Chapitre 6
Loi de probabilités discrètes

I. Loi de probabilités discrètes

1) Lois de probabilités discrètes

Définition :
{ e_1 , e_2 ,..., e_k ,... e_m } est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
A chaque issue, on associe un nombre et on note F={ x_1 , x_2 ,..., x_n } (avec $n\leqslant m$) l'ensemble de ces nombres.
Définir une **loi de probabilité discrète** sur l'ensemble F, c'est associer à chaque valeur x_i le nombre p_i , où p_i est la somme des probabilités des issues auxquelles x_i est associé.

valeur	x_1	…	x_i	…	x_n
probabilité	p_1	…	p_i	…	p_n

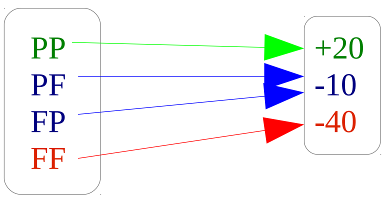
$$\sum_{i=1}^{n} p_i=1$$

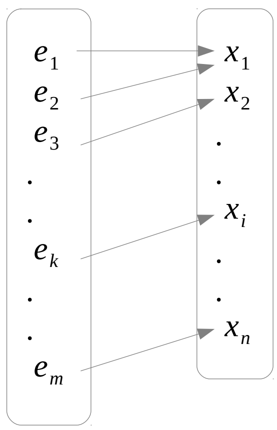
Exemple :
On lance une pièce de monnaie bien équilibrée deux fois de suite.
Les issues de cette expérience aléatoire sont notées PP, PF, FP, FF.
A chaque sortie de « Pile », on gagne 10 € et à chaque sortie de « Face », on perd 20 €.
La probabilité de perdre 10 € est la somme des probabilités des deux issues FP et PF, auxquelles on a associé la valeur -10.

Cette probabilité est donc $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

La loi de probabilité du gain lors de ce jeu est donné par le tableau ci-contre.

gain	+20	-10	-40
probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$





2) *Espérance et variance d'une loi*

Loi faible des grands nombres

Soit F l'ensemble des n résultats provenant d'une expérience aléatoire :

$$F=\{ x_1 ,\ x_2 ,...,\ x_n \}$$

Lorsqu'on répète l'épreuve un grand nombre de fois :

- La distribution de fréquences observées :

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
f_1	f_2	f_3	$\dots$	f_n

tend vers

- La distribution de fréquences théoriques appelée loi de probabilité :

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

- La moyenne des valeurs observées → L'espérance
- La variance de la série → La variance

Espérance et variance

Définitions :

- L'**espérance** de la loi de probabilité est la moyenne :

$$\mu=p_1 x_1+p_2 x_2+\dots+p_n x_n=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

- La **variance** de la loi de probabilité est le nombre :

$$V=p_1(x_1-\mu)^2+p_2(x_2-\mu)^2+p_3(x_3-\mu)^2+\dots+p_n(x_n-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\mu)^2$$

- L'**écart type** de cette loi, noté σ, est la racine carrée de la variance : $\sigma=\sqrt{V}$

Remarques :

- L'espérance est la valeur qu'on peut « espérer » obtenir en moyenne quand on répète un grand nombre de fois l'épreuve.
- Comme en statistique, la variance caractérise la dispersion des valeurs autour de l'espérance.

Propriété (admise) :

La variance est également donnée par la formule :

$$V=\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\right)-\mu^2$$

Exemple :

En reprenant le jeu de l'exemple précédent :

$$\mu=(-40)\times 0{,}25+(-10)\times 0{,}5+20\times 0{,}25=-10\ €$$

$$V=(-40)^2\times 0{,}25+(-10)^2\times 0{,}5+20^2\times 0{,}25-(-10)^2=450\ €^2 \quad \text{et} \quad \sigma=\sqrt{450}\ €$$

Interprétation :

- L'espérance donne le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu, soit ici une perte de 10 €.
  On dit qu'un jeu est équitable lorsque son espérance est nulle. Ici le jeu est défavorable au joueur car l'espérance est négative.
- La variance mesure le « risque » de s'écarter de l'espérance.
  On peut surtout l'utiliser pour comparer deux jeux de même espérance.

II. Lois binomiales

1) Lois de Bernoulli

Définition :
Lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux issues appelées **succès** et **échec**, on la nomme **épreuve de Bernoulli**.
On note p la probabilité du succès et $q=1-p$ la probabilité de l'échec.

Remarques :
- La notion de succès n'a aucun caractère de jugement : le succès peut être un événement désagréable et l'échec un événement heureux.
- On note le succès 1 et l'échec 0.

Définition :
Définir une **loi de Bernoulli** de **paramètre *p***, c'est associer à l'expérience aléatoire une loi de probabilité discrète définie par :

x_i	1	0
p_i	p	$1-p$

Exemple :
Un feu tricolore installé dans un carrefour est programmé de la façon suivante :
à chaque cycle, le feu reste au vert 25 secondes, 5secondes à l'orange et 30 secondes au rouge.
Un automobiliste se présente à un moment aléatoire.
On peut considérer une expérience de Bernoulli dont le « succès » est l'événement S : « le feu est vert ».

La probabilité de succès est $p=p(S)=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$.

La loi de Bernoulli associée a pour paramètre $\frac{5}{12}$.

x_i	1	0
p_i	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$

Remarque :
Le succès étant 1 et l'échec 0, l'espérance de la loi de Bernoulli est p et l'écart type : $\sigma=\sqrt{pq}$

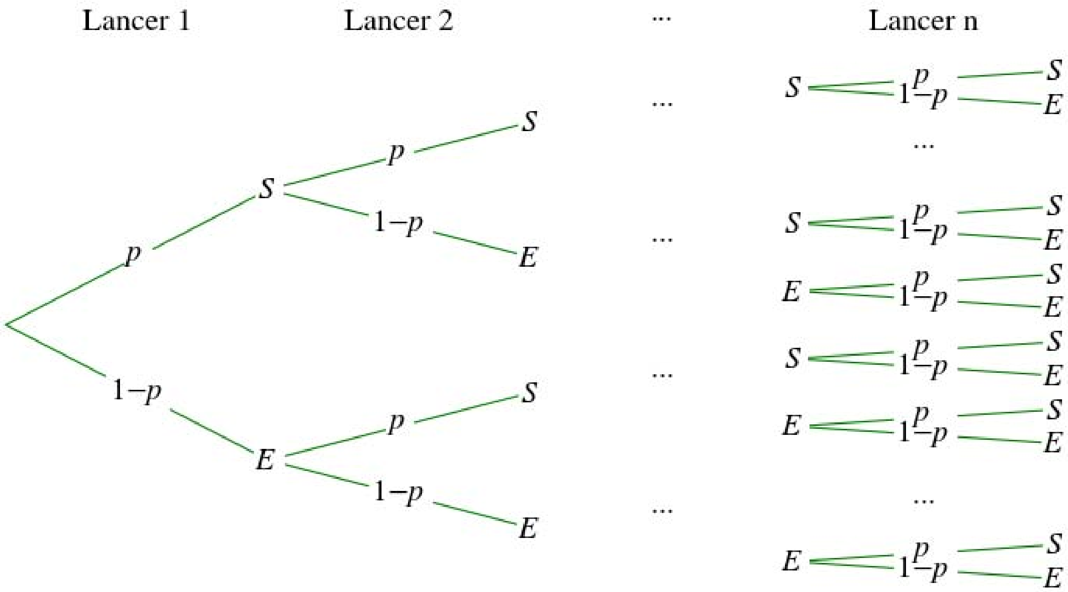
2) Loi Binomiale

Schéma de Bernoulli

Définition :
On parle de **schéma de Bernoulli** lorsqu'on répète n épreuves de Bernoulli de paramètre p, **identiques et indépendantes**.
A chaque issue, on associe le nombre k de succès avec $0\leqslant k\leqslant n$.
La loi de probabilité du nombre de succès est **la loi binomiale de paramètres *n* et *p***.
Cette loi est notée $\mathscr{B}(n\,;p)$.

Remarque :
La probabilité d'obtenir une liste ordonnée de *k* succès et $n-k$ échecs à la fin des *n* épreuves peut se calculer en appliquant le principe multiplicatif.
La probabilité d'obtenir la liste $(\underbrace{S, S, S, \ldots, S}_{\text{k succès}}, \underbrace{E, E, \ldots, E}_{\text{n-k échecs}})$ est $p^k \times q^{n-k}$.

Pour obtenir la loi de probabilité du nombre de succès, on dresse un arbre de choix et on compte le nombre de listes contenant *k* succès.



Cas particuliers :

- L'évènement « obtenir 0 succès » est réalisé par l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des échecs, c'est-à-dire le dernier chemin de l'arbre qui est constitué de *n* branches qui ont toutes la probabilité $1-p$.
  Donc la probabilité d'obtenir *n* échecs consécutifs est $q^n=(1-p)^n$.
- De même, la probabilité d'obtenir *n* succès est : p^n.
- L'événement « obtenir un succès » est réalisé sur les chemins de l'arbre qui comportent exactement un succès et $n-1$ échecs. La probabilité de chacun de ces chemins est : $p(1-p)^{n-1}$.
  Il reste à déterminer combien de chemins de ce type figurent dans l'arbre pondéré. Il suffit de repérer à quel niveau de l'arbre figure l'unique succès. Il y a donc *n* possibilités et ainsi *n* chemins qui réalisent l'événement « obtenir un succès ».
  Donc la probabilité d'obtenir un succès est : $np(1-p)^{n-1}$.
- De même l'événement « obtenir $n-1$ succès » est $np^{n-1}(1-p)$.

Coefficients de Bernoulli

Définition :

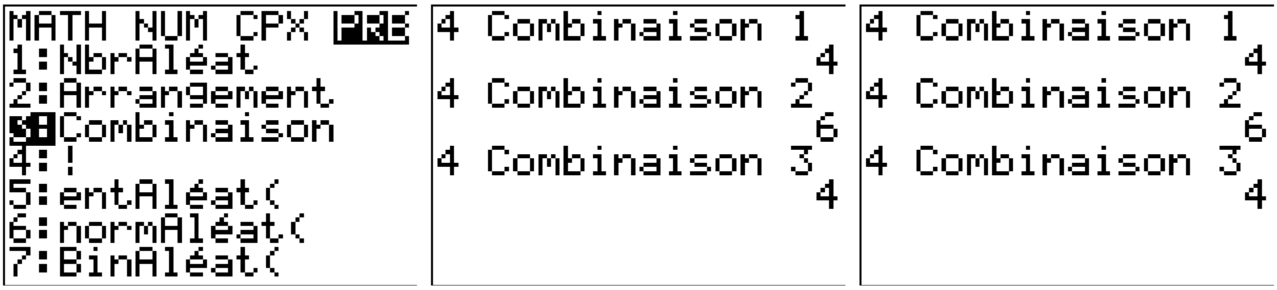
Si *n* est un entier naturel et *k* est un entier compris entre 0 et *n*, on note $\binom{n}{k}$ et on lit « *k* parmi *n* » le nombre de chemins qui réalisent exactement *k* succès dans l'arbre à *n* niveaux, associé à un schéma de Bernoulli.
Ces nombres sont appelés **coefficients binomiaux**.

Remarque :

Ces nombres $\binom{n}{k}$ sont par construction des entiers et on a vu que :

- quel que soit *n*, entier naturel : $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{n}=1$.
- quel que soit *n*, entier naturel non nul : $\binom{n}{1}=n$ et $\binom{n}{n-1}=n$.
- $\binom{4}{1}=4$ et $\binom{4}{2}=6$ et $\binom{5}{2}=10$

Calculatrice :



Loi de probabilité

La loi binomiale est donc définie par :

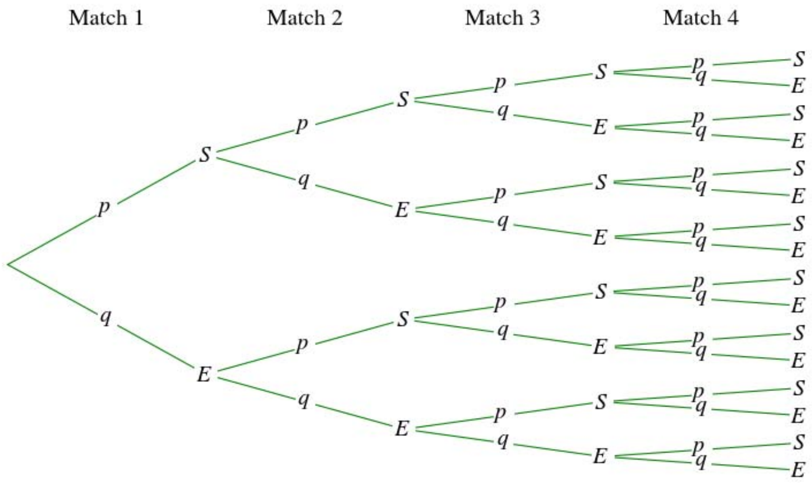
Nombre de succès	0	1	2	…	k	…	n
Probabilité p_i	q^n	np^1q^{n-1}	$\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$		$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$		p^n

Propriété (admise) :
L'espérance de la loi binomiale de paramètre *n* et *p* : $\mathcal{B}(n\,;p)$ est égale à *np*.

Remarque :
On pourra noter que l'écart type de la loi binomiale de paramètre *n* et *p* : $\mathcal{B}(n\,;p)$ est égale à $\sqrt{npq}$.

Exemple :
Aziz et Benoît pratiquent le tennis.
Ils décident de jouer 4 matchs dans l'année. La probabilité que Benoît gagne un match est 0,4.
Les résultats des matchs sont indépendants les uns des autres.
À la fin de chaque match, le perdant verse 10 € dans une cagnotte avec laquelle ils s'offriront un repas à la fin de la saison.
On s'intéresse à la loi de probabilité associée à la dépense de Benoît.

Chaque match est une épreuve de Bernoulli de succès l'événement S : « Benoît gagne le match », de probabilité $p=0,4$.
A chaque match, la probabilité du succès ne change pas et ne dépend pas du match précédent.
On a donc une répétition de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p=0,4$.



L'événement A : « Benoît gagne exactement une fois » est formé des listes $(S;E;E;E)$; $(E;S;E;E)$; $(E;E;S;E)$; $(E;E;E;S)$.
Chaque liste a pour probabilité $p\times q^3$, donc $p(A)=4\times0,4\times0,6^3=0,3456$.

Le nombre de victoire de Benoît (et donc la dépense de Benoît) suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}$(4 ;0,4).

La loi de probabilité de la loi binomiale $\mathscr{B}$(4 ;0,4) est :

Nombre de succès k	0	1	2	3	4
Probabilité p_i	q^4	$4\times q^3\times p$	$6\times p^2\times q^2$	$4\times q\times p^3$	p^4

Donc, la loi de probabilité associée à la dépense de Benoît est alors :

d_i en €	40	30	20	10	0
p_i à 10^{-4}	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

L'espérance de Benoît est :
$\mu=0,0256\times40+0,1536\times30+0,3456\times20+0,3456\times10=16$
L'espérance de dépense pour Benoît, à la fin de l'année, est de 16 €.