

數值積分

何震邦

黎曼和

牛頓-寇次公式

梯形法則

辛普森法則

數值積分

何震邦 <jdh8.org>



2015 年 10 月 30 日

黎曼和

數值積分

何震邦

黎曼和

牛頓-寇次公式

梯形法則

辛普森法則

Theorem

設 $[a, b]$ 分割為 n 個子區間，每個區間的長度皆為 $h = \frac{b-a}{n}$ 。由左黎曼和得

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

由右黎曼和得

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

牛頓-寇次公式

數值積分

何震邦

黎曼和

牛頓-寇次公式

梯形法則

辛普森法則

Theorem

若 $n \in \mathbb{N}$ ，則

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n w_k f\left(a + \frac{k(b-a)}{n+1}\right).$$

w_i 是由 n 決定的常數。梯形法則和辛普森法則分別是 n 為 1 和 2 的情況。

梯形法則

數值積分

何震邦

黎曼和

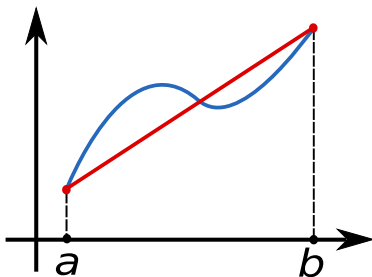
牛頓-寇次公式

梯形法則

辛普森法則

Theorem

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$



分割區間後套用梯形法則

數值積分

何震邦

黎曼和

牛頓-寇次公式

梯形法則

辛普森法則

Theorem

設 $[a, b]$ 分割為 n 個子區間，每個區間的長度皆為 $h = \frac{b-a}{n}$ 。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \\ &\approx \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right).\end{aligned}$$

辛普森法則

數值積分

何震邦

黎曼和

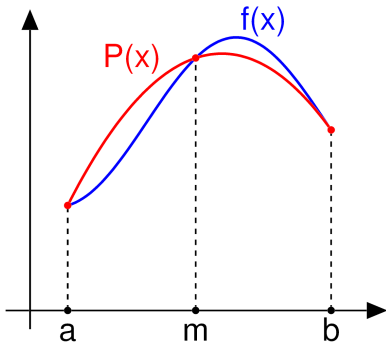
牛頓-寇次公式

梯形法則

辛普森法則

Theorem

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$



分割區間後套用辛普森法則

數值積分

何震邦

黎曼和

牛頓-寇次公式

梯形法則

辛普森法則

Theorem

設 $[a, b]$ 分割為 n 個子區間，其中 n 為偶數，每個區間的長度皆為 $h = \frac{b-a}{n}$ 。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \\ &\approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + f(x_n) \right).\end{aligned}$$

