Eine alte Gleichung mit Fibonacci-Zahlen

Die *Fibonacci-Zahlen* $f_n (n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$ sind definiert durch

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ für } n \geq 1.$$

Man verwende immer nur diese Definition, insbesondere die Anfangswerte $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$.

Viele zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonaccizahlen (die von Teilnehmenden immer wieder durch vollständige Induktion bewiesen weden), folgen aus einer Gleichung, die schon im 19. Jahrhundert von Lucas bewiesen wurde:

Satz:
Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt $\mathrm{ggT}(f_a, f_b) = f_{\mathrm{ggT}(a,b)}$.

Beweis:
Zunächst werden zwei Hilfssätze bewiesen

Hilfssatz 1:
Für alle $n, k \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 0$ und $k > 0$ gilt $f_{n+k} = f_n f_{k-1} + f_{n+1} f_k$.

Beweis durch Induktion über n:
Sei $n = 0$. So gilt $f_k = 0 \cdot f_{k-1} + 1 \cdot f_k = f_0 f_{k-1} + f_1 f_k$.
Sei $n = 1$. So gilt $f_{1+k} = 1 \cdot f_{k-1} + 1 \cdot f_k = f_1 f_{k-1} + f_2 f_k$, denn es ist $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$.
Schluss von $n-1$ und n auf $n+1$ ($n \geq 1$): So gilt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung

$$f_{(n+1)+k} = f_{n+k} + f_{(n-1)+k} = f_n f_{k-1} + f_{n+1} f_k + f_{n-1} f_{k-1} + f_n f_k$$
$$= (f_n + f_{n-1}) f_{k-1} + (f_{n+1} + f_n) f_k = f_{n+1} f_{k-1} + f_{n+2} f_k = f_{n+1} f_{k-1} + f_{(n+1)+1} f_k. \qquad \square$$

Hilfssatz 2
Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k > 0$ gilt $\mathrm{ggT}(f_{k-1}, f_k) = 1$.

Beweis durch Induktion über k:
Sei $k = 1$. So gilt $\mathrm{ggT}(f_0, f_1) = \mathrm{ggT}(0,1) = 1$.
Schluss von k auf $k+1$ ($k \geq 1$): So gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\mathrm{ggT}(f_k, f_{k+1}) = \mathrm{ggT}(f_k, f_k + f_{k-1}) = \mathrm{ggT}(f_k, f_{k-1}) = \mathrm{ggT}(f_{k-1}, f_k) = 1.$$

Hilfssatz 3
Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \geq b > 0$ gilt $\mathrm{ggT}(f_{a-b}, f_b) = \mathrm{ggT}(f_a, f_b)$.

Beweis:
Mit $n = a - b$ und $k = b$ ist dies äquivalent zu $\mathrm{ggT}(f_n, f_k) = \mathrm{ggT}(f_{n+k}, f_k)$ mit $n \geq 0$ und $k > 0$.
Zunächst ist $\mathrm{ggT}(f_n, f_k)$ ein Teiler von f_n und f_k, also auch von $f_{n+k} = f_n f_{k-1} + f_{n+1} f_k$ nach Hilfssatz 1. Also ist $\mathrm{ggT}(f_n, f_k)$ ein Teiler von $\mathrm{ggT}(f_{n+k}, f_k)$.
Andererseits ist $\mathrm{ggT}(f_{n+k}, f_k)$ ein Teiler von f_{n+k} und f_k und so auch von $f_{n+k} - f_{n+1} f_k = f_n f_{k-1}$ (ebanfalls Hilfssatz1) sowie von $f_n f_k$. Also ist nach Hilfssatz 2 $\mathrm{ggT}(f_{n+k}, f_k)$ ein Teiler von $\mathrm{ggT}(f_n f_{k-1}, f_n f_k) = f_n \cdot \mathrm{ggT}(f_{k-1}, f_k) = f_n$, somit auch von $\mathrm{ggT}(f_n, f_k)$.
Dies zeigt $\mathrm{ggT}(f_n, f_k) = \mathrm{ggT}(f_{n+k}, f_k)$. $\square$

Beweis des Satzes:

Zunächst gilt $\text{ggT}(f_0, f_0) = \text{ggT}(0{,}0) = 0 = f_0$.

Im Folgenden seien a, b nicht beide Null, o. B. d. A. $b > 0$.

Wird nun a mit Rest durch b dividiert so erhält man $q, r \in Z$ mit $a = bq + r$, $q \geq 0$ und $0 \leq r < b$.

Man erhält durch $q-$malige Anwendung der Gleichung $\text{ggT}(a-b, b) = \text{ggT}(a, b)$ schließlich $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(r, b) = \text{ggT}(b, r)$. Durch $q-$malige Anwendung von Hilfssatz 3 erhält man $\text{ggT}(f_a, f_b) = \text{ggT}(f_r, f_b) = \text{ggT}(f_b, f_r)$.

Nun bildet man entsprechend dem Euklidischen Algorithmus eine Folge $a_0, a_1, \dots$ mit $a_0 = a$, $a_1 = b$ und für $i \geq 1$: a_{i+1} als Rest der Division von a_{i-1} durch a_i. Also gilt $a_{i-1} = a_i q_i + a_{i+1}$ für geeignete q_i und $0 \leq a_{i+1} < a_i$, weiter $\text{ggT}(a_{i+1}, a_i) = \text{ggT}(a_i, a_{i-1})$. Damit gibt es ein $h > 1$ mit $a_h = 0$ (Abstieg!), und mit $g = a_{h-1}$ folgt mit Induktion: $g = \text{ggT}(g, 0) = \text{ggT}(a_{h-1}, a_h) = \text{ggT}(a_0, a_1) = \text{ggT}(a, b)$.

Bildet man nun die Folge der Fibonaccizahlen $f_{a_0}, f_{a_1}, \dots, f_{a_h}$, so ergibt sich $f_{a_0} = f_a$, $f_{a_1} = f_b$, $f_{a_{h-1}} = f_g$ und $f_{a_h} = f_0 = 0$, damit gilt nach obiger Überlegung (Anwendung von Hilfssatz 3):

$$\text{ggT}(f_a, f_b) = \text{ggT}(f_g, f_0) = \text{ggT}(f_g, 0) = f_g = f_{\text{ggT}(a,b)}. \qquad \blacksquare$$

Übungen:

Bestimme $\text{ggT}(f_{1960}, f_{2023})$.

Zeige ohne Induktion, dass genau jede dritte Fibonaccizahl (also die Zahlen $f_0, f_3, f_6, \dots$) gerade ist und genau jede vierte Fibonaccizahl (also die Zahlen $f_0, f_4, f_8, \dots$) durch 3 teilbar.

Zeige: Ist f_p eine Primzahl, so ist p eine ungerade Primzahl oder gleich 4.

Zeige, dass $F_1 = F_2 = 1$, $F_4 = 3$ die einzigen Dreierpotenzen unter den Fibonaccizahlen sind.

Jürgen Doenhardt, im Januar 2025