

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

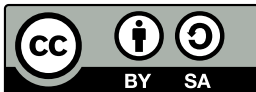
第 6 題

第 7 題

第 8 題

101 年微積分期末小考詳解

何震邦 <jdh8.org>



2014 年 12 月 1 日

再怎麼忙，也要記得.....

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Theorem

$$y' = \frac{dy}{dx} \implies \int y' dx = \int dy.$$

$$(uv)' = u'v + uv' \implies uv = \int v du + \int u dv$$

$$(\ln|y|)' = \frac{y'}{y} \implies \ln|y| = \int \frac{dy}{y}.$$

$$\int x^2 \sin(x) dx$$

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Solution

設 $u = x^2$ 與 $v = \cos(x)$ ，則 $u' = 2x$ 且 $v' = -\sin(x)$ 。

$$\int x^2 \sin(x) dx = - \int u dv = \int 2x \cos(x) dx - x^2 \cos(x).$$

設 $u = x$ 與 $v = \sin(x)$ ，則 $u' = 1$ 且 $v' = \cos(x)$ 。

$$\int x \cos(x) dx = \int u dv = x \cos(x) - \int \cos(x) dx.$$

所以

$$\int x^2 \sin(x) dx = 2x \sin(x) + (2 - x^2) \cos(x).$$

神奇的導函數與判別式

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Theorem

$$4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)^2 + 4ac - b^2.$$

Proof.

$$\begin{aligned}(2ax + b)^2 &= 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 &= 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \\4a(ax^2 + bx + c) &= 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \\4a(ax^2 + bx + c) &= (2ax + b)^2 + 4ac - b^2. \quad \square\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx, \text{ 其中 } 4ac > b^2$$

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

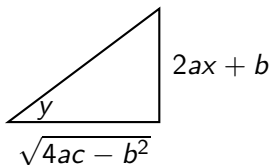
第 8 題

Solution

設 $y = \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$ 。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2} \left(\frac{(2ax+b)^2}{4ac-b^2} + 1 \right)} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2ax^2 + 2bx + 2c}.$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} dy = \frac{2 \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$



$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx, \text{ 其中 } 4ac < b^2$$

期末小考

何震邦

Solution

$ax^2 + bx + c$ 的兩根為 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

$$\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{x - \beta} - \frac{1}{x - \alpha} \right)$$

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} dx = \frac{\ln \left| \frac{x - \beta}{x - \alpha} \right|}{\beta - \alpha} = \frac{\ln \left| \frac{2ax - 2a\beta}{2ax - 2a\alpha} \right|}{\beta - \alpha}$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{\ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$$

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Solution

$$\begin{aligned} & \int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{p}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \int \frac{q - \frac{bp}{2a}}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{p \ln|ax^2 + bx + c|}{2a} + \int \frac{2aq - bp}{2a(ax^2 + bx + c)} dx. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

期末小考

何震邦

Solution

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx \\ &= \int \frac{2x - 2}{2(x^2 - 2x + 2)} dx + \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx \\ &= \frac{\ln|x^2 - 2x + 2|}{2} + \arctan\left(\frac{2x - 2}{2}\right) \\ &= \frac{\ln|x^2 - 2x + 2|}{2} + \arctan(x - 1). \end{aligned}$$

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

多項式除法

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

對於任意兩個多項式 A, B ，其中 $B \neq 0$ ，我們都可以找到商 Q 和餘式 R 使得

$$A = BQ + R \quad (1)$$

其中 $\deg(R) < \deg(B)$ 。

Definition

為了方便，對於 (1) 式，我們定義以下新符號：

$$[B] A = R.$$

擴展的餘式算子

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Definition

設 B, D, N, R 皆為多項式，其中 B 與 D 互質，我們定義

$$[B] \frac{N}{D} = R$$

等價於

$$[B] N = [B] DR$$

其中 $\deg(R) < \deg(B)$ 。

餘式算子的性質

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Theorem

設 B, D, N 為多項式， F 與 G 為有理函數且 B 與 D 互質。

- ▶ $[B](F + G) = [B]F + [B]G$
- ▶ $[B]FG = [B]([B]F[B]G)$
- ▶ $[B]\frac{N}{D} = [B]\frac{[B]N}{[B]D}$

部份分式分解算法

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Theorem

對於最簡真分式 A/D ，其中

$$D = D_1 D_2 \cdots D_n$$

且 D_k 兩兩互質。則 A/D 可以表達為

$$\frac{A_1}{D_1} + \frac{A_2}{D_2} + \cdots + \frac{A_n}{D_n}$$

其中對於所有 k ，若 $1 \leq k \leq n$ 則

$$A_k = [D_k] \frac{AD_k}{D}.$$

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx \text{ 之一}$$

期末小考

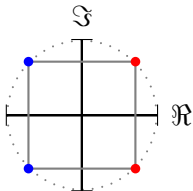
何震邦

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

設 $D_1 = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ 與 $D_2 = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ 。

$$[D_1] \frac{1}{D_2} = [D_1] \frac{1}{2^{3/2}x} = \frac{x - \sqrt{2}}{-2^{3/2}}$$

$$[D_2] \frac{1}{D_1} = [D_2] \frac{1}{-2^{3/2}x} = \frac{x + \sqrt{2}}{2^{3/2}}.$$



$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx \text{ 之二}$$

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Solution

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x^4 + 1} dx \\ &= \int \frac{x + \sqrt{2}}{2^{3/2} (x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx - \int \frac{x - \sqrt{2}}{2^{3/2} (x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx \\ &= \frac{\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}{2^{5/2}} - \frac{\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{2^{5/2}} + \frac{\arctan(\sqrt{2}x + 1)}{2^{3/2}} \\ & \quad + \frac{\arctan(\sqrt{2}x - 1)}{2^{3/2}}. \end{aligned}$$

Hermite reduction

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

假設 $m \geq 2$ 否則 D 已經 squarefree 了。首先設 $V = D_m$ 與 $U = D/V^m$ 。因為 UV' 與 V 互質，我們能以擴展的輾轉相除法求兩多項式 B, C 使得

$$\frac{A}{1-m} = BUV' + CV$$

其中 $\deg(B) < \deg(V)$ 。兩端同乘 $(1-m)/(UV^m)$ 得

$$\begin{aligned}\frac{A}{UV^m} &= \frac{(1-m)BV'}{V^m} + \frac{(1-m)C}{UV^{m-1}} \\ &= \frac{B'}{V^{m-1}} - \frac{(m-1)BV'}{V^m} - \frac{B'U + (m-1)C}{UV^{m-1}} \\ \int \frac{A}{UV^m} &= \frac{B}{V^{m-1}} - \int \frac{B'U + (m-1)C}{UV^{m-1}}.\end{aligned}$$

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx, \text{ 頁 1}$$

期末小考

何震邦

設 $A = 6x^2 - 15x + 22$ ，又設 $U = x + 3$ 及 $V = x^2 + 2$ 。

$$UV' = 2V + 6x - 4$$

$$18V = (3x + 2)(6x - 4) + 44$$

$$= (3x + 2)(UV' - 2V) + 44$$

$$44 = (3x + 2)UV' + (14x - 6)V$$

$$-A = -6V + 15x - 10$$

$$= -6V + \frac{5(6x - 4)}{2}$$

$$= \frac{5UV'}{2} - 11V.$$

$$\int \frac{A}{UV^2} = \frac{5}{2V} + \int \frac{11}{UV}.$$

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx, \text{ 頁 II}$$

期末小考

何震邦

分解部份分式：

$$[x+3] \frac{11}{x^2+2} = \frac{11}{11}$$

$$[x^2+2] \frac{11}{x+3} = \frac{11(x-3)}{-11}.$$

$$\frac{11}{(x+3)(x^2+2)} = \frac{1}{x+3} + \frac{3-x}{x^2+2}.$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx \\ &= \frac{5}{2x^2+4} + \ln|x-3| - \frac{\ln(x^2+2)}{2} + \frac{3 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

$$\int e^{3x} \sin(2x) dx$$

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Solution

$$\begin{aligned}\int e^{3x} \sin(2x) dx &= \frac{e^{3x} \sin(2x)}{3} - \int \frac{2e^{3x} \cos(2x)}{3} dx \\ \int e^{3x} \cos(2x) dx &= \frac{e^{3x} \cos(2x)}{3} + \int \frac{2e^{3x} \sin(2x)}{3} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int e^{3x} \sin(2x) dx \\&= \frac{e^{3x} (3 \sin(2x) - 2 \cos(2x))}{9} - \int \frac{4e^{3x} \sin(2x)}{9} dx \\&= \frac{e^{3x} (3 \sin(2x) - 2 \cos(2x))}{13}.\end{aligned}$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x} dx, \text{ 分別取左、右黎曼和, } n=4$$

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

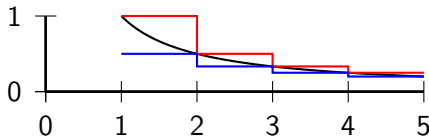
Solution

左黎曼和為

$$\int_1^5 \frac{1}{x} dx \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

右黎曼和為

$$\int_1^5 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{7}{60}.$$



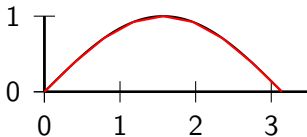
$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx, \text{ 梯形法則, } n = 8$$

期末小考

何震邦

Solution

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(x) dx &\approx \frac{\pi}{16} \left(\sin(0) + 2 \sum_{k=1}^7 \sin\left(\frac{k\pi}{8}\right) + \sin(\pi) \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sqrt{2} + 1 \right) \\ &\approx 1.974231601945551. \end{aligned}$$



第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

累積分布函數 (CDF)

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

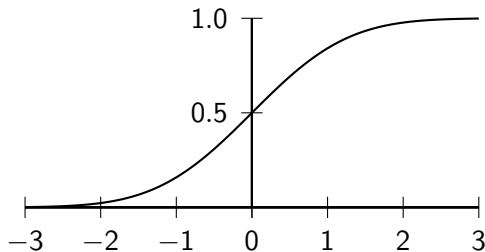
第 7 題

第 8 題

Definition

實值隨機變數 X 的累積分布函數 為

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$



機率密度函數 (PDF)

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

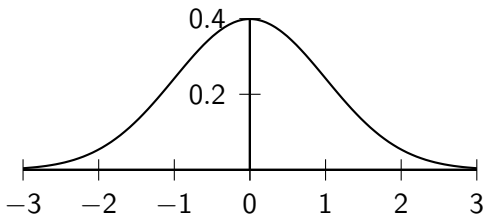
第 7 題

第 8 題

Definition

隨機變數 X 的機率密度函數是 f ，其中 f 是非負可積函數，若

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$



CDF 與 PDF 的關係

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Theorem

若 F 是 X 的累積分布函數，則

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Theorem

若 $F'(c)$ 存在，則

$$F'(c) = f(c).$$

期望值

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Definition

若隨機變數 X 的機率密度函數為 f ，則 X 的期望值為

$$E(X) = \int X dP = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx.$$

Theorem

若隨機變數 X 的機率密度函數為 f ，則函數 $g(X)$ 的期望值為

$$E(g(X)) = \int g(X) dP = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

應用題

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

In reliability theory, the random variable is often the lifetime of some item, such as a laptop computer battery. The PDF can be used to find probabilities and expectations about the lifetime. Suppose then that the lifetime in hours of a battery is a continuous random variable x with PDF

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12x^2(5-x)}{625} & \text{if } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1. Find the probability that the battery lasts at least three hours.
2. Find the expected value of the lifetime.

詳解

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

Solution

$$\int_3^5 \frac{12x^2(5-x)}{625} dx = \left[\frac{20x^3 - 3x^4}{625} \right]_3^5 = \frac{328}{625}.$$

Solution

$$\int_0^5 \frac{12x^3(5-x)}{625} dx = \left[\frac{3(25x^4 - 4x^5)}{3125} \right]_0^5 = 3.$$

機率密度函數的圖

期末小考

何震邦

第 1 題

第 2 題

第 3 題

第 4 題

第 5 題

第 6 題

第 7 題

第 8 題

- ▶ 期望值：3
- ▶ 中位數：3.071362159338052

