Jürgen Doenhardt

Die Kombinatorik als "Kunst des Zählens" (enumerative combinatorics)

Hier geht es um Fragestellungen der Form "Wieviele Möglichkeiten gibt es...?"

Variationen, Kombinationen, Permutationen, Binomialkoeffizienten.

Variationen: Auswahlen unter Beachtung der Reihenfolge.
Kombinationen: Auswahlen ohne Beachtung der Reihenfolge.

Variationen von k Elementen aus n mit Wiederholung: n^k.

Variationen von k Elementen aus n ohne Wiederholung: $n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Permutationen von n Elementen (Variationen ohne Wiederholungen mit $n = k$): $n!$.

Kombinationen von k Elementen aus n ohne Wiederholung: $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$.

Kombinationen von k Elementen aus n mit Wiederholung: $\dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!}$.

Die letzte Aussage, etwas schwieriger zu sehen, lässt sich auf die vorherige zurückführen

Betrachte eine sortierte Folge A aus k Zahlen aus $\{1,...,n\}$, wobei Wiederholungen möglich sind.
Erzeuge durch Einfügen von Trennern t eine Folge B, die wie folgt aussieht:

$$1...1\ t\ 2...2\ t\ \ ...\ t\ n...n.$$

Dabei steht $a...a$ für die Folge der Glieder von Wert a. Diese Teilfolgen können auch leer sein, so dass die Trenner auch aufeinander folgen und am Anfang oder Ende sein können.
Dadurch erhält man eine eineindeutige Abbildung (s. u.) der Folgen A auf die Folgen B.
Jede Folge B hat die Länge $n-k+1$ und enthält genau $n-1$ Trenner. Damit gibt es

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} \text{ Folgen } B.$$

■

Beispiel: 5 Elemente aus 8: Die Folgen B haben die Länge 12 und 7 Trenner.
Aus den Folgen A: $(1,2,3,5,8)$, $(1,2,2,3,4)$, $(4,5,6,7,8)$ und $(1,3,5,5,7)$ werden die Folgen B:
$(1,t,2,t,3,t,t,5,t,t,t,8)$, $(1,t,2,2,t,3,t,4,t,t,t,t)$, $(t,t,t,4,t,5,t,6,t,7,t,8)$ und $(1,t,t,3,t,t,5,5,t,t,7,t)$.

In den letzten Aussagen kommen die *Binomialkoeffizienten* $\dbinom{n}{k}$ ("n über k") vor. Sie treten in der binomischen Formel (Formel für $(a+b)^n$) auf. Im Englischen nennt man sie "n choose k" und schreibt bisweilen $n\ C\ k$, was als "from n choose k" zu verstehen ist.

Aufgabe K1
Deute die folgenden Gleichungen kombinatorisch:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\ \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1},\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k,\ (a+b+c)^n = \sum_{\substack{j,k,l\geq 0\\ j+k+l=n}} \frac{n!}{j!k!l!} a^j b^k c^l$$

In der Regel verlangt man $n \geq 0$ und $0 \leq n \leq k$. Bisweilen löst man sich von der Forderung $n \leq k$ und definiert $\binom{n}{k} = 0$ für $n < k$. Dann ist aber der Ausdruck $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ nicht definiert.

Aufgabe K2 (nach Pólya[*]) (Lösung im Anhang)

Wieviele Möglichkeiten gibt es, in der folgenden Grafik ABRACADABRA zu lesen?

```
          A
         B B
        R R R
       A A A A
      C C C C C
     A A A A A A
      D D D D D
       A A A A
        B B B
         R R
          A
```

Eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind die *Multinomialkoeffizienten*. Aus einer Menge von n Elementen werden nacheinander $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ Elemente ausgewählt, so dass n_k Elemente übrig bleiben. Die Reihenfolge der Auswahlen spielt eine Rolle, nicht aber die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Auswahl.

Dafür gibt es $\frac{n!}{n_1!\,n_2!...n_k!}$ Möglichkeiten.

Aufgabe K3 (Lösung im Anhang)

Wieviele Kartenverteilungen gibt es

a) beim Skat (3 Spieler, 32 Karten, 10 Karten pro Spieler, 2 im Skat)
b) beim Schafkopf (4 Spieler, 32 Karten, 8 Karten pro Spieler)

Aufgabe K4 (Lösung im Anhang)

An einem Bridge-Turnier nehmen $4n$ Spieler teil. Jeder Spieler braucht einen weiteren als Partner und für eine Runde ein weiteres Paar als Gegner. Zeige, dass es genau

$$\frac{(4n)!}{n! \cdot 8^n} = \frac{(4n)!}{n!(4!)^n} \cdot 3^n$$ Sitzverteilungen gibt.

Die Siebformel (Ein- und Ausschaltformel, Prinzip der Inklusion und Exklusion)

Bei dieser Formel geht es darum, die Größe der Vereinigung von Mengen aus den Größen der Mengen und aller Durchschnitte zu bestimmen:

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{1 \leq j<k \leq n} |A_j \cap A_k| + \sum_{1 \leq j<k<l \leq n} |A_j \cap A_k \cap A_l| - \sum_{1 \leq j<k<l<m \leq n} |A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m|$$
$$+ \ ... \ + (-1)^{n-1} |A_1 \cap ... \cap A_n|$$

[*] György Pólya (* 1885, † 1983), ungarischer Mathematiker

Man addiert die Größen aller Mengen, davon subtrahiert man die Größen aller Durchschnitte zweier Mengen, addiert die Größen der Durchschnitte von je drei Mengen, subtrahiert die Größen der Durchschnitte von je vier Mengen und so fort, bis zum Durchschnitt aller Mengen.

Beweis

Sei für ein beliebiges Element $e \in A_1 \cup ... \cup A_n$ die Anzahl der Mengen A_k, in denen es enthalten ist, gleich m. So gilt $1 \le m \le n$, und e ist

- für jedes k mit $1 \le k \le m$ in genau $\binom{m}{k}$ Durchschnitten von k Mengen enthalten,
- für jedes k mit $k > m$ in keinem Durchschnitt von k Mengen enthalten.

Zu der Summe rechts in der Siebformel trägt e damit

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k-1} = 1 - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k} = 1 - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 1^{m-k} (-1)^{k} = 1-(1-1)^{m},$$

also genau 1 bei. Damit ist diese Summe gleich $|A_1 \cup ... \cup A_n|$. ■

Aufgabe K5 (aus der Bundesrunde der Mathematik-Olympiade) (Lösung im Anhang)

Hennes bildet aus den Buchstaben H, E, N, N, E und S seines Vornamens sechsbuchstabige Wörter. In jedem Wort verwendet Hennes alle Buchstaben gemäß der Häufigkeit in seinem Vornamen. Die Wörter sollen weder das Teilwort HEN noch das Teilwort NES enthalten.

Bestimme die Anzahl der Teilwörter, die auf diese Weise gebildet werden können.

Hinweis: Wörter sind hier Aneinanderreihungen von Buchstaben ohne weitere Anforderungen wie sprachliche Bedeutung und Aussprechbarkeit. Z. B. ist $HNNSEE$ sin solches Wort. Teilwörter werden durch aufeinanderfolgende Buchstaben gebildet, so ist z. B. NNS ein Teilwort von $HNNSEE$, jedoch HNE nicht.

Einige Bemerkungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bei einem Experiment mit zufälligem Ausgang (*Zufallsexperiment*) fasst man die möglichen Ergebnisse in einer *Ergebnismenge* E zusammen, jede Teilmenge $T \subset E$ ist ein *Ereignis*. Die Elemente von T nennt man die “für das Ereignis günstigen Ergebnisse”.

Wenn die Ergebnismenge endlich ist und man annehmen kann, dass die Ergebnisse (eigentlich: die einelementigen Ereignisse) gleichwahrscheinlich sind (Laplace-Annahme*), so ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $T \subset E$:

$$p(T) = \frac{|T|}{|E|}, \qquad 0 \le p(T) \le 1.$$

Beispiel: Würfeln mit einem Sechserwürfel: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Für das Ereignis “Primzahl gewürfelt” ist $T = \{2,3,5\}$ und $p(T) = \frac{1}{2}$.

Die Berechnung von $|T|$ und $|E|$ ist eine kombinatorische Aufgabe. Dies macht die Kombinatorik wichtig für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

* Pierre-Simon Laplace (* 1749, † 1827), französischer Mathematiker, Physiker und Astronom.

Aufgabe K8

An einem Julklapp nehmen n Personen teil. Jede gibt ein Geschenk. Die Geschenke werden so verpackt, dass sie ununterscheidbar sind und beliebig ausgetauscht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person ihr Geschenk zurück erhält?

Lösung:

Analog zur vorherigen Aufgabe. Die Personen werden von 1 bis n nummeriert. So ist E die Menge aller Permutationen der n Personen, also $|E| = n!$. T_i $(1 \le i \le n)$ sei die Menge aller Permutationen, bei denen Person Nummer i ihr Geschenk zurück erhält. Die Menge der günstigen Ergebnisse ist $T = T_1 \cup ... \cup T_n$. Weiter gilt $|T_i| = (n-1)!$, allgemein gibt es für alle k $(1 \le k \le n)$ genau $\binom{n}{k}$ Durchschnitte von k dieser Mengen; jeder hat die Größe $(n-k)!$. Mit der Siebformel erhält man

$$p(T) = \frac{1}{n!} \cdot \left(n \cdot (n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! \; - + ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n} 0! \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

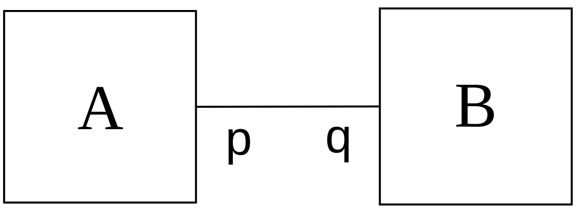
Hinweis aus der Analysis: $p(T)$ konvergiert schnell gegen $1 - e^{-1} \approx 0{,}632121$. ■

Das Prinzip der eineindeutigen bzw. (p,q) -deutigen Zuordnung*

Dieses Prinzip erlaubt die Berechnung der Größe einer Menge aus der einer anderen.
Gegeben sei eine Folge F von Paaren (a,b) mit $a \in A \wedge b \in B$, für die gilt

a) zu jedem Element $a \in A$ gibt es q Elemente $b \in B$ mit (a,b) in F,
b) zu jedem Element $b \in B$ gibt es p Elemente $a \in A$ mit (a,b) in F,

so hat F genau $q \cdot |A| = p \cdot |B|$ Glieder:



$$q \cdot |A| = p \cdot |B|$$

Als Beispiel wird $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$ (siehe Aufgabe K1) bewiesen.

Man bilde zu jeder $(k-1)$-elementigen Menge $M \subset \{1,...,n-1\}$ und zu jedem h, $1 \le h \le n$ eine k-elementige Menge $N \subset \{1,...,n\}$ nach folgender Regel:

* Der Begriff eineindeutig wird häufig im Sinne von injektiv gebraucht. Dabei muss nicht unbedingt jedes Element aus B einem aus A zugeordnet sein. Ist dies jedoch der Fall, so ist die Zuordnung surjektiv; gilt beides, so ist sie bijektiv. Hier ist mit eineindeutig immer bijektiv gemeint.

Erhöhe alle Elemente, die mindestens gleich h sind, um 1 und füge dann Element h ein.

Dadurch wird jede Menge M genau n Mengen N zugeordnet; umgekehrt entsteht jede Menge N genau k-mal aus einer Menge M (jedes Element ist einmal das eingefügte Element i), es gilt also $p = k$, $q = n$, $n \cdot \binom{n-1}{k-1} = k \cdot \binom{n}{k}$. Division liefert die Behauptung.

Für $n = 5$, $k = 3$ entsteht z. B. die folgende Tabelle. Die Einträge sind Elemente von N.

i/M	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{2,3}	{2,4}	{3,4}
1	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,2,5}	{1,3,4}	{1,3,5}	{1,4,5}
2	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,2,5}	{2,3,4}	{2,3,5}	{2,4,5}
3	{1,2,3}	{1,3,4}	{1,3,5}	{2,3,4}	{2,3,5}	{3,4,5}
4	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,4,5}	{2,3,4}	{2,4,5}	{3,4,5}
5	{1,2,5}	{1,3,5}	{1,4,5}	{2,3,5}	{2,4,5}	{3,4,5}

■

Ist $p = q = 1$, so spricht man von einer eineindeutigen Zuordnung.

Aufgabe K9 (Lösung im Anhang)

3 kann auf vier Möglichkeiten als Summe positiver ganzer Zahlen geschrieben werden, wenn es auf die Reihenfolge ankommt: $3 = 1+2 = 2+1 = 1+1+1$. Wieviele Möglichkeiten gibt es für allgemeines n?

Aufgabe K10

1000 lässt sich auf viele Arten als Summe von vier geraden oder vier ungeraden positiven ganzen Zahlen darstellen. Von welchen Darstellungen gibt es mehr?

Lösung (mit eineindeutiger Zuordnung)

Es gibt mehr Darstellungen mit ungeraden Summanden. Dazu werden die Darstellungen mit geraden Summanden zunächst auf solche mit ungeraden abgebildet:

$$(a,b,c,d) \quad \rightarrow \quad (a-1, b-1, c-1, d+3).$$

Die Darstellung rechts ist zulässig wegen $a \geq 2$, $b \geq 2$, $c \geq 2$ und $d \leq 994$. Darstellungen mit $d \leq 4$ (z. B. $1000 = 333+333+333+1$) kommen nicht als Bild dieser Abbildung vor

Die Behauptung gilt für den Fall, dass die Reihenfolge der Summanden eine Rolle spielt und für den Fall, dass sie nicht beachtet wird. In beiden Fällen kann man die Anzahl der Summen auch mit den eingangs erwähnten Anzahlen genau bestimmen; man benötigt aber einigen Rechenaufwand.

Aufgabe K11 (Lösung im Anhang)

Bestimme $\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k}$ als Produkt eines Polynoms und einer Zweierpotenz.

Hinweis: Man kann dies mit den gegebenen Gleichungen für Binomialkoeffizienten direkt nachrechnen. Aber hier soll es durch kombinatrische Überlegung gelöst werden. Dieser Ansatz bleibt bei Aufgaben, bei denen “Rechnen” zu kompliziert wird.

Bilde Sportvereine mit einem Vorsitzenden, einem Kassenwart und einem Zeugwart.

Jürgen Doenhardt

Zählen mit Rekursion

Aufgabe K12 (aus dem Bundeswettbewerb Mathematik)

Wieviele Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, 10\}$ haben die Eigenschaft, dass kein Element kleiner als der Größe der Menge ist? (Die leere Menge zählt mit.)

Lösung:

Man wird gleich allgemein vorgehen: Sei T_n die gesuchte Anzahl Teilmengen. Durch Probieren erhält man $T_1 = 2$ $(\{\},\{1\})$, $T_2 = 3$ $(\{\},\{1\},\{2\})$, $T_3 = 5$ $(\{\},\{1\},\{2\},\{3\},\{2,3\})$, $T_4 = 8$ $(\{\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\})$.

Man wird zu der Vermutung $T_n = f_{n+2}$ geführt, wobei f_n die **Fibonacci-Folge** ist : $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$. Mit den Anfangswerten $T_1 = 2 = f_3$ und $T_2 = 3 = f_4$ ist nur noch $T_{n+1} = T_n + T_{n-1}$ für $n \geq 2$ zu beweisen. Die T_{n+1} Teilmengen von $\{1, \ldots, n+1\}$ werden wie folgt aufgeteilt:

a) Mengen, die die Zahl $n+1$ nicht enthalten, davon gibt es T_n.
b) Mengen, die die Zahl $n+1$ enthalten. Dies ist einerseits die Menge $\{n+1\}$, andererseits Mengen, die mindestens zweielementig sind und somit nicht die 1 enthalten. In jeder Menge entferne Element $n+1$ und verringere die anderen Elemente um 1. Dies liefert eine eineindeutige Zuordnung auf die T_{n-1} Teilmengen von $\{1, \ldots, n-1\}$.

Man erhält $T_5 = 13$, $T_6 = 21$, $T_7 = 34$, $T_8 = 55$, $T_9 = 89$, $T_{10} = 144$. ■

Das Schubfachprinzip

Mit dem Schubfachprinzip betreten wir ein anderes Teilgebiet der Kombinatorik (existential combinatorics). Hier geht es weniger um Zählen, als um Nachweis von Existenz.

Das Schubfachprinzip nach Dirichlet[*] , im Englischen “pidgeon hole principle” oder “box principle” genannt, beruht auf folgender einfacher Überlegung:

Werden $nk+1$ Perlen auf n Schubfächer verteilt (n, k positive ganze Zahlen), so enthält (wenigstens) ein Schubfach mehr als k Perlen.

Das Problem besteht in der Praxis weniger in der Anwendung des Prinzips selbst, sondern mehr im Auffinden der “Schubfächer” und “Perlen”.

Aufgabe S1 (nach Erdős[†]) (Lösung im Anhang)

Zeige: Unter $n+1$ positiven ganzen Zahlen $\leq 2n$ gibt es zwei teilerfremde.

Aufgabe S2 (nach Erdős) (Lösung im Anhang)

Zeige: Unter $n+1$ positiven ganzen Zahlen $\leq 2n$ gibt es zwei, so dass eine Teiler der anderen ist.

Frage: Bleiben die Aussagen in S2 bzw. S3 richtig, wenn man $n+1$ durch n ersetzt?

Zwei Beispiele aus der Geometrie

Aufgabe S4 (Lösung im Anhang)

In einem Quadrat der Seitenlänge 7 sind 51 Punkte markiert. Zeige, dass es drei Punkte gibt, die im Inneren eines Kreises vom Radius 1 liegen.

---

[*] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (* 1805, † 1859), deutscher Mathematiker

[†] Pál Erdős (* 1913, † 1996), ungarischer Mathematiker

Jürgen Doenhardt

Aufgabe S5 (aus einer britischen Mathematik-Olympiade, Lösung im Anhang)

In einem Würfel der Kantenlänge 15 sind 11000 Punkte markiert. Zeige, dass es sechs Punkte gibt, die im Inneren einer Kugel vom Radius 1 liegen.

Eine weitere Anwendung des Schubfachprinzips ist die *Ramsey-Theorie*. Dabei geht es um Färbungen in Graphen. Dieses Thema wird hier nur kurz behandelt, mehr findet man in [1]. Beispiele für solche "Ramsey-Aufgaben" sind die folgenden.

Aufgabe S7

Zeige: Unter sechs Schülern[*] gibt es drei, von denen jeder jeden kennt oder drei, von denen keiner einen anderen kennt. (dabei beruht "Kenntnis" auf Gegenseitigkeit).

Lösung:

Betrachte ein regelmäßiges Sechseck in der Ebene mit allen Seiten und Diagonalen ("Kanten"). Die Schüler sind die Ecken. Färbe eine Kante grün, wenn sich die Schüler an den Enden kennen, sonst rot. So entspechen grüne Dreiecke drei Schülern, von denen jeder jeden kennt, rote Dreieche drei Schülern, von denen keiner einen anderen kennt. Zu zeigen ist also, dass es ein einfarbiges (rotes oder grünes) Dreieck gibt.

Betrachte eine Ecke A. Es gehen fünf Kanten in zwei Farben aus. D. h. eine Farbe kommt mindestens dreimal vor. Sei diese o. B. d. A. rot (ansonsten tausche überall rot und grün). Die Endknoten seien B, C, D. So ist entweder eine Kante im Dreieck BCD rot, womit es ein rotes Dreieck mit A gibt, oder das Dreieck BCD ist grün.

Aufgabe S8

Zeige, dass dieAussage in S6 bei fünf Schülern nicht immer gilt.

Lösung:

In diesem Falle bilden die Schüler ein regelmäßiges Fünfeck, Färbe die Seiten rot, die Diagonalen grün. Ein Dreieck kann nicht aus drei Seiten oder drei Diagonalen bestehen, damit gibt es kein einfarbiges Dreieck. ■

Aufgabe S9

Zeige: Werden in einem regelmäßigen 17 -Eck alle Seiten und Diagonalen mit drei Farben gefärbt, so gibt es ein einfarbiges Dreieck.

Lösung

Betrachte einen beliebige Ecke A. Von ihr gehen 16 Seiten bzw. Diagonalen ("Kanten") aus. Bei drei Farben kommt eine Farbe f mindestens sechsmal vor, die Ecken bilden ein Sechseck $BCDEFG$ .Ist eine Kante in diesem Sechseck mit f gefärbt, so gibt es mit A ein in f gefärbtes Dreieck. Ansonsten sind die Kanten des Sechsecks mit zwei Farben gefärbt; unter Anwendung von S7 erhält man in ihm ein einfarbiges Dreieck. ■

[*] Auch hier gilt: Mit „Schüler" sind „Schüler oder Schülerinnen" gemeint.

Anhang

Lösungen der Aufgaben und Anmerkungen

K1: $\binom{10}{5} = 252$.

K3: Skat: $\frac{32!}{(10!)^3 \cdot 2!}$, Schafkopf: $\frac{32!}{(8!)^4}$

K4: Es gibt $\frac{(4n)!}{(4!)^n}$ Möglichkeiten, die Spieler an n Tische zu setzen, wenn es auf die Reihenfolge der Tische ankommt. Da die Tischreihenfolge keine Rolle spielt, erhält man $\frac{(4n)!}{(4!)^n \cdot n!}$ Bridge-Runden (4 Spieler). In jeder gibt es drei Aufteilungen in zwei Paare. Anmerkung: Spielt die genaue Platzierung in den Runden eine Rolle, ergibt sich $\frac{(4n)!}{n!}$.

K5: 136 mit Siebformel.

Hier betrachte man, um eine Vereinigung zu erhalten, die Negation: HEN kommt vor (Menge A) oder NES kommt vor (Menge B). Die Wörter aus A haben die Gestalt $HENxyz$, $xHENyz$, $xyHENz$ oder $xyzHEN$, wobei xyz eine Permutation von NES ist. Diese sind in dieser Aufzählung verschieden (Position des H). Dies ergibt 24 Wörter. Analog schließt man bei B, indem man überall HEN und NES austauscht und die Position des S betrachtet. Weiter gilt $A \cap B = \{HENNES, NESHEN, HENESN, NHENES\}$. Dies ergibt mit der Siebformel $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 24 + 24 - 4 = 44$.

Wegen der Negation braucht man nun auch die Zahl aller Wörter: $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{4} = 180$ (ein Multinomialkoeffizient). So ergibt sich als Lösung $180 - 44 = \underline{136}$. ■

K9: 2^{n-1} mit eineindeutiger Zuordnung.

Betrachte eine Folge von n Elementen mit $n-1$ Zwischenräumen. Für jeden kann unabhängig von den anderen ein Trenner eingefügt werden oder nicht; die Summen ergeben sich aus der Summen der Längen der nicht-getrennten Teilfolgen.

K11: Berechne die Summe auf zwei Arten:

1) Bei n Personen gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, Vereine mit k Mitgliedern zu bilden und für jeden Verein k^3 Möglichkeiten, die Ämter zu vergeben, wenn ein Mitglied mehrere Ämter haben darf. Die Summe ergibt also alle Möglichkeiten, die Vereine zu bilden und Ämter zuzuzuweisen.

2) Diese Zahl kann aber auch anders bestimmt werden, indem man erst Personen mit den Ämtern wählt und sich überlegt, wieviele Möglichkeiten es gibt, Vereine mit diesen Personen zu bilden.

Zunächst können die Ämter an drei verschiedene Personen vergeben werden und noch $n-3$ weitere Personen im Verein sein. Dies ergibt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot 2^{n-3}$.

Dann können eine Person ein Amt haben, eine die beiden anderen und noch $n-2$ weitere Personen im Verein sein. Dies ergibt $n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$ für jedes Amt, also zusammen $3n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$.

Schließlich kann eine Person alle drei Ämter haben und es können noch $n-1$ weitere Personen im Verein sein. Dies ergibt $n\cdot 2^{n-1}$.

Man macht sich klar, dass dies auch gilt, wenn n kleiner als die Zahl der Pesonen mit Ämtern ist. Dann gibt es keine Möglichkeit, und der entsprechende Ausdruck ist Null.

Addition ergibt $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot 2^{n-3}+3n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}=n^2(n+3)\cdot 2^{n-3}$.

S1: Die Anzahl $n+1$ legt es nahe, n Schubfächer zu nehmen, dann ist $k=1$, weiter sollte aus der Aussage “zwei Zahlen in einem Schubfach” nach Möglichkeit folgen, dass diese Zahlen teilerfremd sind. Eine Möglichkeit besteht darin, Paare aufeinanderfolgender Zahlen zusammenzulegen: $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, ..., $\{2n-1,2n\}$. ■

S2: Bilde für jede ungerade Zahl $u\le 2n$ die Menge $\{u\cdot 2^k : k\ge 0\wedge u\cdot 2^k\le 2n\}$. Dies ergibt auch n Schubfächer; bei zwei Elementen in einer Menge ist eines Teiler des anderen. ■

S4: Das Quadrat wird regelmäßig in $n=25$ Quadrate aufgeteilt; wähle hier $k=2$ (die Zuordnung der Ränder spielt keine Rolle). So gibt es ein Quadrat mit 3 Punkten. Jedes Teilquadrat hat die Seitenlänge $a=\frac{7}{5}$ und passt in einen Kreis mit dem Radius der halben Diagonale $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Wegen $\frac{7}{2\cdot 5}\sqrt{2}=\sqrt{\frac{98}{100}}<1$ liegt das Teilquadrat im Inneren eines Kreises mit Radius 1 ■

S5: Der Würfel wird in $13\times 13\times 13$ gleichgroße Teilwürfel aufgeteilt (die Zuordnung der Ränder spielt keine Rolle). Dies ergibt$13^3=2197$ Teilwürfel mit Kantenlänge $a=\frac{15}{13}$. Nun gibt es wegen $11000>5\cdot 2197$ einen Teilwürfel mit sechs markierten Punkten; dieser passt in eine Kugel mit Radius der halben Raumdiagonale $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Nun gilt aber $\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{15}{2\cdot 13}\sqrt{3}=\sqrt{\frac{3\cdot 225}{4\cdot 169}}=\sqrt{\frac{675}{676}}<1$.

Der Teilwürfel liegt also im Inneren einer Kugel mit Radius 1. ■

Literatur

[1] Arthur Engel, Problem-Solving Strategies, Springer, 1996.

[2] George Pólya, Robert E. Tarjan, and Donald R. Woods, Notes on Introductory Combinatorics, Birkhäuser, 1983

[3] György Pólya, Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Birkhäuser, 1966.

[4] Bundeswettbewerb Mathematik, Aufgaben und Lösungen.

[5] 61. Mathematik-Olympiade 2021/2022, Bundesrunde, Aufgaben und Lösungen.