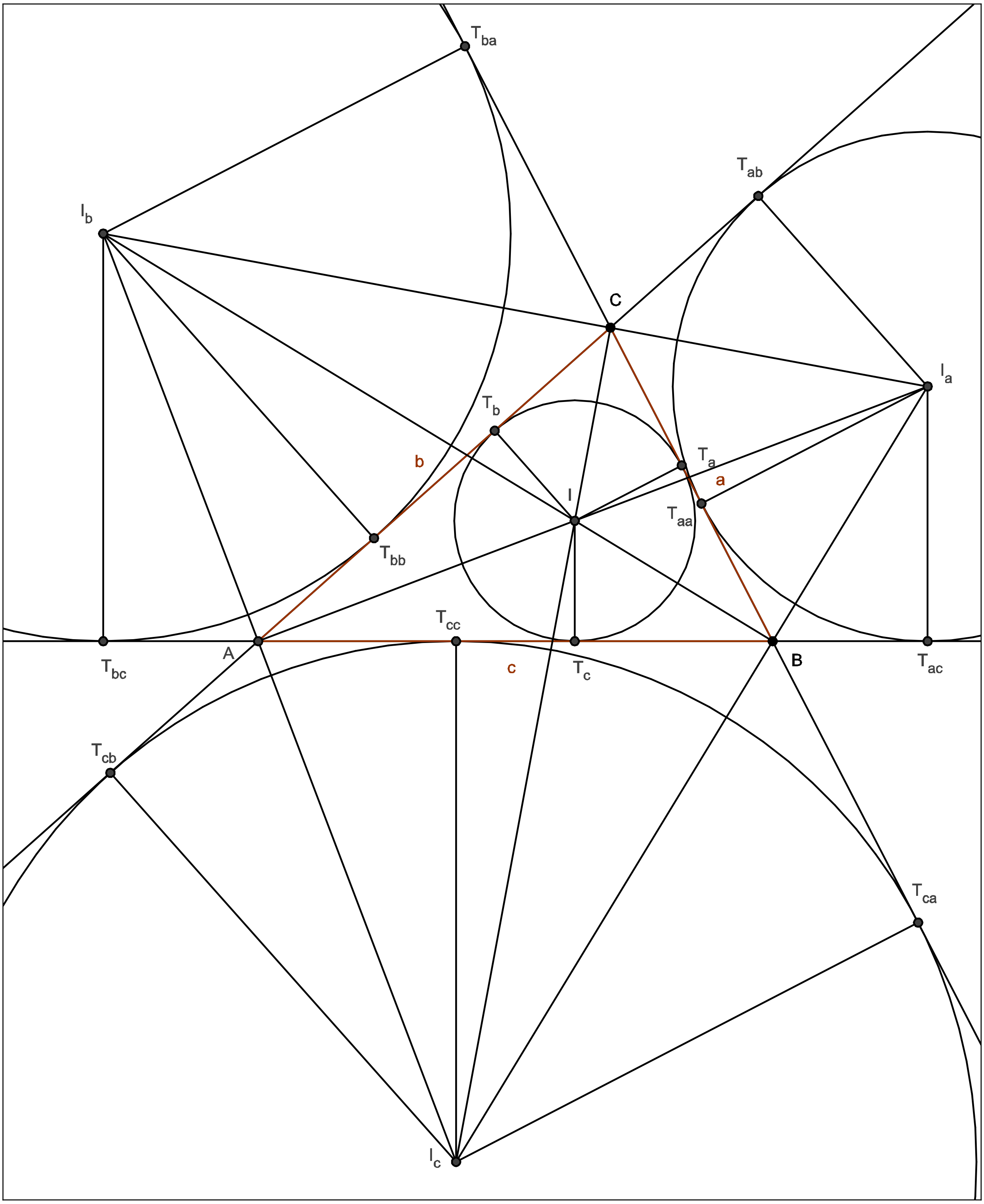
JuMa-Seminar
Geometrie

Jürgen Doenhardt

Jugend trainiert Mathematik

Dreieck mit Inkreis und Ankreisen



Jugend trainiert Mathematik

Zur Wiederholung aus der Dreieckslehre

In einem Dreieck schneiden sich die Winkelhalberienden der Innenwinkel in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises. Dieser berührt die drei Dreiecksseiten.

In einem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden der Außenwinkel zu zwei Innenwinkeln und die Winkelhalbierende des dritten Innenwinkels in einem Punkt, dem Mittelpunkt eines Ankreises. Dieser berührt die Verlängerungen zweier Seiten und die dritte Seite.

Die Radien der Kreise seien $\rho, \rho_a, \rho_b, \rho_c$, die Seitenlängen des Dreiecks a, b, c. Der Flächeninhalt des Dreiecks sei F. Bezeichnungen von Punkten sind wie in der Zeichnung.

Die beiden Tangentenabschnitte einer Tangente von einem Punkt an einen Kreis sind gleichlang und stehen senkrecht auf den Berührradien (Strecke vom Berührpunkt zum Kreismittelpunkt).

Ebenfalls senkrecht aufeinander stehen die Innenwinkel- und Außenwinkelhalbierende in einer Ecke eines Dreiecks, und sie teilen die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten, z. B. die Winkelhalbierende von γ die Seite c, die Gegenseite von C, im Verhältnis $b:a$. (Ein Beweis findet sich in einem separaten Dokument.)

Mittelwerts-Ungleichungen

In Folgenden werden auch Mittelwerte verwendet: HM: harmonisches Mittel, GM: geometrisches Mittel, AM: arithmetisches Mittel, und die entsprechenden Ungleichungen, z. B. AM-GM.

Tangentenabschnitte

Für die Tangentenabschnitte am Inkreis gilt $a+b+c=|AT_b|+|AT_c|+|BT_c|+|BT_a|+|CT_a|+|CT_b|$.

Nimmt man jeweils von den beiden Abschnitten aus einer Ecke nur einen, so erhält man die halbe Summe: $\frac{a+b+c}{2}$. Nenne dies s, so ergibt sich $s=|AT_c|+|BT_a|+|CT_a|=|AT_c|+a$, also $|AT_c|=s-a$.

Analog kann man alle anderen Tangentenabschnitte berechnen; sie sind $s-a$, $s-b$ oder $s-c$.

Man betrachte nun die Tangentenabschnitte an den Ankreisen. Hier gilt $|CT_{cb}|=|CT_{ca}|$, also

$2\,|CT_{cb}|=|CT_{cb}|+|CT_{ca}|=b+|AT_{cb}|+a+|BT_{ca}|=a+b+|AT_{cc}|+|BT_{cc}|=a+b+c$.

Dies ergibt $|CT_{cb}|=|CT_{ca}|=s$, $|AT_{cb}|=|AT_{cc}|=s-b$ und $|BT_{ca}|=|BT_{cc}|=s-a$.

Bei den Ankreisen sind alle Tangentenabschnitte s, $s-a$, $s-b$ oder $s-c$.

Wegen $|CA|+|AT_{cc}|=|AB|+|BT_{aa}|=|BC|+|CT_{bb}|=s$ werden diese Berührpunkte der Ankreise auch *Halbumfangspunkte* genannt; man erhält sie durch Lauf von einer Ecke um den halben Umfang.

Flächeninhalte

Nun werden Flächeninhalte betrachtet.

Die Dreiecke CIB, AIC und BIA haben die Höhe ρ und die Grundseitenlängen a, b und c. Ihre Vereinigung ist das Dreieck ABC. Dies ergibt $F = \frac{a\rho}{2}+\frac{b\rho}{2}+\frac{c\rho}{2} = \rho\cdot\frac{a+b+c}{2} = \rho\cdot s$.

Entsprechend haben die Dreiecke CI_cB, AI_cC und AI_cB die Höhe ρ_c und die Grundseitenlängen a, b und c. Das Dreieck ABC ist die Vereinigung der ersten beiden ohne das dritte. Also gilt

$$F=\frac{a\rho_c}{2}+\frac{b\rho_c}{2}-\frac{c\rho_c}{2}=\rho_c\cdot\frac{a+b-c}{2}=\rho_c\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)=\rho_c\cdot(s-c).$$

Analog beweist man $F=\rho_a(s-a)=\rho_b(s-b)$. Also gilt

$$F=\rho\,s=\rho_a(s-a)=\rho_b(s-b)=\rho_c(s-c).$$

Aufgabe Kr1

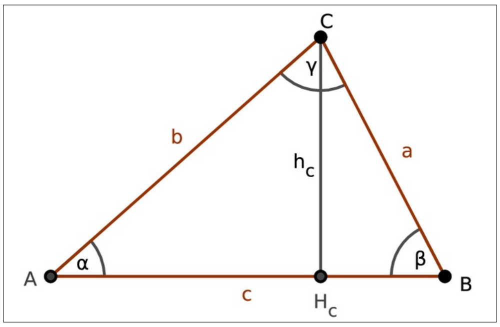
a) Drücke den Kehrwert des Inkreisradius durch die Kehrwerte der Ankreisradien aus.
b) Zeige $\rho_a+\rho_b+\rho_c \geq 9\rho$. Wann gilt Gleichheit?

Es ist $\angle\, T_c AI = 90° - \angle\, I_C AT_{cc} = \angle\, T_{cc} I_c A$ (senkrechte Winkelhalbierende, Winkelsumme im Dreieck $I_c T_{cc} A$). Wegen $\angle\, I T_c A = \angle\, AT_{cc} I_c = 90°$ sind die Dreiecke $AT_c I$ und $I_c T_{cc} A$ ähnlich (zwei Winkel). Dies ergibt $\frac{|T_c I|}{|AT_c|} = \frac{|T_{cc} A|}{|I_c T_{cc}|} \Rightarrow \frac{\rho}{s-a} = \frac{s-b}{\rho_c} \Rightarrow \rho\, \rho_c = (s-a)(s-b)$.

Einsetzen ergibt $F^2 = \rho\, s \cdot \rho_c\, (s-c) = s\, \rho\, \rho_c\, (s-c) = s(s-a)(s-b)(s-c)$ und damit

$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, die *Heronsche Dreiecksformel*[1].

Man kann die Heron-Formel auch ohne die Kreise elementar beweisen.



Seien o. B. d. A. $\alpha < 90°$ und $\beta < 90°$. So gilt $|AH_c| + |H_c B| = c$, also gilt mit $|AH_c| = x > 0$ auch $|H_c B| = c - x > 0$. Man erhält mit dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + h_c^2 = b^2, \qquad (1)$$

$$(c-x)^2 + h_c^2 = a^2, \text{ also}$$

$$c^2 - 2cx + x^2 + h_c^2 = a^2. \qquad (2)$$

(1) – (2) liefert $2cx - c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

Für den Flächeninhalt gilt $F = \frac{1}{2}\, c\, h_c$, also $4F^2 = c^2 h_c^2$. Dies ergibt mit (1):

$$4F^2 = c^2(b^2-x^2) = c^2(b+x)(b-x) = c^2 \cdot \frac{2bc + (b^2+c^2-a^2)}{2c} \cdot \frac{2bc - (b^2+c^2-a^2)}{2c},$$

$$16F^2 = \left((b+c)^2 - a^2\right) \cdot \left(a^2 - (b-c)^2\right) = (b+c+a) \cdot (b+c-a) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c).$$

Division durch 16 (jeden Faktor rechts durch 2) und Wurzelziehen liefert die Heron-Formel.

Eine etwas andere Umformung liefert

$$16F^2 = (2bc)^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2 = 4b^2c^2 - \left(b^4+c^4+a^4+2b^2c^2-2b^2a^2-2c^2a^2\right).$$

Dies ergibt eine andere Formel für die Dreiecksfläche aus den Seiten:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}. \qquad ■$$

Mit $u = a^2$, $v = b^2$ und $w = c^2$ ergibt sich weiter $(4F)^2 = (u+v+w)^2 - 2(u^2+v^2+w^2)$. Sind also die Seitenlängen Wurzeln aus ganzen Zahlen, so auch der vierfache Flächeninhalt.

[1]Heron von Alexandria, * um 10 n. Chr., † um 70 n. Chr, griechischer Mathematiker und Ingenieur.

Aufgabe Kr2

Welches unter allen Dreiecken mit gleichem Umfang hat den größten Flächeninhalt?

Aufgabe Kr3

Zeige, dass in der folgenden Tabelle jedes Produkt der Werte zweier Spalten in der oberen Zeile gleich dem Produkt der Werte der beiden anderen Spalten in der unteren Zeile ist.

ρ	ρ_a	ρ_b	ρ_c
s	$s-a$	$s-b$	$s-c$

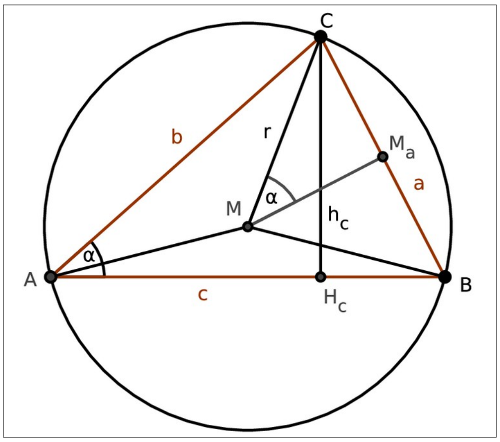
Aufgabe Kr4

Zeige $F = \sqrt{\rho\,\rho_a \rho_b \rho_c}$.

Eine Ungleichung zwischen dem Inkreis-und dem Umkreisradius

Sei r der *Umkreisradius* des Dreiecks ABC. Es wird nun gezeigt: $\rho \leq \frac{r}{2}$.

Auch der Umkreisradius lässt sich aus den Seiten und dem Flächeninhalt des Dreiecks berechnen.



Sei o. B. d. A. $\alpha < 90°$. Sei M_a der Mittelpunkt der Seite a. Das Dreieck CMB ist gleichschenklig. Es folgt $\angle\, CM_aM = \angle\, CH_cA = 90°$, weiter $\angle\, H_cAC = \alpha = \angle\, BMC/2 = \angle\, M_aMC$ wegen des Umfangswinkelsatzes. Die Dreiecke AH_cC und MM_aC sind also ähnlich (zwei Winkel). So gilt

$$\frac{h_c}{b} = \frac{a/2}{r} \Rightarrow h_c = \frac{ab}{2r} \Rightarrow F = \frac{h_c\,c}{2} = \frac{abc}{4r} \Rightarrow r = \frac{abc}{4F}.$$

Setzt man nun $x = s-a$, $y = s-b$ und $z = s-c$ (die Tangentenabschnitte am Inkreis, s. o.), so folgt $x+y = c$, $x+z = b$ und $y+z = a$. Dies ergibt durch dreimalige Anwendung von AM-GM

$$\frac{r}{\rho} = \frac{abc}{4F}\cdot\frac{s}{F} = \frac{sabc}{4s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{(y+z)(x+z)(x+y)}{4xyz} = 2\cdot\frac{y+z}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{x+z}{2\sqrt{xz}}\cdot\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} \geq 2.$$

Gleichheit gilt auch hier nur bei $a=b=c$. ■

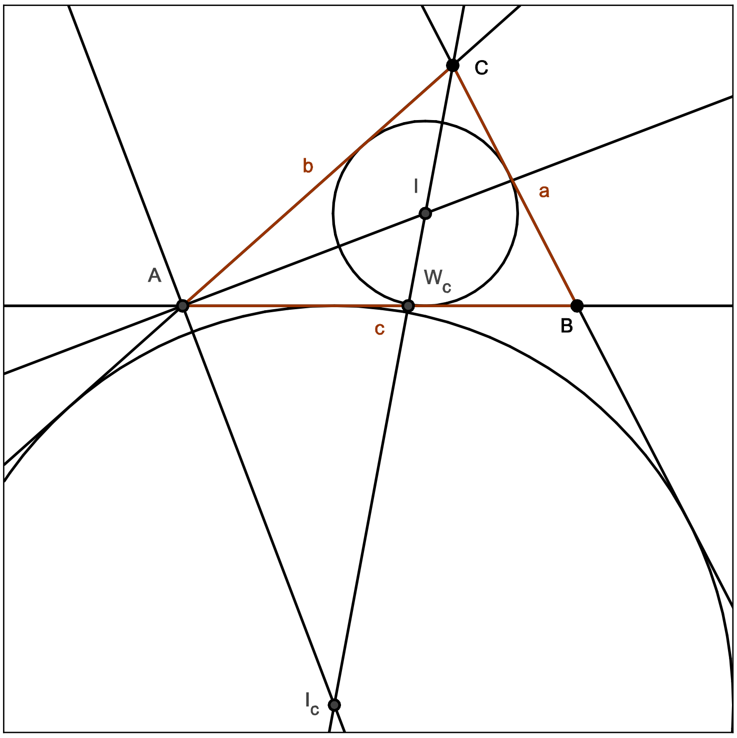
Umgekehrt gilt für beliebige positive reelle x, y, z, dass man ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = y+z$, $b = x+z$ und $c = x+y$ bilden kann. Für dieses gilt $x = s-a$, $y = s-b$, $z = s-c$ und $x+y+z = s$, d. h. diese vier Größen sind die Tangentenabschnitte des Inkreises und der Ankreise, wie oben angegeben. Dies kann zum Beweis von Ungleichungen verwendet werden, siehe auch [4].

Berechnung der Kreismittelpunkte mit Vektoren

Sind A, B, C die Ortsvektoren der Ecken zu einem beliebigen, aber festen Ursprung, so gilt für die Ortsvektoren des Inkreismittelpunktes I und der Ankreismittelpunkte I_a, I_b, I_c:

$$I=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c},\ I_a=\frac{bB+cC-aA}{b+c-a},\ I_b=\frac{cC+aA-bB}{c+a-b},\ I_c=\frac{aA+bB-cC}{a+b-c}.$$

Beweis



Mit der Teilung der Innenwinkelhalbierenden von C auf AB erhält man

$$a\cdot(W_c-A)=b\cdot(B-W_c)\ \Rightarrow\ aW_c-aA=bB-bW_c\ \Rightarrow\ aW_c+bW_c=aA+bB\ \Rightarrow$$

$$W_c=\frac{aA+bB}{a+b}\ \Rightarrow\ W_c-A=\frac{aA+bB-aA-bA}{a+b}=\frac{b}{a+b}(B-A)\ \Rightarrow\ |W_c-A|=\frac{bc}{a+b}.$$

Mit der Teilung der Innenwinkelhalbierenden von A auf W_cC erhält man

$$b\cdot(I-W_c)=|W_c-A|\cdot(C-I)\ \Rightarrow\ b\cdot(I-W_c)=\frac{bc}{a+b}(C-I)\ \Rightarrow$$

$$I-\frac{aA+bB}{a+b}=\frac{c}{a+b}(C-I)\ \Rightarrow\ aI+bI-aA-bB=cC-cI\ \Rightarrow\ I=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}.$$

Mit der (äußeren !) Teilung der Außenwinkelhalbierenden von A auf W_cC erhält man

$$b\cdot(I_c-W_c)=|W_c-A|\cdot(I_c-C)\ \Rightarrow\ b\cdot(I_c-W_c)=\frac{bc}{a+b}(I_c-C)\ \Rightarrow$$

$$I_c-\frac{aA+bB}{a+b}=\frac{c}{a+b}(I_c-C)\ \Rightarrow\ aI_c+bI_c-aA-bB=cI_c-cC\ \Rightarrow\ I_c=\frac{aA+bB-cC}{a+b-c}.$$

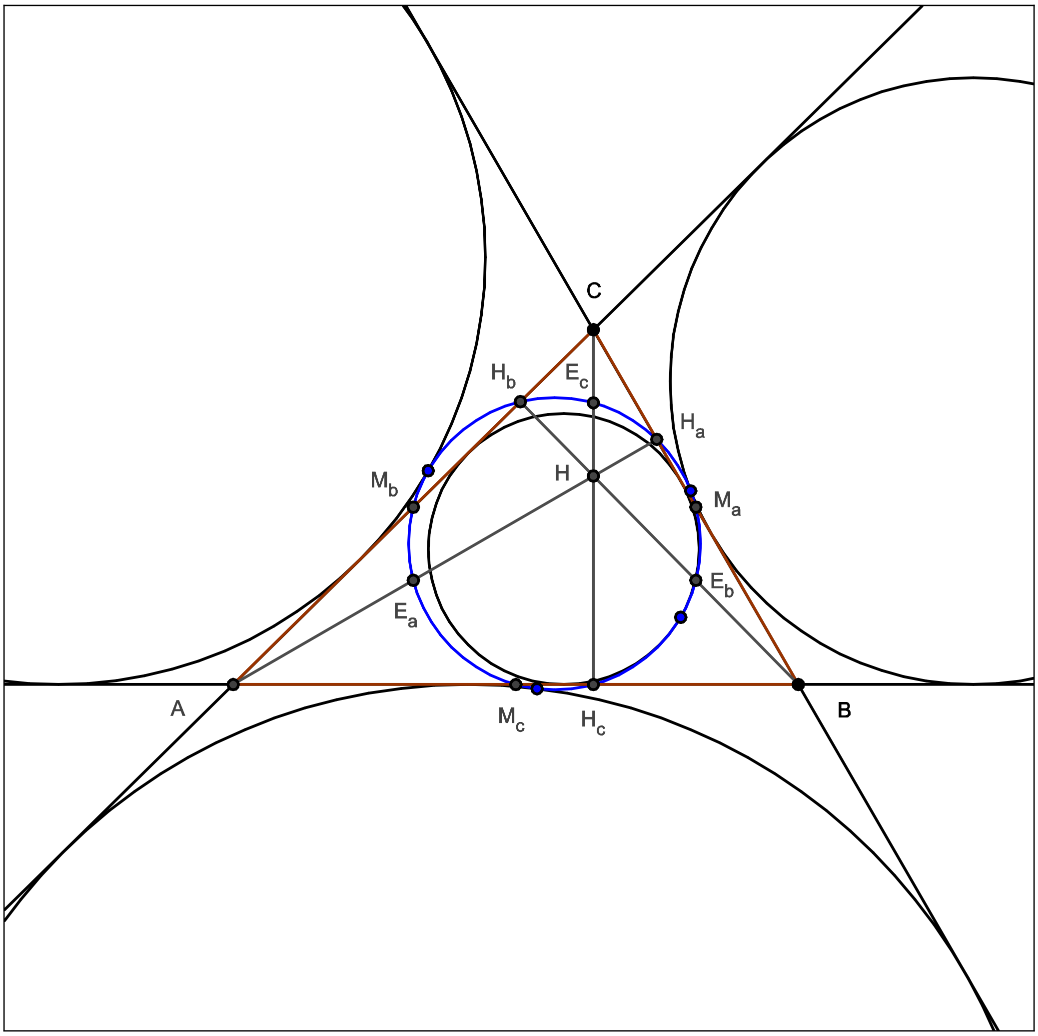
Analog berechnet man die Mittelpunkte der beiden anderen Ankreise.

Der große Satz von Feuerbach[1]

In einem Dreieck schneiden sich die drei Höhen in dem *Höhenpunkt*, hier H. Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ und $\overline{HC}$ (*Euler-Punkte*) liegen mit den Seitenmitten und den Höhenfußpunkten auf einem Kreis, dem Neunpunktekreis oder Feuerbach-Kreis. Der große Satz von Feuerbach besagt

Großer Satz von Feuerbach

Der Feuerbach-Kreis berührt die drei Ankreise und den Inkreis.[2]



Hier werden zwei Beweise nur skizziert. Vollständig sind sie in zwei separaten Dokumenten.

Beweis 1: Mit Inversion am Kreis

Betrachte den Feuerbach-Kreis, den Inkreis und den Ankreis an die Seite c. Bei $a=b$ berühren sich die Kreise auf dem Mittelpunkt M_c. Ansonsten kann man wegen $|AT_{cc}|=|T_c B|=s-b$ einen Kreis um M_c legen, der durch T_c und T_{cc} geht. Er schneidet den Inkreis und Ankreis senkrecht. Eine Inversion an dem Kreis um M_c bildet diese beiden Kreise auf sich ab und den Feuerbach-Kreis auf eine Gerade. Man kann nun zeigen, dass diese Gerade eine innere Tangente des Inkreises und Ankreises ist; die andere ist c. Eine Inversion erhält Berühreigenschaften, so folgt die Behauptung.

[1]Karl-Wilhelm Feuerbach, *1800, †1834, deutscher Mathematiker.

[2]Beim gleichseitigen Dreieck berührt der Feuerbach-Kreis den Inkreis nicht, sondern fällt mit ihm zusammen.

Beweis 2: Vektoriell, siehe auch [2]

Der Radius des Feuerbach-Kreises ist $\frac{r}{2}$, weil er durch die Seitenmitten geht. Sei der Mittelpunkt N. Wählt man als Koordinaten-Ursprung den Umkreismittelpunkt, so gilt $N=\frac{A+B+C}{2}$. Man kann nun alle Vektor-Längen $|\lambda\ A+\mu\ B+\nu\ C|$ (λ,μ,ν reell) aus λ,μ,ν,a,b,c und r berechnen und erhält jeweils mit geeigneten λ,μ,ν und $F=\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$:

$$|\overrightarrow{IN}|=|N-I|=\frac{r}{2}-\rho,\ |\overrightarrow{I_aN}|=|N-I_a|=\frac{r}{2}+\rho_a,\ |\overrightarrow{I_bN}|=|N-I_b|=\frac{r}{2}+\rho_b,\ |\overrightarrow{I_cN}|=|N-I_c|=\frac{r}{2}+\rho_c. \ \blacksquare$$

Umkreis, Inkreis und Ankreise bei rechtwinkligen Dreiecken, siehe auch [3]

Aufgabe Kr5

Zeige, dass im rechtwinkligen Dreieck $\rho\leq\frac{r}{\sqrt{2}+1}$ gilt. Für welche Dreiecke gilt Gleichheit?

Aufgabe Kr6

Zeige: $(s-\rho_a)(s-\rho_b)(s-\rho_c)=s^2\left((a+b+c)-(\rho+\rho_a+\rho_b+\rho_c)\right)$

Aufgabe Kr7

Zeige elementargeometrisch und durch Rechnung:

Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn $\rho+\rho_a+\rho_b+\rho_c=a+b+c$ gilt

Aufgabe Kr8

Zeige $\left(s^2-\rho_a^2\right)\left(s^2-\rho_b^2\right)\left(s^2-\rho_c^2\right)=s^4\left((a^2+b^2+c^2)-(\rho^2+\rho_a^2+\rho_b^2+\rho_c^2)\right)$

Insgesamt ergibt sich mit denselben Überlegungen wie bei Kr8, dass ein Dreieck auch genau dann rechtwinklig ist, wenn $\rho^2+\rho_a^2+\rho_b^2+\rho_c^2=a^2+b^2+c^2$ gilt. Dies ist zusammen mit Kr8 die Behauptung der 2. Aufgabe in der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1986:

Ein Dreieck habe die Seitenlängen a,b,c, den Inkreisradius r und die Ankreisradien r_a,r_b,r_c.

Man beweise

a) Das Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn $r+r_a+r_b+r_c=a+b+c$ gilt.

b) Das Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn $r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2=a^2+b^2+c^2$ gilt.

Literatur

[1] Formeln: Physik, Chemie, Mathematik, Buch und Zeit Verlag, Köln, 1971 (Beweis der Heron-Formel ohne die Kreise)

[2] Stefan Götz und Franz Hofbauer: Ein einfacher Beweis des Satzes von Feuerbach mit koordinatenfreien Vektoren, Open-Access-Publikation, Wien, 2016

[3] Bundeswettbewerb Mathematik, Aufgaben und Lösungen 1983-1987, Ernst-Klett-Verlag, 1987

[4] Arthur Engel, Problem Solving Strategies, Springer Science and Business Media Inc., 1998

Lösungen

Aufgabe Kr1

Zu a): $\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}=\frac{s-a}{F}+\frac{s-b}{F}+\frac{s-c}{F}=\frac{3s-(a+b+c)}{F}=\frac{s}{F}=\frac{1}{\rho}$.

Zu b): Mit AM-HM folgt

$$\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}\right)\right)^{-1}\leq\frac{\rho_a+\rho_b+\rho_c}{3}\quad\Leftrightarrow\quad 3\cdot\left(\frac{1}{\rho}\right)^{-1}\leq\frac{\rho_a+\rho_b+\rho_c}{3}\quad\Leftrightarrow\quad 9\rho\leq\rho_a+\rho_b+\rho_c.$$

Gleichheit gilt bei $\rho_a=\rho_b=\rho_c \;\Leftrightarrow\; s-a=s-b=s-c \;\Leftrightarrow\; a=b=c$. ■

Aufgabe Kr2

Das gleichseitige. Gleicher Umfang ist dasselbe wie gleicher halber Umfang s. Mit AM-GM folgt

$$F^2=s(s-a)(s-b)(s-c)\leq s\cdot\left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3=s\cdot\frac{s^3}{27}\quad\Leftrightarrow\quad F\leq\frac{s^2}{3\sqrt{3}}.$$

Gleichheit gilt bei $s-a=s-b=s-c \;\Leftrightarrow\; a=b=c$. ■

Aufgabe Kr3

Analog zum Beweis von $\rho\,\rho_c=(s-a)(s-b)$ zeigt man, dass die Dreiecke, $AT_{ac}I_a$ und $I_cT_{cc}A$ ähnlich sind. Mit $|T_{ac}I_a|=\rho_a$, $|AT_{ac}|=s$, $|T_{cc}A|=s-b$ und $|I_cT_{cc}|=\rho_c$ folgt $\frac{\rho_a}{s}=\frac{s-b}{\rho_c} \Rightarrow$ $\rho_a\rho_c=s(s-b)$. Die übrigen vier Gleichungen erhält man durch zyklisches Vertauschen der Ecken aus dieser Gleichung und der Gleichung $\rho\,\rho_c=(s-a)(s-b)$.

Einfacher ist es allerdings mit der nun bewiesenen Heron-Formel. Durch dieselbe Permutation dreier Zahlen seien (a,b,c) zu (x,y,z) und (ρ_a,ρ_b,ρ_c) zu (ρ_x,ρ_y,ρ_z) permutiert. So gilt

$$\rho\rho_x=\frac{F}{s}\cdot\frac{F}{s-x}=\frac{s(s-x)(s-y)(s-z)}{s(s-x)}=(s-y)(s-z)\text{ und}$$

$$\rho_x\rho_y=\frac{F}{s-x}\cdot\frac{F}{s-y}=\frac{s(s-x)(s-y)(s-z)}{(s-x)(s-y)}=s(s-z).$$ ■

Aufgabe Kr4

$\rho\,\rho_a\rho_b\rho_c=\rho_a\rho_b\cdot\rho\rho_c=\rho_a\rho_b\cdot(s-a)(s-b)=\rho_a(s-a)\cdot\rho_b(s-b)=F^2$ und Wurzelziehen. ■

Aufgabe Kr5

Sei o. B. d. A. der rechte Winkel bei C.

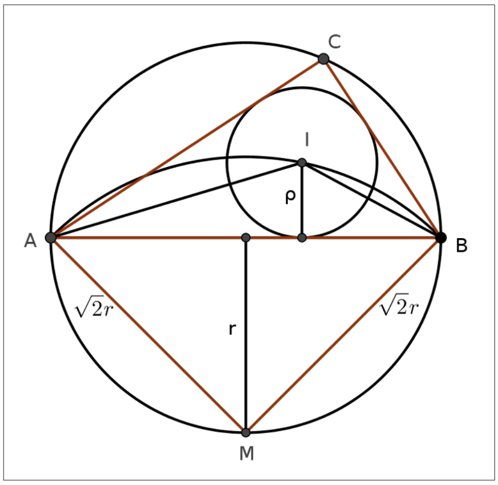
a) Lösung rechnerisch: Es gilt $c^2=a^2+b^2$ und $F=\frac{ab}{2}$, also auch $4F^2=a^2b^2$.

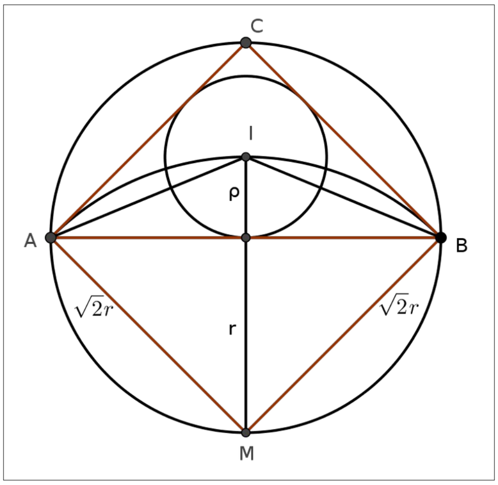
Mit AM-GM folgt $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ und $a^2+b^2\geq 2ab$, mit Wurzelziehen $\sqrt{a^2+b^2}\geq\sqrt{2}\sqrt{ab}$, dies ergibt

$$\frac{r}{\rho}=\frac{abc}{4F}\cdot\frac{s}{F}=\frac{sabc}{a^2b^2}=\frac{(a+b+c)c}{2ab}=\frac{(a+b)c}{2ab}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{ab}}+\frac{a^2+b^2}{2ab}\geq\sqrt{2}+1.$$

Gleichheit gilt nur bei $a=b$, also beim gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC ■

b) Lösung elementargeometrisch





Die Seite c ist nach der Umkehrung des Thales-Satzes Durchmesser des Umkreises, also gilt $c=2r$. Des Weiteren gilt $\alpha+\beta=90°$, und I liegt auf den Winkelhalbierenden von α und β, dies ergibt

$$\angle AIB=180°-(\alpha/2)-(\beta/2)=180°-45° = 135°.$$

I liegt also auf einem Kreisbogen über der Strecke AB mit dem Umfangswinkel $135°$. Sei M der Mittelpunkt des Bogens, so gilt für den Mittelpunktswinkel $\angle AMB = 2\cdot 135° = 270°$ (überstumpf), damit liegen M und I auf verschiedenen Seiten der Geraden AB, und das Dreieck AMB ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $|AM|=|BM|=c/\sqrt{2}=\sqrt{2}r$ und der Höhe r über $|AB|$.
Der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist die Höhe des Dreiecks ABI. Er ist bei festem c maximal, wenn die beiden Teilbögen AI und IB gleich lang sind. Dies gilt aus Symmeteriegründen genau dann, wenn auch das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig ist. Dann ist das Viereck $AMBC$ ein Quadrat mit den Diagonalen AB und MC und der Seitenlänge $\sqrt{2}r$, dabei liegt I auf MC.
Dies ergibt

$$\sqrt{2}r = |MI| = \rho + r \quad\Rightarrow\quad \rho = r\cdot(\sqrt{2}-1) = r\cdot\frac{(\sqrt{2})^2-1^2}{\sqrt{2}+1} = \frac{r}{\sqrt{2}+1}.$$

Ist das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig, so folgt $\rho = \dfrac{r}{\sqrt{2}+1}$, ansonsten $\rho \le \dfrac{r}{\sqrt{2}+1}$. ■

Aufgabe Kr6

Mit $E=(s-\rho_a)(s-\rho_b)(s-\rho_c)$ erhält man durch Ausmultiplizieren

$E=s^3-(\rho_a+\rho_b+\rho_c)\,s^2+(\rho_a\rho_b+\rho_a\rho_c+\rho_b\rho_c)\,s-\rho_a\rho_b\rho_c$ mit

$\rho_a\rho_b+\rho_a\rho_c+\rho_b\rho_c=s(s-c)+s(s-b)+s(s-a)=s(3s-c-b-a)=s^2$ und

$\rho_a\rho_b\rho_c=s(s-c)\rho_c=s\,F=s^2\rho$ nach Kr3.

Dies ergibt zusammengesetzt

$E=s^3-(\rho_a+\rho_b+\rho_c)\,s^2+s^2 s-s^2\rho = s^2\big(2s-(\rho+\rho_a+\rho_b+\rho_c)\big)$, also gilt

$E = s^2\big((a+b+c)-(\rho+\rho_a+\rho_b+\rho_c)\big)$. ■

Aufgabe Kr7

Nach Aufgabe Kr6 ist zu zeigen: Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt:
$\rho_a = s \vee \rho_b = s \vee \rho_c = s$. Es genügt $\rho_c = s$ zu betrachten; die anderen Fälle sind analog.

Für diesen Fall wird gezeigt: $\rho_c = s \;\Leftrightarrow$ Das Dreieck ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.

a) elementargeometrisch: Das Viereck $CT_{cb}I_cT_{ca}$ ist ein rechtwinkliger Drachen mit rechten Winkeln bei T_{ca} und T_{cb} und nur bei $\rho_c = s$ ein Quadrat mit rechtem Winkel bei C.

b) rechnerisch: $\rho_c = s \;\Leftrightarrow\; F = \rho_c(s-c) = s(s-c) \;\Leftrightarrow\; s(s-a)(s-b)(s-c) = F^2 = s^2(s-c)^2$

$\Leftrightarrow\; (s-a)(s-b) = s(s-c) \;\Leftrightarrow\; s^2 - as - bs + ab = s^2 - cs \;\Leftrightarrow\; ab = as + bs - cs$

$\Leftrightarrow\; 2ab = 2s\cdot(a+b-c) = (a+b+c)\cdot(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2 \;\Leftrightarrow\; c^2 = a^2 + b^2.$ ■

Aufgabe Kr8

Mit $E = \left(s^2 - \rho_a^2\right)\left(s^2 - \rho_b^2\right)\left(s^2 - \rho_c^2\right)$ erhält man durch Ausmultiplizieren

$E = s^6 - s^4\left(\rho_a^2 + \rho_b^2 + \rho_c^2\right) + s^2\left(\rho_a^2\rho_b^2 + \rho_a^2\rho_c^2 + \rho_b^2\rho_c^2\right) - \rho_a^2\rho_b^2\rho_c^2,$

$\rho_a^2\rho_b^2\rho_c^2 = \left(\rho_a\rho_b\rho_c\right)^2 = s^4\rho^2$ nach Kr7, damit gilt $E = s^2G - s^4\left(\rho^2 + \rho_a^2 + \rho_b^2 + \rho_c^2\right)$ mit

$G = s^4 + \rho_a^2\rho_b^2 + \rho_a^2\rho_c^2 + \rho_b^2\rho_c^2 = s^4 + s^2(s-c)^2 + s^2(s-b)^2 + s^2(s-a)^2$ nach Kr3, also gilt

$G = s^2\left(4s^2 - 2s(c+b+a) + c^2 + b^2 + a^2\right) = s^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, dies ergibt

$E = s^4\left(\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left(\rho^2 + \rho_a^2 + \rho_b^2 + \rho_c^2\right)\right).$ ■