Chapitre 4
Matrices et suites

I. Puissances d'une matrice

1) Puissances d'une matrice carrée

Définition :
Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
La puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice A est la matrice carrée d'ordre p obtenue en multipliant n fois la matrice A par elle-même :

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A$$

Par convention, on pose $A^0 = I_p$.

Exemple :
Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Propriétés :
Soit A une matrice carrée d'ordre p.
Soit m et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

$$A^m \times A^n = A^{m+n} \text{ et } (A^m)^n = A^{m \times n}$$

Remarque :
Attention, à cause de la non-commutativité du produit des matrices carrées, en général :

$$(A \times B)^n \neq A^n \times B^n \text{ et } (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

Propriété (formule du binôme) :
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre p qui commutent (c'est-à-dire $A \times B = B \times A$).
On a alors, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i \times B^{n-i}$$

2) Matrices triangulaires

Définitions :
Une matrice carrée est dite :
- **triangulaire supérieure** (ou **inférieure**) si tous les éléments situés en dessous (au-dessus) de sa diagonale sont nuls.
- strictement triangulaire si elle est triangulaire avec des coefficients diagonaux nuls.

Exemples :

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

A et *C* sont des matrices triangulaires, *B* et *D* sont des matrices strictement triangulaires.

Propriétés :

Les puissances d'une matrice triangulaire sont triangulaires de même forme.
Les puissances d'une matrice strictement triangulaire d'ordre *n* sont nulles à partir de l'exposant *n*.

Exemple :

Pour $n=3$, si $M=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (*a*, *b* et *c* réels), $M^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $M^3=O_3$.

On en déduit que pour tout $n\geqslant 3$, $M^n=O_3$.

Remarques :

- Une matrice dont une puissance est nulle est appelée **nilpotente**.
- Ces propriétés permettent de calculer des puissances d'une matrice en la décomposant en somme de matrices particulières ou en effectuant des calculs par blocs.

3) Matrices diagonales

Définition :

Une **matrice diagonale** est une **matrice carrée** dont tous les coefficients qui ne sont pas situés sur sa diagonale principale sont nuls.

Exemple :

$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

Propriété :

Soit *D* une matrice diagonale. Pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, D^n est la matrice diagonale obtenue en élevant à la puissance *n* les coefficients de *D*.

Démonstration :

Cette propriété se démontre par une récurrence immédiate.

Exemple :

Si $D=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors pour tous *n* de $\mathbb{N}^*$, $D^n=\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

4) Diagonalisation d'une matrice

Définition :
Une matrice carrée A est dite **diagonalisable** s'il existe une matrice carrée P inversible et une matrice carrée D diagonale telles que $A=PDP^{-1}$.

Remarque :
Si $A=PDP^{-1}$, on obtient A^n de façon simple. En effet, $A^2=PDP^{-1}\times PDP^{-1}=PD^2P^{-1}$ et, par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n=PD^nP^{-1}$.

Propriété :
Cas des matrices carrées d'ordre 2.

- Une matrice carrée A d'ordre 2 est diagonalisable si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ (non nécessairement distincts) et deux matrices colonnes à coefficients réels non proportionnelles V et W telles que AV=λV et AW=μW.
- Si A est diagonalisable :
  - Les réels λ et μ sont appelés les **valeurs propres** de la matrice A.
  - La matrice carré $P=(\mathrm{V}\,\mathrm{W})$ est inversible et telle que $A=P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}$.

Démonstration :

- Si A est diagonalisable, il existe λ et μ réels et $P=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ inversible tels que :

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}.$$

  Soit $\mathrm{V}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\mathrm{W}=\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}$.
  Comme P est inversible, son déterminant est non nul donc $\alpha\delta-\gamma\beta\neq 0$.
  On en déduit que V et W ne sont pas proportionnelles.
  On montre alors, en effectuant les calculs, que AV=λV et AW=μW.
- Réciproquement, supposons qu'il existe des réels λ et μ des matrices non proportionnelles $\mathrm{V}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\mathrm{W}=\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}$, telles que AV=λV et AW=μW.
  On pose $A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$.
  Le déterminant $\alpha\delta-\gamma\beta$ de P est non nul car V et W ne sont pas proportionnelles, donc P est inversible.
  Sachant que AV=λV et AW=μW, on montre que $PDP^{-1}=A$. Donc A est diagonalisable.

Exemple :
Soit $A=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ alors $\mathrm{V}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{W}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ sont tels que $\mathrm{AV}=-2\mathrm{V}$, $\mathrm{AW}=-\mathrm{W}$.
A a pour valeurs propres -2 et -1 et $A=P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Remarque :

Les matrices carrées d'ordre 2 ne sont pas toutes diagonalisables.

Prenons $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et posons $V=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors AV=λV s'écrit

$\begin{cases} ax+by=\lambda x \\ cx+dy=\lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-\lambda)x+by=0 \\ cx+(d-\lambda)y=0 \end{cases} \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $B=\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=A-\lambda I_2$.

Si $A-\lambda I_2$ est inversible, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc V, qui est nulle est proportionnelle à toute matrice W de format 2×1 .

Pour que *A* soit diagonalisable, il faut donc que *B* ne soit pas inversible, donc que son déterminant soit nul, d'où $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$.

Exemples :

- Pour $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, l'équation $\lambda^2-4\lambda+10=0$ n'a pas de solution réel.

  Donc *A* n'est pas diagonalisable.
- Pour $A=\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, l'équation $\lambda^2+3\lambda+2=0$ a deux solutions réelles : -2 et -1 .

  Donc *A* est diagonalisable et les valeurs propres sont -2 et -1 .

  On détermine ensuite V et W :
  - Pour la valeur propre -2 , on pose $V=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et V doit vérifier $AV=-2V$ soit :

    $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-2\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y=-2x \\ -x+y=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6y=0 \\ -x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3y$

    Donc $V=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.
  - Pour la valeur propre -1 , on pose $W=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et W doit vérifier $AW=-1W$ soit :

    $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-1\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y=-x \\ -x+y=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6y=0 \\ -x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2y$

    Donc $W=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

II. Suites récurrentes et matrices

1) Suite numérique (u_n) vérifiant $u_{n+1}=a\,u_n+b$

Une telle suite est dite arithmético-géométrique (ou à récurrence affine).
Étudions un exemple.
La suite (u_n) est définie par $u_0=12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}2\,u_n+4$.

De la formule de récurrence à la formule explicite

Observons que **si** la suite (u_n) converge, alors sa limite l est solution de l'équation $l=0{,}2\,l+4$.
Cette équation a pour solution $l=5$.
Cela suggère de poser : pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-5$.
De $u_{n+1}=0{,}2\,u_n+4$, on déduit : $u_{n+1}-5=0{,}2(u_n-5)$ soit $v_{n+1}=0{,}2\,v_n$.
La suite (v_n) est géométrique de raison $a=0{,}2$ et de premier terme $v_0=u_0-5=7$.
D'où, pour tout n, $v_n=v_0\times a^n$ soit $v_n=7\times 0{,}2^n$. Ainsi $u_n-5=7\times 0{,}2^n$ donc $u_n=7\times 0{,}2^n+5$.

Méthode générale : détermination d'une formule explicite

Une suite numérique (u_n) vérifie $u_{n+1}=a\,u_n+b$, avec $a\neq 1$.

- On résout l'équation $l=a\,l+b$: elle a une solution unique c.
- On introduit la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n=u_n-c$. On prouve qu'elle est géométrique (de raison a) ; il en résulte que, pour tout entier naturel n, $v_n=a^n\times v_0$.
- On revient à la suite initiale : pour tout entier naturel n, $u_n=v_n+c$.
  D'où l'expression : $u_n=a^n(u_0-c)+c$.

Étude de la convergence

Sur notre exemple, la raison $a=0{,}2$ est telle que $-1<a<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^n=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
Si on applique cette méthode dans le cas général, on obtient le résultat suivant :

Propriété :
Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_{n+1}=a\,u_n+b$, avec $-1<a<1$.
La suite (u_n) **converge** vers le nombre l vérifiant $l=a\,l+b$.

Remarque :
On démontre que si $a\leqslant -1$ ou $a>1$, la suite est divergente (hormis le cas particulier ou $u_0=c$, auquel cas elle est constante).

2) *Écriture matricielle de relations de définition de suites récurrentes*

Différents types de suites définies par des relations de récurrence se ramènent à l'étude d'une suite de matrice colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1}=AX_n+B$ où A est une matrice carrée et B une matrice colonne.

Suite couplées

Soit deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0=5$ et $v_0=-2$ et, pour tout $n\geqslant 0$: $u_{n+1}=1{,}7u_n+0{,}6v_n+3$ et $v_{n+1}=-5u_n+0{,}1v_n-1$.

Si on définit, pour tout $n\geqslant 0$, la matrice colonne $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, alors les relations de récurrence ci-dessus s'écrivent aussi pour tout $n\geqslant 0$:

$X_{n+1}=AX_n+B$, où A est la matrice carrée $A=\begin{pmatrix} 1{,}7 & 0{,}6 \\ -5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et B la matrice colonne $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Justification de la relation :

Le produit matriciel AX_n est égal à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1{,}7u_n+0{,}6v_n \\ -5u_n+0{,}1v_n \end{pmatrix}$ on a donc bien l'équivalence de cette relation avec les relations de définition des deux suites.

Suite définie par une relation de récurrence d'ordre 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=11$ et $u_1=-2$ et $u_{n+2}=3u_{n+1}-0{,}5u_n$ pour tout $n\geqslant 0$.

Si on définit, pour tout $n\geqslant 0$; la matrice colonne $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ alors la relation de récurrence ci-dessus s'écrit aussi, pour tout $n\geqslant 0$:

$X_{n+1}=AX_n$ où A est la matrice carrée $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5 & 3 \end{pmatrix}$.

Justification de la relation :

Pour tout $n\geqslant 0$, la matrice colonne X_{n+1} est égale à $X_{n+1}=\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et le produit matriciel AX_n est égal à la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -0{,}5u_n+3u_{n+1} \end{pmatrix}$.

L'égalité matricielle $X_{n+1}=AX_n$ est donc équivalente au système d'égalités, formé d'une égalité triviale et de la relation de récurrence définissant la suite $\begin{cases} u_{n+1}=u_{n+1} \\ u_{n+2}=3u_{n+1}-0{,}5u_n \end{cases}$.

Remarque :

La matrice colonne X_0 est la matrice $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ dans le premier exemple et la matrice $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$ dans le second exemple.

3) Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant $U_{n+1}=AU_n+B$

Étudions un exemple.
La suite (U_n) de matrices colonnes de dimension 2×1 est définie par :
$U_0=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1}=AU_n+B$ où $A=\begin{pmatrix}-4&6\\-1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}12\\-2\end{pmatrix}$.

De la formule de récurrence à la formule explicite

En s'inspirant de la méthode précédente, on cherche une matrice colonne *C* de dimension 2×1, telle que $C=AC+B$.
Cette équation d'inconnue *C* s'écrit $C-AC=B$, c'est-à-dire $(I-A)C=B$.
Si $I-A$ est inversible, multiplions à gauche les deux membres par $(I-A)^{-1}$: $C=(I-A)^{-1}B$.
Or $I-A=\begin{pmatrix}5&-6\\1&0\end{pmatrix}$, cette matrice est inversible (car $\det(I-A)=6$), et $(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{1}{6}&\frac{5}{6}\end{pmatrix}$

donc $C=\begin{pmatrix}-2\\-\frac{11}{3}\end{pmatrix}$.

De $U_{n+1}=AU_n+B$ et $C=AC+B$, on déduit : $U_{n+1}-C=A(U_n-C)$.
Posons alors, pour tout entier naturel *n*, $V_n=U_n-C$. On obtient $V_{n+1}=AV_n$.
Démontrons, par récurrence, que $V_n=A^nV_0$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

- *Initialisation* : Pour $n=0$, l'égalité est vraie car $A^0=I$.
- *Hérédité* : Si $V_n=A^nV_0$, alors en multipliant à gauche les deux membres par *A*, on obtient $AV_n=A^{n+1}V_0$, c'est-à-dire $V_{n+1}=A^{n+1}V_0$.
- *Conclusion* : Pour tout entier naturel *n*, $V_n=A^nV_0$.

En revenant à la suite (U_n) :
pour tout entier naturel *n*, $U_n-C=A^n(U_0-C)$ d'où $U_n=A^n(U_0-C)+C$.

Ainsi pour l'exemple, $U_n=\begin{pmatrix}-4&6\\-1&1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}5\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-\frac{11}{3}\end{pmatrix}$.

Remarque :
En utilisant la méthode de diagonalisation.
A est diagonalisable. On a vu que $D=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$ donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix}-4&6\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix}-4&6\\-1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\end{pmatrix}^n\times\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix}-4&6\\-1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}(-2)^n&0\\0&(-1)^n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{pmatrix}-4&6\\-1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3\times(-2)^n-2\times(-1)^n&-6\times(-2)^n+6\times(-1)^n\\(-2)^n-(-1)^n&-2\times(-2)^n+3\times(-1)^n\end{pmatrix}$$

Par conséquent : $U_n=\begin{pmatrix}3\times(-2)^n-2\times(-1)^n&-6\times(-2)^n+6\times(-1)^n\\(-2)^n-(-1)^n&-2\times(-2)^n+3\times(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-\frac{11}{3}\end{pmatrix}$

Méthode générale : détermination d'une formule explicite

Une suite de matrices colonnes (U_n) vérifie $U_{n+1}=AU_n+B$, où la matrice $I-A$ est **inversible**.

- On résout l'équation $C=AC+B$: elle admet une unique solution $C=(I-A)^{-1}B$.
- On introduit la suite auxiliaire (V_n) définit par $V_n=U_n-C$.
  On prouve qu'elle vérifie, pour tout entier naturel *n*, $V_{n+1}=AV_n$, puis, par récurrence, que $V_n=A^nV_0$.
- On revient à la suite initiale : pour tout entier naturel *n*, $U_n=V_n+C$.

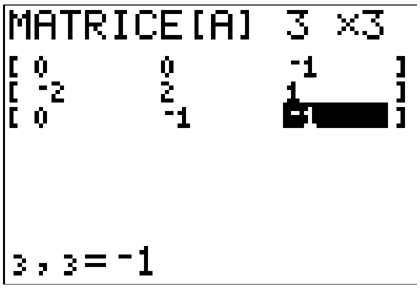
D'où l'expression : $U_n=A^n(U_0-C)+C$.

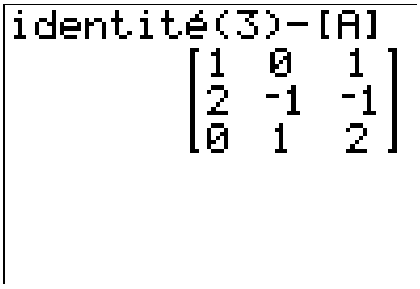
Exemple

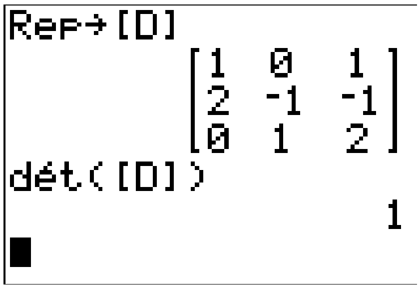
Appliquons la méthode à la suite (U_n) de matrices colonnes de dimension 3×1 définie par :

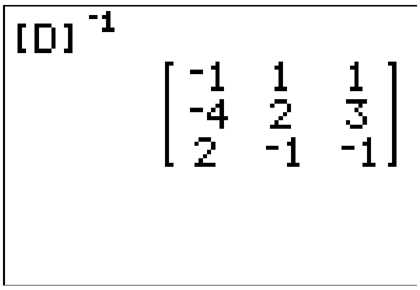
$U_0=\begin{pmatrix}7\\-2\\6\end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1}=AU_n+B$ où $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$.

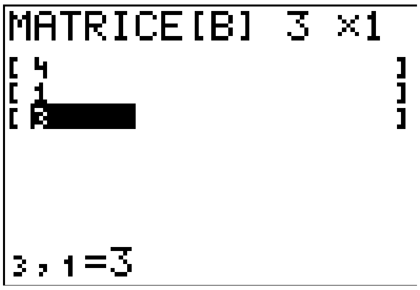
Cherchons une matrice colonne C de dimension 3×1 telle que $C=AC+B$, c'est-à-dire $(I-A)\times C=B$.

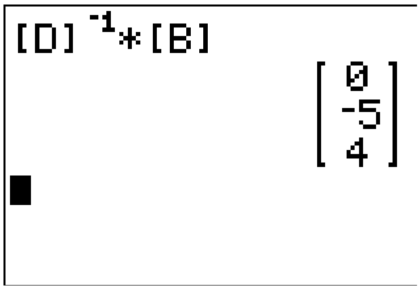












Nous obtenons donc, pour tout entier naturel *n*, $U_n=A^n(U_0-C)+C=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}7\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-5\\4\end{pmatrix}$.

Autre méthode : par sommation

Pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, $U_n=AU_{n-1}+B$ donc $U_n=A(AU_{n-2}+B)+B$ que l'on peut écrire sous la forme $U_n=A^2U_{n-2}+(AB+B)$, ou encore $U_n=A^2U_{n-2}+(A+I)B$, où I est la matrice unité de même dimension que A. On montre par récurrence, que :

Pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, $U_n=A^nU_0+(A^{n-1}+\ldots+A+I)B=A^nU_0+\left(\sum_{k=0}^{n-1}A^k\right)B$.

Suite de matrices lignes

Si (V_n) est une suite de matrices lignes de même format telles que $V_{n+1}=V_n A+B$, où A est une matrice carrée et B une matrice ligne, on obtient des résultats analogues : si $I-A$ est inversible, l'équation $C=CA+B$ a une solution unique : $C=B(I-A)^{-1}$.
Alors, pour tout entier naturel n, $V_n=(V_0-C)A^n+C$.

III. Convergence

1) Limite d'une suite de matrice

Définition :
(U_n) est une suite de matrices de format donné, L une matrice de même format.
Dire que la suite (U_n) a pour **limite L** signifie que, pour chaque emplacement, la suite des coefficients de U_n a pour limite le coefficient de L.
On dit aussi que (U_n) **converge vers L**.

Remarque :
Si (U_n) ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Exemple :
$U_n=\begin{pmatrix} 3+0{,}2^n \\ 2-0{,}5^n \\ 7+0{,}3^n \end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$. La suite (U_n) a pour limite la matrice $L=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2) Convergence

Soit une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type :

$$X_{n+1}=AX_n+B$$

(On adaptera les définitions aux suites de matrices lignes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1}=X_n A+B$).

Propriété de la limite en cas de convergence

Propriété :
Si une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1}=AX_n+B$ est convergente, alors sa limite X est une matrice colonne vérifiant l'égalité :

$$X=AX+B$$

Démonstration :
Dans l'égalité $X_{n+1}=AX_n+B$, le membre de droite converge vers X. De plus, comme conséquence des théorèmes concernant les limites de sommes et de produit par un nombre réel des suites convergentes, le membre de gauche converge vers $AX+B$.
D'où, par unicité de la limite : $X=AX+B$.

Remarque :
La propriété précédente permet donc de dire que dans le cas de la convergence, la limite de la suite de matrices colonnes est à rechercher parmi les suites constantes vérifiant la relation de récurrence.

Recherche d'une suite constante

Propriété :
Soit I la matrice identité de même taille qu'une matrice A.
Si la matrice $I-A$ est inversible, pour toute matrice colonne B de même taille que A, il existe une, et une seule, matrice colonne X vérifiant $X=AX+B$.

Démonstration :
Par les propriétés du calcul matriciel, $X=AX+B \Leftrightarrow (I-A)X=B \Leftrightarrow X=(I-A)^{-1}\times B$.
Il y a donc une, et une seule, matrice colonne X solution de $X=AX+B$.

Remarque :
Puisqu'il n'y a qu'une seule matrice colonne limite solution, pour toute matrice colonne X_0 pour laquelle la suite (X_n) est convergente, la limite X est indépendante des valeurs de X_0.

Propriété :
Dans le cas où la matrice $I-A$ n'est pas inversible :
- Soit il n'existe **aucune** matrice colonne vérifiant $X=AX+B$ (dans le cadre de la recherche d'une limite, cela signifie qu'il ne peut y avoir convergence).
- Soit il existe **une infinité** de matrices colonnes X solution $X=AX+B$ dont l'une est éventuellement la limite recherchée dans le cas de la convergence.

Remarques :
- Dans ce cas, on recherche donc les éventuelles solutions en résolvant le système dont l'écriture matricielle est $X=AX+B$ ou $(I-A)X=B$.
- D'autres conditions liées à la limite peuvent se rajouter à celles données par le système et permettre de déterminer parmi les solutions celle correspondant à la limite dans le cas de la convergence.

3) *Application aux marches aléatoires*

Soit une suite de matrices colonnes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type :

$$X_{n+1}=AX_n+B.$$

(On adaptera les définitions aux suites de matrices lignes (X_n) vérifiant une relation de récurrence du type $X_{n+1}=X_nA+B$).

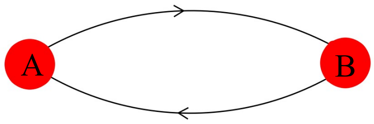
Définitions :
- On dit qu'une **marche aléatoire** est **convergente** si la suite des matrices colonnes (X_n) des états de la marche aléatoire converge.
- Dans le cas de l'étude d'une marche aléatoire telle que la suite des états de la marche aléatoire vérifie une relation du type $X_{n+1}=AX_n+B$, une suite constante vérifiant $X=AX+B$ est aussi appelée **état stable** de la marche aléatoire.

Remarques :
- Une marche aléatoire peut être convergente ou divergente selon l'état initial X_0.
- S'il y a convergence, ce ne peut être que vers un état stable.

Marches aléatoires sur un graphe probabiliste à deux sommets

- **1[er] cas :**

Soit la marche aléatoire pour laquelle on passe, à chaque pas du sommet A au sommet B avec une probabilité de 1 et du sommet B au sommet A avec une probabilité de 1.



La matrice de transition de cette marche aléatoire est $M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Ici $m_{i,j}=p_j(i)$.

Si on note $X_0=\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}$ l'état initial de la marche aléatoire alors, pour tout $n\geqslant 0$:

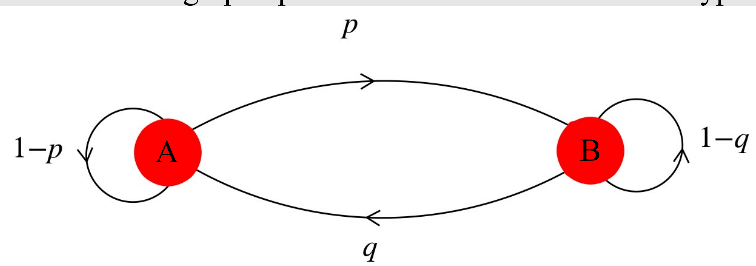
$$X_n=M^n X_0 \text{ avec } M^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est pair et } M^n=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Ainsi $X_n=\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}$ lorsque n est pair et $X_n=\begin{pmatrix}b_0\\ a_0\end{pmatrix}$ lorsque n est impair.

On en déduit que la suite des états (X_n) diverge pour toutes valeurs de X_0 sauf dans le cas $a_0=b_0=\frac{1}{2}$ où la suite est alors constante de terme égal à X_0.

- **2[e] cas :**

Propriété :
Soit une marche aléatoire sur un graphe probabiliste à deux sommets du type :



La matrice de transition est $M=\begin{pmatrix}1-p & q\\ p & 1-q\end{pmatrix}$. Ici $m_{i,j}=p_j(i)$.

Quel que soit l'état initial X_0 de cette marche aléatoire, elle converge vers un état stable unique $X=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ tel que $X=MX$ et $a+b=1$.

Démonstration :

Pour tout $n\geqslant 0$, si on note $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ l'état probabiliste après n pas, alors $a_n+b_n=1$.

À l'aide de la relation $X_{n+1}=M\times X_n$ où M est une matrice de transition, on en déduit que, pour tout entier $n\geqslant 0$:

$$a_{n+1}=(1-p)a_n+qb_n=(1-p)a_n+q(1-a_n)=(1-p-q)a_n+q\ .$$

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n=a_n-\frac{q}{p+q}$. Pour tout entier $n\geqslant 0$:

$$u_{n+1}=a_{n+1}-\frac{q}{p+q}=(1-p-q)a_n+q-\frac{q}{p+q}=(1-p-q)a_n-\frac{q(1-p-q)}{p+q}=(1-p-q)\left(a_n-\frac{q}{p+q}\right)=(1-p-q)u_n$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $1-p-q$.

Comme $|1-p-q|<1$ (car $0<p+q<2$), cette suite converge vers 0.

On en déduit que la suite (a_n) converge vers $\dfrac{q}{p+q}$ puisque, pour tout $n\geqslant 0$: $a_n=u_n+\dfrac{q}{p+q}$.

Enfin, la suite (a_n) converge vers $\dfrac{p}{p+q}$ puisque, pour tout $n\geqslant 0$: $b_n=1-a_n$.

Ces limites sont bien indépendantes de l'état initial X_0 .

La limite est un état stable $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Remarque :

La matrice I_2-M n'est pas inversible car $I_2-M=\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$ et $\det(I_2-M)=pq-qp=0$.

On peut rechercher l'état limite en utilisant les deux conditions qui suffisent à le déterminer :

- $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est stable
- $a+b=1$

En effet, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est stable donc $\begin{cases} (1-p)a+qb=a \\ pa+(1-q)b=b \end{cases} \Leftrightarrow b=\dfrac{p}{q}a$.

De plus, cet état stable vérifie $a+b=1$ puisque la somme de la probabilité d'être en A et de la probabilité d'être en B fait 1 : donc *a* est solution de $a+\dfrac{p}{q}a=1 \Leftrightarrow \dfrac{q+p}{q}a=1 \Leftrightarrow a=\dfrac{q}{p+q}$.

Une seule valeur convient pour *a* et on en déduit $b=\dfrac{p}{p+q}$.

Il n'y donc qu'un seul état stable $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifiant $a+b=1$.

C'est l'état limite **indépendant** de l'état initial X_0 .

Exemple : études d'évolutions stochastiques (aléatoires)

On s'intéresse à l'évolution d'une maladie sur une population stable.
Chaque individu est soit malade (M) soit sain (S).
On suppose que pour chaque individu, d'un mois au suivant :

- s'il était malade, il le reste avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$
- s'il était sain, il le reste avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$

Initialement, 5 % de la population est malade.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 0$, on note m_n la probabilité qu'un individu soit malade et s_n celle qu'il soit sain au bout de *n* mois.

U_n est la matrice colonne des probabilités :
$U_n=\begin{pmatrix} m_n \\ s_n \end{pmatrix}$ et $U_0=\begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}95 \end{pmatrix}$.

L_n est la matrice ligne des probabilités :
$L_n=\begin{pmatrix} m_n & s_n \end{pmatrix}$ et $L_0=\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$.

- **Étude de la suite**

Pour tout entier $n \geqslant 0$, d'après la formule des probabilités totales,

$$m_{n+1} = \frac{1}{4} m_n + \frac{1}{3} s_n \text{ et } s_{n+1} = \frac{3}{4} m_n + \frac{2}{3} s_n$$

Soit $U_{n+1} = A \times U_n$ où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Alors, par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$,

$$U_n = A^n \times U_0$$

On montre que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{12} \right)^n \times \begin{pmatrix} \frac{9}{13} & \frac{-4}{13} \\ \frac{-9}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} .$$

On en déduit que :

$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} - \frac{67}{260} \times \left(\frac{-1}{12} \right)^n \\ \frac{9}{13} + \frac{67}{260} \times \left(\frac{-1}{12} \right)^n \end{pmatrix}$$

Soit $L_{n+1} = L_n \times B$ où $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Alors, par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$,

$$L_n = L_0 \times B^n$$

On montre que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$B^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{12} \right)^n \times \begin{pmatrix} \frac{9}{13} & \frac{-9}{13} \\ \frac{-4}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} .$$

On en déduit que :

$$L_n = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} - \frac{67}{260} \times \left(\frac{-1}{12} \right)^n & \frac{9}{13} + \frac{67}{260} \times \left(\frac{-1}{12} \right)^n \end{pmatrix}$$

- **Comportement asymptotique**

La suite (U_n) converge donc vers la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ \frac{9}{13} \end{pmatrix}$

La suite (L_n) converge donc vers la matrice ligne $L = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$

Ce qui signifie qu'à long terme, la proportion de malades s'approche de $\frac{4}{13}$.

<u>Remarque :</u>

Les résultats obtenus sont équivalents.

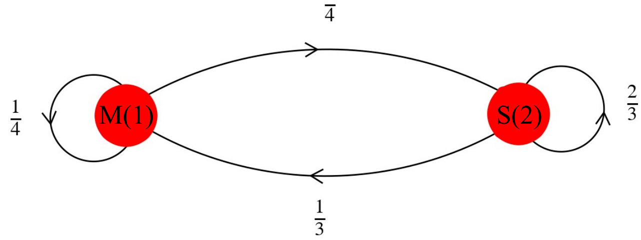
Toutefois, écrire les probabilités dans une matrice ligne rend plus automatique la définition de la matrice B .

En effet, on peut représenter la situation par le graphe ci-contre.

$$b_{i,j} = p_i(j)$$

$b_{1,1} = p_1(1) = \frac{1}{4}$; $b_{1,2} = p_1(2) = \frac{3}{4}$

$b_{2,1} = p_2(1) = \frac{1}{3}$; $b_{2,2} = p_2(2) = \frac{2}{3}$



Il est fréquent que le calcul de B^n soit difficile pour établir le comportement asymptotique de la suite (L_n).

<u>Propriétés :</u>
Soit une matrice carrée B dont tous les **coefficients sont positifs ou nuls**.

- Si les sommes des coefficients par ligne sont égales à 1, alors :
  - il existe une unique matrice ligne L à coefficients positifs ou nuls, de somme égale à 1, telle que $L \times B = L$.
  - si la suite (L_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $L_{n+1} = L_n \times B$ converge alors sa limite est L.
- Si les sommes des coefficients de B par ligne sont strictement inférieures à 1, alors la suite (B^n) converge vers la matrice nulle.

Annexe : Formule du binôme de Newton

Propriété :
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre p qui commutent (c'est-à-dire $A\times B=B\times A$).
On a alors, pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$(A+B)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i}$$

Démonstration :

- Lemme :
  Soit A et B deux matrices carrée d'ordre p qui commutent.
  On a alors : pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^k\times B=B\times A^k$.
  Démonstration :
  - Initialisation : pour $k=0$ on a $A^0\times B=I_p\times B=B\times I_p=B\times A^0$.
    pour $k=1$ on a $A^1 B=AB=BA=BA^1$ car A et B commutent.
  - Hérédité : supposons que pour un certain rang $k\geqslant 0$, on ait $A^k\times B=B\times A^k$.
    Alors $A^{k+1}B=(A\times A^k)B$
    $A^{k+1}B=A(A^k B)$ par associativité de la multiplication
    $A^{k+1}B=A(B A^k)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence
    $A^{k+1}B=(AB)A^k$ par associativité de la multiplication
    $A^{k+1}B=(BA)A^k$ car A et B commutent
    $A^{k+1}B=B(A\times A^k)$ par associativité de la multiplication
    $A^{k+1}B=B A^{k+1}$
  - Conclusion : Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre p qui commutent, on a démontré par récurrence sur k que, pour tout entier naturel k, les matrices A^k et B commutent également.
- Démonstration du théorème :
  - Initialisation :
    Au rang $n=0$: par convention, on a $(A+B)^0=I_p$ et $\binom{0}{0}A^0\times B^{0-0}=1\times I_p\times I_p=I_p$.
    Au rang $n=1$: on a, d'une part $(A+B)^1=A+B$ et, d'autre part
    $\binom{1}{0}A^0\times B^{1-0}+\binom{1}{1}A^1\times B^{1-1}=1\times I_p\times B+1\times A\times I_p=B+A=A+B$.
  - Hérédité :
    Supposons que nous ayons $(A+B)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i}$ pour un certain rang $n\geqslant 0$.
    Nous devons démontrer que $(A+B)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}A^i\times B^{n+1-i}$.
    $(A+B)^{n+1}=(A+B)^n\times(A+B)$
    $(A+B)^{n+1}=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i}\right)\times(A+B)$ d'après l'hypothèse de récurrence
    $(A+B)^{n+1}=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i}\right)\times A+\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i}\right)\times B$ distributivité

$$(A+B)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(A^i\times B^{n-i}\times A\right)+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(A^i\times B^{n-i}\times B\right)$$ distributivité

$$(A+B)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(A^i\times A\times B^{n-i}\right)+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(A^i\times B^{n-i}\times B\right)$$ d'après le lemme

$$(A+B)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(A^{i+1}\times B^{n-i}\right)+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(A^i\times B^{n-i+1}\right)$$

$$(A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}A^{i+1}\times B^{n-i}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i+1}+B^{n+1}$$

$$(A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}A^j\times B^{n-j+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i+1}+B^{n+1}$$ en posant $j=i+1$

$$(A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}A^i\times B^{n-i+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i+1}+B^{n+1}$$ car *j* est une variable muette.

$$(A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i-1}A^i\times B^{n-i+1}+\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i+1}\right]+B^{n+1}$$

$$(A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right]A^i\times B^{n-i+1}+B^{n+1}$$

$$(A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}A^i\times B^{n-i+1}+B^{n+1}$$ car $\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}=\binom{n+1}{i}$

$$(A+B)^{n+1}=\binom{n+1}{n+1}A^{n+1}\times B^0+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}A^i\times B^{n-i+1}+\binom{n+1}{0}A^0\times B^{n+1}$$

$$(A+B)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}A^i\times B^{n+1-i}$$

- Conclusion :
  Pour toute matrice carrées A et B d'ordre p qui commutent, nous avons démontré par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $(A+B)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A^i\times B^{n-i}$.

Généralisation

Soit un binôme composé des termes *a* et *b,* défini sur un **anneau** (par exemple deux nombres réels ou complexes, deux matrices, …), qui **commutent** et un entier naturel *n*, alors :

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i\times b^{n-i}$$