## 何震邦

## 階段 1

逐項積分 Deriv. divides

### ITEN EIT O

指數替代 幂替代 根式替代

切比雪夫積分

反三角替代

三角函數

有理函數乘以指數

有理函数米以加罗

有理函數乘以反函

對數替代 展開被積函數

### 階段 3

分部積分

# 符號積分

## 何震邦 <jdh8.org>



2014年12月1日

# 演算法

## 符號積分

何震邦

### 階段

逐項積分 Deriv. divides

### (時日)

審替代 根式替代 切比當夫積分 反三角替代 三有理函數 有理函數 有理函數 有理函數乘以方函 對數替代

### 階段 3

分部積分

- ▶ 1967 年,符號積分的先驅 Joel Moses 發表 Symbolic Integration 這篇論文。
  - ▶ 他提出的三階段演算法仍被所有主流電腦代數系統使用。
- ► 一篇比較現代的文件是 1998 年 Manuel Bronstein 寫下 的 Symbolic Integration Tutoral。

# 三階段演算法

## 符號積分

何震邦

Deriv. divides

塞替代 切比雪夫稍分

二色函數 有理函數乘以指數

有理函數 有理函數委以反函數

- 1. 題目是簡單的題目嗎?
- 2. 題目可以由變數代換解決嗎?
  - ▶ 把代換後的式子丢回第一階段
  - 或直接在這一步處理掉。
- 3. 題目可以由更一般化的方法解決嗎?

# 階段 1

## 符號積分

何震邦

## 階段 1

Deriv. divides

塞替代

切比雪夫稍分

二色函數

有理函數乘以指數 有理函數

- 1. 若被積函數是個總和,則分別對每項進行積分,再將結 果相加。
- 2. 若被積函數是

$$\left(\sum_{i}u_{i}(x)\right)^{n}$$

其中  $n \in \mathbb{N}$  ,則將它展開再逐項積分。

3. 檢查 Derivative-divides 條件,如(1)式。

# 逐項積分與展開自然數次方

## 符號積分

何震邦

逐項積分 Deriv. divides

切比雪夫稍分

二色函數

有理函數乘以指數 有理函數

▶ 逐項積分:

$$\int (\sin(x) + e^x) dx = \int \sin(x) dx + \int e^x dx.$$

展開自然數次方:

$$\int (e^{x} + x)^{2} dx = \int (e^{2x} + 2xe^{x} + x^{2}) dx.$$

## Derivative-divides

## 符號積分

## 何震邦

## Deriv. divides

切比雪夫稍分

二色函數

檢查原式是否符合

$$\int c \operatorname{op}(u(x)) u'(x) dx. \tag{1}$$

其中

- ► c 是常數
- u(x) 是 x 的函數
- ▶ u'(x) 是它的導函數

- ▶ op 是初等操作,即 op 是
  - ▶ 三角函數
  - ▶ 雙曲函數
  - log

或 op(u(x)) 具有以下的型態

- $\blacktriangleright 1/u(x)$
- ▶  $u(x)^a$ , 其中  $a \neq -1$
- ▶ b<sup>u(x)</sup>,其中 b 是常數。

$$\int x e^{x^2} dx$$

何震邦

## 階段

逐項積

### Deriv. divides

### Deriv. divid

指數替代

幂替代

根式替代 切比雪夫積分

后二仙 株

三角函數

二用函数

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反函數

展開被積函數

## 階段 3

分部積分

op(
$$u(x)$$
) =  $e^{u(x)}$ ,  $u(x) = x^2$ ,  $u'(x) = 2x$ ,  $c = \frac{1}{2}$ .  

$$\int xe^{x^2} dx = \int \frac{e^u}{2} du$$

$$= \frac{e^u}{2}$$

$$e^{x^2}$$

$$\int 4\cos(2x+3)\,dx$$

何震邦

# 幂替代 切比雪夫稍分 二色函數

有理函數乘以指數 有理函數

Deriv. divides

op = cos, 
$$u(x) = 2x + 3$$
,  $u'(x) = 2$ ,  $c = 2$ .  

$$\int 4\cos(2x + 3) dx = \int 2\cos(u) du$$

$$= 2\sin(u)$$

$$= 2\sin(2x + 3)$$
.

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \, dx$$

何震邦

### Deriv. divides

幂替代 切比雪夫稍分 三角函數 有理函數乘以指數 有理函數 有理函數委以反函數

$$op(u(x)) = \frac{1}{u(x)}, \ u(x) = e^x + 1, \ u'(x) = e^x, \ c = 1.$$

$$\int \frac{e^{x}}{e^{x} + 1} dx = \int \frac{1}{u} du$$
$$= \ln|u|$$
$$= \ln(e^{x} + 1).$$

$$\int \cos(x)\sin(x)\,dx$$

何震邦

## Deriv. divides

切比雪夫稍分

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

$$op(u(x)) = u(x), u(x) = cos(x), u'(x) = -sin(x), c = -1.$$

$$\int \cos(x)\sin(x) dx = -\int u du$$
$$= -\frac{u^2}{2}$$
$$= -\frac{\cos(x)^2}{2}.$$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

何震邦

Deriv. divides

切比雪夫稍分

二色函數

有理函數乘以指數

有理函數

op(
$$u(x)$$
) =  $\sqrt{u(x)}$ ,  $u(x) = x^2 + 1$ ,  $u'(x) = 2x$ ,  $c = \frac{1}{2}$ 

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} dx = \int \frac{\sqrt{u}}{2} du$$

$$= \frac{u^{3/2}}{3}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{3}.$$

$$\int \cos(e^x)^2 \sin(e^x) e^x dx$$

何震邦

## 階段

逐項積分

## Deriv. divides

### Deriv. divid

## THE ELL O

指數替代 幂替代

根式替代

切比雪夫積分

反三角替代

三角函數

有理函數乘以指數

有理函数來以 有理函數

有理関数

有理函数乘以及E 對數結件

展開被積函

## 階段 3

分部積分

$$op(u(x)) = u(x)^2$$
,  $u(x) = cos(e^x)$ ,  $u'(x) = -sin(e^x) e^x$ ,  $c = -1$ .

$$\int \cos(e^x)^2 \sin(e^x) e^x dx = -\int u^2 du$$
$$= -\frac{u^3}{3}$$
$$= -\frac{\cos(e^x)^3}{3}.$$

# 初等表達式

## 符號積分

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

## 階段 2

指數替代 幂替代 根式替代 切比雪夫積分

のに当大何2 反三角替代 三角函數

二用函數 有理函數乘以指

有理函數 有理函數乘以反函 對數替代

階段 3

分部積分

## 當我們說某式是 x 的初等表達式,則它是由以下組成:

- 1. 常數
- 2. *x*
- 3. x 的三角函數,如  $sin(x) \cdot cos(x)$
- 4. x 的對數與反三角函數,如 ln(x)、arcsin(x)

且在加法、乘法、乘方和取代下封閉,並簡記作

Elem(x).

## Example

- ▶ (e<sup>x</sup> + 1) e<sup>2e<sup>x</sup></sup> + e<sup>2x</sup> 是 e<sup>x</sup> 的初等表達式。
- ▶ xe<sup>x</sup> 不是 e<sup>x</sup> 的初等表達式,但它是 x 的初等表達式。

# 方法 1:指數函數的初等表達式

符號積分

何震邦

逐項積分

Deriv. divides

階段 2

## 指數替代

幕替代 根式替代 切比雪夫積分

反三角替代 三角函數 有理函數委以指數

有理函數乘以反函數 有理函數乘以反函數

展開被積

皆段 3

當被積函數是  $Elem(c^x)$ ,其中 c 是常數,則設

$$y = c^x$$
.

## Example

$$\int \frac{e^x}{3e^{2x} + 2} dx = \int \frac{1}{3y^2 + 2} dy \qquad y = e^x$$
$$\int \frac{e^{x+1}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e}{y+1} dy \qquad y = e^x.$$

$$\int \frac{e^x}{3e^{2x} + 2} \, dx$$

## 何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### 階段

### 指數替代

幂替代 根式替代 切比雪夫積分 反三角替代

三角函數 有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函數

展開被積

THIC S

## Solution

# 設 $y = e^x$ 。

$$\int \frac{e^{x}}{3e^{2x} + 2} dx = \int \frac{1}{3y^{2} + 2} dy$$
$$= \frac{\arctan\left(\frac{3y}{\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{6}}$$
$$= \frac{\arctan\left(\frac{3e^{x}}{\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{6}}.$$

$$\int \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^x + 1} \, dx$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### 陈 品。

## 指數替代

罪替代 ####

根式替代

切比雪夫積分

反三角替件

三角函數

有理函數乘以指數

有理函数水以1

有理函數乘以反函數

行/出的数/不以及E 對數數件

展開被積函

### 階段 3

分部預分

設 
$$y = e^x$$
。

$$\int \frac{e^{x+1}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e}{y+1} dy$$
$$= e \ln|y+1|$$
$$= e \ln(e^x + 1).$$

# 方法 2: 以整數次方替代

符號積分

何震邦

階段 1 逐項積分

Deriv. divides

階段 2

指數替代 **幂替代** 根式替代

根式替代 切比雪夫積分 反三角替代 三角函數

有理函數乘以指數 有理函數 有理函數乘以反函 對數替代

階段 3

分部積分

當被積函數是  $x^c$   $\mathsf{Elem}(x^{k_1}, x^{k_2}, \dots)$ ,其中 c 與  $k_i$  是整數,則設

$$y = x^k$$

其中

$$k \triangleq \gcd\{c+1, k_1, k_2, \dots\} \neq 1.$$

## Example

$$\int x^3 \sin(x^2) dx = \int \frac{y \sin(y)}{2} dy \qquad y = x^2$$
$$\int \frac{x^7}{x^{12} + 1} dx = \int \frac{y}{4y^3 + 4} dy \qquad y = x^4.$$

$$\int x^3 \sin(x^2) dx$$

何震邦

## 階段:

逐項積分 Deriv. divides

## (時段つ

指數替付

## 幂替代

根式替代切比雪夫積分

反三角替行

三角函數

二用函数

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反函

展開被積函

### 階段 3

分部槓分

## Solution

設  $y = x^2$ 。

$$\int x^3 \sin(x^2) dx = \int \frac{y \sin(y)}{2} dy$$
$$= \frac{\sin(y) - y \cos(y)}{2}$$
$$= \frac{\sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)}{2}.$$

$$\int \frac{x^7}{x^{12}+1} \, dx$$

何震邦

Deriv. divides

塞替代

切比雪夫稍分 三角函數

有理函數乘以指數 有理函數 有理函數委以反函數

設 
$$y = x^4$$
。

$$\int \frac{x^7}{x^{12} + 1} dx = \int \frac{y}{4y^3 + 4} dy$$

$$= \frac{\ln(y^2 - y + 1)}{24} + \frac{\arctan(\frac{2y - 1}{\sqrt{3}})}{4\sqrt{3}} - \frac{\ln|y + 1|}{12}$$

$$= \frac{\ln(x^8 - x^4 + 1)}{24} + \frac{\arctan(\frac{2x^4 - 1}{\sqrt{3}})}{4\sqrt{3}} - \frac{\ln(x^4 + 1)}{12}$$

# 方法 3:以線性分式的 k 次方根替代

## 符號積分

## 何震邦

## 階段 1

逐項積分 Deriv. divides

## MESTER O

指數替付

## 幂替代

根式替代

## 切比雪夫

反三角替代

三角函數

---/11 DO SX

有理函数乘以加

有理函數

有理函數乘以反函

展開被積函數

### P目長X 3

分部积为

當被積函數是  $\mathsf{Elem}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)$ ,其中

- ▶ 所有  $m_i$  與  $n_i$  互質整數,且有些  $|n_i| \neq 1$
- a, b, c, d 為常數並 ad bc ≠ 0

則設

$$y = \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{1}{k}}$$

其中 k 是  $n_i$  的最小公倍數。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - x^{1/3}} \, dx$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### MHK GITL IN

指數替付

## 幂替代

根式替代

### 初业銀士

反三角替件

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

有埋函数

有理函數乘以反函

展開被積函

階段 3

分部積分

設 
$$y = x^{1/6}$$
,則  $dx = 6y^5 dy$ 。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - x^{1/3}} dx = \int \frac{6y^5}{y^3 - y^2} dy$$

$$= 2y^3 + 3y^2 + 6y + 6\ln|y - 1|$$

$$= 2\sqrt{x} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6\ln|x^{1/6} - 1|.$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} dx$$
,  $\overline{\exists} I$ 

何震邦

Deriv. divides

幂替代

根式替代

切比雪夫稍分

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}$$
$$2y^2 = \frac{2x+2}{2x+3}$$
$$2y^2 - 1 = -\frac{1}{2x+3}$$
$$\frac{1}{2y^2 - 1} = 2x + 3.$$

$$x = -\frac{1}{2(2y^2 - 1)} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{(2y^2 - 1)^2}.$$

何震邦

Deriv. divides

根式替代

切比雪夫稍分

二色函數

有理函數乘以指數

有理函數

款 
$$y = \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}$$
,則  $dx = \frac{2y}{(2y^2 - 1)^2} dy$ 。
$$\int \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} dx = \int \frac{2y^2}{(2y^2 - 1)^2} dy$$

$$= \frac{\ln\left|\frac{2y - \sqrt{2}}{2y + \sqrt{2}}\right|}{2^{5/2}} - \frac{y}{4y^2 - 2}$$

$$= \frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} - \sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} + \sqrt{2}}\right|}{2^{5/2}} + \frac{(2x+3)\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}}{2}$$

# 方法 4: 二項式-切比雪夫積分

## 符號積分

何震邦

## 階段:

逐項積分 Deriv. divides

### 階段:

指數替代 幂替代 根式結件

根式替代切比雪夫積分

切比雪夫積

反三角替代

三角函數

一用函数 有理函數乘以指數

有理函数乘以加数

有理函數乘以反函! 對數替代

|股刑恢恒|

分部積分

$$\int x^p \left(c_1 x^q + c_0\right)^r dx$$

其中 p,q,r 是有理數。設  $y=x^q$  則  $dy=qx^{q-1}dx$ 

$$\int \frac{y^{\frac{p+1}{q}-1}}{q} \left(c_1 y + c_0\right)^r dy.$$

## Remark

當  $r \in \mathbb{N}$  的時候不要衝動!直接展開不是比較舒服嗎?

# 切比雪夫積分

## 符號積分

何震邦

Deriv. divides

切比雪夫積分

二色函數

有理函數乘以指數

有理函數

$$\int x^{r_1} \left(c_1 x + c_0\right)^{r_2} dx$$

其中  $r_1, r_2$  是有理數, $r_1$  的分母是  $n_1$ , $r_2$  的分母是  $n_2$ 。

▶ 當 r₁ 是正整數

 $z=c_1x+c_0$ .

▶ 當 ro 是負整數

$$z=x^{1/n_1}.$$

▶ 當 r<sub>1</sub> 是負整數

$$z = (c_1x + c_0)^{1/n_2}$$
.

■ 當 n + n 是整數

$$z=\frac{(c_1x+c_0)^{1/n_1}}{x^{1/n_1}}.$$

$$\int x^2 (c_1 x + c_0)^{3/5} dx$$

何震邦

階段 1

逐項積分 Deriv. divides

ITEN FITE A

階段 2

指數替 審替代

根式替代切比雪夫積分

反三角替代

三 名 函 数

有理函數乘以打

有理函數

有理函數乘以反函 對數替代

展開被積函數

階段 3

分部積分

款 
$$z = c_1 x + c_0$$
 則  $dx = \frac{dz}{c_1}$  。
$$\int x^2 (c_1 x + c_0)^{3/5} dx$$

$$= \int \left(\frac{z^{13/5}}{c_1^3} - \frac{2c_0 z^{8/5}}{c_1^3} + \frac{c_0^2 z^{3/5}}{c_1^3}\right) dz$$

$$= \frac{5z^{18/5}}{18} - \frac{10c_0 z^{13/5}}{13c_1^3} + \frac{5c_0^2 z^{8/5}}{8c_1^3}$$

$$= \frac{5(c_1 x + c_0)^{18/5}}{18c_1^3} - \frac{10c_0 (c_1 x + c_0)^{13/5}}{13c_1^3} + \frac{5c_0^2 (c_1 x + c_0)^{8/5}}{8c_1^3}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}} \, dx$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### 勝段 つ

指數替代 幂替代

切比雪夫積分

反三角替件

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反函! 對數替代

階段 3

分部積分

## Solution

設  $y = \sqrt{x+1}$ ,則 dx = 2y dy。

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}} \, dx = \int \frac{2y}{\sqrt{y+1}} \, dy.$$

設 z = y + 1。

$$\int \frac{2y}{\sqrt{y+1}} \, dy = \int \left(2\sqrt{z} - \frac{2}{\sqrt{z}}\right) dz$$

$$= \frac{4z^{3/2}}{3} - 4\sqrt{z}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{x+1} + 1\right)^{3/2}}{3} - 4\sqrt{\sqrt{x+1} + 1}.$$

# 更多例子

## 符號積分

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

## 階段:

指數替代 幂替代 根式替代

切比雪夫積分

反三角 替代 三角函數

二用函数 有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函 對數替代

階段 3

分部積分

## Example

$$\int \frac{(cx-8)^{2/3}}{x} \, dx = \int \frac{3z^4}{z^3+8} \, dz$$

其中 
$$z = (cx - 8)^{1/3}$$
,所以  $dx = \frac{3z^2}{c} dz$ 。

## Example

$$\int \frac{x^{3/4}}{(x+c)^3} \, dx = \int \frac{4z^6}{(z^4+c)^3} \, dz$$

其中 
$$z = x^{1/4}$$
,所以  $dx = 4z^3$ 。

$$\int \sqrt{x} (x+1)^{5/2} dx$$

何震邦

Deriv. divides

切比雪夫積分

二色函數 有理函數乘以指數

有理函數

## Example

設 
$$z = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$
,所以  $dx = -\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz$ 。

$$\int \sqrt{x} (x+1)^{5/2} dx = \int -\frac{2z^6}{(z^2-1)^5} dz.$$

# 方法 5: 反三角替代

## 符號積分

何震邦

Deriv. divides

指數替代 幂替代

切比雪夫積分

### 反三角替代

### 三角函數

有理函數乘以指數 有理函數

有理函數乘以反函數

展開被積函數

詳見《無理函數的積分》

# 方法 6: 三角函數的積分

## 符號積分

## 何震邦

# 階段 1 逐項積分

Deriv. divides

## 階段 2

指數替代 幂替代 根式替代 切比雪夫積分

## 三角函數

有理函數乘以指數 有理函數 有理函數乘以反函數 對數替代 展開被積函數

## 階段 3

▶ 若被積函數中有  $trig_1(ax + b) trig_2(cx + d)$ , 其中  $trig_1$  與  $trig_2$  是 sin 或 cos,則進行積化和差。

- ► 若被積函數是 trig<sub>1</sub>(nx) trig<sub>2</sub>(y), 其中 trig<sub>1</sub> 是 sin 或 cos, n 是整數,且 trig<sub>2</sub> 不是 sin 或 cos,則將 trig<sub>1</sub>(nx)以倍角公式展開。
- ▶ 若被積函數中所有三角函數的參數都是 ax + b,則設新 變數 y = ax + b。

$$\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$$

何震邦

Deriv. divides

切比雪夫稍分

## 三角函數

有理函數

$$\int \cos(mx)\cos(nx) dx$$

$$= \int \frac{\cos((m+n)x)}{2} dx + \int \frac{\cos((m-n)x)}{2} dx$$

$$= \frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)} + \frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)}.$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### 階段

指數替代 罪替代

根式替代 切比雪夫積分

反三角替

### 三角函數

有理函數非

有理函數

對數替代

/ACUDIACISCI

## 哨权 3

分部積分

$$\int \sin(2x)\tan(x) dx = \int 2\cos(x)\sin(x)\tan(x) dx$$
$$= \int 2\sin(x)^2 dx$$
$$= \int (1 - \cos(2x)) dx$$
$$= x - \frac{\sin(2x)}{2}.$$

# 三角函數的積分,單一參數

## 符號積分

## 何震邦

階段 1 逐項積分 Deriv. divides

ない つ

指數替代

罪替代 根式替代

切比雪夫積

反三角替

三角函數

有理函數架以指數 有理函數 有理函數率以后函

有性的数本以及的 對數替代 E即連接高數

展開被積函!

階段 3

## 把所有參數化為單一變數 x 後

- ▶ 將所有三角函數化為 sin 和 cos
  - $ightharpoonup \cos(x)^{2m}\sin(x)^{2n}$ ,其中  $\{m,n\}\in\mathbb{N}_0$ 。
  - ►  $\cos(x)^{2n+1} \operatorname{Elem}\left(\cos(x)^2, \sin(x)\right)$   $\aleph y = \sin(x)$  °
- ▶ 若行不通,將所有三角函數化為 tan 和 sec
  - ▶  $\sec(x)^{2n}$  Elem $(\tan(x), \sec(x)^2)$  設  $y = \tan(x)$  °
- ▶ 最後只好使用萬能的

$$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}.$$

$$\int \cos(x)^{2m} \sin(x)^{2n} dx$$

何震邦

Deriv. divides

切比雪夫稍分

三角函數

有理函數

## Theorem

$$\cos(x)\sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

$$\cos(x)^{2} = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$
$$\sin(x)^{2} = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

當 
$$m > n$$
, 化為

$$\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^{m-n}\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^{2n}.$$

當 
$$m < n$$
,化為

$$\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^{n-m}\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^{2m}.$$

何震邦

階段 1 逐項積分

Deriv. divide

階段:

指數替代 幂替代

根式替代 切比雪夫積分

切比雪夫利 反三角替代

三角函數

有理函數來以

有理函數乘以反

對數替代 展開被積函數

階段 3
分部積分

$$\int \cos(x)^{6} \sin(x)^{4} dx$$

$$= \int \frac{(\cos(2x) + 1)\sin(2x)^{4}}{32} dx$$

$$= \int \left(\frac{\cos(2x)\sin(2x)^{4}}{32} + \frac{\sin(2x)^{4}}{32}\right) dx$$

$$= \frac{\sin(2x)^{5}}{320} + \int \frac{\cos(4x)^{2} - 2\cos(4x) + 1}{128} dx$$

$$= -\frac{\sin(4x)}{256} + \frac{\sin(2x)^{5}}{320} + \int \frac{\cos(8x) + 3}{256} dx$$

$$= \frac{\sin(8x)}{2048} - \frac{\sin(4x)}{256} + \frac{\sin(2x)^{5}}{320} + \frac{3x}{256}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx , \ \exists \ \mathsf{II}$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### 階段

幂替代 根式替代

切比雪夫積分

反三角替

## 三角函數

有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函

對數替代

# 階段 3

公部部公

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx = \frac{9\pi}{256} - \frac{15\pi + 16}{5120}$$
$$\approx 0.09811773200045232.$$

$$\int \sec(x)^3 dx$$

何震邦

# 階段

逐項積分 Deriv. divides

### ITEM FITE

指數替代 幂替代

根式替代 切比雪夫積分

反三角替付

三角函數

## 有理函數乘以指數

有理函數

對數替代

階段 3

分部積分

設 
$$y = \sin(x)$$
。

$$\int \sec(x)^{3} dx$$

$$= \int \frac{1}{(1 - y^{2})^{2}} dy$$

$$= \frac{\ln|y + 1|}{4} - \frac{\ln|y - 1|}{4} - \frac{y}{2y^{2} - 2}$$

$$= \frac{\ln|\sin(x) + 1|}{4} - \frac{\ln|\sin(x) - 1|}{4} - \frac{\sin(x)}{2\sin(x)^{2} - 2}.$$

$$\int \frac{\sec(x)^2}{3\tan(x) + \sec(x)^2 + 1} \, dx$$

## 何震邦

階段 1

逐項積分 Deriv. divides

階段:

切比雪夫積 反三角替代

三角函數

有理函數乘以

有理函數 有理函數乘以反函

對數替代

階段 3

分部積分

設 
$$y = tan(x)$$
。

$$\int \frac{\sec(x)^2}{3\tan(x) + \sec(x)^2 + 1} dx$$

$$= \int \frac{1}{y^2 + 3y + 2} dy$$

$$= \int \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}\right) dy$$

$$= \ln|y+1| - \ln|y+2|$$

$$= \ln|\tan(x) + 1| - \ln|\tan(x) + 2|.$$

$$\int \frac{1}{\cos(x) + 1} \, dx$$

何震邦

階段

逐項積分 Deriv. divides

Niki FG- c

指數替代 幂替代

根式替代切比雪夫積分

反三角替 三**角函數** 

三角函數 有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函

對數替代 展開被積函數

階段 3

分部積分

設 
$$y = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}$$
,則  $dx = \frac{2}{y^2 + 1} dy$ 。
$$\int \frac{1}{\cos(x) + 1} = \int \frac{2}{(y^2 + 1) \left(\frac{1 - y^2}{1 + y^2} + 1\right)} dy$$

$$= \int dy$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}.$$

# 方法 7: 有理函數乘以指數函數

# 符號積分

何震邦

# 階段

逐項積分 Deriv. divides

## 階段:

指數管代 幂替代 根式替代 切比雪夫積分

切比雪夫和 反三角替作

三角函数 有理函數委以指數

# 有理函数來以IE

有理函數乘以反函數 對數替代

游段 3

分部積分

$$\int \frac{Ne^P}{D}$$

其中 D, N, P 是多項式且 D 與 N 互質。根據劉維爾定理,若此積分能以有限項表達,則必存在有理函數 A 使得

$$Ae^P = \int \frac{Ne^P}{D}.$$

# 標準作業程序 |

# 符號積分

何震邦

階段

逐項積分 Deriv. divides

階段 2

指數替代

幂替代 根式替代 切比雪夫積分

反三角替作

三角函數

# 有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函數 對數替代

皆段 3

分部積分

設 N 的領導項為  $c_1x^m$ ,其中  $m \in \mathbb{N}_0$ 。即

$$N=c_1x^{m_1}+S_1$$

其中  $c_1 \neq 0$  且多項式  $S_1$  滿足  $\deg(S_1) < m$ 。則設有理函數  $A_1$  與  $B_1$  使得

$$A_{1} = \frac{c_{1}x^{m_{1}}}{DP'}$$

$$(A_{1} + B_{1}) e^{P} = \int \frac{Ne^{P}}{D}.$$
(2)

# 標準作業程序Ⅱ

# 符號積分

何震邦

Deriv. divides

切比雪夫稍分

二色函數

有理函數委以指數

有理函數

根據(2)式,我們有

$$B_1P' + B_1' = \frac{N}{D} - A_1P' - A_1' = \frac{Q_1 + R_1}{D}.$$

其中  $Q_1$  為多項式, $R_1$  為真分式。若  $Q_{k-1} \neq 0$  則設  $Q_{k-1}$ 的領導項為  $c_{k}x^{m_{k}}$ , 並設有理函數  $A_{k}$  與  $B_{k}$  使得

$$A_k = \frac{c_k x^{m_k}}{DP'}$$
$$(A_k + B_k) e^P = \int \frac{N_k e^P}{D}$$

其中  $N_k = Q_{k-1} + R_{k-1}$ 。重複以上算法到  $Q_n = 0$  為止。

# 標準作業程序 III

# 符號積分

何震邦

階段 1

逐項積分 Deriv. divides

階段:

指數替代 幂替代 根式替代

切比雪夫積分 反三角替代

反三角替付 三角函數

有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函數

對數替代 展開被積函數

階段 3

分部積分

設 
$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k$$
。

$$\frac{N}{D} = P'A + A' + \frac{R_n}{D}$$

$$\frac{Ne^P}{D} = P'Ae^P + A'e^P + \frac{R_ne^P}{D}$$

$$= (Ae^P)' + \frac{R_ne^P}{D}$$

$$\int \frac{Ne^P}{D} = Ae^P + \int \frac{R_ne^P}{D}$$

其中若  $R_n \neq 0$  則  $\int \frac{R_n e^P}{D}$  必無法以有限項表達。

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx , 第 1 步$$

何震邦

階段 1

逐項積分 Deriv. divides

ITHIS ELL

指數替代 羅替代

根式替代 切比雪夫積分

反三角替代 三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反函數 對數替代

may on \_

1日代 3

已知 P'=1。

$$A_1 = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$A'_1 = \frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$B_1 P' + B'_1 = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}.$$

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx , 第 2 步$$

何震邦

# 階段 1

逐項模分 Deriv. divides

### NE EL O

抬數替什

幂替代

根式替代

切比雪夫積分

反三角替

三角函數

### 有理函數乘以指數

有理函數

**有理函数乘以及图** 

展開被積函數

### 階段 3

公部部公

$$A_{2} = \frac{1}{(x+1)^{2}}$$

$$A'_{2} = -\frac{2}{(x+1)^{3}}$$

$$B_{2}P' + B'_{2} = 0.$$

$$A = A_{1} + A_{2} = \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{xe^{x}}{(x+1)^{2}} dx = \frac{e^{x}}{x+1}.$$

$$\int \frac{(2x^6 + 5x^4 + x^3 + 4x^2 + 1) e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx , \ \text{$\%$ 1 $$\%}$$

何震邦

階段 1 逐項積分 Deriv. divides

1000円

指數替代 羅替代

根式替代 切比雪夫積分

反三角替付 三角函數

有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函

展開被積函

階段 3

已知 P'=2x。

$$A_{1} = \frac{2x^{6}}{(x^{2}+1)^{2}P'} = \frac{x^{5}}{(x^{2}+1)^{2}}$$

$$A'_{1} = \frac{5x^{4}}{(x^{2}+1)^{2}} - \frac{4x^{6}}{(x^{2}+1)^{3}}$$

$$= \frac{x^{4}+4x^{2}-4}{(x^{2}+1)^{2}} + \frac{4}{(x^{2}+1)^{3}}$$

$$B_{1}P' + B'_{1} = \frac{4x^{4}+x^{3}+5}{(x^{2}+1)^{2}} - \frac{4}{(x^{2}+1)^{3}}.$$

何震邦

階段 1

逐項積分 Deriv. divides

階段:

指數替代 塞替代

根式替代

切比雪夫積分

三 色函數

有理函數乘以指數

有理函數

有理函数乘以及E 對數鄰件

展開被積函

階段 3

$$A_{2} = \frac{4x^{4}}{(x^{2}+1)^{2}P'} = \frac{2x^{3}}{(x^{2}+1)^{2}}$$

$$A'_{2} = \frac{6x^{2}}{(x^{2}+1)^{2}} - \frac{8x^{4}}{(x^{2}+1)^{3}}$$

$$= \frac{-2x^{2}+8}{(x^{2}+1)^{2}} - \frac{8}{(x^{2}+1)^{3}}$$

$$B_{2}P' + B'_{2} = \frac{x^{3}+2x^{2}-3}{(x^{2}+1)^{2}} + \frac{4}{(x^{2}+1)^{3}}.$$

何震邦

階段 1

Deriv. divides

階段:

指數替代 羅替代

根式替代 切比雪夫積分

反三角替 三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反函 對數替代

階段 3

$$A_{3} = \frac{x^{3}}{(x^{2}+1)^{2} P'} = \frac{x^{2}}{2(x^{2}+1)^{2}}$$

$$A'_{3} = \frac{x}{(x^{2}+1)^{2}} - \frac{2x^{3}}{(x^{2}+1)^{3}}$$

$$= \frac{-x}{(x^{2}+1)^{2}} + \frac{2x}{(x^{2}+1)^{3}}$$

$$B_{3}P' + B'_{3} = \frac{2x^{2}+x-3}{(x^{2}+1)^{2}} + \frac{4-2x}{(x^{2}+1)^{3}}.$$

何震邦

階段:

Deriv. divides

階段:

指數替代 幂替代

根式替代

切比雪夫積分

反二用晉 三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

有埋函數聚以反函 對數替代

MAKED A

階段3

$$A_4 = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2 P'} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$A'_4 = \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{4x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{5}{(x^2+1)^2} - \frac{4}{(x^2+1)^3}$$

$$B_4 P' + B'_4 = \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{(x^2+1)^3}.$$

$$\int \frac{(2x^6 + 5x^4 + x^3 + 4x^2 + 1) e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx , \% 5 \#$$

何震邦

Deriv. divides

切比雪夫稍分

三角函數 有理函數乘以指數

$$A_5 = \frac{x}{(x^2 + 1)^2 P'} = \frac{1}{2(x^2 + 1)^2}$$

$$A'_5 = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$B_5 P' + B'_5 = 0.$$

$$A = \sum_{k=1}^5 A_k = \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{Ne^P}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(2x^5 + 4x^3 + x^2 + 2x + 1)e^P}{2(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(2x^3 + 2x + 1)e^{x^2}}{2x^2 + 2}.$$

何震邦

# 階段

逐項積分 Deriv. divides

### 勝段っ

審替代 根式替代 切比雪夫積分

切比雪夫積 反三角替代 三角函數

有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函數 對數替代

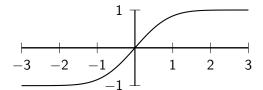
階段 3

分部積分

# **Definition**

誤差函數是一個非初等函數。它的定義如下:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$



# 常態分佈

# 符號積分

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

## は 日 。

指數替代 幂替代 根式替代

根式替代 切比雪夫積分 反三角替代

反二用晉 三角函數

### 有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函數 對數替代

游段 3

分部積分

# Definition

若隨機變數 X 服從期望值為  $\mu$ 、標準差為  $\sigma$  的機率分佈, 記作

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

則其機率密度函數為

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

# 常態分佈的累積分佈函數

# 符號積分

## 何震邦

# 階段

逐項積分 Deriv. divides

## 階段:

指數替代 幂替代 根式替代 切比雪夫積分

反三角替代 三角函數

### 有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函 對數替代

階段 3

分部積分

# **Theorem**

常態分佈的累積分佈函數為

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

# Proof.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

何震邦

階段

逐項積分 Deriv. divides

MHK GITL

指數替付

幕智代 根式替代 切比雪夫積分

反三角替 三角函數

有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反逐 對數禁任

展開被積函數

分部積分

# Proof.

設 
$$J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$
,顯然  $J > 0$ 。

$$J^{2} = \left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}} dx\right)^{2} = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-x^{2} - y^{2}} dx dy.$$

設 r 與  $\theta$  使得  $x = r \cos \theta$  且  $y = r \sin \theta$ ,即極座標。積分範圍為第一象限。積分單位由 dx dy 轉為  $r dr d\theta$ 。

$$J^{2} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\infty} r e^{-r^{2}} dr d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{e^{-r^{2}}}{2} \right]_{0}^{\infty} d\theta = \left[ \frac{\theta}{2} \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$J=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
.

# 方法 8: 有理函數的積分

# 符號積分

何震邦

# 階段

逐項積分 Deriv. divides

### THIS ELL O

指數替代 幂替代 根式替代

恨式晉代 切比雪夫積分

反三角替代

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數聚以指 **有理函數** 

有理函數乘以反函數

對數替代 展開被積函數

### 階段 3

分部積分

詳見《有理函數的積分》

# 方法 9: 有理函數乘以對數或反三角函數

# 符號積分

何震邦

階段

逐項積分 Deriv. divides

NEW FOR

指數替什

幂替代

根式替代

切比雪夫積分

反三角替

二色函數

二用函数 有理函數泰以指數

有理函數

有理函數乘以反函數

展開被積函

necon a

分部積分

$$\int f'(x)\operatorname{op}(g(x))\,dx$$

其中 f, f' 與 g 均為有理函數,op 為對數或反三角函數。則 設 u = f(x) 與 v = g(x) 再進行分部積分,即

$$\int \operatorname{op}(v) du = u \operatorname{op}(v) - \int u \operatorname{op}'(v) dv.$$

$$\int f'(x) \ln|g(x)| \, dx$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### INTER FIRE

指數替代 幂替代 根式替代

根式替代切比雪夫積分

反三角替代 三角函數

三角函數 有理函數乘以指數

有理函數® 有理函數®

有理函數乘以反函數

展開被積

### 階段 3

分部積分

# Solution

設 u = f(x) 與 v = g(x) °

$$\int \ln|v| \, du = u \ln|v| - \int \frac{u}{v} \, dv$$
$$= f(x) \ln|g(x)| - \int \frac{f(x) g'(x)}{g(x)} \, dx.$$

何震邦

Deriv. divides

切比雪夫稍分

二色函數

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反函數

# Solution

設 u = f(x) 與 v = g(x)。

$$\int \operatorname{arctan}(v) du = u \operatorname{arctan}(v) - \int \frac{u}{v^2 + 1} dv$$
$$= f(x) \operatorname{arctan}(g(x)) - \int \frac{f(x) g'(x)}{g(x)^2 + 1} dx.$$

$$\int f'(x)\arcsin(g(x))\,dx$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### mex cm.

指數替代

幂替代 根式替代

切比雪夫積分

反三角替代

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反函數

FEE FURNISH SAN TO

階段 3

分部積分

# Solution

設 u = f(x) 與 v = g(x)。

$$\int \arcsin(v) \, du = u \arcsin(v) - \int \frac{u}{\sqrt{1 - v^2}} \, dv$$
$$= f(x) \arcsin(g(x)) - \int \frac{f(x) g'(x)}{\sqrt{1 - g(x)^2}} \, dx.$$

$$\int f'(x) \operatorname{arsinh}(g(x)) dx$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

ITEM FITE

階段

指數替代 幂替代

根式替代

切比雪夫積分

万二伯称

二色函數

三角函数 有理函數乘以指數

有理函數:

有理函數乘以反函數

INCREASE SERVICE

階段 3

JJ RPBUJ

設 
$$u = f(x)$$
 與  $v = g(x)$ 。

$$\int \operatorname{arsinh}(v) \, du = u \operatorname{arsinh}(v) - \int \frac{u}{\sqrt{v^2 + 1}} \, dv$$
$$= f(x) \operatorname{arsinh}(g(x)) - \int \frac{f(x) g'(x)}{\sqrt{g(x)^2 + 1}} \, dx.$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### MERIEN A

指數替什

罪替代

根式替付

切比雪夫積分

反二 伯林/

三角函數

二用函数

有理函數乘以指數 有理函數

有理函數乘以反函數

型子部介含2.4P

/SC 0/13 (DC 13/4 DC

階段3

分部積分

$$\int 2x \ln|x| dx = x^2 \ln|x| - \int x dx$$
$$= x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{2}.$$

$$\int x^2 \arcsin(x) \, dx$$

何震邦

切比雪夫稍分

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反函數

Deriv. divides

$$\int x^{2} \arcsin(x) dx = \frac{x^{3} \arcsin(x)}{3} - \int \frac{x^{3}}{3\sqrt{1 - x^{2}}} dx$$
$$= \frac{x^{3} \arcsin(x)}{3} + \frac{\sqrt{1 - x^{2}} (x^{2} + 2)}{9}.$$

$$\int \frac{\ln |x^2 + 2x|}{x^2 + 2x + 1} \, dx$$

何震邦

階段 1 逐項積分 Deriv. divides

ma em

階段

指數替代

根式替代 切比雪夫積分

反三角替代 三角函數

有理函數乘以指

有理函數 有理函數季以反函數

對數替代

階段 3

分部積分

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = -\frac{1}{x + 1}$$

$$\int \frac{\ln|x^2 + 2x|}{x^2 + 2x + 1} dx = -\frac{\ln|x^2 + 2x|}{x + 1} + \int \frac{2x + 2}{(x + 1)(x^2 + 2x)} dx$$

$$= -\frac{\ln|x^2 + 2x|}{x + 1} + \int \frac{2}{x^2 + 2x} dx$$

$$= -\frac{\ln|x^2 + 2x|}{x + 1} - \ln|x + 2| + \ln|x|.$$

# 方法 10:有理函數乘以對數函數的初等表達式

# 符號積分

## 何震邦

逐項積分 Deriv. divides

THIS ELL O

階权 2

指數管代 審替代

根式替代

切比雪夫積分

三 一 会 教

及二用質1

三角函數

有理函數乘以

有理函數

有理函數乘以

對數替代

展開被積函數

分部積分

當被積函數是有理函數 f 乘以  $Elem(log_c(ax + b))$ ,則設

$$y = \log_c(ax + b).$$

此時

$$\int f(x) \operatorname{Elem}(\log_c(ax+b)) dx = \int \frac{\ln(c) c^y f(z) \operatorname{Elem}(y)}{b} dy$$

其中  $z = \frac{c^y - a}{b}$ 。通常這樣能把問題丢給方法 7 或階段 3。

# 方法 11: 展開被積函數

# 符號積分

# 何震邦

Deriv. divides

# 塞替代

切比雪夫稍分

二色函數

有理函數乘以指數

有理函數

展開被積函數

當以上方法都無效時,不妨試試把被積函數乘開。

# Example

$$x(\sin(x) + \cos(x)) = x\sin(x) + x\cos(x)$$
$$\frac{e^{x} + x}{e^{x}} = xe^{-x} + 1$$
$$x(e^{x} + 1)^{2} = xe^{2x} + 2xe^{x} + x.$$

# 採用分部積分的時機

## 符號積分

何震邦

### 階段

逐項積分 Deriv. divides

### risk ed- ~

指數替代 幂替代 根式替代 切比雪夫積分

反三角替代 三角函數 有理函數乘以指數

有理函数系以頂級 有理函數 有理函數乘以反函數 對數替代

階段 3

分部積分

- ▶ 多項式乘以指數函數
- ▶ 多項式乘以 sin 或 cos
- ▶ 指數函數乘以 sin 或 cos
- ▶ 多項式乘以指數函數乘以 sin 或 cos。

# 表格解法

# 符號積分

何震邦

# 階段

逐項積分 Deriv. divides

### 階段:

指數管代 幂替代 根式替代 切比雪夫積分

反三角替代 三角函數 有理函數乘以指數

有理函数乘以后数 有理函数乘以反函 對數替代

階段 3

分部積分

# **Theorem**

- ▶ 初始時,取易微分的部份為 u,剩下的部份為 dv,並找 出  $v = \int dv$ 。
- ▶ 取下一個 u 為 u', v 為 ∫ v dx, 直到 u 為常數。
- ► 答案為 ∑ uv。

# Remark

$$\int u'(x) v(x) dx = \int v du.$$

# 多項式乘以指數函數

# 符號積分

何震邦

### 階段

逐項積分 Deriv. divides

### (時日)

審替代 根式替代 切比雪夫積分

反二用智气 三角函數 有理函數乘以指數 有理函數乘以反函數

游段 3

分部積分

- ▶ 遇 cosh 與 sinh 都化為指數函數。
- ▶ 若指數函數的參數為 ax + b , 則將 b 提出為常數。
- ▶ 分部積分時,取多項式為 u。

$$\int x^3 e^{ax} dx$$

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

### RES ECL 4

指數替代 幂替代

非智代 根式替代

切比雪夫積分

万二伯称

从二用百丁

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反逐 對數替代

/BC0/10X-131

分部積分

$$\begin{array}{ccc}
u & v \\
\hline
x^3 & e^{ax}/a \\
3x^2 & -e^{ax}/a^2 \\
6x & e^{ax}/a^3 \\
6 & -e^{ax}/a^4
\end{array}$$

$$\int x^3 e^{ax} dx = \frac{\left(a^3 x^3 - 3a^2 x^2 + 6ax - 6\right) e^{ax}}{a^4}.$$

# 多項式乘以 sin 或 cos

# 符號積分

何震邦

## 階段

逐項積分 Deriv. divides

# 階段 2 指數替付

根式替代 切比雪夫積分 反三角替代 三角函數 有理函數乘以指數 有理函數

有理函數乘以指數 有理函數 有理函數乘以反函數 對數替代 區間無確原數

### 階段 3

分部積分

- ▶ 遇三角函數的乘積,一律採取積化和差,否則三角函數 可能會越積越大串。
- ▶ 若三角函數的參數為 ax + b, 則設新變數 y = ax + b。
- ▶ 分部積分時,取多項式為 u。

$$\int x^2 \cos(x) \, dx$$

何震邦

# 階段

逐項積分 Deriv. divide

## NEW FOR

指數替代 幂替代

根式替代

切比雪夫和

反三角替

三角函數

有理函數乘以

有理函數

有理函數乘以反函 對數替代 展開被積函數

階段:

分部積分

# Solution

設  $u = x^2$  與  $v = \sin(x)$ 。

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = x^2\sin(x) - \int 2x\sin(x)\,dx.$$

設 u = 2x 與  $v = \cos(x)$ 。

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = 2x\cos(x) - \int 2\cos(x)\,dx.$$

所以

$$\int x^2 \cos(x) \, dx = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x).$$

何震邦

#### 階段

逐項積分 Deriv. divides

#### 階段 2

指数管代 審替代 担式软件

根式替代切比雪夫積分

切比雪夫科

反三角替代

三角函數

二用函数

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數乘以反函 對數替代

爬冊恢慎

分部積分

$$\begin{array}{c|c} u & v \\ \hline x^2 & \sin(x) \\ 2x & \cos(x) \\ 2 & -\sin(x) \end{array}$$

$$\int x^2 \cos(x) \, dx = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x).$$

$$\int x^2 \cos(3x) \, dx$$

何震邦

#### 階段

逐項積分 Deriv. divides

#### ITEM FITE

階段 2

**菲**替代

根式替代

切比雪夫積分

反三角替付

三角函數

一<sup>元四数</sup> 有理函數乘以指數

有理函数水以18家

有理函數乘以反函

對數替代

階段:

分部積分

設 
$$y = 3x$$
。

$$\int x^2 \cos(3x) \, dx = \int \frac{y^2 \cos(y)}{27} \, dy$$

$$= \frac{(y^2 - 2) \sin(y) + 2y \cos(y)}{27}$$

$$= \frac{(9x^2 - 2) \sin(3x) + 6x \cos(3x)}{27}$$

何震邦

#### 階段

逐項積分 Deriv. divides

#### **勝段**:

指數替代 幂替代 根式替代 切比雪夫積分

反三角替代

三角函數

二川四数 右頭高齢添回士

有理函数水以183

有理函數乘以反函

對數替代 屋服並待函數

#### 肾段 3

分部積分

$$\int x^2 \cos(x) \sin(x)^2 dx$$

$$= \int \frac{x^2 \cos(x) - x^2 \cos(3x)}{4} dx$$

$$= \frac{(x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x)}{4}$$

$$- \frac{(9x^2 - 2) \sin(3x) + 6x \cos(3x)}{108}$$

$$\int_{\frac{\pi}{\epsilon}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(3x) dx$$
,頁 I

何震邦

階段 1

逐項積分 Deriv. divides

階段:

指數替代 幂替代 根式替代

切比雪夫積分反三角替代

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數 有理函數乘以反函

對數替代

階段 3

分部積分

設 y = 3x。

$$\int x^2 \sin(3x) dx = \int \frac{y^2 \sin(y)}{27} dy.$$

$$\begin{array}{ccc}
u & v \\
y^2 & -\cos(y) \\
2y & \sin(y) \\
2 & \cos(y)
\end{array}$$

$$\int_{\frac{\pi}{\epsilon}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(3x) dx$$
,頁 II

何震邦

Deriv. divides

切比雪夫稍分

二色函數

有理函數

分部積分

$$\int \frac{y^2 \sin(y)}{27} \, dy = \frac{2y \sin(y) + (2 - y^2) \cos(y)}{27}$$

$$= \frac{6x \sin(3x) + (2 - 9x^2) \cos(3x)}{27}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(3x) \, dx = \frac{9\sqrt{2}\pi^2 + 3\cdot 2^{7/2}\pi - 2^{11/2}}{864} - \frac{\pi}{27}$$

$$\approx 0.10007285555380578281.$$

何震邦

階段 1

逐項積分 Deriv. divides

階段

指數替代 幂替代

報替代 根式替代 切比雪夫積分

切 に 当 大 付 反 三 角 替 代

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

有理函數添則反

對數替代

階段 3

分部積分

設 y = 2x。

$$\int x^4 \cos(2x) dx = \int \frac{y^4 \cos(y)}{64} dy.$$

$$\begin{array}{ccc}
u & v \\
y^4 & \sin(y) \\
4y^3 & \cos(y) \\
12y^2 & -\sin(y) \\
24y & -\cos(y) \\
24 & \sin(y)
\end{array}$$

何震邦

階段

逐項積分 Deriv. divides

NEW ECT.

指數替付

根式替代

切比雪夫和

反三角替付

三角函數

有理函數架以

有埋函數

有理函数乘以及E

到数管11、 屈即址移高數

階段 3

分部積分

$$\int \frac{y^4 \cos(y)}{64} dy$$

$$= \frac{(y^4 - 12y^2 + 24) \sin(y) + (4y^3 - 24y) \cos(y)}{64}$$

$$= \frac{(2x^4 - 6x^2 + 3) \sin(2x) + (4x^3 - 6x) \cos(2x)}{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^4 \cos(2x) dx$$

$$= \frac{\pi^4 - 48\pi^2 + 384}{512}$$

$$- \frac{\sqrt{3}\pi^4 + 12\pi^3 - 4 \cdot 3^{7/2}\pi^2 - 648\pi + 8 \cdot 3^{11/2}}{5184}$$

 $\approx 0.009975817894309118$ .

# 指數函數乘以 sin 或 cos

#### 符號積分

何震邦

階段

逐項積分 Deriv. divides

(本日)

門权 2

新数智代 幂替代

根式替代 切比雪夫積分

反三角替代

三角函數

二用函數

有理函數乘以

有理函數

對數替代

肾段 3

分部積分

$$\int e^{cx} \operatorname{trig}(ax + b) dx$$

設 u = trig(ax + b) 與  $v = e^{cx}$ ,則原式變為

$$\int \frac{u}{c} dv.$$

# **Theorem**

$$\int e^{cx} \cos(ax + b) \, dx = \frac{e^{cx} \left( a \sin(ax + b) + c \cos(ax + b) \right)}{c^2 + a^2}$$
$$\int e^{cx} \sin(ax + b) \, dx = \frac{e^{cx} \left( c \sin(ax + b) - a \cos(ax + b) \right)}{c^2 + a^2}.$$

$$\int e^{cx} \cos(ax + b) dx$$

何震邦

#### 階段

逐項積分 Deriv. divides

#### TEST FIT.

指數替付

幕替代 根式替代

切比雪夫積分

反三角替任

二色函數

二用函数

有理函数乘以 有理函數

1年四数

有埋函贩乘以反 對數替代

\_\_\_\_

分部積分

Л пРВСЛ

## Solution

設  $\theta = ax + b$ 。

$$\int e^{cx} \cos(\theta) dx = \frac{e^{cx} \cos(\theta)}{c} + \int \frac{ae^{cx} \sin(\theta)}{c} dx$$
$$\int e^{cx} \sin(\theta) dx = \frac{e^{cx} \sin(\theta)}{c} - \int \frac{ae^{cx} \cos(\theta)}{c} dx.$$

$$\int e^{cx} \cos(\theta) dx$$

$$= \frac{e^{cx} (a \sin(\theta) + c \cos(\theta))}{c^2} - \int \frac{a^2 e^{cx} \cos(\theta)}{c^2} dx$$

$$= \frac{e^{cx} (a \sin(\theta) + c \cos(\theta))}{c^2 + a^2}.$$

$$\int e^{cx} \sin(ax+b) dx$$

何震邦

#### 階段

逐項積分 Deriv. divides

#### ...

#### 階段

指數替代 幂替代

根式替代

切比雪夫積分

反二 伯林石

从二用官门

三角函數

有理函數乘以

有理函數

有理函數乘以反

對數替代

階段 3

分部積分

# Solution

設  $\theta = ax + b$ 。

$$\int e^{cx} \sin(\theta) dx = \frac{e^{cx} \sin(\theta)}{c} - \int \frac{ae^{cx} \cos(\theta)}{c} dx$$
$$\int e^{cx} \cos(\theta) dx = \frac{e^{cx} \cos(\theta)}{c} + \int \frac{ae^{cx} \sin(\theta)}{c} dx.$$

$$\int e^{cx} \sin(\theta) dx$$

$$= \frac{e^{cx} (c \sin(\theta) - a \cos(\theta))}{c^2} - \int \frac{a^2 e^{cx} \sin(\theta)}{c^2} dx$$

$$= \frac{e^{cx} (c \sin(\theta) - a \cos(\theta))}{c^2 + a^2}.$$

$$\int e^{3x} \sin(2x) dx$$

何震邦

階段

逐項積分 Deriv. divides

(N) ED: つ

指數替代 幂替代

根式替代 切比雪夫積分

反三角替代 三角函數

二用函數

有理函数

有理函數乘以反函 對數替代 展開油接函數

階段 3

分部積分

$$\int e^{3x} \sin(2x) \, dx = \frac{e^{3x} \sin(2x)}{3} - \int \frac{2e^{3x} \cos(2x)}{3} \, dx$$
$$\int e^{3x} \cos(2x) \, dx = \frac{e^{3x} \cos(2x)}{3} + \int \frac{2e^{3x} \sin(2x)}{3} \, dx.$$

$$\int e^{3x} \sin(2x) dx$$

$$= \frac{e^{3x} (3\sin(2x) - 2\cos(2x))}{9} - \int \frac{4e^{3x} \sin(2x)}{9} dx$$

$$= \frac{e^{3x} (3\sin(2x) - 2\cos(2x))}{12}.$$

# 多項式乘以指數函數乘以 sin 或 cos

#### 符號積分

何震邦

#### 階段

逐項積分 Deriv. divides

#### 階段 2 指數替付 塞替代

切比雷夫積分 反三角替代 三角函數 有理函數乘以指數 有理函數 有理函數乘以反函數

#### 階段 3

分部積分

- ▶ 基本上技巧同多項式乘以 sin 或 cos,也不適合用表格解法。
- ightharpoonup 分部積分時,取多項式乘以  $\sin$  或  $\cos$  為 u。

$$\int x e^x \cos(x) \, dx$$

何震邦

### 階段:

逐項積分

MHK ERL O

階段 2

指數替付

非替代 相式執任

切比雪夫積分

反三角替任

二色函數

三角函数

有理函數乘以指

有理函數

右咽筋動脈凹后

有细胞数率以及E 對數數件

展開被積函數

省段3

分部積分

$$\int xe^{x}\cos(x) dx = xe^{x}\cos(x) - \int e^{x}(\cos(x) - x\sin(x)) dx$$

$$\int e^{x}\cos(x) dx = \frac{e^{x}(\sin(x) + \cos(x))}{2}$$

$$\int xe^{x}\sin(x) dx = xe^{x}\sin(x) - \int e^{x}(\sin(x) + x\cos(x)) dx$$

$$\int e^{x}\sin(x) dx = \frac{e^{x}(\sin(x) - \cos(x))}{2}$$

$$\int xe^{x}\cos(x) dx = \frac{(x - 1)e^{x}\sin(x) + xe^{x}\cos(x)}{2}.$$

# 謝謝聆聽!

### 符號積分

何震邦

Deriv. divides

指數替代 幂替代

切比雪夫積分

三角函數

有理函數乘以指數

有理函數

對數替代

展開被積函數

分部積分



- ▶ 部落格
- ▶ 討論版
- ▶ 系列教材