2011 微積分醫學系/牙醫系期中考詳解

B101100025 何震邦

2012 年 10 月 16 日

目錄

1 線性回歸

In a study of five industrial areas, a researcher obtained these data relating the average number of units of a certain pollutant in the air and the incidence (per 100 000 people) of a certain disease:

Units of pollutant	3	4	5	8	10
Incidence of disease	48	52	58	70	96

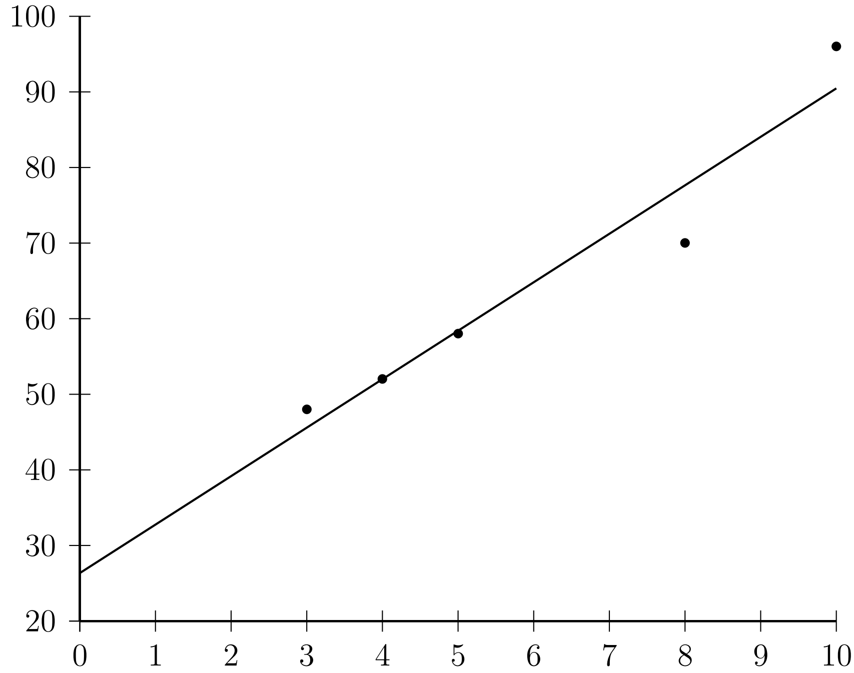
Find the equation of the least-squares line $y = Ax + b$ (to two decimal points [*sic* places.])

$$\text{Given that } A = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \text{ and } B = \frac{\sum y - A\sum x}{n}.$$

直接解　**從**式子中，我們可以看到，所需要的變數有$n, \sum x, \sum y, \sum x^2, \sum xy$這五項。所以求精確解最有效的方法就是列表。

	x	y	x^2	xy
	3	48	9	144
	4	52	16	208
	5	58	25	290
	8	70	64	560
	10	96	100	980
$\sum$	30	324	214	2162

事實上，計算機（calculator）上線性回歸的子程式（subroutine）即是依此編寫。因此使用者中途加入、移除資料，計算機可以同步更新。



2 正弦函數和餘弦函數的導函數

2.1 A 卷

Use the definition of the derivative $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ to find $\dfrac{d}{dx}\sin x$.

解

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h} \\
&= (-\sin x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\right) + (\cos x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

2.2 B 卷

Use the definition of the derivative $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ to find $\dfrac{d}{dx}\cos x$.

解

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\sin x}{h} \\
&= (-\cos x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\right)-(\sin x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= -\sin x.
\end{aligned}
$$

3 求曲線上的切線及法線

3.1 A 卷

Find the equation of the tangent line of the curve $y^3 - xy^2 + xy = 3$ [*sic* -14] at $(1, -2)$.

解

1. 我們已經知道切線通過 $(1, -2)$ 了，所以知道斜率就可以代入點斜式，求出切線方程式。
2. 斜率就是 dy/dx，所以不妨在等式兩邊都 apply d/dx。

$$
\begin{aligned}
y^3 - xy^2 + xy &= -14 \\
3y^2y' - (2xyy' + y^2) + (xy' + y) &= 0 \\
(3y^2 - 2xy + x)y' &= y^2 - y \\
y' &= \frac{y^2 - y}{3y^2 - 2xy + x} \\
y'(1, -2) &= \frac{6}{17}.
\end{aligned}
$$

所以切線方程式為

$$
y + 2 = \frac{6}{17}(x - 1).
$$

3.2 B 卷

Find the equation of the normal line of the curve $y^3 - xy^2 + xy = 3$ [*sic* -14] at $(1, -2)$.

解 **解**法幾乎與 A 卷相同，唯法線的斜率是切線斜率的 -1 倍。所以法線方程式為

$$y + 2 = \frac{-17}{6}(x - 1).$$

4 有理函數的導函數

Given $f(x) = \dfrac{x^2(1-x)^3}{1+x}$, find $f'(2)$.

對數微分法

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^2(x-1)^3(x+1)^{-1} \\
\ln|f(x)| &= 2\ln|x| + 3\ln|x-1| - \ln|x+1| \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1} \\
f'(x) &= \frac{-x^2(x-1)^3}{x+1}\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \\
f'(2) &= \frac{-4}{3}\left(1 + 3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{-44}{9}.
\end{aligned}$$

直接法

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-x^2(x-1)^3}{x+1} \\
f'(x) &= \frac{-2x(x-1)^3 - 3x^2(x-1)^2}{x+1} + \frac{x^2(x-1)^3}{(x+1)^2} \\
f'(2) &= \frac{-4-12}{3} + \frac{4}{9} = \frac{-44}{9}.
\end{aligned}$$

5 作圖

Sketch the graph of $\dfrac{3x^5 - 20x^3 + 1}{32}$ and also mark the absolute extreme points and inflection points at interval $[-3, 3]$.

解　因為題目要求反曲點，所以要做到二階導函數。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x^5 - 20x^3 + 1}{32} \\
f'(x) &= \frac{15x^4 - 60x^2}{32} \\
f''(x) &= \frac{15x^3 - 30x}{8}.
\end{aligned}
$$

解導函數的零點，找到此函數在 $[-3, 3]$ 的臨界點為 $-3, -2, 0, 2, 3$。

$$
f(-3) = \frac{-47}{8},\ f(-2) = \frac{65}{32},\ f(0) = \frac{1}{32},\ f(2) = \frac{-63}{32},\ f(3) = \frac{95}{16}.
$$

由此可知，最大值在 $(3, 5.9375)$ 而最小值在 $(-3, -5.875)$。
解二階導函數的零點，找到此函數可能的反曲點為 $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$。

$$
f(-\sqrt{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32},\ f(0) = \frac{1}{32},\ f(\sqrt{2}) = \frac{-7\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32}.
$$

所以可能的反曲點座標在 $(-1.414213562, 1.268686867)$ 、 $(0, 0.03125)$ 和 $(1.414213562, -1.206186867)$。

另外雖然題目並不要求局部極值，不過反正你也求出 $(-2, 2.03125)$ 和 $(2, -1.96875)$ 了，不用可惜。而且 $f(x)$ 的零點如果抓不準，圖會很醜。所以如果時間允許，找一下 $f(x) = 0$ 的根來美化圖形吧！

如下圖，當你已經點出圖上所有題目要求的點，也就是黑點，再加上局部極值，就可大概看出兩根約在 ± 2.5 附近。當然 0 附近還有一個小小的正根，不過那對圖形的美觀沒有影響。

當代電腦、計算機要求多項式的所有根，已經不太適合採用牛頓法（Newton's method）了[1,2]。然而牛頓法還是比較適合手算，而且比假位法（false position, *regula falsi*）和二分法（bisection）準。

由牛頓法的公式得

$$
x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{3x_n^5 - 20x_n^3 + 1}{15x_n^4 - 60x_n^2} = \frac{12x_n^5 - 40x^3 + 1}{15x_n^4 - 60x_n^2}.
$$

又若其真確根為 α，則在第 n 步時，必可在 x_n 與 α 間找到 ξ_n 使得

$$
\epsilon_{n+1} = \frac{-f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,\epsilon_n^2.
$$

[1]因為牛頓法平均收斂性能為平方收斂（quadratic convergence），且不保證能找到根。但是 QR 演算法平均達到立方收斂（cubic convergence），且在最壞情況仍有平方收斂。絕對值相近的根，是所有求根演算法的殺手。這當然包括重根、共軛根、相反數根等。

[2]QR 演算法只能解多項式的根。當代電腦、計算機解非線性方程還是倚靠牛頓法為主。

我們分別以 ± 2.5 為起始點 x_0，發現其實一步就夠準了。第一步移動的距離小於 0.1 ，只比筆跡的寬度厚一些，可見誤差已達 0.01 級，因為牛頓法是平方收斂。所以第二步的誤差基本上是 10^{-3} 級，根本不痛不癢，考試的時候就不要做下去了。

以下我們列出前二步的結果。

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2.5 & \Rightarrow x_1 &= \frac{3375}{512} \approx 2.5878 & \Rightarrow x_2 &\approx 2.5783 \\
x_0 &= -2.5 & \Rightarrow x_1 &= \frac{-974}{375} \approx -2.5973 & \Rightarrow x_2 &\approx -2.5859.
\end{aligned}
$$

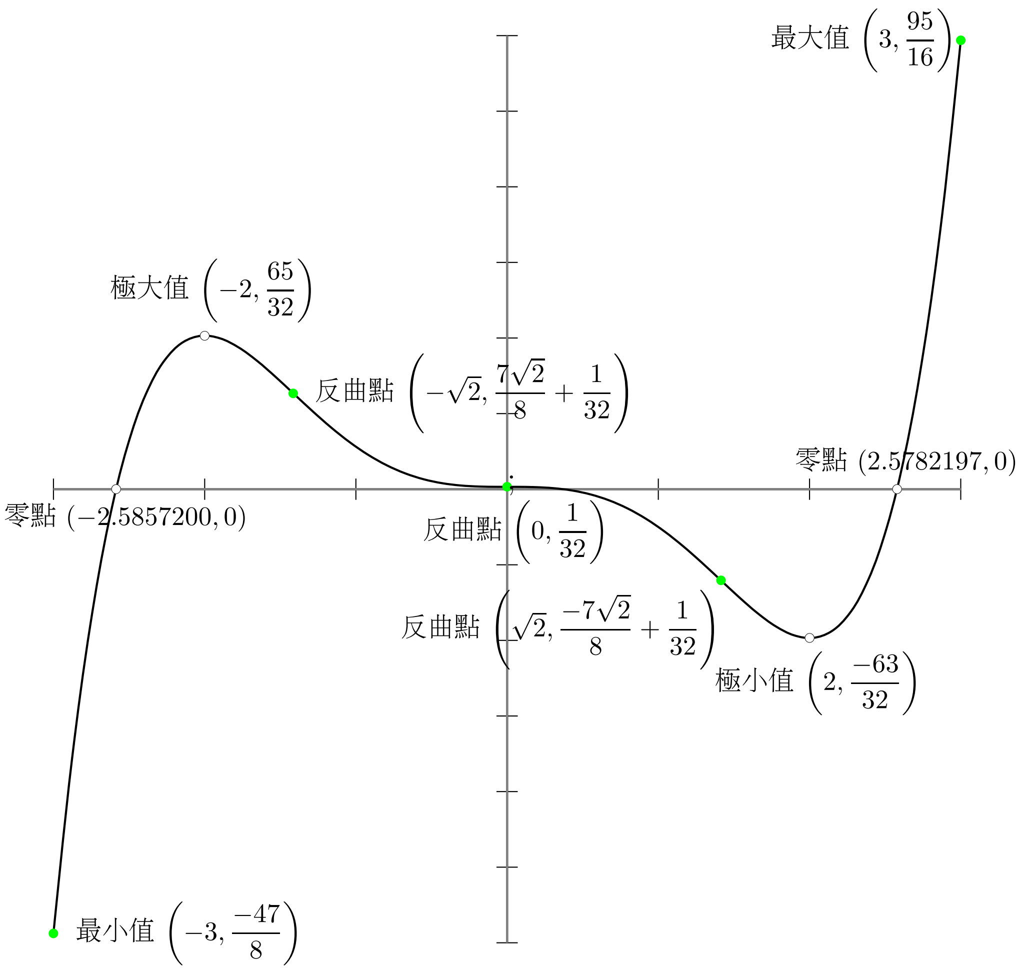
作弊快速法　**我**去翻了 GNU C 函式庫的源碼，發現他計算單精度浮點數（`float`）的平方根竟然用二分逼近法。可見對人類而言，精度七位以內的用直式開方應該比較快。又因為 1/32 實在小得可憐，在零點附近的斜率又頗大，把常數項 1/32 無視後的誤差根本就不出 0.01。

把常數項無視之後，所求兩根就是 $\sqrt{20/3}$，即 $\sqrt{6.66\ldots}$，直式開方得 2.58...就可以去點座標嘍！

$$
\begin{array}{lr}
 & 2.\ 5\ \ 8 \\
\hline
2 & \sqrt{\ } 6.66\,66 \\
2 & 4 \\
\hline
45 & 2\,66 \\
5 & 2\,25 \\
\hline
508 & 41\,66 \\
 & 40\,64 \\
\hline
 & 1\,02
\end{array}
$$

原理

$$
\begin{array}{llcl}
 & a & + & b \\
\hline
a & \sqrt{\ }(a & + & b)^2 \\
a & a^2 & & \\
\hline
2a+b & 2ab & + & b^2 \\
 & 2ab & + & b^2 \\
\hline\hline
\end{array}
$$



6 複合函數的導函數

6.1 A 卷

Given $f(x) = \ln(\sec^4 x + \tan^2 x)$, find $f'(\pi/4)$.

解

$$f(x) = \ln(\sec^4 x + \tan^2 x)$$
$$f'(x) = \frac{4\sec^4 x \tan x + 2\sec^2 x \tan x}{\sec^4 x + \tan^2 x}$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16+4}{4+1} = 4.$$

6.2 B 卷

原文已散佚，$f(x)$ 是從解答重建的。

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+1)^{\sin x} \\
\ln|f(x)| &= \sin x \ln(x^2+1) \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \cos x \ln(x^2+1) + \frac{2x\sin x}{x^2+1} \\
f'(x) &= (x^2+1)^{\sin x}\left(\cos x \ln(x^2+1) + \frac{2x\sin x}{x^2+1}\right) \\
f'(\frac{\pi}{2}) &= \left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\left(\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4}+1}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

7 微分

In the late 1830s, French physiologist Jean Poiseuille discovered the formula we use today to predict how much the radius of a particular clogged artery decreases the normal volume of flow. His formula,

$$V = kr^4$$

say that volume of fluid flowing through a small pipe or tube in a unit of time at a fixed pressure is a constant times the fourth power of the tube's radius r. How dose a 10% decrease in r affect V?

8 線性近似

Use the differentials to approximate the quantity $\sqrt{4.6}$ to four decimal points [*sic* places].

解 設函數 $f(x) = \sqrt{x}$，

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(c) + f'(c)(x-c) \\
\sqrt{x} &\approx \sqrt{c} + \frac{x-c}{2\sqrt{c}}.
\end{aligned}$$

由 $x = 4$ 為起點，

$$\begin{aligned}
\sqrt{4.6} &\approx 2 + \frac{4.6-4}{4} = 2.15 \\
\sqrt{4.6} &\approx 2.15 + \frac{4.6-(2.15)^2}{4.3} = \frac{3689}{1720} \approx 2.1447674.
\end{aligned}$$

線性近似跟牛頓法的本質相同，因此在第二步時，其實就發現可以停止了。我們看一下第三步的值和真確值差多少

$$\sqrt{4.6} \approx \frac{3689}{1720} + \frac{4.6 - \left(\frac{3689}{1720}\right)^2}{\frac{3689}{860}} = 2.14476105896$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{4.6} \approx 2.14476105895.$$

9 應用題

Water boils at 212°F at sea level and 200°F at an elevation of 6000 ft. Assume that the boiling point B varies linearly with altitude α. Find the function $B = f(\alpha)$ that describes the dependence. Comment on whether a linear function gives a realistic model.

10 應用題

A rain gutter is made from sheets of metal 9 in wide. The gutters have a 3-in base and two 3-in sides, folded up at an angle θ (see figure). What angle θ maximizes the cross-sectional area of the gutter?