Jürgen Doenhardt

Graphentheorie

Definition: Graph

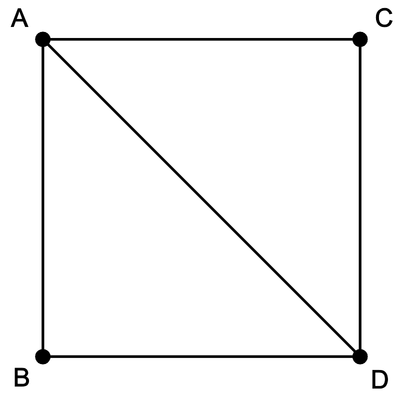
Ein *Graph* ist ein Paar $G=(V,E)$, wobei V eine endlichen Menge von *Knoten* (vertices) ist, E eine Menge von *Kanten* (edges). Die Elemente von E sind

- bei *ungerichteten* Graphen zweielementige Teilmengen von V,
- bei *gerichteten* Graphen ("digraphs") Paare verschiedener Elemente aus V.

Diese abstrakte Definition beschreibt einen Graphen mehr als "Relation" (welche Knoten mit Kanten verbunden sind). Davon abgeleitet ist eine geometrische Definition in der Ebene, die man in der Literatur auch oft Graph nennt, wir sprechen hier von "Einbettung eines Graphen".

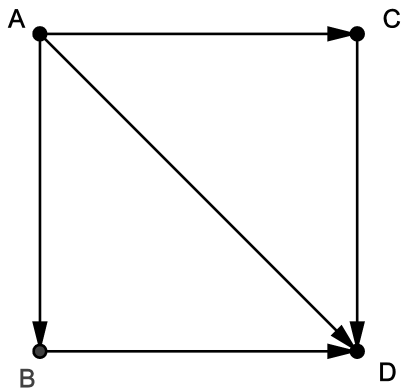
Eine *Einbettung* eines Graphen enthält für jeden Knoten einen Punkt in der Ebene und für jede Kante eine stetige Kurve, die die Endpunkte verbindet. Bei gerichteten Graphen wird jeder Kante (u,v) eine Richtung zugewiesen, bei ungerichteten Graphen nicht.

Beispiel für einen ungerichteten Graphen



$$G_1=(V_1,E_1),\ V_1=\{A,B,C,D\},\ E_1=\{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,D\},\{C,D\}\}$$

Beispiel für einen gerichteten Graphen



$$G_2=(V_2,E_2),\ V_2=\{A,B,C,D\},\ E_2=\{(A,B),(A,C),(A,D),(B,D),(C,D)\}$$

Der Unterschied zwischen gerichteten und ungerichteten Graphen wird klar, wenn man Wege und Kreise in Graphen betrachtet.Unter einem *Weg* (path) versteht man eine Folge $(a_0,\ldots,a_n)$ von Knoten, in der es von jedem Knoten zum Nachfolger eine Kante gibt, also für alle i, $1\leq i\leq n$ gilt:

- $\{a_{i-1},a_i\}\in E$ im ungerichteten Fall,
- $(a_{i-1},a_i)\in E$ im gerichteten Fall.

So gibt es in G_1 einen Weg von B nach C, in G_2 dagegen nicht.

Im gerichteten Fall unterscheiden wir also zwischen eingehenden und ausgehenden Kanten eines Knotens. Im ungerichteten Fall sprehen wir nur von ausgehenden Kanten.

Ist $a_n=a_0$ und $n\geq 1$, so spricht man von einem *Kreis* (cycle, circle).

Ein Weg wird *einfach* genannt, wenn er keine Kante und keinen Knoten mehrfach enthält; bei einem Kreis darf kein Knoten außer dem letzten mehrfach enthalten sein. Es sind also alle Kanten und die Knoten $a_1,\ldots,a_n$ (Weg) bzw. $a_0,\ldots,a_{n-1}$(Kreis) paarweise verschieden.

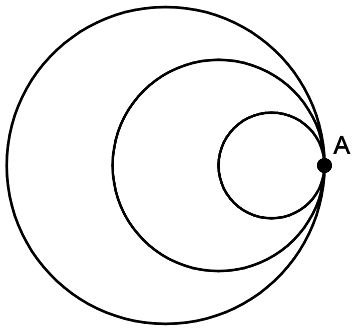
Im ungerichteten Graphen mit der Kante $\{a,b\}$ ist (a,b,a) also kein einfacher Kreis, im gerichteten Graphen mit Kanten (a,b) und (b,a) ist aber (a,b,a) ein einfacher Kreis.

Unter der *Länge* eines Weges/Kreises versteht man die Anzahl der Kanten auf ihm, in obigen Definitionen n. Man lässt dabei auch Wege der Länge 0 (mit nur einem Knoten) zu; von einem Kreis verlangt man jedoch positive Länge.

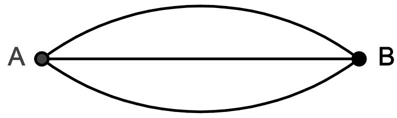
Schlingen und parallele Kanten

Die geometrische Definition wird oft allgemeiner gefasst, damit auch Folgendes möglich ist

a) Kanten von einem Knoten zu diesem zurück (*Schlingen, self-loops*): G_3

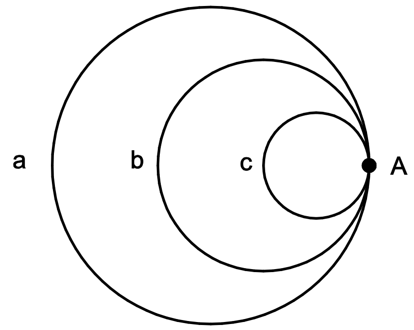


b) mehrere Kanten zwischen zwei Knoten (*parallele Kanten*): G_4

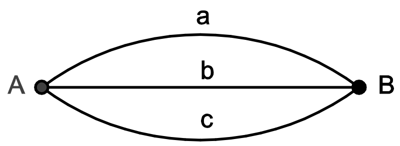


Dies lässt sich mit obiger abstrakter Definition nicht mehr abbilden, aber mit folgender:

Ein Graph ist ein Tripel $G=(V,E,f)$, wobei V eine endliche Menge von Knoten ist, E eine endliche Menge von Kanten. Die Funktion f bildet im gerichteten Fall E auf Paare von Knoten ab, im ungerichteten Fall auf ein- oder zweielementige Knotenmengen.



$G_3=(V_3,E_3,f_3),\ V_3=\{A\},\ E_3=\{a,b,c\},\ f_3(a)=f_3(b)=f_3(c)=\{A\}$



$G_4=(V_4,E_4,f_4),\ V_4=\{A,B\},\ E_4=\{a,b,c\},\ f_4(a)=f_4(b)=f_4(c)=\{A,B\}$

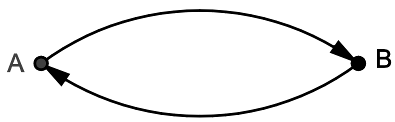
Die Definition "es gibt eine Kante von u nach v" muss auch geändert werden:

- bei gerichteten Graphen statt $(u,v)\in E$: es gibt ein $e\in E$ mit $f(e)=(u,v)$,
- bei ungerichteten Graphen statt $\{u,v\}\in E$: es gibt ein $e\in E$ mit $f(e)=\{u,v\}$.

Graphen in dieser Definition werden auch *Multigraphen* genannt. Wenn nichts anderes angegeben wurde, so nehmen wir an, dass der Graph keine Schlingen und keine parallelen Kanten enthält und verwenden nicht diese allgemeinere Graphendefinition.

Aufgabe G1 (Frage)

Im folgenden gerichteten Fall spricht man nicht von parallelen Kanten. Warum?



Grad, Eingangsgrad, Ausgangsgrad

Unter dem *Grad* eines Knotens in einem ungerichteten Graphen versteht man die Anzahl der ausgehenden Kanten.

Bei einem gerichteten Graphen bezeichnet man die Zahl der eingehenden Kanten als *Eingangsgrad* , die Zahl der ausgehenden Kanten als *Ausgangsgrad* .

Aufgabe G2 ("Handschüttelsatz" bei Graphen)

Zeige, dass in jedem ungerichteten Graphen ohne Schlingen die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade ist.

Aufgabe G3

In eine Schule gehen 2023 Kinder, von denen jedes mindestens 45 andere Kinder der Schule kennt.

Zeige: Es gibt in der Schule vier Kinder, die sich so um einen runden Tisch setzen können, dass jedes Kind seine Nachbarn kennt. (Hinweis: "Bekanntschaft" ist immer gegenseitig.)

Lösung

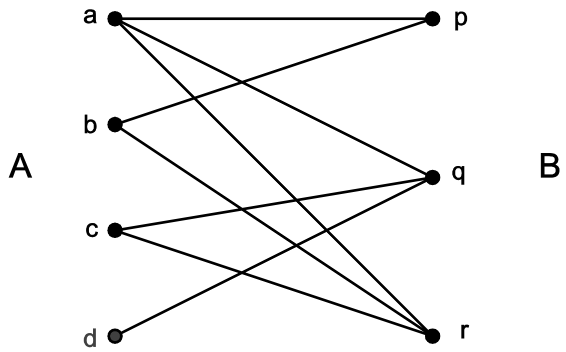
Die Schüler sind die Knoten, die Bekanntschaften die Kanten eines ungerichteten Graphen ohne parallele Kanten und ohne Schlingen. Wegen des Handschüttelsatzes können nicht alle Kinder genau 45 Bekannte haben. Es gibt also ein Kind A mit mindestens 46 Bekannten. Wenn man annimmt, dass diese Bekannten außer A nur verschiedene Kinder kennen, so gibt es mindestens $1+46\cdot 44=2025>2023$ Kinder. Widerspruch. Also gibt es zwei Kinder B und C, die außer A noch ein Kind $D\notin\{A,B,C\}$ kennen. Man kann die Kinder in der Reihenfolge A,B,D,C, wie gewünscht, an einen runden Tisch setzen. ■

Bipartite Graphen

Ein Graph $G=(V,E)$ heißt *bipartit* (auch 2-färbbar, paar), wenn man die Knotenmenge in zwei Mengen zerlegen kann, so dass keine Kanten innerhalb einer Menge verlaufen:

$V=A\cup B$ mit $A\cap B=\emptyset$, so dass für jede Kante $\{u,v\}\in E$ gilt $u\in A\ \wedge\ v\in B$.

Beispiel



Aufgabe G4

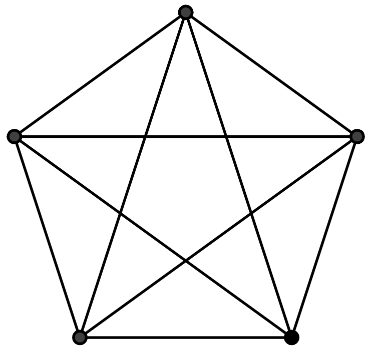
Zeige, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn jeder Kreis eine gerade Länge hat.

Vollständige Graphen

Ein *vollständiger Graph* (auch Clique) K_n ist ein Graph $G=(V,E)$ mit

$|V|=n$ und $\{u,v\}\in E$ für alle $u,v\in E$ mit $u\neq v$.

Er hat $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten, siehe z. B. den K_5:

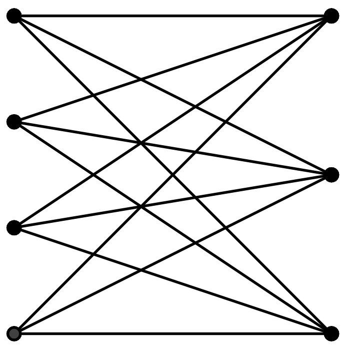


Vollständige bipartite Graphen

Ein *vollständiger bipartiter* Graph $K_{m,n}$ ist ein Graph $G=(V,E)$ mit $V=A\cup B$, so dass gilt

$A\cap B=\emptyset$, $|A|=m$, $|B|=n$ $\{u,v\}\in E$ für alle $u,v\in V$ mit $u\in A \wedge v\in B$.

Er hat $m\cdot n$ Kanten, siehe z. B. den $K_{4,3}$:



Zusammenhängende Graphen und Zusammenhangskomponenten

In einem ungerichteten Graphen $G=(V,E)$ kann man folgende Relation auf V aufstellen:

$u\sim v \Leftrightarrow$ es gibt einen Weg von u nach v.

Dies ist eine Äquivalenz-Relation, d. h. es gilt für alle $u,v,w\in V$

$u\sim u$	(reflexiv),
$u\sim v \Rightarrow v\sim u$	(symmetrisch),
$u\sim v \wedge v\sim w \Rightarrow u\sim w$	(transitiv).

Damit zerfällt die Knotenmenge V in "Äquivalenz-Klassen". Zwei Knoten liegen genau dann in einer Klasse, wenn sie nach obiger Relation äquivalent sind:

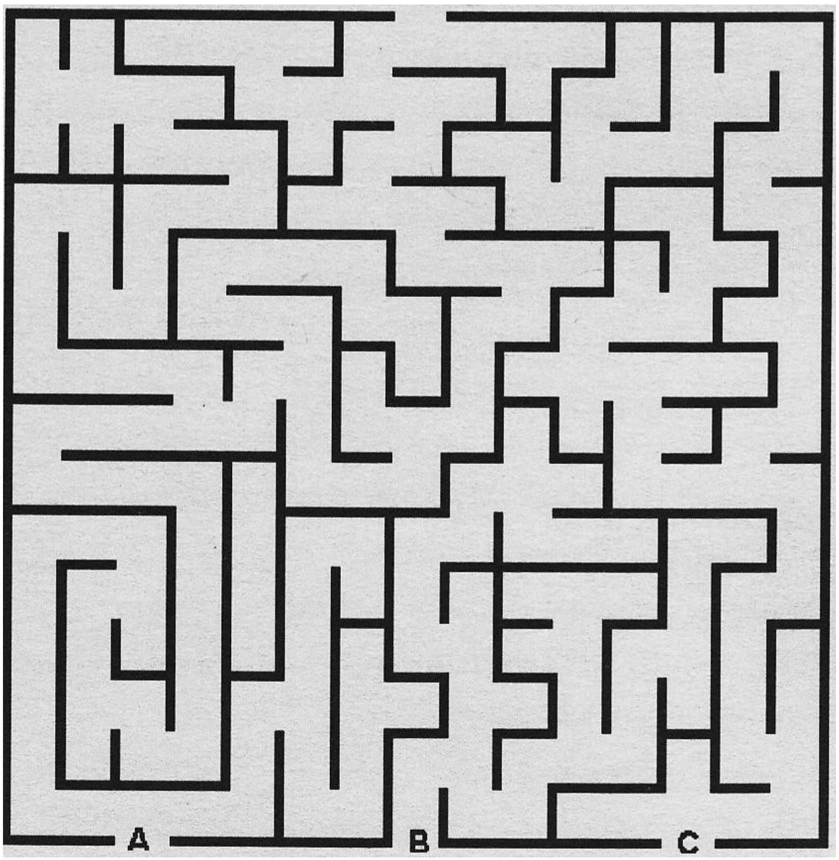
$V=V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_k$ mit $V_i\cap V_j=\emptyset$ für $i\neq j$ und

für alle $u\in V_i$, $v\in V_j$ gilt $u\sim v \Leftrightarrow i=j$.

Diese Äquivalenzklassen nennt man *Zusammenhangskomponenten*; ein Graph ist zusammenhängend genau dann, wenn es nur eine Zusammenhangskomponente gibt. Das bedeutet: Von jedem Knoten zu jedem anderen gibt es einen Weg.

Bei gerichteten Graphen nennt man diese Art von Zusammenhang starken Zusammenhang; man spricht von starken Zusammenhangskomponenten. Man kann zu einem gerichteten Graph den *unterliegenden ungerichteten* Graphen bilden, indem man die Richtungen der Kanten weglässt. Einen gerichteten Graphen nennt man (schwach) zusammenhängend, wenn der unterliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist. So ist der gerichtete Graph auf S. 1 susammenhängend, aber nicht stark zusammenhängend.

Zusammenhangskomponenten spielen z. B. bei Labyrinth-Problemen eine Rolle.



Aufgabe G5

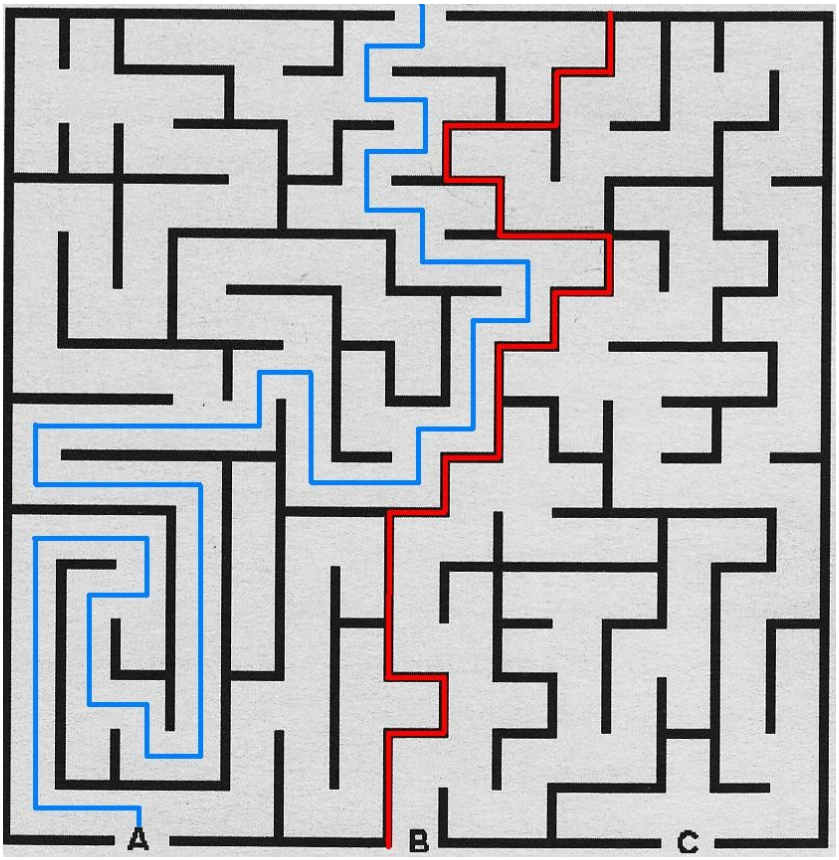
Für welche “Eingänge” A, B, C gibt es einen Weg zum “Ausgang” oben?

Beweise ggfs. nicht nur die Existenz, sondern auch die Nicht-Existenz eines Weges.

Lösung

Es gibt einen Weg von A zum Ausgang (blau). Der rote Weg über “Mauersegmente” zeigt, dass es keinen Weg von B oder C zum Ausgang gibt.

Gibt es einen Weg von B nach C? (Beweis!)



Bäume

Ein ungerichteter Graph wird Baum genannt, wenn er zusammenhängend ist und keinen einfachen Kreis besitzt.

Satz

Ein zusammenhängender ungerichteter Graph $G=(V,E)$ ist genau dann ein Baum, wenn $|E|=|V|-1$ gilt.

Beweis

Induktion über n.

Sei $|V|=n=1$. Bei $|E|\geq 1$ gibt es einen einfachen Kreis (Schlinge), sonst keinen.

Betrachte nun einen zusammenhängenden Graphen $G=(V,E)$ mit $|V|=n+1$ $n\geq 1$.

Nimmt man an, dass G keinen einfachen Kreis hat, dann hat er auch keine Schlinge.

Wenn jeder Knoten einen Grad größer als 1 hat, kann man von einem beliebigen Knoten u aus einen Weg $(u,u_1,u_2,\ldots)$ durchlaufen, aus jedem Knoten u_i, über eine andere Kante heraus als hinein.

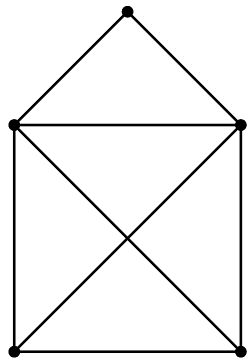
Nach spätestens $|V|$ Kanten wird u oder ein u_i zum zweitenmal erreicht, d. h. G hat einen Kreis, sogar einen einfachen. Widerspruch. Also gibt es einen Knoten u vom Grad 1, entferne ihn und seine Kante. Es bleibt ein zusammenhängender Graph $G'=(V',E')$, der keinen einfachen Kreis hat, also gilt nach Induktionsvoraussetzung $|E'|=n-1$, damit $|E|=n$.

Nimmt man nun $|V|=(n+1)$ und $|E|=n$ an, so hat nicht jeder Knoten einen Grad größer als 1, da sonst $|E|\geq|V|\geq n+1$ gälte. Es gibt also einen Knoten u vom Grad 1. Seine Kante ist wegen des Zusammenhangs keine Schlinge; entferne u und diese Kante. Es bleibt ein zusammenhängender Graph $G'=(V',E')$ mit $|V'|=n$ und $|E'|=n-1$, der nach Induktionsvoraussetzung keinen einfachen Kreis hat. Damit hat auch G keinen einfachen Kreis.

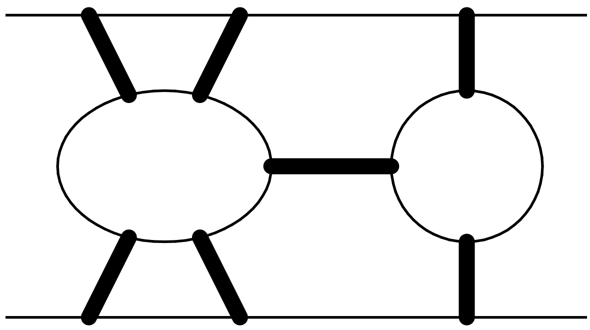
Euler-Wege und Euler-Kreise[1]

Ein Weg (Kreis) in einem ungerichteten Graphen heißt *Euler-Weg (Euler-Kreis)*, wenn er jede Kante genau einmal durchläuft. Bei Euler-Wegen und Euler-Kreisen lassen wir parallele Kanten, aber keine Schlingen zu. Wir betrachten zwei Beispiel-Probleme.

a) Das “Haus des Nikolaus”
Die Figur, d.h. alle Kanten, soll, ohne abzusetzen, nachgezeichnet werden.



b) Das “Königsberger Brücken-Problem”
Die sieben Brücken sollen in Folge, jede genau einmal, überquert werden.



Satz

In einem zusammenhängenden ungerichteten Graphen mit mindestens zwei Knoten gibt es einen Euler-Weg (Kreis) genau dann, wenn es höchstens zwei (keine) Knoten mit ungeradem Grad gibt.

Beweis

Wir betrachten zunächst *Euler-Kreise.*

Bei einem Kreis wird für jeden Knoten auf ihm eine gerade Anzahl von Kanten durchlaufen. Gibt es also einen Euler-Kreis, so ist jeder Knoten-Grad gerade.

Für die Umkehrung wird folgender Hilfssatz bewiesen:

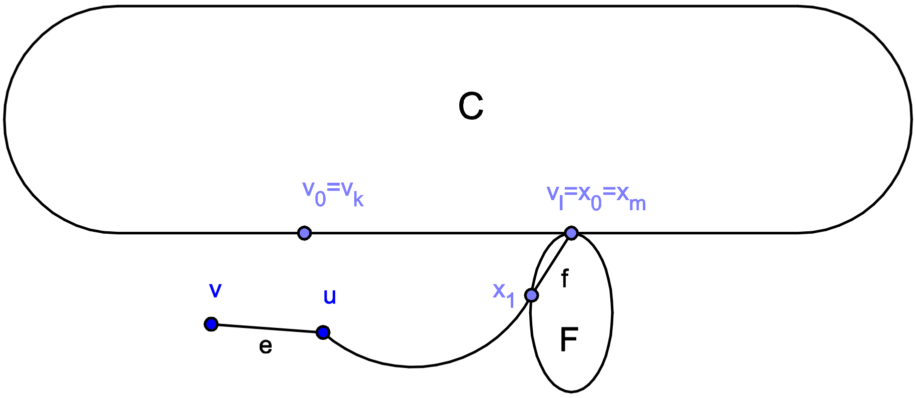
[1] Leonhard Euler (*1709, †1783) Schweizer Mathematiker.

Hilfssatz:

Sei $G=(V,E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit $|V|\geq 2$, in dem jeden Kante einen geraden Grad hat. So gilt

a) Es gibt einen Kreis $C=(v_0,\ldots,v_k)$, der keine Kante mehrmals durchläuft.

b) Sei $C=(v_0,\ldots,v_k)$, ein Kreis, der keine Kante mehrmals durchläuft und $e\in E$ eine Kante, die nicht durchlaufen wird. So gibt es einen Kreis $D=(w_0,\ldots,w_h)$ mit $h>k$, der ebenfalls keine Kante mehrmals durchläuft.



Beweis a)

Starte bei einem beliebigen Knoten v_0 mit positivem Grad und durchlaufe einen beliebigen Pfad in G, wobei jede durchlaufene Kante entfernt wird, solange bis wir bei einem Knoten v_k stecken bleiben (weil es nur endlich viele Kanten gibt). Nach dem Steckenbleiben hat v_k den Grad 0. Bei $v_k\neq v_0$ würden die Grade dieser beiden Knoten um eine ungerade Zahl vermindert, aber v_k hatte anfangs einen geraden Grad. Widerspruch. Also gilt $v_k=v_0$, und $C=(v_0,\ldots,v_k)$ ist ein Kreis, der keine Kante mehrmals durchläuft.

Beweis b)

Seien u,v die Endknoten von e. Da G zusammenhängend ist, gibt es einen Weg von v_0 nach u. Durchläuft er nicht e, so hängen wir e an. Auf diesem Weg gibt es eine erste Kante f (nicht notwendigerweise e), die nicht in C durchlaufen wird; f enthält einen Knoten v_l auf C. Entferne alle Kanten von C. Im verbleibenden Graphen hat auch jeder Knoten geraden Grad. Analog zu a) durchlaufen wir einen Weg $F=(x_0,\ldots,x_m)$ bis zum Steckenbleiben, beginnen aber mit der Kante f. Damit ist auch F ein Kreis ($x_m=x_0$) der keine Kante mehrmals durchläuft. Wir bilden nun in G den Kreis $D=(w_0,\ldots,w_h)$, indem wir C durchlaufen, aber beim ersten Erreichen von $v_l=x_0$ einen Umweg über F machen. Damit gilt $h=k+m>k$, und auch D durchläuft keine Kante mehrmals. □

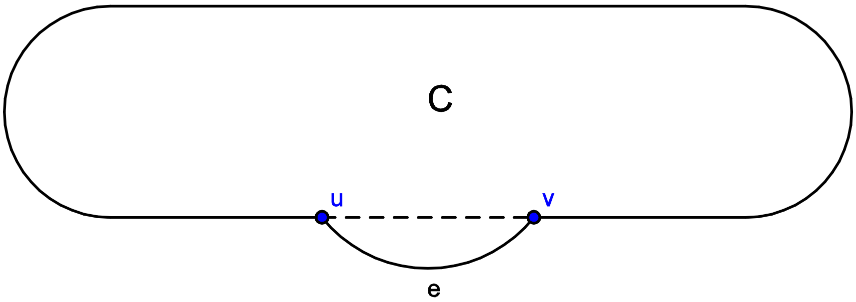
Aus dem Hilfssatz folgt die Umkehrung mit dem Prinzip des Abstiegs. Da bei jeder Anwendung von b) die Zahl der vom Kreis noch nicht durchlaufenen Kanten abnimmt, sie aber stets nichtnegativ ist, erreicht sie irgendwann 0. Dann ist der Kreis ein Euler-Kreis. ■

Betrachten wir nun *Euler-Wege.*

In einem Weg positiver Länge, der kein Kreis ist, wird für jeden Knoten eine gerade Anzahl von ausgehenden Kanten durchlaufen mit Ausnahme des ersten und letzten Knotens. Gibt es also einen Euler-Weg, so ist der Grad für alle Knoten bis auf diese beiden gerade.

Zum Beweis der Umkehrung betrachten wir einen zusammenhängenden Graphen mit mindestens zwei Knoten, in dem höchstens zwei Knoten einen ungeraden Grad haben. Hat kein Knoten einen ungeraden Grad, so gibt es sogar einen Euler-Kreis. Ansonsten haben genau zwei Knoten u, v einen ungeraden Grad, weil die Zahl dieser Knoten gerade ist.

Wir fügen eine neue Kante e zwischen u und v ein (evtl. entstehen dadurch parallele Kanten). Im resultierenden Graphen hat jeder Knoten geraden Grad, so dass es einen Euler-Kreis gibt. Dieser enthält auch e. Entfernen wir e, so verbleibt ein Euler-Weg des ursprünglichen Graphen. ∎



Anmerkung 1

Der Satz gilt auch bei Graphen mit Schlingen, wenn man jede Schlinge bei dem Grad des zugehörigen Knotens doppelt zählt.

Anmerkung 2

Obiger Beweis kann auch auf zusammenhängende gerichtete Graphen angewandt werden. Ein solcher Graph hat einen Euler-Kreis bzw. Euler-Weg genau dann, wenn die Differenz Ausgangsgrad – Eingangsgrad 0 ist bei allen Knoten bzw. bei allen bis auf je einen mit Differenz 1 und -1.

Aufgabe G6

a) Entscheide mit Beweis, ob es für das “Haus des Nikolaus” bzw. Das “Königsberger Brückenproblem” einen Euler-Weg bzw. einen Euler-Kreis gibt.
b) Aus einem 7er-Dominospiel (mit Augenzahlen von Null bis Sechs) wird heimlich ein Stein entfernt, der kein “Pasch” ist (mit gleichen Augenzahlen). Die übrigen Steine werden zu einer Kette gelegt (gleiche Augenzahlen jeweils aneinander). Was kann man über die Augenzahlen an den Enden der Kette sagen?

Hamilton-Wege und Hamilton-Kreise[1]

Ein einfacher Weg (Kreis) in einem Graphen heißt *Hamilton-Weg (Hamilton-Kreis)*, wenn er jeden Knoten enthält.

Die Bestimmung von Hamilton-Wegen oder -Kreisen in einem Graphen ist im allgemeinen Fall viel schwieriger als die von Euler-Wegen oder -Kreisen. Es gibt aber Ausnahmen:

Aufgabe G7

Zeige: Werden die Kanten des K_n beliebig gerichtet, so gibt es immer noch einen Hamilton-Weg.

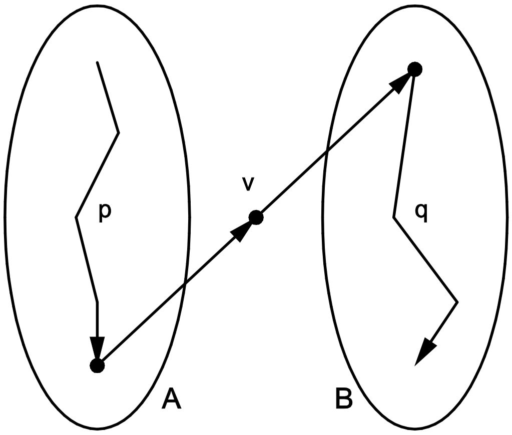
[1] William Rowan Hamilton (*1805, †1865) irischer Mathematiker

Lösung

Durch Induktion über n:

Für $n=1$ bzw. $n=2$ gibt es einen Hamilton-Weg ohne Kante bzw. in der Richtung, die man der einzigen vorhandenen Kante gegeben hat.

Sei die Aussage für alle Knotenzahlen kleiner als $n \geq 3$ bewiesen.



Im K_n ($|V| = n$) sei jede Kante $\{u, v\}$ mit einer Richtung versehen: (u, v) (von u nach v).

Seien v ein beliebiger Knoten und A, B jeweils die Menge der Endpunkte der eingehenden und ausgehenden Kanten. Weil K_n vollständig ist, gilt $V = A \cup \{v\} \cup B$.

Ist $A \neq \emptyset$, so hat der vollständige, ebenfalls mit Richtungen versehene Teilgraph mit Knotenmenge A weniger als n Knoten, also gibt es in ihm einen Hamilton-Weg p.

Ist $B \neq \emptyset$, so hat der vollständige, ebenfalls mit Richtungen versehene Teilgraph mit Knotenmenge B weniger als n Knoten, also gibt es in ihm einen Hamilton-Weg q.

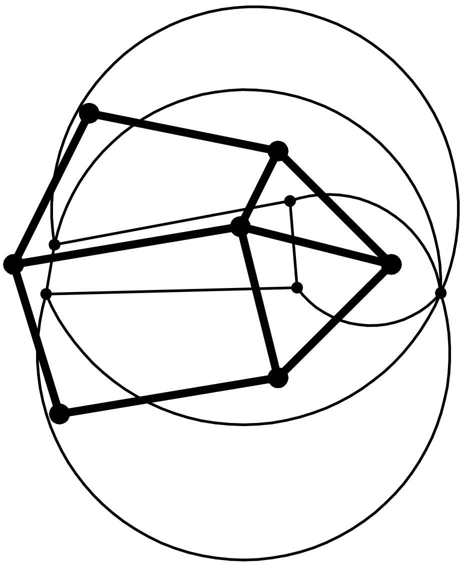
Damit ist aber der Weg, der entsteht durch

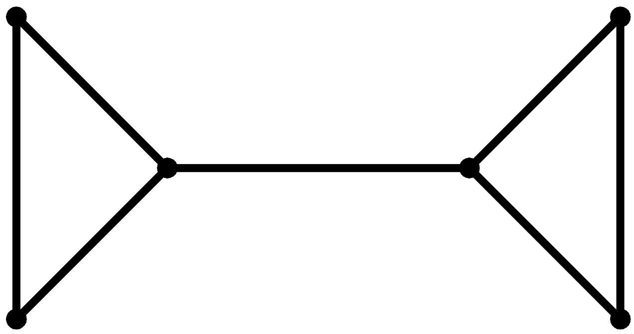
- Zusammenfügen von p und v bei $B = \emptyset$,
- Zusammenfügen von v und q bei $A = \emptyset$,
- Zusammenfügen von p, v und q bei $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$.

ein Hamilton-Weg für den ganzen mit Richtungen versehenen K_n. ■

Planare Graphen

Ein ungerichteter Graph G heißt *planar*, wenn es eine *planare Einbettung* gibt, d. h. eine Einbettung, bei der sich keine Kanten kreuzen. Gemeinsame Endpunkte von Kanten gelten nicht als Kreuzung.





Bei planaren Graphen lassen wir Schlingen und parallele Kanten zu.

In planaren Einbettungen gibt es neben Knoten und Kanten auch *Flächen*, eine Fläche ist ein größtes Gebiet (genauer, hier topologisch: eine maximale offene, zusammenhängende Menge von Punkten) in der Ebene, die keinen Knoten und keinen Punkt einer Kante enthält. Eine Kante ist im Rand von einer oder zwei Flächen. Im ersten Beispiel berandet jede Kante zwei Flächen. Im zweiten Beispiel gibt es einen "Steg", d. h. eine Kante, die nur eine Fläche berandet.

Der erste Graph hat 7 Knoten, 5 Flächen (die Außenfläche zählt mit) und 10 Kanten, der zweite Graph hat 6 Knoten, 3 Flächen und 7 Kanten.

In der Einbettung eines zusammenhängenden planaren Graphen wird jede Fläche von einem (nicht notwendigerweise einfachen) Kreis berandet. Außerdem kann man zu ihr eine *duale Einbettung* bilden (dünne Linien bei P_1), für den gilt:

- jede Fläche der Einbettung enthält genau einen Knoten der dualen Einbettung,
- jeder Knoten der Einbettung ist in genau einer Fläche der dualen Einbettung,
- jede Kante der Einbettung schneidet genau eine Kante der dualen Einbettung.

Eine Einbettung ist dual zur dualen Einbettung. Verschiedene Einbettungen eines Graphen können verschiedene duale Einbettungen und (abstrakte) duale Graphen haben. Bei einem Graphen ohne Schlingen/parallele Kanten kann ein dualer Graph welche haben.

Aufgabe G8

Unter welcher Bedingung (notwendig und hinreichend) hat der duale Graph Schlingen?

Satz (Eulerscher Polyedersatz)

Für jeden zusammenhängenden planaren Graphen mit n Knoten, e Kanten und f Flächen gilt: $n+f-e=2$.

Der Name "Polyedersatz" rührt daher, dass der Satz zuerst für Ecken, Flächen und Kanten von konvexen Polyedern formuliert wurde (vgl. die folgende Aufgabe).

Beweis

Sei G ein planarer Graph mit n Knoten, f Flächen und e Kanten.

Der Beweis geschieht durch vollständige Induktion über die Anzahl f der Flächen.

Bei $f=1$ sind alle Kanten Stege, des Weiteren gibt es keinen einfachen Kreis, denn jeder einfache Kreis zerlegt die Ebene in zwei Gebiete[1], von denen jedes mindestens eine Fläche enthält. Damit ist der Graph ein Baum; es gilt $e=n-1$, somit $n+f-e=n+1-(n-1)=2$.

Habe der Graph $f+1$ Flächen $(f\geq 1)$ so gibt es eine Kante, die kein Steg ist, also insbesonders zu einem einfachen Kreis gehört. Wird e entfernt, so bleibt der Graph zusammenhängend, mit $(f+1)-1=f$ Flächen, n Knoten und $e-1$ Kanten. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $n+f-(e-1)=2$, damit aber auch $n+(f+1)-e=n+f-(e-1)=2$. ■

Anmerkung:

Der Satz gilt auch für kreuzungsfreie Einbettungen von Graphen auf der Kugeloberfläche. Oft wird die Außenfläche weggelassen, dann gilt $n+f-e=1$. Hat der Graph $c\geq 1$ Zusammenhangskomponenten, so gilt mit Außenfläche $n+f-e-c=1$.

Aufgabe G9

Die Mitte eines Herrnhuter Sterns (ohne die pyramidenförmigen Spitzen) ist ein Polyeder aus regelmäßigen Dreiecken und Vierecken, bei dem in jeder Ecke vier Polygone zusammentreffen, in allen Ecken die gleiche Anzahl Dreiecke. Aus wievielen Dreiecken und wievielen Vierecken besteht das Polyeder? Sind diese Anzahlen eindeutig bestimmt?

Herrnhuter Sterne

[1]Mit stetigen Kurven ist dies der Jordansche Kurvensatz (nach Marie Ennemond Camille Jordan [*1838, †1922], französischer Mathematiker). Auf einem Torus (Ring) gilt er z. B. nicht, dort gilt auch nicht der Eulersche Polyedersatz.

Lösung

Seien d, v die Zahl der Dreiecke bzw. Vierecke im Polyeder, n, f, e wie im Polyedersatz, weiter k die Zahl der Dreiecke in einer Ecke. So gilt $0<k\leq 4$, denn vier Vierecke in einer Ecke ergeben kein räumliches Gebilde (Winkelsumme $360°$). Man erhält durch Abzählen

$$f=d+v,\ 3d=kn,\ 4v=(4-k)n \text{ und } 2e=3d+4v=4n, \text{ also } e=2n.$$

Mit dem Eulerschen Polyedersatz erhält man

$$n+f-e=2 \Rightarrow n+d+v-2n=2 \Rightarrow d+v=2+n,$$

durch Multiplikation mit k: $kd+kv=2k+kn=2k+3d$,

durch Multiplikation mit $4-k$: $(4-k)d+(4-k)v=2(4-k)+(4-k)n=8-2k+4v$.

Addition ergibt $4d+4v=8+3d+4v \Rightarrow d=8 \Rightarrow 8k+kv=2k+24 \Rightarrow v=\frac{24}{k}-6$.

Man erhält folgende Anzahlen, zu denen man auch leicht Polyeder konstruieren kann:

- für $k=1$: $d=8, v=18, f=26, n=24, e=48$,
- für $k=2$: $d=8, v=6, f=14, n=12, e=24$,
- für $k=3$: $d=8, v=2, f=10, n=8, e=16$,
- für $k=4$: $d=8, v=0, f=8, n=6, e=12$.

Die Frage der Eindeutigkeit ist also zu verneinen.

Anmerkungen:

Bei realen Herrnhuter Sternen (vgl. Abbildung) ist $k=1$. Mit $k=4$ entsteht der Oktaeder. ■

Mit dem Eulerschen Polyedersatz kann man die Maximalzahl der Kanten in planaren Graphen bestimmen.

Satz

Jeder planare (planare bipartite) Graph ohne Schlingen und ohne parallele Kanten mit n Knoten, $n\geq 3$, hat höchstens $3n-6$ $(2n-4)$ Kanten.

Beweis

Wir können uns auf zusammenhängende Graphen beschränken, weil man durch Hinzufügen weiterer Kanten diese leicht aus unzusammenhängenden erzeugen kann. Der Graph habe eine planare Einbettung mit n Knoten, e Kanten und f Flächen.

Zu jeder Fläche gibt es einen (nicht unbedingt einfachen) Kreis, der sie berandet. (Stege kommen doppelt vor). Die Länge des Kreises ist nicht 1 (keine Schlingen), auch nicht 2 (keine parallele Kanten, aber mindestens 3 Kanten oder 2 doppelt zählende Stege, da der Graph zusammenhängt und mindestens 3 Knoten hat), also mindestens 3.

Die berandenden Kreise der Flächen haben mindestens $3f$ Kanten, aber auch $2e$, weil jede Kante doppelt gezählt wird. Also gilt $2e\geq 3f$. Mit dem Eulerschen Polyedersatz folgt

$$6=3n+3f-3e\leq 3n+2e-3e=3n-e \quad\Rightarrow\quad e\leq 3n-6.$$

Bei bipartiten Graphen ist die Länge der Kreise mindestens 4, weil alle Kreise gerade Länge haben. Man erhält $2e\geq 4f$ bzw. $e\geq 2f$. Mit dem Eulerschen Polyedersatz folgt

$$4=2n+2f-2e\leq 2n+e-2e=2n-e \quad\Rightarrow\quad e\leq 2n-4.$$ ■

(Ein Spezialfall dieses Satzes wurde als Aufgabe beim Bundeswettbewerb Mathematik 1976 gestellt: 1. Runde, Aufgabe 4.)

Aufgabe G10

Herr Müller, Herr Meyer und Herr Schulze wollen zu ihren Häusern je eine Stromleitung, eine Gasleitung und eine Wasserleitung zu entsprechenden drei Werken verlegen lassen. Die Leitungen sollen sich nicht kreuzen. Warum ist diese Verlegung nicht möglich?

Lösung

Die Leitungen ergäben eine planare Einbettung des $K_{3,3}$. Dieser hat 6 Knoten und 9 Kanten. Er ist aber bipartit, und es ist $2\cdot 6-4=8<9$.

Aufgabe G11

Zwischen fünf Städten sollen neue direkte Bahnverbindungen errichtet werden. Jede Stadt soll mit jeder verbunden werden. Warum ist dies ohne Brücke/Unterführung nicht möglich?

Lösung

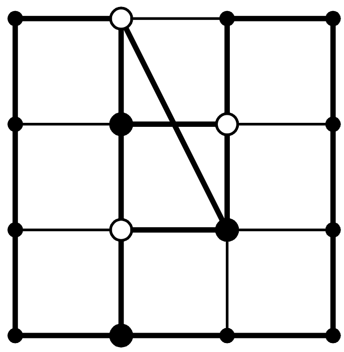
Die Bahnverbindungen ergäben eine planare Einbettung des K_5. Dieser hat 5 Knoten und 10 Kanten. Es ist aber $3\cdot 5-6=9<10$.

Bemerkung

Ein Graph ist sicherlich auch dann nicht planar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der durch (evtl. mehrfache) Kantenteilung aus dem $K_{3,3}$ oder dem K_5 entsteht. Kantenteilung bedeutet dabei, dass man eine Kante von u nach v durch zwei Kanten von u nach w und von w nach v mit einem neuen Knoten w ersetzt.

Beispiel

Der folgende bipartite Graph hat 16 Knoten und 25 Kanten; es ist $25\leq 2\cdot 16-4$. Er ist aber nicht planar, denn er enthält einen Teilgraphen, der durch Kantenteilung des $K_{3,3}$ entsteht.



1930 wurde von Kuratowski[1] die Umkehrung bewiesen: Jeder Graph, der keinen Teilgraphen enthält, der durch Kantenteilung aus dem $K_{3,3}$ oder dem K_5 entsteht, ist planar.

Satz

Ein planarer Graph ohne Schlingen ist "6-färbbar", d. h. man kann die Knoten so mit sechs Farben färben, dass jede Kante zwischen Knoten verschiedener Farbe verläuft.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz

In einem planaren Graphen ohne Schlingen und ohne parallele Kanten gibt es einen Knoten mit Grad kleiner als 6.

[1] Kasimierz Kuratowski (*1896, †1980) polnischer Mathematiker

Beweis

Der Graph habe n Knoten und e Kanten. Sei $d_v \geq 6$ der Grad jedes Knotens v. So gilt

$$6n \leq \sum_{v \in V} d_v = 2e,$$

weil bei dieser Summierung jede Kante doppelt gezählht wird. Dies liefert $e \geq 3n$, im Widerspruch zu $e \leq 3n-6$.

Beweis des Satzes durch Induktion nach der Anzahl n der Knoten.

Zunächst kann man sich auf Graphen ohne parallele Kanten beschränken, indem man in jeder Menge paralleler Kanten alle bis auf eine entfernt.

Bei $n=1$ gibt es keine Kante. Wir färben den Knoten mit einer beliebigen Farbe.
Sei der Satz für alle Graphen mit $n \geq 1$ Knoten bewiesen. In einem Graphen mit $n+1$ Knoten gibt es nach dem Hilfssatz einen Knoten v mit Grad kleiner als 6. Entferne v und alle ausgehenden Kanten. Der verkleinerte Graph hat n Knoten, lässt sich also mit sechs Farben färben. Füge v und alle ausgehenden Kanten wieder ein; für deren Endknoten $\neq v$ werden nicht alle sechs Farben verwendet. Färbe v mit einer nicht verwendeten Farbe. ■

Satz

In jeder Einbettung eines zusammenhängenden planaren Graphen kann man die Flächen so mit sechs Farben färben, dass zwei Flächen mit gemeinsamer Kante stets verschieden gefärbt sind .

Beweis

Wir bilden zur einer Einbettung E zu G die duale Einbettung E^D. Nach evtl. Entfernen von Schlingen färben wir gemäß des Satzes die Knoten von E^D mit sechs Farben. Jede Fläche in E wird mit der Farbe des innenliegenden Knotens von E^D gefärbt. Eine gemeinsame Kante zwischen verschiedenen Flächen in E entspricht keiner Schlinge in E^D, sondern einer Kante, die zwischen verschieden gefärbten Knoten in E^D verläuft. ■

Man kann mit zusätzlichen Überlegungen leicht die Anzahl der Farben auf fünf reduzieren. Lange wurde schon vermutet, dass auch vier Farben immer ausreichen. Dieser *Vierfarbensat*z wurde jedoch erst 1976 von Appel und Haken durch Reduktion auf 1936 Graphen bewiesen, deren Vierfärbbarkeit mittels Computer nachgeprüft wurde. Später (Robertson, Sanders, Seymour, Thomas, 1996) wurde die Zahl der Graphen auf 633 reduziert.

Zum Eulerschen Polyedersatz noch eine Aufgabe aus dem Bundeswettbewerb Mathematik (2. Runde 2011, Aufgabe 1)

Aufgabe G12

Man beweise, dass man ein Quadrat nicht in endlich viele Sechsecke zerlegen kann, deren Innenwinkel kleiner als $180°$ sind.

Lösung

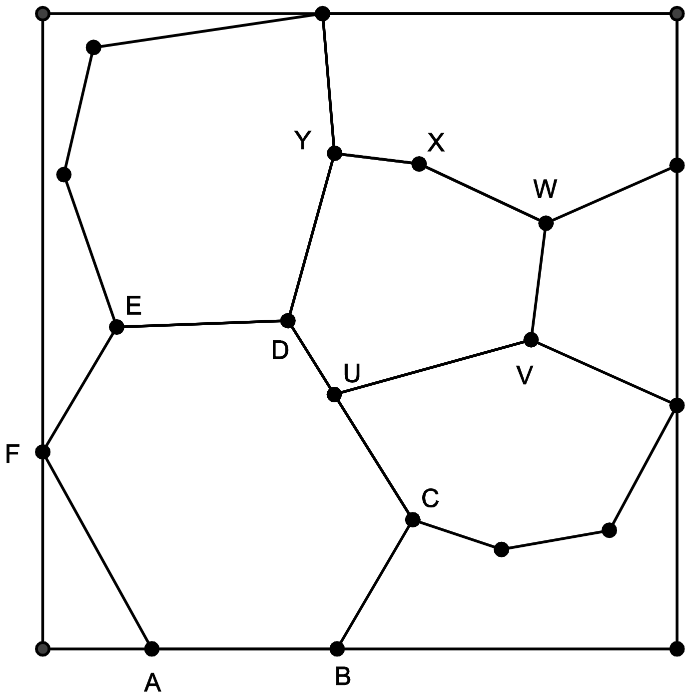
Eine solche Zerlegung wäre die Einbettung einen zusammenhängenden planaren Graphen; n, f, e seien wie im Beweis des Polyedersatzes benannt. Die Grafik soll nur die Bezeichnungen verdeutlichen. Die Polygone im Quadrat sind nicht alle Sechsecke, auch sind nicht alle Innenwinkel kleiner als $180°$.

Die Flächen sind

a) die Außenfläche, sie wird durch mindestens 4 Kanten berandet,

b) die Innenflächen, jede wird durch mindestens 6 Kanten berandet.

Da es in den Sechsecken nur Winkel kleiner als $180°$ gibt, kommen in jedem Knoten, der nicht Ecke des Quadrates ist, mindestens drei Flächen zusammen, in den Quadratecken mindestens zwei Flächen. Jede Kante berandet zwei Flächen (es gibt keine Stege).



Wir durchlaufen nun alle Flächen und zählen die berandenden Kanten. So ergibt sich

$$2e \geq 6(f-1)+4 = 6f-2$$

$$\Rightarrow \; e \geq 3f-1. \qquad (1)$$

Wir durchlaufen nun alle Knoten und zählen die ausgehenden Kanten. So ergibt sich

$$2e \geq 3(n-4)+2\cdot 4$$

$$\Rightarrow \; 2e \geq 3n-4. \qquad (2)$$

Addition (1) + (2) ergibt mit den Polyedersatz den gewünschten Widerspruch.

$$3e \geq 3f-1+3n-4$$

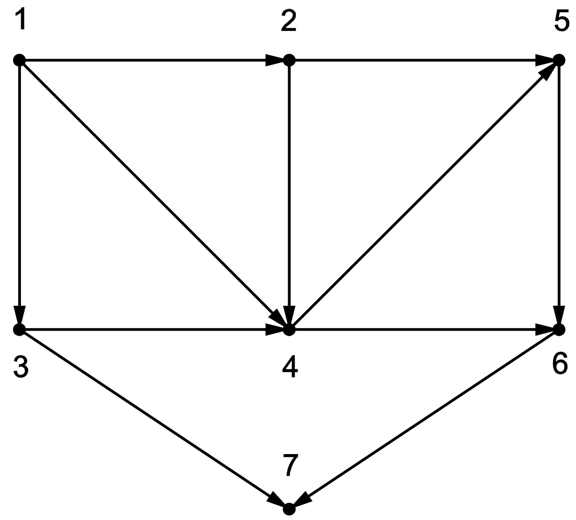
$$\Rightarrow \; 0 \geq 3n+3f-3e-5 = 6-5 = 1.$$

Jürgen Doenhardt

Azyklische gerichtete Graphen und toplogische Sortierung

Ein gerichteter Graph $G=(V,E)$ heißt *azyklisch* (directed acyclic graph, dag), wenn es in ihm keinen Kreis gibt. Unter einer *topologischen Sortierung* von G verstehen wie eine bijektive (umkehrbare) Funktion $\varphi: V \rightarrow \{1,\ldots,|V|\}$, so dass für alle $(u,v) \in E$ gilt $\varphi(u) < \varphi(v)$.

Beispiel für einen dag mit topologischer Sortierung



Hilfssatz

In jedem dag $G=(V,E)$ gibt es einen Knoten v mit Ausgangsgrad 0.

Beweis (durch Kontraposition)

Wenn für alle Knoten v der Ausgangsgrad größer als 0 ist, so kann man von einem beliebigen Knoten Wege beliebiger Länge erzeugen, indem man stets vom letzten Knoten eine ausgehende Kante durchläuft. Insbesondere gibt es Wege, die mindestens die Länge $|V|$ haben. Ein solcher Weg enthält mindestens einen Knoten mehrfach (Schubfachprinzip!) und damit einen Kreis als Teilweg. Der Graph ist also nicht azyklisch. ■

Aufgabe G13

Man zeige, dass es in jedem dag $G=(V,E)$ einen Knoten v mit Eingangsgrad 0 gibt.

Satz

Ein gerichteter Graph ist genau dann azyklisch, wenn es eine topologische Sortierung gibt.

Beweis

Angenommen, der Graph $G=(V,E)$ hat eine topologische Sortierung φ und einen Kreis $(u,\ldots,v,\ldots,u)$. So folgt $\varphi(u)<\ldots<\varphi(v)<\ldots<\varphi(u)$, ein Widerspruch.

Wir nehmen nun an, dass der Graph azyklisch ist und verwenden Induktion nach $n=|V|$, um die Existenz der topologischen Sortierung zu zeigen.

Bei $n=1$ gibt es nur einen Knoten v und keine Kante im Graphen, wir setzen $\varphi(v)=1$.

Bei einem Graphen mit $n+1$ Knoten ($n\geq 1$) gibt es nach dem Hilfssatz einen Knoten v mit Ausgangsgrad 0. Wir streichen v und alle eingehenden Kanten. Es entsteht ein azyklischer Graph $G'=(V',E')$ mit n Knoten, für den es nach Induktionsvoraussetzung eine topologische Sortierung $\psi: V' \rightarrow \{1,\ldots,n\}$ gibt.

Daraus konstruieren wir die topologische Sortierung $\varphi: V \to \{1,\ldots,n+1\}$ für $G=(V,E)$ mittels

$$\varphi(u)=\begin{cases}\psi(u), & u\neq v,\\ n+1, & u=v\ .\end{cases}$$ ■

Aufgabe G14

Man bestimme alle topologischen Sortierungen des obigen Beispielgraphen.

Die folgende Aufgabe wurde in anderer Formulierung (nicht graphentheoretisch) bei der Internationalen Mathematik-Olympiade gestellt (2009, 1. Aufgabe).

***Aufgabe G15**

Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter Graph mit $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$, wobei gilt:

$(v_a,v_b)\in E \ \Leftrightarrow a\neq b$ und n ist Teiler von $a(b-1)$.

Zeige, dass G azyklisch ist.

Lösung 1

Eine Lösung besteht darin, eine topologische Sortierung ϕ anzugeben, wir geben diese als Folge $F=(\varphi(1),\ldots,\varphi(n))$ von Knoten an. Mit $F\cdot G$ sei die Folge bezeichnet, die durch Aneinanderfügen zweier Folgen F und G entsteht.

Hilfssatz:

1) Für alle $a,b\in\{1,\ldots,n\}$ gilt: Ist $ggT(n,a)<ggT(n,b)$, so gilt $(v_a,v_b)\notin E$.
2) Sei für einen Teiler g von n $M_g=\{m\in\{1,\ldots,n\}: ggT(n,m)=g\}$, so gilt
   a) Ist $ggT\left(\frac{n}{g},g\right)>1$, so gilt $(v_a,v_b)\notin E$ für alle $a,b\in M_g$
   b) Ist $ggT\left(\frac{n}{g},g\right)=1$, so gibt es genau ein $c_g\in M_g$, so dass für alle alle $a,b\in M_g$ mit $(v_a,v_b)\in E$ gilt: $b=c_g$.

Mit diesem Hilfssatz kann man die topologische Sortierung wie folgt finden: Zu jedem Teiler t von n sei F_t eine beliebige Folge aller Elemente aus M_t bei $ggT\left(\frac{n}{t},t\right)>1$ bzw. eine Folge aller Elemente aus M_t mit c_t als letztem Element bei $ggT\left(\frac{n}{t},t\right)=1$, jeweils ohne Wiederholungen. Seien $t_1<t_2<\ldots<t_k$ die Teiler von n, so ist $F_{t_k}\cdot\ldots\cdot F_{t_1}$ die gesuchte topologische Sortierung des Graphen.

Für $n=28$ erhält man so zum Beispiel

$F_{28}=(v_{28})$, $F_{14}=(v_{14})$, $F_7=(v_7,v_{21})$, $F_4=(v_4,v_{12},v_{16},v_{20},v_{24},v_8)$, $F_2=(v_2,v_6,v_{10},v_{18},v_{22},v_{26})$,
$F_1=(v_3,v_5,v_9,v_{11},v_{13},v_{15},v_{17},v_{19},v_{23},v_{25},v_{27},v_1)$,

$$F=(v_{28},v_{14},v_7,v_{21},v_4,v_{12},v_{16},v_{20},v_{24},v_8,v_2,v_6,v_{10},v_{18},v_{22},v_{26},\\ v_3,v_5,v_9,v_{11},v_{13},v_{15},v_{17},v_{19},v_{23},v_{25},v_{27},v_1).$$

Beweis des Hilfssatzes:

Zu 1): Bei $ggT(n,a)<ggT(n,b)$ gibt es eine Primzahl p, die n und b teilt, nicht aber a. Damit teilt p aber nicht $a(b-1)$, also teilt auch n nicht $a(b-1)$, d. h. $(v_a, v_b) \notin E$.

Zu 2): Zunächst gilt $M_g = \left\{hg\colon\ 1 \le h \le \frac{n}{g} \wedge ggT\left(h, \frac{n}{g}\right) = 1\right\}$. Seien $a = lg$, $b = mg$ in M_g und $(v_a, v_b) \in E$, also $kn = a(b-1) = lg \cdot (mg-1)$ für ein $k \ge 1$, dies ergibt $k \cdot \frac{n}{g} = l \cdot (mg-1)$.

Zu 2a): Es gibt eine Primzahl p, die $\frac{n}{g}$ und g teilt, aber nicht l. Die rechte Seite ist nicht durch p teilbar, aber die linke. Widerspruch.

Zu 2b): Wegen $ggT\left(l, \frac{n}{g}\right) = 1$ ist $mg-1$ durch $\frac{n}{g}$ teilbar: $mg \equiv 1 \mod \frac{n}{g}$. Es gibt genau ein solches m. Mit $c_g = mg$ folgt $b = c_g$. ■

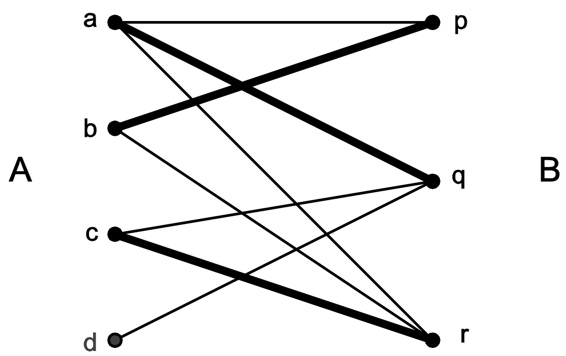
Lösung 2 (ohne topologische Sortierung, indirekt)

Sei $(v_{a_1}, \ldots, v_{a_k}, v_{a_1})$ ein Kreis in G der Länge k, so gilt $k \ge 2$, und für alle i mit $1 \le i < k$ gilt $a_i(a_{i+1}-1) \equiv 0 \mod n$, also $a_i a_{i+1} \equiv a_i \mod n$, sowie $a_k(a_1-1) \equiv 0 \mod n$, also $a_k a_1 \equiv a_1 \mod n$. Dies ergibt $a_1 \ldots a_k \equiv \ldots \equiv a_1 \mod n$. Dies gilt auch bei zyklischer Vertauschung $a_1 \rightarrow a_2$, ..., $a_k \rightarrow a_1$, also $a_1 \ldots a_k \equiv a_2 \ldots a_1 \equiv \ldots \equiv a_2 \mod n$, somit $a_1 = a_2$. Widerspruch. ■

Maximale Matchings in bipartiten Graphen

Unter einem *Matching* in einem Graphen versteht man eine Menge von Kanten, so dass jeder Knoten von höchstens einer Kante Endknoten ist; es ist *maximal*, wenn es eine größtmögliche Zahl von Kanten besitzt. Wir betrachten nur das Problem in bipartiten Graphen (in Graphen, die nicht bipartit sind, ist dieses Problem erheblich schwieriger).

Im folgenden Beispiel-Graphen ist $M = \{\{a,q\},\{b,p\},\{c,r\}\}$ ein Matching mit drei Kanten, es ist wegen $|B| = 3$ maximal.



Variante 1 ("Heiratsproblem")

In einer Gesellschaft von Männern und Frauen gibt es einige Paare, die sich kennen, andere kennen sich evtl. nicht. Wenn nur Paare heiraten, die sich kennen, wieviele Hochzeiten sind maximal möglich?

Variante 2

Auf einem rechteckigen Schachbrett stehen Türme, höchstens einer pro Feld. Wieviele Türme kann man maximal auswählen, ohne dass zwei sich schlagen können?

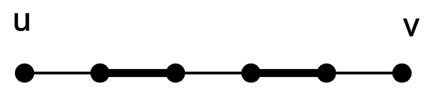
Jürgen Doenhardt

Aufgabe G16

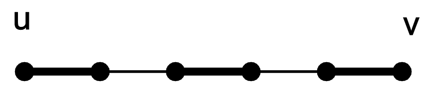
Man beschreibe, wie man für die beiden Probleme jeweils geeignete bipartite Graphen $G=(V,E)$, V, E, A, B konstruiert, um sie auf ein Matching-Problem zurückzuführen.

Weil es nur endlich viele Matchings gibt, gibt es maximale Matchings. Ein solches Matching kann mit dem Konzept der *vergrößernden Wege* (augmenting paths) gefunden werden. Unter einem solchen Weg zu einem Matching bezeichnen wir einen Weg $(u,\dots,v)$ für den gilt

- u,v sind freie Knoten, d.h. sie sind keine Endknoten einer Kante des Matchings.
- der Weg ist alternierend, d.h. jede zweite Kante gehört zum Matching und jede zweite Kante gehört nicht dazu.



Mit einem solchen Weg kann man das Matching vergrößern, indem man bei allen Kanten die Zugehörigkeit zum Matching umkehrt, wodurch wieder ein alternierender Weg entsteht.



Zu einem maximalen Matching gibt es also keinen vergrößernden Weg. Es gilt aber auch die Umkehrung.

Satz

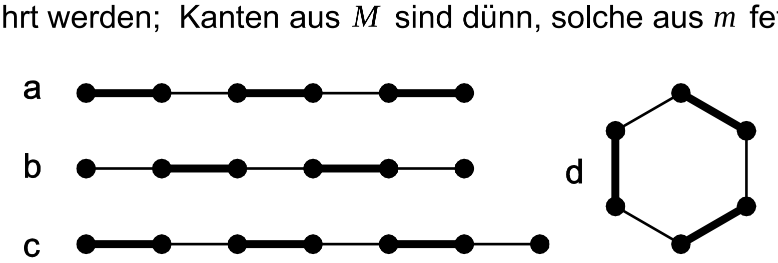
Wenn es zu einem Matching keinen vergrößernden Weg gibt, so ist es maximal.

Beweis

Wir beweisen die Kontraposition: Ist ein Matching m nicht maximal, so gibt es für m einen vergrößernden Weg. Sei M ein maximales Matching.

Wir bilden die Menge $M \oplus m$ der Kanten, die in genau einem der beiden Matchings liegen. Weil M mehr Kanten als m enthält, enthält $M \oplus m$ mehr Kanten aus M als aus m.

Jeder Knoten des Graphen ist Endkonten von höchstens zwei Kanten aus $M \oplus m$. Damit können wir die "längsten Wege" mit Kanten aus $M \oplus m$ bilden (die Wege können Kreise sein); keine zwei haben einen Knoten gemeinsam. Jeder Knoten, der Endknoten von zwei Kanten aus $M \oplus m$ ist, muss Endknoten einer Kante aus M und einer Kante aus m sein. Das bedeutet, in den erwähnten längsten Wegen (Kreisen) sind die Kanten abwechselnd in M und in m. Für sie gibt es die folgenden Möglichkeiten (ggfs. muss der Weg in der Richtung umgekehrt werden; Kanten aus M sind dünn, solche aus m fett gezeichnet).



Bei den Typen a, c und d sind mindestens soviele Kanten aus m wie aus M enthalten. Weil $M \oplus m$ mehr Kanten aus M als aus m enthält, muss Typ b mindestens einmal auftreten. Die Endknoten sind frei, weil sonst der Weg kein längster Weg wäre. Somit ist jeder Weg vom Typ b für m einen vergrößernden Weg. ■

Als Letztes wird nun ein Markierungsverfahren skizziert, mit dem man für ein nicht-maximalen Matching M einen vergrößernden Weg findet.

a) Markiere einen freien Knoten aus A mit der Markierung $[\,]$.
b) Wenn b ein unmarkierter Knoten aus B ist, und es eine Kante gibt, die nicht in M liegt und b mit einem markierten Knoten a aus$A$ verbindet, markiere b mit $[a]$.
c) Wenn a ein unmarkierter Knoten aus A ist, und es eine Kante gibt, die in M liegt und a mit einem markierten Knoten b aus B verbindet, markiere a mit $[b]$.

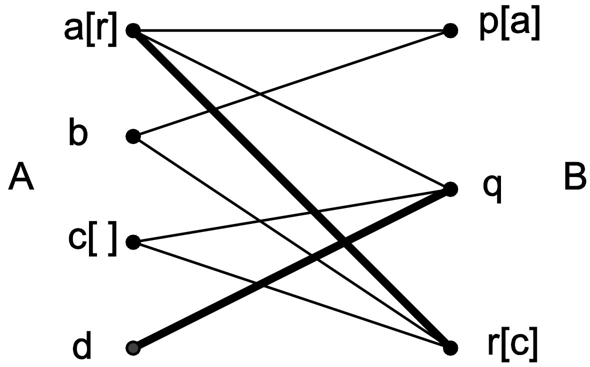
Setze fort, bis entweder

[1] ein freier Knoten aus B markiert wird, oder

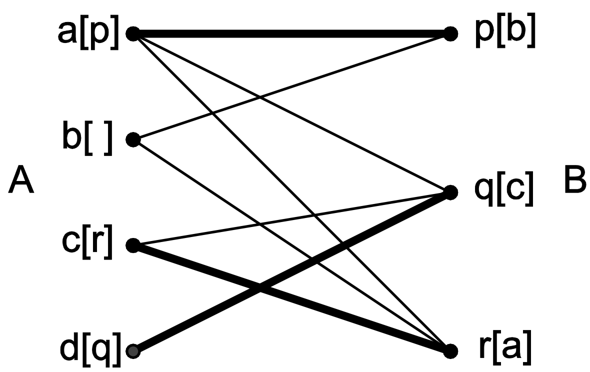
[2] kein weiteres Markierern mehr möglich ist.

Im ersten Fall wird ein vergrößernder Weg gefunden; man findet die Knoten durch Verfolgung der Markierungen. M kann damit vergrößert werden. Im zweiten Fall existiert kein vergrößernder Weg, also ist M nach dem obigen Satz maximal.

Beispiel: Im folgenden Graphen ist ein nicht-maximales Matching fett eingezeichnet. Das Markierungsverfahren liefert, wenn wir mit den freien Knoten c beginnen, z. B. die angegebenen Markierungen.



Wir enden bei dem freien Knoten p in B. Dies liefert den vergrößernden Weg (p,a,r,c). Mit ihm wird das Matching vergrößert. Das erhaltene Matching mit drei Kanten ist wegen $|B|=3$ maximal. Wenn man trotzdem ausgehend vom einzigen freien Knoten b das Markierungsverfahren anwendet, so erhält man z. B. das folgende Bild.



So erhält man durch Rückverfolgung der Markierungen zwar den alternierenden Weg (d,q,c,r,a,p,b), aber dieser beginnt und endet in A. Auch ist keine weitere Markierung mehr möglich. Auch andere Auswahlen (z. B. $r[b]$ statt $p[b]$ beim Markieren von b aus) liefern keinen vergrößernden Weg.

Man kann die Strategie zum Auswahl der zu markierenden Knoten noch optimieren, insbesondere in dem Fall mehrerer Wahlmöglichkeiten. Man erhält ein Verfahren, das, auf einem Computer programmiert, bei n Knoten und e Kanten höchstens $c \cdot n \cdot e$ Rechenschritte benötigt, wobei c eine von n und e unabhängige Konstante ist.

Literatur

Thomas Lengauer, Combinatorical Algorithms for Integrated Circuit Layout, Wiley-Teubner, 1990.

Kurt Mehlhorn and Stefan Näher, LEDA: A platform for combinatorical and geometrical computing, Cambridge University Press, 2000.

Georg Pólya, Robert E. Tarjan, and Donald R. Woods, Notes on Introductory Combinatorics, Birkhäuser, 1983.

Bundeswettbewerb Mathematik, https://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/aufgaben.

Dušan Djukic, Vladimir Janković, Ivan Matić, and Nikola Petrović, The IMO Compendium, Springer Science + Business Media, 2010.

Wikipedia: Angaben zu den Herrnhuter Sternen und zum Vierfarbenproblem.