R.O.C.

Suites

Propriétés :
Soit deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

Théorème de minoration :

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration :
On suppose que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
On cherche à démontrer que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de (v_n) à partir d'un certain rang.
Soit A un réel. Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$.
Alors pour tout entier $n \geqslant max(p;N)$, on a $v_n \geqslant u_n > A$, c'est-à-dire $v_n \in]A;+\infty[$.
On en déduit : $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
La démonstration du théorème de majoration est analogue.

Propriété :
Les suites géométriques (q^n) où $q > 1$ divergent vers $+\infty$.

pour q réel tel que $q > 1$, $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

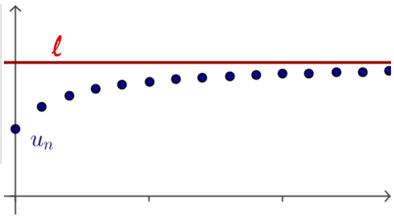
Démonstration :
Soit $q > 1$. Posons $q = 1 + a$ où $a > 0$.

Préliminaire : montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

- Initialisation :
  Pour $n = 0$, $(1+a)^n = 1$ et $1 + na = 1$ donc l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Hérédité :
  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. Montrons que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$.
  $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ et $(1+a) > 0$ donc $(1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na)$.
  Soit $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + na + a + na^2$, d'où $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2$.
  Comme $n \geqslant 0$ et $a^2 > 0$, $1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a$.
  Ainsi $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$.
- Conclusion :
  Pour tout $n \geqslant 0$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Soit A un réel. Dès que $n \geqslant \dfrac{A-1}{a}$ on aura $1 + na \geqslant A$ et donc $(1+a)^n \geq A$.
La suite $((1+a)^n)$ c'est-à-dire la suite (q^n) a donc pour limite $+\infty$.

Propriété :
Soit une suite (u_n) **convergent** vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est **croissante**, alors la suite (u_n) est **majorée** par ℓ.
Pour tout entier n, $u_n \leqslant \ell$.



Démonstration :
On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$.

- Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant n_0$, $\ell < u_{n_0} \leqslant u_n$.
- L'intervalle $]\ell - 1 ; u_{n_0}[$ est un intervalle ouvert qui contient ℓ.
  Comme la suite (u_n) converge vers ℓ, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in]\ell - 1 ; u_{n_0}[$.
  Ainsi pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n < u_{n_0}$.

Alors, pour tout entier $n \geqslant max(N ; n_0)$, on a $u_{n_0} \leqslant u_n$ et $u_n < u_{n_0}$.
On aboutit à une contradiction, et l'hypothèse initiale est donc fausse.
On en déduit que pour tout entier n, $u_n \leqslant \ell$.

Propriétés :

- Si une suite est **croissante** et **non majorée**, alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite est **décroissante** et **non minorée**, alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration :
Soit (u_n) une suite non majorée, donc pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > M$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$ et donc $u_n > M$.
Ce qui signifie que, pour tout $M \in \mathbb{R}$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]M ; +\infty[$ à partir d'un certain rang. Donc, par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
La deuxième proposition se démontre de la même façon.

Exponentielle

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'=f \text{ et } f(0)=1$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée **exp**.

Ainsi pour tout réel x :

$$\exp'(x)=\exp(x) \text{ et } \exp(0)=1$$

Démonstration de l'unicité de la fonction :

On suppose l'existence d'une fonction dérivable g vérifiant $g'=g$ et $g(0)=1$.

La fonction exp ne s'annulant pas, on peut définir $h=\dfrac{g}{\exp}$ sur $\mathbb{R}$.

$$h'(x)=\frac{g'(x)\exp(x)-g(x)\exp'(x)}{(\exp(x))^2}=\frac{g(x)\exp(x)-g(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2}=0 .$$

h est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0)=\dfrac{g(0)}{\exp(0)}=1$. Ainsi, pour tout réel x, on a $h(x)=1$.

On en déduit que, pour tout réel x : $g(x)=\exp(x)$.

Propriété :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

Démonstration :

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$.

Pour tout nombre réel $x\geqslant 0$, $f'(x)=e^x-x$ et $f''(x)=e^x-1$.

Sur $[0;+\infty[$, $e^x\geqslant 1$, donc $f''(x)\geqslant 0$ et f' est croissante sur $[0;+\infty[$.

$f'(0)=1$, donc $f'(x)>0$ sur $[0;+\infty[$.

Donc, f est croissante sur $[0;+\infty[$. Comme $f(0)=1$, on en déduit que pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)>0$, c'est-à-dire $e^x>\dfrac{1}{2}x^2$.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0	$+$
$f'(x)$	1	$\nearrow$
$f(x)$	1	$\nearrow$

Par conséquent, pour tout $x>0$, $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{1}{2}x$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)=+\infty$

donc d'après le théorème de minoration, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

Propriété :

$$\lim_{x\to-\infty} x e^x=0$$

Démonstration :

Pour tout nombre réel x, on pose $X=-x$. Ainsi $xe^x=-Xe^{-X}=-\dfrac{X}{e^X}$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} X=+\infty$ et d'après la propriété précédente, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{X}{e^X}\right)=0$.

Donc d'après la propriété de la limite d'une fonction composée, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x e^x=0$.

Intégration

Théorème fondamental :

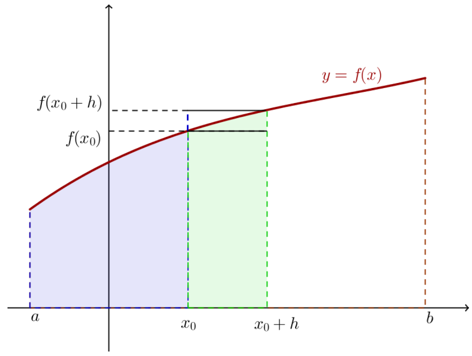
f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

La fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

Démonstration : cas où f est croissante sur $[a;b]$.

x_0 désigne un nombre réel de $[a;b]$ et h un nombre réel non nul tel $x_0+h \in [a;b]$.

- 1er cas : $h>0$
  f est continue et positive sur $[a;b]$
  donc d'après la relation de Chasles :
  $$\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$
  c'est-à-dire
  $$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

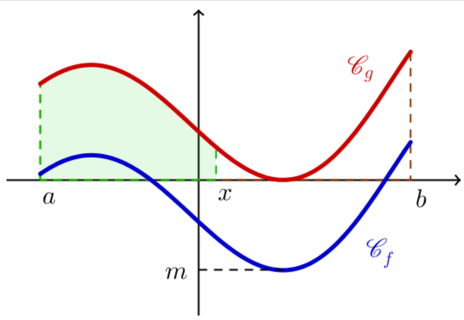


  f est croissante sur $[a;b]$ donc on peut encadrer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ donc :
  $h\times f(x_0)\leqslant F(x_0+h)-F(x_0)\leqslant h\times f(x_0+h)$ et par conséquent
  $$f(x_0)\leqslant\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)\,.$$
- 2e cas : $h<0$. On établit de même que $f(x_0+h)\leqslant\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0)$.
- **Conclusion :**
  f est continue en x_0 donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$. Le théorème des gendarmes permet de conclure dans les deux cas ci-dessus que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.
  F est donc dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.
  Or x_0 est un nombre réel quelconque de $[a;b]$, donc F est dérivable sur $[a;b]$ et $F'=f$.

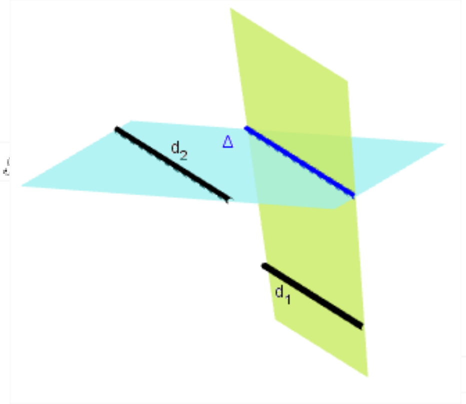
Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle *I* admet des primitives sur *I*.

Démonstration : cas où $I=[a;b]$ et où f admet un minimum m sur *I*.
La fonction g définie sur *I* par $g(x)=f(x)-m$ est continue et positive sur $[a;b]$.
Donc, d'après le théorème fondamental, elle admet une primitive G sur $[a;b]$: $G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.



La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=G(x)+mx$ est une primitive de f sur $[a;b]$ car pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $F'(x)=G'(x)+m=g(x)+m=f(x)$.
Donc, f admet des primitives sur $[a;b]$.



<u>Théorème « du toit » :</u>
Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ et si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles contenues respectivement dans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.

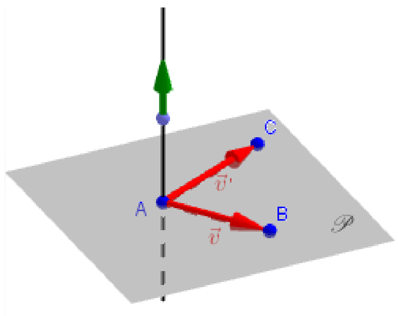
Démonstration :

- Si d_1 et d_2 sont confondues alors Δ est aussi confondue avec d_1 et d_2, la propriété est donc vrai.
- Supposons que d_1 et d_2 soient strictement parallèles.
  Raisonnons par l'absurde : supposons que Δ et d_1 soient sécantes et notons M leur point d'intersection.
  M appartient à Δ, intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ donc M appartient à $\mathscr{P}'$.
  M n'appartenant pas à d_2, car d_1 et d_2 sont strictement parallèles, M et d_2 définissent le plan $\mathscr{P}'$.
  d_1 étant parallèle à d_2 passant par M, il en résulte que d_1 appartient aussi au plan $\mathscr{P}'$.
  On en déduit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant la droite d_1, alors confondue avec Δ, ce qui contredit le fait que d_1 et Δ soient sécantes.
  En conclusion Δ et d_1 ne peuvent pas être sécantes et comme elles sont coplanaires, elles sont donc parallèles.
  Par suite, Δ est aussi parallèle à d_2 car d_1 et d_2 sont parallèles.

<u>Propriétés :</u>
d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
$\mathscr{P}$ est un plan dirigé par un couple $(\vec{v}\,;\vec{v}\,')$ de vecteurs non colinéaires.
La droite *d* et le plan $\mathscr{P}$ sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{v}\,'=0$$

Démonstration :
Par définition, dire que *d* et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux signifie que *d* est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathscr{P}$, ce qui équivaut à $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ quels que soient les points *M* et *N* du plan $\mathscr{P}$.



- La condition est nécessaire
  En effet, si *d* et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux, alors quels que soient les points *M* et *N* de $\mathscr{P}$, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN}=0$.
  Donc, en particulier $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
- La condition est suffisante
  En effet, quels que soient les points *M* et *N* de $\mathscr{P}$, il existe des nombres réels α et β tels que $\overrightarrow{MN}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}\,'$ car le couple $(\vec{v}\,;\vec{v}\,')$ dirige $\mathscr{P}$.
  Donc $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{u}(\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}\,')=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}+\beta\vec{u}\cdot\vec{v}\,'=0$.

Propriétés :
L'espace est muni d'un repère orthonormé.

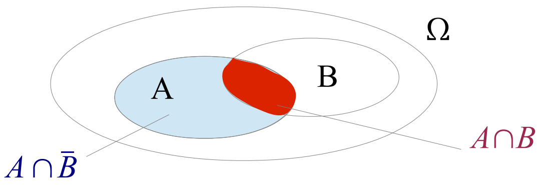
- Un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, où d désigne un nombre réel. On dit que c'est une **équation cartésienne** de ce plan.
- Réciproquement a, b, c et d étant quatre nombres réels donnés avec a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration :

- Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A\,;y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, c'est-à-dire $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.
  En posant $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$, on obtient $ax+by+cz+d=0$.
- $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ qui vérifient $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c sont des nombres réels non tous nuls.
  On peut supposer, par exemple, a non nul.
  Le point $A\left(\frac{-d}{a}\,;0\,;0\right)$ est alors un point de $\mathscr{E}$ et l'équation équivaut à : $a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.
  $\mathscr{E}$ est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Propriété :
Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Démonstration :



L'événement A est la réunion des deux événements incompatibles $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$, donc :
$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$.
On en déduit :
$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$.
A et B étant indépendants, on a :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

d'où :
$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A) \times p(B)$
$p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times (1 - p(B))$
$p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times (p(\bar{B}))$
Ainsi, par définition A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Loi exponentielle

Propriété :
Soit λ un réel strictement positif.
Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors cette variable aléatoire vérifie la propriété dite de **durée de vie sans vieillissement**, qui s'énonce ainsi :

$$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=P(X\geqslant h)$$

pour tous réels t et h positifs.

Démonstration :
Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=\frac{P(\{X\geqslant t+h\}\cap\{X\geqslant t\})}{P(X\geqslant t)}=\frac{P(X\geqslant t+h)}{P(X\geqslant t)}$$

Or l'événement contraire de l'événement $\{X\geqslant t+h\}$ (resp $\{X\geqslant t\}$) est l'événement $\{X<t+h\}$ (resp $\{X<t\}$).
Il en découle :

$$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h)=\frac{1-P(X<t+h)}{1-P(X<t)}=\frac{1-F(t+h)}{1-F(t)}=\frac{1-(1-e^{-\lambda(t+h)})}{1-(1-e^{-\lambda t})}=e^{-\lambda(t+h)+\lambda t}=e^{-\lambda h}$$

Or $\mathrm{e}^{-\lambda h}=1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda h})=1-F(h)=1-P(X<h)=P(X\geqslant h)$.
D'où le résultat.

Propriété :
L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ est donnée par :

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

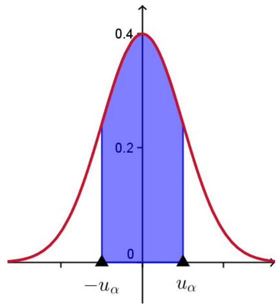
Démonstration :
Soit x un nombre réel strictement positif.
On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=t\,f(t)$, f désignant la densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$. Comme cette fonction g est continue sur l'intervalle $[0;x]$, elle admet sur cet intervalle des primitives.
En outre, comme pour tout $t\geqslant 0$, $(t\,e^{-\lambda t})'=\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\,t\,e^{-\lambda t}$, il en découle :

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t-\int_0^x (t e^{-\lambda t})'\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x-\left[t\,e^{-\lambda t}\right]_0^x=\frac{1}{\lambda}-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}-x e^{-\lambda x}$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on obtient le résultat.

Loi normale

Propriété :
Pour tout nombre réel α inclus dans l'intervalle $]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :
$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$$
où X désigne une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.



Démonstration :
Soit α un nombre réel inclus dans l'intervalle $]0;1[$. La densité f associée à la variable aléatoire X étant continue sur ℝ, on peut définir la fonction F sur $[0;+\infty[$ par $F(b)=\int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$, b étant un nombre réel positif.
Cette fonction F est l'unique primitive de f sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0. Elle est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Par propriété de la densité et par symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$, il découle $\lim_{b \to +\infty} F(b)=\frac{1}{2}$.
L'image de 0 par F étant 0, F prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Comme le nombre réel α est strictement compris entre 0 et 1, le nombre réel $\frac{1-\alpha}{2}$ est strictement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre réel strictement positif que l'on note u_α tel que $F(u_\alpha)=\frac{1-\alpha}{2}$.
Par symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ et par linéarité de l'intégrale, on obtient le résultat :
$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha)=\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x=\int_{-u_\alpha}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x+\int_{0}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x=2\int_{0}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x=2F(u_\alpha)=2\frac{1-\alpha}{2}=1-\alpha$$

Intervalle de fluctuation

Propriété :
Si la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$ avec p dans l'intervalle $]0\,;1[$, alors pour tout nombre réel α de $]0\,;1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n}\in I_n\right)=1-\alpha$$

où $I_n=\left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$
et u_α désigne le nombre réel tel que $P(-u_\alpha\leqslant Z\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$ lorsque Z suit la loi normale $\mathscr{N}(0\,;1)$.

Démonstration :
On pose $Z_n=\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
D'après le théorème de Moivre-Laplace, $\lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha\leqslant Z_n\leqslant u_\alpha)=P(-u_\alpha\leqslant Z\leqslant u_\alpha)$.

Or $\quad P(-u_\alpha\leqslant Z_n\leqslant u_\alpha)=P\left(np-u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\leqslant X_n\leqslant np+u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right)$

$$P(-u_\alpha\leqslant Z_n\leqslant u_\alpha)=P\left(p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{X_n}{n}\leqslant p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n}\in I_n\right)=P(-u_\alpha\leqslant Z\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$

Estimation

Propriété :
Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ où p est la proportion inconnue d'apparition d'un caractère, et $F_n=\frac{X_n}{n}$ la fréquence associée à X_n . Alors, pour n suffisamment grand, p appartient à l'intervalle $\left[F_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ **avec une probabilité supérieur ou égale à 0,95**.

Démonstration :
Nous avons vu que l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est, pour n assez grand, un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % pour $F_n=\frac{X_n}{n}$.

Donc, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, n\geqslant n_0$, $P\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant F_n\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geqslant 0{,}95$.

Or $\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant F_n\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\Leftrightarrow\left(F_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant p\leqslant F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Donc, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, n\geqslant n_0$, $P\left(F_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant p\leqslant F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geqslant 0{,}95$.