

符號積分

何震邦 <jdh8@ms63.hinet.net>



2014 年 12 月 1 日

演算法

符號積分

何震邦

- ▶ 1967 年，符號積分的先驅 Joel Moses 發表 *Symbolic Integration* 這篇論文。
 - ▶ 他提出的三階段演算法仍被所有主流電腦代數系統使用。
- ▶ 一篇比較現代的文件是 1998 年 Manuel Bronstein 寫下的 *Symbolic Integration Tutorial*。

三階段演算法

符號積分

何震邦

1. 題目是簡單的題目嗎？
2. 題目可以由變數代換解決嗎？
 - ▶ 把代換後的式子丟回第一階段
 - ▶ 或直接在這一步處理掉。
3. 題目可以由更一般化的方法解決嗎？

階段 1

符號積分

何震邦

1. 若被積函數是個總和，則分別對每項進行積分，再將結果相加。
2. 若被積函數是

$$\left(\sum_i u_i(x) \right)^n$$

其中 $n \in \mathbb{N}$ ，則將它展開再逐項積分。

3. 檢查 Derivative-divides 條件，如(1)式。

逐項積分與展開自然數次方

符號積分

何震邦

- ▶ 逐項積分：

$$\int (\sin(x) + e^x) dx = \int \sin(x) dx + \int e^x dx.$$

- ▶ 展開自然數次方：

$$\int (e^x + x)^2 dx = \int (e^{2x} + 2xe^x + x^2) dx.$$

Derivative-divides

符號積分

何震邦

檢查原式是否符合

$$\int c \operatorname{op}(u(x)) u'(x) dx. \quad (1)$$

其中

- ▶ c 是常數
- ▶ $u(x)$ 是 x 的函數
- ▶ $u'(x)$ 是它的導函數

- ▶ op 是初等操作，即 op 是
 - ▶ 三角函數
 - ▶ 雙曲函數
 - ▶ \log

或 $\operatorname{op}(u(x))$ 具有以下型態

- ▶ $1/u(x)$
- ▶ $u(x)^a$ ，其中 $a \neq -1$
- ▶ $b^{u(x)}$ ，其中 b 是常數。

$$\int x e^{x^2} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\text{op}(u(x)) = e^{u(x)}, u(x) = x^2, u'(x) = 2x, c = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}\int x e^{x^2} dx &= \int \frac{e^u}{2} du \\ &= \frac{e^u}{2} \\ &= \frac{e^{x^2}}{2}.\end{aligned}$$

$$\int 4 \cos(2x + 3) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

op = cos, $u(x) = 2x + 3$, $u'(x) = 2$, $c = 2$.

$$\begin{aligned} \int 4 \cos(2x + 3) dx &= \int 2 \cos(u) du \\ &= 2 \sin(u) \\ &= 2 \sin(2x + 3). \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\text{op}(u(x)) = \frac{1}{u(x)}, u(x) = e^x + 1, u'(x) = e^x, c = 1.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln|u| \\ &= \ln(e^x + 1). \end{aligned}$$

$$\int \cos(x) \sin(x) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$\text{op}(u(x)) = u(x)$, $u(x) = \cos(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$, $c = -1$.

$$\begin{aligned}\int \cos(x) \sin(x) dx &= - \int u du \\ &= -\frac{u^2}{2} \\ &= -\frac{\cos(x)^2}{2}.\end{aligned}$$

$$\int x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\text{op}(u(x)) = \sqrt{u(x)}, u(x) = x^2 + 1, u'(x) = 2x, c = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int \frac{\sqrt{u}}{2} du \\ &= \frac{u^{3/2}}{3} \\ &= \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{3}. \end{aligned}$$

$$\int \cos(e^x)^2 \sin(e^x) e^x dx$$

符號積分

何震邦

Solution

op($u(x)$) = $u(x)^2$, $u(x) = \cos(e^x)$, $u'(x) = -\sin(e^x) e^x$,
 $c = -1$.

$$\begin{aligned} \int \cos(e^x)^2 \sin(e^x) e^x dx &= - \int u^2 du \\ &= -\frac{u^3}{3} \\ &= -\frac{\cos(e^x)^3}{3}. \end{aligned}$$

初等表達式

符號積分

何震邦

當我們說某式是 x 的**初等表達式**，則它是由以下組成：

1. 常數
2. x
3. x 的三角函數，如 $\sin(x)$ 、 $\cos(x)$
4. x 的對數與反三角函數，如 $\ln(x)$ 、 $\arcsin(x)$

且在加法、乘法、乘方和取代下封閉，並簡記作

$\text{Elem}(x)$.

Example

- ▶ $(e^x + 1)e^{2e^x} + e^{2x}$ 是 e^x 的初等表達式。
- ▶ xe^x 不是 e^x 的初等表達式，但它是 x 的初等表達式。

方法 1：指數函數的初等表達式

符號積分

何震邦

當被積函數是 $\text{Elem}(c^x)$ ，其中 c 是常數，則設

$$y = c^x.$$

Example

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{3e^{2x} + 2} dx &= \int \frac{1}{3y^2 + 2} dy & y &= e^x \\ \int \frac{e^{x+1}}{e^x + 1} dx &= \int \frac{e}{y + 1} dy & y &= e^x.\end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{3e^{2x} + 2} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $y = e^x$ 。

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{3e^{2x} + 2} dx &= \int \frac{1}{3y^2 + 2} dy \\ &= \frac{\arctan\left(\frac{3y}{\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\arctan\left(\frac{3e^x}{\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{x+1}}{e^x + 1} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $y = e^x$ 。

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{x+1}}{e^x + 1} dx &= \int \frac{e}{y + 1} dy \\ &= e \ln|y + 1| \\ &= e \ln(e^x + 1).\end{aligned}$$

方法 2：以整數次方替代

當被積函數是 $x^c \text{Elem}(x^{k_1}, x^{k_2}, \dots)$ ，其中 c 與 k_i 是整數，
則設

$$y = x^k$$

其中

$$k \triangleq \gcd\{c+1, k_1, k_2, \dots\} \neq 1.$$

Example

$$\int x^3 \sin(x^2) dx = \int \frac{y \sin(y)}{2} dy \quad y = x^2$$

$$\int \frac{x^7}{x^{12} + 1} dx = \int \frac{y}{4y^3 + 4} dy \quad y = x^4.$$

$$\int x^3 \sin(x^2) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $y = x^2$ 。

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin(x^2) dx &= \int \frac{y \sin(y)}{2} dy \\ &= \frac{\sin(y) - y \cos(y)}{2} \\ &= \frac{\sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)}{2}.\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^7}{x^{12} + 1} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $y = x^4$ 。

$$\begin{aligned} \int \frac{x^7}{x^{12} + 1} dx &= \int \frac{y}{4y^3 + 4} dy \\ &= \frac{\ln(y^2 - y + 1)}{24} + \frac{\arctan\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)}{4\sqrt{3}} - \frac{\ln|y + 1|}{12} \\ &= \frac{\ln(x^8 - x^4 + 1)}{24} + \frac{\arctan\left(\frac{2x^4-1}{\sqrt{3}}\right)}{4\sqrt{3}} - \frac{\ln(x^4 + 1)}{12}. \end{aligned}$$

方法 3：以線性分式的 k 次方根替代

符號積分

何震邦

當被積函數是 $\text{Elem}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right)$ ，其中

- ▶ 所有 m_i 與 n_i 互質整數，且有些 $|n_i| \neq 1$
- ▶ a, b, c, d 為常數並 $ad - bc \neq 0$

則設

$$y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$$

其中 k 是 n_i 的最小公倍數。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - x^{1/3}} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $y = x^{1/6}$ ，則 $dx = 6y^5 dy$ 。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x} - x^{1/3}} dx &= \int \frac{6y^5}{y^3 - y^2} dy \\ &= 2y^3 + 3y^2 + 6y + 6 \ln|y - 1| \\ &= 2\sqrt{x} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6 \ln|x^{1/6} - 1|.\end{aligned}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} dx, \text{ 頁 1}$$

符號積分

何震邦

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}$$

$$2y^2 = \frac{2x+2}{2x+3}$$

$$2y^2 - 1 = -\frac{1}{2x+3}$$

$$-\frac{1}{2y^2 - 1} = 2x + 3.$$

$$x = -\frac{1}{2(2y^2 - 1)} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{(2y^2 - 1)^2}.$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} dx, \text{ 頁 II}$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $y = \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}$, 則 $dx = \frac{2y}{(2y^2-1)^2} dy$ 。

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} dx &= \int \frac{2y^2}{(2y^2-1)^2} dy \\ &= \frac{\ln \left| \frac{2y-\sqrt{2}}{2y+\sqrt{2}} \right|}{2^{5/2}} - \frac{y}{4y^2-2} \\ &= \frac{\ln \left| \frac{2\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}-\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}+\sqrt{2}} \right|}{2^{5/2}} + \frac{(2x+3)\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}}{2}. \end{aligned}$$

方法 4：二項式-切比雪夫積分

符號積分

何震邦

$$\int x^p (c_1 x^q + c_0)^r dx$$

其中 p, q, r 是有理數。設 $y = x^q$ 則 $dy = qx^{q-1} dx$

$$\int \frac{y^{\frac{p+1}{q}-1}}{q} (c_1 y + c_0)^r dy.$$

Remark

當 $r \in \mathbb{N}$ 的時候不要衝動！直接展開不是比較舒服嗎？

切比雪夫積分

符號積分

何震邦

$$\int x^{r_1} (c_1 x + c_0)^{r_2} dx$$

其中 r_1, r_2 是有理數， r_1 的分母是 n_1 ， r_2 的分母是 n_2 。

► 當 r_1 是正整數

$$z = c_1 x + c_0.$$

► 當 r_2 是負整數

$$z = x^{1/n_1}.$$

► 當 r_1 是負整數

$$z = (c_1 x + c_0)^{1/n_2}.$$

► 當 $r_1 + r_2$ 是整數

$$z = \frac{(c_1 x + c_0)^{1/n_1}}{x^{1/n_1}}.$$

$$\int x^2 (c_1 x + c_0)^{3/5} dx$$

Solution

設 $z = c_1 x + c_0$ 則 $dx = \frac{dz}{c_1}$ 。

$$\begin{aligned} & \int x^2 (c_1 x + c_0)^{3/5} dx \\ &= \int \left(\frac{z^{13/5}}{c_1^3} - \frac{2c_0 z^{8/5}}{c_1^3} + \frac{c_0^2 z^{3/5}}{c_1^3} \right) dz \\ &= \frac{5z^{18/5}}{18} - \frac{10c_0 z^{13/5}}{13c_1^3} + \frac{5c_0^2 z^{8/5}}{8c_1^3} \\ &= \frac{5(c_1 x + c_0)^{18/5}}{18c_1^3} - \frac{10c_0 (c_1 x + c_0)^{13/5}}{13c_1^3} + \frac{5c_0^2 (c_1 x + c_0)^{8/5}}{8c_1^3}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}} dx$$

Solution

設 $y = \sqrt{x+1}$ ，則 $dx = 2y dy$ 。

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}} dx = \int \frac{2y}{\sqrt{y+1}} dy.$$

設 $z = y + 1$ 。

$$\begin{aligned} \int \frac{2y}{\sqrt{y+1}} dy &= \int \left(2\sqrt{z} - \frac{2}{\sqrt{z}} \right) dz \\ &= \frac{4z^{3/2}}{3} - 4\sqrt{z} \\ &= \frac{4(\sqrt{x+1}+1)^{3/2}}{3} - 4\sqrt{\sqrt{x+1}+1}. \end{aligned}$$

更多例子

符號積分

何震邦

Example

$$\int \frac{(cx - 8)^{2/3}}{x} dx = \int \frac{3z^4}{z^3 + 8} dz$$

其中 $z = (cx - 8)^{1/3}$ ，所以 $dx = \frac{3z^2}{c} dz$ 。

Example

$$\int \frac{x^{3/4}}{(x + c)^3} dx = \int \frac{4z^6}{(z^4 + c)^3} dz$$

其中 $z = x^{1/4}$ ，所以 $dx = 4z^3$ 。

$$\int \sqrt{x} (x+1)^{5/2} dx$$

符號積分

何震邦

Example

設 $z = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ ，所以 $dx = -\frac{2z}{(z^2-1)^2} dz$ 。

$$\int \sqrt{x} (x+1)^{5/2} dx = \int -\frac{2z^6}{(z^2-1)^5} dz.$$

方法 5：反三角替代

符號積分

何震邦

詳見《無理函數的積分》

方法 6：三角函數的積分

符號積分

何震邦

- ▶ 若被積函數中有 $\text{trig}_1(ax + b)\text{trig}_2(cx + d)$ ，其中 trig_1 與 trig_2 是 \sin 或 \cos ，則進行積化和差。
- ▶ 若被積函數是 $\text{trig}_1(nx)\text{trig}_2(y)$ ，其中 trig_1 是 \sin 或 \cos ， n 是整數，且 trig_2 不是 \sin 或 \cos ，則將 $\text{trig}_1(nx)$ 以倍角公式展開。
- ▶ 若被積函數中所有三角函數的參數都是 $ax + b$ ，則設新變數 $y = ax + b$ 。

$$\int \cos(mx) \cos(nx) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\begin{aligned} & \int \cos(mx) \cos(nx) dx \\ &= \int \frac{\cos((m+n)x)}{2} dx + \int \frac{\cos((m-n)x)}{2} dx \\ &= \frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)} + \frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)}. \end{aligned}$$

$$\int \sin(2x) \tan(x) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\begin{aligned}\int \sin(2x) \tan(x) dx &= \int 2 \cos(x) \sin(x) \tan(x) dx \\&= \int 2 \sin(x)^2 dx \\&= \int (1 - \cos(2x)) dx \\&= x - \frac{\sin(2x)}{2}.\end{aligned}$$

三角函數的積分，單一參數

符號積分

何震邦

把所有參數化為單一變數 x 後

- ▶ 將所有三角函數化為 \sin 和 \cos
 - ▶ $\cos(x)^{2m} \sin(x)^{2n}$ ，其中 $\{m, n\} \in \mathbb{N}_0$ 。
 - ▶ $\cos(x)^{2n+1} \text{Elem}(\cos(x)^2, \sin(x))$ 設 $y = \sin(x)$ 。
 - ▶ $\sin(x)^{2n+1} \text{Elem}(\sin(x)^2, \cos(x))$ 設 $y = \cos(x)$ 。
- ▶ 若行不通，將所有三角函數化為 \tan 和 \sec
 - ▶ $\sec(x)^{2n} \text{Elem}(\tan(x), \sec(x)^2)$ 設 $y = \tan(x)$ 。
- ▶ 最後只好使用萬能的

$$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}.$$

$$\int \cos(x)^{2m} \sin(x)^{2n} dx$$

符號積分

何震邦

Theorem

$$\cos(x) \sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

當 $m \geq n$ ，化為

$$\left(\left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^{m-n} \frac{\sin(2x)}{2} \right)^{2n}.$$

當 $m < n$ ，化為

$$\left(\left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^{n-m} \frac{\sin(2x)}{2} \right)^{2m}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx, \text{ 頁 1}$$

符號積分

何震邦

$$\begin{aligned} & \int \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx \\ &= \int \frac{(\cos(2x) + 1) \sin(2x)^4}{32} dx \\ &= \int \left(\frac{\cos(2x) \sin(2x)^4}{32} + \frac{\sin(2x)^4}{32} \right) dx \\ &= \frac{\sin(2x)^5}{320} + \int \frac{\cos(4x)^2 - 2\cos(4x) + 1}{128} dx \\ &= -\frac{\sin(4x)}{256} + \frac{\sin(2x)^5}{320} + \int \frac{\cos(8x) + 3}{256} dx \\ &= \frac{\sin(8x)}{2048} - \frac{\sin(4x)}{256} + \frac{\sin(2x)^5}{320} + \frac{3x}{256}. \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx, \text{ 頁 II}$$

符號積分

何震邦

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx &= \frac{9\pi}{256} - \frac{15\pi + 16}{5120} \\ &\approx 0.09811773200045232. \end{aligned}$$

$$\int \sec(x)^3 dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $y = \sin(x)$ 。

$$\begin{aligned} & \int \sec(x)^3 dx \\ &= \int \frac{1}{(1-y^2)^2} dy \\ &= \frac{\ln|y+1|}{4} - \frac{\ln|y-1|}{4} - \frac{y}{2y^2-2} \\ &= \frac{\ln|\sin(x)+1|}{4} - \frac{\ln|\sin(x)-1|}{4} - \frac{\sin(x)}{2\sin(x)^2-2}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sec(x)^2}{3 \tan(x) + \sec(x)^2 + 1} dx$$

Solution

設 $y = \tan(x)$ 。

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sec(x)^2}{3 \tan(x) + \sec(x)^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{1}{y^2 + 3y + 2} dy \\ &= \int \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2} \right) dy \\ &= \ln|y+1| - \ln|y+2| \\ &= \ln|\tan(x)+1| - \ln|\tan(x)+2|. \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\cos(x) + 1} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $y = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}$ ，則 $dx = \frac{2}{y^2 + 1} dy$ 。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos(x) + 1} dx &= \int \frac{2}{(y^2 + 1) \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} + 1 \right)} dy \\ &= \int dy \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}. \end{aligned}$$

方法 7：有理函數乘以指數函數

符號積分

何震邦

$$\int \frac{Ne^P}{D}$$

其中 D, N, P 是多項式且 D 與 N 互質。根據劉維爾定理，若此積分能以有限項表達，則必存在有理函數 A 使得

$$Ae^P = \int \frac{Ne^P}{D}.$$

標準作業程序 I

符號積分

何震邦

設 N 的領導項為 $c_1 x^m$ ，其中 $m \in \mathbb{N}_0$ 。即

$$N = c_1 x^{m_1} + S_1$$

其中 $c_1 \neq 0$ 且多項式 S_1 滿足 $\deg(S_1) < m$ 。則設有理函數 A_1 與 B_1 使得

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{c_1 x^{m_1}}{DP'} \\ (A_1 + B_1)e^P &= \int \frac{Ne^P}{D}. \end{aligned} \quad (2)$$

標準作業程序 II

符號積分

何震邦

根據(2)式，我們有

$$B_1 P' + B_1' = \frac{N}{D} - A_1 P' - A_1' = \frac{Q_1 + R_1}{D}.$$

其中 Q_1 為多項式， R_1 為真分式。若 $Q_{k-1} \neq 0$ 則設 Q_{k-1} 的領導項為 $c_k x^{m_k}$ ，並設有理函數 A_k 與 B_k 使得

$$A_k = \frac{c_k x^{m_k}}{D P'}$$
$$(A_k + B_k) e^P = \int \frac{N_k e^P}{D}$$

其中 $N_k = Q_{k-1} + R_{k-1}$ 。重複以上算法到 $Q_n = 0$ 為止。

標準作業程序 III

符號積分

何震邦

$$\text{設 } A = \sum_{k=1}^n A_k \circ$$

$$\begin{aligned}\frac{N}{D} &= P'A + A' + \frac{R_n}{D} \\ \frac{Ne^P}{D} &= P'Ae^P + A'e^P + \frac{R_ne^P}{D} \\ &= (Ae^P)' + \frac{R_ne^P}{D} \\ \int \frac{Ne^P}{D} &= Ae^P + \int \frac{R_ne^P}{D}\end{aligned}$$

其中 $\int \frac{R_ne^P}{D}$ 必無法以有限項表達。

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx, \text{ 第 1 步}$$

符號積分

何震邦

已知 $P' = 1$ 且 $D = (x+1)^2$ 。

$$A_1 = \frac{x}{D}$$

$$A_1' = \frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$B_1 P' + B_1' = \frac{1 + R_1}{D}$$

$$R_1 = -\frac{2}{x+1}.$$

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx, \text{ 第 2 步}$$

符號積分

何震邦

$$A_2 = \frac{1}{D}$$

$$A'_2 = -\frac{2}{(x+1)^3} = \frac{R_1}{D}$$

$$B_2 P' + B'_2 = 0.$$

因此

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{x+1}$$
$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \frac{e^x}{x+1}.$$

$$\int \frac{(2x^6 + 5x^4 + x^3 + 4x^2 + 1)e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx, \text{ 第 1 步}$$

已知 $P' = 2x$ 且 $D = (x^2 + 1)^2$ 。

$$A_1 = \frac{2x^6}{DP'} = \frac{x^5}{D}$$

$$A'_1 = \frac{5x^4}{(x^2 + 1)^2} - \frac{4x^6}{(x^2 + 1)^3}$$

$$B_1 P' + B'_1 = \frac{4x^4 + x^3 + 5 + R_1}{D}$$

$$R_1 = -\frac{4}{x^2 + 1}.$$

$$\int \frac{(2x^6 + 5x^4 + x^3 + 4x^2 + 1) e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx, \text{ 第 2 步}$$

符號積分

何震邦

$$A_2 = \frac{4x^4}{DP'} = \frac{2x^3}{D}$$

$$A_2' = \frac{6x^2}{(x^2 + 1)^2} - \frac{8x^4}{(x^2 + 1)^3}$$

$$B_2P' + B_2' = \frac{x^3 + 2x^2 - 3 + R_2}{D}$$

$$R_2 = \frac{4}{x^2 + 1}.$$

$$\int \frac{(2x^6 + 5x^4 + x^3 + 4x^2 + 1) e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx, \text{ 第 3 步}$$

符號積分

何震邦

$$A_3 = \frac{x^3}{DP'} = \frac{x^2}{2D}$$

$$A'_3 = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{2x^3}{(x^2 + 1)^3}$$

$$B_3P' + B'_3 = \frac{2x^2 + x - 3 + R_3}{D}$$

$$R_3 = \frac{4 - 2x}{x^2 + 1}.$$

$$\int \frac{(2x^6 + 5x^4 + x^3 + 4x^2 + 1) e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx, \text{ 第 4 步}$$

符號積分

何震邦

$$A_4 = \frac{2x^2}{DP'} = \frac{x}{D}$$

$$A'_4 = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{4x^2}{(x^2 + 1)^3}$$

$$B_4 P' + B'_4 = \frac{x + R_4}{D}$$

$$R_4 = -\frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$\int \frac{(2x^6 + 5x^4 + x^3 + 4x^2 + 1)e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx, \text{ 第 5 步}$$

$$A_5 = \frac{x}{DP'} = \frac{1}{2D}$$

$$A'_5 = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$B_5P' + B'_5 = 0.$$

因此

$$A = \sum_{k=1}^5 A_k = \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{Ne^P}{D} = \frac{2x^5 + 4x^3 + x^2 + 2x + 1}{2D} = \frac{2x^3 + 2x + 1}{2x^2 + 2}.$$

誤差函數

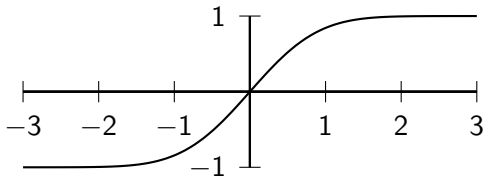
符號積分

何震邦

Definition

誤差函數是一個非初等函數。它的定義如下：

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$



常態分佈

符號積分

何震邦

Definition

若隨機變數 X 服從期望值為 μ 、標準差為 σ 的機率分佈，記作

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

則其機率密度函數為

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

常態分佈的累積分佈函數

符號積分

何震邦

Theorem

常態分佈的累積分佈函數為

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

Proof.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right). \end{aligned}$$



$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Proof.

設 $J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ ，顯然 $J > 0$ 。

$$J^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

設 r 與 θ 使得 $x = r \cos \theta$ 且 $y = r \sin \theta$ ，即極座標。積分範圍為第一象限。積分單位由 $dx dy$ 轉為 $r dr d\theta$ 。

$$J^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



方法 8：有理函數的積分

符號積分

何震邦

詳見《有理函數的積分》

方法 9：有理函數乘以對數或反三角函數

符號積分

何震邦

$$\int f'(x) \operatorname{op}(g(x)) dx$$

其中 f, f' 與 g 均為有理函數， op 為對數或反三角函數。則設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$ 再進行分部積分，即

$$\int \operatorname{op}(v) du = u \operatorname{op}(v) - \int u \operatorname{op}'(v) dv.$$

$$\int f'(x) \ln|g(x)| dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$ 。

$$\begin{aligned} \int \ln|v| du &= u \ln|v| - \int \frac{u}{v} dv \\ &= f(x) \ln|g(x)| - \int \frac{f(x) g'(x)}{g(x)} dx. \end{aligned}$$

$$\int f'(x) \arctan(g(x)) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$ 。

$$\begin{aligned} \int \arctan(v) du &= u \arctan(v) - \int \frac{u}{v^2 + 1} dv \\ &= f(x) \arctan(g(x)) - \int \frac{f(x) g'(x)}{g(x)^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

$$\int f'(x) \arcsin(g(x)) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$ 。

$$\begin{aligned} \int \arcsin(v) du &= u \arcsin(v) - \int \frac{u}{\sqrt{1-v^2}} dv \\ &= f(x) \arcsin(g(x)) - \int \frac{f(x) g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} dx. \end{aligned}$$

$$\int f'(x) \operatorname{arsinh}(g(x)) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$ 。

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arsinh}(v) du &= u \operatorname{arsinh}(v) - \int \frac{u}{\sqrt{v^2 + 1}} dv \\ &= f(x) \operatorname{arsinh}(g(x)) - \int \frac{f(x) g'(x)}{\sqrt{g(x)^2 + 1}} dx. \end{aligned}$$

$$\int 2x \ln|x| dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\begin{aligned}\int 2x \ln|x| dx &= x^2 \ln|x| - \int x dx \\ &= x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

$$\int x^2 \arcsin(x) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\begin{aligned} \int x^2 \arcsin(x) dx &= \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{\sqrt{1-x^2} (x^2 + 2)}{9}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln|x^2 + 2x|}{x^2 + 2x + 1} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx &= -\frac{1}{x + 1} \\ \int \frac{\ln|x^2 + 2x|}{x^2 + 2x + 1} dx &= -\frac{\ln|x^2 + 2x|}{x + 1} + \int \frac{2x + 2}{(x + 1)(x^2 + 2x)} dx \\ &= -\frac{\ln|x^2 + 2x|}{x + 1} + \int \frac{2}{x^2 + 2x} dx \\ &= -\frac{\ln|x^2 + 2x|}{x + 1} - \ln|x + 2| + \ln|x|.\end{aligned}$$

方法 10：有理函數乘以對數函數的初等表達式

符號積分

何震邦

當被積函數是有理函數 f 乘以 $\text{Elem}(\log_c(ax + b))$ ，則設

$$y = \log_c(ax + b).$$

此時

$$\int f(x) \text{Elem}(\log_c(ax + b)) dx = \int \frac{\ln(c) c^y f(z) \text{Elem}(y)}{b} dy$$

其中 $z = \frac{c^y - a}{b}$ 。通常這樣能把問題丟給方法 7 或階段 3。

方法 11：展開被積函數

符號積分

何震邦

當以上方法都無效時，不妨試試把被積函數乘開。

Example

$$x(\sin(x) + \cos(x)) = x \sin(x) + x \cos(x)$$

$$\frac{e^x + x}{e^x} = xe^{-x} + 1$$

$$x(e^x + 1)^2 = xe^{2x} + 2xe^x + x.$$

採用分部積分的時機

符號積分

何震邦

- ▶ 多項式乘以指數函數
- ▶ 多項式乘以 \sin 或 \cos
- ▶ 指數函數乘以 \sin 或 \cos
- ▶ 多項式乘以指數函數乘以 \sin 或 \cos 。

表格解法

符號積分

何震邦

Theorem

- ▶ 初始時，取易微分的部份為 u ，剩下的部份為 dv ，並找出 $v = \int dv$ 。
- ▶ 取下一個 u 為 u' ， v 為 $-\int v dx$ ，直到 u 為常數。
- ▶ 答案為 $\sum uv$ 。

Remark

$$\int u'(x) v(x) dx = \int v du.$$

多項式乘以指數函數

符號積分

何震邦

- ▶ 遇 \cosh 與 \sinh 都化為指數函數。
- ▶ 若指數函數的參數為 $ax + b$ ，則將 b 提出為常數。
- ▶ 分部積分時，取多項式為 u 。

$$\int x^3 e^{ax} dx$$

符號積分

何震邦

Solution

u	v
x^3	e^{ax}/a
$3x^2$	$-e^{ax}/a^2$
$6x$	e^{ax}/a^3
6	$-e^{ax}/a^4$

$$\int x^3 e^{ax} dx = \frac{(a^3 x^3 - 3a^2 x^2 + 6ax - 6) e^{ax}}{a^4}.$$

多項式乘以 \sin 或 \cos

符號積分

何震邦

- ▶ 遇三角函數的乘積，一律採取積化和差，否則三角函數可能會越積越大串。
- ▶ 若三角函數的參數為 $ax + b$ ，則設新變數 $y = ax + b$ 。
- ▶ 分部積分時，取多項式為 u 。

$$\int x^2 \cos(x) dx$$

Solution

設 $u = x^2$ 與 $v = \sin(x)$ 。

$$\int u dv = uv - \int v du = x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x) dx.$$

設 $u = 2x$ 與 $v = \cos(x)$ 。

$$\int u dv = uv - \int v du = 2x \cos(x) - \int 2 \cos(x) dx.$$

所以

$$\int x^2 \cos(x) dx = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x).$$

$$\int x^2 \cos(x) dx, \text{ 表格解法}$$

符號積分

何震邦

Solution

u	v
x^2	$\sin(x)$
$2x$	$\cos(x)$
2	$-\sin(x)$

$$\int x^2 \cos(x) dx = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x).$$

$$\int x^2 \cos(3x) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

設 $y = 3x$ 。

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(3x) dx &= \int \frac{y^2 \cos(y)}{27} dy \\&= \frac{(y^2 - 2) \sin(y) + 2y \cos(y)}{27} \\&= \frac{(9x^2 - 2) \sin(3x) + 6x \cos(3x)}{27}.\end{aligned}$$

$$\int x^2 \cos(x) \sin(x)^2 dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\begin{aligned} & \int x^2 \cos(x) \sin(x)^2 dx \\ &= \int \frac{x^2 \cos(x) - x^2 \cos(3x)}{4} dx \\ &= \frac{(x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x)}{4} \\ &\quad - \frac{(9x^2 - 2) \sin(3x) + 6x \cos(3x)}{108}. \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(3x) dx, \text{ 頁 1}$$

符號積分

何震邦

設 $y = 3x$ 。

$$\int x^2 \sin(3x) dx = \int \frac{y^2 \sin(y)}{27} dy.$$

u	v
y^2	$-\cos(y)$
$2y$	$\sin(y)$
2	$\cos(y)$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(3x) dx, \text{ 頁 II}$$

符號積分

何震邦

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2 \sin(y)}{27} dy &= \frac{2y \sin(y) + (2 - y^2) \cos(y)}{27} \\ &= \frac{6x \sin(3x) + (2 - 9x^2) \cos(3x)}{27} \\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(3x) dx &= \frac{9\sqrt{2}\pi^2 + 3 \cdot 2^{7/2}\pi - 2^{11/2}}{864} - \frac{\pi}{27} \\ &\approx 0.1000728555380578281. \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^4 \cos(2x) dx, \text{ 頁 1}$$

符號積分

何震邦

設 $y = 2x$ 。

$$\int x^4 \cos(2x) dx = \int \frac{y^4 \cos(y)}{64} dy.$$

u	v
y^4	$\sin(y)$
$4y^3$	$\cos(y)$
$12y^2$	$-\sin(y)$
$24y$	$-\cos(y)$
24	$\sin(y)$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^4 \cos(2x) dx, \text{ 頁 II}$$

符號積分

何震邦

$$\begin{aligned} & \int \frac{y^4 \cos(y)}{64} dy \\ &= \frac{(y^4 - 12y^2 + 24) \sin(y) + (4y^3 - 24y) \cos(y)}{64} \\ &= \frac{(2x^4 - 6x^2 + 3) \sin(2x) + (4x^3 - 6x) \cos(2x)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^4 \cos(2x) dx \\ &= \frac{\pi^4 - 48\pi^2 + 384}{512} \\ & \quad - \frac{\sqrt{3}\pi^4 + 12\pi^3 - 4 \cdot 3^{7/2}\pi^2 - 648\pi + 8 \cdot 3^{11/2}}{5184} \end{aligned}$$

$$\approx 0.009975817894309118.$$

指數函數乘以 \sin 或 \cos

符號積分

何震邦

$$\int e^{cx} \operatorname{trig}(ax + b) dx$$

設 $u = \operatorname{trig}(ax + b)$ 與 $v = e^{cx}$ ，則原式變為

$$\int \frac{u}{c} dv.$$

Theorem

$$\begin{aligned}\int e^{cx} \cos(ax + b) dx &= \frac{e^{cx} (a \sin(ax + b) + c \cos(ax + b))}{c^2 + a^2} \\ \int e^{cx} \sin(ax + b) dx &= \frac{e^{cx} (c \sin(ax + b) - a \cos(ax + b))}{c^2 + a^2}.\end{aligned}$$

$$\int e^{cx} \cos(ax + b) dx$$

Solution

設 $\theta = ax + b$ 。

$$\begin{aligned}\int e^{cx} \cos(\theta) dx &= \frac{e^{cx} \cos(\theta)}{c} + \int \frac{ae^{cx} \sin(\theta)}{c} dx \\ \int e^{cx} \sin(\theta) dx &= \frac{e^{cx} \sin(\theta)}{c} - \int \frac{ae^{cx} \cos(\theta)}{c} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int e^{cx} \cos(\theta) dx \\&= \frac{e^{cx} (a \sin(\theta) + c \cos(\theta))}{c^2} - \int \frac{a^2 e^{cx} \cos(\theta)}{c^2} dx \\&= \frac{e^{cx} (a \sin(\theta) + c \cos(\theta))}{c^2 + a^2}.\end{aligned}$$

$$\int e^{cx} \sin(ax + b) dx$$

Solution

設 $\theta = ax + b$ 。

$$\begin{aligned}\int e^{cx} \sin(\theta) dx &= \frac{e^{cx} \sin(\theta)}{c} - \int \frac{ae^{cx} \cos(\theta)}{c} dx \\ \int e^{cx} \cos(\theta) dx &= \frac{e^{cx} \cos(\theta)}{c} + \int \frac{ae^{cx} \sin(\theta)}{c} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \int e^{cx} \sin(\theta) dx \\ &= \frac{e^{cx} (c \sin(\theta) - a \cos(\theta))}{c^2} - \int \frac{a^2 e^{cx} \sin(\theta)}{c^2} dx \\ &= \frac{e^{cx} (c \sin(\theta) - a \cos(\theta))}{c^2 + a^2}.\end{aligned}$$

$$\int e^{3x} \sin(2x) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\begin{aligned}\int e^{3x} \sin(2x) dx &= \frac{e^{3x} \sin(2x)}{3} - \int \frac{2e^{3x} \cos(2x)}{3} dx \\ \int e^{3x} \cos(2x) dx &= \frac{e^{3x} \cos(2x)}{3} + \int \frac{2e^{3x} \sin(2x)}{3} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int e^{3x} \sin(2x) dx \\&= \frac{e^{3x} (3 \sin(2x) - 2 \cos(2x))}{9} - \int \frac{4e^{3x} \sin(2x)}{9} dx \\&= \frac{e^{3x} (3 \sin(2x) - 2 \cos(2x))}{13}.\end{aligned}$$

多項式乘以指數函數乘以 \sin 或 \cos

符號積分

何震邦

- ▶ 基本上技巧同多項式乘以 \sin 或 \cos ，也不適合用表格解法。
- ▶ 分部積分時，取多項式乘以 \sin 或 \cos 為 u 。

$$\int x e^x \cos(x) dx$$

符號積分

何震邦

Solution

$$\int x e^x \cos(x) dx = x e^x \cos(x) - \int e^x (\cos(x) - x \sin(x)) dx$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2}$$

$$\int x e^x \sin(x) dx = x e^x \sin(x) - \int e^x (\sin(x) + x \cos(x)) dx$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2}$$

$$\int x e^x \cos(x) dx = \frac{(x-1) e^x \sin(x) + x e^x \cos(x)}{2}.$$

Thanks for your attention!