微分的應用

極值、均值定理、求根演算法

何震邦 <jdh8.org>

2012 年 10 月 31 日

左導數與右導數

Definition

對於函數 $f(x)$，它在 c 處的右導數定義為

$$f'(c^+) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

而左導數定義為

$$f'(c^-) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

- 嘿，導數是極限！
- 導數存在，等價於左右導數存在且相等

絶對極值

Definition

函數 $f(x)$ 在區間 I 內有絶對極大值 $f(c)$

- c 在區間 I 中
- 對於所有 $x \in I$，$f(c) \geq f(x)$

Definition

函數 $f(x)$ 在區間 I 內有絶對極小值 $f(c)$

- c 在區間 I 中
- 對於所有 $x \in I$，$f(c) \leq f(x)$

- 絶對極值可以在不只一處出現，但只有一值

相對極值

Definition

$f(c)$ 為函數 f 的相對極大值

- 存在開區間 I，使得 $f(c)$ 在 I 中為絕對極大值

Definition

$f(c)$ 為函數 f 的相對極小值

- 存在開區間 I，使得 $f(c)$ 在 I 中為絕對極小值

- 聽起來很容易，但實際上不容易
  - 找找看 $f(x) = x$ 的相對極大值
- 可以不只一值

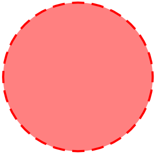
開集合

Definition

在開集合 I 內的任一點 $\mathbf{c}$，都存在正數 ϵ 使得

$$|\mathbf{x}-\mathbf{c}| < \epsilon \Rightarrow \mathbf{x} \in I$$

- $\{x : 2 < x < 5\}$ 是開區間
- $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ 是開集合
- $\varnothing$ 是開集合
- 任意個開集合的聯集仍是開集合
- 有限個開集合的交集仍是開集合

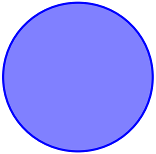


閉集合

Definition

開集合的補集是閉集合

- $\{x : 2 \leq x \leq 5\}$ 是閉區間
  - $\{x : x < 2\} \cup \{x : x > 5\}$ 是開區間的聯集，是開集合
- $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 是閉集合
  - $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$ 是開集合
- $\varnothing$ 是閉集合
- 有限個閉集合的聯集仍是閉集合
- 任意個閉集合的交集仍是閉集合



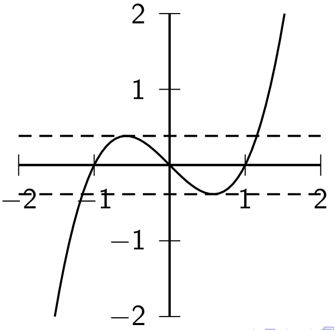
駐點

Definition

函數 f 的**駐點**，或稱**平穩點**，就是它的導數為零的點

$$f'(x) = 0$$

- 對 $y = f(x)$ 而言，駐點上的切線都平行於 x 軸



費馬駐點定理

Theorem

若 $f(c)$ 是相對極值，且 f 在 c 處可微，則

$$f'(c) = 0$$

- 相對極值必在不可微分點或駐點上
- 絕對極值必為相對極值或在端點上
- 駐點不一定是極值！

費馬駐點定理的證明

Proof.

若 f 在 c 處可微且具有相對極大值，則存在正數 δ 使得 $|x-c|<\delta \Rightarrow f(c) \geq f(x)$。因此

$$f'(c^+) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$
$$f'(c^-) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

因 $f'(c)$ 存在，故 $f'(c^+) = f'(c^-) = 0$，即 $f'(c) = 0$ $\square$

函數的遞增與遞減

Definition

若在區間 I 中任兩點 x_1 與 x_2，均有

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

則稱函數 f 在區間 I 遞增。特別地，若

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

則稱函數 f 在區間 I 嚴格遞增。

Definition

- 遞減函數的負值是遞增函數
- 嚴格嚴減函數的負值是嚴格遞增函數

凸集合

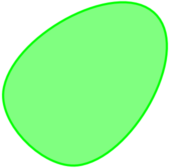
Definition

若對於集合 S 內任兩點 $\mathbf{x}$ 及 $\mathbf{y}$，均有

$$t \in [0, 1] \Rightarrow t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y} \in S$$

則 S 是一個凸集合

- 凸集合內任兩點連線上的點，都屬於這個凸集合
- 實數的凸集合是區間



凸函數與凹函數

Definition

考慮函數 $f : V \to \mathbb{R}$，其中 S 為一凸集合。若 f 是凸函數，即對於 S 中任意相異兩點 $\mathbf{x}_1$ 與 $\mathbf{x}_2$，均有

$$0 < t < 1 \Rightarrow f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) \le tf(\mathbf{x}_1) + (1-t)f(\mathbf{x}_2)$$

又若 f 是嚴格凸函數，即

$$0 < t < 1 \Rightarrow f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) < tf(\mathbf{x}_1) + (1-t)f(\mathbf{x}_2)$$

Definition

- 凹函數的負值是凸函數
- 嚴格凹函數的負值是嚴格凸函數

均值定理的用途

雖然均值定理本身看起來好像沒什麼鳥用，不過它可以推出很多有用的訊息

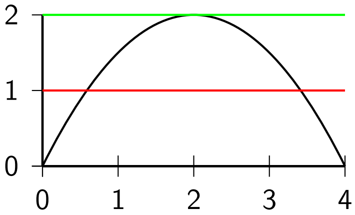
- 導函數相等的兩函數，相差一常數
- 羅必達法則
- 泰勒級數

羅爾定理

Theorem

考慮在區間 $[a, b]$ 上連續的實函數 f，其中 $f(a) = f(b)$。若在區間 (a, b) 中，f 的左導數與右導數均存在，則存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$f'(c^+)\,f'(c^-) \le 0$$



羅爾定理的證明

Proof.

- 若絶對極大值與絶對極小值都在端點上，則 f 是常數函數，原命題成立
- 設絶對極大值在 $c \in (a, b)$ 上

$$f'(c^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \le 0$$
$$f'(c^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \ge 0$$

- 若絶對極小值在 $c \in (a, b)$ 上，則 $-f$ 的絶對極大值在此

□

柯西均值定理

Theorem

若函數 f 和 g 在 $[a, b]$ 都連續，在 (a, b) 都可微，則存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$f'(c)\,(g(b) - g(a)) = g'(c)\,(f(b) - f(a))$$

- 若 $(g(b) - g(a)) \neq 0$ 且 $g'(c) \neq 0$，則有

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

柯西均值定理的證明

Proof.

1. 設 $h(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$
2. h 在 $[a, b]$ 連續，在 (a, b) 可微，且 $h(a) = h(b)$
3. 根據羅爾定理，存在 $c \in (a, b)$ 使得 $h'(c) = 0$。此時

$$h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

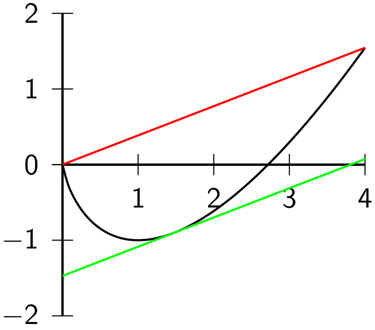
$\square$

均值定理

Theorem

若函數 f 在 $[a,b]$ 上連續，在 (a,b) 上可微，則存在 $c \in (a,b)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



導函數為 0 的函數是常數函數

Lemma

若 f 在區間 I 上所有點的導數均為 0，則 f 在此為常數函數

Proof.

1. 設 a, b 為 I 上任意相異兩點，其中 $a < b$，則 f 在區間 $[a, b]$ 上均有 $f'(x) = 0$，其中
2. 根據均值定理，存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0$$

$$f(b) - f(a) = 0$$

3. 因為 a, b 為 I 上任意相異兩點，所以 f 在 I 上是常數函數

遞增與遞減的區間 I

Theorem

設函數 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上連續，在 (α, β) 上可微

- 若對於所有 $x \in (\alpha, \beta)$，均有 $f'(x) > 0$，則 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上遞增
- 若對於所有 $x \in (\alpha, \beta)$，均有 $f'(x) < 0$，則 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上遞減

Proof.

遞增與遞減的區間 II

1. 設 a, b 為 I 上任意相異兩點，其中 $a < b$
2. 根據均值定理，存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$$

3. $b - a > 0$，所以 $f'(c)$ 與 $f(b) - f(a)$ 同號

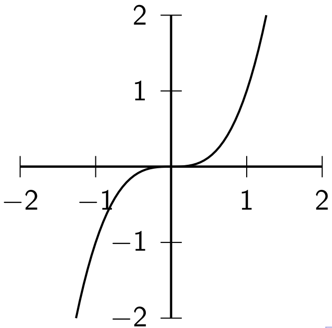
$\square$

一階導數測試

找到 $f'(c) = 0$ 的點後，要怎麼確定它是極值還是打醬油的？

Theorem

- 若 f' 在 c 的左側為正，右側為負，則 $f(c)$ 是極大值
- 若 f' 在 c 的左側為負，右側為正，則 $f(c)$ 是極小值
- 若 f' 在 c 的兩側同號，則 $(c, f(c))$ 是鞍點

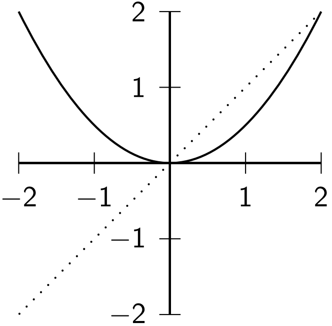


凹凸性與導函數的關係

Theorem

設 f 在開區間 I 上可微

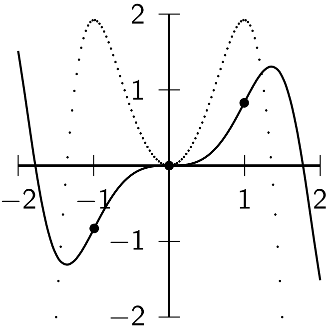
- 若 f' 在 I 中遞增，則 f' 在此為凸函數
- 若 f' 在 I 中遞減，則 f' 在此為凹函數



反曲點（inflection point）

Definition
若 f 在 c 上連續，且在此由凸轉凹，或由凹轉凸，則此處為反曲點

- 平穩的反曲點又稱為鞍點
- 反曲點的二階導數必不存在或為 0

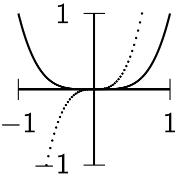


凹凸性的測試

既然凹凸性是要觀察 f' 的遞增或遞減，因此我們對 f' 進行一階導數測試

Theorem

- 若 $f''(c) > 0$ 則 f 凹口向上
- 若 $f''(c) < 0$ 則 f 凹口向下
- 若 $f''(c) = 0$
  - 若 f'' 在 c 的兩側異號，則 f 在此有反曲點
  - 若 f'' 在 c 的兩側皆正，則凹口仍向上
  - 若 f'' 在 c 的兩側皆負，則凹口仍向下



高階導數測試

如果題目要求找出反曲點，那麼你必定已經算好 f'' 了，不用實在可惜

Theorem

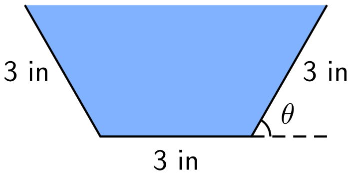
f 在區間 I 內足夠可微，其中一點 $c \in I$ 使得 $f'(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0$ 且 $f^{(n+1)}(c) \neq 0$

- 若 n 是奇數，則此處是極值
  - 若 $f^{(n+1)}(c) > 0$ 則 $f(c)$ 是極小值
  - 若 $f^{(n+1)}(c) < 0$ 則 $f(c)$ 是極大值
- 若 n 是偶數，則此處是鞍點
  - 若 $f^{(n+1)}(c) > 0$ 則此處嚴格遞增
  - 若 $f^{(n+1)}(c) > 0$ 則此處嚴格遞減

最佳化問題

Example

A rain gutter is made from sheets of metal 9 in wide. The gutters have a 3-in base and two 3-in sides, folded up at an angle θ (see figure). What angle θ maximizes the cross-sectional area of the gutter?



解題

Solution

設 $f(\theta)$ 為梯形面積

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= (3\sin\theta)\left(\frac{(3+6\cos\theta)+3}{2}\right) = (9\sin\theta)(1+\cos\theta) \\
f'(\theta) &= (9\cos\theta)(1+\cos\theta) + (9\sin\theta)(-\sin\theta) \\
&= 9\left(\cos^2\theta + \cos\theta - \sin^2\theta\right) = 9\left(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1\right) \\
f''(\theta) &= (-9\sin\theta)\left(4\cos\theta + 1\right)
\end{aligned}
$$

$$f'(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \ \vee \ \cos\theta = -1$$

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos(-1) = \pi \ \text{（不合）}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 \ \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{3}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Proof.

設 $f(\theta) := e^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

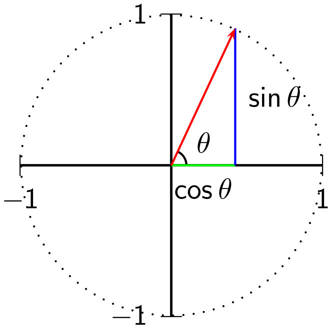
$$\begin{aligned}
f'(\theta) &= -ie^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) + e^{-i\theta}(-\sin\theta + i\cos\theta) \\
&= -ie^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) + ie^{-i\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= 0 \\
f(\theta) &= f(0) = 1 \\
e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

$\square$

唉呀，難怪複數的極式相乘，角度相加

以指數函數表達三角函數

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



羅必達法則（L'Hôpital's rule）

Theorem

若 $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$，則

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- 可以推論出若 $\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = 0$，則

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

羅必達法則 0/0 型

Proof.

1. 設 x 使得 $g(x) \neq 0$。根據柯西均值定理，在 c 與 x 間必存在 ξ 使得
$$f'(\xi)\,g(x) = f(x)\,g'(\xi)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
2. 因為 $\lim_{x\to c} x = \lim_{x\to c} c = c$，所以 $\lim_{x\to c} \xi = c$
$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\square$

羅必達法則 ∞/∞ 型

Proof.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)^2}{g(x)^2}\lim_{x\to c}\frac{1/f(x)}{1/g(x)} \\
&= \lim_{x\to c}\frac{f(x)^2}{g(x)^2}\lim_{x\to c}\frac{(1/f(x))'}{(1/g(x))'} \\
&= \lim_{x\to c}\frac{f(x)^2}{g(x)^2}\lim_{x\to c}\frac{f'(x)\,g(x)^2}{f(x)^2\,g'(x)} \\
&= \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}
\end{aligned}
$$

$\square$

泰勒級數

Definition

若實值或複值函數 $f(x)$ 在 c 的鄰域無窮可微，則

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)\,(x-c)^n}{n!} \\ &= f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c)\,(x-c)^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

此式稱為 f 在 c 的泰勒級數

- 泰勒級數是與函數最接近的多項式

迭代法

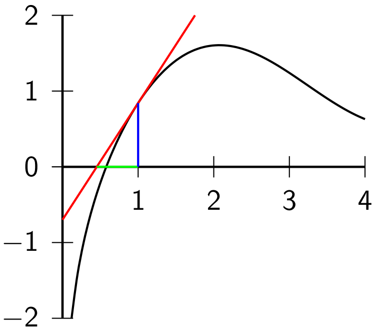
Definition

- 迭代法從初始估計值出發，尋找一系列的近似解
- 迭代法是用無窮數列 $(x_0, x_1, \ldots)$ 來逼近真確解 x
- 若 $\lim_{n \to \infty} x_n = x$，則稱此迭代法有效
- 有些方法不一定有效，使用時需要特別注意

牛頓法

Theorem

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



當代電算中的牛頓法

牛頓法是求超越方程的數值解的 SOP

$$f(x) := \ln x + \sin x$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{\ln x_n + \sin x_n}{\frac{1}{x_n} + \cos x_n}$$

x	$f(x)$	$f'(x)$
1	0.8414709848078965	1.540302305868140
0.4536975101562095	−0.3520326146900732	3.102944382444359
0.5671486621271506	−0.02990450470606842	2.606642358080185
0.5786210854971496	$-2.3743916394747266\ 10^{-4}$	2.565464264470342
0.5787136376200678	$-1.5133428177271924\ 10^{-8}$	2.565137253031151
0.5787136435197241	$-1.1102230246251 57\ 10^{-16}$	2.565137232188674
0.5787136435197241		

求解高次方程

Example

Use Newton's method to find the real root r of $f(x) = x^3 - x - 1$ to two decimal places, given the initial point $x_0 = 1.35$.

Solution

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1}$$

$$x_1 \approx 1.325$$
$$x_2 \approx 1.324$$
$$r \approx 1.32$$

手繪函數圖形

手繪圖形不需要函數的準確值，只需要近似值

1. 找定義域
2. 檢查對稱性
3. 求一階及二階導函數
4. 找臨界點和可能的反曲點
5. 定出函數的遞增、遞減區間
6. 找出所有的極值和反曲點
7. 找水平、垂直漸近線，並注意函數的極端行為
8. 求出截距

多項式的圖形 I

Example

Sketch the graph of $\dfrac{3x^5 - 20x^3 + 1}{32}$ and also mark the absolute extreme points and inflection points at interval $[-3, 3]$.

Solution

因為題目要求反曲點，所以要做到二階導函數。

$$f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3 + 1}{32}$$

$$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32}$$

$$f''(x) = \frac{15x^3 - 30x}{8}$$

多項式的圖形 II

1. 解導函數的零點，找到臨界點為

$$\left(-3, \frac{-47}{8}\right), \left(-2, \frac{65}{32}\right), \left(0, \frac{1}{32}\right), \left(2, \frac{-63}{32}\right), \left(3, \frac{95}{16}\right)$$

2. 解二階導函數的零點，找到可能的反曲點為 $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$

$$\left(-\sqrt{2}, \frac{7\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32}\right), \left(0, \frac{1}{32}\right), \left(\sqrt{2}, \frac{-7\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32}\right)$$

多項式的圖形 III

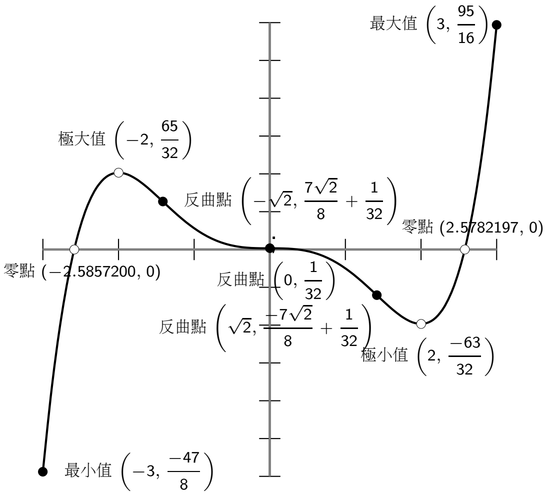
3. 如果時間允許，找 $f(x)=0$ 的根來美化圖形吧！

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{12x_n^5 - 40x^3 + 1}{15x_n^4 - 60x_n^2}$$

$$x_0 = 2.5 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{3375}{512} \approx 2.5878 \quad \Rightarrow x_2 \approx 2.5783$$

$$x_0 = -2.5 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{-974}{375} \approx -2.5973 \quad \Rightarrow x_2 \approx -2.5859$$

多項式的圖形 IV


最大值 $\left(3, \frac{95}{16}\right)$
極大值 $\left(-2, \frac{65}{32}\right)$
反曲點 $\left(-\sqrt{2}, \frac{7\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32}\right)$
零點 $(2.5782197, 0)$
零點 $(-2.5857200, 0)$
反曲點 $\left(0, \frac{1}{32}\right)$
反曲點 $\left(\sqrt{2}, \frac{-7\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{32}\right)$
極小值 $\left(2, \frac{-63}{32}\right)$
最小值 $\left(-3, \frac{-47}{8}\right)$

謝謝聆聽！

- 部落格
- 討論版
- 系列教材