Chapitre 4
Dérivabilité des fonctions

I. Dérivabilité d'une fonction

1) Taux de variation

Définition :

Soit I un intervalle contenant un nombre réel a et f une fonction définie sur I.

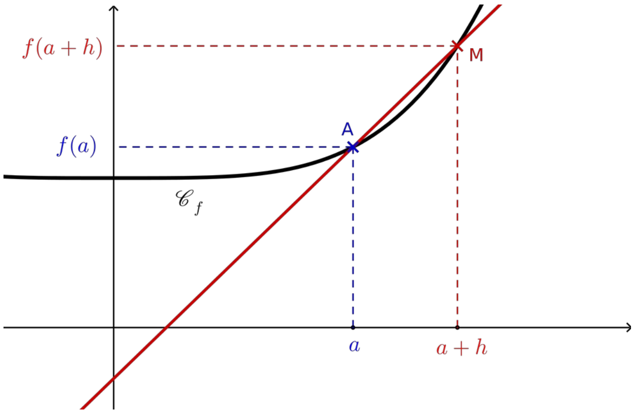
Le nombre $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé **taux de variation** de f entre a et $a + h$.

Remarque :

A(a ; $f(a)$) et M($a+h$; $f(a+h)$) appartiennent à $\mathscr{C}_f$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$, soit $\tau(h)$.

Le nombre $\tau(h)$ dépend de a.



2) Nombre dérivé

Définition :

Soit I un intervalle contenant un nombre réel a et f une fonction définie sur I.

On dit que la **fonction f est dérivable en a** si la limite du rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0, avec $a+h$ dans I, existe et est égale à un nombre réel ℓ.

Ce nombre ℓ est appelé **nombre dérivé de la fonction f en a**. On le note $f'(a)$.

On a donc :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

Exemple :

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ et $a=1$.

Pour $h\neq 0$, on a $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(1+h)^3-1^3}{h}=\dfrac{(1+3h+3h^2+h^3)-1}{h}=3+3h+h^2$.

On a vu que $\lim\limits_{h\to 0} h^2+3h+3=3$.

Donc la fonction *f* est dérivable en 1 et le nombre dérivé de *f* en 1 vaut 3. Donc $f'(1)=3$.

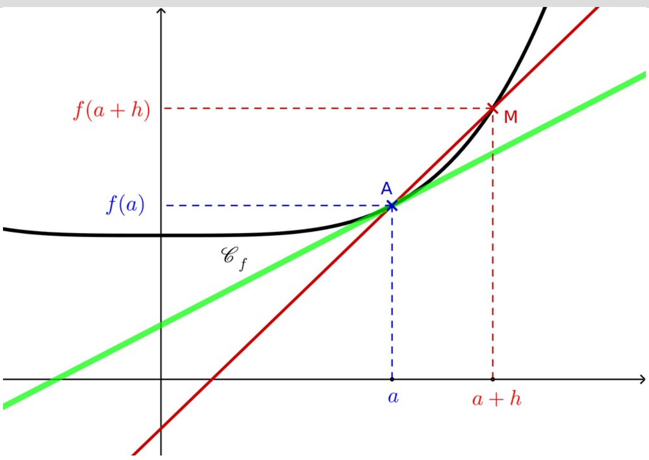
3) Interprétation graphique

Propriété :

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en *a*, nombre réel appartenant à I, et de nombre dérivé ℓ en *a*.

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, *A* le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse *a* et *M* le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+h$ avec $a+h$ appartenant à I et $h\neq 0$.

Le nombre dérivé ℓ de *f* en *a* est la limite du coefficient directeur de la droite (AM) lorsque le point *M* se rapproche du point *A*, c'est-à-dire lorsque *h* tend vers 0.



4) Fonction dérivée *f'*

Définition :

Une fonction *f* est **dérivable sur un intervalle I** lorsqu'elle est dérivable en tout nombre réel *x* appartenant à I.

Définition :

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction définie sur I qui, à tout nombre réel *x*, fait correspondre le nombre dérivé de la fonction *f* en *x* est appelée **fonction dérivée** de *f*.

La fonction dérivée de *f* est notée f'.

Exemples :

- Pour la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k$ (*k* fixé),

  pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{k-k}{h}=0$

  Ainsi on a :

  $(k)' : x \mapsto f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h \to 0} 0=0$

- Pour la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$,

  pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$: $\dfrac{(x+h)-x}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

  Ainsi on a :

  $(x)' : x \mapsto f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h \to 0} 1=1$

- Pour la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$,

  pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$: $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=2x+h$

  Ainsi on a :

  $(x^2)' : x \mapsto f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h \to 0} 2x+h=2x$

- Pour la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$,

  pour tout $x \in [0;+\infty[$ et $h \neq 0$:

  $$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

  $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ de plus $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{x+h}=\sqrt{x}$

  Ainsi, pour $x \in]0;+\infty[$:

  $(\sqrt{x})' : x \mapsto f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- Pour la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$,

  pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $h \neq 0$: $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)}-\dfrac{1}{x}}{h}=\dfrac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\dfrac{-h}{x(x+h)}\times\dfrac{1}{h}=-\dfrac{1}{x(x+h)}$

  Ainsi on a :

  $\left(\dfrac{1}{x}\right)' : x \mapsto f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{1}{x(x+h)}=-\dfrac{1}{x^2}$

5) Continuité et dérivabilité

Propriété (admise) :

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur I.

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0, mais sont continues en 0.

Remarques :

Ne pas confondre continuité et dérivabilité.

- Une fonction f est **continue en *a*** si la courbe $\mathscr{C}_f$ ne présente pas de saut en son point d'abscisse a.
- Une fonction f est **dérivable en *a*** si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a.

II. Tangente à une courbe

1) Tangente en un point à une courbe

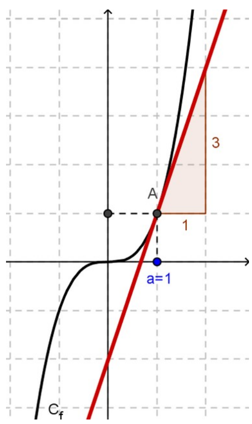
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a, nombre réel appartenant à I.

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.

La **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est la **droite passant** par A et ayant comme **coefficient directeur le nombre dérivé** $f'(a)$.

Exemple :



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^3$

Le point A d'abscisse $a=1$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ a comme coordonnées $(1;1)$.

De plus, le nombre dérivé de f en $a=1$ est égal à $f'(1)=3$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est la droite passant par A et ayant comme coefficient directeur 3.

Remarque :

Le point $A(a;f(a))$ est le point de contact de la tangente et de $\mathscr{C}_f$.

2) Équation d'une tangente à une courbe

Propriété :

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction *f* dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, *A* un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse *a* et $f'(a)$ le nombre dérivé de *f* en *a*.

Une **équation de la tangente** à $\mathscr{C}_f$ en *A* est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ et le point *A* d'abscisse $a=1$ de la courbe $\mathscr{C}_f$.

On a : $a=1$; $f(a)=1^3=1$; $f'(a)=3$.

D'où $y=f'(a)(x-a)+f(a)=3(x-1)+1=3x-2$.

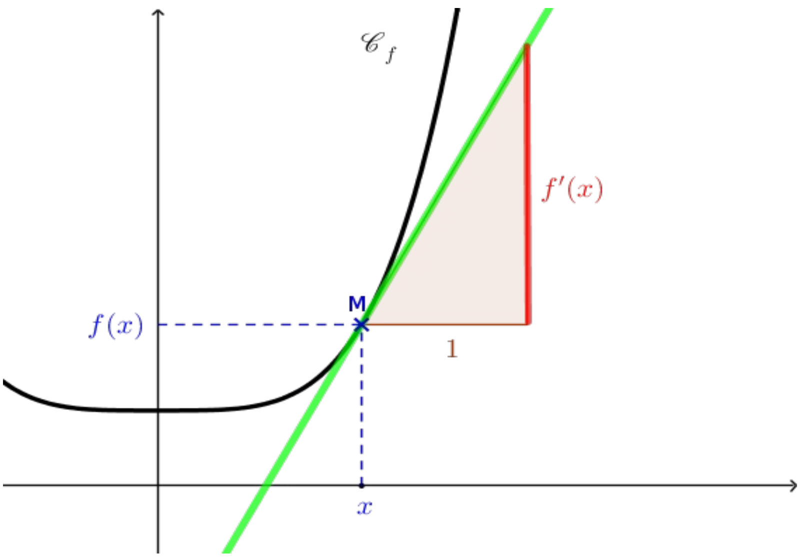
Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point *A* est donc $y=3x-2$.

III. Fonction dérivée et étude de fonction

1) Interprétation graphique

Dire que *f* est dérivable sur *I* signifie que, pour tout réel *x* de *I*, la courbe $\mathscr{C}_f$, représentant la fonction *f*, admet une seule tangente, de coefficient directeur :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



Il semble donc exister un lien entre les variations de *f* et le signe de *f'* .

2) Sens de variation

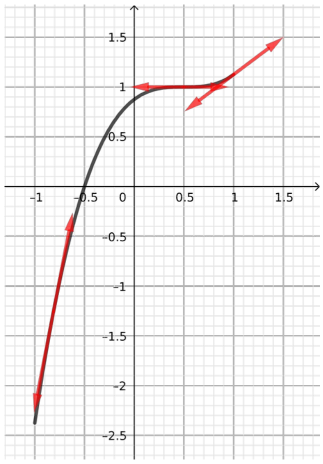
Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction f est **croissante** sur I, alors la dérivée est **positive** sur I.
- Si la fonction f est **décroissante** sur I, alors la dérivée est **négative** sur I.
- Si la fonction f est **constante** sur I, alors la dérivée est **nulle** sur I.

Exemple :

f est croissante sur [-1 ; 1] :



Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la dérivée est **positive** sur I, alors la fonction f est **croissante** sur I.
- Si la dérivée est **négative** sur I, alors la fonction f est **décroissante** sur I.
- Si la dérivée est **nulle** en toute valeur de I, alors la fonction f est **constante** sur I.

Remarque :

L'étude du signe de la dérivée permet donc de donner le sens de variation d'une fonction.

Exemple :

Pour la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=x^2$, nous avons vu que $f'(x)=2x$, on a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)=2x$		$-$	0	$+$	
$f(x)=x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque :

Pour étudier les variations d'une fonction f, il n'est pas systématiquement nécessaire de déterminer la fonction dérivée f' et d'en étudier le signe.

Par exemple, soit g définie sur $]2;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x^3-8}$.

On sait que la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $]2;+\infty[$ donc g est décroissante sur $]2;+\infty[$.

IV. Extremum

1) Extremum local

Définitions :

Soit I une fonction f définie sur un intervalle I.

- On dit que f admet un **minimum local** en a, s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant a et tel que pour tout x de J, $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un **maximum local** en a, s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant a et tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(a)$.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [-8 ; 7] dont voici le tableau de variations :

x	-8		-1		4		7
$f(x)$	10	↘	-2	↗	6	↘	-5

D'après le tableau de variations, $f(x) \geq f(-1)$ pour tout x appartenant à l'intervalle]-8 ; 4[, donc la fonction f admet un minimum local en -1 qui vaut -2.

Ce n'est pas le minimum de la fonction car $f(7) = -5$.

2) Lien avec la dérivation

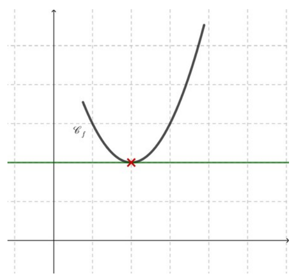
Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel appartenant à I.

Si la fonction admet un **extremum** en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque :

Si $f(a)$ est un extremum local, alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.

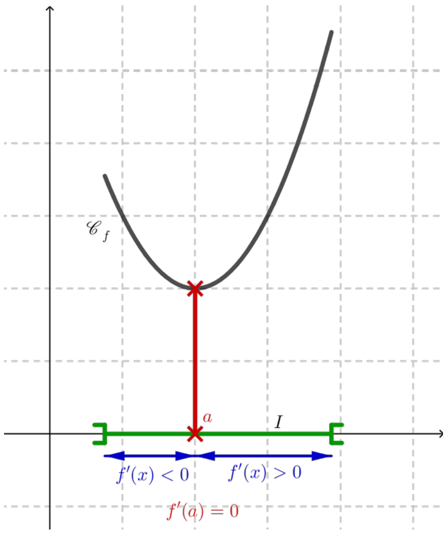


Propriété :

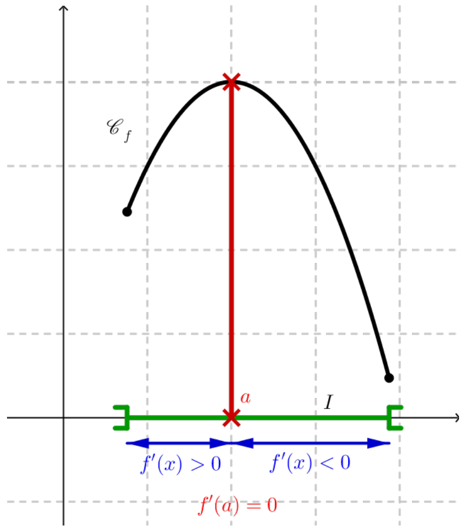
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel appartenant à I.

Si la dérivée s'annule en **changeant de signe** en a, la fonction admet un extremum en a.

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	minimum	↗



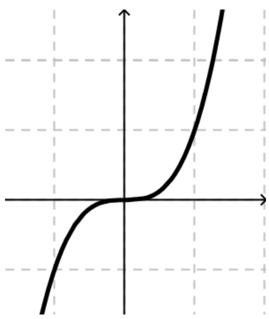
x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	maximum	↘



Remarques :

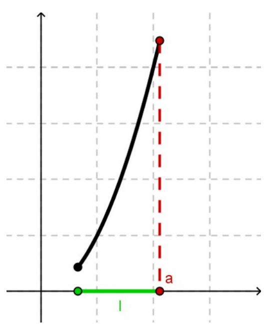
- L'hypothèse du changement de signe est nécessaire.

  La fonction $x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$, pourtant elle a une dérivée qui s'annule en $x=0$ (mais la dérivée ne change pas de signe).



- Pour l'intervalle I, l'hypothèse qu'il soit ouvert permet d'éviter que le nombre réel a soit une de ses extrémités. Si tel est le cas, l'étude des variations permet de conclure.

  Par exemple, dans la situation ci-contre où f admet un maximum en a.



V. Formules de dérivées

1) Dérivées et opérations

Dérivée d'une somme de fonctions

Propriété :

La somme $u+v$ de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(u+v)'=u'+v'$$

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x$ est la somme de deux fonctions u et v définies par $u(x)=x^2$ et $v(x)=x$

Or u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2x$ et $v'(x)=1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=2x+1$.

Dérivée d'un produit de fonctions

Propriété :

Le produit uv de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(uv)'=u'v+uv'$$

Exemple :

La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$ est le produit des deux fonctions u et v définies par $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

Or u et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et on a vu que : $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc, pour tout $x>0$, $f'(x)=\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.

La dérivée de ku est k fois la dérivée de u.

Si k est une constante : $(ku)'(x)=k\times u'(x)$.

Exemple : dérivée d'une fonction polynôme

La fonction trinôme définie par $f(x)=2x^2+8x+3$.

En utilisant les règles de calculs des dérivées on obtient :

$$f'(x)=2\times 2x+8\times 1+0=4x+8$$

Dérivée d'un quotient de fonctions

Propriété :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

De plus, pour tout x de I, $v(x)\neq 0$.

Le quotient $\frac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur I, et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Exemple :

La fonction f définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{x-1}$ est le quotient des fonctions u et v définies par : $u(x)=x$ et $v(x)=x-1$

v ne s'annule pas sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ et u et v sont dérivables sur ces intervalles : $u'(x)=1$ et $v'(x)=1$.

Donc f est dérivable sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1\times(x-1)-x\times 1}{(x-1)^2}$

Ainsi pour tout $x\in$ $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$.

Propriété :

v est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x\in I$, $v(x)\neq 0$.

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et : $\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$.

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ est l'inverse de la fonction v définie par $v(x)=x^2+1$ ($v(x)\neq 0$ pour tout réel x).

Or pour tout réel x, $v'(x)=2x$. Donc $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

2) Dérivées usuelles

À partir des règles de calcul sur les fonctions dérivées établies on peut dresser un tableau des dérivées usuelles à connaître.

fonction f	Ensemble de définition de f	Ensemble de dérivabilité de f	fonction dérivée f'
$f(x)=k$ (k constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=n\times x^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) Dérivée d'une fonction composée

Fonction composée

Définition :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J, et g une fonction définie et dérivable sur J.

La **fonction composée** des fonctions u et g, notée $g\circ u$, est définie sur I par $g\circ u(x)=g(u(x))$.

Exemple :

Soit u *et* g les fonctions suivantes :

$u : I=[0;+\infty[\to J=[0;+\infty[$ et $g : J=[0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2+x$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction composée est la fonction $g\circ u : I \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(u(x))=\sqrt{x^2+x}$$

Remarques :

- Sur l'exemple précédent, $u \circ g$ est définie par : $u \circ g : [0;+\infty[\to [0;+\infty[$
  $x \mapsto x+\sqrt{x}$
- Pour $f(x)=\sqrt{u(x)}$
  $u : E \to]0;+\infty[$ et $g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$
  $x \mapsto u(x)$ $x \mapsto \sqrt{x}$
  La fonction f peut s'écrire $f=g \circ u : E \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$
- Pour $f(x)=(u(x))^n$
  $u : E \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto u(x)$ $x \mapsto x^n$
  La fonction f peut s'écrire $f=g \circ u : E \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto (u(x))^n$
- Pour $g(x)=f(ax+b)$
  $u : E \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto ax+b$ $x \mapsto f(x)$
  La fonction g peut s'écrire $g=f \circ u : E \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété : non commutativité de la composition de fonctions

La composée de fonctions n'est pas commutative.

Exemple :

Soit trois fonctions u, v et w définies par $u : x \mapsto x^2 - 2$, $v : x \mapsto e^x$

- $u \circ v(x) = u(v(x)) = u(e^x) = (e^x)^2 - 2 = e^{2x} - 2$
- $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2-2}$

Donc $u \circ v(x) \neq v \circ u(x)$.

Dérivation

Propriété :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle E, à valeurs dans un intervalle F et g une fonction définie et dérivable sur F.

La fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ est dérivable en tout nombre réel x de E et sa dérivée est la fonction :

$$(g \circ u)' : x \mapsto g'(u(x)) \times u'(x) .$$

Exemple :

La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ est la composée de la fonction $u: x \mapsto \sqrt{x}$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, à valeurs dans $]0;+\infty[$, et de la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{x}$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

On sait que $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

La fonction f est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$u'(x)\times g'(u(x))=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times-\frac{1}{(\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

Cas particuliers :

- La fonction f, définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$, est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- Si, pour tout x de I, $u(x) > 0$, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- Soit n, un entier relatif non nul, et f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$.
  - Si $n \geqslant 1$, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = n\, u'(x)\, (u(x))^{n-1}$.
  - Si $n \leqslant -1$ et si u ne s'annule pas sur I, alors f est dérivable sur I et

    $$f'(x) = n\, u'(x)\, (u(x))^{n-1}.$$
- Soit a et b deux nombres réels et f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

  La fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable en tout nombre réel x et sa dérivée est la fonction :

  $$x \mapsto a \times f'(ax + b)$$

Exemple :

La fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ par $g(x)=\frac{1}{3x+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{3}\right\}$, $g(x)=f(3x+5)$ avec $f(x)=\frac{1}{x}$ or $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Par conséquent, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{3}\right\}$, $g'(x)=\frac{-3}{(3x+5)^2}$.