積分無理函數 何震邦

H KELL

多項式

坐4℃ 一般型

Hermite red

洛朗級數型

育财級数至

一般型

無理函數的積分

何震邦 <jdh8@ms63.hinet.net>



2012年12月15日

方法 5: 反三角替代

積分無理函數

何震邦

有埋化

基本型

一般型 Hermite red

洛朗級數型

基本型

在被積函數形如以下的無理函數時,進入本節的演算法。

$$f(x) (px + q)^m (a_1x + b_1)^{k_1} (a_2x + b_2)^{k_2}$$

•
$$f(x)(px+q)^m(ax^2+bx+c)^k$$

其中 f 是多項式,m 是整數,k, k_1 , k_2 是奇數的一半,a, a_1 , a_2 , b, b_1 , b_2 , c, p, q 是常數。

$$\int f(x) (px+q)^m (a_1x+b_1)^{k_1} (a_2x+b_2)^{k_2} dx$$

何震邦 其中 f 是多項式,且 k_1 與 k_2 是奇數的一半。

有理化

▶ 若 $k_1 k_2 < 0$, 設 $k_1 > 0$. $k_2 < 0$, 不失一般性。若 m > 0,則 $g(x) = f(x)(px + q)^m$ 為多項式。

$$g(x)(a_2x+b_2)^{k_2-k_1}(a_1x+b_1)^{k_1}(a_2x+b_2)^{k_1}$$

其中 $k_2 - k_1$ 為負整數。

▶ 否則設 $k_2 > k_1$,不失一般性。此時有理化為

$$h(x)(px+q)^m(a_1x+b_1)^{k_1}(a_2x+b_2)^{k_1}$$

其中
$$h(x) = f(x)(a_2x + b_2)^{k_2-k_1}$$
 亦為多項式。

$$\int f(x) (px+q)^m (ax^2+bx+c)^k dx$$

積分無理函數 何震邦

有理化

其中 f 是多項式,且 k 是奇數的一半。設 y = px + q,則原 式化為

$$g(y)\left(Ay^2+By+C\right)^k$$

其中 g 是洛朗級數, A, B, C 為常數。

多項式型

積分無理函數

何震邦

多項式型

基本型 一般型

一般型 Hermite red.

洛朗級數型

基本型一般型

本節我們討論

$$\int f(x) \left(ax^2 + bx + c\right)^k$$

其中 f 是多項式,且 k 是奇數的一半。

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx$$

何震邦

有理化

多項式

基本型
一般型

Hermite red

洛朗級數型

基本型 一般型 ▶ 若 a > 0 且 $4ac > b^2$,則原式為

$$\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{a}}$$

▶ 若 a > 0 且 $4ac < b^2$,則原式為

$$\frac{\ln\left|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b\right|}{\sqrt{a}}$$

▶ 若 a < 0 且 $4ac < b^2$, 則原式為

$$-\frac{\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)}{\sqrt{-a}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x - \alpha} \sqrt{x - \beta}} \, dx$$

何震邦

基本型

Solution

設 $y = \sqrt{x - \alpha} + \sqrt{x - \beta}$ 。

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x - \alpha}} + \frac{1}{2\sqrt{x - \beta}} = \frac{\sqrt{x - \alpha} + \sqrt{x - \beta}}{2\sqrt{x - \alpha}\sqrt{x - \beta}}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x - \alpha}\sqrt{x - \beta}} dx = \int \frac{2}{y} dy$$

$$= 2\ln|y|$$

$$= 2\ln\left|\sqrt{x - \alpha} + \sqrt{x - \beta}\right|$$

$$= \ln\left|2\sqrt{x - \alpha}\sqrt{x - \beta} + 2x - \alpha - \beta\right|.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} \, dx$$

何震邦

有理化

多項式

基本型

Hermite re

3/5 BIT 217, thru 3

洛阴級數型

基本型

$$\frac{d}{dx} \ln \left| 2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} + 2x - \alpha - \beta \right|$$

$$= \frac{2x - \alpha - \beta}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} + 2$$

$$= \frac{2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}{2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} + 2x - \alpha - \beta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$
,其中 $a > 0$ 且 $4ac < b^2$

何震邦

有理化

多項式程

基本型
一般型

Hermite rec

洛朗級數型

基本型一般型

設
$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 與 $\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ °

設
$$y = ax$$
。

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(ax - a\alpha)(ax - a\beta)}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{(y - a\alpha)(y - a\beta)}} dy$$

$$= \frac{\ln\left|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + 2ax + b\right|}{\sqrt{a}}$$

$$\int_{5}^{15} \frac{1}{\sqrt{16x^2 - 1}} \, dx$$

何震邦

有埋化

多項式型

基本型
一般型

Hermite red

洛朗級數型

基本型

當
$$5 \le x \le 15$$
 時, $\sqrt{16x^2 - 1} = \sqrt{4x + 1}\sqrt{4x - 1}$ 。

$$\int \frac{1}{\sqrt{16x^2 - 1}} dx = \frac{\ln\left|8\sqrt{16x^2 - 1} + 32x\right|}{4}$$

$$\int_{5}^{15} \frac{1}{\sqrt{16x^2 - 1}} dx = \frac{\ln\left(8\sqrt{3599} + 480\right)}{4} - \frac{\ln\left(8\sqrt{399} + 160\right)}{4}$$

$$\approx 0.2747921059353482.$$

$$\int_{5}^{15} \frac{1}{\sqrt{16x^2 - 1}} dx$$
,另解

何震邦

有理化

多項式型

基本型 一般型 Hermite red

洛朗級數型

基本型一般型

Solution

當
$$5 \le x \le 15$$
 時, $\sqrt{16x^2 - 1} = \sqrt{4x + 1}\sqrt{4x - 1}$ 。

$$\int \frac{1}{\sqrt{16x^2 - 1}} dx = \frac{2\ln\left|\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4x - 1}\right|}{4}$$

$$\int_{5}^{15} \frac{1}{\sqrt{16x^2 - 1}} dx = \frac{2\ln\left(\sqrt{61} + \sqrt{59}\right)}{4} - \frac{2\ln\left(\sqrt{21} + \sqrt{19}\right)}{4}$$

$$\approx 0.2747921059353482.$$

Remark

這個解對人類比較友善,但對機器則否。因為它要多做兩次 平方根。

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + b}} \, dx$$

積分無理函數 何震邦

▶ 若 a > 0 且 b > 0,則原式為

有理化

多項式

一般型

Hermite red

洛朗級數型

基本型

$$\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{a}}$$

▶ 若 a > 0 且 b < 0,則原式為

$$\frac{\ln\left|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+b}+2ax\right|}{\sqrt{a}}$$

▶ 若 a < 0 且 b > 0,則原式為

$$\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{-a}x}{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{-a}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}} dx , 其中 a > 0 且 b > 0$$

何震邦

有理化

有埋化

基本型

一般型 Hermite re

洛朗級數型

基本型

基本型

設
$$y = \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}}\right)$$
,則 $dx = \frac{\sqrt{b}\cosh(y)}{\sqrt{a}}dy$ 。
$$\int \frac{1}{\sqrt{a}x^2 + b} dx = \int \frac{1}{\sqrt{b}\cosh y} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{a}} dy$$

$$= \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{a}}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}} dx$$
,其中 $a < 0$ 且 $b > 0$

何震邦

有理化

有埋化

基本型

一般型 Hermite re

洛朗級數型

洛朗級數型

基本型一般型

設
$$y = \arcsin\left(\frac{\sqrt{-a}x}{\sqrt{b}}\right)$$
,則 $dx = \frac{\sqrt{b}\cos(y)}{\sqrt{-a}}dy$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + b}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{b}\cos(y)} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{-a}} dy$$

$$= \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{-a}x}{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{-a}}.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$
,其中 $a>0$ 且 $4ac>b^2$

何震邦

有理化

多項式

基本型

一般型 Hermite re

洛朗級數型

基本型一般型

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{ay + \frac{4ac - b^2}{4a}}} dy$$

$$= \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{2ay}{\sqrt{4ac - b^2}}\right)}{\sqrt{a}}$$

$$\operatorname{arsinh}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$
,其中 $a < 0$ 且 $4ac < b^2$

何震邦

基本型

$$\int \frac{px + q}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx$$

何震邦

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

$$= \frac{p}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \int \frac{q-\frac{bp}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

$$= \frac{p\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} + \int \frac{2aq-bp}{2a\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

$$\int \left(ax^2+bx+c\right)^{n+\frac{1}{2}}dx$$
,其中 $n\in\mathbb{N}_0$

何震邦

有理化

多項式表

基本型

一般型 Hermite red

洛朗級數型

基本型一般型

$$\frac{1}{R}R = ax^{2} + bx + c \circ$$

$$\int R^{n+\frac{1}{2}} dx$$

$$= xR^{n+\frac{1}{2}} - \int \frac{(2n+1)(2ax^{2} + bx)R^{n-\frac{1}{2}}}{2} dx$$

$$= \frac{xR^{n+\frac{1}{2}}}{2n+2} + \int \frac{(2n+1)(bx+c)R^{n-\frac{1}{2}}}{4n+4} dx$$

$$= \frac{(2ax+b)R^{n+\frac{1}{2}}}{(4n+4)a} + \int \frac{(2n+1)(4ac-b^{2})R^{n-\frac{1}{2}}}{(8n+8)a} dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$$

何震邦

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx = \int \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx - \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$$

$$= \frac{2x + 1}{4\sqrt{x^2 + x + 1}} - \int \frac{8x + 5}{8\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$$

$$= \frac{2x - 3}{4\sqrt{x^2 + x + 1}} - \int \frac{1}{8\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$$

$$= \frac{2x - 3}{4\sqrt{x^2 + x + 1}} - \int \frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)}{8} \, dx$$

Hermite reduction

積分無理函數

何震邦

有理化

多項式型

基本型

Hermite red.

洛朗級數型 基本型 設 n 為正整數。若多項式 R 與 R' 互質。根據多項式 的具祖等式,我們能以擴展的輾轉相除法求兩多項式 B, C使得

$$\frac{2A}{1-2n} = BR' + CR$$

其中 deg(B) < deg(R)。因此

$$\frac{A}{R^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(1-2n)BR'}{2R^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{(1-2n)C}{2R^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{B'}{R^{n-\frac{1}{2}}} - \frac{(2n-1)BR'}{2R^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{B' + (2n-1)C}{2R^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{A}{R^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{B}{R^{n-\frac{1}{2}}} - \int \frac{B' + (2n-1)C}{2R^{n-\frac{1}{2}}}.$$

$$\int \frac{px+q}{\left(ax^2+bx+c\right)^{3/2}}\,dx$$

積分無理函數 何震邦

多坝八

Hermite red.

洛朗級數型

基本型

設 A = px + q 與 $R = ax^2 + bx + c$,其中 $4ac \neq b^2$ 。 $4aR = (2ax + b)R' + 4ac - b^2$ $-2A = -\frac{pR'}{a} + \frac{bp - 2aq}{a}$ $= -\frac{pR'}{a} + \frac{(2aq - bp)((2ax + b)R' - 4aR)}{a(4ac - b^2)}.$

設
$$B = \frac{(2aq - bp)(2ax + b)}{a(4ac - b^2)} - \frac{p}{a}$$
 與 $C = -\frac{4(2aq - bp)R}{4ac - b^2}$ 。
$$-2A = BR' + CR$$

$$\int \frac{A}{R^{3/2}} = \frac{B}{\sqrt{R}} - \int \frac{B' + C/2}{\sqrt{R}} = \frac{B}{\sqrt{R}}.$$

$$\int \frac{4x+5}{(x^2+2x+3)^{3/2}} \, dx$$

積分無理函數 何震邦

Hermite red.

設
$$A = 4x + 5$$
 與 $R = x^2 + 2x + 3$ °

$$2R = (x+1)R' + 4$$
$$-2A = -4R' - 2 = \frac{(x-7)R'}{2} - R.$$

$$\int \frac{4x+5}{R^{3/2}} \, dx = \frac{x-7}{2\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

$$\int \frac{1}{x^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx$$

何震邦

洛朗級數型

Solution

設 y=1/x。

$$\int \frac{1}{x^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx = -\int \frac{y^{m-2}}{\sqrt{\frac{b}{y} + \frac{a}{y^2} + c}} \, dy$$
$$= -\int \frac{y^{m-2} |y|}{\sqrt{cy^2 + by + a}} \, dy.$$

Remark

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ -1 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx$$

何震邦

有理化

多項式

一般型

Hermite re

洛朗級數如

基本型

▶ 若 c > 0 且 $4ac > b^2$,則原式為

$$-\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{bx+2c}{\sqrt{4ac-b^2}|x|}\right)}{\sqrt{c}}.$$

▶ 若 c > 0 且 $4ac < b^2$,則原式為

$$-\frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x|} + \frac{2c}{|x|} + b\right|}{\sqrt{c}}$$

▶ 若 c < 0 且 $4ac < b^2$, 則原式為

$$\frac{\arcsin\left(\frac{bx+2c}{\sqrt{b^2-4ac}|x|}\right)}{\sqrt{-c}}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$
,若 $c>0$ 且 $4ac>b^2$

何震邦

有理化

日垤化

基本型

一般型 Hermite re

洛朗级勤刑

治別級數學

基本型

設
$$y = 1/x$$
。

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = -\int \frac{|y|}{y\sqrt{cy^2 + by + a}} dy$$

$$= -\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{(2cy+b)|y|}{y\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{c}}$$

$$= -\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{bx+2c}{\sqrt{4ac-b^2}|x|}\right)}{\sqrt{c}}.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$
,若 $c>0$ 且 $4ac < b^2$

何震邦

有理化

13 KE 10

基本型

一般型 Hermite re

洛朗級數型

基本型

基本型 一般型

設
$$y = 1/x$$
。

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = -\int \frac{|y|}{y\sqrt{cy^2 + by + a}} dy$$

$$= -\frac{\ln\left|2\sqrt{c}\sqrt{cy^2 + by + a} + 2c|y| + b\right|}{\sqrt{c}}$$

$$= -\frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x|} + \frac{2c}{|x|} + b\right|}{\sqrt{c}}.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$
,若 $c < 0$ 且 $4ac < b^2$

何震邦

有理化

用埋化

基本型

一般型 Hermite re

》文自日4四曲6开

基本型一般型

設
$$y = 1/x$$
。

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = -\int \frac{|y|}{y\sqrt{cy^2 + by + a}} dy$$

$$= \frac{\arcsin\left(\frac{(2cy+b)|y|}{y\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)}{\sqrt{-c}}$$

$$= \frac{\arcsin\left(\frac{bx+2c}{\sqrt{b^2 - 4ac}|x|}\right)}{\sqrt{-c}}.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+b}} \, dx$$

何震邦

基本型

▶ 若 b > 0 月 a > 0,則原式為

$$-\frac{\operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}|x|}\right)}{\sqrt{b}}$$

► 若 b > 0 且 a < 0,則原式為</p>

$$-\frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{b}\sqrt{ax^2+b}}{|x|} + \frac{2b}{|x|}\right|}{\sqrt{b}}$$

► 若 b < 0 目 a > 0,則原式為

$$-\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{a}|x|}\right)}{\sqrt{-b}}$$

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx$$

何震邦

有理化

多項式

基本型

Hermite re

洛朗級數型

价财叙数益

基本型一般型

1年化

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

$$= -\int \frac{|y|}{\sqrt{cy^2 + by + a}} dy$$

$$= -\frac{y\sqrt{cy^2 + by + a}}{c|y|} + \int \frac{b|y|}{2c^{3/2}y\sqrt{cy^2 + by + a}} dy$$

$$= -\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{cx} + \int \frac{b|y|}{2c^{3/2}y\sqrt{cy^2 + by + a}} dy.$$

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx$$

何震邦

有理化

基本型

Hermite red

洛朗級數型

◆ ◆ ◆ 至 一般型

設
$$y = 1/x$$
。

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = -\int \frac{y |y|}{\sqrt{cy^2 + by + a}} dy$$

$$= -\int \frac{y \sqrt{cy^2 + by + a}}{c |y|} dy + \int \frac{(by + a) |y|}{cy \sqrt{cy^2 + by + a}} dy$$

$$= -\frac{(2cy + b) \sqrt{cy^2 + by + a}}{4c^2} + \int \frac{(8bcy + 4ac + b^2) |y|}{8c^2 y \sqrt{cy^2 + by + a}} dy$$

$$= \frac{(3b - 2cy) \sqrt{cy^2 + by + a}}{4c^2} + \int \frac{(4ac - 3b^2) |y|}{8c^2 y \sqrt{cy^2 + by + a}} dy$$

$$= \left(\frac{3b}{4c^2 x} - \frac{1}{2cx^2}\right) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \int \frac{(4ac - 3b^2) |y|}{8c^2 y \sqrt{cy^2 + by + a}} dy.$$

積分無理函數 何震邦

13-2210

名項式刑

基本型

Hermite rec

3女 自日 413 銀行 开

洛朗級數型

基本型一般型

Tanks for your attention!