Chapitre 14

Système de deux équations à deux inconnues

I. Équation du 1er degré à deux inconnues

Définition :

Une **équation** du **1er degré** à **deux inconnues** x et y est une équation qui peut se ramener à une équation de la forme $ax+by=c$ où a, b et c sont trois nombres donnés.

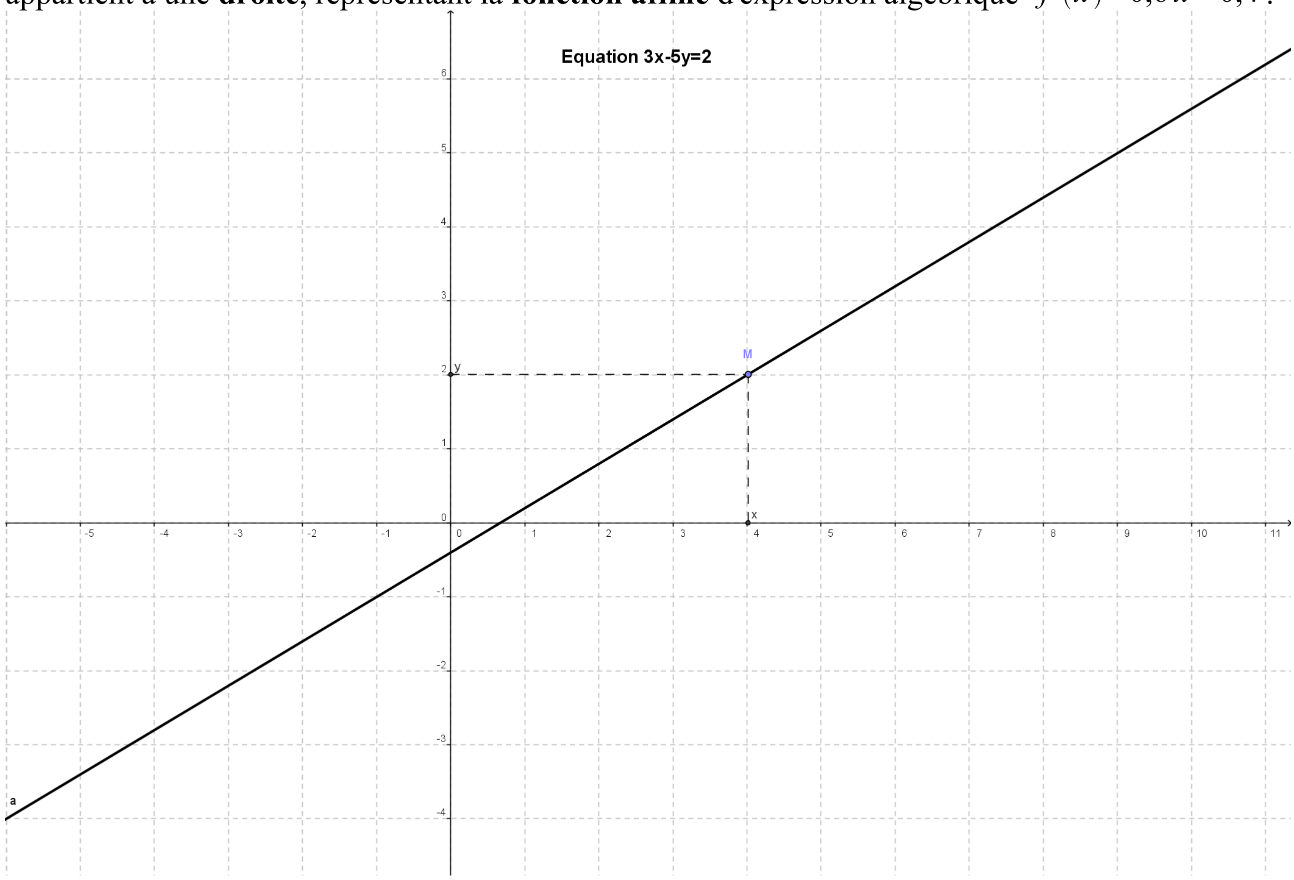
Exemple :

Soit l'équation $3x-5y=2$.
$3\times4-5\times2=12-10=2$, donc le couple (4 ;2) est **une** solution de cette équation ((14 ;8) également)
$3x-5y=2$ a une **infinité** de solutions.

Interprétation graphique :

L'équation $3x-5y=2$ est équivalente à $y=\frac{3x-2}{5}=0{,}6x-0{,}4$.

On vérifie ainsi que, dans un repère, l'**ensemble des points** de coordonnées (x ; y) avec $3x-5y=2$ appartient à une **droite**, représentant la **fonction affine** d'expression algébrique $f(x)=0{,}6x-0{,}4$.



II. Système de deux équations à deux inconnues

Définitions :

Un **système** de **deux équations** du 1er degré à deux inconnues x et y est de la forme :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$ où a, b, c, a', b', c' sont des nombres donnés.

Résoudre un tel système, c'est trouver les couples (x ; y) qui vérifient **simultanément** les deux équations.

Exemple :

Le couple (2 ; 3) est solution du système $\begin{cases} 4x-2y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$.

En effet, on vérifie que $\begin{cases} 4\times2-2\times3=8-6=2 \\ 2+3=5 \end{cases}$

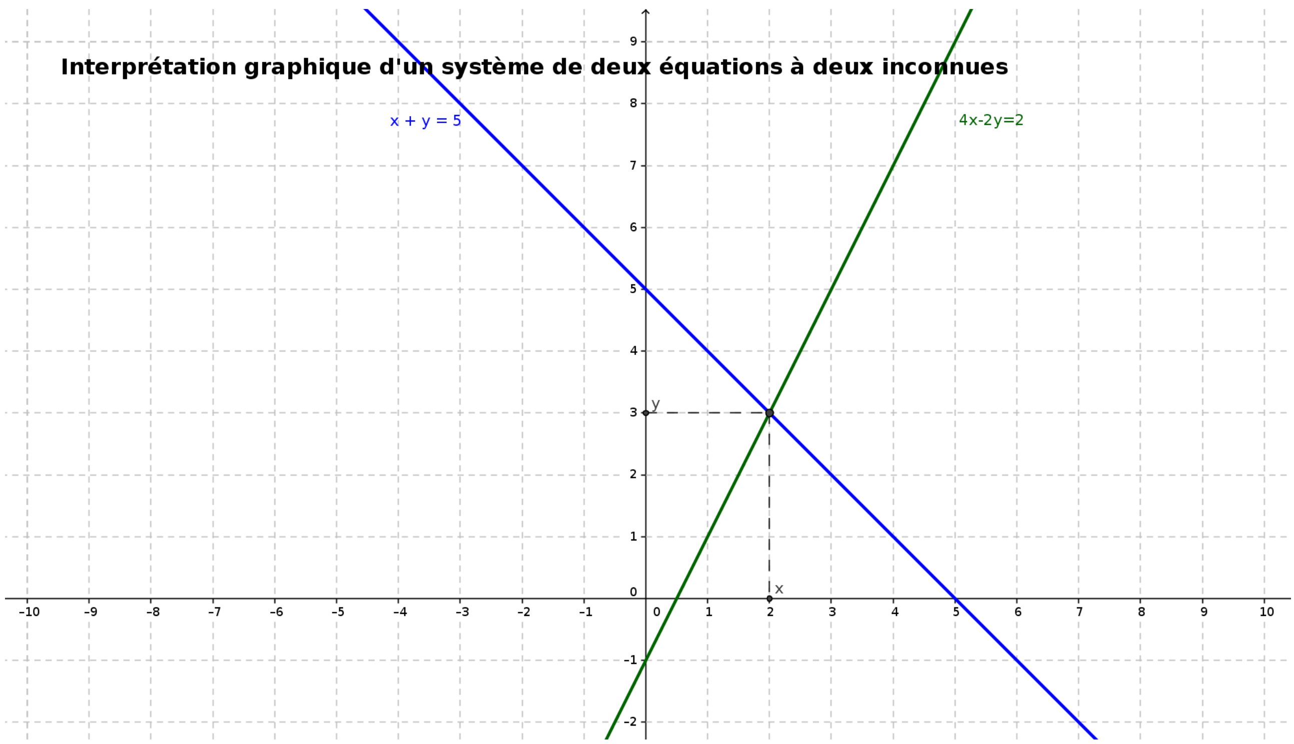
Interprétation graphique :

Chaque équation donne une relation entre x et y qui, dans un repère, correspond à une droite, représentant une fonction affine.

$$\begin{cases} 4x-2y=2 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ y=-x+5 \end{cases}$$

On cherche donc le point de coordonnées (x ; y) qui vérifie simultanément :

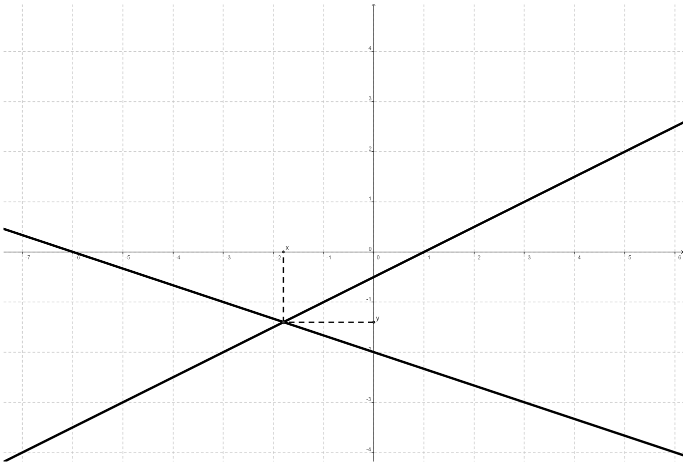
$y=2x-1$ et $y=-x+5$ c'est-à-dire le **point d'intersection des deux droites**.



<u>Remarque :</u>

Cette interprétation nous permet de constater qu'il existe différents cas d'études :

Une solution unique



$$\begin{cases} y=0{,}5\,x-0{,}5 \\ y=-\dfrac{1}{3}\,x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\,y=1 \\ x+3\,y=-9 \end{cases}$$

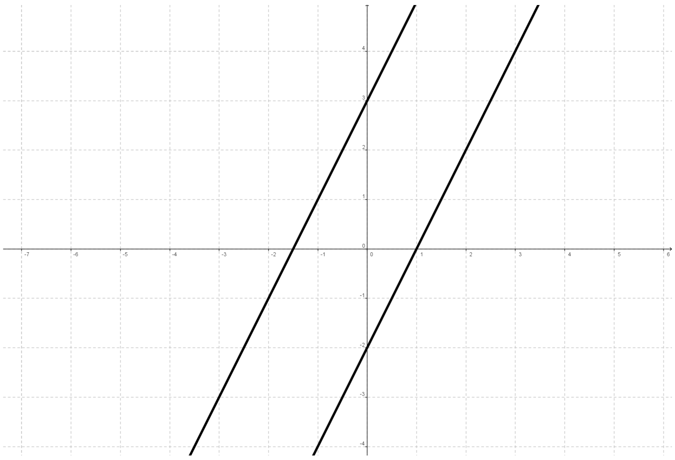
$m=0{,}5$ et

$m'=\dfrac{-1}{3}$

Deux droites sécantes

(les **coefficients directeurs** sont **différents**)

Pas de solution



$$\begin{cases} y=2\,x-2 \\ y=2\,x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\,x-y=2 \\ 2\,x-y=-3 \end{cases}$$

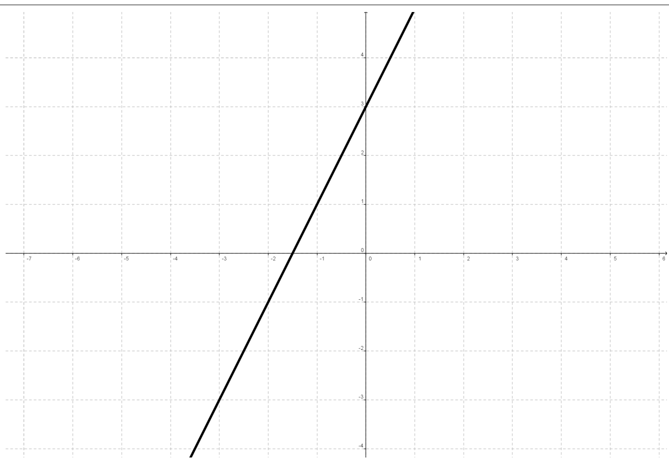
$m=m'=2$

$p=2$ et $p'=3$

Deux droites parallèles non confondues

(**mêmes coefficients directeurs** mais **ordonnées à l'origine différents**)

Infinité de solution



$$\begin{cases} y=2\,x+3 \\ y=2\,x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\,x-y=-3 \\ 4\,x-2=-6 \end{cases}$$

$m=m'=2$

$p=p'=3$

Deux droites confondues

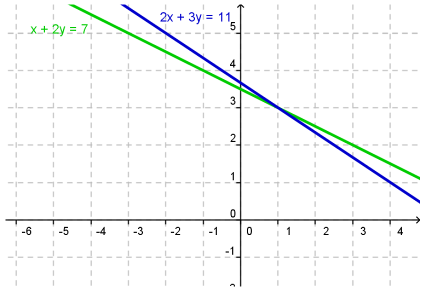
(**mêmes coefficients directeurs** et **mêmes ordonnées à l'origine**)

III. Résolution d'un système

1) *Par substitution*

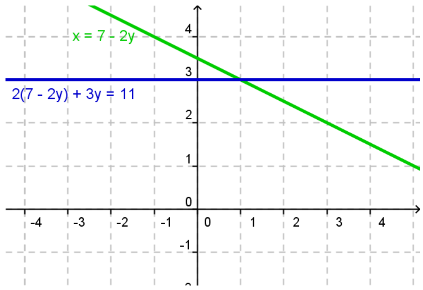
$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$$

On exprime une inconnue en fonction de l'autre (ici x en fonction de y)



$$\begin{cases} x=7-2y \\ 2\times(7-2y)+3y=11 \end{cases}$$

On **substitue** une inconnue pour obtenir une équation du 1er degré à une inconnue



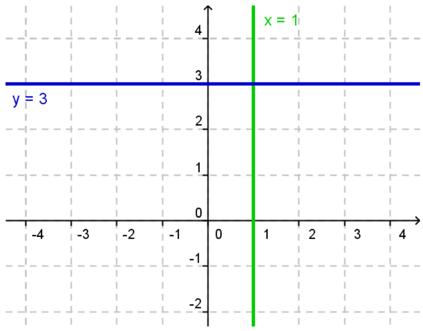
$$\begin{cases} x=7-2y \\ 14-4y+3y=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=7-2y \\ -y=-3 \end{cases}$$

On résout la 2ème équation et on obtient y

$$\begin{cases} x=7-2\times 3=1 \\ y=3 \end{cases}$$

On utilise la 1ère équation pour obtenir x



$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Vérifications :

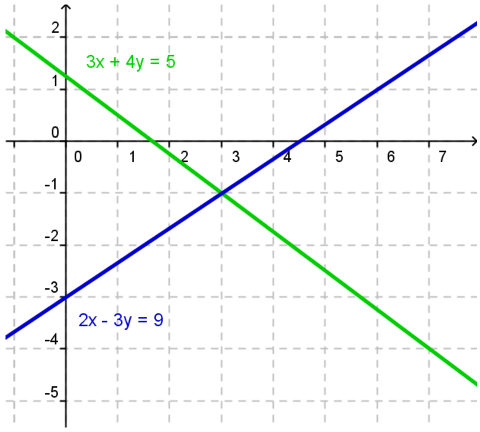
$$\begin{cases} 1+2\times 3=1+6=7 \\ 2\times 1+3\times 3=2+9=11 \end{cases}$$

La solution est le couple (1 ; 3).

2) ***Par combinaison***

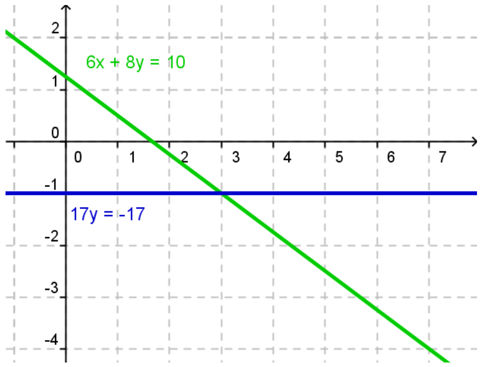
$\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$

On cherche à avoir les mêmes coefficients devant les x pour chaque équation.



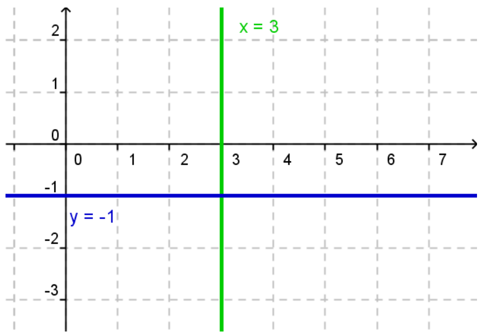
$\begin{cases} 6x+8y=10 \\ 6x-9y=-27 \end{cases}$

On multiplie la 1ère équation par **2** et la 2ème équation par **3**.



$\begin{cases} 6x+8y=10 \\ 17y=-17 \end{cases}$

On conserve la 1ère équation et on soustrait la 2ème équation à la 1ère <u>**(combinaison)**</u>



$\begin{cases} 6x+8\times(-1)=10 \\ y=-1 \end{cases}$

On résout la 2ème équation et on obtient y

$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

On utilise la 1ère équation pour obtenir x

<u>Vérifications :</u>

$\begin{cases} 3\times3+4\times-1=9-4=5 \\ 2\times3-3\times(-1)=6-(-1)=6+1=9 \end{cases}$

La solution est le couple (3 ; -1)