JuMa-Seminar
Weitere Strategien in der Logik/Kombinatorik

Jürgen Doenhardt

Jugend trainiert Mathematik

Spielprobleme

Wir untersuchen 2-Personen-Spiele daraufhin, wer bei geschicktem Spiel gewinnen kann.

Dabei nehmen wir an, dass zwei Spieler[1], A und B, von einer definierten Ausgangsstellung abwechselnd ziehen. A beginnt. Ziehen ist Pflicht. Die Spielregeln legen neben den möglichen Zügen auch die Stellungen fest, bei denen das Spiel zu Ende ist, wobei immer ein Spieler gewinnt (es gibt kein Unentschieden).

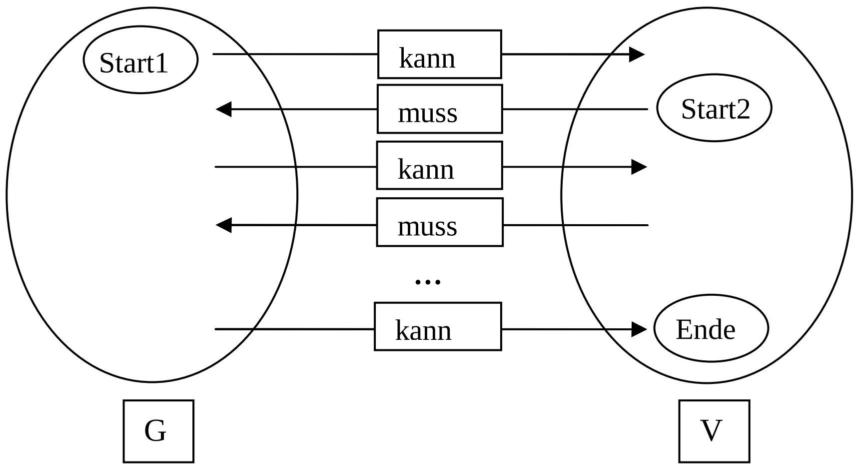
Ein Spiel heißt *endlich*, wenn es immer nach endlich vielen Zügen zu Ende ist (etwa weil eine Anzahl von Spielsteinen immer kleiner wird).

Es heißt *symmetrisch*, wenn jeder Spieler in jeder Stellung die gleichen Züge machen kann (so sind z. B. Spiele, bei denen ein Spieler weiße und der andere schwarze Steine zieht, nicht symmetrisch).

Wir betrachten hier nur symmetrische Spiele und (bis auf eine Ausnahme) endliche Spiele.

Eine Stellung ist für einen Spieler eine *Gewinnstellung*, wenn das Spiel unabhängig von den Zügen des Gegners immer gewonnen werden kann, entsprechend eine *Verluststellung*, wenn es bei geeigneten Zügen des Gegners immer verloren geht.

Allgemein bedeutet dies, dass ein Spieler in einer Gewinnstellung mit dem nächsten Zug den Gegner in eine Verluststellung bringen *kann* (es gibt einen Zug, der dies leistet), ein Spieler in einer Verluststellung jedoch mit dem nächsten Zug den Gegner in eine Gewinnstellung bringen *muss* (alle Züge haben diese Eigenschaft). Am Ende hat ein Spieler nach den Regeln des Spiels verloren (z.B. weil man nicht mehr ziehen kann).



Stellung "Start1" ist für den Spieler am Zug eine Gewinnstellung, Stellung "Start2" für den Spieler am Zug eine Verluststellung. Stellung "Ende" ist nach den Spielregeln verloren.

Unter einer *Gewinnstrategie* für einen Spieler verstehen wir ein Verfahren, das für jede Gewinnstellung einen Zug in eine Verluststellung angibt. Dazu gehört selbstverständlich auch ein Beweis, dass die erreichten Stellungen tatsächlich Verluststellungen sind, also nur Züge in Gewinnstellungen erlauben.

Bei endlichen Spielen reicht diese Überlegung aus. Wir werden aber auch ein Spiel untersuchen, das nach den Regeln nicht endlich sind, aber eine *endliche Gewinnstrategie* zulässt, d.h. es erweist sich bei bestmöglichem Spiel beider Spieler als endlich.

[1] Mit „Spieler" ist hier immer „Spieler oder Spielerin" gemeint, entsprechendes gilt für „Gegner".

Aufgabe Sp1

Auf einen kreisrunden Tisch werden Bierfilze gelegt. Keine zwei Filze dürfen sich überlappen; weiterhin darf kein Bierfilz über den Rand des Tisches herausragen. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Ist der leere Tisch für A eine Gewinnstellung oder eine Verluststellung?

Lösung:

Der leere Tisch ist für A eine Gewinnstellung; A legt einen Bierfilz genau in die Mitte. Anschließend ahmt A die Züge des Gegners nach, indem jeder eigene Bierfilz immer punktsymmetrisch zum letzten gegnerischen Filz (bezogen auf die Tischmitte) kommt.

Solche Nachahmungs-Strategien sind bei Spielen häufig, siehe auch folgende Aufgabe. ■

Aufgabe Sp2 (aus [1])

Ein Ring werde in $n \geq 3$ gleichgroße Sektoren zerlegt. Jeder Spieler belegt einen oder zwei benachbarte freie Sektoren mit je einem Spielstein. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert.

Ist der leere Ring für A eine Gewinnstellung oder eine Verluststellung?

Lösung:

Der leere Ring ist für A immer eine Verluststellung.

Bei geradem n legt B jeden Spielstein wie bei Aufgabe Sp1 immer punktsymmetrisch (bezogen auf den Mittelpunkt des Ringes) zu dem letzten Spielstein von A.

Bei ungeradem n beachte man, dass die Grenzlinie zwischen zwei Sektoren, über den Mittelpunkt des Ringes hinaus verlängert, einen "gegenüberliegenden" Sektor in der Mitte schneidet. Alle übrigen Sektoren (so vorhanden) bilden zwei zusammenhängende Bereiche, die achsensymmetrisch zu dieser verlängerten Grenzlinie liegen.

Setzt A im ersten Zug einen Spielstein, so setzt B zwei, setzt A jedoch zwei Spielsteine, so setzt B einen. B spielt so, dass danach zwei benachbarte Sektoren und der "gegenüberliegende" Sektor besetzt sind. Dadurch entstehen zwei Bereiche, die achsenymmetrisch liegen; B ahmt ggfs. die Züge von A unter Ausnutzung der Achsensymmetrie nach.

Aufgabe Sp4 (aus [1])

Gegeben ein Haufen mit N Steinen; jeder Spieler nimmt 1, 3 oder 8 Steine.
Für welche N ist der Haufen für A eine Verluststellung?

An Hand dieser Aufgabe wird ein heuristisches Lösungsverfahren vorgeführt, mit dem man zu Vermutungen über Verluststellungen kommen kann. Wir legen eine Liste für die ersten Stellungen an, die wir mit G für Gewinnstellung und V für Verluststellung markieren.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
V																						

Bei 0 tragen wir ein V ein (warum?), entsprechend obiger Definitionen tragen wir bei N

- ein G ein, wenn es einen Zug von N zu einer Stellung mit "V" gibt
- ein V ein, wenn es einen solchen Zug nicht gibt (man von N nur zu "G"s gelangt)

Wir tragen also bei 1 ein G ein, bei 2 ein V (es gibt nur den Zug nach 1), bei 3 ein G (Zug nach 2) usw. Damit erhalten wir die folgende Liste:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
V	G	V	G	V	G	V	G	G	G	G	V	G	V	G	V	G	V	G	G	G	G	V

Es sollte auffallen, dass ab der 0 sich die Folge VGVGVGVGGGG periodisch wiederholt. Dies führt zu der Vermutung, dass eine Verluststellung genau dann vorliegt, wenn N bei der Division durch 11 den Rest 0, 2, 4 oder 6 lässt.

Beweis: ähnlich wie bei Aufgabe Sp4: Induktion über N.

Die Aussage ist richtig für $N = 0$: $N = 0$ ist eine Verluststellung, und der Rest ist 0.

Sei die Aussage für alle Werte kleiner als $N > 0$ bewiesen.

Sei r der Rest bei Division von N durch 11: $N = 11k + r$ mit $k \geq 0$. Da sich bei einem Zug die Zahl der Steine verringert, gilt für die Stellung danach die Induktionsvoraussetzung.

a) Ist $r \in \{0,2,4,6\}$, so wird gezeigt: A muss in eine Gewinnstellung (für B) ziehen.
   Ist $r = 0$, so ist $k > 0$; die Zahl der Steine nach dem Zug von A ist $11(k-1)+10$, $11(k-1)+8$ oder $11(k-1)+3$. Dies sind Gewinnstellungen.
   Ist $r = 2$, so ist die Zahl der Steine nach dem Zug von A $11k+1$, $11(k-1)+10$ oder $11(k-1)+5$ (die zwei letzten Fälle sind bei $k = 0$ unmöglich), auch Gewinnstellungen.
   Ist $r = 4$, so ist die Zahl der Steine nach dem Zug von A $11k+3$, $11k+1$ oder $11(k-1)+7$ (der letzte Fall ist bei $k = 0$ unmöglich), auch Gewinnstellungen.
   Ist $r = 6$, so ist die Zahl der Steine nach dem Zug von A $11k+5$, $11k+3$ oder $11(k-1)+9$ (der letzte Fall ist bei $k = 0$ unmöglich), auch Gewinnstellungen.

b) Ist $r \notin \{0,2,4,6\}$, so wird gezeigt: A kann in eine Verluststellung (für B) ziehen.
   Bei $r \in \{1,3,5,7\}$ nimmt A einen Stein. Es bleiben $11k+0$, $11k+2$, $11k+4$ oder $11k+6$ Steine, jeweils Verluststellungen.
   Bei $r \in \{8,10\}$ nimmt A acht Steine. Es bleiben $11k+0$ oder $11k+2$, Steine, jeweils Verluststellungen.
   Bei $r = 9$ nimmt A drei Steine. Es bleiben $11k+6$ Steine, eine Verluststellung. . ■

Die ersten 44 Primzahlen

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79
83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137
139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193

Aufgabe Sp7 (aus [2])

Die Spieler A und B legt mindestens einen und höchstens n Spielsteine auf den Tisch. Nach jedem Zug muss die Zahl der Steine auf dem Tisch eine Primzahl sein. Verloren hat, wer nicht mehr ziehen kann. Ist der leere Tisch für Spieler A eine Gewinnstellung?

a) bei $n = 5$
b) bei $n = 10$

Lösung: Der leere Tisch ist in beiden Fällen eine Gewinnstellung für Spieler A.

a) Der Schlüssel zum Gewinn von A ist das erste Paar aufeinanderfolgender Primzahlen, die weiter als 5 auseinanderliegen: 23 und 29. A gewinnt, wenn A 23 Spielsteine auf dem Tisch herbeiführen kann. Man wird eine Liste mit Primzahlen anlegen (mit 0 für den leeren Tisch), diesmal absteigend, und wieder, mit “V” beginnend, diese füllen.

23	19	17	13	11	7	5	3	2	0
V	G	V	G	V	G	V	G	G	G

A gewinnt, wenn die Zahlen, die A erreicht (für B) Verluststellungen sind, A legt zuerst 5 Spielsteine auf den Tisch und führt nacheinander 11, 17, 23 Steine herbei.

b) Hier ist das erste Paar aufeinanderfolgender Primzahlen wichtig, die weiter als 10 auseinanderliegen: 113 und 127. A muss 113 Steine herbeiführen. Dies ergibt:

113	109	107	103	101	97	89	83	79	73	71	67	61	59	53
V	G	G	G	V	G	V	G	G	V	G	G	V	G	G

47	43	41	37	31	29	23	19	17	13	11	7	5	3	2	0
V	G	G	G	V	G	G	V	G	G	G	V	G	G	G	G

A gewinnt hier, indem A zuerst 7 Spielsteine auf den Tisch legt., weil A nacheinander 19, 31, 47, 61, 73, 89, 101 und 113 Steine (alle mit “V”) herbeiführen kann. . ■

Für beliebige Werte von n wird das Spiel immer zum Ende kommen, weil es für jedes noch so große n zwei aufeinanderfolgende Primzahlen gibt, die mehr als n auseinanderliegen. Der leere Tisch ist jedoch nicht für jedes n eine Gewinnstellung für A, neben $n = 2$ ist z. B. bei $n = 4$ und $n = 42$ der leere Tisch eine Verluststellung für A.

Aufgabe Sp8 (aus dem Bundeswettbewerb Mathematik)

Anja und Bernd nehmen abwechselnd Steine von einem Haufen mit anfangs n Spielsteinen $(n \geq 2)$. Anja beginnt und nimmt im ersten Zug wenigstens einen, aber nicht alle Steine weg.

Danach nimmt, wer am Zug ist, mindestens einen Stein, aber höchstens so viele Steine weg, wie im vorherigen Zug weggenommen wurden. Wer den letzten Stein wegnimmt, gewinnt.

Bei welchen Werten von n kann Anja den Gewinn erzwingen, bei welchen Bernd?

Lösung:

Hier ist eine Lösungssuche mit einer einfachen Tabelle nicht ausreichend, weil der erste Zug anders ist als die folgenden. Man kann mit einer zweidimensionalen Tabelle beginnen: (n, z): $n \geq 2$ Steine sind übrig, und $z \geq 1$ Steine dürfen noch gezogen werden. So oder anders wird man zu der folgenden Vermutung geführt, die man dann beweist.

Hilfssatz:

Die Verluststellungen sind alle Stellungen mit $m \cdot 2^k$ Steinen, $k, m \geq 1$, bei denen der Spieler am Zug nur noch weniger als 2^k Steine nehmen darf.

Beweis:

Angenommen, Anja ist in einer solchen Stellung. Zu zeigen ist, dass auf jeden ihrer Züge Bernd so ziehen kann, dass er direkt gewinnt oder Anja in eine solche Stellung mit weniger Steinen bringt.

Angenommen, Anja nimmt a Steine. Wähle l minimal so, dass $a < 2^l$ gilt, so gilt $1 \leq l \leq k$ und $a \geq 2^{l-1}$. Bernd nimmt nun $b = 2^l - a \leq 2^l - 2^{l-1} = 2^{l-1} \leq a$ Steine. Beide zusammen nehmen also $a + b = 2^l$ Steine, und Anja darf später nur noch weniger als 2^l Steine nehmen.

Bei $l = k$ sind $(m-1) \cdot 2^k$ Steine übrig, so dass Bernd bei $m = 1$ direkt gewonnen hat, bei $m > 1$ aber Anja in einer Stellung wie vorher ist, mit weniger Steinen und $m-1$ statt m.

Bei $l < k$ sind $m \cdot 2^k - 2^l = (m \cdot 2^{k-l} - 1) \cdot 2^l > 0$ Steine übrig, Anja ist also auch in einer Stellung wie vorher mit weniger Steinen ist, mit l statt k sowie $m \cdot 2^{k-l} - 1$ statt m. □

Nun wird die Lösung beendet.

Ist n eine Zweierpotenz, $n = 2^l$, so gilt $l \geq 1$. Anja ist in einer Verluststellung mit $m = 1$ und $k = l$, da sie nicht alle (2^l) Steine nehmen darf.

Ist n keine Zweierpotenz, so wähle l maximal mit $2^l < n$. So gilt $l \geq 1$ und $2^l < n < 2^{l+1}$. Anja nimmt $a = n - 2^l$ Steine. Übrig bleiben 2^l Steine. Bernd darf nur noch $b \leq n - 2^l < 2^{l+1} - 2^l = 2^l$ Steine nehmen, ist also in einer Verluststellung mit $m = 1$ und $k = l$. ■

Anmerkung: Im letzten Fall kann Anja auch 2^l Steine nehmen, um zu gewinnen. Beweis Übung.

Aufgabe Sp9 (siehe auch [3])

Das allgemeine NIM-Spiel: n Haufen von Spielsteinen sind gegeben. Ein Spieler am Zug darf beliebig viele Steine nehmen, aber nur von einem Haufen. Es muss mindestens ein Stein genommen werden. Wer den letzten Stein nimmt, gewinnt. Wie sehen die Verluststellungen für A aus

a) für $n = 2$?
b) für beliebiges n?

Lösung:

Ers werden gleich die Verluststellungen für beliebiges n bestimmt.. Man nehme die folgende Verknüpfung $\oplus$ auf den nichtnegativen ganzen Zahlen: Bilde von a, b die Binärdarstellung und addiere ohne Übertrag. So entsteht die Binärdarstellung von $a \oplus b$. Für alle a, b, c gilt

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c), \quad a \oplus b = b \oplus a, \quad a \oplus 0 = a, \quad a \oplus a = 0, \quad a \oplus b \neq 0 \text{ bei } a \neq b.$$

n Haufen mit $a_1, ..., a_n$ Steinen sind eine Verluststellung genau bei $a_1 \oplus ... \oplus a_n = 0$.

So erhält man für $n = 2$ eine Verluststellung genau bei gleichgroßen Haufen.

Bei $n = 3$ ist z. B. die Stellung $(6, 11, 13)$ eine Verluststellung.

Beweis:

Durch Induktion über die Anzahl aller Spielsteine: $N = a_1 + ... + a_n$

Die Aussage ist offenbar wahr für $N = 0$.

Sei nun $N > 0$ und die Aussage für alle Zahlen kleiner als N bewiesen.

Nimmt A in einer Stellung mit "Summe" Null (im Sinne der Verknüpfung $\oplus$) von Haufen k, so verringert A die Zahl der Steine von a_k auf b_k. Die "Summe" nach dem Zug

$$\begin{aligned} a_1 \oplus ... \oplus b_k \oplus ... \oplus a_n &= a_1 \oplus ... \oplus 0 \oplus b_k \oplus ... \oplus a_n = a_1 \oplus ... \oplus a_i \oplus (a_i \oplus b_k) \oplus ... \oplus a_n \\ &= (a_1 \oplus ... \oplus a_k \oplus ... \oplus a_n) \oplus (a_k \oplus b_k) \end{aligned}$$

ist von Null verschieden, denn es gilt $a_k \oplus b_k \neq 0$ wegen $a_k \neq b_k$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung ist dies eine Gewinnstellung (für B), die Ausgangsstellung also eine Verluststellung.

Ist jedoch in der Ausgangsstellung die "Summe" nicht Null, so kann A mit einem geschickten Zug die "Summe" Null herbeiführen.

Sei $a_1 \oplus ... \oplus a_n = d = \sum_{j=0}^{m} d_j 2^j \neq 0$, darin J der größte Index j mit $d_j = 1$.

Nach der Definition von $\oplus$ gibt es eine ungerade Anzahl von a_k, also mindestens eines, dessen Binärdarstellung an Stelle J eine 1 enthält. Die Binärdarstellung der Zahl $a_k \oplus d$ entsteht aus der von a_k durch Änderung von Ziffern, und zwar genau an den Stellen, an denen die Ziffer bei d eine 1 ist. Dadurch wird an Stelle J aus einer 1 eine 0, wodurch den Wert der Zahl um 2^J verkleinert wird. Die übrigen Änderungen können aber den Wert höchstens um $\sum_{j=0}^{J-1} 2^j = 2^J - 1$ vergrößern, so dass gilt $a_k \oplus d < a_k$. A verringert die Zahl der Steine auf Haufen k von a_k auf $a_k \oplus d$. Es ergibt sich nach diesem Zug die "Summe"

$$a_1 \oplus \ldots \oplus (a_k \oplus d) \oplus \ldots \oplus a_n = (a_1 \oplus \ldots \oplus a_k \oplus \ldots \oplus a_n) \oplus d = d \oplus d = 0.$$

Diese Stellung ist nach Induktionsvoraussetzung eine Verluststellung für B, also ist die Ausgangsstellung für A eine Gewinnstellung. . ■

Die folgende Tabelle zeigt diese Verknüpfung $\oplus$ für $0 \le a \le 15,\ 0 \le b \le 15$

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Frage:

In der Stellung $(6, 11, 13)$ entschließt sich A (am Zuge), von den 6 Steinen einen Stein zu nehmen. Wie sollte B antworten?

Literatur

[1] Arthur Engel, Problem-Solving Strategies, Springer, 1996

[2] Garten der Sphinx, Hugendubel, 1984

[3] Berlekamp/Conway/Guy, Gewinnen - Strategien für mathematische Spiele, Vieweg, 1985 (4 Bde.). Enthält eine umfangreiche Sammlung von Spielen, auch viele Anwendungen der "Nachahmungsstrategie" und der hier eingeführten Addition $\oplus$.

[4] Bundeswettbewerb Mathematik, Aufgaben und Lösungen