Ćwiczenia z algorytmów wyliczania reguł decyzyjnych

March 24, 2025

Ćwiczenie 2 (1pkt)

Algorytmy wyliczania reguł decyzyjnych

Zadanie do wykonania

1. Czytamy teorię, analizujemy przykłady, w razie problemu ze zrozumieniem wyliczamy reguły na kartce.
2. Wczutyjemy plik SystemDecyzyjny.txt . Ostatni atrybut (kolumna) określa klasę próbki
3. Implementujemy algorytm w Python, wyliczając następujące reguły:
   - reguły wyczerpujące (exhaustive) metodą bazującą na macierzy nieodróżnialności (1pkt)

Teoria do ćwiczeń z przykładami

Sposoby zapisu deskryptora:

$$(a = a(v))$$

$$(a = v)$$

$$(a, a(v))$$

$$(a, v)$$

Znaczenie: $(a = a(v))$, atrybut a ma wartość v

System Informacyjny: $(U, A)U$ - zbiór obiektów;

A - zbiór atrybutów warunkowych;
Przykład: $(U, A), U = ob1, ob2, ob3, A = a1, a2, a3$

	a_1	a_2	a_3
ob_1	1	2	3
ob_2	3	2	5
ob_3	10	2	17

System Decyzyjny: $(U, A, d)U$ - zbiór obiektów;
A - zbiór atrybutów warunkowych;
d - atrybut decyzyjny
$d \notin A$
Przykład System decyzyjny zapisujemy jako (U, A, d), przyjmijmy,
$U = ob1, ob2, ob3$
$A = a1, a2, a3$
$d \in D = 1, 2$
Przykładowy system decyzyjny zgodny z opisem powyżej, może wygladać następująco,

	a_1	a_2	a_3	d
ob_1	7	2	3	1
ob_2	3	3	5	2
ob_3	10	45	4	1

Zdefiniujmy reguły decyzyjne wzajemnie niesprzeczne

$$(a_1 = 1) \implies (d = 1)$$

$$(a_1 = 2) \wedge (a_2 = 7) \implies (d = 1)$$

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w pracy}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{park})$$

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w domu}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{dom})$$

Reguły decyzyjne wzajemnie sprzeczne

$$(a_1 = 1) \implies (d = 1)$$

$$(a_1 = 1) \implies (d = 2)$$

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w pracy}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{park})$$

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w pracy}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{dom})$$

Reguła z alternatywną decyzją

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w pracy}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{park}) \vee (\text{decyzja} = \text{dom})$$

1 Reguły wyczerpujące (exhaustive) - z użyciem macierzy nieodróżnialności:

Reguły wyczerpujące to reguły decyzyjne, które w pełni pokrywają wszystkie przypadki w zbiorze danych, bez pomijania żadnych sytuacji. W kontekście macierzy nieodróżnialności, oznacza to znalezienie minimalnych reguł decyzyjnych, które pozwalają jednoznacznie przypisać decyzję na podstawie dostępnych atrybutów.

Przykład

Dany mamy system decyzyjny (U, A, d), gdzie U = o1, o2, .., o8, A = a1, a2, .., a6

d – atrybut decyzyjny

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	d
o_1	1	1	1	1	3	1	1
o_2	1	1	1	1	3	2	1
o_3	1	1	1	3	2	1	0
o_4	1	1	1	3	3	2	1
o_5	1	1	2	1	2	1	0
o_6	1	1	2	1	2	2	1
o_7	1	1	2	2	3	1	0
o_8	1	1	2	2	4	1	1

Tworzymy dla niego macierz nieodróżnialności $\mu_A = [c_{ij}]_{8\times 8}$, gdzie $i, j = 1, 2, ..., 8$.

Dla obiektów $x1, ..., x8$ zostawiamy w kolumnach tylko kratki o współrzędnych, które odpowiadają obiektom o innych decyzjach, gdzie

$$c_{ij} = \{a \in A : a(x_i) = a(x_j)\},$$

	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8
o_1			$a_1a_2a_3a_6$		$a_1a_2a_4a_6$		$a_1a_2a_5a_6$	
o_2			$a_1a_2a_3$		$a_1a_2a_4$		$a_1a_2a_5$	
o_3	$a_1a_2a_3a_6$	$a_1a_2a_3$		$a_1a_2a_3a_4$		$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_6$
o_4			$a_1a_2a_3a_4$		a_1a_2		$a_1a_2a_5$	
o_5	$a_1a_2a_4a_6$	$a_1a_2a_4$		a_1a_2		$a_1a_2a_3a_4a_5$		$a_1a_2a_3a_6$
o_6			$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_3a_4a_5$		$a_1a_2a_3$	
o_7	$a_1a_2a_5a_6$	$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_3$		$a_1a_2a_3a_4a_6$
o_8			$a_1a_2a_6$		$a_1a_2a_3a_6$		$a_1a_2a_3a_4a_6$	

Table 1: Macierz nieodróżnialności dla (U, A, d)

Komputerowi wystarczy tablica postaci:

	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7
o_1							
o_2							
o_3	$a_1a_2a_3a_6$	$a_1a_2a_3$					
o_4			$a_1a_2a_3a_4$				
o_5	$a_1a_2a_4a_6$	$a_1a_2a_4$		a_1a_2			
o_6			$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_3a_4a_5$		
o_7	$a_1a_2a_5a_6$	$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_3$	
o_8			$a_1a_2a_6$		$a_1a_2a_3a_6$		$a_1a_2a_3a_4a_6$

Table 2: Macierz nieodróżnialności trójkątna dla (U, A, d)

Wyliczania reguły za pomocą Tabeli 1. Rozważana Tabela, pozwala, na szybkie wyszukiwanie niesprzecznych reguł, wystarczy znaleźć deskryptor, lub grupę deskryptorów, które nie występują w danej kolumnie.

Zacznijmy od reguł I rzędu (rząd oznacza liczbę deskryptorów warunkowych, długość reguły):

dla o_2 mamy

$$(a_6 = 2) \implies (d = 1)$$

dla o_4 mamy

$$(a_6 = 2) \implies (d = 1)$$

dla o_6 mamy

$$(a_6 = 2) \implies (d = 1)$$

dla o_8 mamy

$$(a_5 = 4) \implies (d = 1)$$

pozostałe kolumny nie generują żadnej reguły.

Trzy pierwsze reguły zapisujemy jako regułę z supportem 3 (support oznacza liczbę obiektów systemu decyzyjnego do których pasuje reguła), czyli grupa reguł rzędu I jest postaci:

$$(a_6 = 2) \implies (d = 1)[3]$$

$$(a_5 = 4) \implies (d = 1)$$

W kolejnym etapie modyfikujemy Tabelę 1 , zaznaczając deskryptory, z których nie będziemy mogli zbudować reguł wyższych rzędów. (czyli deskryptory: $(a6 = 2), (a5 = 4)$) Otrzymujemy:

	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8
o_1			$a_1a_2a_3a_6$		$a_1a_2a_4a_6$		$a_1a_2a_5a_6$	
o_2			$a_1a_2a_3$		$a_1a_2a_4$		$a_1a_2a_5$	
o_3	$a_1a_2a_3a_6$	$a_1a_2a_3$		$a_1a_2a_3a_4$		$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_6$
o_4			$a_1a_2a_3a_4$		a_1a_2		$a_1a_2a_5$	
o_5	$a_1a_2a_4a_6$	$a_1a_2a_4$		a_1a_2		$a_1a_2a_3a_4a_5$		$a_1a_2a_3a_6$
o_6			$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_3a_4a_5$		$a_1a_2a_3$	
o_7	$a_1a_2a_5a_6$	$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_5$		$a_1a_2a_3$		$a_1a_2a_3a_4a_6$
o_8			$a_1a_2a_6$		$a_1a_2a_3a_6$		$a_1a_2a_3a_4a_6$	
		pomin a_6		pomin a_6		pomin a_6		pomin a_5

Table 3: Tabela 3

Teraz wybieramy reguły II rzędu, (szukamy kombinacji bez powtórzeń długości 2, które nie występują w danej kolumnie, pamiętając o pominięciu kombinacji zawierających reguły niższego rzędu)
z $o1$ mamy
$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)$
$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$
$(a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$

z o_2 mamy
$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)$
$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$
$(a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$

z o_3 mamy
$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 2) \implies (d = 0)$
$(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \implies (d = 0)$
$(a_4 = 3) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$
$(a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$
z o_4 mamy
$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$
$(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$

z o_5 mamy
$(a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$

z o_7 mamy
$(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$
$(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$

Teraz reguły identyczne zapisujemy jako pojedyncze z odpowiednim supportem, otrzymujemy reguły postaci:

$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)[2]$$

$$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)[3]$$

$$(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \implies (d = 0)[2]$$

$$(a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$

$$(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$

$$(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$

Następnie korzystając z Tabeli 3, wypisujemy kombinacje długości 3, które będą kandydatami na reguły:

z o_1 mamy

$$(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)$$
$$(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 1)$$
$$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 1)$$
$$(a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 1)$$

z o_2 mamy

$$(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)$$
$$(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$

z o_3 mamy

$$(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_1 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$
$$(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$

z o_4 mamy

$$(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$
$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$

z o_5 mamy

$$(a_1 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$
$$(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$
$$(a_4 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$

z o_7 mamy

$$(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$
$$(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$
$$(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$
$$(a_3 = 2) \wedge (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$
$$(a_3 = 2) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$
$$(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$

rozważane kombinacje na pewno nie są sprzeczne, stąd teraz eliminujemy, tych kandydatów, którzy zawierają reguły niższego rzędu: zaznaczmy podkreśleniem, zawieranie reguł niższego rzędu:
z o_1 mamy

$$\begin{gathered}
(a_1 = 1) \land (a_3 = 1) \land (a_4 = 1) \implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \land \underline{(a_4 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_4 = 1)} \implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_4 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1) \land (a_4 = 1)} \land (a_5 = 3) \implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1) \land (a_4 = 1)} \land (a_6 = 1) \implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1) \land (a_5 = 3)} \land (a_6 = 1) \implies (d = 1) \\
\underline{(a_4 = 1) \land (a_5 = 3)} \land (a_6 = 1) \implies (d = 1)
\end{gathered}$$

z o_2 mamy

$$\begin{gathered}
(a_1 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_4 = 1)} \implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \land \underline{(a_4 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_4 = 1)} \implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_4 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1) \land (a_4 = 1)} \land (a_5 = 3) \implies (d = 1)
\end{gathered}$$

z o_3 mamy

$$\begin{gathered}
(a_1 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_5 = 2)} \Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \land \underline{(a_4 = 3) \land (a_5 = 2)} \Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \land \underline{(a_4 = 3) \land (a_6 = 1)} \Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \land \underline{(a_5 = 2) \land (a_6 = 1)} \Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_5 = 2)} \Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_4 = 3) \land (a_5 = 2)} \Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_4 = 3) \land (a_6 = 1)} \Rightarrow (d = 0) \\
\underline{(a_2 = 1) \land (a_5 = 2)} \land (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\
\underline{(a_3 = 1)} \land (a_4 = 3) \land \underline{(a_5 = 2)} \Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 1) \land \underline{(a_4 = 3) \land (a_6 = 1)} \Rightarrow (d = 0) \\
\underline{(a_4 = 3)} \land (a_5 = 2) \land \underline{(a_6 = 1)} \Rightarrow (d = 0)
\end{gathered}$$

z o_4 mamy

$$\begin{gathered}
(a_1 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \land \underline{(a_4 = 3) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_3 = 1) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_4 = 3) \land (a_5 = 3)} \implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1)} \land (a_4 = 3) \land \underline{(a_5 = 3)} \implies (d = 1)
\end{gathered}$$

z o_5 mamy

$$\begin{gathered}
(a_1 = 1) \land \underline{(a_5 = 2) \land (a_6 = 1)} \implies (d = 0) \\
(a_2 = 1) \land \underline{(a_5 = 2) \land (a_6 = 1)} \implies (d = 0) \\
(a_3 = 2) \land (a_4 = 1) \land (a_6 = 1) \implies (d = 0) \quad \text{ta jest prawidłowa} \\
(a_3 = 2) \land \underline{(a_5 = 2) \land (a_6 = 1)} \implies (d = 0) \\
(a_4 = 1) \land \underline{(a_5 = 2) \land (a_6 = 1)} \implies (d = 0)
\end{gathered}$$

z o_7 mamy

$$
\begin{aligned}
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3)} &\implies (d = 0) \\
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3)} &\implies (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3)} &\implies (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3)} &\implies (d = 0) \\
\underline{(a_3 = 2)} \wedge (a_4 = 2) \wedge \underline{(a_5 = 3)} &\implies (d = 0) \\
(a_3 = 2) \wedge \underline{(a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1)} &\implies (d = 0) \\
(a_4 = 2) \wedge \underline{(a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1)} &\implies (d = 0)
\end{aligned}
$$

Mamy tylko jedną regułę trzeciego rzędu postaci,

$$(a_3 = 2) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$

Kolejne rzędy reguł wyliczamy analogicznie. W naszym przypadku nie ma potrzeby sprawdzać, czy istnieją reguły rzędu cztery, otrzymanie tylko jednej reguły rzędu III, może być tu warunkiem stopu. Ostatecznie nasz zbiór reguł exhaustive wyliczony zmodyfikowaną macierzą nieodróżnialności jest postaci:

I

$$
\begin{aligned}
(a_6 = 2) &\implies (d = 1)[3] \\
(a_5 = 4) &\implies (d = 1)
\end{aligned}
$$

II

$$
\begin{aligned}
(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1)[2] \\
(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1)[3] \\
(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1)[2] \\
(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) &\implies (d = 0) \\
(a_4 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0) \\
(a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0)[2] \\
(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\
(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0)
\end{aligned}
$$

III

$$(a_3 = 2) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$