

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

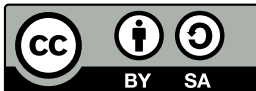
部份分式法

分母為高次式

有理函數的積分

地表最快演算法

何震邦 <jdh8.org>



2014 年 12 月 1 日

重點提要

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

本次我們的重點在於

- ▶ 多項式除法
- ▶ 最大公因式
- ▶ Squarefree 多項式。

多項式除法

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

對於任意兩個多項式 A, B ，其中 $B \neq 0$ ，我們都可以找到商 Q 和餘式 R 使得

$$A = BQ + R \quad (1)$$

其中 $\deg(R) < \deg(B)$ 。 (1) 式又可寫作

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Definition

為了方便，對於以上除法式，我們定義以下新符號：

$$\lfloor A/B \rfloor = Q$$

$$\lceil B \rceil A = R.$$

除法演算法

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

Algorithm 1 多項式的除法 $A = BQ + R$

Require: A, B 是多項式且 $B \neq 0$

Ensure: $A = BQ + R$

- 1: $Q := 0$
 - 2: $R := A$
 - 3: **while** $\deg(R) \geq \deg(B)$ **do** /* 長除法 */
 - 4: S 為 R 的領導項除以 B 的領導項
 - 5: $Q := Q + S$
 - 6: $R := R - BS$
 - 7: **end while**
-

最大公因式

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

輾轉相除法最早的記錄是在歐幾里德的《幾何原本》中，故在西方常稱為歐幾里德演算法（Euclidean algorithm）。

[The Euclidean algorithm] is the granddaddy of all algorithms, because it is the oldest nontrivial algorithm that has survived to the present day.

Donald Knuth, *The Art of Computer Programming, Vol. 2: Seminumerical Algorithms*, 2nd edition (1981), p. 318.

輾轉相除法

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

Algorithm 2 輾轉相除法求最大公因式 $\gcd(A, B)$

Require: A, B 是多項式

```
1:  $R_0 := A$ 
2:  $R_1 := B$ 
3:  $k := 1$ 
4: while  $R_k \neq 0$  do
5:    $R_{k+1} := \lceil R_k \rceil R_{k-1}$ 
6:    $k := k + 1$ 
7: end while
8: return  $R_{k-1}$  /*  $R_k = 0$  */
```

分數的計算很麻煩！

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

- ▶ 有時候對於係數為有理數的多項式 A, B ，我們不需要知道確切的餘式 $[B] A$ ，而可以接受答案為餘式的常數倍。此時為了避免分數的計算，我們可以在過程中縮放多項式，使計算過程全為整數。
- ▶ 如輾轉相除法。

多項式的容度 (content)

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.

部份分式法
分母為高次式

Definition

對整係數多項式 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 而言，它的容度 $\text{cont}(f)$ 為所有係數的最大公因數。

Definition

若 $f \in \mathbb{Q}[x]$ 即 f 是係數為有理數的多項式，則必存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $nf \in \mathbb{Z}[x]$ 。我們定義 f 的容度為

$$\text{cont}(f) = \frac{\text{cont}(nf)}{n}.$$

Definition

本原多項式就是容度為 1 的多項式。

求餘式的常數倍，並為本原多項式

積分有理函數

何震邦

最大公因式
Squarefree

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

Algorithm 3 求 $R = [B] cA$ ，其中常數 c 使 $\text{cont}(R) = 1$

Require: $\{A, B\} \subset \mathbb{Q}[x]$

$$1: A := A / \text{cont}(A)$$

```
2:  $B := B / \text{cont}(B)$  /* 理論上不需要，但可簡化計算 */
```

3: **while** $\deg(A) \geq \deg(B)$ **do**

4: a 與 b 分別為 A 與 B 的領導係數

5: $m := b / \gcd(a, b)$

6: $n := \deg(A) - \deg(B)$

7: $A := [Bx^n] mA$ /* A 至少降一次且仍為 $\mathbb{Z}[x]$ */

8: $A := A / \text{cont}(A)$

```
9: end while
```

```

10: return  $R := A$ 

```

$$P = x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27, \text{ 求 } \gcd(P, P')$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

$$R_0 = x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27$$

$$R_1 = 5x^9 + 32x^7 + 57x^5 + 18x^3$$

$$R_2 = 8x^8 + 38x^6 + 27x^4 + 135$$

$$R_3 = 22x^7 + 107x^5 + 48x^3 - 225x$$

$$R_4 = 2x^6 - 21x^4 - 180x^2 - 297$$

$$R_5 = x^5 + 6x^3 + 9x$$

$$R_6 = x^4 + 6x^2 + 9$$

$$R_7 = 0.$$

$$\gcd(P, P') = x^4 + 6x^2 + 9.$$

多項式的互質

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.

部份分式法
分母為高次式

Definition

若一群多項式的最大公因式為常數，則我們說它們互質。

Theorem

多項式互質等價於它們沒有共同的根。

Example

- ▶ $x + 2$ 與 $x + 3$ 互質
- ▶ $x^2 + 2x + 1$ 與 $x - 1$ 互質
- ▶ 非零常數與任意多項式互質。

質式

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Definition

質式或稱不可約多項式為無法分解為較低次多項式的積的多項式。

Theorem

所有一次多項式是質式。

Squarefree 多項式

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Definition

若不存在多項式 U 使得 $\deg(U) > 0$ 且 U^2 整除多項式 P ，則我們說 P 是 **Squarefree** 多項式。

Theorem

- ▶ *Squarefree* 多項式就是沒有重根的多項式。
- ▶ 多項式為 *squarefree* 等價於它與自己的導函數互質。

Squarefree 多項式與自己的導函數互質

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Proof.

設一任意 squarefree 多項式 P ，它可分解為

$$P = P_1 P_2 \cdots P_n$$

其中對於所有 $k \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq k \leq n$ ， P_k 是質式。因此

$$P' = P'_1 P_2 \cdots P_n + P_1 P'_2 \cdots P_n + \cdots + P_1 P_2 \cdots P'_n.$$

因為對於所有 P_k ， $\gcd(P_k, P'_k) = 1$ ，所以

$$\gcd(P, P') = 1.$$



與自己的導函數互質的多項式必為 squarefree

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Proof.

假設有一任意非 squarefree 多項式 P 與它的導函數互質。它可分解為

$$P = UV^m$$

其中 $\deg(V) > 0$ 且 $m \in \mathbb{N}$ 且 $m \geq 2$ 。因此

$$P' = U'V^m + mUV^{m-1}V' = V^{m-1}(U'V + mUV').$$

所以

$$V^{m-1} \mid \gcd(P, P')$$

矛盾！所以假設錯誤。



Squarefree 分解

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Definition

顧名思義，就是不先急著做多項式 D 的質因式分解，而只做到因式是 squarefree 多項式為止，即

$$D = D_1 D_2^2 \cdots D_m^m$$

其中 D_i 為 squarefree 且兩兩互質。

Yun 演算法

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Algorithm 4 求多項式 D 的 squarefree 分解

Require: D 是多項式

Ensure: $D = D_1 D_2^2 \cdots D_m^m$ 是 D 的 squarefree 分解

- 1: $P := D$
 - 2: $Q := D'$
 - 3: $m := 0$
 - 4: **while** $\deg(P) > 0$ **do**
 - 5: $D_m := \gcd(P, Q)$
 - 6: $P := P / D_m$
 - 7: $Q := Q / D_m - P'$
 - 8: $m := m + 1$
 - 9: **end while**
-

Yun 演算法是有效的

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Proof.

設 $D = D_1 D_2^2 \cdots D_m^m$ 是 D 的 squarefree 分解。

$$P = D_1 D_2^2 \cdots D_m^m$$

$$Q = D_2 D_3^2 \cdots D_m^{m-1} (D_1' D_2 \cdots D_m + \cdots + m D_1 D_2 \cdots D_m')$$

$$D_0 = D_2 D_3^2 \cdots D_m^{m-1}$$

對於所有 $i \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq i \leq m$

$$P = D_i D_{i+1} \cdots D_m$$

$$Q = D_i (D_{i+1}' D_{i+2} \cdots D_m + \cdots + (m-i) D_{i+1} D_{i+2} \cdots D_m')$$

$$D_i = \gcd(P, Q)$$



分解 $D = x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Solution

$$P = x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27$$

$$Q = 10x^9 + 64x^7 + 114x^5 + 36x^3$$

$$D_0 = x^4 + 6x^2 + 9$$

$$P = x^6 + 2x^4 - 2x^2 + 3$$

$$Q = 4x^5 - 4x^3 + 4x$$

$$D_1 = x^4 - x^2 + 1$$

$$P = x^2 + 3$$

$$Q = 2x$$

$$D_2 = 1$$

$$P = x^2 + 3$$

$$Q = 0$$

$$D_3 = x^2 + 3$$

$$D = (x^4 - x^2 + 1) (x^2 + 3)^3.$$

方法 8：有理函數的積分

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

當被積函數為最簡分式 N/D ，執行多項式除法，即

$$N = PD + A$$

其中 $\deg(A) < \deg(D)$ 。則

$$\int \frac{N}{D} = \int P + \int \frac{A}{D}.$$

多項式 P 可輕易積分，而最簡真分式 A/D 的積分就是本節的重點了。

$$\int \frac{1}{ax^2 + b} dx, \text{ 其中 } ab > 0$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

Solution

設 $y = \arctan\left(\frac{ax}{\sqrt{ab}}\right)$, 則 $dx = \frac{\sqrt{ab} \sec(y)^2}{a} dy$ 。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2 + b} dx &= \int \frac{\sqrt{ab} \sec(y)^2}{a(b \tan(y)^2 + b)} dy \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{ab}} dy \\ &= \frac{\arctan\left(\frac{ax}{\sqrt{ab}}\right)}{\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx, \text{ 其中 } 4ac > b^2$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

Solution

$$\text{設 } y = x + \frac{b}{2a}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{1}{ay^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}} dy \\ &= \frac{\arctan\left(\frac{ay}{\sqrt{4ac - b^2}/2}\right)}{\sqrt{4ac - b^2}/2} \\ &= \frac{2 \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right)}{\sqrt{4ac - b^2}}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx, \text{ 其中 } 4ac < b^2$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

Solution

$$ax^2 + bx + c \text{ 的兩根為 } \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{x - \beta} - \frac{1}{x - \alpha} \right)$$

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} dx = \frac{\ln \left| \frac{x - \beta}{x - \alpha} \right|}{\beta - \alpha} = \frac{\ln \left| \frac{2ax - 2a\beta}{2ax - 2a\alpha} \right|}{\beta - \alpha}$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{\ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Solution

$$\begin{aligned} & \int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{p}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \int \frac{q - \frac{bp}{2a}}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{p \ln|ax^2 + bx + c|}{2a} + \int \frac{2aq - bp}{2a(ax^2 + bx + c)} dx. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Solution

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx \\ &= \int \frac{2x - 2}{2(x^2 - 2x + 2)} dx + \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx \\ &= \frac{\ln|x^2 - 2x + 2|}{2} + \arctan\left(\frac{2x - 2}{2}\right) \\ &= \frac{\ln|x^2 - 2x + 2|}{2} + \arctan(x - 1). \end{aligned}$$

多項式的貝祖等式

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Theorem

若 G 是多項式 A 與 B 的最大公因式，則存在多項式 X, Y 使得

$$AX + BY = G$$

其中

$$\deg(X) < \deg(B) - \deg(G)$$

$$\deg(Y) < \deg(A) - \deg(G).$$

擴展的輾轉相除法

積分有理函數

何震邦

最大公因式
Squarefree

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

Algorithm 5 擴展的輾轉相除法

Require: A, B 是多項式

Ensure: G, X, Y 符合貝祖等式 $AX + BY = G$

```
1:  $(R_0, X_0, Y_0) := (A, 1, 0)$  /*  $1A + 0B$  */
```

$$2: (R_1, X_1, Y_1) := (B, 0, 1) \quad /* 0A + 1B */$$
3: $k := 1$ 4: **while** $R_k \neq 0$ **do**5: $Q := \lfloor R_{k-1}/R_k \rfloor$
$$6: \quad R_{k+1} := [R_k] R_{k-1}$$
$$7: \quad X_{k+1} := X_k - QX_{k-1}$$
8: $Y_{k+1} := Y_k - QY_{k-1}$

```

9:    $k := k + 1$    /*  $AX_k + BY_k = R_k$  */

```

```
10: end while
```

11: $(G, X, Y) := (R_{k-1}, X_{k-1}, Y_{k-1})$

Hermite reduction

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.

部份分式法
分母為高次式

假設 $m \geq 2$ 否則 D 已經 squarefree 了。首先設 $V = D_m$ 與 $U = D/V^m$ 。因為 UV' 與 V 互質，我們能以擴展的輾轉相除法求兩多項式 B, C 使得

$$\frac{A}{1-m} = BUV' + CV$$

其中 $\deg(B) < \deg(V)$ 。兩端同乘 $(1-m)/(UV^m)$ 得

$$\begin{aligned}\frac{A}{UV^m} &= \frac{(1-m)BV'}{V^m} + \frac{(1-m)C}{UV^{m-1}} \\ &= \frac{B'}{V^{m-1}} - \frac{(m-1)BV'}{V^m} - \frac{B'U + (m-1)C}{UV^{m-1}} \\ \int \frac{A}{UV^m} &= \frac{B}{V^{m-1}} - \int \frac{B'U + (m-1)C}{UV^{m-1}}.\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^8 + 7x^6 + 42x^4 + 48x^2 + 30}{x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27} dx, \text{ 頁 1}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

設 $A = x^8 + 7x^6 + 42x^4 + 48x^2 + 30$ ，又設 $U = x^4 - x^2 + 1$
及 $V = x^2 + 3$ 。

$$UV' = (2x^3 - 8x) V + 26x$$

$$-78 = xUV' - (2x^4 - 8x^2 + 26) V$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{-2} &= - \left(\frac{x^6}{2} + 2x^4 + 15x^2 - 21 \right) V - 78 \\ &= xUV' - \left(\frac{x^6}{2} + 4x^4 + 7x^2 + 5 \right) V. \end{aligned}$$

即 $B = x$ 與 $C = - \left(\frac{x^6}{2} + 4x^4 + 7x^2 + 5 \right)$ 滿足

$$\frac{A}{-2} = BUV' + CV.$$

$$\int \frac{x^8 + 7x^6 + 42x^4 + 48x^2 + 30}{x^{10} + 8x^8 + 19x^6 + 9x^4 + 27} dx, \text{ 頁 II}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

因此

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{UV^3} &= \frac{B}{V^2} - \int \frac{B'U + 2C}{UV^2} \\ &= \frac{x}{V^2} + \int \frac{x^6 + 7x^4 + 15x^2 + 9}{UV^2} \\ &= \frac{x}{x^4 + 6x^2 + 9} + \int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

部份分式分解，分母為 squarefree

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Theorem

若被積函數為最簡真分式 A/D ，先因式分解

$$D = D_1 D_2 \cdots D_n$$

其中 D_k 兩兩互質。則 A/D 可以表達為

$$\frac{A_1}{D_1} + \frac{A_2}{D_2} + \cdots + \frac{A_n}{D_n}$$

其中 $\deg(A_k) < \deg(D_k)$ 均成立。

部份分式分解是有效的

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Proof.

設多項式 A, P, Q 兩兩互質且 $\deg(A) < \deg(PQ)$ 。根據多項式的貝祖等式，存在多項式 B, C 使得

$$\begin{aligned} A &= BQ + CP \\ \frac{A}{PQ} &= \frac{B}{P} + \frac{C}{Q} \end{aligned}$$

其中 $\deg(B) < \deg(P)$ 且 $\deg(C) < \deg(Q)$ 。不斷重複此步驟，即得 $A/(PQ)$ 的部份分式分解。 □

擴展的餘式算子

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.

部份分式法
分母為高次式

Definition

設 B, D, N, R 皆為多項式，其中 B 與 D 互質，我們定義

$$[B] \frac{N}{D} = R$$

等價於

$$[B] N = [B] DR$$

其中 $\deg(R) < \deg(B)$ 。

餘式算子的性質

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Theorem

設 B, D, N 為多項式， F 與 G 為有理函數且 B 與 D 互質。

- ▶ $[B](F + G) = [B]F + [B]G$
- ▶ $[B]FG = [B]([B]F[B]G)$
- ▶ $[B]\frac{N}{D} = [B]\frac{[B]N}{[B]D}$

餘式的最快算法

積分有理函數

何震邦

最大公因式
Squarefree

- 分母為二次式
- Hermite red.
- 部份分式法
- 分母為高次式

Algorithm 6 擴展的餘式算子

Require: B, D 是非零多項式， N 是多項式

Ensure: 回傳 $[B] N/D$

$$1: N := [B] N$$
$$2: D := [B] D$$
3: **while** $\deg(D) > 0$ **do**4: $Q := |B/D|$ 5: $D := -[D] B \text{ /* } [B] DQ \text{ */}$ 6: $N := [B] NQ$

```
7: end while
```

```
8: return  $N/D$  /*  $D$  是常數 */
```

部份分式分解算法

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Theorem

對於最簡真分式 A/D ，其中

$$D = D_1 D_2 \cdots D_n$$

且 D_k 兩兩互質。則 A/D 可以表達為

$$\frac{A_1}{D_1} + \frac{A_2}{D_2} + \cdots + \frac{A_n}{D_n}$$

其中對於所有 k ，若 $1 \leq k \leq n$ 則

$$A_k = [D_k] \frac{AD_k}{D}.$$

部份分式分解算法是有效的

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

Proof.

對於所有 k 使得 $1 \leq k \leq n$

$$\lceil D_k \rceil \frac{AD_k}{D} = \lceil D_k \rceil \frac{A_k D + D_k Q}{D}$$

其中

$$Q = \frac{A_1 D}{D_1} + \cdots + \frac{A_{k-1} D}{D_{k-1}} + \frac{A_{k+1} D}{D_{k+1}} + \cdots + \frac{A_n D}{D_n}$$

為多項式。所以

$$\lceil D_k \rceil \frac{AD_k}{D} = \lceil D_k \rceil \frac{A_k D}{D} = A_k.$$



分解 $\frac{1}{x^5 + x + 1}$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

Solution

首先質因式分解 $x^5 + x + 1$ 得

$$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

設 $D_1 = x^2 + x + 1$ 與 $D_2 = x^3 - x^2 + 1$ 。

$$[D_1] \frac{1}{D_2} = [D_1] \frac{1}{x+3} = \frac{x-2}{-7}$$

$$[D_2] \frac{1}{D_1} = [D_2] \frac{x-2}{-x-3} = \frac{5x^2 - 20x + 25}{35}.$$

$$\frac{1}{x^5 + x + 1} = \frac{x^2 - 4x + 5}{7(x^3 - x^2 + 1)} - \frac{x - 2}{7(x^2 + x + 1)}.$$

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx, \text{ 頁 1}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

設 $A = 6x^2 - 15x + 22$ ，又設 $U = x + 3$ 及 $V = x^2 + 2$ 。

$$UV' = 2V + 6x - 4$$

$$18V = (3x + 2)(6x - 4) + 44$$

$$= (3x + 2)(UV' - 2V) + 44$$

$$44 = (3x + 2)UV' + (14x - 6)V$$

$$-A = -6V + 15x - 10$$

$$= -6V + \frac{5(6x - 4)}{2}$$

$$= \frac{5UV'}{2} - 11V.$$

$$\int \frac{A}{UV^2} = \frac{5}{2V} + \int \frac{11}{UV}.$$

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx, \text{ 頁 11}$$

分解部份分式：

$$[x+3] \frac{11}{x^2+2} = \frac{11}{11}$$

$$[x^2+2] \frac{11}{x+3} = \frac{11(x-3)}{-11}.$$

$$\frac{11}{(x+3)(x^2+2)} = \frac{1}{x+3} + \frac{3-x}{x^2+2}.$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx \\ &= \frac{5}{2x^2+4} + \ln|x-3| - \frac{\ln(x^2+2)}{2} + \frac{3 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 16x}{(x-3)(x^2+4)^2} dx, \text{ 頁 1}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

設 $A = x^2 + 16x$ ，又設 $U = x - 3$ 及 $V = x^2 + 4$ 。

$$UV' = 2V - 6x - 8$$

$$18V = (3x - 4)(6x + 8) + 104$$

$$= (3x - 4)(2V - UV') + 104$$

$$104 = (3x - 4)UV' - (6x - 26)V$$

$$-A = -V - 16x + 4$$

$$= -V - \frac{8(6x + 8)}{3} + \frac{76}{3}$$

$$= \frac{(19x + 44)UV'}{26} - \frac{19xV}{13}.$$

$$\int \frac{A}{UV^2} = \frac{19x + 44}{26V} + \int \frac{19x + 57}{26UV}.$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 16x}{(x-3)(x^2+4)^2} dx, \text{ 頁 II}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

分解部份分式：

$$[x-3] \frac{19x+57}{26(x^2+4)} = \frac{57}{169}$$

$$[x^2+4] \frac{19x+57}{26(x-3)} = \frac{114x+95}{-338}.$$

$$\frac{19x+57}{26(x-3)(x^2+4)} = \frac{57}{169(x-3)} - \frac{114x+95}{338(x^2+4)}.$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 16x}{(x-3)(x^2+4)^2} dx, \text{ 頁 III}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 + 16x}{(x-3)(x^2+4)^2} dx \\ &= \frac{19x + 44}{26x^2 + 104} + \frac{57 \ln|x-3|}{169} - \frac{57 \ln(x^2+4)}{338} - \frac{95 \arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{676} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \frac{x^2 + 16x}{(x-3)(x^2+4)^2} dx \\ &= \frac{41}{104} - \frac{57 \ln(8)}{338} - \frac{95\pi}{2704} \\ & \quad + \frac{570 \ln(5) - 1140 \ln(2) + 475 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - 1638}{3380} \\ &\approx -0.44864537510260708881. \end{aligned}$$

$$\int_2^3 \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{(x-1)(x^2+4)^2} dx, \text{ 頁 1}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

設 $A = 2x^3 + 5x^2 + 16x$ ，又設 $U = x - 1$ 及 $V = x^2 + 4$ 。

$$UV' = 2V - 2x - 8$$

$$2V = (x - 4)(2x + 8) + 40$$

$$= (x - 4)(2V - UV') + 40$$

$$40 = (x - 4)UV' - (2x - 10)V$$

$$-A = (-2x - 5)V - 8x + 20$$

$$= (-2x - 5)V - 4(2x + 8) + 52$$

$$= 4UV' - (2x + 13)V + 52$$

$$= \frac{(13x - 12)UV'}{10} - \frac{23xV}{5}.$$

$$\int \frac{A}{UV^2} = \frac{13x - 12}{10V} + \int \frac{33x + 13}{10UV}.$$

$$\int_2^3 \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{(x-1)(x^2+4)^2} dx, \text{ 頁 II}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

分解部份分式：

$$[x-1] \frac{33x+13}{10(x^2+4)} = \frac{46}{50}$$

$$[x^2+4] \frac{33x+13}{10(x-1)} = \frac{46x-119}{-50}.$$

$$\frac{33x+13}{10(x-1)(x^2+4)} = \frac{23}{25(x-1)} - \frac{46x-119}{50(x^2+4)}.$$

$$\int_2^3 \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{(x-1)(x^2+4)^2} dx, \text{ 頁 III}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.

部份分式法
分母為高次式

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \\ &= \frac{13x-12}{10x^2+40} + \frac{23\ln|x-1|}{25} - \frac{23\ln(x^2+4)}{25} - \frac{119\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_2^3 \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \\ &= \frac{184\ln(8) - 119\pi - 70}{400} \\ & \quad - \frac{598\ln(13) - 1196\ln(2) - 1547\arctan\left(\frac{3}{2}\right) - 270}{1300} \end{aligned}$$

$$\approx 0.6819548347692329.$$

分母為 $ax^3 \pm b$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

假設 $a > 0$ 且 $b > 0$ 。

Theorem

$ax^3 - b$ 可在 \mathbb{R} 上因式分解為

$$\left(a^{1/3}x - b^{1/3}\right) \left(a^{2/3}x^2 + a^{1/3}b^{1/3}x + b^{2/3}\right).$$

$ax^3 + b$ 可在 \mathbb{R} 上因式分解為

$$\left(a^{1/3}x + b^{1/3}\right) \left(a^{2/3}x^2 - a^{1/3}b^{1/3}x + b^{2/3}\right).$$

分母為 $ax^4 \pm b$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

假設 $a > 0$ 且 $b > 0$ 。

Theorem

$ax^4 - b$ 可在 \mathbb{R} 上因式分解為

$$\left(\sqrt{ax^2} - \sqrt{b}\right) \left(\sqrt{ax^2} + \sqrt{b}\right).$$

$ax^4 + b$ 可在 \mathbb{R} 上因式分解為

$$\left(\sqrt{ax^2} - \sqrt{2}a^{1/4}b^{1/4}x + \sqrt{b}\right) \left(\sqrt{ax^2} + \sqrt{2}a^{1/4}b^{1/4}x + \sqrt{b}\right).$$

分母為 $ax^5 \pm b$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

假設 $a > 0$ 且 $b > 0$ 。

Theorem

$ax^5 - b$ 可在 \mathbb{R} 上因式分解為

$$\frac{1}{4} \left(a^{1/5}x - b^{1/5} \right) \left(2a^{2/5}x^2 + \left(1 - \sqrt{5} \right) a^{1/5}b^{1/5}x + 2b^{2/5} \right) \\ \left(2a^{2/5}x^2 + \left(1 + \sqrt{5} \right) a^{1/5}b^{1/5}x + 2b^{2/5} \right).$$

$ax^5 + b$ 可在 \mathbb{R} 上因式分解為

$$\frac{1}{4} \left(a^{1/5}x + b^{1/5} \right) \left(2a^{2/5}x^2 - \left(1 - \sqrt{5} \right) a^{1/5}b^{1/5}x + 2b^{2/5} \right) \\ \left(2a^{2/5}x^2 - \left(1 + \sqrt{5} \right) a^{1/5}b^{1/5}x + 2b^{2/5} \right).$$

分母為 $ax^6 \pm b$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式

Squarefree

有理函數

分母為二次式

Hermite red.

部份分式法

分母為高次式

假設 $a > 0$ 且 $b > 0$ 。

Theorem

$ax^6 - b$ 可在 \mathbb{R} 上因式分解為

$$(\sqrt{ax^3} - \sqrt{b})(\sqrt{ax^3} + \sqrt{b}).$$

$ax^6 + b$ 可在 \mathbb{R} 上因式分解為

$$\begin{aligned} & (a^{1/3}x^2 + b^{1/3})(a^{1/3}x^2 - \sqrt{3}a^{1/6}b^{1/6} + b^{1/3}) \\ & (a^{1/3}x^2 + \sqrt{3}a^{1/6}b^{1/6} + b^{1/3}). \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx, \text{ 頁 1}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

設 $D_1 = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ 與 $D_2 = x^2 + \sqrt{2}x + 1$ 。

$$[D_1] \frac{1}{D_2} = [D_1] \frac{1}{2^{3/2}x} = \frac{x - \sqrt{2}}{-2^{3/2}}$$

$$[D_2] \frac{1}{D_1} = [D_2] \frac{1}{-2^{3/2}x} = \frac{x + \sqrt{2}}{2^{3/2}}.$$

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx, \text{ 頁 II}$$

積分有理函數

何震邦

多項式

最大公因式
Squarefree

有理函數

分母為二次式
Hermite red.
部份分式法
分母為高次式

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x^4 + 1} dx \\ &= \int \frac{x + \sqrt{2}}{2^{3/2} (x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx - \int \frac{x - \sqrt{2}}{2^{3/2} (x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx \\ &= \frac{\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}{2^{5/2}} - \frac{\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{2^{5/2}} + \frac{\arctan(\sqrt{2}x + 1)}{2^{3/2}} \\ & \quad + \frac{\arctan(\sqrt{2}x - 1)}{2^{3/2}}. \end{aligned}$$

