# 微分方程

何震邦 <jdh8.org>



2014 年 12 月 30 日

# 常微分方程與偏微分方程



函數方程中，有待解函數的導函數項時，稱為微分方程。例如

$$\sin(x)\, x'' = (x+1)\, x' + x^2 e^{-3x}. \tag{1}$$

$$x^{(4)} + x''' + x'' + x = \cos(t) \tag{2}$$

以上微分方程只有常導數，所以是**常微分方程** (ODE). 有偏導數的方程是**偏微分方程** (PDE)，例如

$$u_{xxt} = u_y + 1. \tag{3}$$

# 階



微分方程的**階**是方程中最高階導數的階。例如 (1) 是二階微分方程，(3) 是三階微分方程，而 (2) 是四階微分方程。

# 線性微分方程



**線性微分方程**可以寫成以下的形式：

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(t)x^{(k)}(t) = g(t)$$

其中 $t$ 是自變數，$x$ 是待解函數，$f_k$ 和 $g$ 是已知函數，如 (2)。

# 解



從足微分方程的函數稱為**解**或**特解**。解可能有自變數的範圍限制。

**Example**

在 $t > 0$ 時，$x = t^{-3/2}$ 是 $4t^2x'' + 12tx' + 3x = 0$ 的解。

**Proof.**

$$x' = -\frac{3}{2}t^{-5/2}$$
$$x'' = -\frac{15}{4}t^{-7/2}$$

$$4t^2\left(-\frac{15}{4}t^{-7/2}\right) + 12t\left(-\frac{3}{2}t^{-5/2}\right) + 3t^{-3/2} = 0. \quad \square$$

# 初始條件



**初始條件**形如

$$x_k = x^{(k)}(t_0)$$

例如

$$x_0 = x(t_0).$$

# 初值問題



**初值問題**是有適當初始條件的微分方程。

### Example

以下是初值問題。

$$t^2x'' + 2tx' + 3x = 0$$

$$\begin{aligned} x(4) &= 1 \\ x'(4) &= 2. \end{aligned}$$

# 有效範圍



對於有初始條件

$$x_k = x^{(k)}(t_0)$$

的微分方程而言，**有效範圍**是包含 $t_0$ 且解有效的最大範圍。

# 通解

**通解**是微分方程的解的最廣義的形式。

**Example**

$$2tx' + 4x = 3$$

的通解是

$$x = \frac{c}{t^2} + \frac{3}{4}$$

其中 $c$ 是任意常數。

同時符合微分方程與附屬條件（像是初始條件）的解，是**實際解**。

**Example**

求解

$$2tx' + 4x = 3 \qquad x(1) = -4.$$

**Solution**

已經有通解了，所以我們只要代入初始條件，求取待定常數 $c$。

$$4 = \frac{c}{1^2} + \frac{3}{4} \qquad c = -\frac{19}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} - \frac{19}{4t^2}.$$

# 顯式解與隱式解



若待解函數為 $x$ 而自變數為 $t$，**顯式解**形如

$$x = f(t).$$

以其他方式寫出待解函數與自變數的關係的，為**隱式解**，像是

$$F(x, t) = 0.$$

# 從隱式解推出顯式解



**Example**

$$x' = \frac{t}{x} \qquad x(2) = -1$$

的隱式解為

$$x^2 = t^2 - 3$$

求顯式解。

**Solution**

乍看之下有 $x = \pm\sqrt{t^2 - 3}$ 兩解，但只有負的合初值條件。

$$x = -\sqrt{t^2 - 3}.$$

**一階常微分方程**為符合以下形式的方程式：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

其中 $f$ 不含微分項。

# 方法 1：一階線性微分方程

## Theorem

給定微分方程

$$f(t)\,x' + g(t)\,x = h(t).$$

設 $A(t) = \dfrac{g(t)}{f(t)}$ 與 $B(t) = \dfrac{h(t)}{f(t)}$，將方程化為

$$x' + Ax = B.$$

則 $e^{\int A\,dt}$ 為一積分因子，使得通解為

$$x = e^{-\int A\,dt}\left(c + \int e^{\int A\,dt} B\,dt\right).$$

## Proof.

設 $P = \int A\,dt$，則

$$\begin{aligned} x' + P'x &= B \\ e^P x' + e^P P' x &= e^P B \\ \left(e^P x\right)' &= e^P B \end{aligned}$$

此時積分，引進積分常數 $c$。

$$e^P x = c + \int e^P B\,dt$$

$$x = e^{-\int A\,dt}\left(c + \int e^{\int A\,dt} B\,dt\right). \tag{4}$$

$\square$

# 有效區間



**Theorem**

給定微分方程

$$x' + Ax = B$$

與初始條件

$$x_0 = x(t_0).$$

若函數 $A$, $B$ 在區間 $(a, b)$ 中連續，且 $a < t_0 < b$，則 $x$ 在此區間中有唯一解。

證明從略，因為解的形式可以通解 (4) 中獲得。

# 特殊狀況



給定微分方程

$$x' + Ax = B.$$

若 $B$ 為零，即原方程齊次，則通解成為

$$x = ce^{-\int A\,dt}.$$

若 $A$ 為常數，則 $\int A\,dt = At$，使通解成為

$$x = e^{-At}\left(c + \int e^{At} B\,dt\right).$$

# 常係數一階線性微分方程

給定微分方程

$$x' + Ax = B.$$

若 $A$ 與 $B$ 皆為常數，即原方程常係數，則設 $x^* = B/A$,

$$x' + A(x - x^*) = 0$$

再設 $y = x - x^*$，原方程簡化成常係數齊次方程
$y' + Ay = 0$，通解顯然為

$$y = c_1 e^{-Ay}$$

$$x = c_2 e^{-Ax} + x^*$$

其中 $c_1$ 為積分常數，而 $c_2 = c_1 e^{Ax^*}$.

# 指數衰變



## Example

An exponential decay function $f(t) = y_0 e^{-kt}$ models the among of drug in the blood $t$ hours after an initial dose of $y_0 = 100$ mg is administered. Assume the half-life of a particular drug is 16 hours. How much time is required for the drug to reach 1% of the initial dose (1 mg)?

## Solution

$$50 = 100\mathrm{e}^{-16k}$$

$$k = \frac{\ln(2)}{16}$$

$$1 = 100\mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{16}t}$$

$$t = 16\log_2(100) \approx 106.3016990363955 13\text{（小時）}.$$

# 方法 2：變數可分離的微分方程



**Theorem**

給定微分方程

$$A(x)\,B(t)\,x' = C(x)\,D(t).$$

通解為

$$\int \frac{A(x)}{C(x)}\,dx = \int \frac{D(t)}{B(t)}\,dt.$$

證明從略。

# 有效區間

**Theorem**

給定微分方程

$$P(x)\,x' = Q(t)$$

與初始條件

$$x_0 = x(t_0)$$

若在 $a < t < b$ 時，函數 $P, Q$ 處處連續，則在此有實際解

$$\int_{x_0}^{x} P(u)\,du = \int_{t_0}^{t} Q(v)\,dv.$$

由換元積分得證。

# Logistic 成長，頁 I



## Example

A population grows according to the logistic differential equation $y' = 0.0003y\,(2000 - y)$. The initial population size is 800. Solve this differential equation and use the solution to predict to population size at time $t = 3$.

本題為一個初期值問題

$$\begin{cases} y'(t) = 0.0003y(t)\,(2000 - y(t)) \\ y(0) = 800 \end{cases}$$

原微分方程為變數可分離的微分方程。

$$10000y' = 3y\,(2000 - y)$$

# Logistic 成長，頁 II



既然我們要求 $y(3)$，我們就從 $t = 0$ 積到 $t = 3$。

$$\int_{y(0)}^{y(3)} \frac{10000}{3y\,(2000 - y)}\,dy = \int_0^3 dt$$

$$\int_{800}^{y(3)} \frac{5}{3}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - 2000}\right) dy = 3.$$

此時被積函數有 0 和 2000 兩個不連續點，所以有效區間為 $(0, 2000)$。

$$\ln(y(3)) - \ln(800) - \ln(2000 - y(3)) + \ln(1200) = \frac{9}{5}$$

# Logistic 成長，頁 III





$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{y(3)}{2000-y(3)}\right) &= \frac{9}{5} + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\
\frac{y(3)}{2000-y(3)} &= \frac{2e^{9/5}}{3} \\
\frac{2000}{2000-y(3)} &= \frac{2e^{9/5}}{3} + 1
\end{aligned}
$$

$$
y(3) = \frac{4000e^{9/5}}{2e^{9/5}+3} \approx 1602.6304520653167546.
$$

# 方法 3：恰當微分方程



## Theorem

給定微分方程

$$P(x,t)\,x' + Q(x,t) = 0$$

其中

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

通解為勢函數

$$F(x,t) = \int Q\,dt + \int \left(P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dt\right) dx.$$

# 勢函數的存在

**Proof.**

設有函數 $F(x, t)$ 使得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad 且 \quad \frac{\partial F}{\partial t} = Q.$$

此時若 $P$, $Q$, $P_t$ 與 $Q_x$ 在所討論的 $xt$-平面區域上連續，則在此區域中由二階導數的對稱性得

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad \square$$

# 通解的證明



Proof.

設

$$F = \int Q\,dt + \int \left(P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dt\right) dx.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dt + P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dt = P.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} &= Q + \frac{\partial}{\partial t}\int \left(P - \frac{\partial}{\partial x}\int Q\,dt\right) dx \\ &= Q + \int \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx = Q. \qquad \square\end{aligned}$$

# 積分因子



對於非恰當微分方程

$$P(x,t)\,x' + Q(x,t) = 0$$

我們可以試著尋找積分因子 $\mu(x,t)$ 使得

$$\mu P x' + \mu Q = 0$$

為恰當微分方程，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mu P = \frac{\partial}{\partial x}\,\mu Q \tag{5}$$

其中 $\mu \neq 0$。

# 積分因子為單變函數



## Theorem

給定非恰當微分方程

$$P(x,t)\,x' + Q(x,t) = 0. \tag{6}$$

若 $\dfrac{Q_x - P_t}{P} = h(t)$，則積分因子為

$$\mu(t) = e^{\int h(t)\,dt}. \tag{7}$$

同理，若 $\dfrac{P_t - Q_x}{Q} = k(x)$，則積分因子為

$$\mu(x) = e^{\int k(x)\,dx}.$$

# (7)式的證明

**Proof.**

設 $\mu(t)$ 為(6)的積分因子，則由(5)得

$$\mu \frac{\partial Q}{\partial x} - \mu \frac{\partial P}{\partial t} - P \frac{d\mu}{dt} = 0$$

這是變數可分離的微分方程。我們著手解 $\mu$。

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_t}{P} = h$$

$$\ln \mu = \int h \, dt$$

$$\mu = e^{\int h \, dt}. \qquad \square$$

# $P$ 與 $Q$ 滿足柯西–黎曼方程時的積分因子



**Theorem**

給定微分方程

$$P(x,t)\,x' + Q(x,t) = 0. \tag{8}$$

其中

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad 且 \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

即 $P$ 與 $Q$ 滿足柯西–黎曼方程，此時積分因子為

$$\mu(x,t) = \frac{1}{P^2 + Q^2}.$$

# 方法 4：伯努力微分方程





## Theorem

給定微分方程

$$f(x)\,y' + g(x)\,y + h(x)\,y^n = 0$$

其中 $n \neq 1$。設 $u(x) = y^{1-n}$，則原方程轉為線性的

$$f(x)\,u' + (1-n)\,g(x)\,u + (1-n)\,h(x) = 0.$$

# 齊次函數

## Definition

函數 $f(x,y)$ 稱為 $n$ 次齊次函數，等價於

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \tag{9}$$

其中 $n$ 為常數。

## Example

- $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$ 為 3 次齊次函數。
- $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ 不是齊次函數。

# 方法 5：齊次微分方程



**Theorem**

給定微分方程

$$P(x,t)\,x' = Q(x,t)$$

其中 $P$ 與 $Q$ 皆為 $x$, $t$ 的齊次函數。設 $u(t) = x/t$，則原方程轉為變數可分離的方程。

# 方法 6：幾乎線性的微分方程




## Theorem

給定微分方程

$$f(t)\,k'(x)\,x' + g(t)\,k(x) = h(t).$$

設 $u(t) = k(x)$，則原方程轉為線性的

$$f(t)\,u' + g(t)\,u = h(t).$$

## Remark

這方法在課本上罕見。

# 方法 7：含線性分式的微分方程



## Theorem

給定微分方程

$$x' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 t + c_1}{a_2 x + b_2 t + c_2}\right).$$

若 $a_1 x + b_1 t + c_1 = 0$ 與 $a_2 x + b_2 t + c_2 = 0$ 聯立方程有唯一解 $(x, t) = (h, k)$，設 $X = x - h$ 與 $T = t - k$，則原方程轉為齊次的

$$\frac{dX}{dT} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 T}{a_2 X + b_2 T}\right).$$

# 方法 8：以 $t^n x$ 替代



## Theorem

給定微分方程

$$x' + \frac{xf(t^n x)}{t} = 0$$

其中 $n$ 為待定常數。設 $y = t^n x$，則原方程轉為變數可分離的

$$\int \frac{1}{y(n - f(y))}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt.$$

# 數值方法

有時

- 微分方程沒有解析解
- 計算解析解的成本太大。

此時我們就用數值方法去計算待解函數的近似值。

# 微分方程與線性近似

給定一階常微分方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

與初始條件

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0).$$

根據線性近似，當 $t$ 在 $t_0$ 附近

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}(t_0) + (t - t_0)\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0).$$

# 歐拉法



假設代求的函數值是 $\mathbf{x}(t_n)$，且 $t_n > t_0$，不失一般性。我們把區間 $[t_0, t_n]$ 以 $t_1, t_2, t_3, \ldots$ 分成 $n$ 段，再以

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) \approx \mathbf{x}(t_k) + (t_{k+1} - t_k)\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

讓 $k$ 從 0 迭代到 $n-1$，最後獲得 $\mathbf{x}(t_n)$ 的近似值。

# 謝謝聆聽！

- 部落格
- 討論版
- 系列教材