Chapitre 10

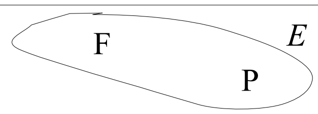
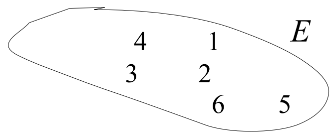
Probabilités

I. Loi de probabilité

1) Univers

Définition :
L'ensemble E de toutes les issues (résultats possibles) d'une **expérience aléatoire** est appelé l'**univers** de l'expérience.

Exemples :

Expérience aléatoire	*Univers*	
Lancer d'une pièce	E = {P ; F}	
Lancer d'un dé cubique	E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}	

Remarque :
Dans le cas général, on note les issues e_1, e_2, e_3, … , e_n et $E = \{ e_1 \; ; \; e_2 \; ; \; e_3 \; ; \ldots ; \; e_n \}$

2) Loi de probabilité

Définition :
Définir une **loi de probabilité** (ou **distribution de probabilité**) sur un univers E, c'est associer à chaque **issue** e_i, les **probabilités correspondantes** p_i, qui sont des nombres **positifs** ou nul dont la **somme** est **égale à 1**.

Issue	e_1	e_2	e_3	…	e_n
Probabilité	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Exemple :
Si le dé cubique est équilibré (chaque face à autant de chances qu'une autre d'apparaître).
Donc $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ et puisque $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.
On a donc :

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition :
Dans le cas où l'on associe à chacune des n issues d'une expérience aléatoire la même probabilité p, on parle de **loi équirépartie**.
On a alors $p=\frac{1}{n}$.

Démonstration :
$p+p+p+...+p=1$, donc $np=1$ et $p=\frac{1}{n}$.

3) *Modélisation d'une expérience aléatoire*

Définition :
Modéliser une expérience aléatoire dont les issues constituent l'univers E, c'est choisir une loi de probabilité sur E qui représente **au mieux** la probabilité qu'ils ont de se réaliser.

Exemple :
On considère l'expérience aléatoire : « Lancer de deux pièces simultanément ».
Les issues possibles sont : Pile et Pile (PP), Pile et Face (PF), Face et Face (FF)
Il existe différentes manières de choisir un modèle.

<table>
<tr><td></td><td>Modèle 1
On ne distingue pas les pièces</td><td>Modèle 2
On distingue les pièces</td></tr>
<tr><td>Description</td><td>Loi équirépartie sur $E=\{PP; FP; FF\}$</td><td>Loi équirépartie sur $E=\{PP; FP; PF; FF\}$</td></tr>
<tr><td>Loi de probabilité</td><td><table><tr><td>Issue</td><td>P P</td><td>P F</td><td>F F</td></tr><tr><td>Probabilité</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>Issue</td><td>F F</td><td>P F</td><td>F P</td><td>P P</td></tr><tr><td>Probabilité</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Si l'on considère le modèle 1 on vérifie que la probabilité de tirer Pile et Pile est de $\frac{1}{3}$.

Si l'on considère le modèle 2 on vérifie que la probabilité de tirer Pile et Pile est de $\frac{1}{4}$.

Propriété : Loi des grands nombres
Si on **reproduit**, dans des conditions identiques, une **expérience aléatoire** un grand nombre de fois, on constate que la **distribution de fréquences** des issues se « **stabilise** » autour de la **loi de probabilité** sur l'univers E.
Pour un **grand nombre d'expériences**, l'intervalle de fluctuation des fréquences, donne un encadrement de la **probabilité** associée à l'issue.

Exemple :
On répète 10 000 fois l'expérience :

« Lancer de deux pièces simultanément ».

Voici la distribution de fréquences des issues :

Issue	PP	PF	FF
Fréquence	0,2519	0,4991	0,2490

On a donc :

$p_{PP} \in \left[0{,}2519 - \frac{1}{\sqrt{10000}} ; 0{,}2519 + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right]$ (avec une marge d'erreur de 5 %)

Ainsi $p_{PP} \in [0{,}2419 ; 0{,}2619]$ et $p_{PF} \in [0{,}4891 ; 0{,}5091]$ et $p_{FF} \in [0{,}239 ; 0{,}259]$

Cette propriété nous permet donc de valider où d'invalider un modèle.

Dans l'exemple ci-dessus le modèle 2 est le mieux adapté à l'expérience aléatoire.

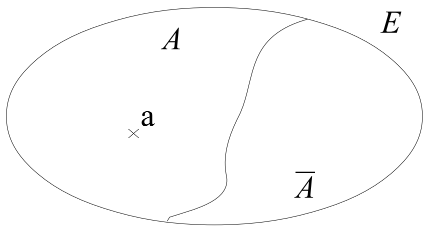
II. Probabilité d'un événement

Soit E l'univers associé à une expérience aléatoire.

1) Notion d'événement

Définitions :

- Un **événement** A est une partie (ou un sous ensemble) de l'univers E.
- L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$ est la partie constituée de toutes les issues de E qui ne sont pas dans A.
- Un **événement élémentaire** est une partie de E qui ne contient qu'une seule issue.



$A \subset E$

Remarque :

On dit que chaque **issue** a qui est dans la partie A **réalise** l'**évènement** A ($a \in A$).

Vocabulaire :

- $\emptyset$ est appelé **événement impossible**, aucune issue ne le réalise.
- E est appelé **événement certain**, toutes les issues le réalisent.

Exemple :

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Donc $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

- Soit A l'événement : « sortie d'un multiple de 3 ».
  $A = \{3 ; 6\}$ (les issues 3 et 6 réalisent l'événement A) et $\overline{A} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5\}$
- Soit B l'événement : « sortie du 4 ».
  $B = \{4\}$ est un événement élémentaire.
- Soit C l'événement : « sortie du 7 »
  $C = \emptyset$ est l'événement impossible.
- Soit D l'événement : « sortie d'un résultat inférieur ou égal à 6 »
  $D = E$ est l'événement certain.

2) Probabilité d'un événement

Une loi de probabilité est définie sur un univers E.

Définition :

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités des issues** qui le réalisent.
On la note $p(A)$.

Propriétés :

- Aucune issue ne réalise l'événement impossible donc $p(\emptyset)=0$
- L'événement certain est réalisé par chacune des issues donc $p(E)=1$
- Pour tout événement A, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
- Pour tout événement A, $p(\overline{A})=1-p(A)$

Exemple :

On s'intéresse au lancer d'un dé cubique. Donc $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

La loi de probabilité sur E est la suivante :

Remarque : le dé est pipé.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

A est l'événement : « Obtenir un résultat pair ». $A=\{2 ; 4 ; 6\}$

Donc : $p(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

Cas particulier

Propriété :

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est donné par :

$$p(A)=\frac{nombre\ d'issues\ dans\ A}{nombre\ d'issues\ dans\ E}=\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Démonstration :

Nous avons vu que, dans ce cas, pour chaque issue $p=\frac{1}{n}$ où n est le nombre d'issues de l'expérience.

Si A est constitué de m issues, alors $p(A)=\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m \text{ fois}}=\frac{m}{n}$

Exemple :

Lorsque le dé est supposé parfait, les événements élémentaires sont équiprobables.
Soit A l'événement : « Sortie d'un multiple de 3 ». Donc $A = \{3 ; 6\}$

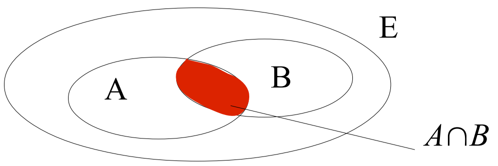
Alors $p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

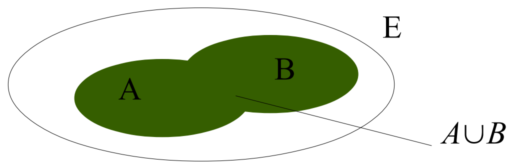
III. Calculs de probabilités

1) Intersection et réunion d'événements

Définitions :

- L'**intersection** de A et B est l'événement, noté $\boldsymbol{A \cap B}$, formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A **et** l'événement B.
- La **réunion** de A et B est l'événement, noté $\boldsymbol{A \cup B}$, formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A **ou** l'événement B (au moins l'un des deux).

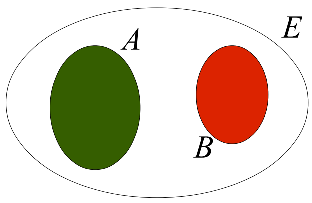




Exemple :
On lance un dé cubique.
Soit A l'événement : « Sortie d'un multiple de 2 »
Soit B l'événement : « Sortie d'un nombre strictement inférieur à 3 »
Alors $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ et $B = \{1 ; 2\}$
Donc $A \cap B = \{2\}$ et $A \cup B = \{1 ; 2 ; 4 ; 6\}$

2) *Propriété fondamentale*

Définition :
Deux événements sont **incompatibles** lorsque leur intersection est vide.



$A \cap B = \emptyset$

Exemple :
On lance un dé cubique.
Soit A l'événement : « Sortie d'un multiple de 3 »
Soit B l'événement : « Sortie d'un nombre strictement inférieur à 3 »
Alors $A = \{3 ; 6\}$ et $B = \{1 ; 2\}$
Donc $A \cap B = \emptyset$. On en conclut donc que A et B sont incompatibles.

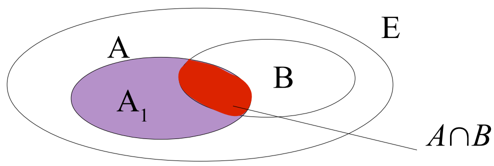
Propriété :
Si deux événements sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemple :
Dans l'exemple précédent : $A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$
et donc (si le dé est équilibré) $p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Théorème :
Pour tous les événements A et B : $p(A\cup B)+p(A\cap B)=p(A)+p(B)$.

Démonstration :
On note A_1 l'événement formé des issues de A qui n'appartiennent pas à B ($A=(A\cap B)\cup A_1$).

A_1 et B sont incompatibles et $A_1\cup B=A\cup B$ donc :
$p(A\cup B)=p(A_1\cup B)=p(A_1)+p(B)$



A_1 et $A\cap B$ sont aussi incompatibles donc :
$p(A)=p((A\cap B)\cup A_1)=p(A\cap B)+p(A_1)$
d'où $p(A\cap B)=p(A)-p(A_1)$

On a donc :
$p(A\cup B)+p(A\cap B)=p(A_1)+p(B)+p(A)-p(A_1)=p(B)+p(A)$

Exemple :
Dans un jeu classique de 32 cartes, il y a 4 couleurs :

trèfle  carreau  cœur  pique 

Et 8 valeurs dans chaque couleur : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7
On tire une carte au hasard dans le jeu.
Quel est la probabilité que la carte tirée soit une dame ou un trèfle ?

Soit D l'événement : « la carte est une dame » et T l'événement : « la carte est un trèfle ».
On a donc :

- $D\cap T$: « la carte est une dame de trèfle ».
- $D\cup T$: « la carte est une dame ou un trèfle ».

Donc $p(D)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ et $p(T)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ de plus $p(D\cap T)=\frac{1}{32}$.

Donc $p(D\cup T)=p(D)+p(T)-p(D\cap T)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{32}=\frac{4}{32}+\frac{8}{32}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$.

Ainsi la probabilité de tirer un trèfle ou une dame est de $\frac{11}{32}$.

Marche aléatoire ;

On peut importer des **modules** (ici le module `turtle` pour l'affichage et la fonction `randint()` du module `random` pour la génération de nombre aléatoire).

```
# Marche aleatoire
from turtle import *
from random import randint

for i in range(500):
    k = randint(0, 3)
    left(k * 90)
    forward(10)
```