Exercice 2 :

1) A chaque fois que le tri à bulle provoque un échange entre les indices i et i+1, nous passons d'un tableau représenté par une permutation σ à un tableau représenté par σ' , il est clair que i,i+1 était une inversion pour σ ne l'est plus pour σ' les autres images étant identiques, les éventuelles inversions pour σ ne concernant pas i et i+1 sont conservées pour σ' celles concernant i et i+1 sont aussi conservées du fait que les indices sont cote à cote (en transposant l'inversion k<->i de σ qui en sera une pour k<->i+1 dans σ' et de même pour k<-> i+1 avec k<->i). Ainsi σ' contient exactement le même nombre d'inversion de σ moins une. Il en résulte que sur un tableau de départ contenant k inversion(s), après k échange(s) d'indice type i,i+1, le tableau obtenu est donc un tableau avec 0 inversion soit le tableau trié. Le nombre d'inversion d'une permutation σ coïncide donc avec le nombre d'échange du tri à bulle.

2) Soit l'application $\sim : \sigma \in S_n \to \tilde{\sigma} \in S_n$ l'application « miroir » pour formaliser les choses un peu plus : $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(n+1-i)$ l'application est clairement une involution de S_n . De plus si i<j est une inversion pour σ (ie $\sigma(i) > \sigma(j)$) alors $n+1-i > n+1-j$ et $\tilde{\sigma}(n+1-i) > \tilde{\sigma}(n+1-j)$ le couple n+1-i, n+1-i n'est pas une inversion pour $\tilde{\sigma}$.
Réciproquement, un couple i<j qui n'est pas une inversion pour σ donnera un couple n+1-i,n+1-j qui en sera une pour $\tilde{\sigma}$.
Il en résulte que le nombre d'inversion de σ plus le nombre d'inversion de $\tilde{\sigma}$ est toujours égal au nombre de couple i<j soit $\frac{n(n-1)}{2}$

Ce résultat est mis en attente pour la question 3), la suite de la question 2) me semble indépendante avec ce qui est dit précédemment.

Il est à peut près évident qu'il y a autant de permutation de [1,n] qui vérifient $\sigma(1) > \sigma(n)$ que l'inverse (les cas d'égalités étant exclue par supposition des éléments du tableau tous distincts) donc $card(E_1) = card(E_2) = \frac{n!}{2}$. Une démonstration plus rigoureuse de ce résultat consiste à faire agir la transposition $t_{1,n}$ sur S_n par composition. On obtient ainsi une involution de S_n (encore une autre) et une bijection propre de E_1 sur E_2 .
Ce qui est vrai pour les indice 1 et n , peut se généraliser à n'importe quel couple d'indice i<j
Si on appel donc $Y_{i,j}$ *avec* $i < j$ la variable aléatoire sur S_n qui vaut 1 si i,j est une inversion pour σ , 0 sinon. Le résultat précédent généralisé, nous permet de dire que $E\left(Y_{i,j}\right) = \frac{1}{2}$ et ainsi, par somme de variable aléatoire indépendante, si X sur S_n est la variable aléatoire donnant le nombre d'inversion, on a $E\left(X\right) = \sum_{1 \le i < j \le n} E\left(Y_{i,j}\right) = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$

3) Autre possibilité de raisonnement avec le résultat précédent de mon involution ~ . Soit $S = \sum_{\sigma \in S_n} X(\sigma)$ puisque ~ est une involution (et donc une bijection) de S_n , on a aussi $S = \sum_{\sigma \in S_n} X(\tilde{\sigma})$ en additionnant et regroupant les deux expressions précédentes : $2S = \sum_{\sigma \in S_n} X\left(\tilde{\sigma}\right) + X\left(\sigma\right)$ or il a été établie en début de question 2 que $X\left(\tilde{\sigma}\right) + X\left(\sigma\right) = \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi $S = \frac{1}{2}\sum_{\sigma \in S_n} \frac{n(n-1)}{2} = n!\frac{n(n-1)}{4}$ ce qui donne en moyenne, de nouveau comme résultat $E\left(X\right) = \frac{S}{n!} = \frac{n(n-1)}{4}$

4) Soit donc supposé connu la somme total T_{n-1} du nombre d'inversion de toutes les permutations de $[\![1, n-1]\!]$

L'idée général est de regarder où est-ce que l'élément n peut atterrir par une permutation quelconque de S_n et de se ramener à S_{n-1}

Soit pour $i \in [\![1, n]\!]$ l'ensemble $F_i = \{\sigma \in S_n, \sigma(i) = n\}$ On plonge « naturellement » S_{n-1} dans F_i par l'application suivante : $G_i : \sigma \in S_{n-1} \to \sigma' \in F_i$ définie comme suit :

$\sigma'(k) = \sigma(k)$ si $k < i$ (si applicable)

$\sigma'(i) = \sigma(n)$

$\sigma'(k) = \sigma(k-1)$ si $k > i$ (si applicable)

Ainsi, pour chaque permutation de $\sigma \in S_{n-1}$, nous retrouvons le même nombre d'inversion dans $G_i\left(\sigma\right)$ (conservation global de l'ordre des éléments) plus celles provoquées par le n en position i. n étant la plus grande valeur, le mettre en position i provoque des inversions avec tous les éléments après i, mais aucune avec ceux avant i soit n-i inversions de plus pour chaque élément de S_{n-1} . Ainsi, en reprenant la variable aléatoire X donnant le nombre d'inversion :

$$somme\_inversion(F_i) = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \left(X(\sigma) + n - i\right) = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \left(X(\sigma)\right) + (n-1)!(n-i) = T_{n-1} + (n-1)!(n-i)$$

Comme les F_i forment une partition de S_n , nous obtenons la relation de récurrence suivante : $T_n = \sum_{i=1}^{n}\left(T_{n-1} + (n-1)!(n-i)\right) = nT_{n-1} + (n-1)!\sum_{i=1}^{n}\left(n-i\right) = nT_{n-1} + (n-1)!\frac{n(n-1)}{2}$

Les résultats des questions précédentes, nous disent que l'ont devrait retrouver $T_n = n!\frac{n(n-1)}{4}$ ce qui se démontre aisément par récurrence grâce à la relation précédente.

Le nombre moyen d'échange est donc encore une fois : $\frac{T_n}{n!} = \frac{n(n-1)}{4}$