\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{2}+\frac{3\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

設 $A = x^2 + 16x$，又設 $U = x - 3$ 及 $V = x^2 + 4$。

$$
\begin{aligned}
UV' &= 2V - 6x - 8 \\
18V &= (3x-4)(6x+8) + 104 \\
&= (3x-4)\left(2V - UV'\right) + 104 \\
104 &= (3x-4)\, UV' - (6x-26)\, V \\
-A &= -V - 16x + 4 \\
&= -V - \frac{8(6x+8)}{3} + \frac{76}{3} \\
&= \frac{(19x+44)\, UV'}{26} - \frac{19xV}{13}.
\end{aligned}
$$

$$
\int \frac{A}{UV^2} = \frac{19x+44}{26V} + \int \frac{19x+57}{26UV}.
$$

分解部份分式：

$$\begin{aligned}
\lceil x-3 \rceil \, \frac{19x+57}{26(x^2+4)} &= \frac{57}{169} \\
\lceil x^2+4 \rceil \, \frac{19x+57}{26(x-3)} &= \frac{114x+95}{-338}.
\end{aligned}$$

$$\frac{19x+57}{26(x-3)(x^2+4)} = \frac{57}{169(x-3)} - \frac{114x+95}{338(x^2+4)}.$$

$$\int \frac{x^2+16x}{(x-3)(x^2+4)^2}\,dx$$
$$= \frac{19x+44}{26x^2+104} + \frac{57\ln|x-3|}{169} - \frac{57\ln\left(x^2+4\right)}{338} - \frac{95\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{676}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2+16x}{(x-3)(x^2+4)^2}\,dx$$
$$= \frac{41}{104} - \frac{57\ln(8)}{338} - \frac{95\pi}{2704}$$
$$+ \frac{570\ln(5) - 1140\ln(2) + 475\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - 1638}{3380}$$
$$\approx -0.44864537510260708881.$$

設 $A = 2x^3 + 5x^2 + 16x$，又設 $U = x - 1$ 及 $V = x^2 + 4$。

$$\begin{aligned}
UV' &= 2V - 2x - 8 \\
2V &= (x-4)(2x+8) + 40 \\
&= (x-4)\left(2V - UV'\right) + 40 \\
40 &= (x-4)\,UV' - (2x-10)\,V \\
-A &= (-2x-5)\,V - 8x + 20 \\
&= (-2x-5)\,V - 4\,(2x+8) + 52 \\
&= 4UV' - (2x+13)\,V + 52 \\
&= \frac{(13x-12)\,UV'}{10} - \frac{23xV}{5}.
\end{aligned}$$

$$\int \frac{A}{UV^2} = \frac{13x-12}{10V} + \int \frac{33x+13}{10UV}.$$

分解部份分式：

$$\begin{aligned}
\lceil x-1 \rceil \, \frac{33x+13}{10(x^2+4)} &= \frac{46}{50} \\
\lceil x^2+4 \rceil \, \frac{33x+13}{10(x-1)} &= \frac{46x-119}{-50}.
\end{aligned}$$

$$\frac{33x+13}{10(x-1)(x^2+4)} = \frac{23}{25(x-1)} - \frac{46x-119}{50(x^2+4)}.$$

$\int_2^3 \frac{2x^3+5x^2+16x}{(x-1)\left(x^2+4\right)^2}\,dx$，頁 III

$$\int \frac{2x^3+5x^2+16x}{(x-1)\left(x^2+4\right)^2}\,dx$$
$$= \frac{13x-12}{10x^2+40} + \frac{23\ln|x-1|}{25} - \frac{23\ln\left(x^2+4\right)}{25} - \frac{119\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{100}$$

$$\int_2^3 \frac{2x^3+5x^2+16x}{(x-1)\left(x^2+4\right)^2}\,dx$$
$$= \frac{184\ln(8)-119\pi-70}{400}$$
$$- \frac{598\ln(13)-1196\ln(2)-1547\arctan\left(\frac{3}{2}\right)-270}{1300}$$
$$\approx 0.6819548347692329.$$

分母為 $ax^3 \pm b$

假設 $a > 0$ 且 $b > 0$。

Theorem

$ax^3 - b$ 可在 $\mathbb{R}$ 上因式分解為

$$\left(a^{1/3}x - b^{1/3}\right)\left(a^{2/3}x^2 + a^{1/3}b^{1/3}x + b^{2/3}\right).$$

$ax^3 + b$ 可在 $\mathbb{R}$ 上因式分解為

$$\left(a^{1/3}x + b^{1/3}\right)\left(a^{2/3}x^2 - a^{1/3}b^{1/3}x + b^{2/3}\right).$$

分母為 $ax^4 \pm b$

假設 $a > 0$ 且 $b > 0$。

Theorem

$ax^4 - b$ 可在 $\mathbb{R}$ 上因式分解為

$$\left(\sqrt{a}x^2 - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}x^2 + \sqrt{b}\right).$$

$ax^4 + b$ 可在 $\mathbb{R}$ 上因式分解為

$$\left(\sqrt{a}x^2 - \sqrt{2}a^{1/4}b^{1/4}x + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}x^2 + \sqrt{2}a^{1/4}b^{1/4}x + \sqrt{b}\right).$$

分母為 $ax^5 \pm b$

假設 $a > 0$ 且 $b > 0$。

Theorem

$ax^5 - b$ 可在 $\mathbb{R}$ 上因式分解為

$$\frac{1}{4}\left(a^{1/5}x - b^{1/5}\right)\left(2a^{2/5}x^2 + \left(1 - \sqrt{5}\right)a^{1/5}b^{1/5}x + 2b^{2/5}\right)\left(2a^{2/5}x^2 + \left(1 + \sqrt{5}\right)a^{1/5}b^{1/5}x + 2b^{2/5}\right).$$

$ax^5 + b$ 可在 $\mathbb{R}$ 上因式分解為

$$\frac{1}{4}\left(a^{1/5}x + b^{1/5}\right)\left(2a^{2/5}x^2 - \left(1 - \sqrt{5}\right)a^{1/5}b^{1/5}x + 2b^{2/5}\right)\left(2a^{2/5}x^2 - \left(1 + \sqrt{5}\right)a^{1/5}b^{1/5}x + 2b^{2/5}\right).$$

分母為 $ax^6 \pm b$

假設 $a > 0$ 且 $b > 0$。

Theorem

$ax^6 - b$ 可在 $\mathbb{R}$ 上因式分解為

$$\left(\sqrt{a}x^3 - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}x^3 + \sqrt{b}\right).$$

$ax^6 + b$ 可在 $\mathbb{R}$ 上因式分解為

$$\begin{aligned}\left(a^{1/3}x^2 + b^{1/3}\right)&\left(a^{1/3}x^2 - \sqrt{3}a^{1/6}b^{1/6} + b^{1/3}\right)\\ &\left(a^{1/3}x^2 + \sqrt{3}a^{1/6}b^{1/6} + b^{1/3}\right).\end{aligned}$$

$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$，頁 I

$$x^4+1=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

設 $D_1 = x^2-\sqrt{2}x+1$ 與 $D_2 = x^2+\sqrt{2}x+1$。

$$\begin{aligned}
\lceil D_1\rceil \frac{1}{D_2} &= \lceil D_1\rceil \frac{1}{2^{3/2}x} = \frac{x-\sqrt{2}}{-2^{3/2}} \\
\lceil D_2\rceil \frac{1}{D_1} &= \lceil D_2\rceil \frac{1}{-2^{3/2}x} = \frac{x+\sqrt{2}}{2^{3/2}}.
\end{aligned}$$

$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$，頁 II

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^4+1}\,dx \\
&= \int \frac{x+\sqrt{2}}{2^{3/2}\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}\,dx - \int \frac{x-\sqrt{2}}{2^{3/2}\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}\,dx \\
&= \frac{\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{2^{5/2}} - \frac{\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{2^{5/2}} + \frac{\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)}{2^{3/2}} \\
&\quad + \frac{\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)}{2^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Thanks for your attention!