# 微分方程

何震邦 <jdh8@ms63.hinet.net>

2014 年 12 月 1 日

# 一階常微分方程



**一階常微分方程**為符合以下兩者之一的方程式：

1. $P(x, y)\, y' + Q(x, y) = 0$
2. $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$。

若我們解出方程，通解可用以下形式表達：

$$\phi(x, y) = c$$

其中 $c$ 是積分常數。

# 方法 1：一階線性微分方程

**Theorem**

給定微分方程

$$f(x)\,y' + g(x)\,y + h(x) = 0.$$

設 $P(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ 與 $Q(x) = \dfrac{h(x)}{f(x)}$，則通解為

$$e^{\int P\,dx} y + \int e^{\int P\,dx} Q\,dx = c.$$

# 通解的證明



**Proof.**

$$
\begin{aligned}
f(x)\,y' + g(x)\,y + h(x) &= 0 \\
y' + Py + Q &= 0 \\
e^{\int P\,dx}y' + e^{\int P\,dx}Py + e^{\int P\,dx}Q &= 0 \\
\left(e^{\int P\,dx}y\right)' + e^{\int P\,dx}Q &= 0 \\
e^{\int P\,dx}y + \int e^{\int P\,dx}Q\,dx &= c.
\end{aligned}
$$

□

# 指數衰變



## Example

An exponential decay function $f(t) = y_0 e^{-kt}$ models the among of drug in the blood $t$ hours after an initial dose of $y_0 = 100$ mg is administered. Assume the half-life of a particular drug is 16 hours. How much time is required for the drug to reach 1% of the initial dose (1 mg)?

## Solution

$$50 = 100\mathrm{e}^{-16k}$$

$$k = \frac{\ln(2)}{16}$$

$$1 = 100\mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{16}t}$$

$$t = 16\log_2(100) \approx 106.3016990363955 13\text{（小時）}.$$

# 方法 2：變數可分離的微分方程



**Theorem**

給定微分方程

$$A(x)\,B(y)\,dx + C(x)\,D(y)\,dy = 0.$$

通解為

$$\int \frac{A(x)}{C(x)}\,dx + \int \frac{D(x)}{B(x)}\,dy = c.$$

證明從略。

# Logistic 成長，頁 I

## Example

A population grows according to the logistic differential equation $y' = 0.0003y\,(2000 - y)$. The initial population size is 800. Solve this differential equation and use the solution to predict to population size at time $t = 3$.

本題為一個初期值問題

$$\begin{cases} y'(t) = 0.0003y(t)\,(2000 - y(t)) \\ y(0) = 800 \end{cases}$$

# Logistic 成長，頁 II

原微分方程為變數可分離的微分方程。

$$
\begin{aligned}
10000y' - 3y\left(2000 - y\right) &= 0 \\
10000dy - 3y\left(2000 - y\right)dt &= 0 \\
\int \frac{10000}{3y\left(2000 - y\right)}\,dy - \int dt &= c \\
\int \frac{5}{3}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - 2000}\right)dy - \int dt &= c \\
\frac{5\ln|y|}{3} - \frac{5\ln|y - 2000|}{3} - t &= c.
\end{aligned}
$$

代入初期值條件 $y(0) = 800$ 以求取積分常數

$$
c = \frac{5\ln|800|}{3} - \frac{5\ln|-1200|}{3} = \frac{5\ln(2)}{3} - \frac{5\ln(3)}{3}.
$$

# Logistic 成長，頁 III



代回原方程，因為 $0 < 800 < 2000$，整理得：

$$\begin{aligned}
\ln y - \ln(2000 - y) &= \frac{3t}{5} + \ln(2) - \ln(3) \\
\frac{y}{2000 - y} &= \frac{2e^{\frac{3t}{5}}}{3} \\
\frac{y(3)}{2000 - y(3)} &= \frac{2e^{9/5}}{3} \\
y(3) = \frac{4000e^{9/5}}{2e^{9/5} + 3} &\approx 1602.6304520653167546.
\end{aligned}$$

# 方法 3：恰當微分方程

**Theorem**

給定微分方程

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

其中

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

通解為

$$\int P\,dx + \int \left( Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P\,dx \right) dy.$$

# (1)式的充要條件



**Theorem**

(1)式等價於存在函數 $\phi(x, y)$ 使得

$$d\phi = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{2}$$

# 若(1)則(2)

**Proof.**

設

$$\phi = \int P\,dx + \int \left( Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P\,dx \right) dy.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= P + \frac{\partial}{\partial x} \int \left( Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P\,dx \right) dy \\ &= P + \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = P. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P\,dx + Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P\,dx = Q.$$

□

# 若(2)則(1)

**Proof.**

根據偏導數的定義，

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy. \tag{3}$$

比較(2)與(3)得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P \quad \text{且} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q.$$

若 $P$, $Q$, $P_y$ 與 $Q_x$ 在所討論的平面區域上連續，則在此區域中

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

□

# 積分乘數

對於非恰當微分方程

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

我們可以試著尋找積分乘數 $\mu(x,y)$ 使得

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$$

為恰當微分方程，即

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu P = \frac{\partial}{\partial x}\mu Q \tag{4}$$

其中 $\mu \neq 0$。

# 積分乘數為單變函數

**Theorem**

給定非恰當微分方程

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{5}$$

若 $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = h(x)$，則積分乘數為

$$\mu(x) = e^{\int h(x)\,dx}. \tag{6}$$

同理，若 $\dfrac{Q_x - P_y}{P} = k(y)$，則積分乘數為

$$\mu(y) = e^{\int k(y)\,dy}.$$

# (6)式的證明

**Proof.**

設 $\mu(x)$ 為(5)的積分乘數，則由(4)得

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{d\mu}{dx} = 0$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \, dx = h \, dx$$

$$\ln \mu = \int h \, dx$$

$$\mu = e^{\int h \, dx}. \qquad \square$$

# $P$ 與 $Q$ 滿足柯西–黎曼方程時的積分乘數

## Theorem

給定微分方程

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{7}$$

其中

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{且} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

即 $P$ 與 $Q$ 滿足 柯西–黎曼方程，此時積分乘數為

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P^2 + Q^2}.$$

# 方法 4：伯努力微分方程



**Theorem**

給定微分方程

$$f(x)\,y' + g(x)\,y + h(x)\,y^n = 0$$

其中 $n \neq 1$。設 $u(x) = y^{1-n}$，則原方程轉為線性的

$$f(x)\,u' + (1-n)\,g(x)\,u + (1-n)\,h(x) = 0.$$

# 齊次函數



## Definition

函數 $f(x, y)$ 稱為 $n$ 次齊次函數，等價於

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \tag{8}$$

其中 $n$ 為常數。

## Example

- $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$ 為 3 次齊次函數。
- $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ 不是齊次函數。

# 方法 5：齊次微分方程

**Theorem**

給定微分方程

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

其中 $P$ 與 $Q$ 皆為 $x$, $y$ 的齊次函數。設 $u(x) = y/x$，則原方程轉為變數可分離的方程。

# 方法 6：幾乎線性的微分方程



## Theorem

給定微分方程

$$f(x)\,k'(y)\,y' + g(x)\,k(y) + h(x) = 0.$$

設 $u(x) = k(y)$，則原方程轉為線性的

$$f(x)\,u' + g(x)\,u + h(x) = 0.$$

## Remark

這方法在課本上罕見。

# 方法 7：含線性分式的微分方程



**Theorem**

給定微分方程

$$y' + F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = 0.$$

若在 $xy$-平面上，直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 與 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 交於 $(h, k)$，設 $X = x - h$ 與 $Y = y - k$，則原方程轉為齊次的

$$\frac{dY}{dX} + F\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = 0.$$

# 方法 8：以 $x^n y$ 替代



**Theorem**

給定微分方程

$$y' + \frac{yH(x^n y)}{x} = 0$$

其中 $n$ 為待定常數。設 $u(x) = x^n y$，則原方程轉為變數可分離的

$$\frac{du}{u\left(n - H(u)\right)} = \frac{dx}{x}.$$

Thanks for your attention!