Jürgen Doenhardt

Boolesche Algebren, die etwas anderen Algebren

Boolesche Algebren[1] kommen häufig in der Logik und Mengenlehre vor. Daher ist eine Kenntnis nützlich; interessant sind die Unterschiede zu den bekannten Zahlenalgebren.

Definition:

Eine Menge B mit mindestens zwei Elementen[2] und zwei Verknüpfungen $+: B\times B \to B$ und $\cdot: B\times B\to B$ heißt *Boolesche Algebra*, wenn folgende Axiome gelten

1) $a+b=b+a$ für alle $a,b\in B$,
2) $a\cdot b=b\cdot a$ für alle $a,b\in B$,
3) $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ für alle $a,b,c\in B$,
4) $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$ für alle $a,b,c\in B$,
5) es gibt ein $0\in B$ mit $a+0=a$ für alle $a\in B$,
6) es gibt ein $1\in B$ mit $a\cdot 1=a$ für alle $a\in B$,

zu jedem $a\in B$ gibt es ein $\bar{a}\in B$, so dass gilt

7) $a+\bar{a}=1$ mit einem $1\in B$ gemäß 6),
8) $a\cdot\bar{a}=0$ mit einem $0\in B$ gemäß 5).

Man nennt 1) und 2) die Kommutativgesetze, 3) und 4) die Distributivgesetze, 5) und 6) die Gesetze vom neutralen Element, sowie das Gesetz mit den Gleichungen 7) und 8) das Gesetz vom komplementären Element.

Erste Beobachtungen

Als Beispiel für eine Boolesche Algebra kann man die Potenzmenge $P(M)$ (Menge aller Teilmengen) einer nichtleeren Menge M verwenden, mit Vereinigung $\cup$ als Operation + und Durchschnitt $\cap$ als Operation $\cdot$. Man betrachte alle Gleichungen zuerst am Beispiel.

Bei einem Vergleich mit Axiomensystemen für Zahlenalgebren sollte auffallen:

1) Das zweite Distributivgesetz gilt in Zahlenalgebren nicht.
2) Komplementäre Elemente sind keine inversen Elemente, sonst müsste $a+\bar{a}=0$ bzw. $a\cdot\bar{a}=1$ gelten. Man kann die Operationen nicht “invertieren”.
3) Die Assoziativgesetze $(a+b)+c=a+(b+c)$ bzw. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ fehlen.

Eindeutigkeit

In den Axiomen wird die Existenz von einem $0\in B$, $1\in B$ und $\bar{a}\in B$ gefordert. Es wird nun gezeigt, dass diese Elemente eindeutig sind.

Sind $0,o\in B$ Elemente, die 5) erfüllen, so gilt $o+0=o$ und $0+o=0$. Dies zeigt $0=o$.

Sind aber $1,l\in B$ Elemente, die 6) erfüllen. so gilt $l\cdot 1=l$ und $1\cdot l=1$. Dies zeigt $1=l$.

Sind nun $\bar{a}$ und a' zu $a\in B$ Elemente, die 7) und 8) erfüllen. So gilt

$$\bar{a}=\bar{a}\cdot 1=\bar{a}\cdot(a+a')=(\bar{a}\cdot a)+(\bar{a}\cdot a')=(a\cdot\bar{a})+(\bar{a}\cdot a')=0+(\bar{a}\cdot a')=(\bar{a}\cdot a')+0=\bar{a}\cdot a'.$$

Tauscht man überall $\bar{a}$ und a' gegeneinander aus, so folgt $a'=a'\cdot\bar{a}$. Dies zeigt $\bar{a}=a'$. ■

[1] George Boole (*1815, †1864), irischer Mathematiker und Logiker. Das hier gezeigte Axiomsystem mit nur 8 Gleichungen geht auf den amerikanischen Mathematiker Edward Vermilye Huntington (*1874, †1952) zurück.
[2] Viele Autoren lassen auch Boolesche Algebren mit $|B|=1$ zu, z. B. die Potenzmengenalgebra über der leeren Menge.

Im Beispiel ist 0 die leere Menge $\{\}$, 1 die Menge M. Zu a ist $\bar{a}$ die Restmenge $M \setminus a$. Wegen $|B| \geq 2$ gilt $0 \neq 1$ und $a \neq \bar{a}$ für alle $a \in B$, Beweis später.

Das Dualitätsprinzip

Zu einem Ausdruck erhält man den *duale* Ausdruck (die duale Gleichung), indem man überall $+$, $\cdot$ und $0,1$ gegeneinander austauscht. So gilt bei den Axiomen, dass mit jeder Gleichung auch die duale Gleichung gilt. Man kann also in jedem Beweis einer Gleichung die dualen Gleichungen einsetzen, so erhält man einen Beweis für die duale Gleichung.

Vereinfachung der Schreibweise

Angeregt von Zahlenalgebren wird im Folgenden Punktrechnung von Strichrechnung verwendet, so wird z. B. statt $a+(b \cdot c)$ einfach $a+b \cdot c$ geschrieben. Dies spart Klammern. Auch wird die Anwendung der Kommutativgesetze nicht mehr explizit erwähnt.

Vorsicht ist hier beim Dualitätsprinzip geboten: Vor Konstruktion einer dualen Gleichung muss man erst alle Klammern setzen, so ist der duale Ausdruck zu $a+b \cdot c$ nicht $a \cdot b+c$, sondern $a \cdot (b+c)$.

Der Idempotenzsatz

Unter *Idempotenz* versteht man man die Verknüpfung eines Elements mit sich selbst, also Ausdrücke wie $a+a$ und $a \cdot a$. Während man bei Zahlenalgebren normalerweise zu neuen Elementen kommt ($2a$ bzw. a^2), gilt bei Booleschen Algebren für alle $a \in B$:

$$a+a=a,$$

$$a \cdot a=a.$$

Beweis: Es gilt $a=a+0=a+a \cdot \bar{a}=(a+a) \cdot (a+\bar{a})=(a+a) \cdot 1=a+a$. ■

Die andere Gleichung folgt mit dem Dualitätsprinzip.

Auslöschung (Extinktion)

Es gilt $a+0=a$ für alle $a \in B$. Was ist $a \cdot 0$? In Zahlenalgebren gilt $a \cdot 0=0$. Das gilt hier auch. Für alle $a \in B$ gilt:

$$a \cdot 0=0,$$

$$a+1=1.$$

Der Beweis ist schwieriger als in Zahlenalgebren. Man zeigt erst $a \cdot 0+a=a$ und $a \cdot 0+\bar{a}=\bar{a}$:

$$a \cdot 0+a=a+a \cdot 0=(a+a) \cdot (a+0)=a \cdot a=a,$$

$$a \cdot 0+\bar{a}=\bar{a}+a \cdot 0=(\bar{a}+a) \cdot (\bar{a}+0)=1 \cdot \bar{a}=\bar{a}$$

mit den Axiomen und dem Idempotenzsatz. Nun wird zusammengesetzt:

$$a \cdot 0=a \cdot 0+0=a \cdot 0+a \cdot \bar{a}=(a \cdot 0+a) \cdot (a \cdot 0+\bar{a})=a \cdot \bar{a}=0.$$

Die andere Gleichung folgt mit dem Dualitätsprinzip. Bei der Multiplikation *löscht die* 0 *jedes Element aus* (macht es zu 0). Die 1 löscht jedes Element bei der Addition aus. ■

Die Annahme $0=1$ führt zu $a=a \cdot 1=a \cdot 0=0$ für alle $a \in B$, also $B=\{0\}$, mit Widerspruch. Also gilt $0 \neq 1$. Die Annahme $a=\bar{a}$ für ein $a \in B$ führt mit $0=a \cdot \bar{a}=a \cdot a=a=a+a=a+\bar{a}=1$ ebenfalls zum Widerspruch. Also gilt $a \neq \bar{a}$ für alle $a \in B$. ■

Absorption (Verschmelzung)

Es wurde bereits erwähnt, dass komplementäre Elemente keine inversen sind. Man kann eine Addition aber mit einer Multiplikation rückgängig machen (*absorbieren*), ebenso kann man eine Multiplikation mit einer Addition absorbieren.

Für alle $a, b \in B$ gilt:

$(a+b)\cdot a=a$,

$(a\cdot b)+a=a$.

Der Beweis ist einfach mit Auslöschung: $(a+b)\cdot a=(a+b)\cdot(a+0)=a+b\cdot 0=a+0=a$.
Die andere Gleichung folgt mit dem Dualitätsprinzip. ■

Die Assoziativgesetze

Die Assoziativgesetze fehlen bei den Axiomen, weil sie sich mit diesen und Folgerungen beweisen lassen. Für alle $a, b, c \in B$ gilt:

$(a+b)+c = a+(b+c)$,

$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.

Zum Beweis setzt man $(a+b)+c=u$ und $a+(b+c)=v$. Sind sie gleich, so sind sie gleich $u\cdot v$ nach dem Idempotenzsatz. Man wird also $u\cdot v=u$ und $u\cdot v=v$ zeigen, so folgt $u=v$.

Um $u\cdot v=u$ zu zeigen, expandiert man zunächst u:

$u\cdot v=\big((a+b)+c\big)\cdot v=(a+b)\cdot v+c\cdot v=(a\cdot v+b\cdot v)+c\cdot v$.

Absorption legt $a\cdot v=a$, $b\cdot v=b$ und $c\cdot v=c$ nahe. Dies zeigt man mit Expansion von v:

$a\cdot v=a\cdot\big(a+(b+c)\big)=a$ erhält man direkt,

$b\cdot v=b\cdot\big(a+(b+c)\big)=b\cdot a+b\cdot(b+c)=b\cdot a+b=b$,

$c\cdot v=c\cdot\big(a+(b+c)\big)=c\cdot a+c\cdot(b+c)=c\cdot a+c=c$.

Also gilt $u\cdot v=(a\cdot v+b\cdot v)+c\cdot v=(a+b)+c=u$.

Um $u\cdot v=v$ zu zeigen, expandiert man zunächst v und verwendet ebenfalls Absorption.

$u\cdot v=u\cdot\big(a+(b+c)\big)=u\cdot a+u\cdot(b+c)=u\cdot a+(u\cdot b+u\cdot c)$,

$u\cdot a=\big((a+b)+c\big)\cdot a=(a+b)\cdot a+c\cdot a=a+c\cdot a=a$,

$u\cdot b=\big((a+b)+c\big)\cdot b=(a+b)\cdot b+c\cdot b=b+c\cdot b=b$,

$u\cdot c=\big((a+b)+c\big)\cdot c=c$ erhält man direkt.

Also gilt auch $u\cdot v=u\cdot a+(u\cdot b+u\cdot c)=a+(b+c)=v$.

Mit dem Dualitätsprinzip folgt das zweite Assoziativgesetz. ■

Es wird nun statt $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ einfach $a+b+c$ geschrieben, ebenso $a\cdot b\cdot c$ für $(a\cdot b)\cdot c$ und $a\cdot(b\cdot c)$. Die Anwendung der Assoziativgesetze wird nicht mehr explizit erwähnt, z. B. wird statt $a+b+c=(a+b)+c=(b+a)+c=b+a+c$ einfach $a+b+c=b+a+c$ geschrieben. Oder statt $a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot(c\cdot b)=(a\cdot c)\cdot b=a\cdot c\cdot b$ einfach $a\cdot b\cdot c=a\cdot c\cdot b$.

Mit den Assoziativgesetzen kann man auch zeigen, dass sich Summen bzw. Produkte mit beliebig vielen Ausdrücken beliebig klammern lassen, ohne den Wert zu verändern. Für einen Beweis schaue man unter *Allgemeines Assoziativgesetz* nach.

Einfache Komplemente

Um zu zeigen, dass ein $b \in B$ Komplement von $a \in B$ ist, genügt es wegen der Eindeutigkeit, $a+b=1$ und $a \cdot b=0$ zu zeigen. Zunächst sind 0 und 1 Komplemente voneinander:

$$\bar{0}=1,$$
$$\bar{1}=0.$$

Beweis: Es gilt $0+1=1+0=1$ und $0 \cdot 1=1 \cdot 0=0$. ■

Des Weiteren ist a das Komplement von $\bar{a}$, d. h. das *doppelte Komplement* von a ist a.

$$\overline{(\bar{a})}=a.$$

Beweis: Es gilt $\bar{a}+a=1$ und $\bar{a} \cdot a=0$. ■

Die Regeln von De Morgan[1]

Diese Regeln werden (entsprechend abgewandelt) in der Logik und Mengenlehre immer wieder verwendet. Das Komplement einer Summe bzw. eines Produktes wird durch die Komplemente der Summanden bzw. Faktoren ausgedrückt. Für alle $a, b \in B$ gilt:

$$\overline{(a+b)}=\bar{a} \cdot \bar{b},$$
$$\overline{(a \cdot b)}=\bar{a}+\bar{b}.$$

Zum Beweis der ersten Regel sind $(a+b)+\bar{a} \cdot \bar{b}=1$ und $(a+b) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}=0$ zu zeigen:

$$(a+b)+\bar{a} \cdot \bar{b}=(a+b+\bar{a}) \cdot (a+b+\bar{b})=(b+a+\bar{a}) \cdot (a+b+\bar{b})=(b+1) \cdot (a+1)=1 \cdot 1=1,$$
$$(a+b) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}=a \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}+b \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}=a \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}+b \cdot \bar{b} \cdot \bar{a}=0 \cdot \bar{b}+0 \cdot \bar{a}=0+0=0$$

folgt mit Auslöschung. Die zweite De-Morgan-Regel folgt mit dem Dualitätsprinzip. ■

Ordnungsrelationen

Für $a, b \in B$ wird definiert: $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b=a$. So gilt

1) $a \leq a$ für alle $a \in B$,
2) $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a=b$ für alle $a, b \in B$,
3) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ für alle $a, b, c \in B$.

Beweis: 1) ergibt sich aus $a \cdot a=a$, 2) aus $a=a \cdot b=b \cdot a=b$
und 3) mit $a \cdot c=(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)=a \cdot b=a$. ■

Relationen mit 1) nennt man *reflexiv*, mit 2) *antisymmetrisch* und mit 3) *transitiv*. Eine Relation mit diesen Eigeschaften ist eine *partielle Ordnungsrelation*. Partiell bedeutet, dass es, anders als in Zahlenalgebren, $a, b \in B$ geben kann, für die weder $a \leq b$ noch $b \leq a$ gilt.

Des Weiteren wird für $a, b \in B$ definiert: $a<b \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b \wedge a \neq b$. So gilt

1) $a<b \wedge b<a$ gilt für keine $a, b \in B$,
2) $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ für alle $a, b, c \in B$.

Beweis zu 1): Mit $a<b \wedge b<a$ gilt $a \leq b \wedge b \leq a$, damit $a=b$ nach 2) für $\leq$, mit Widerspruch.

Zu 2) nehme man allgemeiner an: $a<b \wedge b \leq c$. So gilt $a \leq b \wedge b \leq c$ also $a \leq c$ nach 3) für $\leq$. Die Annahme $a=c$ führt zu $b \leq c=a$, also $a=b$ nach 2) für $\leq$, mit Widerspruch.

Also gilt $a<c$. ■

Analog zeigt man übrigens die allgemeinere Aussage $a \leq b \wedge b<c \Rightarrow a<c$.

Relationen mit der Eigenschaft 1) von $<$ nennt man *asymmetrisch*.

[1] Augustus de Morgan (*1806, †1871), britischer Mathematiker.

Weitere einfache Eigenschaften der Relationen

Es gilt für alle $a,b \in B$:

1) $0 \le a \wedge a \le 1$,
2) $0 < 1$
3) $a \cdot b \le a \wedge a \le a+b$

Beweis: $0 \le a$ gilt wegen $a \cdot 0 = 0$ und $a \le 1$ wegen $a \cdot 1 = a$. Damit folgt auch $0 \le 1$ und, mit $0 \neq 1$: $0 < 1$. Weiter gilt $(a \cdot b) \cdot a = a \cdot b \cdot a = a \cdot a \cdot b = a \cdot b$ und $a \cdot (a+b) = a$. ■

Atome

Man nennt ein $a \in B$ ein *Atom*, wenn gilt: $a \neq 0$, und es gibt kein $x \neq 0$ mit $x < a$.

Existenz von Atomen

In einer endlichen Booleschen Algebra (d. h. wenn B endlich ist) gibt es für jedes $b \in B$ mit $b \neq 0$ ein Atom a mit $a \le b$.

Beweis: Indirekt: Angenommen, es gibt ein $b \in B$ mit $b \neq 0$, aber kein Atom a mit $a \le b$. Es wird nun folgende Aussage $S(n)$ für alle n mit $n \ge 1$ mit Induktion gezeigt:

$S(n)$: Es gibt $a_1, \ldots, a_n \in B$, so dass gilt $a_{i+1} < a_i$ für alle i mit $1 \le i < n$ und $0 < a_n \le b$.

Für $n=1$ wähle $a_1 = b$. Wegen $a_1 = b \neq 0$ gilt $0 < a_1$, also $S(1)$.

Gelte nun $S(n)$ für $n \ge 1$. So ist $a_n \neq 0$, und a_n ist kein Atom (wegen $a_n \le b$), also gibt es ein $a_{n+1} \neq 0$ mit $a_{n+1} < a_n \le b$. Damit gilt auch $0 < a_{n+1} \le b$; es folgt $S(n+1)$. □

Für jedes $n \ge 1$ folgt mit der Transitivität von $<$, dass die a_i in $S(n)$ verschieden sind. Also ist B unendlich, mit Widerspruch. ■

Wegen $1 \neq 0$ gibt es ein Atom a mit $a \le 1$, also gibt es Atome.

Anmerkung:

Es gibt unendliche Boolesche Algebren ohne Atome. Ein Beweis würde hier den Rahmen sprengen. Für Interessierte: Man schaue unter *freie Boolesche Algebren* nach.

Eigenschaften von Atomen

Sei B eine Boolesche Algebra; in ihr sei A die Menge der Atome. So gilt

1) Ist $a \in A$ und $b \in B$, so gilt $a \cdot b = a \neq 0$, wenn $a \le b$ gilt, ansonsten $a \cdot b = 0$.
2) $a = b \Leftrightarrow a \cdot b \neq 0$ für alle $a,b \in A$.
3) $\sum_{a \in A} a = 1$.

Beweis:

Zu 1): Es gilt $a \cdot b \in \{0, a\}$ wegen $a \in A$, und $a \cdot b \le b$. D. h. bei $a \le b$ gilt $a \cdot b = a \neq 0$. Gilt aber $a \le b$ nicht, so gilt $a \cdot b = 0$.

Zu 2) Bei $a = b$ gilt $a \cdot b = a \cdot a = a \neq 0$, bei $a \neq b$ gilt nicht $a \le b$ wegen $b \in A$, also $a \cdot b = 0$.

Zu 3) indirekt: Sei $s = \sum_{a \in A} a \neq 1$, so gilt $\bar{s} \neq 0$, also gibt es ein $b \in A$ mit $b \le \bar{s}$, d. h. $b \cdot \bar{s} = b$.

Andererseits gilt $b \cdot s = b \cdot \left(\sum_{a \in A} a \right) = \sum_{a \in A} (b \cdot a) = b \cdot b = b$. denn die Produkte $b \cdot a$ mit $b \neq a$ sind gleich 0. Dies ergibt $b = b \cdot b = (b \cdot s) \cdot (b \cdot \bar{s}) = b \cdot b \cdot s \cdot \bar{s} = b \cdot 0 = 0$, im Widerspruch zu $b \neq 0$. ■

Der Charakterisierungssatz von Stone[1]

Sei B eine Boolesche Algebra, in ihr A die Menge der Atome, Betrachte in der Potenzmenge $P(A)$ die Abbildung $\Phi: B \to P(A)$ mit $\Phi(b) = \{t \in A : t \le b\}$. So gilt

1) Für jedes $T \in P(A)$ gilt es genau ein $b \in B$ mit $\Phi(b) = T$.
2) Für alle $u, v \in B$ gilt $\Phi(u+v) = \Phi(u) \cup \Phi(v)$, $\Phi(u \cdot v) = \Phi(u) \cap \Phi(v)$ und $\Phi(\bar{u}) = A \setminus \Phi(u)$.

Beweis:

Zu 1) Existenz: Wähle für $T \subset A$: $b = \sum_{t \in T} t$. So gilt $t \le b$ für alle $t \in T$.

Sei nun $t \in A$ und $t \notin T$. Angenommen, es gilt $t \le b$. So gilt $t = t \cdot b = t \cdot \sum_{u \in T} u = \sum_{u \in T} (u \cdot t)$. Die letzte Summe ist 0 (Produkte verschiedener Atome); es folgt $t = 0$, Widerspruch zu $t \in A$.

Zu 1) Eindeutigkeit: Gelte $\Phi(a) = \Phi(b) = T$. So gilt für alle $t \in T$: $a \cdot t = t$ und $b \cdot t = t$

Es gilt für alle $t \in A$ mit $t \notin T$ weder $t \le a$ noch $t \le b$, also $a \cdot t = 0$ und $b \cdot t = 0$.

Also gilt $a = a \cdot 1 = a \cdot \sum_{t \in A} t = \sum_{t \in T} (a \cdot t) + \sum_{t \notin T} (a \cdot t) = \sum_{t \in T} t = \sum_{t \in T} (b \cdot t) + \sum_{t \notin T} (b \cdot t) = b \cdot \sum_{t \in A} t = b$.

Zu 2) Seien $u, v \in B$, so gilt für alle $a \in A$: $a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v \in \{a+0, 0+a, a+a\} = \{a\}$ bei $a \le u \vee a \le v$, ansonsten gilt $a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v = 0 + 0 = 0$.

Also gilt $\Phi(u+v) = \{a \in A : a \le u+v\} = \{a \in A : a \cdot (u+v) = a\} = \{a \in A : a \le u\} \cup \{a \in A : a \le v\}$.

Andererseits gilt $a \cdot (u \cdot v) = (a \cdot a) \cdot (u \cdot v) = (a \cdot u) \cdot (a \cdot v) = a \cdot a = a$ nur bei $a \le u \wedge a \le v$, ansonsten gilt $a \cdot u = 0 \vee a \cdot v = 0$; also $a \cdot (u \cdot v) = 0$.

Also gilt $\Phi(u \cdot v) = \{a \in A : a \le u \cdot v\} = \{a \in A : a \cdot (u \cdot v) = a\} = \{a \in A : a \le u\} \cap \{a \in A : a \le v\}$.

Schließlich gilt $A = \Phi(1)$ und $\{\} = \Phi(0)$ nach Definition von Φ. Dies ergibt mit
$A = \Phi(1) = \Phi(u + \bar{u}) = \Phi(u) \cup \Phi(\bar{u})$ und $\{\} = \Phi(0) = \Phi(u \cdot \bar{u}) = \Phi(u) \cap \Phi(\bar{u})$: $\Phi(\bar{u}) = A \setminus \Phi(u)$. ■

Die Abbildung Φ bildet also eine Boolesche Algebra (B mit $+, \cdot$) auf eine andere ($P(A)$ mit $\cup, \cap$) *bijektiv* (Eigenschaft 1) und *homomorph* mit der Komplementbildung $\overline{T} = A \setminus T$ (Eigenschaft 2) und der Zuordnung $+ \to \cup$ und $\cdot \to \cap$ ab. Eine solche Abbildung nennt man auch *Isomorphismus*, die entsprechenden Algebren nennt man isomorph. Man erhält den

Satz von Stone

Jede endliche Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Potenzmengenalgebra.

Eine leichte Folgerung ist, dass $|B| = 2^n$ mit ganzzahligem $n \ge 1$ gilt, wenn B endlich it.

Für unendliche Boolesche Algebren gilt der Satz nicht. So bilden z. B. alle Mengen ganzer Zahlen, die endlich sind oder alle bis auf endlich viele Zahlen enthalten, mit $\cup, \cap$ eine Boolesche Algebra. Aber sie ist zu keiner Potenzmengenalgebra isomorph.

[1] Marshall Harvey Stone (*1903, †1989), US-amerikanischer Mathematiker

Jürgen Doenhardt

Übungen

Man zeige:

1) Wenn für $a,b,c \in B$ $a+c=b+c$ und $a \cdot c=b \cdot c$ gilt, so gilt $a=b$.
2) Wenn für $a,b,c \in B$ $a+c=b+c$ und $a+\bar{c}=b+\bar{c}$ gilt, so gilt $a=b$. Damit gilt auch die duale Aussage: Wenn für $a,b,c \in B$ $a \cdot c=b \cdot c$ und $a \cdot \bar{c}=b \cdot \bar{c}$ gilt, so gilt $a=b$.
3) Für beliebige $a,b \in B$ kann man $a+b$, $a \cdot b$ und $\bar{a}$ aus a und b berechnen mit
   a) der Operation nand: $a \text{ nand } b = \overline{(a \cdot b)}$,
   b) der Operation nor: $a \text{ nor } b = \overline{(a+b)}$.
4) (ohne den Satz von Stone) Warum ist die Menge $B=\{1,\ldots,8\}$ aller ganzen Zahlen mit $a+b = \max(a,b)$ und $a \cdot b = \min(a,b)$ keine Boolesche Algebra?
5) (ohne den Satz von Stone) Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Auf der Menge B der Teiler von n werde definiert: $a+b = \mathrm{kgV}(a,b)$ und $a \cdot b=\mathrm{ggT}(a,b)$. Für welche n erhält man eine Boolesche Algebra?
6) (ohne den Satz von Stone) Für $n>0$ sei $B = \{1, x_1, \ldots, x_n, (x_1 \ldots x_n)^2\}$ mit paarweise teilerfremden Zahlen $x_1, \ldots, x_n \neq 1$. Für alle $a,b \in B$ sei $a \cdot b = \mathrm{ggT}(a,b)$ und $a+b$ das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b *unter den Zahlen in* B. Für welche n erhält man eine Boolesche Algebra?
7) Für $a,b \in B$ gilt $a \leq b \Rightarrow \bar{b} \leq \bar{a}$.

Antiatome

Ein $a \in B$ heißt *Antiatom*, wenn gilt: $a \neq 1$, und es gibt kein $x \neq 1$ mit $a < x$. Man zeige für endliche Boolesche Algebren

8) Für alle $a \in B$ ist a ein Atom genau dann, wenn $\bar{a}$ ein Antiatom ist.
9) Das Produkt aller Antiatome ist 0.
10) Sei AA die Menge der Antiatome, so gibt es einen Isomorphismus $\Psi: B \to P(AA)$.
11) Sei $|B|=n \geq 2$. Für welche n gibt es ein Atom, das zugleich Antiatom ist?

Lösungen

1) $a = a\cdot(a+c) = a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c = a\cdot b+b\cdot c = b\cdot a+b\cdot c = b\cdot(a+c) = b\cdot(b+c) = b$.

2) $a = a+0 = a+(c\cdot\bar{c}) = (a+c)\cdot(a+\bar{c}) = (b+c)\cdot(b+\bar{c}) = b+(c\cdot\bar{c}) = b+0 = b$.

3a) $\bar{a} = \bar{a}+\bar{a} = \overline{(a\cdot a)} = a \text{ nand } a$,

$a+b = \overline{(\bar{a})}+\overline{(\bar{b})} = \overline{(\bar{a}\cdot\bar{b})} = \bar{a} \text{ nand } \bar{b} = (a \text{ nand } a) \text{ nand } (b \text{ nand } b)$,

$a\cdot b = \overline{(\overline{(a\cdot b)})} = \overline{(a \text{ nand } b)} = (a \text{ nand } b) \text{ nand } (a \text{ nand } b)$.

3b) gilt nach dem Dualitätsprinzip: nand und nor sind dual zueinander.

4) Wegen $\max(1,a)=\min(10,a)=a$ kommen als neutrales Element der Booleschen Addition bzw. Multiplikation nur 1 bzw. 10 in Frage. Damit hat aber z. B. 2 kein komplementäres Element, denn für kein $a \in B$ gilt gleichzeitig $\min(a,2)=1$ und $\max(a,2)=10$.

5) Alle quadratfreien n: Zahlen, die außer durch 1 durch kein Quadrat teilbar sind, oder (äquivalent wegen $n\geq 2$) Produkte verschiedener Primzahlen sind.
Bei jedem n kommen wegen $\text{kgV}(1,a)=\text{ggT}(n,a)=a$ für alle $a \in B$ als neutrales Element der Booleschen Addition bzw. Multiplikation nur 1 bzw. n in Frage.
Ist n quadratfrei, so folgen die Axiome aus bekannten Eigenschaften von ggT und kgV.
Komplementäres Element zu a ist $\frac{n}{a}$.

Sei nun n durch p^2 teilbar (p Primzahl) und a das komplementäre Element zu p. So ist $\text{ggT}(a,p)=1$, also a ist nicht durch p teilbar, damit ist $n=\text{kgV}(a,p)$ nicht durch p^2 teilbar, mit Widerspruch. Zu p gibt es also kein komplementäres Element.

6) Nur für $n=2$. Bei $n=1$ ist $B=\{1,x_1,x_1^2\}$. Es gilt $x_1\cdot y=1$ nur bei $y=1$ und $x_1+y=x_1^2$ nur bei $y=x_1^2$. Damit hat x_1 kein komplementäres Element.
Bei $n=2$ entsteht eine Algebra isomorph zur Potenzmengenalgebra über $\{x_1,x_2\}$.
Bei $n\geq 3$ gilt $x_1\cdot(x_2+x_3) = x_1\cdot(x_1\ldots x_n)^2 = x_1$, aber $(x_1\cdot x_2)+(x_1\cdot x_3) = 1+1=1$, im Widerspruch zum ersten Distributivgesetz.

7) Mit De Morgan und Absorption: $a\leq b \Rightarrow a=a\cdot b \Rightarrow \bar{a}=\bar{a}+\bar{b} \Rightarrow \bar{b}\cdot\bar{a}=\bar{b}\cdot(\bar{a}+\bar{b})=\bar{b}$.

8) Sei a ein Atom und $x\neq 1$ mit $\bar{a}<x$. Sei nun $y=\bar{x}$ so gilt $y\neq 0$ und $y=\bar{x}\neq\overline{(\bar{a})}=a$ wegen der Eindeutigkeit von Komplementen. Weiter folgt $y=\bar{x}\leq\overline{(\bar{a})}=a$ mit 7). Es folgt $y<a$, mit Widerspruch zu "a ist Atom". Also gibt es x nicht, damit ist $\bar{a}$ ein Antiatom. Die Umkehrung folgt durch Übergang zu Komplementen.

9) Wegen 8) und De Morgan gilt $\overline{\left(\prod_{a\in AA} a\right)} = \sum_{a\in AA}\bar{a} = \sum_{a\in A} a = 1$, also $\prod_{a\in AA} a = 0$.

10) Man wähle $\Psi: B\rightarrow P(AA)$ mit $\Psi(b)=\{t \in AA: b\leq t\}$. So gilt

1) Für jedes $T \in P(AA)$ gilt es genau ein $b \in B$ mit $\Psi(b)=T$.
2) Für alle $u,v \in B$ gilt $\Psi(u+v)=\Psi(u)\cap\Psi(v)$, $\Psi(u\cdot v)=\Psi(u)\cup\Psi(v)$, $\Psi(\bar{u})=AA\setminus\Psi(u)$.

Hier wird also $+\rightarrow\cap$, $\cdot\rightarrow\cup$ zugeordnet. Zum Beweis tausche in den Beweisen von 1) und 2) des Charakterisierungssatzes für Φ jeweils $+,\cdot$ gegeneinander aus und Elemente gegen ihre Komplemente.

11) Nur für $n=4$. Nach dem Satz von Stone genügt, Potenzmengenalgebren zu $\{1,\ldots,k\}$ zu betrachten: $B=P(\{1,\ldots,k\})$, $\cup$, $\cap$ mit $k\geq 1$. Für sie gilt $|B|=2^k$.

Die Atome sind die einelementigen Mengen $\{l\}$ (Beweis einfach). Aus 8) ergibt sich, dass die Antiatome die $(k-1)$-elementigen Mengen $\{1,\ldots,k\}\setminus\{l\}$ sind (jeweils $1\leq l\leq k$). Damit ist ein Atom nur bei $k-1=1$ ein Antiatom, womit sich $k=2$, also $n=4$ ergibt.