JuMa-Seminar
Geometrie

Jürgen Doenhardt

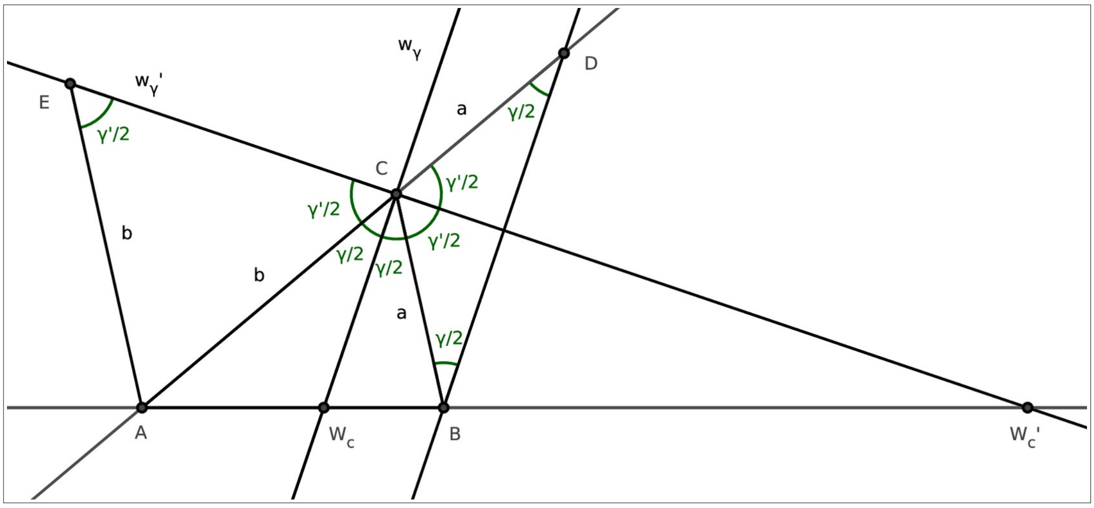
Teilung einer Seite durch die Winkelhalbierenden

Jürgen Doenhardt, im Juni 2023

Satz

In Dreieck ABC seien $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$, dabei gelte $a \neq b$. Des Weiteren seien w_γ und $w_\gamma{}'$ die Winkelhalbierenden des Innen- und der Außenwinkel bei C, die Schnittpunkte mit AB seien W_c und $W_c{}'$. So gilt $\frac{AW_c}{W_cB} = \frac{AW_c{}'}{BW_c{}'} = \frac{b}{a}$, d. h. die Winkelhalbierenden in C teilen die Seite $\overline{AB}$ innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beweis:



Sei $a < b$; der Fall $a > b$ ist symmetrisch. Zunächst gilt $\angle\, W_cCB = \angle\, ACW_c = \angle\, ACB/2 = \gamma/2$. Die Parallele zu W_cC durch B schneide nun AC in D, ebenso schneide die Parallele zu BC durch A $W_c{}'C$ in E. So ist $\gamma' = \angle\, BCD$ ein Außenwinkel in C mit $\gamma'/2 = \angle\, BCW_c{}' = \angle\, W_c{}'CD$. Damit gilt $\angle\, ECA = \angle\, W_c{}'CD = \gamma'/2$ (Scheitelwinkel). Wegen der parallelen Geraden gilt weiter $\angle\, DBC = \angle\, W_cCB = \gamma/2$ (Wechselwinkel), $\angle\, CDB = \angle\, ACW_c = \gamma/2$ (Stufenwinkel) und $\angle\, AEC = \angle\, BCW_c{}' = \gamma'/2$ (Stufenwinkel).

Damit sind aber die Dreiecke EAC und DCB gleichschenklig mit Spitze bei A bzw. C.
Also gilt $|CD| = |BC| = a$ und $|AE| = |AC| = b$. Mit dem ersten Strahlensatz ergibt sich $\frac{|AW_c|}{|W_cB|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{b}{a}$, mit dem zweiten $\frac{|AW_c{}'|}{|BW_c{}'|} = \frac{|AE|}{|BC|} = \frac{b}{a}$. ■

Anmerkung:

Bei $a = b$ gilt $|AW_c| = |W_cB|$ aus Symmetriegründen, also $\frac{AW_c}{W_cB} = 1 = \frac{b}{a}$. $W_c{}'$ existiert nicht.

Man kann zeigen, dass die Dreiecksecken C, die dasselbe Verhältnis $\frac{b}{a} = \lambda$ ergeben, den Thales-kreis über $\overline{W_cW_c{}'}$ bilden, einen *Apolloniuskreis*. Für jedes $\lambda > 0$ mit $\lambda \neq 1$ erhält man einen solchen Kreis, bei $\lambda = 1$ jedoch eine Gerade, die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Die Kreise haben untereinander und mit der Geraden keinen Punkt gemeinsam. Sie überdecken die Ebene ohne die Punkte A, B.