Chapitre 14
Fonctions trigonométriques

I. Parité et périodicité : généralités

1) Définition et interprétations graphiques

Définition :

Un ensemble de $\mathbb{R}$ (par exemple un intervalle) est dit **centré en 0** (ou symétrique par rapport à 0) si, pour tout nombre de l'ensemble, son opposé appartient à l'ensemble.

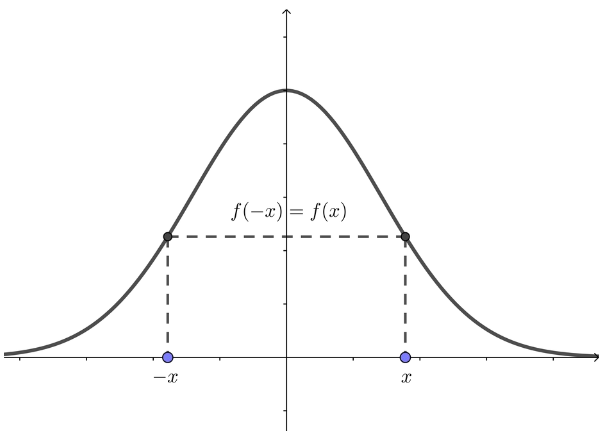
Définitions :

- Une fonction f, définie sur un ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ centré en 0, est **paire** si pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f, définie sur un ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ centré en 0, est **impaire** si pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f$.

  La fonction f est périodique de période T s'il existe un nombre réel strictement positif T tel que, pour tout nombre réel x de $\mathcal{D}_f$, le nombre $x+\mathrm{T}$ appartient à $\mathcal{D}_f$ et $f(x+\mathrm{T})=f(x)$

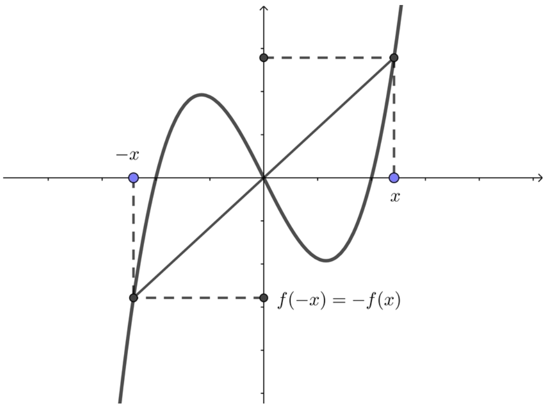
Propriété :

La courbe représentative d'une fonction **paire** est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.



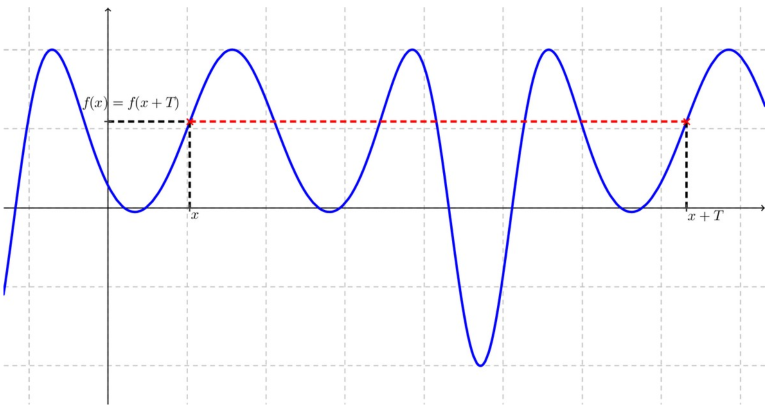
Propriété :

La courbe représentative d'une fonction **impaire** est **symétrique** par rapport à l'**origine du repère**.



Propriété :

La courbe représentative d'une fonction périodique de période T est **invariante par translation** de vecteur $T\vec{i}$.



2) Restriction du domaine d'étude

Propriétés :

- Si f est une fonction paire ou impaire, alors il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+ \cap \mathscr{D}_f$ ou $\mathbb{R}^- \cap \mathscr{D}_f$.
- Si f est une fonction périodique de période T, alors il suffit de l'étudier sur n'importe quel intervalle d'amplitude T inclus dans $\mathscr{D}_f$.

Corollaire :

Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est paire (ou impaire) et périodique de période T alors il suffit de l'étudier sur $\left[0\,;\frac{T}{2}\right]$.

II. Fonctions sinus et cosinus

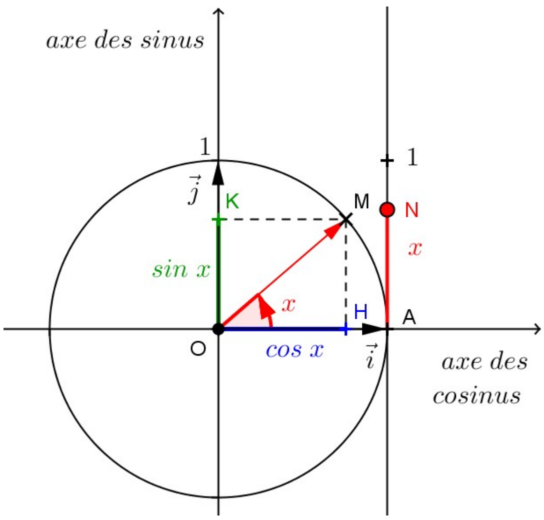
1) Définitions

Définitions :

Soit M le point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

On a ainsi M(cos(x) ; sin(x))

- La fonction $x \mapsto \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction sinus** et notée sin.
- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction cosinus** et notée cos.



Remarque :

Pour tout x réel :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) Propriétés

Propriétés :

- La **fonction sinus** est impaire et 2π-périodique.
- La **fonction cosinus** est paire et 2π-périodique.

III. Dérivabilité

1) Dérivabilité de la fonction sinus

Propriété :

La fonction sinus est dérivable en 0.

Lemmes :

- Montrons que la fonction sinus est continue en $x=0$.

Pour $0<x<\frac{\pi}{2}$ on a :

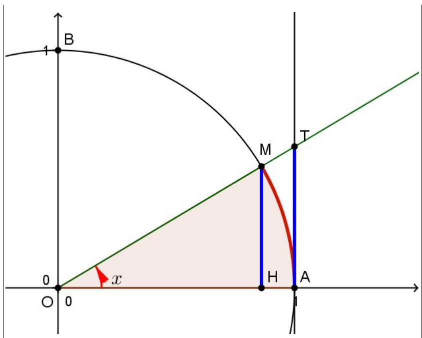
$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ soit

$0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$

soit $0 \leqslant \sin x \leqslant x$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0$.

La fonction sinus étant impaire, on a également $\lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$



$\mathcal{A}_{\text{OAM}} \leq \mathcal{A}_{\text{secteurOAM}} \leq \mathcal{A}_{\text{OAT}}$

Justification :

- $\mathcal{A}_{\text{OHM}} = \frac{1 \times \sin x}{2}$
- $\mathcal{A}_{\text{secteurOAM}} = \frac{x}{2}$
- $\mathcal{A}_{\text{OAT}} = \frac{1 \times \tan x}{2}$

Ainsi on obtient :

$\frac{1 \times \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1 \times \tan x}{2}$

D'où $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$. De plus $\sin 0 = 0$.

On en déduit que la fonction sinus est continue en $x=0$.

- Montrons maintenant que la fonction sinus est dérivable en $x=0$, de nombre dérivé 1.

Pour $0<x<\frac{\pi}{2}$ on a $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ soit

$0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad 0<\frac{\cos x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sin x} \quad \Leftrightarrow \quad 0<\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$

Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

Comme $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$, on a donc $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

La fonction sinus est impaire, on a donc $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$. Ainsi $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration :

Pour tout nombre réel $h \neq 0$, $\frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}$.

Or $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ donc la fonction sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Propriété :

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$$\sin'(x)=\cos(x)$$

Démonstration :

a désigne un nombre réel. Étudier la dérivabilité en a de la fonction sinus, c'est étudier la limite en 0 de la fonction $h \mapsto \dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$.

Or pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\frac{\sin a\cos h+\sin h\cos a-\sin a}{h}=\frac{\sin h\cos a-(1-\cos h)\sin a}{h}.$$

Or $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$, donc $1-\cos(2x)=2\sin^2 x$ donc avec $2x=h$: $1-\cos h=2\sin^2\dfrac{h}{2}$.

$\sin(2x)=2\sin x\cos x$, donc avec $2x=h$: $\sin h=2\sin\dfrac{h}{2}\cos\dfrac{h}{2}$.

D'où $$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}\cos a-2\sin^2\frac{h}{2}\sin a}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\left[\cos\frac{h}{2}\cos a-\sin\frac{h}{2}\sin a\right]}{h}$$

soit $$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right).$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}\cos\left(a+\dfrac{h}{2}\right)=\cos a$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\cos a$.

Ainsi la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $\sin'(x)=\cos x$.

2) Dérivabilité de la fonction cosinus

Propriété :

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$$\cos'(x)=-\sin x$$

Démonstration :

On sait que, pour tout nombre réel x, $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f : x \mapsto \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

pour tout nombre réel x, $f'(x)=1\times\sin'\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ donc $\cos'(x)=-\sin x$.

IV. Étude de la fonction sinus

1) Étude sur l'intervalle $[0;\pi]$

Pour tout nombre réel x, $\sin'(x)=\cos x$.

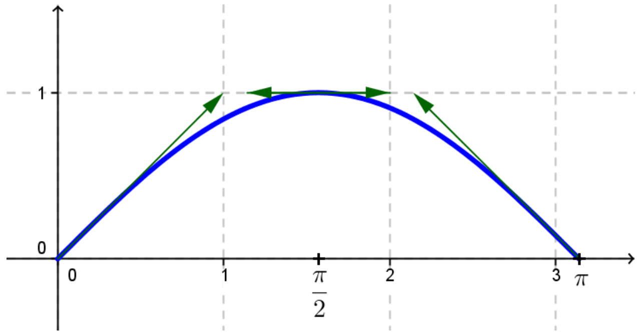
Or $\cos(x)\geqslant 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos x\leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Donc, la fonction sinus est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Tableau de variation sur $[0;\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$	1	+	0	–	-1
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

Courbe sur $[0;\pi]$



2) Courbe représentative sur $[-\pi;\pi]$

Propriété :

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est **symétrique par rapport à l'origine** O du repère.

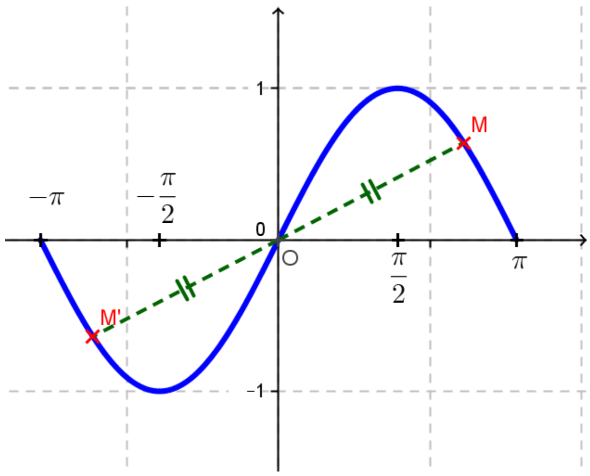
Démonstration :

Pour tout nombre réel x, on note $\mathrm{M}(x;\sin x)$ et $\mathrm{M}'(-x;\sin(-x))$ deux points de $\mathscr{C}$.

Or :

$\frac{x+(-x)}{2}=0$ et $\frac{\sin x+\sin(-x)}{2}=\frac{\sin x-\sin x}{2}=0$

Donc, le milieu de $[\mathrm{MM}']$ est l'origine O du repère et M' est le symétrique de M par rapport à O.



3) Courbe représentative de la fonction sinus

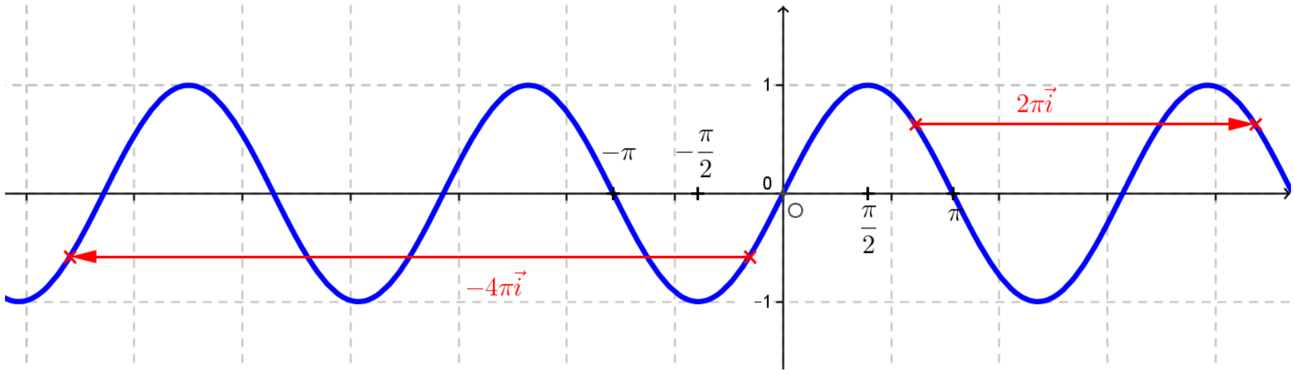
Propriété :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est **invariante par toute translation de vecteur** $k2\pi\vec{i}$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Démonstration :

Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout k de $\mathbb{Z}$, on note $M(x;\sin x)$ et $M'(x+2k\pi, \sin(x+2k\pi))$ deux points de $\mathscr{C}$.

Alors $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} k\times 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MM'}=k2\pi\vec{i}$ et M' est l'image de M par la translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$.



La courbe de la fonction sinus est appelée **une sinusoïde**.

V. Étude de la fonction cosinus

1) Étude sur l'intervalle $[0;\pi]$

Pour tout nombre réel x, $\cos'(x)=-\sin x$.

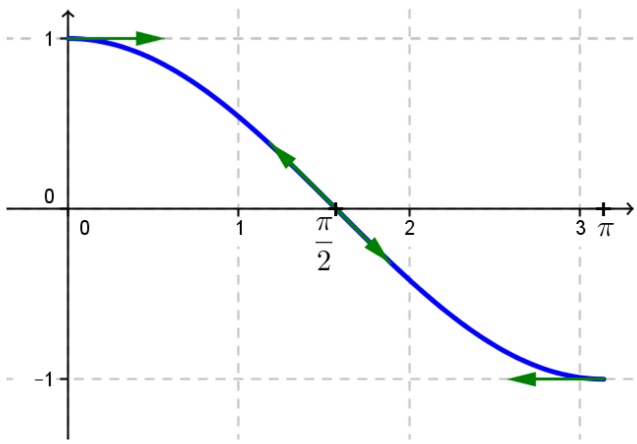
Or $\sin(x)\geqslant 0$ sur $[0;\pi]$ donc $\cos'(x)\leqslant 0$ sur $[0;\pi]$.

Donc, la fonction cosinus est décroissante sur $[0;\pi]$.

Tableau de variation sur $[0;\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x)$	0	–	-1	–	0
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1

Courbe sur $[0;\pi]$



2) Courbe représentative sur $[-\pi;\pi]$

Propriété :

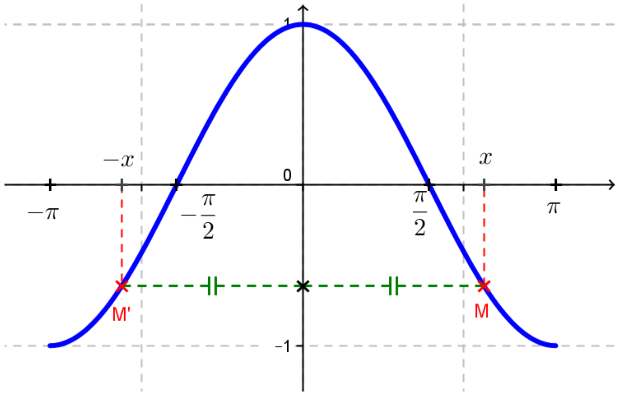
La courbe représentative Γ de la fonction cosinus est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** du repère.

Démonstration :

Pour tout nombre réel x, on note M et M' les points de Γ d'abscisses respectives x et $-x$.

L'ordonnée de M est $\cos x$ et l'ordonnée de M' est $\cos(-x)=\cos x$.

Donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



3) Courbe représentative de la fonction cosinus

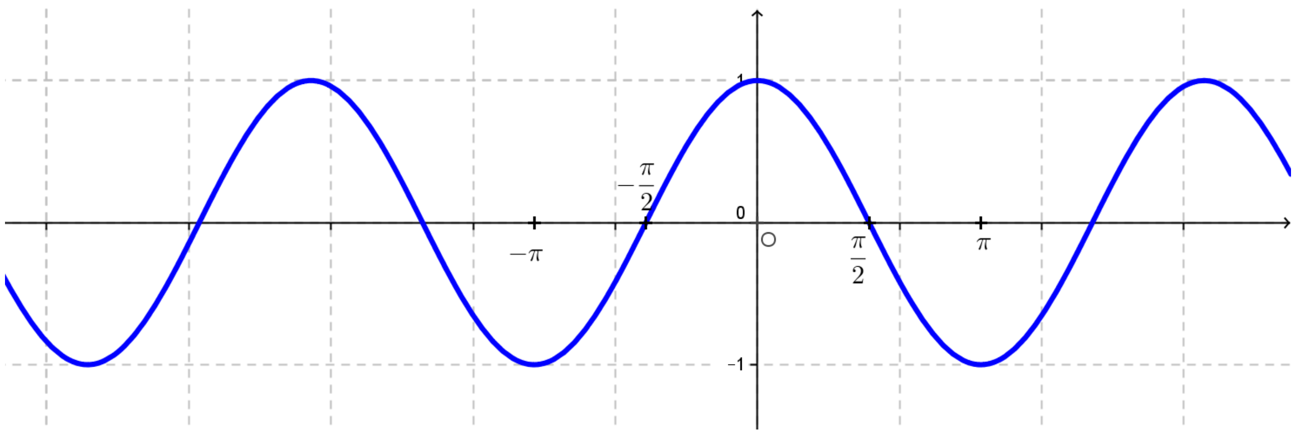
On sait que, pour tout nombre réel x, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$.

La fonction cosinus est **périodique de période** 2π.

On en déduit alors que $\cos(x+k2\pi)=\cos x$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

Propriété :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction cosinus est **invariante par toute translation de vecteur** $k2\pi\vec{i}$ où $k\in\mathbb{Z}$.

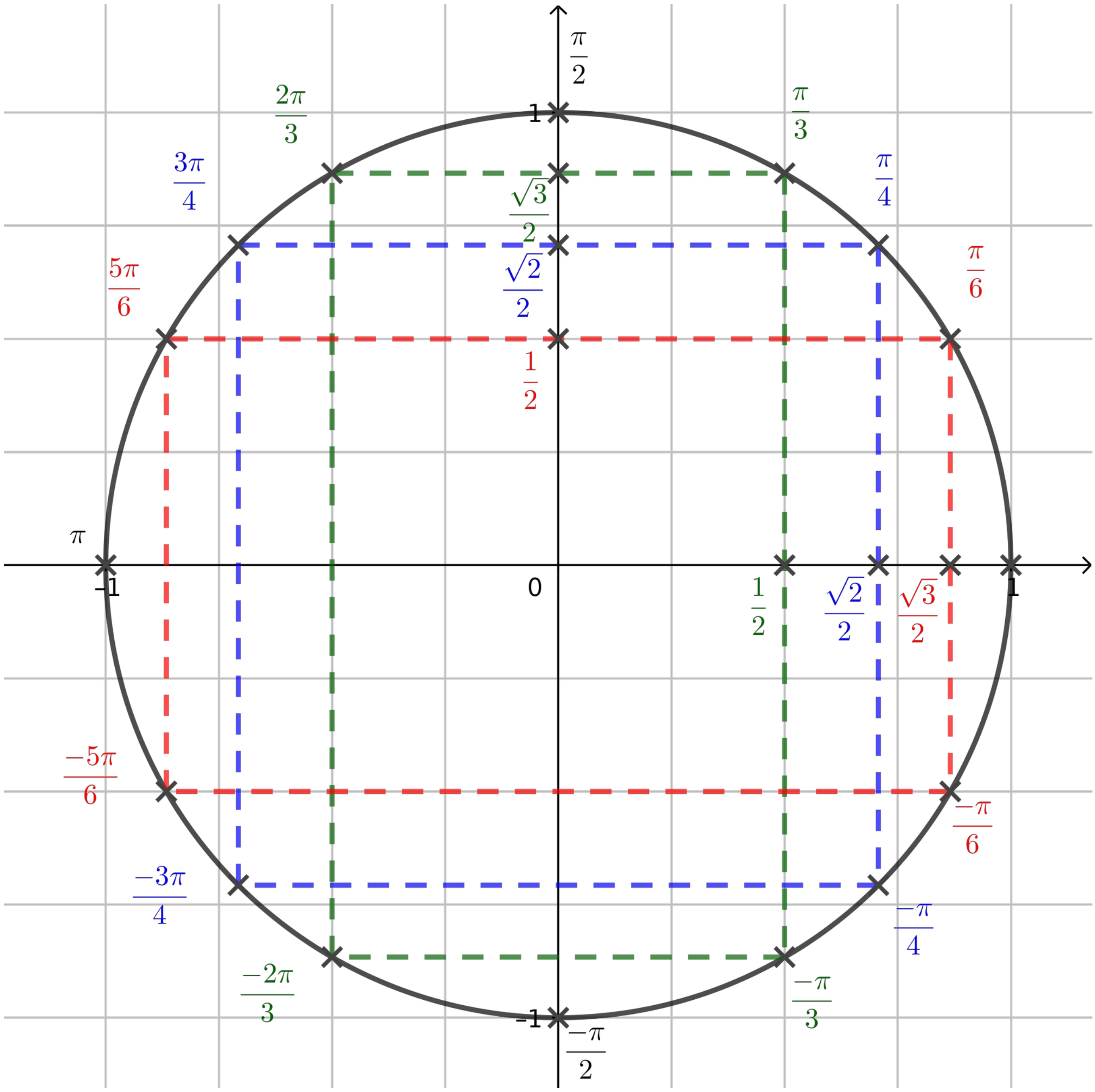


Remarques :

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$ donc la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est l'image de la courbe représentative Γ de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.
- La courbe de la fonction cosinus est aussi appelée **une sinusoïde**.

VI. Résolution d’équations et d’inéquations

1) Valeurs remarquables



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

2) Résolution d'équations

Propriétés :

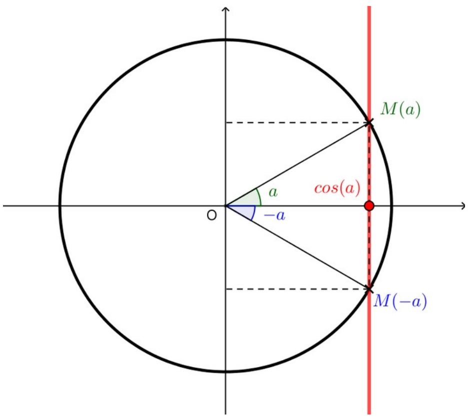
Soient a et x deux nombres réels.

- $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

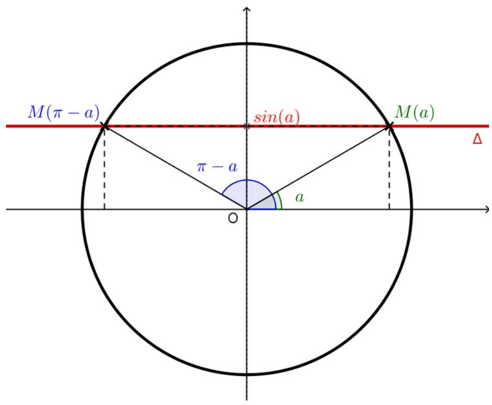
Remarques :

- En s'appuyant sur le cercle trigonométrique :

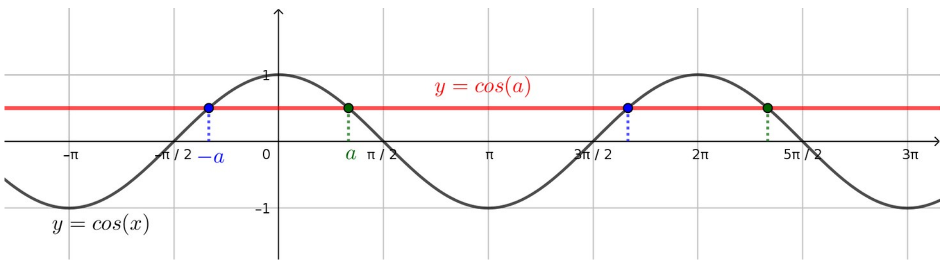
$\cos(x) = \cos(a)$



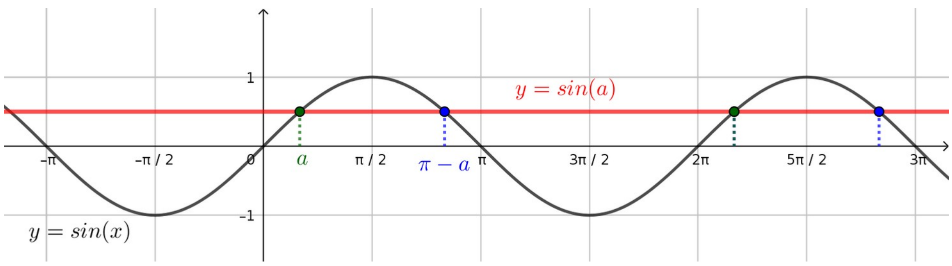
$\sin(x) = \sin(a)$



- En s'appuyant sur la courbe
  - $\cos(x) = \cos(a)$



  - $\sin(x) = \sin(a)$



Exemple :

Soit l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ que l'on veut résoudre dans $\mathbb{R}$.

$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cette équation a pour solution l'ensemble S = $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) Résolution d’inéquations

Propriétés :

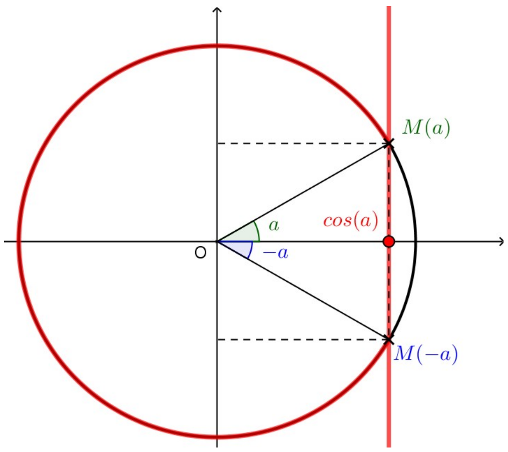
Soient a et x deux nombres réels.

- $\cos(x) \leqslant \cos(a) \Leftrightarrow a + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi - a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) \leqslant \sin(a) \Leftrightarrow -\pi - a + 2k\pi \leqslant x \leqslant a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

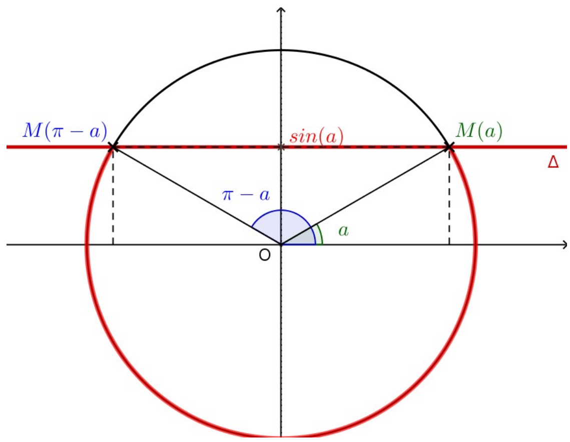
Remarques :

- En s’appuyant sur le cercle trigonométrique :

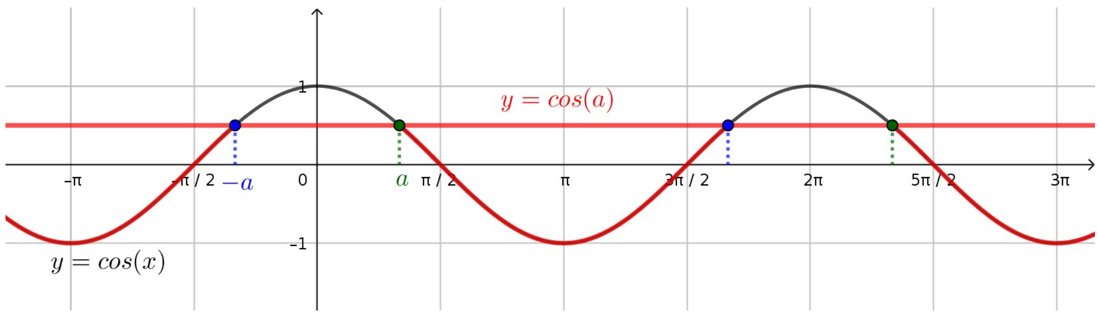
$\cos(x) \leqslant \cos(a)$



$\sin(x) \leqslant \sin(a)$



- En s’appuyant sur la courbe
  - $\cos(x) \leqslant \cos(a)$



  - $\sin(x) \leqslant \sin(a)$