

# Chapitre 14

## Fonctions trigonométriques

### I. Parité et périodicité : généralités

#### 1) Définition et interprétations graphiques

##### Définition :

Un ensemble de  $\mathbb{R}$  (par exemple un intervalle) est dit **centré en 0** (ou symétrique par rapport à 0) si, pour tout nombre de l'ensemble, son opposé appartient à l'ensemble.

##### Définitions :

- Une fonction  $f$ , définie sur un ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  centré en 0, est **paire** si pour tout réel  $x$  de  $\mathcal{D}_f$ , on a :

$$f(-x) = f(x).$$

- Une fonction  $f$ , définie sur un ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  centré en 0, est **impaire** si pour tout réel  $x$  de  $\mathcal{D}_f$ , on a :

$$f(-x) = -f(x).$$

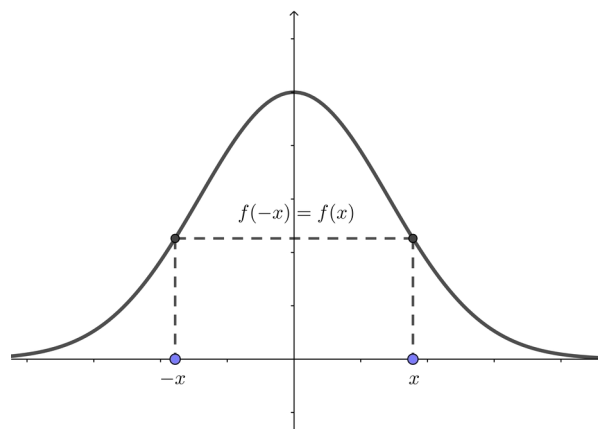
- Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $\mathcal{D}_f$ .

La fonction  $f$  est périodique de période  $T$  s'il existe un nombre réel strictement positif  $T$  tel que, pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathcal{D}_f$  :

$$\text{le nombre } x+T \text{ appartient à } \mathcal{D}_f \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

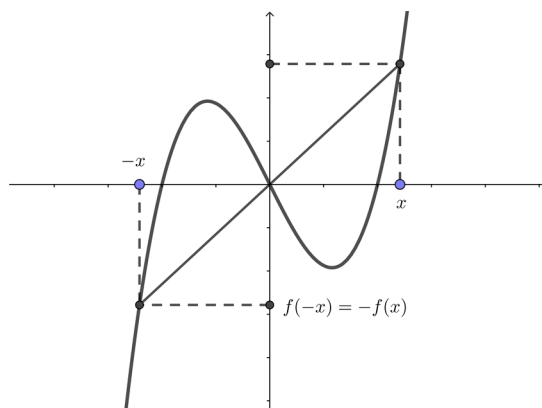
##### Propriété :

La courbe représentative d'une fonction **paire** est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.



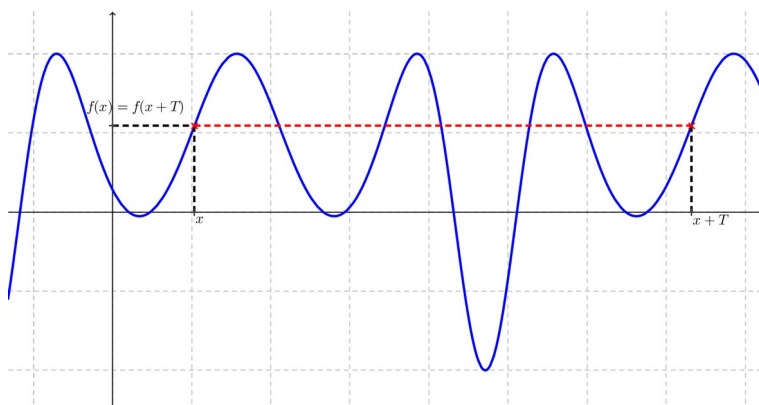
### Propriété :

La courbe représentative d'une fonction **impaire** est **symétrique** par rapport à l'**origine du repère**.



### Propriété :

La courbe représentative d'une fonction périodique de période  $T$  est **invariante par translation** de vecteur  $T\vec{i}$ .



## **2) Restriction du domaine d'étude**

### Propriétés :

- Si  $f$  est une fonction paire ou impaire, alors il suffit de l'étudier sur  $\mathbb{R}^+ \cap \mathcal{D}_f$  ou  $\mathbb{R}^- \cap \mathcal{D}_f$ .
- Si  $f$  est une fonction périodique de période  $T$ , alors il suffit de l'étudier sur n'importe quel intervalle d'amplitude  $T$  inclus dans  $\mathcal{D}_f$ .

### Corollaire :

Si une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est paire (ou impaire) et périodique de période  $T$  alors il suffit de l'étudier sur  $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ .

## II. Fonctions sinus et cosinus

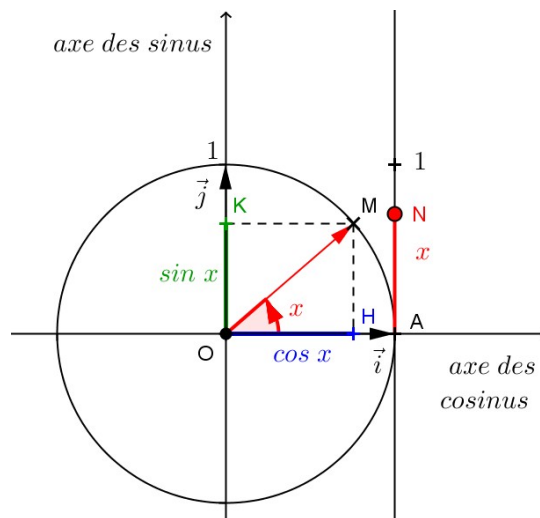
### 1) Définitions

#### Définitions :

Soit  $M$  le point image d'un réel  $x$  sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On a ainsi  $M(\cos(x) ; \sin(x))$

- La fonction  $x \mapsto \sin(x)$  définie sur  $\mathbb{R}$  est appelée **fonction sinus** et notée  $\sin$ .
- La fonction  $x \mapsto \cos(x)$  définie sur  $\mathbb{R}$  est appelée **fonction cosinus** et notée  $\cos$ .



#### Remarque :

Pour tout  $x$  réel :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

### 2) Propriétés

#### Propriétés :

- La **fonction sinus** est impaire et  $2\pi$ -périodique.
- La **fonction cosinus** est paire et  $2\pi$ -périodique.

### III. Dérivabilité

#### 1) Dérivabilité de la fonction sinus

##### Propriété :

La fonction sinus est dérivable en 0.

##### Lemmes :

- Montrons que la fonction sinus est continue en  $x=0$ .

Pour  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  on a :

$$\sin x \leq x \leq \tan x \text{ soit}$$

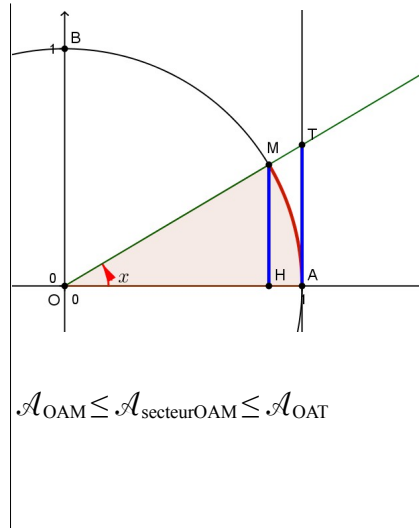
$$0 \leq \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

soit  $0 \leq \sin x \leq x$ .

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0.$$

La fonction sinus étant impaire, on a également  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0$ .



Justification :

$$\bullet \mathcal{A}_{OHM} = \frac{1 \times \sin x}{2}$$

$$\bullet \mathcal{A}_{\text{secteur OAM}} = \frac{x}{2}$$

$$\bullet \mathcal{A}_{OAT} = \frac{1 \times \tan x}{2}$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{1 \times \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1 \times \tan x}{2}$$

D'où  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . De plus  $\sin 0 = 0$ .

On en déduit que la fonction sinus est continue en  $x=0$ .

- Montrons maintenant que la fonction sinus est dérivable en  $x=0$ , de nombre dérivé 1.

Pour  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  on a  $\sin x \leq x \leq \tan x$  soit

$$0 \leq \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\cos x}{\sin x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow 0 < \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Pour tout  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ , on a donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

Par le théorème des gendarmes, on obtient  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

La fonction sinus est impaire, on a donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

##### Démonstration :

Pour tout nombre réel  $h \neq 0$ ,  $\frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}$ .

Or  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$  donc la fonction sinus est dérivable en 0 et  $\sin'(0) = 1$ .

**Propriété :**

La fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

**Démonstration :**

$a$  désigne un nombre réel. Étudier la dérivabilité en  $a$  de la fonction sinus, c'est étudier la limite en 0 de la fonction  $h \mapsto \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ .

Or pour tout nombre réel  $h \neq 0$ ,

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin a \cos h + \sin h \cos a - \sin a}{h} = \frac{\sin h \cos a - (1 - \cos h) \sin a}{h}.$$

Or  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ , donc  $1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x$  donc avec  $2x = h$  :  $1 - \cos h = 2\sin^2 \frac{h}{2}$ .

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \text{ donc avec } 2x = h : \sin h = 2\sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}.$$

$$\text{D'où } \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{2\sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2} \cos a - 2\sin^2 \frac{h}{2} \sin a}{h} = \frac{2\sin \frac{h}{2} \left[ \cos \frac{h}{2} \cos a - \sin \frac{h}{2} \sin a \right]}{h}$$

$$\text{soit } \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos \left( a + \frac{h}{2} \right).$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left( a + \frac{h}{2} \right) = \cos a \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a.$$

Ainsi la fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout nombre réel  $x$ ,  $\sin'(x) = \cos x$ .

**2) Dérivabilité de la fonction cosinus****Propriété :**

La fonction cosinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\cos'(x) = -\sin x$$

**Démonstration :**

On sait que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$ .

La fonction sin est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc la fonction  $f : x \mapsto \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = 1 \times \sin' \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x$  donc  $\cos'(x) = -\sin x$ .

## IV. Étude de la fonction sinus

### 1) Étude sur l'intervalle $[0; \pi]$

Pour tout nombre réel  $x$ ,  $\sin'(x) = \cos x$ .

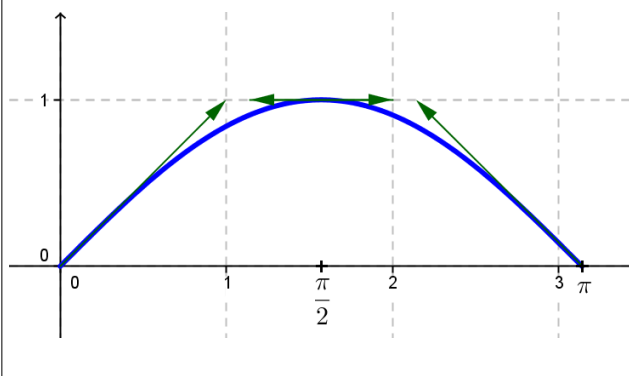
Or  $\cos(x) \geq 0$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\cos x \leq 0$  sur  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

Donc, la fonction sinus est croissante sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

Tableau de variation sur  $[0; \pi]$

| $x$        | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|------------|---|-----------------|-------|
| $\sin'(x)$ | 1 | +               | -1    |
| $\sin(x)$  | 0 | 1               | 0     |

Courbe sur  $[0; \pi]$



### 2) Courbe représentative sur $[-\pi; \pi]$

#### Propriété :

La courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction sinus est **symétrique par rapport à l'origine O** du repère.

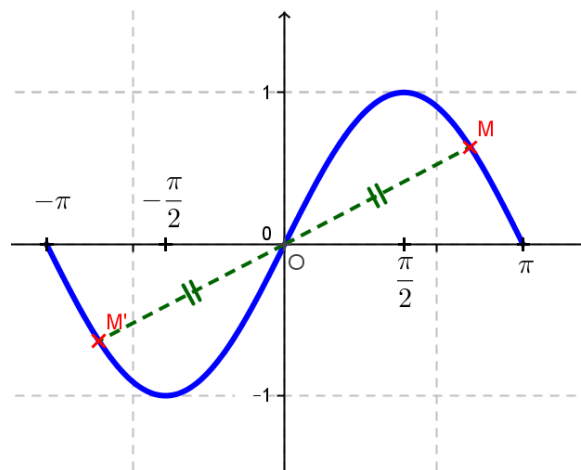
#### Démonstration :

Pour tout nombre réel  $x$ , on note  $M(x; \sin x)$  et  $M'(-x; \sin(-x))$  deux points de  $\mathcal{C}$ .

Or :

$$\frac{x+(-x)}{2} = 0 \text{ et } \frac{\sin x + \sin(-x)}{2} = \frac{\sin x - \sin x}{2} = 0$$

Donc, le milieu de  $[MM']$  est l'origine O du repère et  $M'$  est le symétrique de M par rapport à O.



### 3) Courbe représentative de la fonction sinus

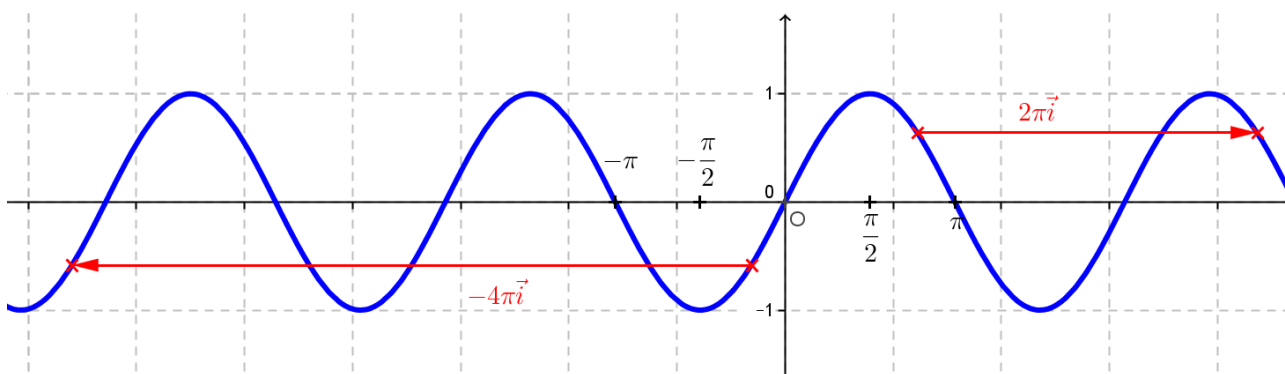
#### Propriété :

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction sinus est **invariante par toute translation de vecteur  $k 2\pi \vec{i}$**  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

#### Démonstration :

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  et tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , on note  $M(x; \sin x)$  et  $M'(x+2k\pi, \sin(x+2k\pi))$  deux points de  $\mathcal{C}$ .

Alors  $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} k \times 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc  $\overrightarrow{MM'} = k 2\pi \vec{i}$  et  $M'$  est l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $k 2\pi \vec{i}$ .



La courbe de la fonction sinus est appelée **une sinusoïde**.

## V. Étude de la fonction cosinus



### 1) Étude sur l'intervalle $[0; \pi]$

Pour tout nombre réel  $x$ ,  $\cos'(x) = -\sin x$ .

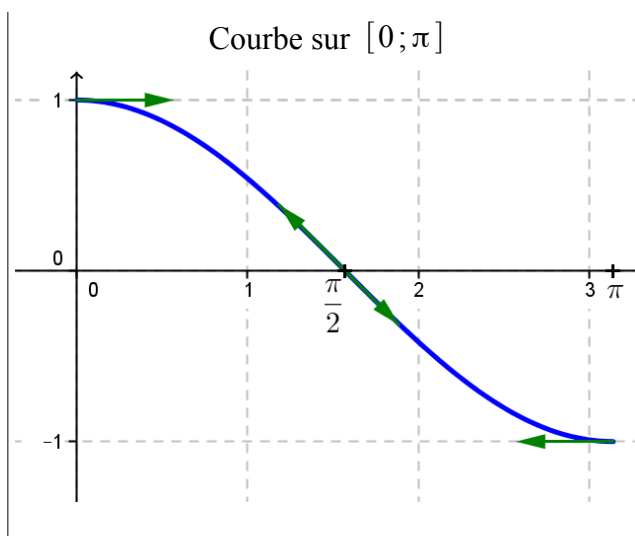
Or  $\sin(x) \geq 0$  sur  $[0; \pi]$  donc  $\cos'(x) \leq 0$  sur  $[0; \pi]$ .

Donc, la fonction cosinus est décroissante sur  $[0; \pi]$ .

Tableau de variation sur  $[0; \pi]$

| $x$        | 0 | $\frac{\pi}{2}$   | $\pi$ |   |    |
|------------|---|---|-------|---|----|
| $\cos'(x)$ | 0 | —   | -1    | —   | 0  |
| $\cos(x)$  | 1 |  | 0     |  | -1 |

Courbe sur  $[0; \pi]$



## 2) Courbe représentative sur $[-\pi; \pi]$

### Propriété :

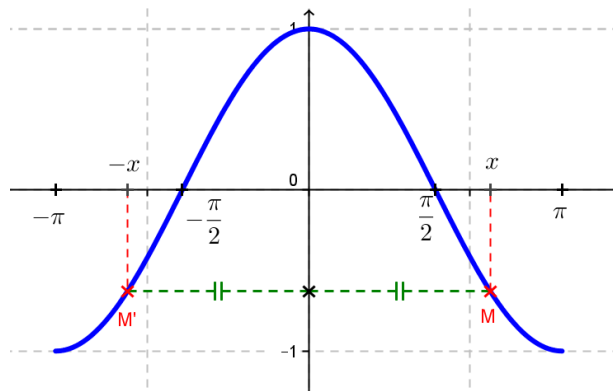
La courbe représentative  $\Gamma$  de la fonction cosinus est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** du repère.

### Démonstration :

Pour tout nombre réel  $x$ , on note  $M$  et  $M'$  les points de  $\Gamma$  d'abscisses respectives  $x$  et  $-x$ .

L'ordonnée de  $M$  est  $\cos x$  et l'ordonnée de  $M'$  est  $\cos(-x) = \cos x$ .

Donc  $M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



## 3) Courbe représentative de la fonction cosinus

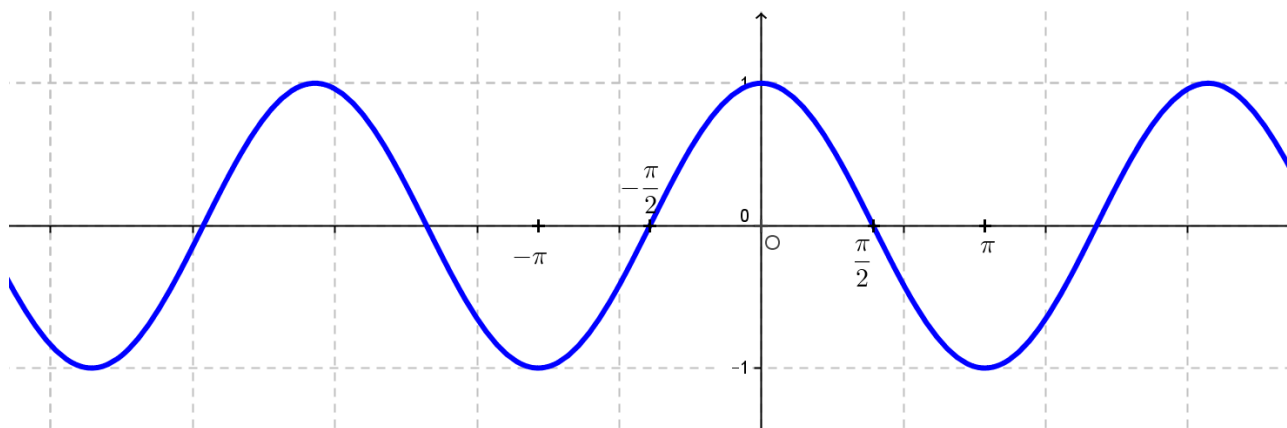
On sait que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ .

La fonction cosinus est **périodique de période  $2\pi$** .

On en déduit alors que  $\cos(x + k2\pi) = \cos x$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Propriété :

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction cosinus est **invariante par toute translation de vecteur  $k2\pi\vec{i}$**  où  $k \in \mathbb{Z}$ .



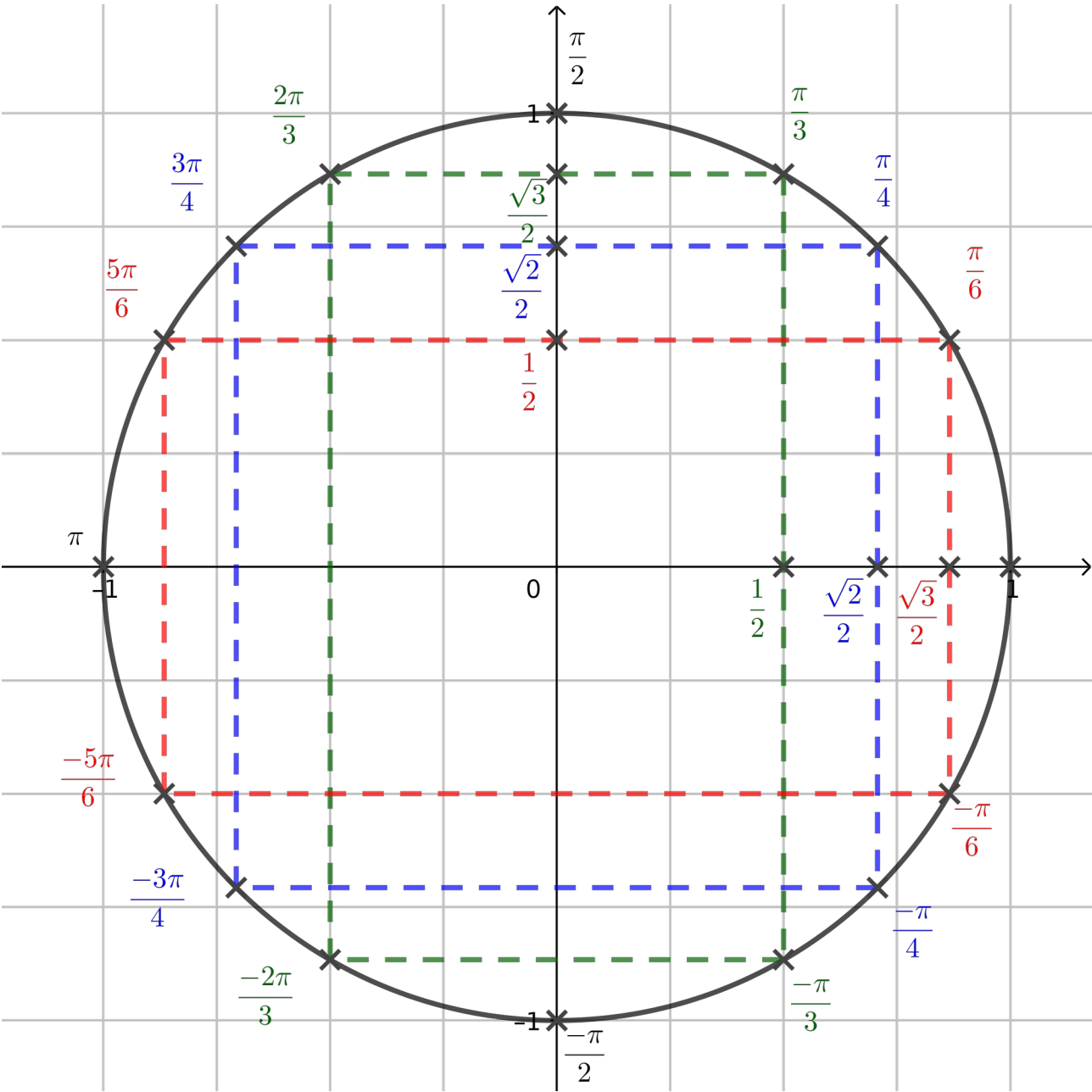
### Remarques :

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$  donc la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction sinus est l'image de la courbe représentative  $\Gamma$  de la fonction cosinus par la translation de vecteur  $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ .
- La courbe de la fonction cosinus est aussi appelée **une sinusoïde**.



# **VI. Résolution d'équations et d'inéquations**

## **1) Valeurs remarquables**



|               |   |                      |                      |                      |                 |
|---------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\alpha$      | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |

## 2) Résolution d'équations

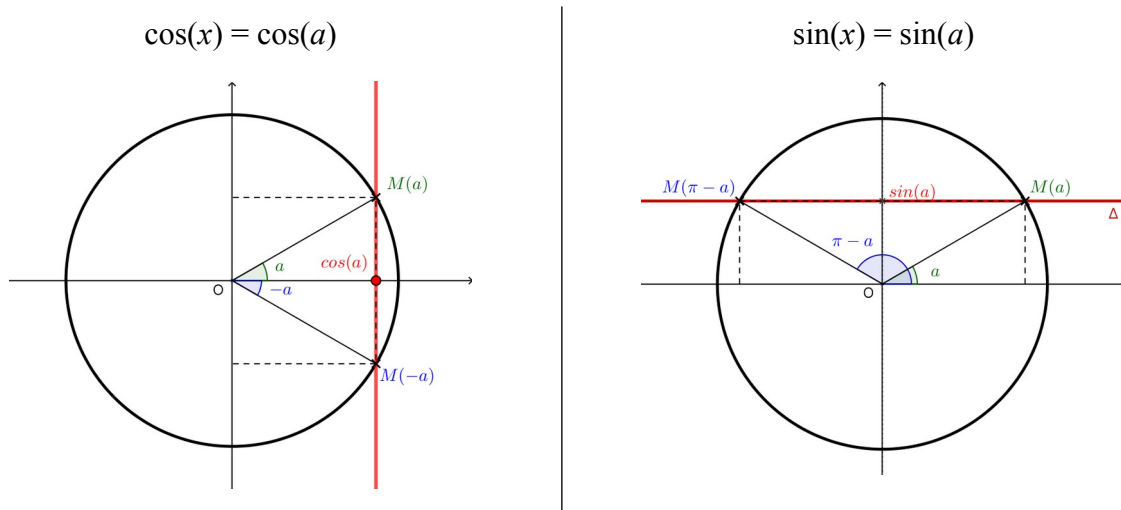
### Propriétés :

Soient  $a$  et  $x$  deux nombres réels.

- $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$  ou  $x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$  ou  $x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

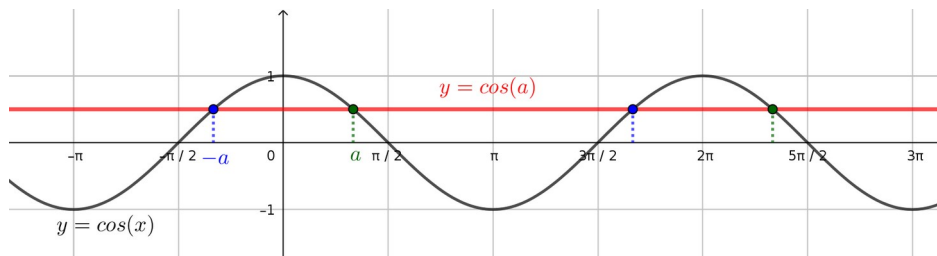
### Remarques :

- En s'appuyant sur le cercle trigonométrique :

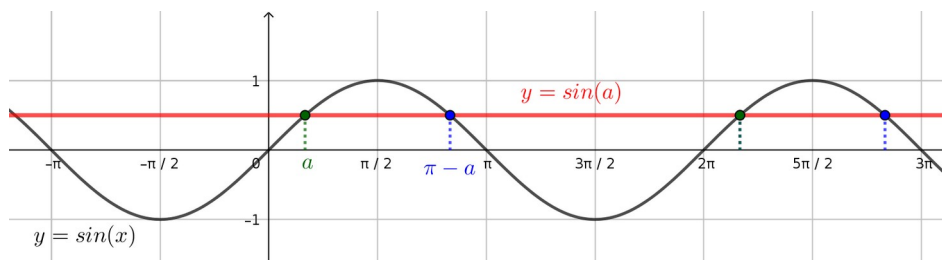


- En s'appuyant sur la courbe

- $\cos(x) = \cos(a)$



- $\sin(x) = \sin(a)$



### Exemple :

Soit l'équation  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  que l'on veut résoudre dans  $\mathbb{R}$ .

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Cette équation a pour solution l'ensemble  $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

### 3) Résolution d'inéquations

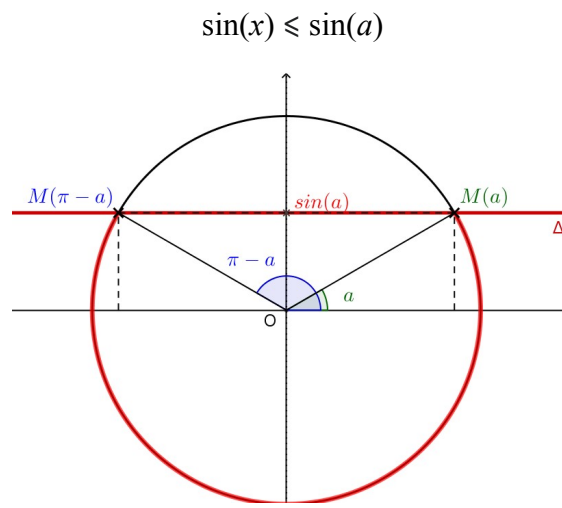
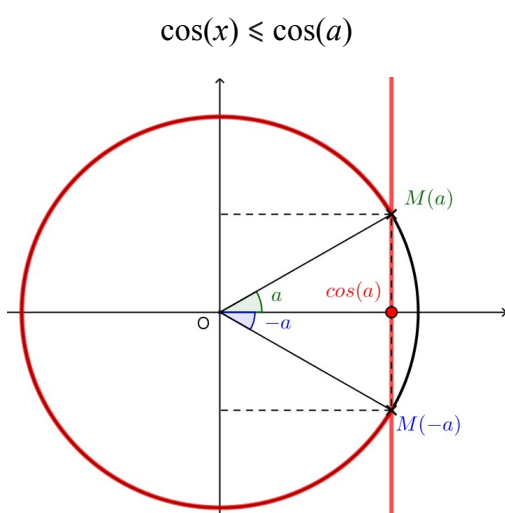
#### Propriétés :

Soient  $a$  et  $x$  deux nombres réels.

- $\cos(x) \leq \cos(a) \Leftrightarrow a + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $\sin(x) \leq \sin(a) \Leftrightarrow -\pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

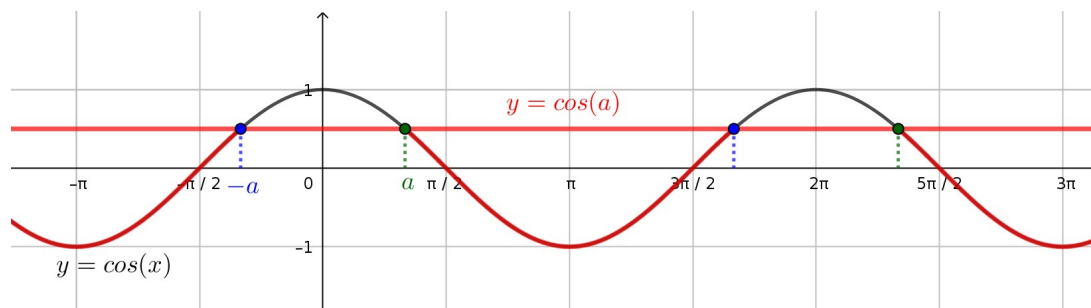
#### Remarques :

- En s'appuyant sur le cercle trigonométrique :



- En s'appuyant sur la courbe

- $\cos(x) \leq \cos(a)$



- $\sin(x) \leq \sin(a)$

