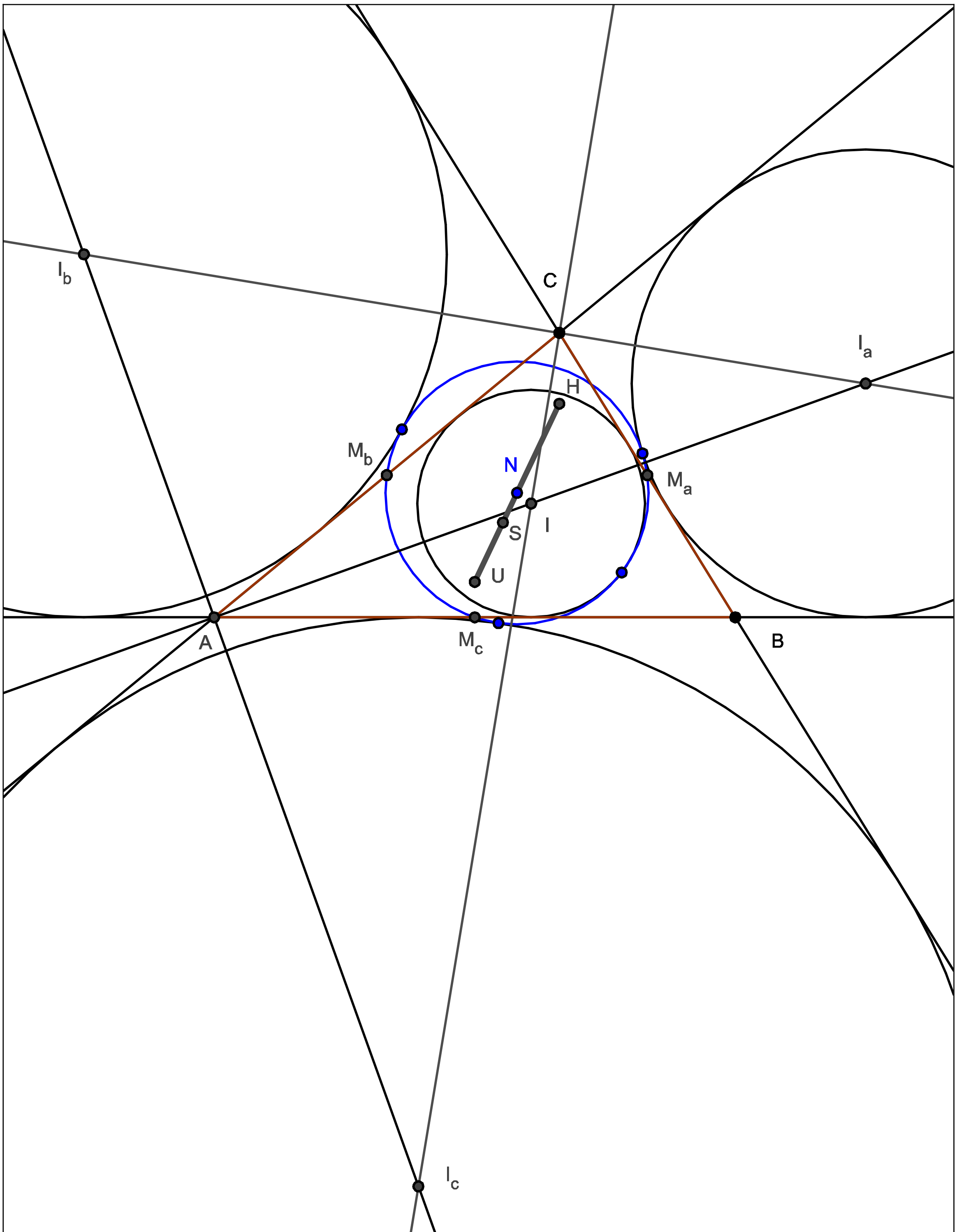
Jürgen Doenhardt

Der große Satz von Feuerbach mit Vektoren

Man kann den großen Satz von Feuerbach auch vektoriell ohne Koordinaten beweisen, siehe [1]



In einem Dreieck seien $A, B, C, I, I_a, I_b, I_c, U, N, H, S$ die Ecken, der Mittelpunkte des Inkreises, der Ankreise, des Umkreises und des Feuerbach-Kreises (Neunpunktekreis), weiter der Höhenpunkt und der Schwerpunkt. Auch die Ortsvektoren zu den Punkten von einem anfangs beliebigen Ursprung werden so benannt. Weiter seien $a, b, c, \rho, \rho_a, \rho_b, \rho_c, r, n$ die Seitenlängen und Radien der Kreise in obiger Reihenfolge, zuletzt $s=\frac{a+b+c}{2}$ der halbe Umfang und F der Flächeninhalt. Es werden nun einige bekannte Beziehungen dieser Größen zusammengefasst.

Eigenschaften von Kreisradien und Punkten 1

$$S=\frac{A+B+C}{3},\ F=\rho\, s=\rho_a(s-a)=\rho_b(s-b)=\rho_c(s-c)=\frac{abc}{4r},$$
$$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\tfrac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4},$$
$$I=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c},\ I_a=\frac{bB+cC-aA}{b+c-a},\ I_b=\frac{cC+aA-bB}{c+a-b},\ I_c=\frac{aA+bB-cC}{a+b-c}.$$

Das Folgende ergibt sich aus dem Satz von Euler und dem kleinen Satz von Feuerbach:

Eigenschaften von Kreisradien und Punkten 2

$$H-U=3(S-U)=2(N-U),\ n=\tfrac{r}{2}.$$

Nach dem Satz von Euler gilt $|\overrightarrow{HS}|=2|\overrightarrow{SU}|$, also $S-H=2(U-S)$, woraus $H-U=3(S-U)$ folgt. Nach dem kleinen Satz von Feuerbach gilt $|\overrightarrow{HU}|=2|\overrightarrow{NU}|$, damit $H-U=2(N-U)$. Weiter entsteht der Feuerbach-Kreis durch zentrische Streckung an S mit Faktor $-\frac{1}{2}$ aus dem Umkreis, da auf ersterem die Seitenmitten, auf letzterem die Ecken des Dreiecks liegen und die Seitenhalbierenden durch S im Verhältnis $2:1$ geteilt werden. Dies zeigt $n=\frac{r}{2}$.

Das folgende Lemma ist auch als *baryzentrische Betragsformel* bekannt.

Lemma

In einem Vektorraum über den reellen Zahlen mit Skalarprodukt seien A, B, C Vektoren und λ, μ, ν reelle Zahlen. So gilt (beachte $|X|^2=X\cdot X$)

$$|\lambda A+\mu B+\nu C|^2=(\lambda+\mu+\nu)\left(\lambda|A|^2+\mu|B|^2+\nu|C|^2\right)-\left(\lambda\mu|A-B|^2+\lambda\nu|A-C|^2+\mu\nu|B-C|^2\right).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&(\lambda+\mu+\nu)\left(\lambda|A|^2+\mu|B|^2+\nu|C|^2\right)=\\
&\quad\lambda^2|A|^2+\mu^2|B|^2+\nu^2|C|^2+\lambda\mu\left(|A|^2+|B|^2\right)+\lambda\nu\left(|A|^2+|C|^2\right)+\mu\nu\left(|B|^2+|C|^2\right)=\\
&\quad\lambda^2|A|^2+\mu^2|B|^2+\nu^2|C|^2+2\lambda\mu\, AB+2\lambda\nu\, AC+2\mu\nu\, BC+\\
&\quad\lambda\mu\left(|A|^2-2AB+|B|^2\right)+\lambda\nu\left(|A|^2-2AC+|C|^2\right)+\mu\nu\left(|B|^2-2BC+|C|^2\right)=\\
&\quad|\lambda A+\mu B+\nu C|^2+\lambda\mu|A-B|^2+\lambda\nu|A-C|^2+\mu\nu|B-C|^2.
\end{aligned}$$

Subtraktion von $\lambda\mu|A-B|^2+\lambda\nu|A-C|^2+\mu\nu|B-C|^2$ liefert die Behauptung. □

Im Dreieck ABC gilt nun $|A-B|=c$, $|A-C|=b$ und $|B-C|=a$.

In Folgenden wird der Umkreismittelpunkt als Ursprung festgelegt mit Ortsvektor $\underline{U=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$. So gilt

Eigenschaften von Kreisradien und Punkten 3

$$|A| = |B| = |C| = r,\ \ H = 3S = A+B+C \text{ und } N = \frac{H}{2} = \frac{A+B+C}{2},$$

so dass sich das Lemma vereinfacht zu

$$|\lambda\, A+\mu\, B+\nu\, C|^2 = (\lambda+\mu+\nu)^2\, r^2 - \left(a^2\mu\,\nu + b^2\lambda\,\nu + c^2\lambda\,\mu\right).$$

Der Inkreis berührt den Feuerbach-Kreis von innen[1]

Um dies zu beweisen, muss man $|\overrightarrow{IN}| = n-\rho = \frac{r}{2}-\rho \geq 0$ zeigen, d. h. der Abstand der Kreismittelpunkte I und N ist die Differenz der Radien, und der Inkreis hat höchstens den Radius des Feuerbach-Kreises. Zunächst gilt

$$\overrightarrow{IN} = N-I = \frac{A+B+C}{2} - \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} = \frac{s-a}{2s}\,A + \frac{s-b}{2s}\,B + \frac{s-c}{2s}\,C.$$

Wählt man im Lemma $\lambda = \frac{s-a}{2s}$, $\mu = \frac{s-b}{2s}$ und $\nu = \frac{s-c}{2s}$, so gilt $\lambda+\mu+\nu = \frac{1}{2}$ und

$$a^2\mu\,\nu + b^2\lambda\,\nu + c^2\lambda\,\mu = \frac{a^2(s-b)(s-c) + b^2(s-a)(s-c) + c^2(s-a)(s-b)}{4s^2} =$$

$$\frac{a^2(a+c-b)(a+b-c) + b^2(b+c-a)(b+a-c) + c^2(c+b-a)(c+a-b)}{16s^2} =$$

$$\frac{a^2\left(a^2-(b-c)^2\right) + b^2\left(b^2-(a-c)^2\right) + c^2\left(c^2-(a-b)^2\right)}{16s^2} =$$

$$\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 + 2abc(a+b+c)}{16s^2} =$$

$$-\frac{F^2}{s^2} + \frac{abc}{4s} = -\frac{F^2}{s^2} + \frac{abc}{4r}\cdot\frac{r}{s} = -\frac{F^2}{s^2} + \frac{F}{s}\cdot r = -\rho^2 + \rho\, r,$$

also gilt $|\overrightarrow{IN}|^2 = \frac{1}{4}r^2 - \rho\, r + \rho^2 = \left(\frac{r}{2}-\rho\right)^2$.

Um $\frac{r}{2}-\rho \geq 0$ zu zeigen, betrachte man $\overrightarrow{UI} = I-U = I = \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} = \frac{a}{2s}A + \frac{b}{2s}B + \frac{c}{2s}C$.

Wählt man im Lemma $\lambda = \frac{a}{2s}$, $\mu = \frac{b}{2s}$ und $\nu = \frac{c}{2s}$, so gilt $\lambda+\mu+\nu=1$ und

$$a^2\mu\,\nu + b^2\lambda\,\nu + c^2\lambda\,\nu = \frac{abc}{4s^2}\cdot(a+b+c) = \frac{abc}{2s} = \frac{abc}{4r}\cdot\frac{2r}{s} = \frac{F}{s}\cdot 2r = 2\rho\, r,$$

also gilt $0 \leq |\overrightarrow{UI}|^2 = \left|\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\right|^2 = r^2-2\rho\, r = r(r-2\rho)$.

Dies ergibt $r-2\rho \geq 0$, also $\rho \leq \frac{r}{2}$, $\frac{r}{2}-\rho \geq 0$ und $|\overrightarrow{IN}| = \frac{r}{2}-\rho$. ■

Man hat damit zusätzlich den Abstand von In- und Umkreismittelpunkt. Der Beweis ist auch mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel möglich, siehe die Anmerkung.

[1] Im Falle eines gleichseitigen Dreiecks fallen Feuerbach-Kreis und Inkreis zusammen.

Die Ankreise berühren den Feuerbach-Kreis von außen

Für den Ankreis mit Mittelpunkt I_c muss man $|\overrightarrow{I_c N}| = n+\rho_c = \frac{r}{2}+\rho_c$ zeigen; d. h. der Abstand der Kreismittelpunkte I_c und N ist die Summe der Radien. Es gilt

$$\overrightarrow{I_c N} = N - I_c = \frac{A+B+C}{2} - \frac{aA+bB-cC}{a+b-c} = -\frac{s-b}{2(s-c)}\,A - \frac{s-a}{2(s-c)}\,B + \frac{s}{2(s-c)}\,C\,.$$

Wählt man im Lemma $\lambda = -\frac{s-b}{2(s-c)}$, $\mu = -\frac{s-a}{2(s-c)}$ und $\nu = \frac{s}{2(s-c)}$, so gilt $\lambda+\mu+\nu = \frac{1}{2}$ und

$$a^2\mu\,\nu + b^2\lambda\,\nu + c^2\lambda\,\mu = \frac{-a^2(s-a)s - b^2(s-b)s + c^2(s-b)(s-a)}{4(s-c)^2} =$$

$$\frac{-a^2(b+c-a)(b+c+a) - b^2(a+c-b)(a+c+b) + c^2(c+a-b)(c+b-a)}{16(s-c)^2} =$$

$$\frac{a^2(a^2-(b+c)^2) + b^2(b^2-(a+c)^2) + c^2(c^2-(a-b)^2)}{16(s-c)^2} =$$

$$\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 - 2abc(a+b-c)}{16(s-c)^2} =$$

$$-\frac{F^2}{(s-c)^2} - \frac{abc}{4(s-c)} = -\frac{F^2}{(s-c)^2} - \frac{abc}{4r}\cdot\frac{r}{s-c} = -\frac{F^2}{(s-c)^2} - \frac{F}{s-c}\cdot r = -\rho_c^2 - \rho_c r\,,$$

also gilt $|\overrightarrow{I_c N}|^2 = \frac{1}{4}r^2 + \rho_c r + \rho_c^2 = \left(\frac{r}{2}+\rho_c\right)^2$ und $|\overrightarrow{I_c N}| = \frac{r}{2}+\rho_c$.

Analog zeigt man die Berühreigenschaft für die beiden anderen Ankreise. ■

Anmerkung

Beweis von $\rho \le \frac{r}{2}$ mit Ungleichung: Es gilt $\frac{1}{r} = \frac{4F}{abc}$ (siehe obige Eigenschaften).

Setzt man nun $x = s-a$, $y = s-b$ und $z = s-c$, so folgt $x+y = 2s-a-b = c$, analog $x+z = b$ und $y+z = a$. Durch dreimalige Anwendung von AM-GM erhält man

$$\frac{\rho}{r} = \frac{F}{s}\cdot\frac{4F}{abc} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc} = \frac{4xyz}{(y+z)(x+z)(x+y)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{yz}}{y+z}\cdot\frac{2\sqrt{xz}}{x+z}\cdot\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \le \frac{1}{2}$$

mit Gleichheit gilt nur für $x=y=z \;\Leftrightarrow\; a=b=c$. ■

Literatur

[1] Stefan Götz und Franz Hofbauer: Ein einfacher Beweis des Satzes von Feuerbach mit koordinatenfreien Vektoren, Open-Access-Publikation, Wien, 2016