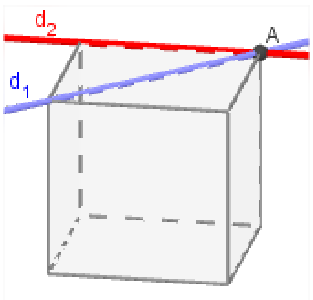
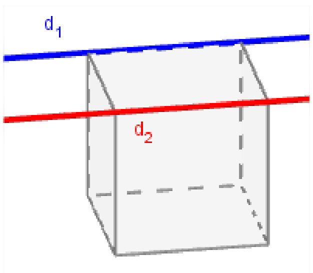
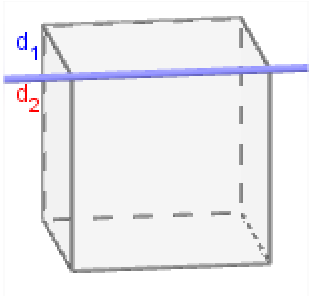
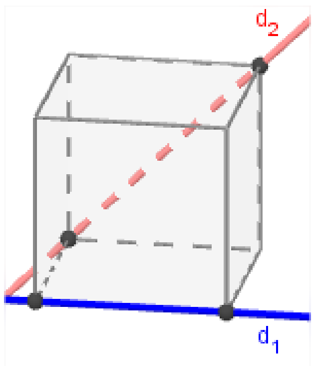
Chapitre 8
Géométrie dans l'espace

I. Positions relatives de droites et de plans

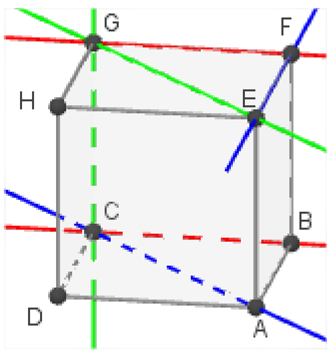
1) Positions relatives de deux droites

Propriété :
Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires**, soit **non coplanaires**.

<table>
<tr><td colspan="3">Coplanaires (dans un même plan)</td><td rowspan="2">Non coplanaires</td></tr>
<tr><td>d_1 et d_2 sécantes</td><td colspan="2">d_1 et d_2 parallèles</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>d_1 et d_2 ont un point d'intersection A</td><td>d_1 et d_2 strictement parallèles</td><td>d_1 et d_2 confondues</td><td>Aucun plan ne contient d_1 et d_2</td></tr>
</table>

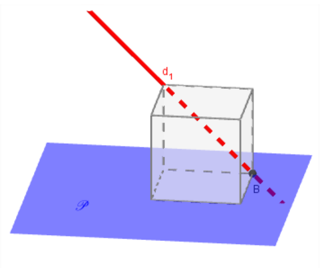
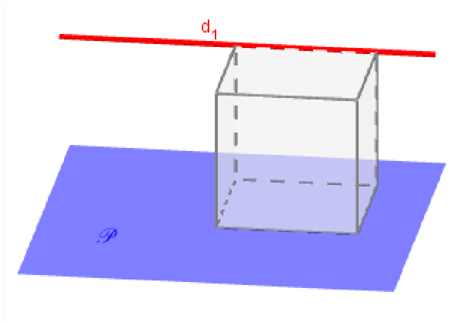
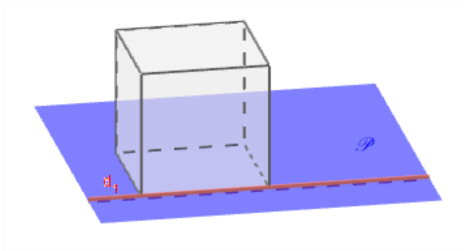
Définition :
Deux **droites** sont **parallèles** lorsqu'elles sont **coplanaires** et **non sécantes**.

Exemple :
ABCDEFGH est le cube ci-contre.
Les droites (EG) et (GC) sont sécantes en G (donc coplanaires).
Les droites (BC) et (FG) sont parallèles (donc coplanaires).
Les droites (EF) et (AC) sont non coplanaires.



2) *Positions relatives d'une droite et d'un plan*

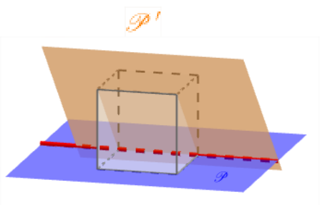
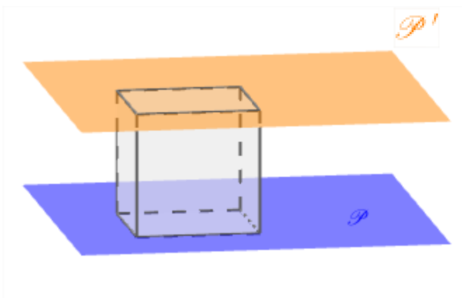
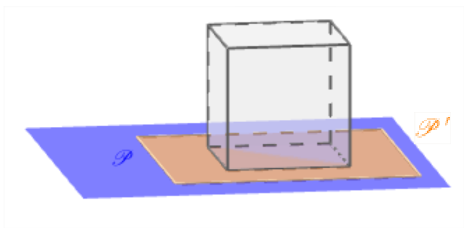
Propriété :
Une droite et un plan de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.

Sécants	Parallèles	
		
d_1 et $\mathscr{P}$ ont un point d'intersection B.	d_1 et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles, leur intersection est vide.	d_1 est contenue dans $\mathscr{P}$.

Définition :
Une **droite** et un **plan** sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont **pas sécants**.

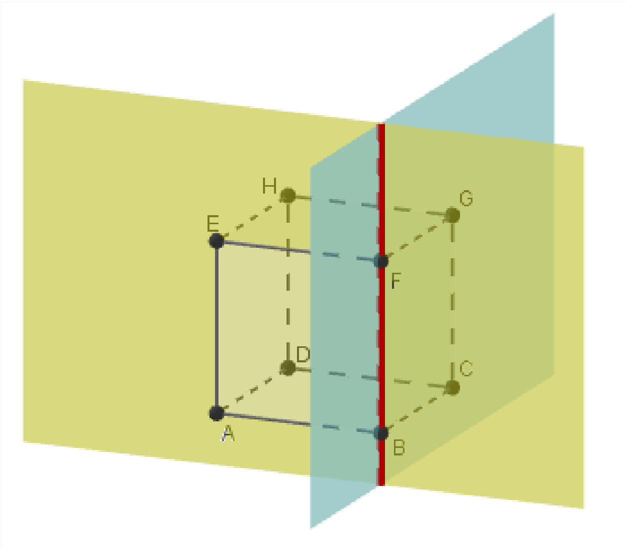
3) *Positions relatives de deux plans*

Propriété :
Deux **plans** de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.

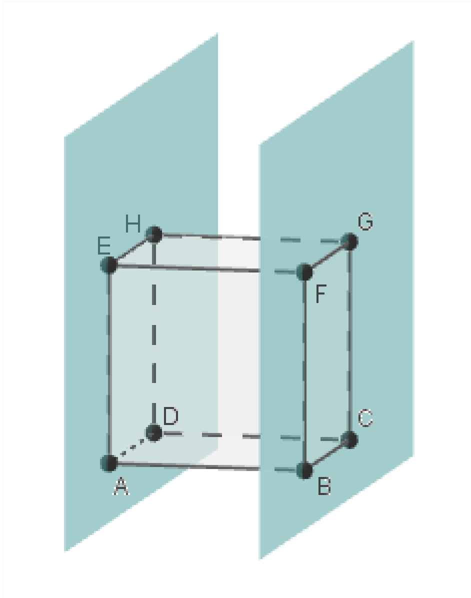
Sécants	Parallèles	
		
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont une droite d'intersection d .	$\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles, leur intersection est vide.	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus.

Définition :
Deux **plans** sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont **pas sécants**.

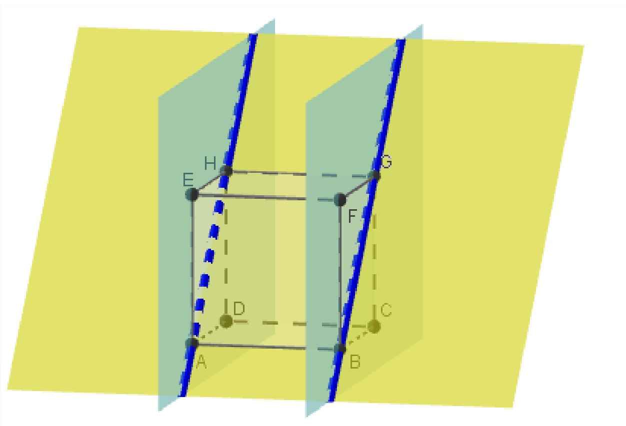
Exemples :



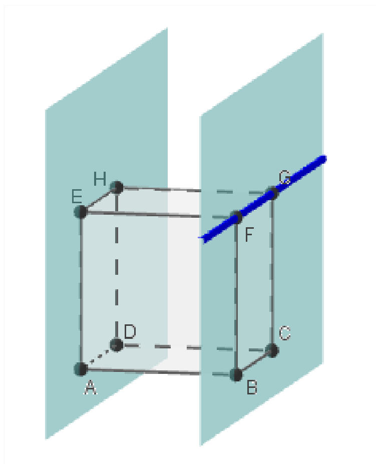
Les plans (AEF) et (CGF) sont sécants suivants la droite (BF).



Les plans (ADHE) et (BCGF) sont parallèles disjoints.



Le plan (ABGH) coupe les plans parallèles (ADHE) et (BCGF) suivant deux droites parallèles (AH) et (BG).



La droite (FG) est parallèle (disjointe) au plan (ADHE) et parallèle aussi au plan (EFGH) puisqu'elle est incluse dedans.

II. Parallélisme dans l'espace

1) Parallélisme de droites

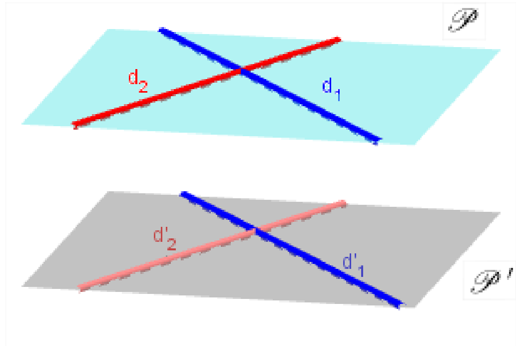
Propriétés (admises) :

- Si deux droites sont **parallèles** alors toute **parallèle** à l'une est **parallèle** à l'autre.
- Si deux droites sont **parallèles** alors tout **plan** qui **coupe** l'une **coupe** l'autre.

2) Parallélisme de plans

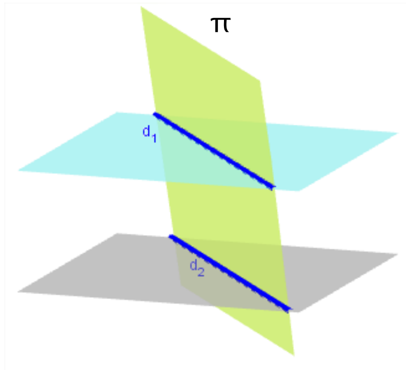
Propriété (admise) :
Si deux plans sont parallèles alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

Propriété (admise) :
Si deux droites sécantes d_1 et d_2 d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes d'_1 et d'_2 d'un plan $\mathscr{P}'$ alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.



Propriété (admise) :
Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles alors tout plan qui coupe $\mathscr{P}$ coupe aussi $\mathscr{P}'$ et les droites d'intersection d_1 et d_2 sont parallèles.

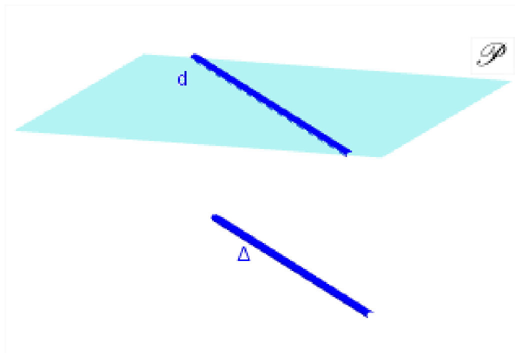
$$\mathscr{P} // \mathscr{P}' \text{ et } \pi \cap \mathscr{P} = d_2 \Rightarrow \pi \cap \mathscr{P}' = d_1 \text{ et } d_1 // d_2$$



3) Parallélisme d'une droite et d'un plan

Propriété :
Si un plan $\mathscr{P}$ contient une droite d parallèle à une droite Δ alors $\mathscr{P}$ et Δ sont parallèles.

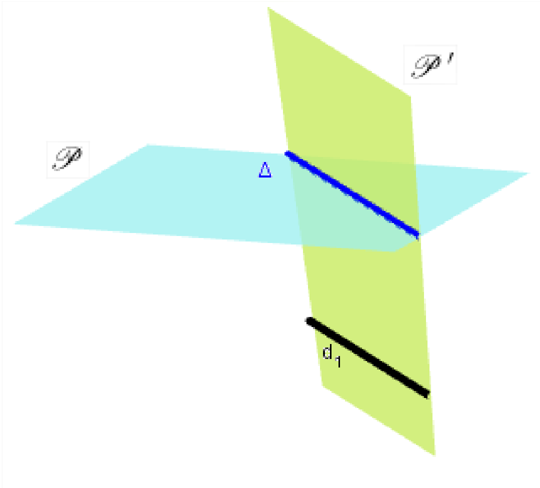
$$\Delta // d \text{ et } d \subset \mathscr{P} \Rightarrow \Delta // \mathscr{P}$$



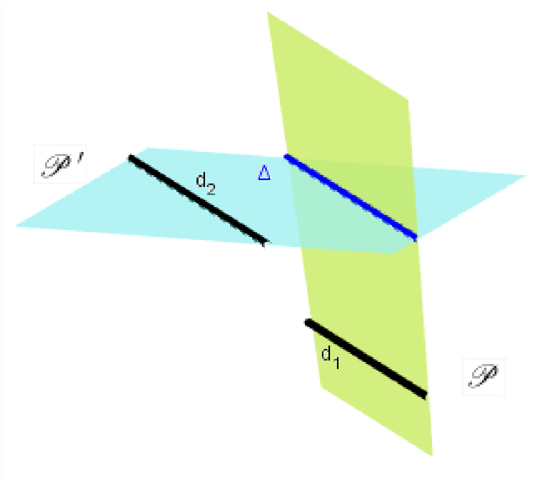
Démonstration :

- Dans le cas où Δ appartient à $\mathscr{P}$, la démonstration est immédiate.
- Supposons que Δ n'est pas incluse dans $\mathscr{P}$.
  On suppose qu'il existe une droite d du plan $\mathscr{P}$ parallèle à Δ.
  Démontrons le résultat par l'absurde.
  Supposons que Δ coupe $\mathscr{P}$ et notons M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$.
  En notant D la parallèle à d passant par M, D est une droite du plan $\mathscr{P}$.
  Comme $D // d$ et $d // \Delta$ alors $D // \Delta$. Or M appartient à Δ et D, ce qui implique que les droites Δ et D sont confondues, et donc que la droite Δ est incluses dans $\mathscr{P}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On en déduit que si $\Delta // d$ alors $\Delta // \mathscr{P}$.

Propriété (admise) :
Si une droite d_1 et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles alors tout plan $\mathscr{P}\,'$ contenant d_1 et sécant à $\mathscr{P}$ coupe $\mathscr{P}$ selon une droite Δ parallèle à d_1.



Théorème « du toit » :
Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}\,'$ sont sécants selon une droite Δ et si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles contenues respectivement dans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}\,'$ alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.



Démonstration :

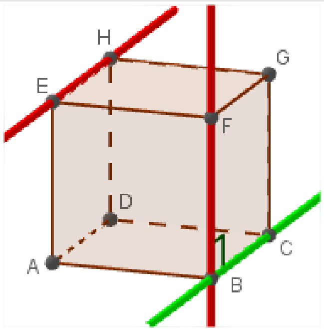
- Si d_1 et d_2 sont confondues alors Δ est aussi confondue avec d_1 et d_2, la propriété est donc vrai.
- Supposons que d_1 et d_2 soient strictement parallèles.
  Raisonnons par l'absurde : supposons que Δ et d_1 soient sécantes et notons M leur point d'intersection.
  M appartient à Δ, intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}\,'$ donc M appartient à $\mathscr{P}\,'$.
  M n'appartenant pas à d_2, car d_1 et d_2 sont strictement parallèles, M et d_2 définissent le plan $\mathscr{P}\,'$.
  d_1 étant parallèle à d_2 passant par M, il en résulte que d_1 appartient aussi au plan $\mathscr{P}\,'$.
  On en déduit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}\,'$ sont sécants suivant la droite d_1, alors confondue avec Δ, ce qui contredit le fait que d_1 et Δ soient sécantes.
  En conclusion Δ et d_1 ne peuvent pas être sécantes et comme elles sont coplanaires, elles sont donc parallèles.
  Par suite, Δ est aussi parallèle à d_2 car d_1 et d_2 sont parallèles.

III. Orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de deux droites

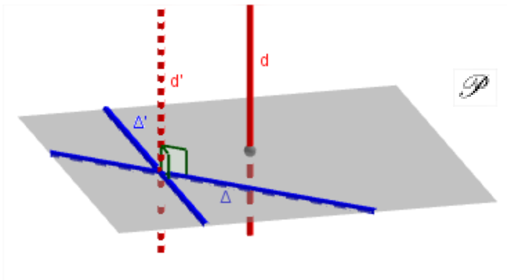
Définition :
Deux droites sont **orthogonales** signifie que leurs parallèles menées d'un point quelconque sont perpendiculaires.

Exemple :
Dans ce cube ABCDEFGH, les droites (BF) et (EH) sont orthogonales car la parallèle à (EH) passant par B et (FB) sont perpendiculaires : (EH)//(BC) et (BC)⊥(BF).



2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition :
Dire qu'une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont **orthogonaux** signifie que la droite d est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$.

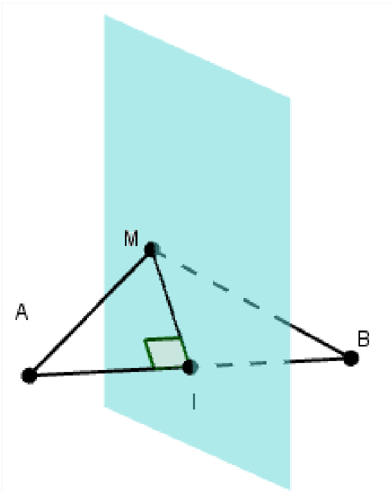


$d \,//\, d'$

Propriété :
Si une droite d est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ alors elle est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathscr{P}$.

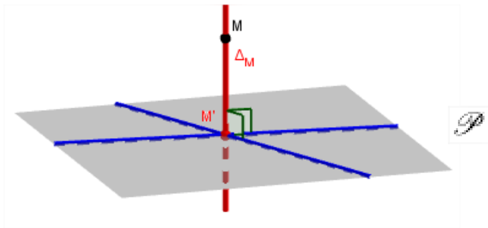
Définition :
Le **plan médiateur** d'un segment $[AB]$ est le plan orthogonal à (AB) qui passe par le milieu de $[AB]$.

Propriété :
Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est aussi l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et B.



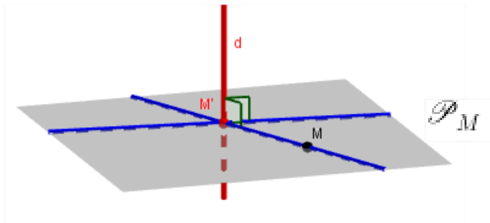
Projection orthogonale sur un plan

Définition :
$\mathscr{P}$ est un plan et M est un point.
Il existe une unique droite Δ_M passant par M et orthogonale à $\mathscr{P}$.
On dit que le point M' d'intersection de Δ_M et $\mathscr{P}$ est le **projeté orthogonal** du point M sur le plan $\mathscr{P}$.



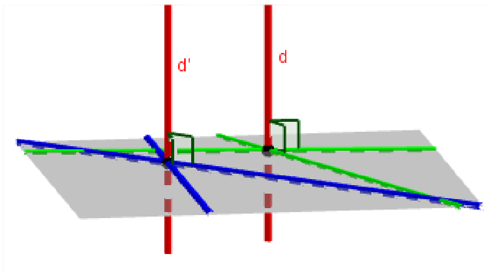
Projection orthogonale sur une droite

Définition :
d est une droite et M est un point.
Il existe un unique plan $\mathscr{P}_M$ passant par M et orthogonale à d.
On dit que le point M' d'intersection de $\mathscr{P}_M$ et d est le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d.



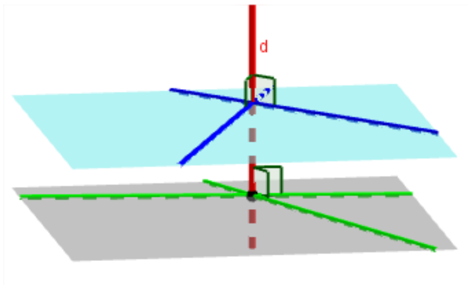
Propriété (admise) :
Si deux droites sont parallèles alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

Propriété (admise) :
Si deux droites sont orthogonales à un même plan alors elles sont parallèles entre elles.



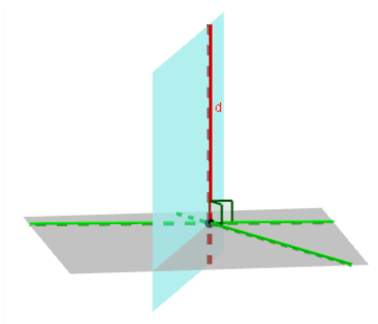
Propriété (admise) :
Si deux plans sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonal à l'autre.

Propriété (admise) :
Si deux plans sont orthogonaux à une même droite alors ils sont parallèles entre eux.



3) *Orthogonalité de deux plans*

Définition :
Deux plans sont **perpendiculaires** lorsque l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.



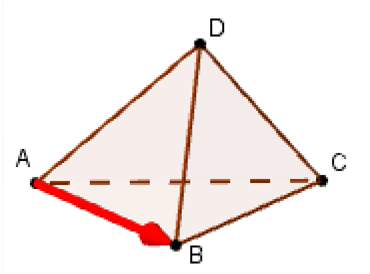
IV. Vecteurs de l'espace

1) *Définitions*

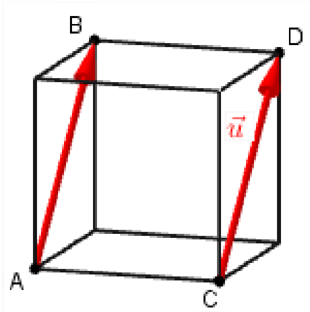
On étend à l'espace la notion de vecteur vue en géométrie plane.

Définitions :

- À tout couple $(A;B)$ de points de l'espace on associe le vecteur $\vec{AB}$. Dans un plan qui contient A et B, $\vec{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en B.
- Lorsque $B=A$, le vecteur $\vec{AA}$ est le vecteur nul, on le note $\vec{0}$.



Égalité de deux vecteurs



Définition :
Dire que deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux signifie que $ABDC$ est un parallélogramme éventuellement aplati.
Dans ce cas, $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont les représentants d'un même vecteur $\vec{u}$.
On note $\vec{u}=\vec{AB}=\vec{CD}$.

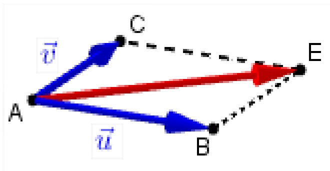
Définition :
Pour tout point E de l'espace et tout vecteur $\vec{v}$ il existe un unique point F tel que $\vec{EF}=\vec{v}$.

2) *Opérations sur les vecteurs*

Les opérations sur les vecteurs du plan s'étendent aux vecteurs de l'espace.

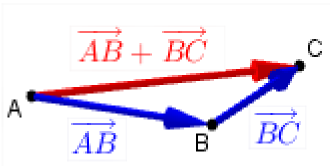
Somme de deux vecteurs

Règle du parallélogramme :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de représentants $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
La somme $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur $\vec{AE}$ tel que $ABEC$ soit un parallélogramme.



Relation de Chasles :
Pour tous points A, B et C de l'espace.

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}.$$

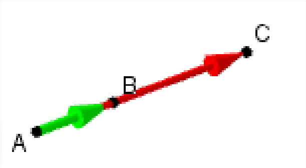


En particulier :
$\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}$, $\vec{BA}$ est le vecteur **opposé** à $\vec{AB}$.

Produit d'un vecteur par un nombre réel

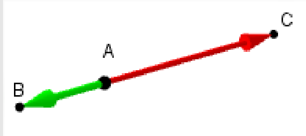
Propriété :
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul et λ un nombre réel.
Le vecteur $\lambda\vec{u}=\overrightarrow{AC}$ est défini par :

- Si $\lambda\geqslant 0$



$C\in[AB]$ et $AC=\lambda AB$

- Si $\lambda<0$



$C\in(AB)$, $C\notin[AB]$ et $AC=-\lambda AB$

Propriétés des opérations :

- $\lambda\vec{u}=\vec{0}$ si, et seulement si, λ=0 ou $\vec{u}=\vec{0}$.
- $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$ alors, le vecteur $\vec{u}+(-\vec{v})$ est noté $\vec{u}-\vec{v}$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et tous nombre réels λ et λ' :
  $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$ $\quad(\lambda+\lambda')\vec{u}=\lambda\vec{u}+\lambda'\vec{u}$ $\quad\lambda(\lambda'\vec{u})=(\lambda\lambda')\vec{u}$

V. Plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires

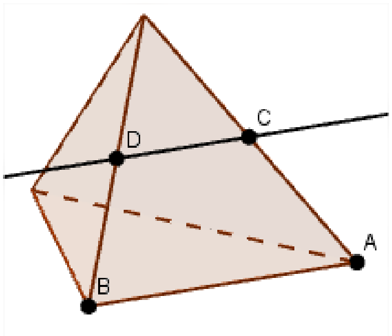
1) *Vecteurs colinéaires*

Définition :
Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont colinéaires signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$.

Remarque :
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

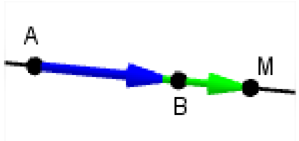
Propriété :
Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété :
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



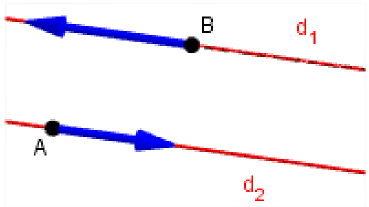
Propriété :
A et B sont deux points distincts de l'espace.
Un point M appartient à la droite (AB) si, et seulement si, il existe un réel x tel que :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}.$$



Vocabulaire :
De façon générale, une droite est définie par un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$. On parle alors de **droite** $(A;\vec{u})$ ou de la droite de repère $(A;\vec{u})$ et on dit que $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de cette droite.

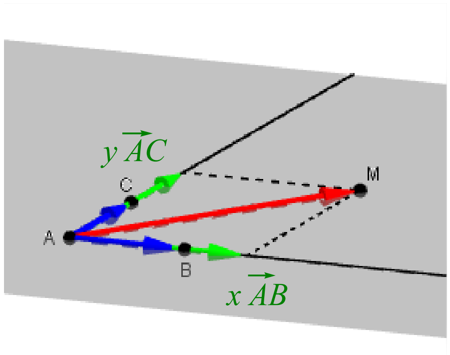
Propriété :
Deux droites sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.



2) Plan et vecteurs non colinéaires

Propriété :
A, B et C sont trois points non alignés de l'espace et $\mathscr{P}$ est le plan (ABC).
Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe des nombres réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}.$$



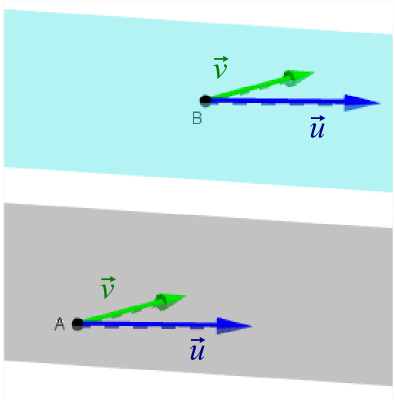
Démonstration :

- Dans le plan $\mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires donc, pour tout point M de $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ se décompose en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ainsi il existe des nombres réels x et y tels que :
$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$$
- Réciproquement, on considère le point N du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, alors $\overrightarrow{AN} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ et $M = N$.
Le point M appartient au plan $\mathscr{P}$.

Vocabulaire :
De façon générale, un plan est défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On parle alors du **plan** $(A;\vec{u},\vec{v})$ ou du plan de repère $(A;\vec{u},\vec{v})$ et on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des **vecteurs directeurs** de ce plan.

Propriété :
Deux plans qui ont **deux vecteurs directeurs** en commun sont parallèles.

Démonstration :
On considère deux plans $(A;\vec{u},\vec{v})$ et $(B;\vec{u},\vec{v})$ qui ont les mêmes vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Les droites sécantes $(A;\vec{u})$ et $(A;\vec{v})$ du plan $(A;\vec{u},\vec{v})$ sont parallèles aux droites sécantes $(B;\vec{u})$ et $(B;\vec{v})$ du plan $(B;\vec{u},\vec{v})$.
Donc les plans $(A;\vec{u},\vec{v})$ et $(B;\vec{u},\vec{v})$ sont parallèles.

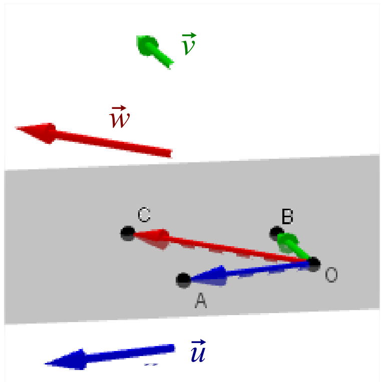


Propriété :
Une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles si, et seulement si, un vecteur directeur de d est un vecteur du plan $\mathscr{P}$.

VI. Vecteurs coplanaires

1) Situation dans l'espace

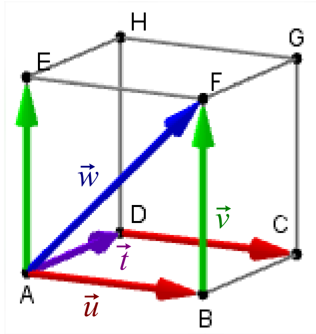
Définition :
Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** signifie que pour un point O quelconque de l'espace les points O, A, B et C définis par $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$ sont dans un même plan.



Propriété :
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe des nombres réels *a* et *b* tels que :
$$\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$$

Démonstration :
Pour un point O quelconque de l'espace A, B et C sont définis par $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ce sont donc deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$ = (OAB).
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires signifie que C appartient au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire qu'il existe des nombres réels *a* et *b* tels que $\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$, c'est-à-dire $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

Exemple :
Dans le cube ABCDEFGH ci-contre :



- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires car $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AE}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AF}$ et A, B, E, F sont dans le plan (ABE).
- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ ne sont pas coplanaires car $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AE}$, $\vec{t}=\overrightarrow{AD}$ et l'unique plan contenant A, B, E est (ABE) qui ne contient pas D.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires puisque $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$ et A, B, E sont dans le plan (ABE), cependant les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires.

Remarque :
Deux vecteurs sont toujours coplanaires, contrairement à deux droites.

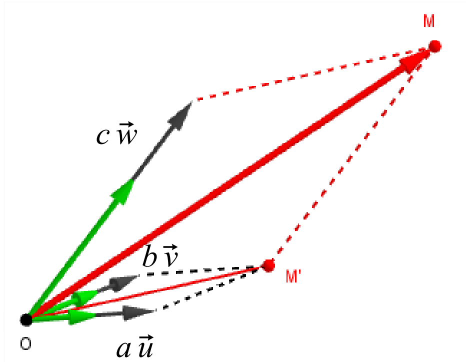
2) *Décomposition d'un vecteur*

Propriété :
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs **non coplanaires** de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de nombres réels tels que :

$$\vec{t}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$$

Démonstration :



- Existence

O est un point de l'espace et $\mathscr{P}$ le plan défini par O et les deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On pose $\vec{t}=\overrightarrow{OM}$.
La droite passant par M , de vecteur directeur $\vec{w}$ et le plan $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles car $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. On note M' leur point d'intersection.
M' appartient à $\mathscr{P}$, donc il existe des nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{OM'}=a\vec{u}+b\vec{v}$.
D'autre part, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$. Or $\overrightarrow{M'M}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, donc il existe un nombre réel c tel que $\overrightarrow{M'M}=c\vec{w}$.
Finalement $\vec{t}=\overrightarrow{OM}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$.

- Unicité

On suppose qu'il existe deux triplets $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ de nombres réels tels que :
$\vec{t}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=a'\vec{u}+b'\vec{v}+c'\vec{w}$.
Si $c\neq c'$, alors $\vec{w}=\frac{a'-a}{c-c'}\vec{u}+\frac{b'-b}{c-c'}\vec{v}$, or ceci n'est pas possible car $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, donc $c=c'$.
On obtient alors $a\vec{u}+b\vec{v}=a'\vec{u}+b'\vec{v}$, donc $a=a'$ et $b=b'$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Remarque :
Les coordonnées de $\vec{t}$ ne dépendent pas de l'origine du repère.

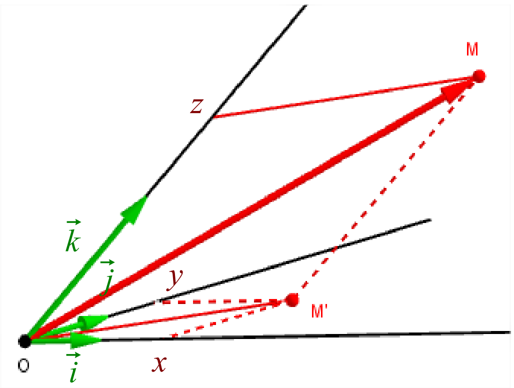
VII. Repérage dans l'espace

1) Repère de l'espace et coordonnées

Définition :
Un repère de l'espace, $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est formé d'un point O et d'un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires.

Propriété :
$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que :

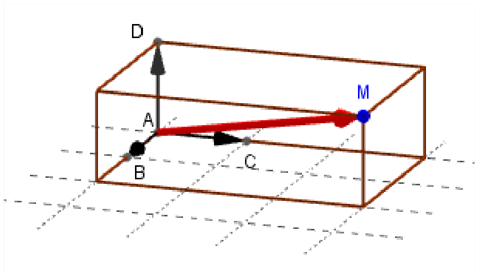
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$



Démonstration :
Les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ne sont pas coplanaires, donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose de façon unique en fonction des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Vocabulaire :
$(x; y; z)$ sont les **coordonnées** du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
x est l'**abscisse**, y est l'**ordonnée** et z la **cote** du point M dans ce repère.

Exemple :
$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 1\overrightarrow{AD}$
Donc dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, M a pour coordonnées $(2; 3; 1)$ et $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.



2) Calculs sur les coordonnées

Propriété :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ alors :

- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$.
- Pour tout nombre réel λ, le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

Propriété :

Si A et B ont pour coordonnées $(x_A;y_A;z_A)$ et $(x_B;y_B;z_B)$ alors :

- Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

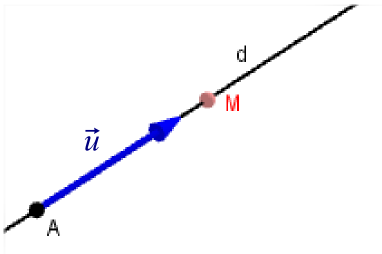
3) Représentation paramétrique d'une droite

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace.

d est la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A;y_A;z_A)$ et admettant le vecteur non nul $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Propriété :

Dire qu'un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à d équivaut à dire qu'il existe un nombre réel t tel que $\vec{AM}=t\vec{u}$, c'est-à-dire tel que : $\begin{cases} x=x_A+ta \\ y=y_A+tb \\ z=z_A+tc \end{cases}$.



Démonstration :

À tout point *M* de la droite d correspond un unique réel t.

Il existe donc un unique réel t tel que $\vec{AM}=t\vec{u}$.

En notant $(x;y;z)$ les coordonnées du point *M*, cette égalité vectorielle se traduit par :

$$\begin{cases} x-x_A=ta \\ y-y_A=tb \\ z-z_A=tc \end{cases}, \text{ soit finalement le système } \begin{cases} x=x_A+ta \\ y=y_A+tb \\ z=z_A+tc \end{cases}.$$

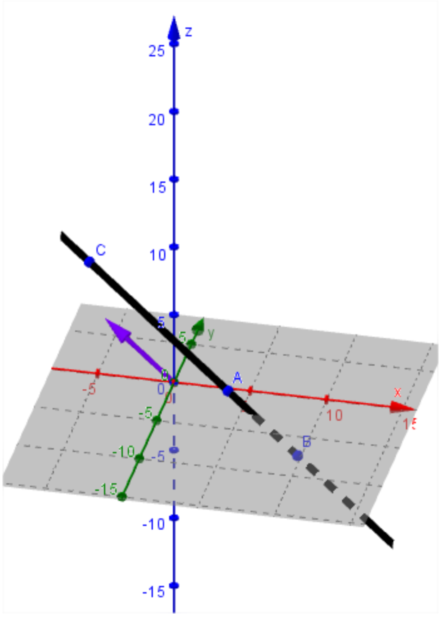
Réciproquement, à tout réel t on peut associer un point *M* de la droite d tel que $\vec{AM}=t\vec{u}$.

Définition :

Le système $\begin{cases} x=x_A+ta \\ y=y_A+tb \\ z=z_A+tc \end{cases}$ est une **représentation paramétrique** de la droite d .

t est le **paramètre** de cette représentation.

Exemple :



- $\begin{cases} x=4-5t \\ y=-2+2t \\ z=1+3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(4;-2;1)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
- Le point obtenu en prenant $t=-1$ est le point $B(9;-4;-2)$.
  Il appartient à la droite d et on a $\overrightarrow{AB}=t\vec{u}=-\vec{u}$.
- Soit le point $C(-6;2;7)$. Pour savoir s'il appartient à la droite d , on cherche t tel que l'on ait à la fois les trois égalités $\begin{cases} -6=4-5t \\ 2=-2+2t \\ 7=1+3t \end{cases}$.
  On constate que ce système de trois équations a pour solution $t=2$.
  Le point C appartient donc à la droite d et $\overrightarrow{AC}=2\vec{u}$.

Remarques :

- Une droite a une infinité de représentations paramétriques.
- Contrairement au plan, une droite ne possède pas une équation cartésienne dans l'espace.

4) Représentation paramétrique d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ dirigé par les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$.

Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}+t'\vec{v}$ ce qui s'exprime, avec les coordonnées, par le système :

$$\begin{cases} x-x_A=at+a't' \\ y-y_A=bt+b't' \\ z-z_A=ct+c't' \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x=x_A+at+a't' \\ y=y_A+bt+b't' \\ z=z_A+ct+c't' \end{cases} .$$

Ce système lorsque t et t' décrivent $\mathbb{R}$, est appelé une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$.

Annexe : Surfaces

Il y a plusieurs façons de définir une surface.
Une surface peut être définie comme :

- l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ vérifiant $f(x;y;z)=0$ avec f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
- l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ vérifiant $z=g(x;y)$ avec g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- La sphère de centre O et de rayon 1 est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\mathrm{OM}=1$.

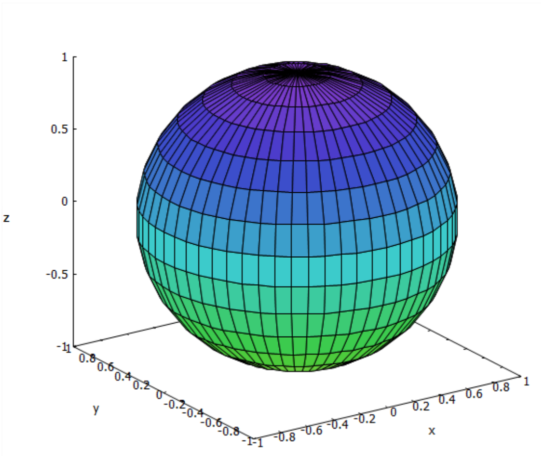
Si $\mathrm{M}(x;y;z)$ est un point de la sphère, alors son équation est :

$$x^2+y^2+z^2=1$$

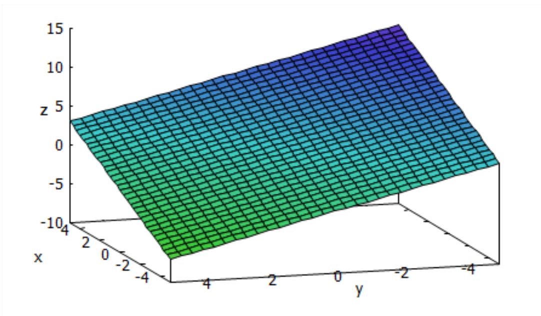
Donc cette sphère est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ tels que :

$$f(x;y;z)=0$$

avec $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2-1$.

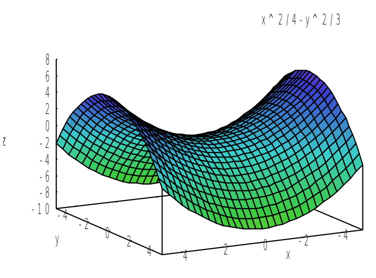


- L'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ vérifiant $z=g(x;y)$ avec $g(x;y)=x-y+3$ est le plan d'équation $x-y-z+3=0$



Mais aussi...

Paraboloïde hyperbolique



Ruban de Möbius