À propos des QCM

Exercice 1 : QCM. Entourer toutes les bonnes réponses

- A, B, C sont 3 points du plan. Si A et B sont alignés et si B et C ne sont pas alignés alors on peut conclure que A et C sont alignés. . . . . $\boxed{\text{Oui}}$ $\boxed{\text{Non}}$
- $2 \geq 1$. . . . . $\boxed{\text{Vrai}}$ $\boxed{\text{Faux}}$
- $\sqrt{2}$ vaut : . . . . . . $\boxed{e^{\frac{\ln 2}{2}}}$ $\boxed{1{,}4142135623730951}$ $\boxed{\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}}}$ $\boxed{\text{Aucune bonne réponse}}$

I Différents types de QCM. Pourquoi ?

Définition 1 Un **QCM** est un questionnaire composé de plusieurs questions, avec pour chaque question un choix de réponse fini (non nul). Celui qui répond doit cocher/entourer/rayer ou non chacune des cases correspondant aux réponses.

Exercice 2 : Si un QCM comporte n questions avec k réponses, combien y a-t-il de façons différentes d'y répondre ?

Variantes usuelles de QCM

1. QCU : questionnaire à choix unique. Une seule réponse est considérée comme bonne.
2. QCM où on rajoute comme réponse « aucune réponse est correcte ». Cette façon de procéder permet de différencier une personne qui ne répond pas d'une personne qui a vu qu'aucune réponse était correcte.
3. QCM avec justification (souvent donné au Bac). Généralement une réponse non justifiée rapporte quand même des points. Cela permet à des élèves ayant des problèmes avec l'écrit de répondre plus facilement.
4. QCM avec pièges. Les réponses sont habilement choisies parmi des erreurs classiques, et l'énoncé demande une lecture attentive.
5. QCM avec points négatifs en cas de mauvaise réponse.
6. QCM adaptatif (sur ordinateur en général) : les questions posées dépendent des réponses aux premières questions, dans le but d'affiner la note (tests de positionnement en anglais par exemple).

Avantages et inconvénients d'un QCM

- Avantages : rapide à corriger, en général rapide à faire car il n'y a pas à rédiger.
- Inconvénients : triche, personnes qui répondent au hasard, aucun travail sur la rédaction, difficile à concevoir.

Recommandations pour écrire un QCM

- Ne pas faire de piège
- QCM avec points négatifs avec une espérance nulle pour quelqu'un qui répond au hasard.
- ...

II Choisir le nombre de questions et le nombre de réponses

On considère un QCU avec n questions ayant chacune k réponses dont une seule est correcte.

On définit alors l'expérience aléatoire consistant, pour un élève, à répondre au hasard à chacune de ces questions.

Chaque bonne réponse rapporte $\frac{20}{n}$ points, et chaque mauvaise réponse retire $\frac{20}{(k-1)n}$ points.

L'objectif est de déterminer les valeurs de n et de k pour que la probabilité qu'un élève ait la moyenne soit inférieure à une valeur qu'on s'est fixé.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponse. X suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{k}$.

Soit N la variable aléatoire égale à la note de l'élève (pouvant être négative), on a :

$$N = \frac{20}{n}X - \frac{20}{(k-1)n}(n-X) = \frac{20}{n(k-1)}(kX-n)$$

D'où :

$$N \geq 10 \iff kX - n \geq \frac{n(k-1)}{2} \iff kX \geq \frac{n(k+1)}{2} \iff X \geq \frac{n(k+1)}{2k}$$

On peut alors calculer pour différentes valeurs de n et k les probabilités $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n(k+1)}{2k}\right)$.

Ou bien, on utilise une approximation de la loi de X à l'aide d'une loi normale. Comme $E(X) = \frac{n}{k}$, et $V(X) = n \times \frac{1}{k} \times \frac{k-1}{k} = \frac{n(k-1)}{k^2}$, on a $Y = \frac{X - \frac{n}{k}}{\frac{\sqrt{n(k-1)}}{k}} = \frac{kX-n}{\sqrt{n(k-1)}}$ qui est une variable aléatoire dont la loi est proche de la loi normale centrée réduite. Alors,

$$\mathbb{P}(N \geq 10) = \mathbb{P}\left(kX - n \geq \frac{n(k-1)}{2}\right) = \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{\sqrt{n(k-1)}}{2}\right)$$

Ainsi, les QCU doivent être construits autour du principe que $n(k-1)$ est à peu près constant, pour avoir une probabilité équivalente d'obtenir la moyenne, autrement dit, un vrai faux avec 30 questions, correspond à un QCU avec 15 questions et 3 réponses au choix, ou un QCU avec 10 questions et 4 réponses au choix, ou un QCU avec 6 questions et 6 réponses au choix.

Cependant, les conditions ne sont pas vraiment réunies pour dire qu'on peut approcher une loi binomiale par une loi normale, puisqu'il faut que $n \geq 30$.

Plus petit $k \leq 10$ à n fixé tel que $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n(k+1)}{2k}\right) \leq e$.

n	$0,1$	$0,01$	$0,001$	10^{-6}
5	3	10		
6	4	6		
7	2	5		
8	3	6	9	
9	2	4	7	
10	2	4	8	
11	2	3	6	
12	2	4	5	
13	2	3	4	
14	2	3	5	
15	2	3	4	
16	2	3	5	
17	2	3	4	10
18	2	3	4	
19	2	2	4	10
20	2	3	3	8
25	2	3	3	7
30	2	2	3	6
40	2	2	3	4
50	2	2	2	3
80	2	2	2	3
100	2	2	2	2

Plus petit $n \leq 100$ à k fixé tel que $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n(k+1)}{2k}\right) \leq e$.

k	$0,1$	$0,01$	$0,001$	10^{-6}	10^{-9}
2	7	19	35	87	
3	5	11	20	50	77
4	2	9	13	36	58
5	2	7	12	29	47
6	2	6	11	26	40
7	2	6	9	23	37
8	2	4	9	20	33
9	2	4	8	20	29
10	1	4	8	17	28

En conclusion il parait raisonnable de fixer la probabilité qu'un élève ait au dessus de 10 en répondant au hasard à moins de $1/1000$, d'autant plus qu'il est encore plus difficile d'avoir au dessus de 12, ou au dessus de 15. Si par exemple on considère une cohorte de 350 élèves (ou 10 contrôles pour 35 élèves), il y a environ qu'une chance sur 3, si tous les élèves répondent au hasard, pour qu'un élève obtienne la moyenne parmi tous les élèves (et à un des contrôles seulement).

De plus, un élève répondant au hasard a à peu près une chance sur deux d'obtenir une note négative, traduite par un 0 sur 20, et il a au moins 95% de chances, si il a une note positive, que celle-ci soit inférieure à $2\sigma(N) = \frac{40k}{n(k-1)}\sigma(X) = \frac{40k}{n(k-1)}\frac{\sqrt{n(k-1)}}{k} = \frac{40}{\sqrt{n(k-1)}}$, c'est à dire, avec $n(k-1) \geq 36$, une note inférieure à 7.

Pour un vrai/ faux : compter une trentaine de questions.

Pour 3 choix : 20 questions

Pour 4 choix : 15 questions

Pour 5 choix : 12 questions

Pour 6 choix : 10 questions

Soit la règle facile à retenir : $\boxed{\text{nombre de choix} \times \text{nombre de questions} = 60}$

III Nombre de notes possibles et loi de probabilité

Pour les cas choisis en fin de la section précédente, nous allons établir la loi de probabilité, pour un élève répondant au hasard, et nous allons donner le nombre de notes différentes possibles pour un élève pouvant ne pas répondre à une question. Ce nombre est : card($\{max((k-1)a-b,0) \mid a+b \leq n, a \geq 0, b \geq 0\}$)

En python : `len({max(0, (k - 1)*a - b) for a in range(n+1) for b in range(n+1) if a+b <= n})`

(n, k)	nombre de notes différentes	En répondant à tout
(30, 2)	31	16
(20, 3)	40	15
(15, 4)	43	13
(12, 5)	43	11
(10,6)	41	10