

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

# 積分

何震邦 <[jdjh8@ms63.hinet.net](mailto:jdjh8@ms63.hinet.net)>



2014 年 12 月 1 日

# 積分的用途

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

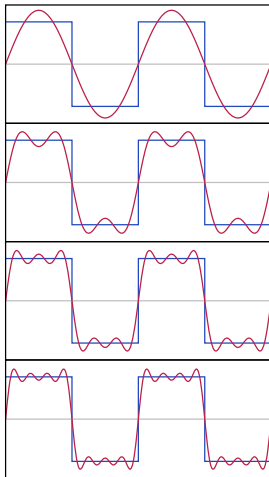
乘冪、指數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

- ▶ 求面積與體積
  - ▶ 求轉動慣量
- ▶ 解微分方程
  - ▶ 變力作功
  - ▶ 訊號處理



# 區間的分割

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

閉區間  $[a, b]$  的一個**分割**是指在此區間中取有限的序列  $x_i$  使得  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 。每個閉區間  $[x_i, x_{i+1}]$  叫做一個**子區間**。

# 黎曼-達布和

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

設  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  是有界函數，且  $P : x_0, \dots, x_n$  是閉區間  $[a, b]$  的一個分割。設

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

$f$  在分割  $P$  下的上黎曼和為

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$

而下黎曼和為

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i).$$

# 黎曼-達布積分

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指數的積分

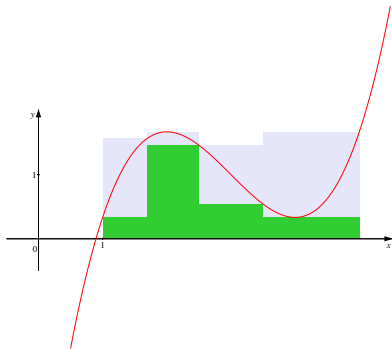
三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

$f$  的**上達布積分**是所有上黎曼和的下確界，而  $f$  的**下達布積分**是所有下黎曼和的上確界。若  $f$  的上下達布積分相等，則我們說  $f$  是黎曼-達布可積，且定義此積分為

$$\int_a^b f(x) dx.$$



# 微積分基本定理，第一部份

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

設  $f$  是在閉區間  $[a, b]$  中連續的實函數。設  $F$  在區間  $[a, b]$  中定義為

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

則  $F$  在  $[a, b]$  連續，在開區間  $(a, b)$  可導，且  $\forall x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x).$$

# 微積分基本定理，第二部份

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

設  $f$  和  $F$  在閉區間  $[a, b]$  上有定義，且  $F$  的導函數為  $f$ ，即  $\forall x \in [a, b]$

$$F'(x) = f(x).$$

若  $f$  在  $[a, b]$  黎曼可積則

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

# 符號積分的困難

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

- ▶ 初等函數的導函數仍是初等函數。
- ▶ 初等函數的反導函數就不一定是初等函數。



# 換元積分法

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt.$$

Proof.

設函數  $F$  使得  $F'(x) = f(x)$ 。

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) g'(t) = f(g(t)) g'(t).$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx. \end{aligned}$$



# 分部積分法

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$
$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Proof.

$$(u(x) v(x))' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$$
$$\int_a^b (u(x) v(x))' dx = \int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx$$
$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx. \quad \square$$

# 冪函數與指數函數的積分

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

$$a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)}.$$

$$\int \ln|x| dx = x \ln|x| - x$$

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

Proof.

設  $u = \ln|x|$ ，則  $du = \frac{1}{x} dx$ 。

$$\begin{aligned}\int \ln|x| dx &= \int u dx \\ &= xu - \int x du \\ &= x \ln|x| - \int dx \\ &= x \ln|x| - x.\end{aligned}$$



# 三角函數的積分

## 積分

何震邦

### 積分

積分

微積分基本定理

### 積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

### 電腦代數系統

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x)$$

$$\int \tan(x) \, dx = \ln|\sec(x)|$$

$$\int \cot(x) \, dx = \ln|\sin(x)|$$

$$\int \sec(x) \, dx = \ln|\tan(x) + \sec(x)|$$

$$\int \csc(x) \, dx = -\ln|\csc(x) + \cot(x)|.$$

$$\int \tan(x) dx = \ln|\sec(x)|$$

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

Proof.

設  $u = \cos(x)$ 。

$$\begin{aligned}\int \tan(x) dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \\ &= \int -\frac{1}{u} du \\ &= -\ln|u| \\ &= \ln|\sec(x)|.\end{aligned}$$



$$\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)|$$

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

Proof.

設  $u = \sin(x)$ 。

$$\begin{aligned}\int \cot(x) dx &= \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln|u| \\ &= \ln|\sin(x)|.\end{aligned}$$



$$\int \sec(x) dx = \ln|\tan(x) + \sec(x)|$$

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

Proof.

設  $u = \tan(x) + \sec(x)$ 。

$$\begin{aligned}\int \sec(x) dx &= \int \frac{u \sec(x)}{u} dx \\&= \int \frac{\sec(x) \tan(x) + \sec(x)^2}{\tan(x) + \sec(x)} dx \\&= \int \frac{1}{u} du \\&= \ln|u| \\&= \ln|\tan(x) + \sec(x)|.\end{aligned}$$





$$\int \csc(x) dx = -\ln|\csc(x) + \cot(x)|$$

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

Proof.

設  $u = \csc(x) + \cot(x)$ 。

$$\begin{aligned}\int \csc(x) dx &= \int \frac{u \csc(x)}{u} dx \\&= \int \frac{\csc(x)^2 + \csc(x) \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} dx \\&= \int -\frac{1}{u} du \\&= -\ln|u| \\&= -\ln|\csc(x) + \cot(x)|.\end{aligned}$$



# 雙曲函數的定義

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

$$\cosh(x) \triangleq \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) \triangleq \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) \triangleq \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x) \triangleq \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

$$\operatorname{sech}(x) \triangleq \frac{1}{\cosh(x)}$$

$$\operatorname{csch}(x) \triangleq \frac{1}{\sinh(x)}.$$

# 雙曲函數的性質

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

將三角函數的公式以  $\cos$  和  $\sin$  展開，若欲轉換為  $\cosh$  和  $\sinh$ ，則需每逢 2 個  $\sin$  相乘變號。

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

$$\sinh(2x) = 2 \cosh(x) \sinh(x).$$

原因：

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

# 雙曲函數的導函數

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \operatorname{sech}(x)^2$$

$$\frac{d}{dx} \coth(x) = -\operatorname{csch}(x)^2$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x) \tanh(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}(x) = -\coth(x) \operatorname{csch}(x).$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

Proof.

設  $y = \operatorname{arsinh}(x)$ ，則  $x = \sinh(y)$ 。

$$\frac{dx}{dy} = \cosh(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$



# 雙曲函數的積分

## 積分

何震邦

## 積分

積分

微積分基本定理

## 積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x)$$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x)$$

$$\int \tanh(x) dx = \ln(\cosh(x))$$

$$\int \coth(x) dx = \ln|\sinh(x)|$$

$$\int \operatorname{sech}(x) dx = \arctan(\sinh(x))$$

$$\int \operatorname{csch}(x) dx = \ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

$$\int \operatorname{sech}(x) dx = \arctan(\sinh(x))$$

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

Proof.

設  $u = \sinh(x)$ 。

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sech}(x) dx &= \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \arctan(u) \\ &= \arctan(\sinh(x)).\end{aligned}$$



$$\int \operatorname{csch}(x) dx = \ln \left| \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right|$$

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

Proof.

設  $u = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$ 。

$$\begin{aligned} \int \operatorname{csch}(x) dx &= \int \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \sinh\left(\frac{x}{2}\right)} dx \\ &= \int \frac{\operatorname{sech}\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2 \tanh\left(\frac{x}{2}\right)} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln|u| \\ &= \ln \left| \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right|. \end{aligned}$$





# Maxima——一套強大的電腦代數系統

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

- ▶ 原始碼可在許多系統上編譯，包括 Windows、Linux、Mac OS X。
- ▶ 它的前身 Macsyma 是 1960 年代由 MIT 研發的。
  - ▶ 感謝其自由開放的傳統，目前大型商業套件如 Maple 和 Mathematica 也是以它為藍本。
- ▶ Maxima 是 **GPL v2** 下的自由軟體，我們可自由使用、研究、散布、改良。
  - ▶ 我們可以站在巨人的肩膀上，不必重新發明輪子。

# wxMaxima——Maxima 的介面

積分

何震邦

多語言圖形介面，含中文，還有漂亮的輸出。

積分

積分

微積分基本定理

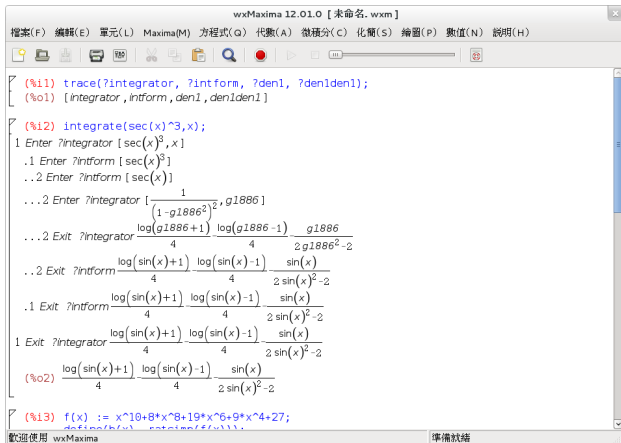
積分技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統



The screenshot shows the wxMaxima 12.01.0 window. The menu bar includes 檔案(F), 編輯(E), 單元(L), Maxima(M), 方程式(Q), 代數(A), 微積分(C), 化簡(S), 繪圖(P), 數值(N), and 說明(H). The toolbar contains icons for file operations, editing, and execution. The main text area shows a Maxima session with the following commands and results:

```
(%i1) trace(?integrator, ?intform, ?den1den1);
(%o1) [integrator, intform, den1, den1den1]

(%i2) integrate(sec(x)^3,x);
1 Enter ?integrator [sec(x)^3,x]
.1 Enter ?intform [sec(x)^3]
..2 Enter ?intform [sec(x)]
...2 Enter ?integrator [1/(1-g1886^2),g1886]
...2 Exit ?integrator 1/4 * log(sin(x)+1) - 1/4 * log(sin(x)-1) - sin(x)/(2 sin(x)^2-2)
..2 Exit ?intform 1/4 * log(sin(x)+1) - 1/4 * log(sin(x)-1) - sin(x)/(2 sin(x)^2-2)
.1 Exit ?intform 1/4 * log(sin(x)+1) - 1/4 * log(sin(x)-1) - sin(x)/(2 sin(x)^2-2)
1 Exit ?integrator 1/4 * log(sin(x)+1) - 1/4 * log(sin(x)-1) - sin(x)/(2 sin(x)^2-2)
(%o2) 1/4 * log(sin(x)+1) - 1/4 * log(sin(x)-1) - sin(x)/(2 sin(x)^2-2)

(%i3) f(x) := x^10+8*x^8+19*x^6+9*x^4+27;
define(b(x)) integrate(f(x),x);
```

The status bar at the bottom shows "歡迎使用 wxMaxima" on the left and "準備就緒" on the right.

積分

何震邦

積分

積分

微積分基本定理

積分的技巧

乘冪、指對數的積分

三角函數的積分

雙曲函數的積分

電腦代數系統

# Thanks for your attention!