

Chapitre 11

Primitives et équations différentielles

I. Équation différentielle $y' = f$ et primitive

1) Équation différentielle

Définitions :

- Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y de variable x , ses dérivées successives y', y'', \dots et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f, \dots)
- On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Exemple :

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est solution de l'équation $y'' - y = 0$ car, pour $y(x) = e^{-x}$, $y''(x) = e^{-x}$, donc $y''(x) - y(x) = 0$

Remarques :

- La dérivée est associée à un taux de variation, quotient des variations de y sur les variations de x .
- On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle $y' = \frac{dy}{dx}$ ou $y' = \frac{dy}{dt}$.

Exemples :

- $2y' + 3y = 0$
- $y'(t) = y^2(t) + 5t + 1$
- $\frac{dy}{dt} + 5y = 0$
- $\frac{dy}{dx} = 2y(x) + x^2$

2) L'équation différentielle $y' = f$

Définitions :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

- On dit qu'une fonction F est **solution de l'équation différentielle $y' = f$** sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.
- **Résoudre, sur I , l'équation différentielle $y' = f$** , c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.

Exemple :

Soit (E) l'équation différentielle $y' = x^2$. On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} et $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$, donc F est une solution de (E) sur \mathbb{R} .

3) Primitive d'une fonction

Définition :

Une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que :

$$F' = f$$

Exemple :

La fonction $F : x \mapsto 4x + 1$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 4$ sur \mathbb{R} car $F'(x) = 4 = f(x)$.

Remarque :

F est une primitive de f sur I si et seulement si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Résoudre, sur I , l'équation différentielle $y' = f$ revient donc à déterminer toutes les primitives de f sur I .

Propriété :

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Remarque :

On ne peut pas toujours expliciter les primitives d'une fonction continue sur un intervalle : c'est le cas de $x \mapsto e^{-x^2}$

Propriété :

Soient f une fonction continue sur I et G une primitive de f sur I .

Les primitives de f sur I (c'est-à-dire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$) sont les fonctions F définies par $F(x) = G(x) + k$, où k est une constante.

Démonstration :

Soient F et G deux primitives de la fonction f sur I .

Alors, pour tout réel x de I , on a $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.

On en déduit $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit $(F - G)'(x) = 0$ pour tout réel x de I .

La fonction $F - G$ a une dérivée nulle sur I , elle est donc constante sur I .

On nomme k cette constante. Ainsi $F(x) - G(x) = k$ pour tout x de I , ce qui montre que ces deux primitives diffèrent d'une constante.

Exemple :

La fonction exponentielle est une primitive de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} , car $\exp' = \exp$.

Les primitives de la fonction exponentielle sont les fonctions F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = e^x + k$, où k est une constante réelle.

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Remarque :

La condition $F(x_0) = y_0$ est parfois appelée **condition initiale**.

Démonstration :

Soit (E), l'équation différentielle $y' = f$.

f est continue et admet donc une primitive G sur I : G est une solution de (E).

Les fonctions $x \mapsto G(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$, sont dérivables sur I de dérivée G' , elles sont donc aussi des primitives de f sur I et donc des solutions de (E).

La condition $F(x_0) = y_0$ équivaut à $G(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - G(x_0)$.

Ainsi, la valeur de k est unique et fixée par la condition initiale.

D'où l'unicité de la solution F de (E) définie sur I par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 7$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

Elle admet pour primitives les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x + k$.

La primitive F de f qui s'annule en 2 est $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - \frac{32}{3}$.

II. Primitive et opérations

1) Primitives des fonctions usuelles

c désigne un réel quelconque.

La fonction f est définie sur I par :	Primitives de f sur I sont définies par $F(x)=...$	Sur $I=...$
k (constante)	$kx+c$	\mathbb{R}
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	\mathbb{R}
x^n (avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	\mathbb{R} si $n \geq 0$ $] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$ si $n < -1$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+c$	$] 0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$] 0; +\infty[$
e^x	e^x+c	\mathbb{R}
$\sin x$	$-\cos x+c$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x+c$	\mathbb{R}

Remarque :

On obtient ce tableau par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions de référence.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^4$. $f(x) = x^n$ avec $n = 4$, donc la fonction $F : x \mapsto \frac{x^5}{5}$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .

2) Primitives et opérations

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur un intervalle I .

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Pour tout réel k , kF est une primitive de kf sur I .

Exemple :

On cherche une primitive F de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 2$$

Une primitive de $x \mapsto 2$ est $x \mapsto 2x$.

Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{1}{1+1}x^{1+1}$.

Donc par addition, une primitive F est définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{8}x^2 + 2x$$

Remarque :

Contrairement à la dérivation, il n'existe aucune formule permettant de calculer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions.

3) Primitives et composition**Propriété :**

Soient v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.

Alors $v \circ u$ est une primitive de $u' \times (v' \circ u)$.

Démonstration :

Soient v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.

Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

Primitives de fonctions composées

u désigne une fonction continue sur un intervalle I .

c désigne un réel quelconque.

Fonction f	Primitive de f sur I	Conditions sur u
$u' u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	Lorsque $n < -1$, pour tout x de I , $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$u(x) > 0$ sur I
$u' e^u$	$e^u + c$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ sur I
$u' \sin u$	$-\cos u + c$	
$u' \cos u$	$\sin u + c$	

Remarque :

Lorsque u est strictement négative sur I , une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(-u)$.

III. Équation différentielle du premier ordre

Dans toute cette partie, a et b sont des réels et f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de \mathbb{R} .

1) Résolution de l'équation $y' = ay$

Définition :

L'équation différentielle $(E_0) : y' = ay$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = 0$, est appelé **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants**.

Exemple :

Les équations différentielles $y' = 5y$ et $2y' + 9y = 0$ sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

Propriété :

L'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions : $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

- Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times f(x)$. Puisque $f'(x) = a f(x)$ pour tout réel x , f est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

- Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ay$ et soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.

g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = e^{-ax} \times f'(x) - ae^{-ax} \times f(x)$.

Puisque f est solution de (E), $f'(x) = a \times f(x)$ pour tout réel x et ainsi :

$$g'(x) = e^{-ax} \times a f(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0$$

La fonction g est constante, soit $e^{-ax} \times f(x) = C$, avec C réel.

Puisque e^{-ax} est différent de 0 pour tout réel x , on obtient :

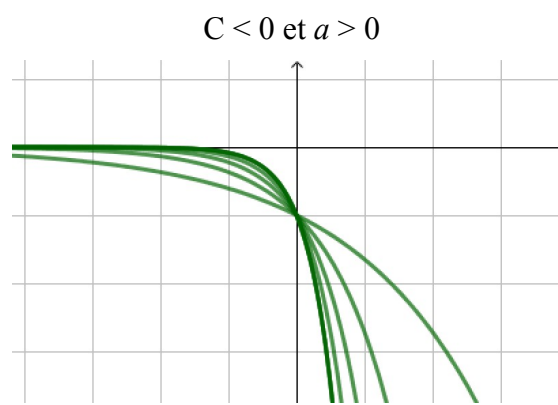
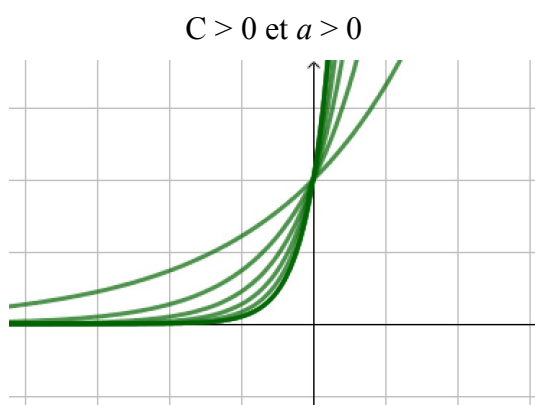
$$f(x) = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}.$$

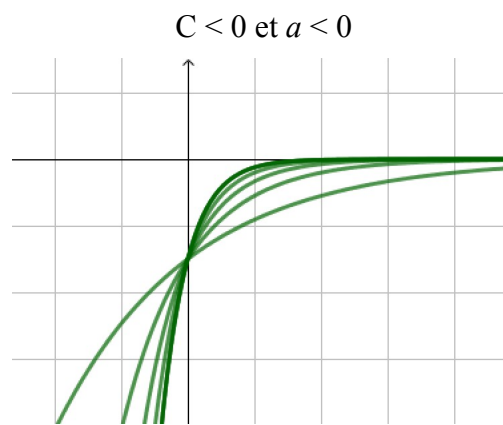
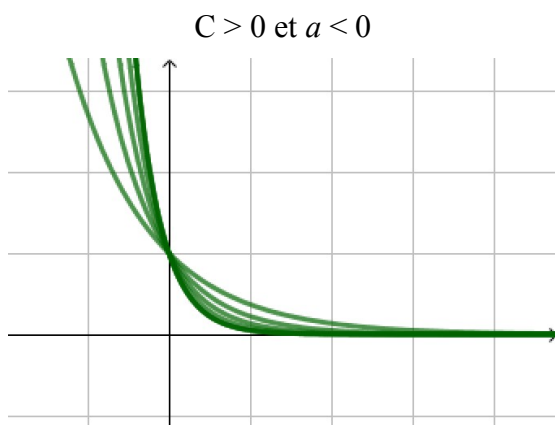
Exemples :

- Soit l'équation différentielle $y' = 2y$, pour $x \in \mathbb{R}$.
L'ensemble de ses solutions est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$, où C est un réel.
- L'équation différentielle (E) : $y' = 3y$ a pour solution les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{3x}$.
L'unique solution de (E) telle que $f(0) = 2$ est la fonction $f(x) = 2e^{3x}$.

Remarques :

- Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation $y' = ay$, alors les fonctions $f + g$ et kf (où k est un réel) sont également solutions de cette équation.
- Soit a un réel non nul fixé, les courbes des solutions sur \mathbb{R} de l'équation $y' = ay$ ont les allures suivantes :





2) Résolution de l'équation $y' = ay + b$

Définition :

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = b$, est appelé **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Remarque :

L'équation différentielle $y' = ay + b$ a toujours une solution particulière constante.

En effet, la fonction f_0 définie sur \mathbb{R} par $f_0(x) = -\frac{b}{a}$ est solution puisque, pour tout réel x ,

$$f_0'(x) = 0 \text{ et } a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$$

Propriété :

L'ensemble des solutions dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions : $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

- On vérifie que toute fonction de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}$, est solution.
- Réciproquement, il faut prouver que toutes les solutions sont de cette forme.

Nous savons que la fonction $c : x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution particulière : $c'(x) = a \times c(x) + b$.

Considérons g une solution de l'équation $y' = ay + b$, on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = a \times g(x) + b.$$

Par soustraction, on obtient $g'(x) - c'(x) = a \times (g(x) - c(x))$, soit

$(g(x) - c(x))' = a \times (g(x) - c(x))$. Ainsi la fonction $g - c$ est solution de l'équation $y' = ay$, donc de la forme Ce^{ax} , ce qui entraîne :

$$g(x) - c(x) = Ce^{ax}, \text{ soit } g(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Remarque :

Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante de (E) aux solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$.

Exemple :

Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) : $y' = y + 1$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^x - 1$.

Soit g la seule solution de (E) vérifiant $g(0) = 1$.

$g(x) = Ce^x - 1$ et $g(0) = 1 \Leftrightarrow Ce^0 - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2$. Donc $g(x) = 2e^x - 1$.

3) Résolution de l'équation $y' = ay + f$ **Définition :**

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = f$, est également appelé **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Propriété :

Soient (E) l'équation différentielle $y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E) sur I.

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} + g(x)$, où C est une constante réelle.

Exemple :

L'équation différentielle $y' = 2y + e^x$ admet pour solution particulière la fonction $f : x \mapsto -e^x$ puisque $f'(x) = -e^x$ et $2f(x) + e^x = -e^x$. Donc, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto Ce^{2x} - e^x$, avec C réel quelconque.