Jürgen Doenhardt

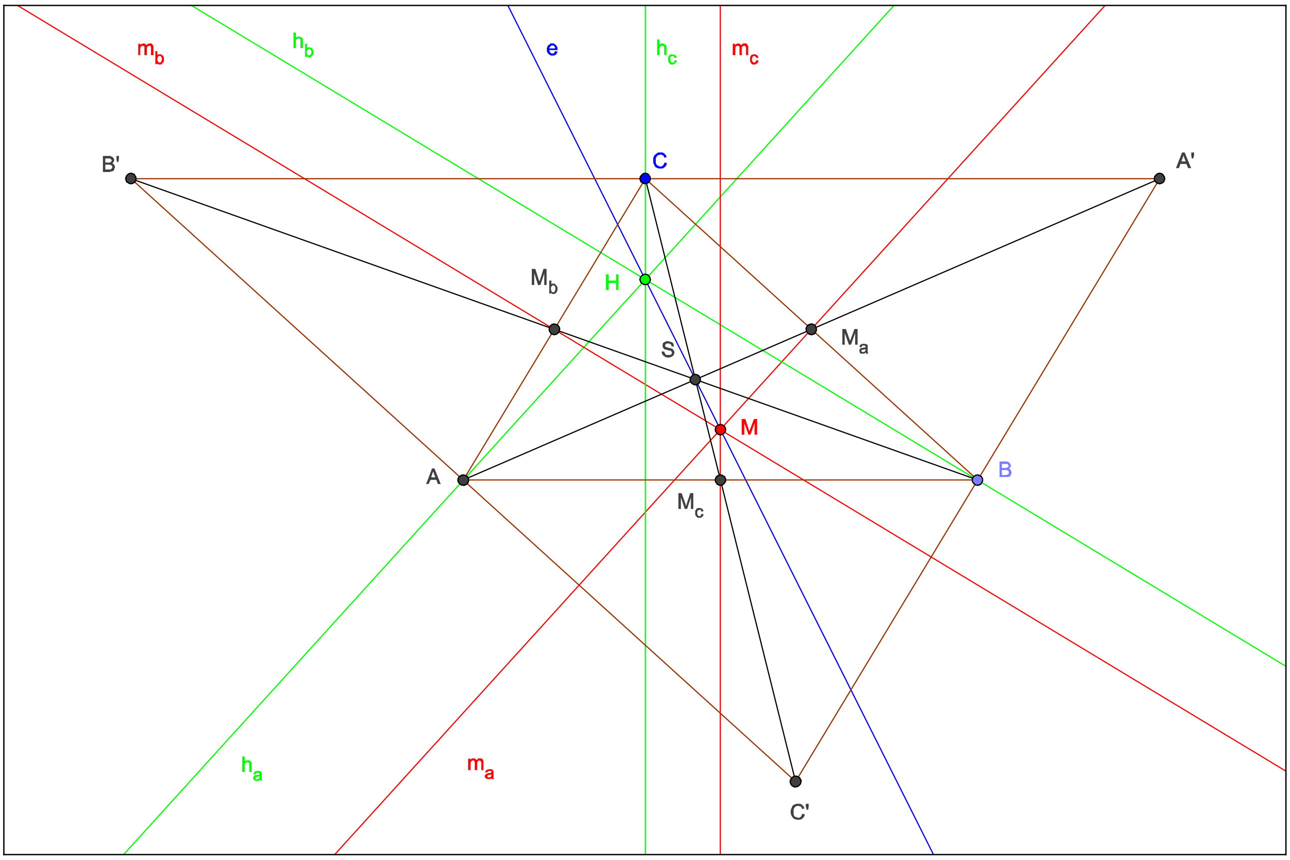
Die Sätze von Euler und Feuerbach im Dreieck

Jürgen Doenhardt, im Juni 2023

Der Satz von Euler

In einem Dreieck liegen der Höhenpunkt H, der Schwerpunkt S und der Mittelpunkt des Umkreises M auf einer Geraden, wobei S zwischen H und M liegt und $|HS|=2|SM|$ gilt.

Beweis:



Spiegelt man die Ecken des Dreiecks an den Seitenmitten

A an M_a in A', B an M_b in B', C an M_c in C'

so entsteht das Dreieck $A'B'C'$. Die Vierecke $ABA'C$, $BCB'A$ und $CAC'B$ sind Parallelogramme, Daraus folgt, dass das Dreieck $A'B'C'$ das Dreieck ABC als Seitenmittendreieck hat und der Höhenpunkt H der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A'B'C'$ ist (die Höhen des Dreiecks ABC sind die Mittelsenkrechten des Dreiecks $A'B'C'$). Weil sich in den Parallelogrammen die Diagonalen halbieren, haben diese beiden Dreiecke auch dieselben Seitenhalbierenden (als Geraden) und denselben Schwerpunkt S. Nach dem bekannten Satz der Teilung der Seitenhalbierenden durch den Schwerpunkt geht das Dreieck $A'B'C'$ durch zentrische Streckung mit Zentrum S mit Faktor $k=-\frac{1}{2}$ in das Dreieck ABC über. Außerdem wird H auf M abgebildet (Umkreismittelpunkte). Aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung folgt die Behauptung. ■

Jürgen Doenhardt

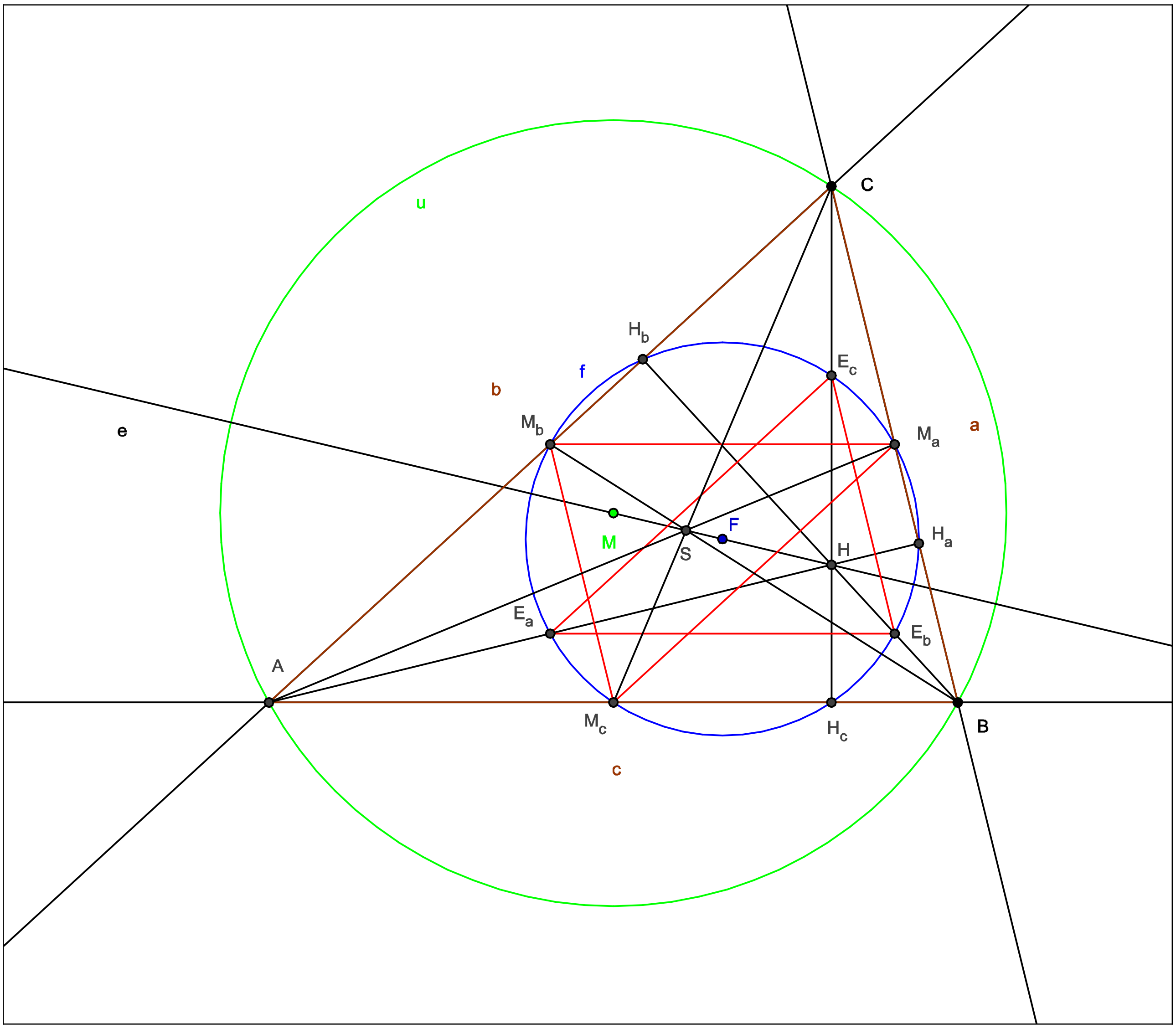
Euler-Gerade und Euler-Punkte[1]

Die Gerade, auf der H, S und M liegen, wird auch die *Euler-Gerade* genannt (hier e). Sie ist für jedes Dreieck eindeutig definiert, das nicht gleichseitig ist. Die Mittelpunkte der Strecken vom Höhenpunkt zu den Ecken nennt man *Euler-Punkte*.

Der kleine Satz von Feuerbach

In einem Dreieck liegen die drei Seitenmitten, die drei Höhenfußpunkte und die drei Euler-Punkte auf einem Kreis (Neunpunktekreis oder Feuerbach-Kreis, hier f).
Der Mittelpunkt (hier F) liegt auf der Euler-Geraden, halbiert die Strecke $\overline{MH}$ und teilt zusammen mit M die Strecke $\overline{HS}$ harmonisch.

Beweis:



[1] Beim gleichseitigen Dreieck fallen H, S und M zusammen. Eine eindeutige Euler-Gerade gibt es in diesem Fall nicht.

Die Höhen im Dreieck $M_a M_b M_c$ sind die Mittelsenkrechten im Dreieck ABC, damit ist der Umkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC der Höhenpunkt des Dreiecks $M_a M_b M_c$. Beide Dreiecke haben dieselben Seitenhalbierenden (man betrachte die Parallelogramme $AM_c M_a M_b$, $BM_a M_b M_c$ und $CM_b M_c M_a$), also denselben Schwerpunkt S. Sei F der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $M_a M_b M_c$, so folgt mit dem Satz von Euler:

- H, S, M und M, S, F liegen jeweils auf einer Geraden, also auch H, S, M, F.
- für das Dreieck ABC: $|HS|=2\,|SM|$, also $|SM|=\frac{1}{3}\,|HM|$,
- für das Dreieck $M_a M_b M_c$: $|SM|=2\,|FS|$, damit $|FS|=\frac{1}{6}|HM|$.

Es folgt $|FM|=\frac{1}{3}|HM|+\frac{1}{6}|HM|=\frac{1}{2}|HM|$, also halbiert F die Strecke $\overline{HM}$.

Es gilt also auch $|HF|=\frac{1}{2}|HM|$, damit gilt $\frac{|FS|}{|HF|}=\frac{\frac{1}{6}|HM|}{\frac{1}{2}|HM|}=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{3}|HM|}{|HM|}=\frac{|SM|}{|HM|}$.

Dies zeigt die harmonische Teilung.
Bildet man das Seitenmittendreieck $M_a M_b M_c$ an S durch eine zentrische Streckung mit Faktor $k=-2$ ab, so geht es in das Dreieck ABC über, nach dem bekannten Satz der Teilung der Seitenhalbierenden durch den Schwerpunkt. Wird dieses anschließend durch eine zentrische Streckung an H mit Faktor $k=\frac{1}{2}$ abgebildet, so geht es in das Dreieck aus den Euler-Punkten $E_a E_b E_c$ über.

Die Hintereinanderausführung mehrerer zentrischen Streckungen ist aber eine zentrische Streckung mit dem Produkt der Faktoren als Gesamtfaktor, wenn es von 1 verschieden ist, ansonsten eine Parallelverschiebung. Hier ist das Produkt $(-2)\cdot\frac{1}{2}=-1$, man erhält also eine Punktspiegelung. F wird durch die erste Streckung auf M abgebildet, M durch die zweite Streckung auf F. Damit ist F Fixpunkt der Punktspiegelung, also das Zentrum.

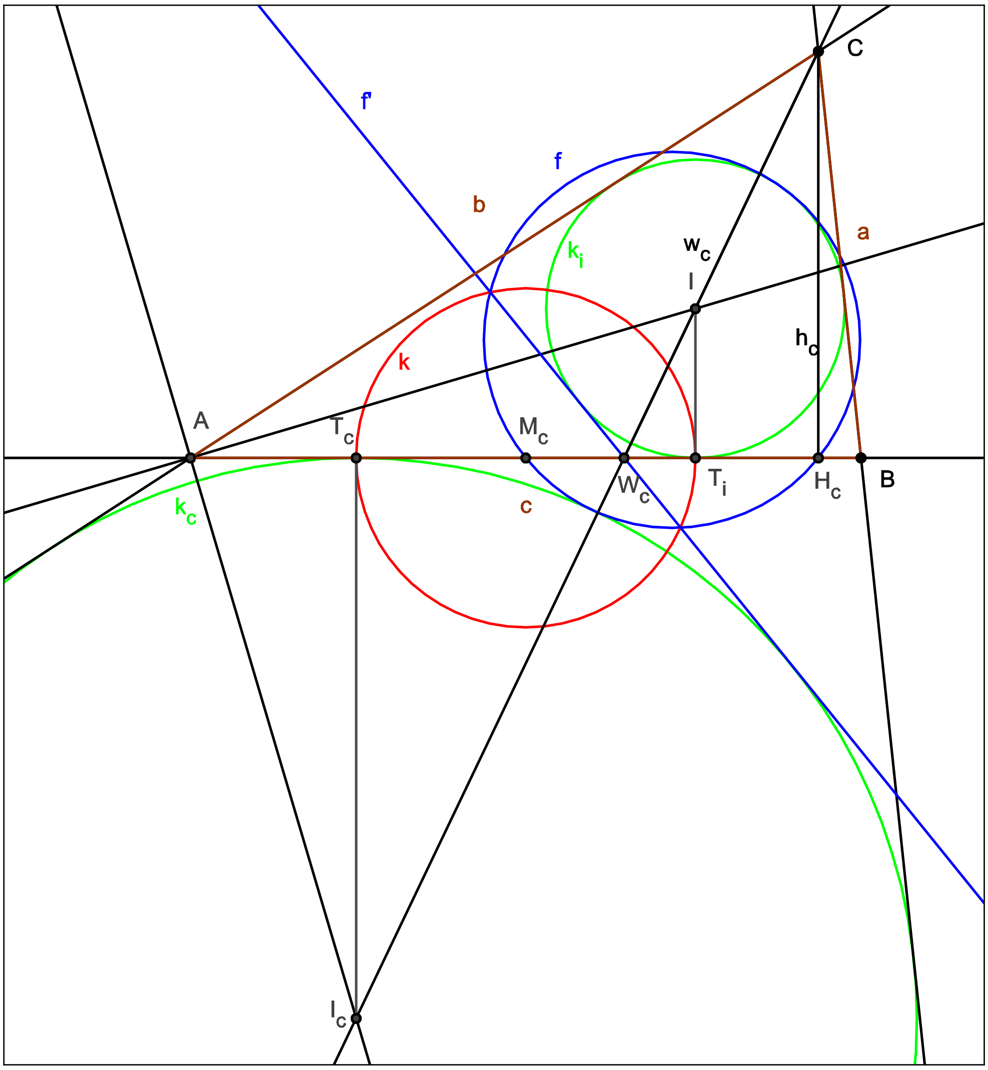
Kreise mit F als Mittelpunkt werden also auf sich abgebildet, damit liegen die Punkte E_a, E_b und E_c auch auf dem Kreis durch M_a, M_b und M_c. Darüberhinaus sind die Strecken $E_a M_a$, $E_b M_b$ und $E_c M_c$ Durchmesser dieses Kreises. Die Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c sind Scheitel rechter Winkel über diesen Durchmessern, liegen also nach der Umkehrung des Satzes von Thales ebenfalls auf diesem Kreis. ■

Der große Satz von Feuerbach

Der Feuerbach-Kreis berührt die drei Ankreise und den Inkreis.

Der Beweis benötigt einige Sätze aus anderen Bereichen der Elementargeometrie.

In der folgenden Grafik sind k_i, k_c der Inkreis und der Ankreis an die Seite c, sowie T_i, T_c die Berührpunkte dieser Kreise auf c. Weiter sind M_c, H_c der Mittelpunkt und der Höhenfußpunkt auf c, sowie W_c der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zu γ mit c. Der Feuerbach-Kreis ist f.



Hilfssatz 1:

Die Berührpunkte T_c und T_i haben von M_c denselben Abstand.

Beweis:

Durch Betrachtung gleichlanger Tangentenabschnitte der Ecken A, B und C an den Inkreis und den Ankreis an c folgt $|AT_c|=|BT_i|=s-b$ mit $s=(a+b+c)/2$. Daraus folgt die Behauptung. □

Hilfssatz 2:

Die Punkte H_c und W_c teilen die Strecke $\overline{T_iT_c}$ harmonisch.

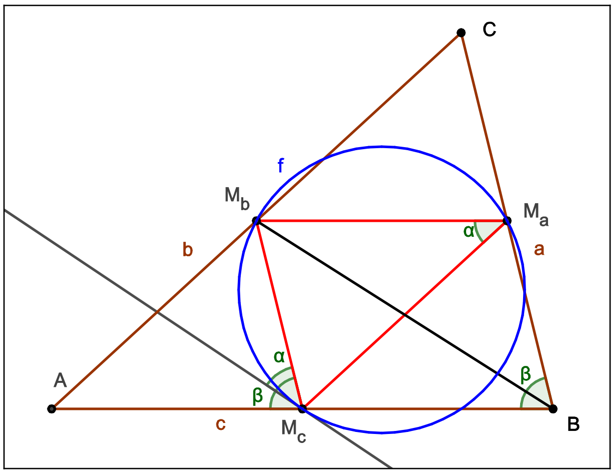
Beweis:

Man betrachte das Dreieck AW_cC und den Winkel α. In diesem teilen der Inkreismittelpunkt (auf Innenwinkelhalbierender) und der Ankreismittelpunkt (auf Außenwinkelhalbierender) die Strecke $\overline{CW_c}$ harmonisch. Projiziert man die Gerade CW_c senkrecht auf die Seite c, so gehen die Mittelpunkte in T_i bzw. T_c über, außerdem C in H_c, wobei W_c fest bleibt. Die Teilverhältnisse auf der Bild-Geraden der Projektion sind dieselben wie auf der urprünglichen Gerade. Daraus ergibt sich, dass T_i und T_c die Strecke $\overline{H_cW_c}$ harmonisch teilen, woraus wiederum aus einem bekannten Satz über harmonische Teilungen folgt, dass auch H_c und W_c die Strecke $\overline{T_iT_c}$ harmonisch teilen. □

Hilfssatz 3:

Bei $a<b$ schneidet der Feuerbach-Kreis die Seite c im Winkel $\beta-\alpha$.

Beweis:



Im Seitenmittendreieck $M_a M_b M_c$ gilt $\angle M_b M_a M_c=\alpha$. Die Tangente in M_c an den Feuerbach-Kreis schneidet die Gerade $M_b M_c$ im Winkel α (Sehnentangentenwinkel). Wegen $BC \| M_b M_c$ gilt $\angle M_b M_c A=\beta$. Damit ist der Schnittwinkel der Tangente mit der Seite c gleich $\beta-\alpha$, dieser Winkel ist aber der Schnittwinkel zwischen Feuerbach-Kreis und Seite. □

Beweis des Großen Satzes von Feuerbach

Es genügt zu zeigen, dass für jede Dreiecksseite (man betrachte hier c) der Feuerbach-Kreis den Inkreis und den Ankreis an diese Seite berührt.

Ist $a=b$, so berühren sich Inkreis, Feuerbach-Kreis und Ankreis aus Symmetriegründen im Mittelpunkt M_c. O. B. d. A. sei im Folgenden $a<b$ (der Fall $a>b$ ist symmetrisch).[2]

Man betrachte den Kreis k mit Mittelpunkt M_c durch T_i und T_c (existiert nach Hilfssatz 1). Die Ebene ohne M_c wird durch eine **Inversionsabbildung** an diesem Kreis abgebildet.

Diese bildet wie folgt ab:

a) die Seite c als Zentrumsgerade auf sich,
b) die Kreise k_i und k_c jeweils auf sich, da sie k senkrecht schneiden (Orthogonalkreise),
c) H_c auf W_c, weil H_c und W_c die Strecke $\overline{T_i T_c}$ harmonisch teilen (Hilfssatz 2),
d) den Feuerbach-*Kreis* f durch M_c und H_c auf eine *Gerade* f' durch W_c, wobei diese Gerade die Seite c in demselben Winkel schneidet wie der Kreis (also $\beta-\alpha$ nach Hilfssatz 3), da Inversionsabbildungen Winkel (mit Umkehrung der Orientierung) erhalten.

Die Seite c schneidet die Winkelhalbierende zu γ nach dem Außenwinkelsatz im Dreieck AW_cC im Winkel $\alpha+\gamma/2$, damit schneidet f' diese Winkelhalbierende "auf der anderen Seite" im Winkel

$$180^0-(\alpha+\gamma/2)-(\beta-\alpha)=180^0-\beta-\gamma/2=(180^0-\beta-\gamma)+\gamma/2=\alpha+\gamma/2,$$

also in demselben Winkel.

[2] Beim gleichseitigen Dreieck fallen Feuerbach-Kreis und Inkreis zusammen.

Durch eine Achsenspiegelung an dieser Winkelhalbierenden geht also c in f' über. Weil c eine gemeinsame innere Tangente der Kreise k_i und k_c ist und diese Kreise durch diese Achsenspiegelung auf sich abgebildet werden — die Mittelpunkte liegen ja auf dieser Winkelhalbierenden — ist auch f' gemeinsame innere Tangente dieser Kreise. Weil die Inversionsabbildung zu sich selbst invers ist (Involution) und Berühreigenschaften erhält, wird umgekehrt auch f' auf f abgebildet, wobei der Feuerbach-Kreis f den Inkreis k_i und den Ankreis k_c berührt. ■

Historisches

Leonhard Euler (1707-1783), Schweizer Mathematiker.

Karl-Wilhelm Feuerbach (1800-1834), deutscher Mathematiker.

Die Neunpunkte-Eigenschaft des Feuerbach-Kreises (also der kleine Satz) wurde bereits früher von Charles-Julien Brianchon (1783-1864) und Jean-Victor Poncelet (1788-1867) bewiesen. Feuerbach war aber der erste, der die Berühreigenschaften (also den großen Satz) bewies (mit Hilfe von analytischer Gemoetrie, nicht elementargeometrisch durch Inversion, wie hier gezeigt). Im nicht-deutschen Sprachraum sind die Bezeichnungen Neunpunktekreis (nine-point circle) und – gelegentlich – Euler-Kreis gebräuchlich.