Chapitre 11
Primitives et équations différentielles

I. Équation différentielle $y' = f$ et primitive

1) Équation différentielle

Définitions :

- Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y de variable x, ses dérivées successives y', y'', … et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f , ...)
- On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Exemple :

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est solution de l'équation $y'' - y = 0$ car, pour $y(x) = e^{-x}$, $y''(x) = e^{-x}$, donc

$$y''(x) - y(x) = 0$$

Remarques :

- La dérivée est associée à un taux de variation, quotient des variations de y sur les variations de x.
- On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle $y' = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ ou $y' = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}$.

Exemples :

- $2y' + 3y = 0$
- $y'(t) = y^2(t) + 5t + 1$
- $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} + 5y = 0$
- $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = 2y(x) + x^2$

2) L'équation différentielle $y' = f$

Définitions :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- On dit qu'une fonction F est **solution de l'équation différentielle** $y' = f$ sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.
- **Résoudre, sur I, l'équation différentielle $y' = f$** , c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.

Exemple :

Soit (E) l'équation différentielle $y' = x^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$, donc F est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3) Primitive d'une fonction

Définition :

Une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que :

$$F' = f$$

Exemple :

La fonction $F : x \mapsto 4x + 1$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 4$ sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = 4 = f(x)$.

Remarque :

F est une primitive de f sur I si et seulement si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Résoudre, sur I, l'équation différentielle $y' = f$ revient donc à déterminer toutes les primitives de f sur I.

Propriété :

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque :

On ne peut pas toujours expliciter les primitives d'une fonction continue sur un intervalle : c'est le cas de $x \mapsto e^{-x^2}$

Propriété :

Soient f une fonction continue sur I et G une primitive de f sur I.

Les primitives de f sur I (c'est-à-dire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$) sont les fonctions F définies par $F(x) = G(x) + k$, où k est une constante.

Démonstration :

Soient F et G deux primitives de la fonction f sur I.

Alors, pour tout réel x de I, on a $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.

On en déduit $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit $(F - G)'(x) = 0$ pour tout réel x de I.

La fonction $F - G$ a une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.

On nomme k cette constante. Ainsi $F(x) - G(x) = k$ pour tout x de I, ce qui montre que ces deux primitives diffèrent d'une constante.

Exemple :

La fonction exponentielle est une primitive de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, car exp' = exp.

Les primitives de la fonction exponentielle sont les fonctions F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^x + k$, où k est une constante réelle.

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Remarque :

La condition $F(x_0) = y_0$ est parfois appelée **condition initiale**.

Démonstration :

Soit (E), l'équation différentielle $y' = f$.

f est continue et admet donc une primitive G sur I : G est une solution de (E).

Les fonctions $x \mapsto G(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$, sont dérivables sur I de dérivée G', elles sont donc aussi des primitives de f sur I et donc des solutions de (E).

La condition $F(x_0) = y_0$ équivaut à $G(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - G(x_0)$.

Ainsi, la valeur de k est unique et fixée par la condition initiale.

D'où l'unicité de la solution F de (E) définie sur I par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 7$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Elle admet pour primitives les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x + k$.

La primitive F de f qui s'annule en 2 est $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - \frac{32}{3}$.

II. Primitive et opérations

1) Primitives des fonctions usuelles

c désigne un réel quelconque.

La fonction f est définie sur I par :	Primitives de f sur I sont définies par $F(x)=\ldots$	Sur $I=\ldots$
k (constante)	$kx+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n (avec $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$ si $n\geqslant 0$ $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n<-1$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+c$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$

Remarque :

On obtient ce tableau par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions de référence.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^4$. $f(x) = x^n$ avec $n = 4$, donc la fonction $F : x \mapsto \frac{x^5}{5}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) Primitives et opérations

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur un intervalle I.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Exemple :

On cherche une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x+2$

Une primitive de $x \mapsto 2$ est $x \mapsto 2x$. Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{1}{1+1}x^{1+1}$.

Donc par addition, une primitive F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}x^2+2x=\frac{1}{8}x^2+2x$

Remarque :

Contrairement à la dérivation, il n'existe aucune formule permettant de calculer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions.

3) Primitives et composition

Propriété :

Soient v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in$ I, $u(x) \in$ J.

Alors $v \circ u$ est une primitive de $u' \times (v' \circ u)$.

Démonstration :

Soient v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in$ I, $u(x) \in$ J.

Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

Primitives de fonctions composées

u désigne une fonction continue sur un intervalle I. c désigne un réel quelconque.

Fonction f	Primitive de f sur I	Conditions sur u
$u'u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	Lorsque $n<-1$, pour tout x de I, $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	$u(x)\neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u+c$	$u(x)>0$ sur I
$u'e^u$	e^u+c	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	$u(x)>0$ sur I
$u'\sin u$	$-\cos u+c$	
$u'\cos u$	$\sin u+c$	

Remarque :

Lorsque u est strictement négative sur I, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(-u)$.

III. Équation différentielle du premier ordre

Dans toute cette partie, a et b sont des réels et f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1) Résolution de l'équation *y' = ay*

Définition :

L'équation différentielle (E_0) : $y' = ay$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = 0$, est appelé **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants**.

Exemple :

Les équations différentielles $y' = 5y$ et $2y' + 9y = 0$ sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

Propriété :

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions : $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

  Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times f(x)$. Puisque $f'(x) = a\,f(x)$ pour totu réel x, f est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle (E) : $y' = ay$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.

  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^{-ax} \times f'(x) - ae^{-ax} \times f(x)$.

  Puisque f est solution de (E), $f'(x) = a \times f(x)$ pour tout réel x et ainsi :

  $$g'(x) = e^{-ax} \times a\,f(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0$$

  La fonction g est constante, soit $e^{-ax} \times f(x) = C$, avec C réel.

  Puisque e^{-ax} est différent de 0 pour tout réel x, on obtient :

  $$f(x) = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}.$$

Exemples :

- Soit l'équation différentielle $y' = 2y$, pour $x \in \mathbb{R}$.

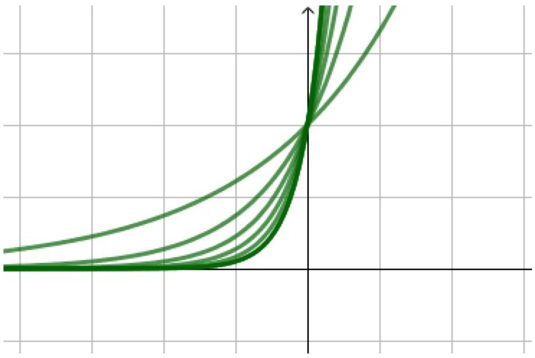
  L'ensemble de ses solutions est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$, où C est un réel.
- L'équation différentielle (E) : $y' = 3y$ a pour solution les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{3x}$.

  L'unique solution de (E) telle que $f(0) = 2$ est la fonction $f(x) = 2e^{3x}$.

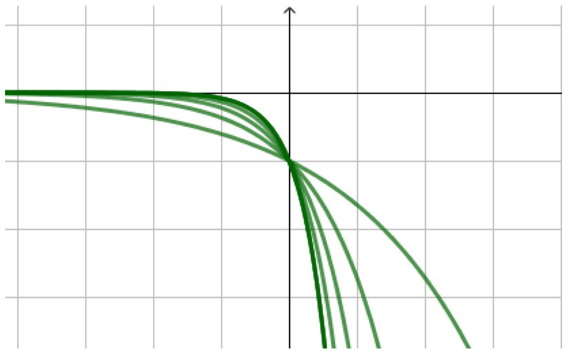
Remarques :

- Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation $y' = ay$, alors les fonctions $f + g$ et kf (où k est un réel) sont également solutions de cette équation.
- Soit a un réel non nul fixé, les courbes des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ ont les allures suivantes :

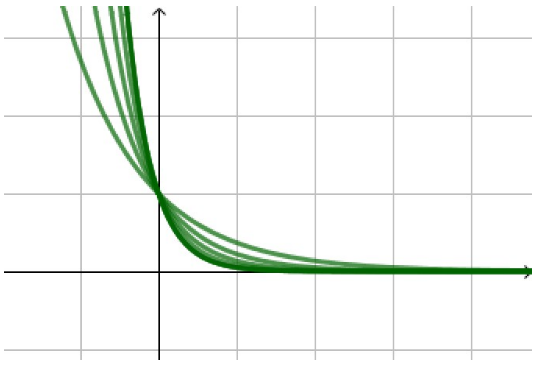
C > 0 et a > 0



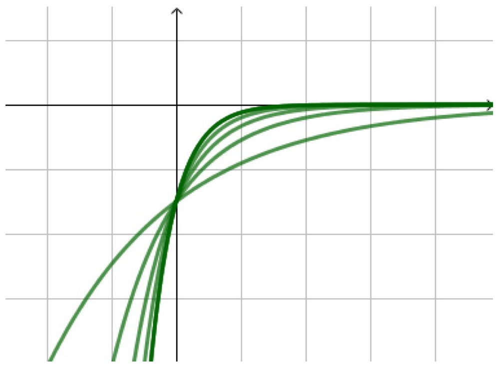
C < 0 et a > 0



C > 0 et a < 0



C < 0 et a < 0



2) Résolution de l'équation *y' = ay + b*

Définition :

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = b$, est appelé **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Remarque :

L'équation différentielle $y' = ay + b$ a toujours une solution particulière constante.

En effet, la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = -\dfrac{b}{a}$ est solution puisque, pour tout réel x,

$f_0'(x) = 0$ et $a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b = 0$

Propriété :

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions : $x \mapsto \mathrm{C}e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

- On vérifie que toute fonction de la forme $x \mapsto \mathrm{C}e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$, est solution.
- Réciproquement, il faut prouver que toutes les solutions sont de cette forme.

  Nous savons que la fonction $c : x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution particulière : $c'(x) = a \times c(x) + b$.

  Considérons g une solution de l'équation $y' = ay + b$, on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $g'(x) = a \times g(x) + b$.
  Par soustraction, on obtient $g'(x) - c'(x) = a \times (g(x) - c(x))$, soit
  $(g(x) - c(x))' = a \times (g(x) - c(x))$. Ainsi la fonction $g - c$ est solution de l'équation $y' = ay$, donc de la forme $\mathrm{C}e^{ax}$, ce qui entraîne $g(x) - c(x) = \mathrm{C}e^{ax}$, soit $g(x) = \mathrm{C}e^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

Remarque :

Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante de (E) aux solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$.

Exemple :

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' = y + 1$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}e^{x} - 1$.

Soit g la seule solution de (E) vérifiant $g(0) = 1$.

$g(x) = \mathrm{C}e^{x} - 1$ et $g(0) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{C}e^{0} - 1 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{C} = 2$. Donc $g(x) = 2e^{x} - 1$.

3) Résolution de l'équation $y' = ay + f$

Définition :

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = f$, est également appelé **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Propriété :

Soient (E) l'équation différentielle $y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E) sur I.

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}e^{ax} + g(x)$, où C est une constante réelle.

Exemple :

L'équation différentielle $y' = 2y + e^{x}$ admet pour solution particulière la fonction $f : x \mapsto -e^{x}$ puisque $f'(x) = -e^{x}$ et $2f(x) + e^{x} = -e^{x}$. Donc, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto \mathrm{C}e^{2x} - e^{x}$, avec C réel quelconque.