Chapitre 9

Les suites

I. Suites numériques

1) Définition

Définition :
Une **suite numérique** est une liste ordonnée de nombres réels.
On peut lui associer une fonction u définie sur ℕ par $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \longmapsto u(n)$
pour tout entier naturel n, $u(n)$, noté aussi u_n, est le **terme** de **rang** n de la suite.
On note (u_n) l'ensemble des termes de la suite pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemples :

- Le tableau ci-dessous donne le nombre de bacheliers en France de 2000 à 2009.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Nombre de bacheliers	516550	499228	493755	502671	498372	506608	524057	521353	512815	530218

La suite (u_n) du nombre de bacheliers peut être définie en choisissant comme rang n le nombre d'années écoulées depuis l'an 2000.
On a alors : $u_0=516550$ le nombre de bacheliers de l'année 2000 ;
$u_5=506608$ le nombre de bacheliers de l'année 2005.
502671 est le terme de rang 3 de la suite (u_n).

- Soit (v_n) la suite des multiples de 7 avec $u_0=0$. On a alors $u_1=7$, $u_2=14$,…, $u_9=63$ …

Remarques :

- Le terme de rang n d'une suite u peut être noté $u(n)$ ou u_n .
- Certaines suites peuvent être définies seulement à partir d'un rang n_0 autre que 0.
Par exemple, pour des questions pratiques, on aurait pu définir la suite de l'exemple précédent à partir du rang 2000, avec $u_{2000}=516550$.
Dans d'autres situations, la définition de la suite interdit l'existence de certains termes. Par exemple la suite (u_n) telle que $u_n=\frac{1}{n}$ ne peut être définie que pour $n \geqslant 1$.

2) Mode de génération d'une suite

Définition :
Une suite peut être définie :

- au moyen d'une **fonction *f* de la variable *n*** : $u_n=f(n)$.
- au moyen d'une **relation de récurrence** : (u_n) est alors définie par son **premier terme et** une **relation de récurrence** permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.
- par un autre moyen, par exemple la suite des décimales de π.

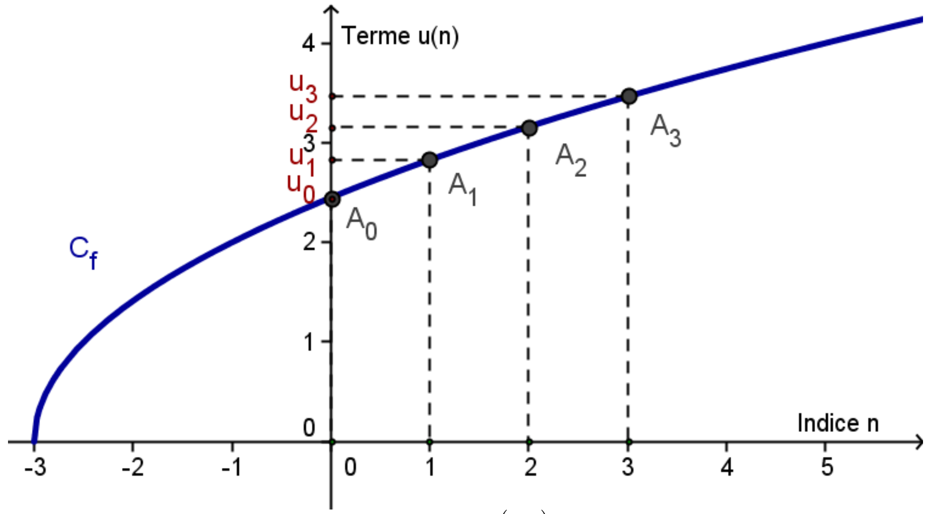
Suite explicite

Définition :
Soit a un réel f une fonction définie sur $[a;+\infty[$.
On peut définir une suite (u_n) en posant pour tout entier $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$.

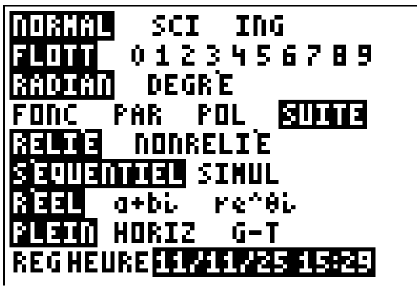
Exemple :
Soit la suite u définie sur ℕ par : $u_n = \sqrt{2n+6}$.
Ainsi pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = f(n)$ où f est définie sur $[-3;+\infty[$ par :

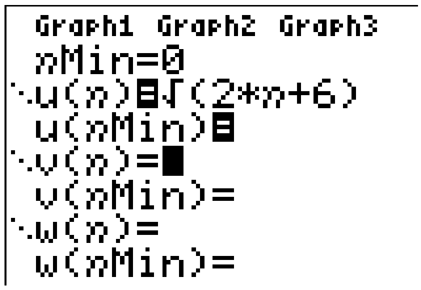
$$f(x) = \sqrt{2x+6}$$

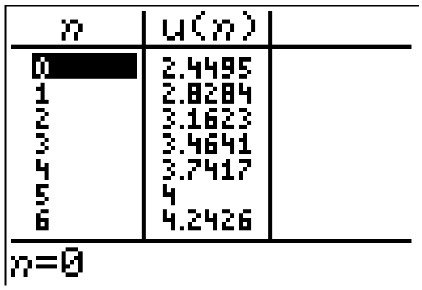
$u_0 = f(0) = \sqrt{2\times 0+6} = \sqrt{6}$
$u_1 = f(1) = \sqrt{2\times 1+6} = \sqrt{8}$
$u_2 = \sqrt{10}$
...
$u_{100} = f(100) = \sqrt{206}$

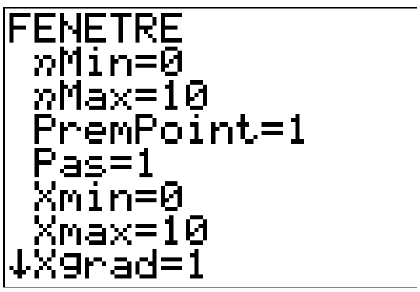


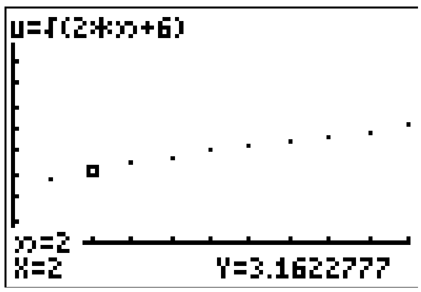
Graphiquement les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n;u_n)$ d'abscisses entières de la courbe $\mathscr{C}_f$.

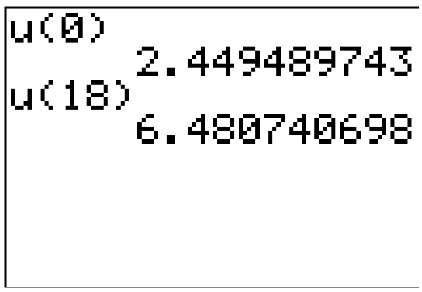


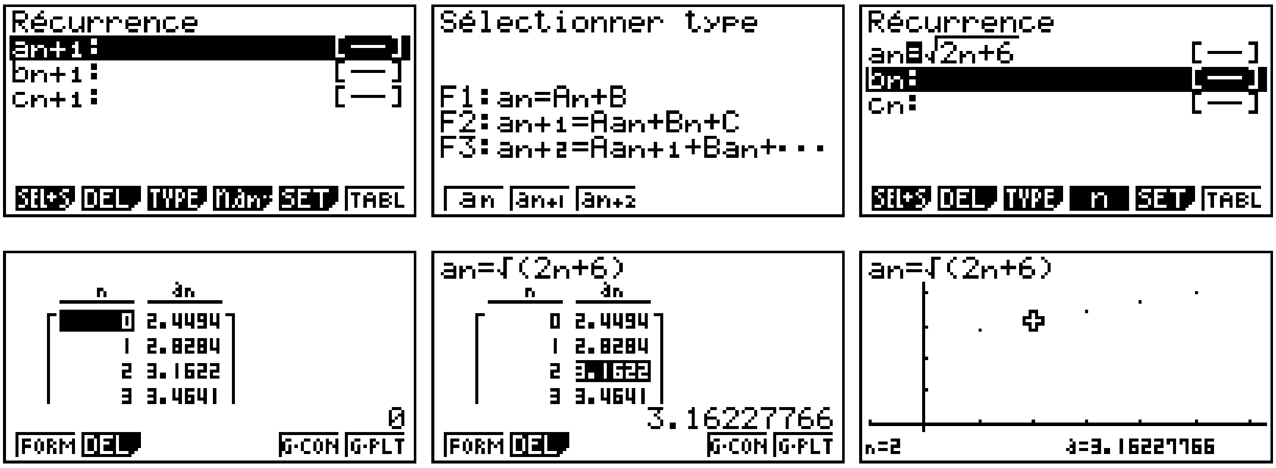












Remarque :
On peut calculer **directement** chaque terme à partir de son rang (ou indice).

Suite récurrente

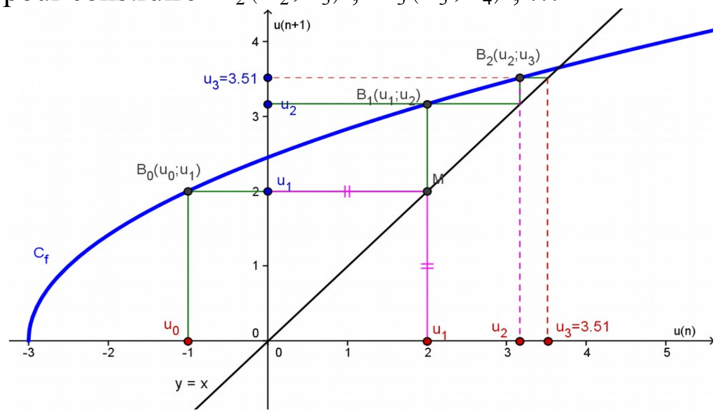
Définition :
Soit f une fonction définie sur un ensemble I.
On suppose que, si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.
Soit a un nombre réel de I et p un entier.
On peut définir une suite (u_n) en posant :

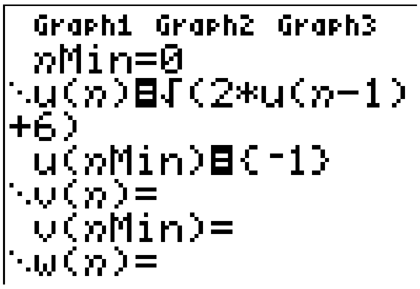
$$\begin{cases} u_p = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier } n \geqslant p \end{cases}$$

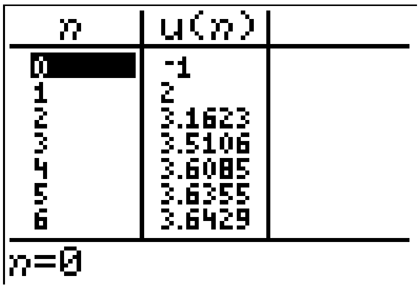
Exemple :
Soit la suite (u_n) définie sur ℕ par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6}$.
Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est définie sur $[-3 ; +\infty[$ par :

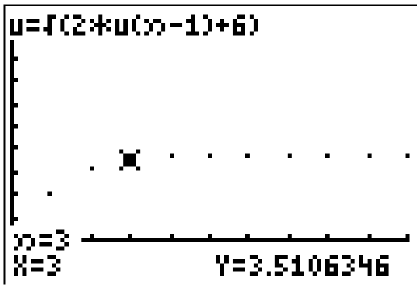
$$f(x) = \sqrt{2x+6}$$

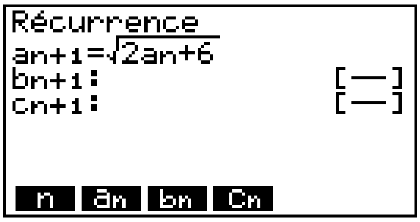
$u_0 = -1$
$u_1 = f(u_0) = \sqrt{2u_0 + 6} = \sqrt{2 \times (-1) + 6} = 2$
$u_2 = f(u_1) = \sqrt{2u_1 + 6} = \sqrt{2 \times 2 + 6} = \sqrt{10}$
Graphiquement, $B_0(u_0 ; u_1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
Pour déterminer $B_1(u_1 ; u_2)$, il faut placer u_1 , l'ordonnée de B_0 , en abscisse.
On « reporte » donc u_1 sur l'axe (Ox) en utilisant la droite $\Delta : y = x$.
On poursuit de même pour construire $B_2(u_2 ; u_3)$, $B_3(u_3 ; u_4)$, …

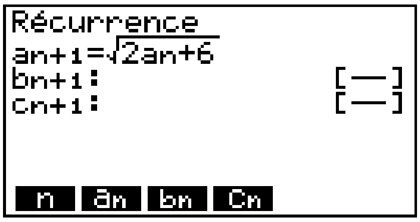


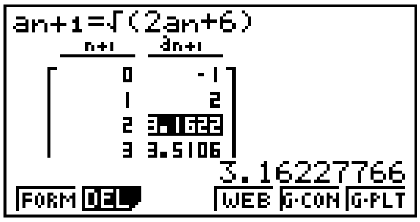












Remarques :

- Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut pas calculer directement un terme à partir de son rang ; il faut procéder de « proche en proche » : pour calculer le dixième terme, on utilise la valeur du neuvième, obtenue elle-même grâce au huitième terme, …
- Le « **principe de récurrence** » est une propriété fondamentale dans la construction des nombres.
  On peut le résumer ainsi : « En partant de 0, et en ajoutant 1 à chaque étape, on construit l'ensemble des entiers naturels ».

Définition :
Soit p un entier, et (u_n) et (v_n) deux suites définies à partir du rang p.
Les suites (u_n) et (v_n) sont **égales** si pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n = v_n$.

Remarque :
Si les suites (u_n) et (v_n) ont le **même premier terme** et vérifient la **même relation de récurrence** alors elles sont **égales**.

3) *Sens de variation d'une suite*

Définitions :
Soit une suite (u_n) et un entier p.

- La suite numérique (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- La suite numérique (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- La suite numérique (u_n) est **constante** (ou **stationnaire**) à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques :

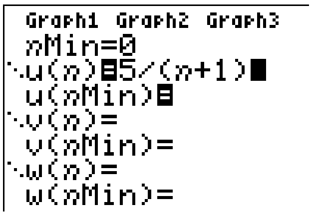
- La suite numérique (u_n) est **monotone** à partir du rang *p* si elle est soit croissante à partir du rang *p,* soit décroissante à partir du rang *p*.
- Lorsqu'on ne précise pas « à partir du rang *p* », cela signifie que la suite est croissante, décroissante, monotone, constante à partir de son premier terme.

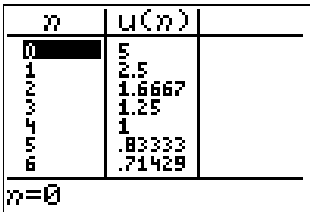
Exemples :

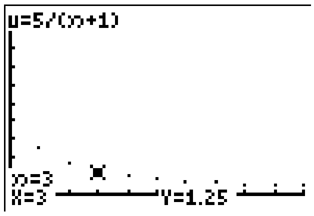
- La suite (u_n) de terme général $u_n=\dfrac{5}{n+1}$ est strictement décroissante.

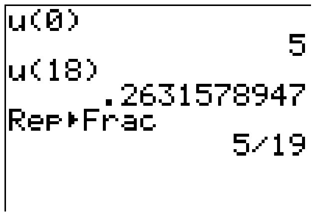
  En effet, pour tout entier *n*, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5}{(n+1)+1}-\dfrac{5}{n+1}=\dfrac{-5}{(n+1)(n+2)}$.

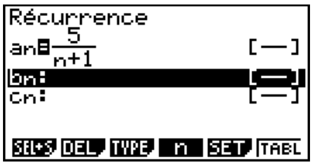
  Donc pour tout entier *n*, $u_{n+1}-u_n<0$, c'est-à-dire $u_{n+1}<u_n$.

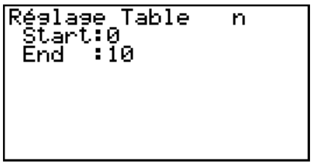


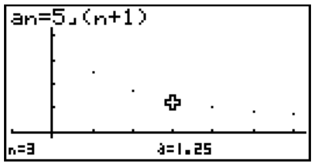


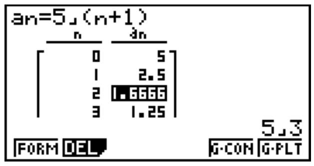












- La suite (v_n) de terme général $v_n=5\times(-0,8)^n$ n'est pas monotone.

  En effet, chaque terme d'indice pair, qui est positif, est supérieur au terme précédent d'indice impair, qui est négatif, et supérieur au terme suivant également négatif.
- La suite *w* définie sur ℕ par : $\begin{cases} w_0=1 \\ w_{n+1}=\frac{1}{w_n}+1 \end{cases}$ n'est pas monotone.

  En effet $w_0=1$, $w_1=\dfrac{1}{1}+1=2$ donc $w_0<w_1$. Et $w_2=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$, donc $w_1>w_2$.

Propriétés :

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a;+\infty[$. Soit un entier $p\geqslant a$ et la suite *u* définie pour tout entier $n\geqslant p$ par $u_n=f(n)$.

- Si la **fonction** f est (strictement) **croissante** sur $[p;+\infty[$, alors la **suite** (u_n) est (strictement) **croissante** à partir du rang *p*.
- Si la **fonction** f est (strictement) **décroissante** sur $[p;+\infty[$, alors la **suite** (u_n) est (strictement) **décroissante** à partir du rang *p*.

Démonstration :

- Supposons f croissante sur l'intervalle $[k;+\infty[$. Alors pour tout réels *a* et *b* de l'intervalle $[k;+\infty[$, si $a<b$ alors $f(a)<f(b)$. Pour tout entier $n\geqslant k$, comme $n<n+1$, on aura $f(n)<f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n\leqslant u_{n+1}$. On en déduit que (u_n) est croissante pour $n\geqslant k$.
- On démontre de même que (u_n) est décroissante pour $n\geqslant k$ lorsque f est décroissante sur l'intervalle $[k;+\infty[$.

Exemple :

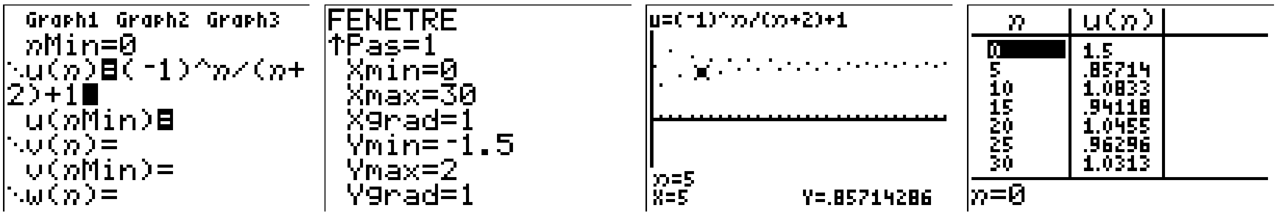
Dans l'exemple précédent, la suite (u_n) est définie sur ℕ par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{5}{x+1}$. .
Or f est décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc la suite (u_n) est décroissante.

4) Comportement d'une suite à l'infini

Soit les suites *u*, *v*, *w* et *t* définies sur ℕ par :

$u_n = n^2$; $v_n = \frac{(-1)^n}{n+2} + 1$; $w_n = -2n^2 + 2$; $t_n = \cos n + 1$

- (v_n) peut être rendu aussi proche de 1 qu'on veut si *n* est choisi suffisamment grand.



Pour tout entier $n > 98$, on a $|v_n - 1| < 0{,}01$; pour tout $n > 10^6 - 2$, $|v_n - 1| < 10^{-6}$.

Plus généralement, pour tout écart $e > 0$, dès que $n > \frac{1}{e} - 2$, on a : $|v_n - 1| < e$, c'est-à-dire que la distance entre v_n et 1 est inférieure à e.

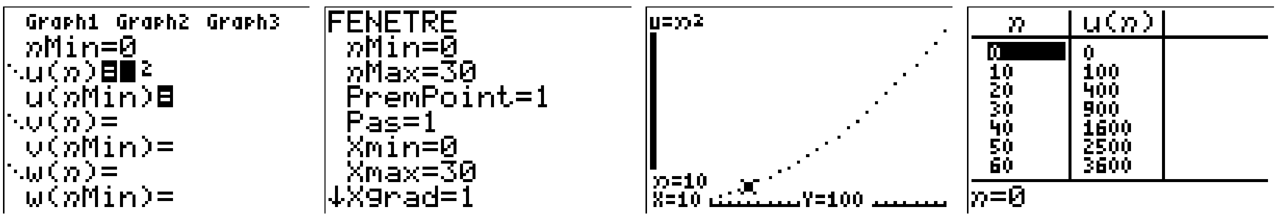
On dit que (v_n) **converge** vers 1 et on note : $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Définition :

On dit qu'une suite numérique (u_n) admet une limite réelle ℓ si tous les termes de la suite (u_n) sont proches de ℓ à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite est **convergente** vers ℓ.

- (u_n) peut être rendu aussi grand qu'on veut si *n* est choisi suffisamment grand.

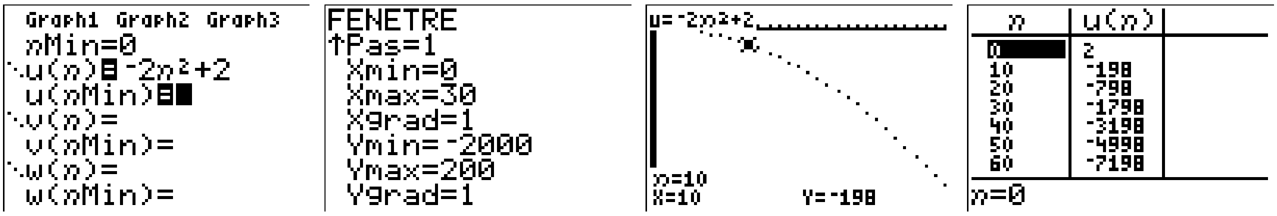


Pour tout entier $n \geqslant 1000$, on a $u_n > 10^6$; pour tout entier $n \geqslant 10^6$, $u_n \geqslant 10^{12}$

Plus généralement, pour tout réel $M \geqslant 0$, dès que $n \geqslant \sqrt{M}$, on a $u_n \geqslant M$.

On dit que (u_n) **diverge vers** **+∞** ou qu'elle admet **+∞** comme limite et on note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- (w_n) est négatif et peut être rendu aussi grand qu'on veut en valeur absolue si *n* est choisi suffisamment grand.

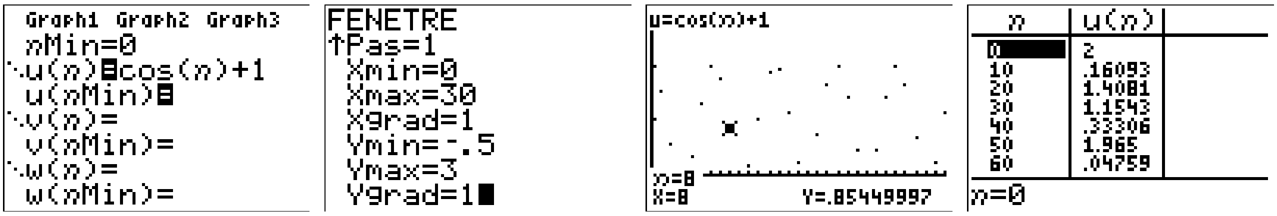


Pour tout entier $n \geqslant 108$, on a $w_n \leqslant -10^6$; pour tout entier $n \geqslant 707107$, $w_n \leqslant -10^{12}$.

Plus généralement, pour tout réel $M \geqslant 0$, dès que $n \geqslant \sqrt{\frac{M}{2}+1}$, on a $w_n \leqslant -M$.

On dit que (w_n) diverge vers $-\infty$ ou qu'elle admet $-\infty$ comme limite et on note : $\lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty$.

- (t_n) ne se stabilise autour d'aucune valeur réelle : on dit que (t_n) diverge et n'admet pas de limite.



Définition :
On dit qu'une suite numérique (u_n) est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque :
Les suites étant définies sur des entiers positifs, on s’intéresse exclusivement à leur **comportement en** $+\infty$.

II. Suites arithmétiques et géométriques

1) Suite arithmétique

Définition :
Une suite numérique (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre *r*, appelé **raison** de la suite, tel que pour tout nombre entier naturel *n*, on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :
La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison -5.

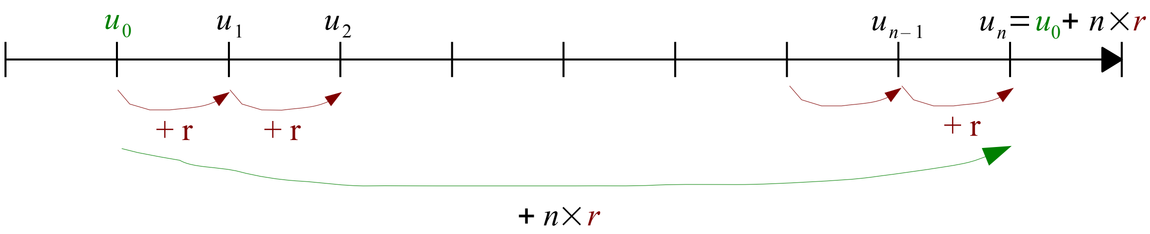
Remarque :
Une suite (u_n) est **arithmétique** si, et seulement si, la **variation absolue** entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est **constante.**

Propriété :
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison *r*.
Pour tout entier naturel *n*, on a $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration :
Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant donc la relation $u_{n+1} = u_n + r$.
Calculons quelques termes de cette suite :
$u_0 = u_0$
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$
…
En répétant *n* fois le procédé , on obtient :

$$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$$

Remarque :
Terme général en fonction de *n* : $u_n = u_0 + n \times r$ *(formule explicite)*



Exemple :
Soit la suite arithmétique (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$.
Son premier terme est $u_0 = 3$ et sa raison est -5.
On a, pour tout entier naturel *n*, $u_n = u_0 + nr = 3 + n \times (-5) = 3 - 5n$.
Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le terme de rang 8 : $u_7 = 3 + 7 \times (-5) = -32$.

Remarque :
Pour une suite arithmétique (u_n) de raison *r* si *n* et *p* sont deux entiers naturels, on peut toujours déterminer l'un des termes u_n ou u_p en fonction de l'autre par la relation :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

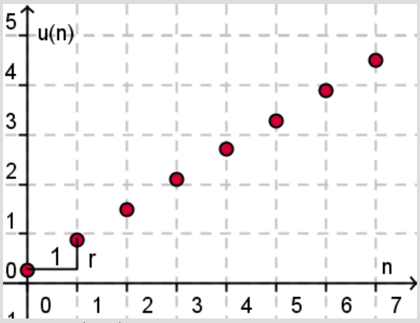
Cette relation est utile lorsqu'une suite arithmétique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on cherche sa raison connaissant deux termes.

Exemple :
On s'intéresse à la suite (u_n) des nombres impairs et on définit u_n comme le $n^{\text{ième}}$ nombre impair.
On a donc $u_1 = 1$ et $r = 2$.
Le terme général de la suite est donnée par $u_n = u_1 + (n-1)r = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$.
On peut ainsi, par exemple, calculer le 100^{e} nombre impair : $u_{100} = 2 \times 100 - 1 = 199$.

Propriété :

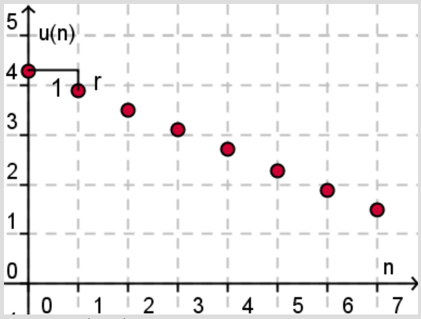
(u_n) est une suite arithmétique de raison *r*.

Si $r > 0$, la suite (u_n) est **croissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$



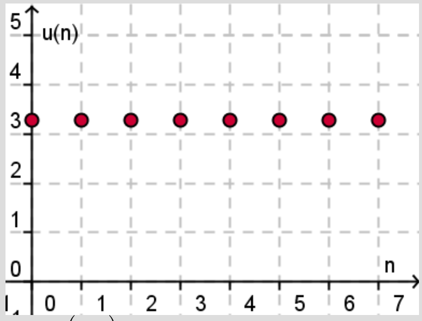
(u_n) **diverge** vers +∞

Si $r < 0$, la suite (u_n) est **décroissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$



(u_n) **diverge** vers -∞

Si $r = 0$, la suite (u_n) est **constante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$

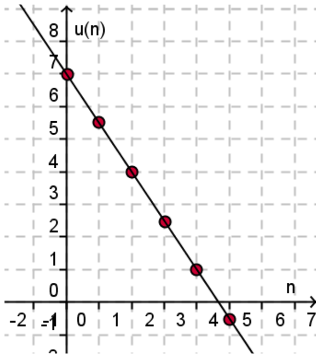


(u_n) **converge** vers u_0

On dit que les **variations** de la suite sont **linéaires** car les points de sa représentation se situent sur une droite. La raison de la suite arithmétique est le coefficient directeur de la droite correspondante, d'équation $y = rx + u_0$.

Exemple :

la suite arithmétique (u_n) , de premier terme $u_0 = 7$ et de raison -1,5, a pour représentation graphique des points situés sur la droite d'équation $y = -1{,}5x + 7$.



Propriété :

Soit (u_n) une **suite arithmétique**.

La formule suivante donne la **somme des termes consécutifs** :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

$$\text{Somme des termes d'une suite arithmétique} = \text{nombre de termes} \times \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Démonstration :

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison *r*.

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ S = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = u_0 + (u_0 + r) + \ldots + (u_n - r) + u_n \\ S = u_n + (u_n - r) + \ldots + (u_0 + r) + u_0 \end{cases}$$

En additionnant membres à membres on obtient :

$$2S = u_0 + u_n + (u_0 + r) + (u_n - r) + \ldots + (u_n - r) + (u_0 + r) + u_n + u_0$$

$$2S = (u_0 + u_n) + (u_0 + r + u_n - r) + \ldots + (u_n - r + u_0 + r) + (u_n + u_0)$$

$$2S = (n+1)(u_0 + u_n)$$

donc $S = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$.

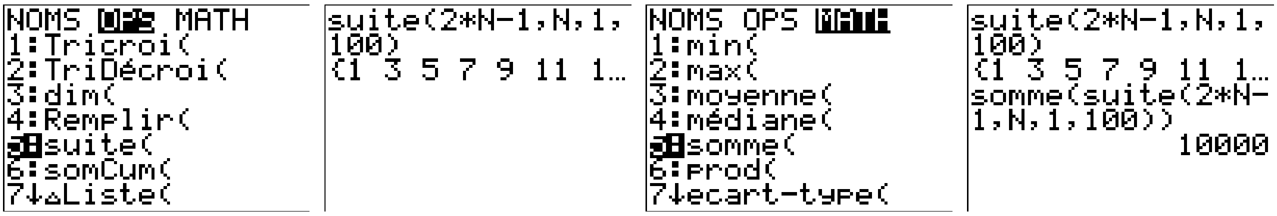
Notation :

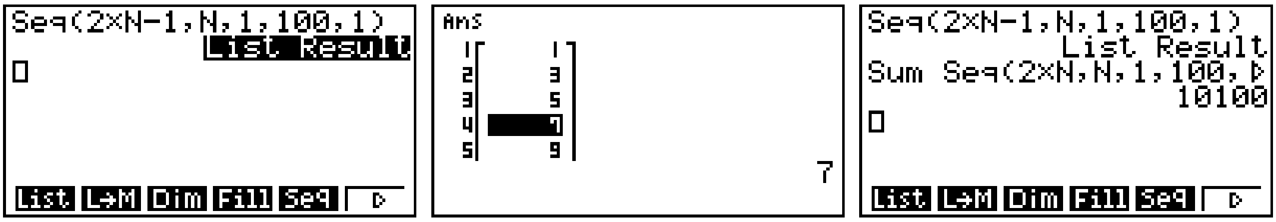
On utilise la notation suivante : $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$.

Exemple :

La suite des nombres impairs est arithmétique et l'on a déterminé dans un exemple précédent que le 100e nombre impair valait 199.
On peut donc calculer la somme des 100 premiers nombres impairs :

$$S_{100} = 1+3+5+\ldots+199 = 100 \times \frac{1+199}{2} = 100 \times 100 = 10000$$





2) *Suite géométrique*

Définition :

Une suite numérique (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q, appelé **raison** de la suite, tel que, pour tout nombre entier naturel n, on ait :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemples :

- La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 3.
- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an.
  Donc chaque année, sa population est multipliée par $1+5\% = 1{,}05$.
  Elle suit une progression géométrique de raison 1,05.

Remarque :

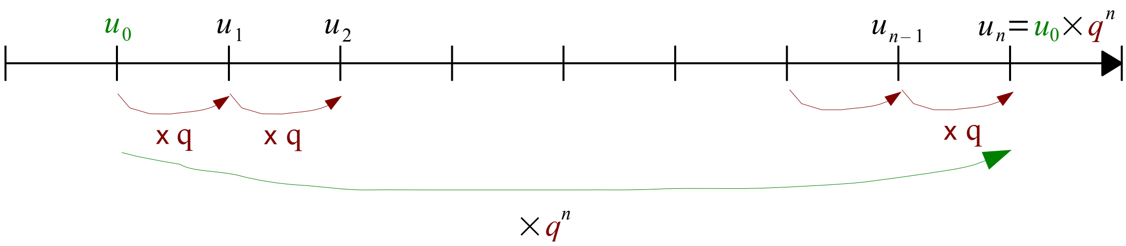
Une suite (u_n) est **géométrique** si, et seulement si, le **coefficient multiplicateur** entre deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou la variation relative $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$) est **constant**.

Propriété :
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration :
Soit (u_n) une suite géométrique vérifiant donc la relation $u_{n+1} = q \times u_n$.
Calculons quelques termes de cette suite :
$u_0 = u_0$
$u_1 = q \times u_0$
$u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0$
…
En répétant n fois le procédé, on obtient :

$$u_n = q \times u_{n-1} = q \times (q^{n-1} \times u_0) = q^n \times u_0 = u_0 \times q^n$$

Remarque :
Terme général en fonction de n : $u_n = u_0 \times q^n$ *(formule explicite)*



Exemples :

- Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3.
  On a, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$.
  Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le terme de rang 5 : $u_4 = 3^4 = 81$.
- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an. Comme vu précédemment, cette population suit une progression géométrique de raison 1,05.
  En notant $u_0 = 800$ le terme initial de cette suite, on peut déterminer le terme général :
  $$u_n = u_0 \times q^n = 800 \times 1{,}05^n$$
  Après 6 années, la ville comptera $u_6 = 800 \times 1{,}05^6 \simeq 1072$ habitants.

Remarque :
Pour une suite géométrique (u_n) de raison q non nulle, si n et p sont deux entiers naturels, on peut toujours déterminer l'un des termes u_n ou u_p en fonction de l'autre par la relation $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
Ceci est utile lorsqu'une suite géométrique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on recherche la raison d'une suite géométrique connaissant deux termes.

Exemple :
La suite (u_n) est géométrique telle que $u_5 = 7$ et $u_7 = 63$.
Pour déterminer sa raison q, on utilise la relation :

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5} = u_5 \times q^2$$

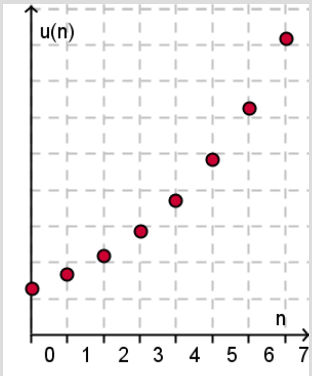
D'où q vérifie l'égalité $63 = 7 \times q^2$, soit $q^2 = 9$.
Il y a donc deux valeurs de q possibles : 3 et -3.

Propriété :

(u_n) est une suite géométrique de premier terme non nul et de raison q.

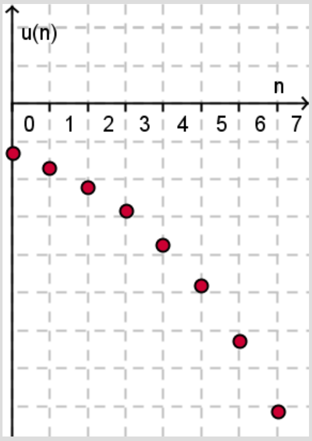
- Si $q > 1$

Si $u_0 > 0$, alors la suite u_n est **croissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$



(u_n) **diverge** vers $+\infty$

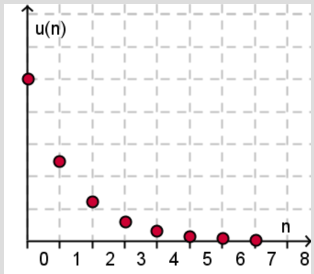
Si $u_0 < 0$, alors la suite u_n est **décroissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$



(u_n) **diverge** vers $-\infty$

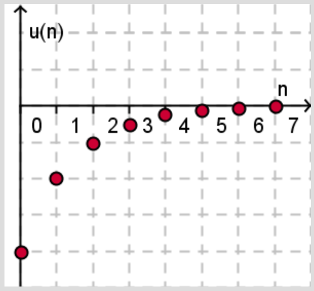
- Si $0 < q < 1$

Si $u_0 > 0$, alors la suite u_n est **décroissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$



(u_n) **converge** vers 0

Si $u_0 < 0$, alors la suite u_n est **croissante** et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

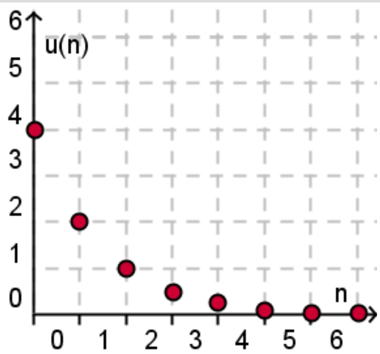


(u_n) **converge** vers 0

- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**. Donc (u_n) **converge** vers u_0.
- Si $q = 0$, alors la suite (u_n) est **constante** et vaut 0 à partir du second terme.
  Donc (u_n) **converge** vers 0.
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) n'a pas de variations régulières.
  - Si $-1 < q < 0$ alors (u_n) **converge** vers 0.
  - Si $q \leqslant -1$ alors (u_n) **diverge** et n'admet pas de limite.

Exemple :

La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$ admet la représentation graphique ci-contre.



Propriété :

Soit (u_n) une **suite géométrique** de raison $q \neq 1$.
La formule suivante donne la **somme des termes consécutifs** :

$$\text{Somme des termes d'une suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison q. Donc $u_p = u_{p-1} \times q$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ qS = q(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ qS = qu_0 + qu_1 + \ldots + qu_{n-1} + qu_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ qS = \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

En soustrayant terme à terme, on obtient :

$$S - qS = u_0 - 0 + u_1 - u_1 + \ldots + u_n - u_n + 0 - u_{n+1}$$

Donc $S - qS = u_0 - u_{n+1} = u_0 - u_0 \times q^{n+1}$

Ainsi $(1-q)S = u_0(1-q^{n+1})$ et $S = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Notation :

On utilise la notation suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple :

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.
On peut exprimer la somme des $n+1$ premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

Et par exemple, pour $n = 10$, $S_{10} = 1+2+4+8+16+32+\ldots+1024 = 2^{11} - 1 = 2047$.