Chapitre 8
Limites et asymptotes

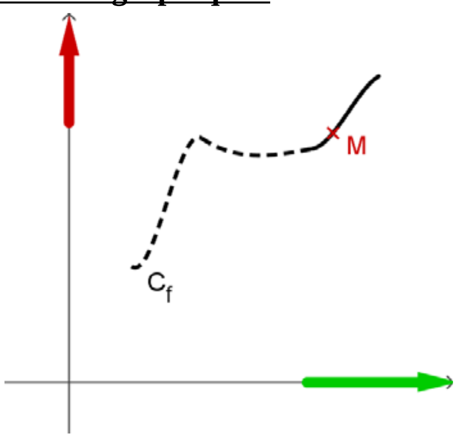
I. Limites de fonctions usuelles

1) Carré, cube, racine carrée

Limite infinie

Définition :
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle [a ;+∞[.
On dit que « ***f* a pour limite +∞ en +∞** », lorsque les valeurs de *f(x)* sont aussi grandes que l'on veut dès que *x* est assez grand.
On écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
et on lit « la limite de *f(x)* quand *x* tend vers +∞ est +∞ ».
ou « *f(x)* tend vers +∞ quand *x* tend vers +∞ »

Interprétation graphique :



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Si l'abscisse de M devient très grande, alors son ordonnée sera très grande.

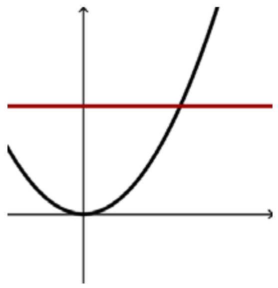
Propriétés :
Les fonctions carré, cube et racine carrée ont pour limites, lorsque *x* tend vers :

- +∞ : $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- −∞ : $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Remarques :

- Interprétation graphique :

$\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de $f(x) = x^2$, finit par se situer au-dessus de n'importe quelle droite horizontale.



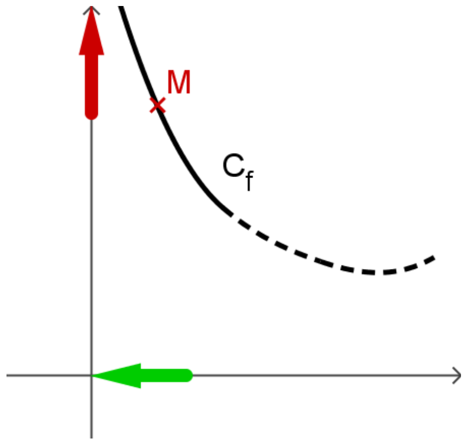
- Lorsque *x* tend vers un nombre, il suffit de faire le calcul :
  $\lim_{x\to 3} -x^2=-3^2=-9$; $\lim_{x\to 8} \sqrt{x}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $\lim_{x\to -2} x^3=(-2)^3=-8$

2) *Inverse*

Limite infinie

Définition :
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle [a ;+∞[.
On dit que ***f* a pour limite +∞ en 0**, lorsque les valeurs de *f(x)* sont aussi grandes que l'on veut dès que *x* est assez petit.
On écrit $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et on lit « la limite de *f(x)* quand *x* tend vers 0 est +∞ ».

Interprétation graphique :



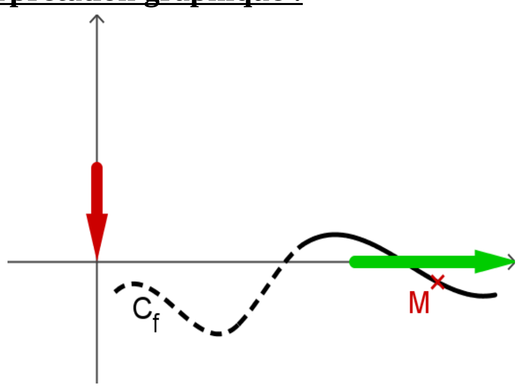
$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

Si l'abscisse de M devient très grande, alors son ordonnée sera très grande.

Limite finie

Définition :
On dit que ***f* a pour limite 0 en +∞**, lorsque les valeurs de *f(x)* sont aussi proches de 0 que l'on veut, dès que *x* est assez grand.
On écrit $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$.

Interprétation graphique :

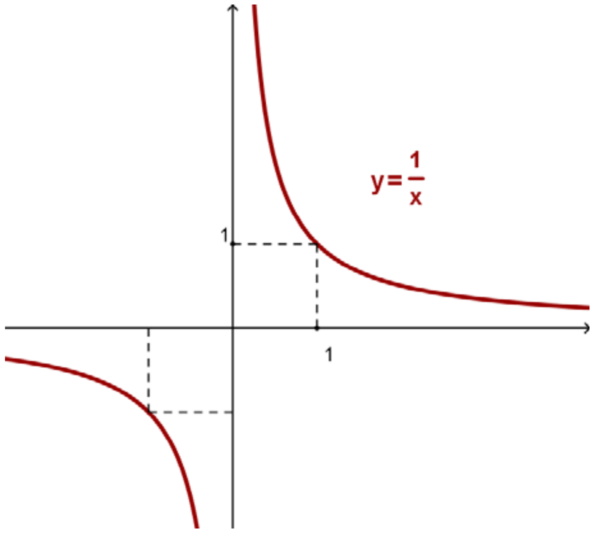


$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$

Si l'abscisse de M devient très grande, alors son ordonnée sera proche de 0.

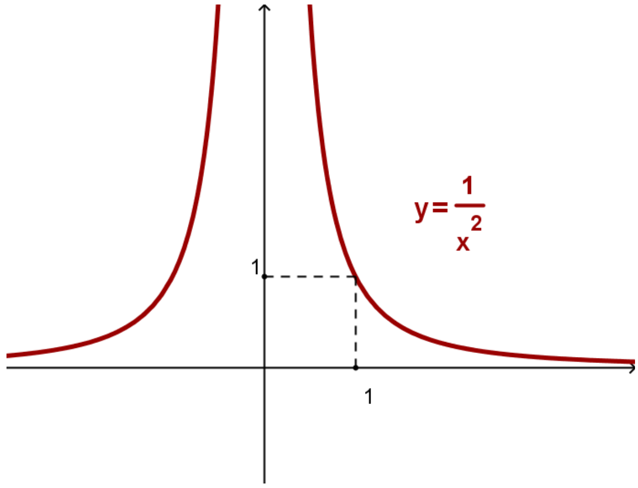
Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$



- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

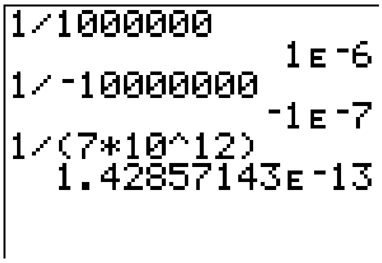
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



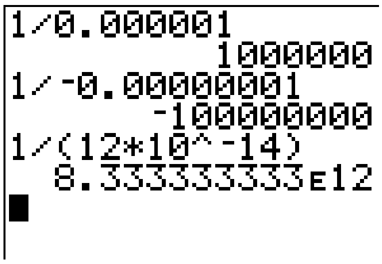
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Remarques :

- On dit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
- On dit que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de 0.
- Diviser par un très grand nombre, qu'il soit positif ou négatif, donne presque zéro.



- Diviser par un nombre presque égal à zéro donne un très grand nombre.



II. Opérations sur les limites

α désigne un nombre ou $+\infty$ ou $-\infty$, et L et L' sont des nombres.

1) Somme de fonctions

Propriétés :

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

Exemple :

Soit $f(x)=x+3-\frac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$. Donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3-\frac{1}{x}\right)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0}(x+3)=0+3=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}-\frac{1}{x}=-\infty$. Donc par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x+3-\frac{1}{x}\right)=-\infty$.

2) Produit de fonctions

Propriétés :

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L non nul	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=$	$L\times L'$	$\pm\infty$	**?**	$\pm\infty$

Remarque : Multiplication par un nombre k non nul

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=L$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} k.f(x)=k.L$.
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} k.f(x)=\pm\infty$

Le signe de l'infini s 'obtient simplement par la règle des signes du produit.

Propriétés :
Pour tout entier $n\geqslant 1$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^n)=+\infty$ si $a>0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^n)=-\infty$ si $a<0$

Exemple :
Soit $f(x)=\sqrt{x}(3-x)$ définie sur $[0;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$. Donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(3-x)=-\infty$.
En 0, la fonction existe, on calcule donc $f(0)=\sqrt{0}(3-0)=0$.

3) Quotient de fonctions

Propriétés :

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L≠0	L	±∞	0	±∞
et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L' non nul	0	±∞	L'	0	±∞
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	±∞	0	±∞	?	?

Remarque : inverse d'une fonction

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ et si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Au voisinage d'un point *a* où $f(a) = 0$.

  Si $f(x) > 0$ pour $x \neq a$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ et si $f(x) < 0$ pour $x \neq a$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

  La droite d'équation $x = a$ est **asymptote** (verticale) à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Propriété :

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{x + 2}$ définie sur $]-2 ; +\infty[$.

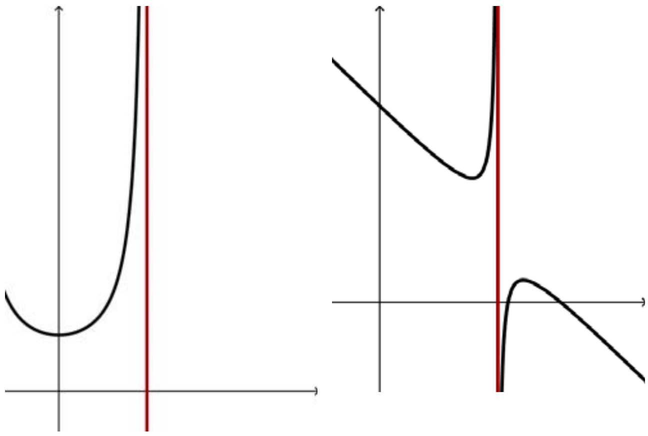
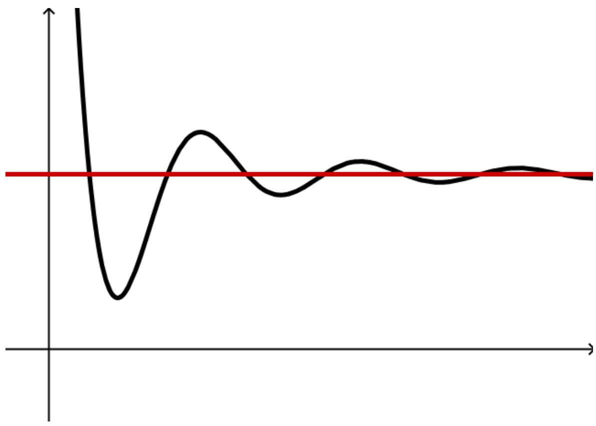
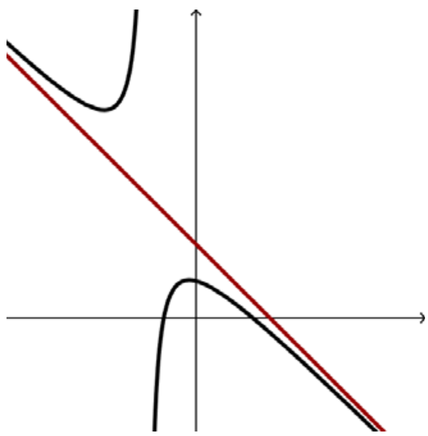
- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} (-x^2 + x + 3) = -(-2)^2 - 2 + 3 = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} (x + 2) = 0$, avec $x + 2 > 0$.

  On a donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{-x^2 + x + 3}{x + 2} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + x + 3}{x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} \times \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x \times -1 = -\infty$

III. <u>Droites asymptotes</u>

La recherche de limites pour une fonction f définie sur un intervalle I conduit parfois à considérer des droites asymptotes Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.

nature de Δ	conditions	exemples graphiques
asymptote verticale d'équation $x=c$	$I=]c;\dots$ ou $\dots;c[$ c est une valeur interdite $\lim\limits_{x\to c} f(x)=+\infty\ (ou\ -\infty)$ si la limite de f **en c** est **infinie**	Δ asymptote à $\mathscr{C}_f$ 
asymptote horizontale d'équation $y=b$	$I=\dots;+\infty[$ ou $]-\infty;\dots$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ si la limite de f **à l'infinie** est ***b***	Δ asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ 
asymptote oblique d'équation $y=ax+b$	$I=\dots;+\infty[$ ou $]-\infty;\dots$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b))=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(ax+b))=0$ si la limite **à l'infini** de $f(x)-(ax+b)$ est **nulle**	Δ asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ 

Remarque :

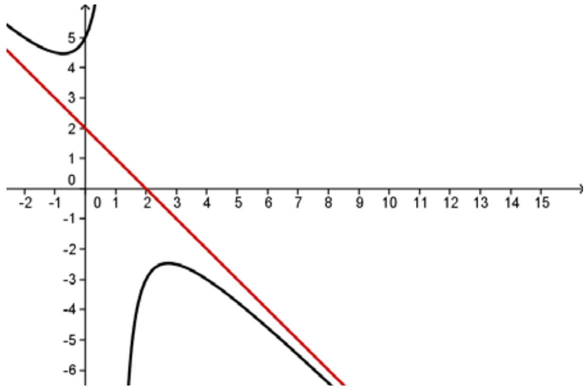
Si la fonction *f* peut s'écrire $f(x)=ax+b+\epsilon(x)$, avec $\lim_{x\to+\infty}\epsilon(x)=0$, alors la droite Δ d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en +∞.

Exemple :

Soit $f(x)=-x+2+\dfrac{3}{1-x}$ définie sur $]1;+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$.

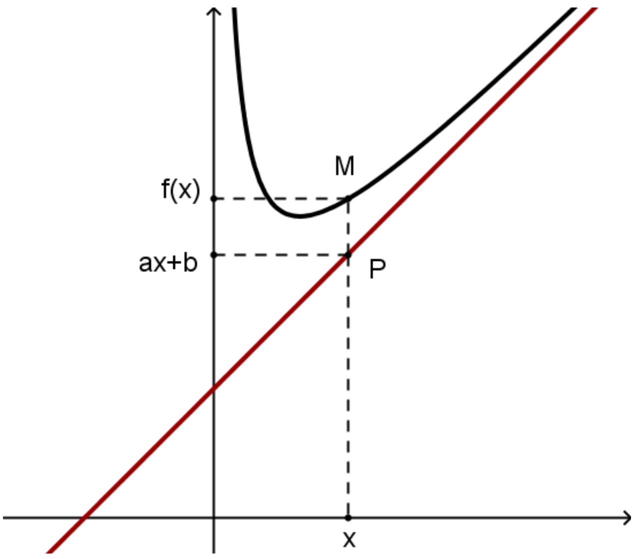
Or $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1-x}=0$, on en déduit donc que la droite Δ, d'équation $y=-x+2$, est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en +∞.

On remarque, par ailleurs, qu'il existe une asymptote verticale...



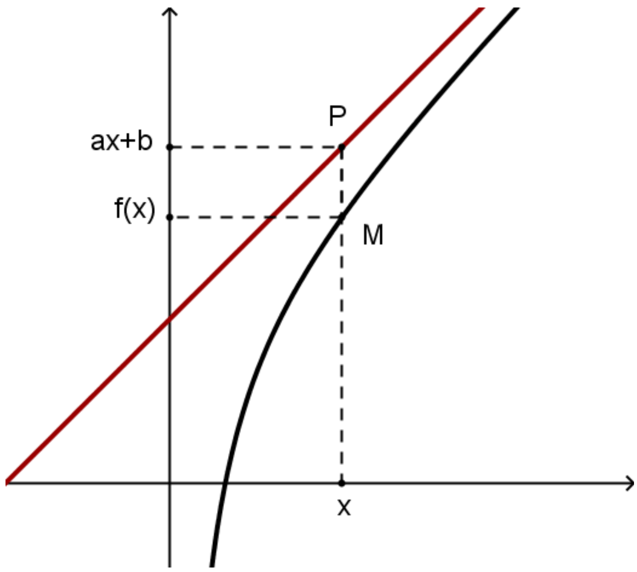
Pour étudier la **position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote** oblique (ou horizontale), on étudie le signe de la différence $f(x)-(ax+b)$.

- Si $f(x)-(ax+b)$ est positif



On a $f(x)>ax+b$,
la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'asymptote Δ.

- Si $f(x)-(ax+b)$ est négatif



On a $f(x)<ax+b$,
la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de l'asymptote Δ.