符號積分

何震邦 <jdh8@ms63.hinet.net>

2013 年 9 月 28 日

演算法

- 1967 年，符號積分的先驅 Joel Moses 發表 Symbolic Integration 這篇論文。
  - 他提出的三階段演算法仍被所有主流電腦代數系統使用。
- 一篇比較現代的文件是 1998 年 Manuel Bronstein 寫下的 Symbolic Integration Tutoral。

三階段演算法

1. 題目是簡單的題目嗎？
2. 題目可以由變數代換解決嗎？
    - 把代換後的式子丟回第一階段
    - 或直接在這一步處理掉。
3. 題目可以由更一般化的方法解決嗎？

階段 1

1. 若被積函數是個總和，則分別對每項進行積分，再將結果相加。
2. 若被積函數是
$$\left(\sum_i u_i(x)\right)^n$$
其中 $n \in \mathbb{N}$，則將它展開再逐項積分。
3. 檢查 Derivative-divides 條件，如(1)式。

逐項積分與展開自然數次方

- 逐項積分：

$$\int (\sin(x) + e^x)\, dx = \int \sin(x)\, dx + \int e^x dx.$$

- 展開自然數次方：

$$\int (e^x + x)^2\, dx = \int \left(e^{2x} + 2xe^x + x^2\right) dx.$$

Derivative-divides

檢查原式是否符合

$$\int c\,\mathrm{op}(u(x))\,u'(x)\,dx. \tag{1}$$

其中

- c 是常數
- $u(x)$ 是 x 的函數
- $u'(x)$ 是它的導函數

- op 是初等操作，即 op 是
  - 三角函數
  - 雙曲函數
  - log

  或 $\mathrm{op}(u(x))$ 具有以下的型態
  - $1/u(x)$
  - $u(x)^a$，其中 $a \neq -1$
  - $b^{u(x)}$，其中 b 是常數。

$\int xe^{x^2}\,dx$

Solution

$\operatorname{op}(u(x)) = e^{u(x)},\ u(x) = x^2,\ u'(x) = 2x,\ c = \dfrac{1}{2}.$

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx &= \int \frac{e^u}{2}\,du \\ &= \frac{e^u}{2} \\ &= \frac{e^{x^2}}{2}.\end{aligned}$$

$\int 4\cos(2x+3)\,dx$

Solution

op $=\cos$, $u(x)=2x+3$, $u'(x)=2$, $c=2$.

$$\begin{aligned}\int 4\cos(2x+3)\,dx &= \int 2\cos(u)\,du\\ &= 2\sin(u)\\ &= 2\sin(2x+3).\end{aligned}$$

$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

Solution

$$\operatorname{op}(u(x)) = \frac{1}{u(x)},\ u(x) = e^x + 1,\ u'(x) = e^x,\ c = 1.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln|u| \\
&= \ln(e^x+1).
\end{aligned}$$

$\int \cos(x)\sin(x)\,dx$

Solution

$\mathrm{op}(u(x)) = u(x)$, $u(x) = \cos(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$, $c = -1$.

$$\begin{aligned}\int \cos(x)\sin(x)\,dx &= -\int u\,du \\ &= -\frac{u^2}{2} \\ &= -\frac{\cos(x)^2}{2}.\end{aligned}$$

$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Solution

$$\operatorname{op}(u(x)) = \sqrt{u(x)},\ u(x) = x^2+1,\ u'(x) = 2x,\ c = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \frac{\sqrt{u}}{2}\,du \\ &= \frac{u^{3/2}}{3} \\ &= \frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3}.\end{aligned}$$

$\int \cos(e^x)^2 \sin(e^x)\, e^x\, dx$

Solution

$\operatorname{op}(u(x)) = u(x)^2,\ u(x) = \cos(e^x),\ u'(x) = -\sin(e^x)\, e^x,\ c = -1.$

$$\begin{aligned}\int \cos(e^x)^2 \sin(e^x)\, e^x\, dx &= -\int u^2\, du\\ &= -\frac{u^3}{3}\\ &= -\frac{\cos(e^x)^3}{3}.\end{aligned}$$

初等表達式

當我們說某式是 x 的初等表達式，則它是由以下組成：

1. 常數
2. x
3. x 的三角函數，如 $\sin(x)$、$\cos(x)$
4. x 的對數與反三角函數，如 $\ln(x)$、$\arcsin(x)$

且在加法、乘法、乘方和取代下封閉，並簡記作

$$\mathrm{Elem}(x).$$

Example

- $(e^x+1)\,e^{2e^x}+e^{2x}$ 是 e^x 的初等表達式。
- xe^x 不是 e^x 的初等表達式，但它是 x 的初等表達式。

方法 1：指數函數的初等表達式

當被積函數是 Elem(c^x)，其中 c 是常數，則設

$$y = c^x.$$

Example

$$\int \frac{e^x}{3e^{2x}+2}\,dx = \int \frac{1}{3y^2+2}\,dy \qquad y = e^x$$

$$\int \frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e}{y+1}\,dy \qquad y = e^x.$$

$\int \frac{e^x}{3e^{2x}+2}\,dx$

Solution

設 $y = e^x$。

$$\int \frac{e^x}{3e^{2x}+2}\,dx = \int \frac{1}{3y^2+2}\,dy = \frac{\arctan\left(\frac{3y}{\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{6}} = \frac{\arctan\left(\frac{3e^x}{\sqrt{6}}\right)}{\sqrt{6}}.$$

$\int \frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,dx$

Solution

設 $y = e^x$。

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{e}{y+1}\,dy\\ &= e\ln|y+1|\\ &= e\ln(e^x+1).\end{aligned}$$

方法 2：以整數次方替代

當被積函數是 $x^c\,\mathrm{Elem}(x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots)$，其中 c 與 k_i 是整數，則設

$$y = x^k$$

其中

$$k \triangleq \gcd\{c+1, k_1, k_2, \ldots\} \neq 1.$$

Example

$$\int x^3 \sin\left(x^2\right)\,dx = \int \frac{y\sin(y)}{2}\,dy \qquad y = x^2$$

$$\int \frac{x^7}{x^{12}+1}\,dx = \int \frac{y}{4y^3+4}\,dy \qquad y = x^4.$$

$\int x^3 \sin\left(x^2\right)\, dx$

Solution

設 $y = x^2$。

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin\left(x^2\right)\, dx &= \int \frac{y\sin(y)}{2}\, dy \\ &= \frac{\sin(y) - y\cos(y)}{2} \\ &= \frac{\sin\left(x^2\right) - x^2\cos\left(x^2\right)}{2}.\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^7}{x^{12}+1}\,dx$$

Solution

設 $y = x^4$。

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^7}{x^{12}+1}\,dx &= \int \frac{y}{4y^3+4}\,dy \\
&= \frac{\ln\left(y^2-y+1\right)}{24} + \frac{\arctan\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)}{4\sqrt{3}} - \frac{\ln|y+1|}{12} \\
&= \frac{\ln\left(x^8-x^4+1\right)}{24} + \frac{\arctan\left(\frac{2x^4-1}{\sqrt{3}}\right)}{4\sqrt{3}} - \frac{\ln\left(x^4+1\right)}{12}.
\end{aligned}$$

方法 3：以線性分式的 k 次方根替代

當被積函數是 $\mathrm{Elem}\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)$，其中

- 所有 m_i 與 n_i 互質整數，且有些 $|n_i| \neq 1$
- a, b, c, d 為常數並 $ad - bc \neq 0$

則設

$$y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$$

其中 k 是 n_i 的最小公倍數。

$\int \frac{1}{\sqrt{x}-x^{1/3}}\,dx$

Solution

設 $y=x^{1/6}$，則 $dx=6y^5dy$。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}-x^{1/3}}\,dx &= \int \frac{6y^5}{y^3-y^2}\,dy \\ &= 2y^3+3y^2+6y+6\ln|y-1| \\ &= 2\sqrt{x}+3x^{1/3}+6x^{1/6}+6\ln\left|x^{1/6}-1\right|.\end{aligned}$$

$\int \sqrt{\dfrac{x+1}{2x+3}}\,dx$，頁 I

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} \\ 2y^2 &= \frac{2x+2}{2x+3} \\ 2y^2-1 &= -\frac{1}{2x+3} \\ -\frac{1}{2y^2-1} &= 2x+3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2\left(2y^2-1\right)} - \frac{3}{2} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{2y}{\left(2y^2-1\right)^2}. \end{aligned}$$

$\int \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}\,dx$，頁 II

Solution

設 $y=\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}$，則 $dx=\frac{2y}{(2y^2-1)^2}\,dy$。

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}\,dx &= \int \frac{2y^2}{(2y^2-1)^2}\,dy \\
&= \frac{\ln\left|\frac{2y-\sqrt{2}}{2y+\sqrt{2}}\right|}{2^{5/2}} - \frac{y}{4y^2-2} \\
&= \frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}-\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}+\sqrt{2}}\right|}{2^{5/2}} + \frac{(2x+3)\sqrt{\frac{x+1}{2x+3}}}{2}.
\end{aligned}$$

方法 4：二項式 –切比雪夫積分

$$\int x^p \left(c_1 x^q + c_0\right)^r dx$$

其中 p, q, r 是有理數。設 $y = x^q$ 則 $dy = qx^{q-1} dx$

$$\int \frac{y^{\frac{p+1}{q}-1}}{q} \left(c_1 y + c_0\right)^r dy.$$

Remark

當 $r \in \mathbb{N}$ 的時候不要衝動！直接展開不是比較舒服嗎？

切比雪夫積分

$$\int x^{r_1} (c_1 x + c_0)^{r_2} \, dx$$

其中 r_1, r_2 是有理數，r_1 的分母是 n_1，r_2 的分母是 n_2。

- 當 r_1 是正整數

$$z = c_1 x + c_0.$$

- 當 r_1 是負整數

$$z = (c_1 x + c_0)^{1/n_2}.$$

- 當 r_2 是負整數

$$z = x^{1/n_1}.$$

- 當 $r_1 + r_2$ 是整數

$$z = \frac{(c_1 x + c_0)^{1/n_1}}{x^{1/n_1}}.$$

$\int x^2 (c_1x+c_0)^{3/5}\,dx$

Solution

設 $z=c_1x+c_0$ 則 $dx=\dfrac{dz}{c_1}$。

$$\begin{aligned}
&\int x^2 (c_1x+c_0)^{3/5}\,dx\\
&=\int \left(\frac{z^{13/5}}{c_1^3}-\frac{2c_0z^{8/5}}{c_1^3}+\frac{c_0^2z^{3/5}}{c_1^3}\right)dz\\
&=\frac{5z^{18/5}}{18}-\frac{10c_0z^{13/5}}{13c_1^3}+\frac{5c_0^2z^{8/5}}{8c_1^3}\\
&=\frac{5(c_1x+c_0)^{18/5}}{18c_1^3}-\frac{10c_0(c_1x+c_0)^{13/5}}{13c_1^3}+\frac{5c_0^2(c_1x+c_0)^{8/5}}{8c_1^3}.
\end{aligned}$$

$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}}\,dx$

Solution

設 $y=\sqrt{x+1}$，則 $dx=2y\,dy$。

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}}\,dx=\int \frac{2y}{\sqrt{y+1}}\,dy.$$

設 $z=y+1$。

$$\begin{aligned}\int \frac{2y}{\sqrt{y+1}}\,dy &= \int \left(2\sqrt{z}-\frac{2}{\sqrt{z}}\right)dz\\ &= \frac{4z^{3/2}}{3}-4\sqrt{z}\\ &= \frac{4\left(\sqrt{x+1}+1\right)^{3/2}}{3}-4\sqrt{\sqrt{x+1}+1}.\end{aligned}$$

更多例子

Example

$$\int \frac{(cx-8)^{2/3}}{x}\,dx = \int \frac{3z^4}{z^3+8}\,dz$$

其中 $z=(cx-8)^{1/3}$，所以 $dx=\frac{3z^2}{c}\,dz$。

Example

$$\int \frac{x^{3/4}}{(x+c)^3}\,dx = \int \frac{4z^6}{(z^4+c)^3}\,dz$$

其中 $z=x^{1/4}$，所以 $dx=4z^3$。

$\int \sqrt{x}(x+1)^{5/2}\,dx$

Example

設 $z = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$，所以 $dx = -\dfrac{2z}{(z^2-1)^2}\,dz$。

$$\int \sqrt{x}(x+1)^{5/2}\,dx = \int -\frac{2z^6}{(z^2-1)^5}\,dz.$$

方法 5：反三角替代

詳見《無理函數的積分》

方法 6：三角函數的積分

- 若被積函數中有 $\text{trig}_1(ax+b)\,\text{trig}_2(cx+d)$，其中 trig_1 與 trig_2 是 sin 或 cos，則進行積化和差。
- 若被積函數是 $\text{trig}_1(nx)\,\text{trig}_2(y)$，其中 trig_1 是 sin 或 cos，n 是整數，且 trig_2 不是 sin 或 cos，則將 $\text{trig}_1(nx)$ 以倍角公式展開。
- 若被積函數中所有三角函數的參數都是 $ax+b$，則設新變數 $y=ax+b$。

$\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$

Solution

$$
\begin{aligned}
&\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx \\
=& \int \frac{\cos((m+n)x)}{2}\,dx + \int \frac{\cos((m-n)x)}{2}\,dx \\
=& \frac{\sin((m+n)x)}{2\,(m+n)} + \frac{\sin((m-n)x)}{2\,(m-n)}.
\end{aligned}
$$

$\int \sin(2x)\tan(x)\,dx$

Solution

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\tan(x)\,dx &= \int 2\cos(x)\sin(x)\tan(x)\,dx\\ &= \int 2\sin(x)^2 dx\\ &= \int (1-\cos(2x))\,dx\\ &= x - \frac{\sin(2x)}{2}.\end{aligned}$$

三角函數的積分，單一參數

把所有參數化為單一變數 x 後

- 將所有三角函數化為 sin 和 cos
  - $\cos(x)^{2m}\sin(x)^{2n}$，其中 $\{m,n\}\in\mathbb{N}_0$。
  - $\cos(x)^{2n+1}\,\mathrm{Elem}\left(\cos(x)^2,\sin(x)\right)$ 設 $y=\sin(x)$。
  - $\sin(x)^{2n+1}\,\mathrm{Elem}\left(\sin(x)^2,\cos(x)\right)$ 設 $y=\cos(x)$。
- 若行不通，將所有三角函數化為 tan 和 sec
  - $\sec(x)^{2n}\,\mathrm{Elem}\left(\tan(x),\sec(x)^2\right)$ 設 $y=\tan(x)$。
- 最後只好使用萬能的

$$y=\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}.$$

$\int \cos(x)^{2m} \sin(x)^{2n} dx$

Theorem

$$\cos(x)\sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

當 $m \geq n$，化為

$$\left(\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^{m-n} \frac{\sin(2x)}{2}\right)^{2n}.$$

當 $m < n$，化為

$$\left(\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^{n-m} \frac{\sin(2x)}{2}\right)^{2m}.$$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx$，頁 I

$$\begin{aligned}
&\int \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx \\
&= \int \frac{(\cos(2x)+1)\sin(2x)^4}{32} dx \\
&= \int \left(\frac{\cos(2x)\sin(2x)^4}{32} + \frac{\sin(2x)^4}{32}\right) dx \\
&= \frac{\sin(2x)^5}{320} + \int \frac{\cos(4x)^2 - 2\cos(4x) + 1}{128} dx \\
&= -\frac{\sin(4x)}{256} + \frac{\sin(2x)^5}{320} + \int \frac{\cos(8x)+3}{256} dx \\
&= \frac{\sin(8x)}{2048} - \frac{\sin(4x)}{256} + \frac{\sin(2x)^5}{320} + \frac{3x}{256}.
\end{aligned}$$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx$，頁 II

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \cos(x)^6 \sin(x)^4 dx = \frac{9\pi}{256} - \frac{15\pi + 16}{5120}$$
$$\approx 0.0981177320004523\,2.$$

$\int \sec(x)^3 dx$

Solution

設 $y = \sin(x)$。

$$
\begin{aligned}
&\int \sec(x)^3 dx \\
=& \int \frac{1}{(1-y^2)^2} dy \\
=& \frac{\ln|y+1|}{4} - \frac{\ln|y-1|}{4} - \frac{y}{2y^2-2} \\
=& \frac{\ln|\sin(x)+1|}{4} - \frac{\ln|\sin(x)-1|}{4} - \frac{\sin(x)}{2\sin(x)^2-2}.
\end{aligned}
$$

$\int \frac{\sec(x)^2}{3\tan(x)+\sec(x)^2+1}\,dx$

Solution

設 $y=\tan(x)$。

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sec(x)^2}{3\tan(x)+\sec(x)^2+1}\,dx \\
=&\int \frac{1}{y^2+3y+2}\,dy \\
=&\int \left(\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+2}\right) dy \\
=&\ln|y+1|-\ln|y+2| \\
=&\ln|\tan(x)+1|-\ln|\tan(x)+2|.
\end{aligned}
$$

$\int \frac{1}{\cos(x)+1}\,dx$

Solution

設 $y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}$，則 $dx = \frac{2}{y^2+1}\,dy$。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos(x)+1} &= \int \frac{2}{(y^2+1)\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}+1\right)}\,dy \\ &= \int dy \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}.\end{aligned}$$

方法 7：有理函數乘以指數函數

$$\int \frac{Ne^P}{D}$$

其中 D, N, P 是多項式且 D 與 N 互質。根據劉維爾定理，若此積分能以有限項表達，則必存在有理函數 A 使得

$$Ae^P = \int \frac{Ne^P}{D}.$$

標準作業程序 I

設 N 的領導項為 c_1x^m，其中 $m \in \mathbb{N}_0$。即

$$N = c_1x^{m_1} + S_1$$

其中 $c_1 \neq 0$ 且多項式 S_1 滿足 $\deg(S_1) < m$。則設有理函數 A_1 與 B_1 使得

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{c_1x^{m_1}}{DP'} \\ (A_1 + B_1)\,\mathrm{e}^P &= \int \frac{N\mathrm{e}^P}{D}. \end{aligned} \tag{2}$$

標準作業程序 II

根據(2)式，我們有

$$B_1P' + B_1' = \frac{N}{D} - A_1P' - A_1' = \frac{Q_1 + R_1}{D}.$$

其中 Q_1 為多項式，R_1 為真分式。若 $Q_{k-1} \neq 0$ 則設 Q_{k-1} 的領導項為 $c_k x^{m_k}$，並設有理函數 A_k 與 B_k 使得

$$A_k = \frac{c_k x^{m_k}}{DP'}$$

$$(A_k + B_k)\, e^P = \int \frac{N_k e^P}{D}$$

其中 $N_k = Q_{k-1} + R_{k-1}$。重複以上算法到 $Q_n = 0$ 為止。

標準作業程序 III

設 $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$。

$$
\begin{aligned}
\frac{N}{D} &= P'A + A' + \frac{R_n}{D} \\
\frac{Ne^P}{D} &= P'Ae^P + A'e^P + \frac{R_n e^P}{D} \\
&= \left(Ae^P\right)' + \frac{R_n e^P}{D} \\
\int \frac{Ne^P}{D} &= Ae^P + \int \frac{R_n e^P}{D}
\end{aligned}
$$

其中 $\int \frac{R_n e^P}{D}$ 必無法以有限項表達。

$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$，第 1 步

已知 $P' = 1$ 且 $D = (x+1)^2$。

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x}{D} \\ A_1' &= \frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ B_1 P' + B_1' &= \frac{1+R_1}{D} \\ R_1 &= -\frac{2}{x+1}. \end{aligned}$$

$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$，第 2 步

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{D} \\
A_2' &= -\frac{2}{(x+1)^3} = \frac{R_1}{D} \\
B_2 P' + B_2' &= 0.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 = \frac{1}{x+1} \\
\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx &= \frac{e^x}{x+1}.
\end{aligned}
$$

$\int \frac{\left(2x^6+5x^4+x^3+4x^2+1\right)e^{x^2}}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$，第 1 步

已知 $P' = 2x$ 且 $D = \left(x^2+1\right)^2$。

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2x^6}{DP'} = \frac{x^5}{D} \\
A_1' &= \frac{5x^4}{\left(x^2+1\right)^2} - \frac{4x^6}{\left(x^2+1\right)^3} \\
B_1 P' + B_1' &= \frac{4x^4+x^3+5+R_1}{D} \\
R_1 &= -\frac{4}{x^2+1}.
\end{aligned}
$$

$\int \frac{(2x^6+5x^4+x^3+4x^2+1)\,e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$，第 2 步

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{4x^4}{DP'} = \frac{2x^3}{D} \\
A_2' &= \frac{6x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{8x^4}{(x^2+1)^3} \\
B_2P' + B_2' &= \frac{x^3+2x^2-3+R_2}{D} \\
R_2 &= \frac{4}{x^2+1}.
\end{aligned}
$$

$\int \frac{\left(2x^6+5x^4+x^3+4x^2+1\right)e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$，第 3 步

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \frac{x^3}{DP'} = \frac{x^2}{2D} \\
A_3' &= \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x^3}{(x^2+1)^3} \\
B_3P' + B_3' &= \frac{2x^2+x-3+R_3}{D} \\
R_3 &= \frac{4-2x}{x^2+1}.
\end{aligned}
$$

$\int \frac{\left(2x^6+5x^4+x^3+4x^2+1\right)e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$，第 4 步

$$
\begin{aligned}
A_4 &= \frac{2x^2}{DP'} = \frac{x}{D} \\
A_4' &= \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{4x^2}{(x^2+1)^3} \\
B_4P' + B_4' &= \frac{x+R_4}{D} \\
R_4 &= -\frac{2x}{x^2+1}.
\end{aligned}
$$

$\int \frac{\left(2x^6+5x^4+x^3+4x^2+1\right)e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$，第 5 步

$$
\begin{aligned}
A_5 &= \frac{x}{DP'} = \frac{1}{2D} \\
A_5' &= -\frac{2x}{(x^2+1)^3} \\
B_5 P' + B_5' &= 0.
\end{aligned}
$$

因此

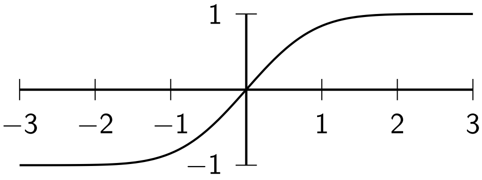
$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{5} A_k = \frac{1}{x+1} \\
\int \frac{Ne^P}{D} &= \frac{2x^5+4x^3+x^2+2x+1}{2D} = \frac{2x^3+2x+1}{2x^2+2}.
\end{aligned}
$$

誤差函數

Definition

誤差函數是一個非初等函數。它的定義如下：

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$



常態分佈

Definition

若隨機變數 X 服從期望值為 μ、標準差為 σ 的機率分佈，記作

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

則其機率密度函數為

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

常態分佈的累積分佈函數

Theorem

常態分佈的累積分佈函數為

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

Proof.

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dt\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right).\end{aligned}$$

□

$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Proof.

設 $J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$，顯然 $J > 0$。

$$J^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

設 r 與 θ 使得 $x = r\cos\theta$ 且 $y = r\sin\theta$，即極座標。積分範圍為第一象限。積分單位由 $dx\,dy$ 轉為 $r\,dr\,d\theta$。

$$J^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty re^{-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

方法 8：有理函數的積分

詳見《有理函數的積分》

方法 9：有理函數乘以對數或反三角函數

$$\int f'(x)\,\mathrm{op}(g(x))\,dx$$

其中 f, f' 與 g 均為有理函數，op 為對數或反三角函數。則設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$ 再進行分部積分，即

$$\int \mathrm{op}(v)\,du = u\,\mathrm{op}(v) - \int u\,\mathrm{op}'(v)\,dv.$$

$\int f(x)\ln|g(x)|\,dx$

Solution

設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$。

$$\begin{aligned}\int \ln|v|\,du &= u\ln|v| - \int \frac{u}{v}\,dv\\ &= f(x)\ln|g(x)| - \int \frac{f(x)\,g'(x)}{g(x)}\,dx.\end{aligned}$$

$\int f'(x) \arctan(g(x))\, dx$

Solution

設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$。

$$\begin{aligned}\int \arctan(v)\, du &= u \arctan(v) - \int \frac{u}{v^2+1}\, dv \\ &= f(x) \arctan(g(x)) - \int \frac{f(x)\, g'(x)}{g(x)^2+1}\, dx.\end{aligned}$$

$\int f(x)\arcsin(g(x))\,dx$

Solution

設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$。

$$\int \arcsin(v)\,du = u\arcsin(v) - \int \frac{u}{\sqrt{1-v^2}}\,dv$$
$$= f(x)\arcsin(g(x)) - \int \frac{f(x)\,g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,dx.$$

$\int f'(x) \operatorname{arsinh}(g(x))\, dx$

Solution

設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$。

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arsinh}(v)\, du &= u \operatorname{arsinh}(v) - \int \frac{u}{\sqrt{v^2+1}}\, dv \\ &= f(x) \operatorname{arsinh}(g(x)) - \int \frac{f(x)\, g'(x)}{\sqrt{g(x)^2+1}}\, dx.\end{aligned}$$

$\int 2x \ln|x| \, dx$

Solution

$$\int 2x \ln|x| \, dx = x^2 \ln|x| - \int x \, dx$$
$$= x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{2}.$$

$\int x^2 \arcsin(x)\, dx$

Solution

$$\begin{aligned}\int x^2 \arcsin(x)\, dx &= \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{\sqrt{1-x^2}\,(x^2+2)}{9}.\end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln\left|x^2+2x\right|}{x^2+2x+1}\,dx$$

Solution

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = -\frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln\left|x^2+2x\right|}{x^2+2x+1}\,dx &= -\frac{\ln\left|x^2+2x\right|}{x+1} + \int \frac{2x+2}{(x+1)\left(x^2+2x\right)}\,dx \\
&= -\frac{\ln\left|x^2+2x\right|}{x+1} + \int \frac{2}{x^2+2x}\,dx \\
&= -\frac{\ln\left|x^2+2x\right|}{x+1} - \ln|x+2| + \ln|x|.
\end{aligned}$$

方法 10：有理函數乘以對數函數的初等表達式

當被積函數是有理函數 f 乘以 $\mathrm{Elem}(\log_c(ax+b))$，則設

$$y = \log_c(ax+b).$$

此時

$$\int f(x)\,\mathrm{Elem}(\log_c(ax+b))\,dx = \int \frac{\ln(c)\,c^y f(z)\,\mathrm{Elem}(y)}{b}\,dy$$

其中 $z = \dfrac{c^y - a}{b}$。通常這樣能把問題丟給方法 7 或階段 3。

方法 11：展開被積函數

當以上方法都無效時，不妨試試把被積函數乘開。

Example

$$
\begin{aligned}
x(\sin(x)+\cos(x)) &= x\sin(x)+x\cos(x)\\
\frac{e^x+x}{e^x} &= xe^{-x}+1\\
x(e^x+1)^2 &= xe^{2x}+2xe^x+x.
\end{aligned}
$$

採用分部積分的時機

- 多項式乘以指數函數
- 多項式乘以 sin 或 cos
- 指數函數乘以 sin 或 cos
- 多項式乘以指數函數乘以 sin 或 cos。

表格解法

Theorem

- 初始時，取易微分的部份為 u，剩下的部份為 dv，並找出 $v = \int dv$。
- 取下一個 u 為 u'，v 為 $-\int v\,dx$，直到 u 為常數。
- 答案為 $\sum uv$。

Remark

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = \int v\,du.$$

多項式乘以指數函數

- 遇 cosh 與 sinh 都化為指數函數。
- 若指數函數的參數為 $ax+b$，則將 b 提出為常數。
- 分部積分時，取多項式為 u。

$\int x^3 e^{ax}\, dx$

Solution

u	v
x^3	e^{ax}/a
$3x^2$	$-e^{ax}/a^2$
$6x$	e^{ax}/a^3
6	$-e^{ax}/a^4$

$$\int x^3 e^{ax} dx = \frac{\left(a^3x^3 - 3a^2x^2 + 6ax - 6\right) e^{ax}}{a^4}.$$

多項式乘以 sin 或 cos

- 遇三角函數的乘積，一律採取積化和差，否則三角函數可能會越積越大串。
- 若三角函數的參數為 $ax+b$，則設新變數 $y=ax+b$。
- 分部積分時，取多項式為 u。

$\int x^2 \cos(x)\, dx$

Solution

設 $u = x^2$ 與 $v = \sin(x)$。

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du = x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x)\, dx.$$

設 $u = 2x$ 與 $v = \cos(x)$。

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du = 2x \cos(x) - \int 2 \cos(x)\, dx.$$

所以

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x).$$

$\int x^2 \cos(x)\, dx$，表格解法

Solution

u	v
x^2	$\sin(x)$
$2x$	$\cos(x)$
2	$-\sin(x)$

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = (x^2 - 2)\sin(x) + 2x\cos(x).$$

$\int x^2 \cos(3x)\, dx$

Solution

設 $y = 3x$。

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(3x)\, dx &= \int \frac{y^2 \cos(y)}{27}\, dy \\ &= \frac{\left(y^2 - 2\right)\sin(y) + 2y\cos(y)}{27} \\ &= \frac{\left(9x^2 - 2\right)\sin(3x) + 6x\cos(3x)}{27}.\end{aligned}$$

$\int x^2 \cos(x) \sin(x)^2 dx$

Solution

$$\begin{aligned}
&\int x^2 \cos(x) \sin(x)^2 dx \\
&= \int \frac{x^2 \cos(x) - x^2 \cos(3x)}{4} dx \\
&= \frac{(x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x)}{4} \\
&\quad - \frac{(9x^2 - 2) \sin(3x) + 6x \cos(3x)}{108}.
\end{aligned}$$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(3x)\, dx$，頁 I

設 $y = 3x$。

$$\int x^2 \sin(3x)\, dx = \int \frac{y^2 \sin(y)}{27}\, dy.$$

u	v
y^2	$-\cos(y)$
$2y$	$\sin(y)$
2	$\cos(y)$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(3x)\, dx$，頁 II

$$\int \frac{y^2 \sin(y)}{27}\, dy = \frac{2y\sin(y) + \left(2 - y^2\right)\cos(y)}{27}$$

$$= \frac{6x\sin(3x) + \left(2 - 9x^2\right)\cos(3x)}{27}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(3x)\, dx = \frac{9\sqrt{2}\pi^2 + 3\cdot 2^{7/2}\pi - 2^{11/2}}{864} - \frac{\pi}{27}$$

$$\approx 0.1000728555380578281.$$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^4 \cos(2x)\, dx$，頁 I

設 $y = 2x$。

$$\int x^4 \cos(2x)\, dx = \int \frac{y^4 \cos(y)}{64}\, dy.$$

u	v
y^4	$\sin(y)$
$4y^3$	$\cos(y)$
$12y^2$	$-\sin(y)$
$24y$	$-\cos(y)$
24	$\sin(y)$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^4 \cos(2x)\,dx$，頁 II

$$\int \frac{y^4\cos(y)}{64}\,dy$$
$$= \frac{\left(y^4-12y^2+24\right)\sin(y)+\left(4y^3-24y\right)\cos(y)}{64}$$
$$= \frac{\left(2x^4-6x^2+3\right)\sin(2x)+\left(4x^3-6x\right)\cos(2x)}{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^4\cos(2x)\,dx$$
$$= \frac{\pi^4-48\pi^2+384}{512}$$
$$-\frac{\sqrt{3}\pi^4+12\pi^3-4\cdot 3^{7/2}\pi^2-648\pi+8\cdot 3^{11/2}}{5184}$$
$$\approx 0.00997581789430911 8.$$

指數函數乘以 sin 或 cos

$$\int e^{cx}\,\mathrm{trig}(ax+b)\,dx$$

設 $u=\mathrm{trig}(ax+b)$ 與 $v=e^{cx}$，則原式變為

$$\int \frac{u}{c}\,dv.$$

Theorem

$$\int e^{cx}\cos(ax+b)\,dx=\frac{e^{cx}\left(a\sin(ax+b)+c\cos(ax+b)\right)}{c^2+a^2}$$

$$\int e^{cx}\sin(ax+b)\,dx=\frac{e^{cx}\left(c\sin(ax+b)-a\cos(ax+b)\right)}{c^2+a^2}.$$

$\int e^{cx}\cos(ax+b)\,dx$

Solution

設 $\theta = ax + b$。

$$\int e^{cx}\cos(\theta)\,dx = \frac{e^{cx}\cos(\theta)}{c} + \int \frac{ae^{cx}\sin(\theta)}{c}\,dx$$
$$\int e^{cx}\sin(\theta)\,dx = \frac{e^{cx}\sin(\theta)}{c} - \int \frac{ae^{cx}\cos(\theta)}{c}\,dx.$$

$$\begin{aligned}&\int e^{cx}\cos(\theta)\,dx\\ &= \frac{e^{cx}(a\sin(\theta)+c\cos(\theta))}{c^2} - \int \frac{a^2e^{cx}\cos(\theta)}{c^2}\,dx\\ &= \frac{e^{cx}(a\sin(\theta)+c\cos(\theta))}{c^2+a^2}.\end{aligned}$$

$\int e^{cx}\sin(ax+b)\,dx$

Solution

設 $\theta = ax+b$。

$$\int e^{cx}\sin(\theta)\,dx = \frac{e^{cx}\sin(\theta)}{c} - \int \frac{ae^{cx}\cos(\theta)}{c}\,dx$$
$$\int e^{cx}\cos(\theta)\,dx = \frac{e^{cx}\cos(\theta)}{c} + \int \frac{ae^{cx}\sin(\theta)}{c}\,dx.$$

$$\begin{aligned}&\int e^{cx}\sin(\theta)\,dx\\ &= \frac{e^{cx}(c\sin(\theta)-a\cos(\theta))}{c^2} - \int \frac{a^2e^{cx}\sin(\theta)}{c^2}\,dx\\ &= \frac{e^{cx}(c\sin(\theta)-a\cos(\theta))}{c^2+a^2}.\end{aligned}$$

$\int e^{3x}\sin(2x)\,dx$

Solution

$$\int e^{3x}\sin(2x)\,dx = \frac{e^{3x}\sin(2x)}{3} - \int \frac{2e^{3x}\cos(2x)}{3}\,dx$$

$$\int e^{3x}\cos(2x)\,dx = \frac{e^{3x}\cos(2x)}{3} + \int \frac{2e^{3x}\sin(2x)}{3}\,dx.$$

$$\begin{aligned}&\int e^{3x}\sin(2x)\,dx\\ &= \frac{e^{3x}\left(3\sin(2x)-2\cos(2x)\right)}{9} - \int \frac{4e^{3x}\sin(2x)}{9}\,dx\\ &= \frac{e^{3x}\left(3\sin(2x)-2\cos(2x)\right)}{13}.\end{aligned}$$

多項式乘以指數函數乘以 sin 或 cos

- 基本上技巧同多項式乘以 sin 或 cos，也不適合用表格解法。
- 分部積分時，取多項式乘以 sin 或 cos 為 u。

$\int xe^x \cos(x)\, dx$

Solution

$$\int xe^x \cos(x)\, dx = xe^x \cos(x) - \int e^x(\cos(x) - x\sin(x))\, dx$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2}$$

$$\int xe^x \sin(x)\, dx = xe^x \sin(x) - \int e^x(\sin(x) + x\cos(x))\, dx$$

$$\int e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2}$$

$$\int xe^x \cos(x)\, dx = \frac{(x-1)\, e^x \sin(x) + xe^x \cos(x)}{2}.$$

Tanks for your attention!