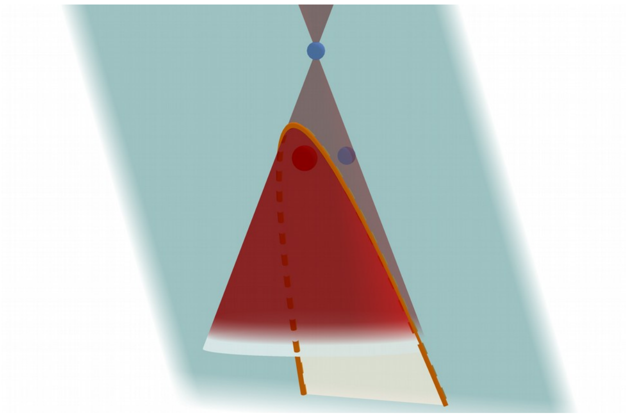
Chapitre 8

Fonctions de référence

I. Fonction carré



1) Définition

Définition :
La **fonction carré** est la fonction *f* définie sur ℝ qui, à chaque réel *x*, associe son carré x^2.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

Exemples :
- L'image de -1 et de 1 par *f* est 1.
- L'image de $\sqrt{3}$ et de -$\sqrt{3}$ par *f* est 3.
- 16 a deux antécédents par *f* qui sont 4 et -4.
- -7 n'admet aucun antécédent par *f*.

2) Variations

Théorème :
La fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur ℝ est :
- strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$
- strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Démonstration :
- Démontrons que *f* est strictement croissante sur $I=[0;+\infty[$.
  Il suffit donc de démontrer que si *u* et *v* sont deux nombres de *I* tels que $u<v$, alors $f(u)<f(v)$.
  Or $f(u)-f(v)=u^2-v^2=(u-v)(u+v)$.
  Par hypothèse, *u* et *v* sont deux nombres de *I* tels que $u<v$. Donc $0\leqslant u<v$.
  Ainsi $u<v$ d'où $u-v<0$ et, puisque $u\geqslant 0$ et $v>0$, $u+v>0$.
  Donc d'après la règle des signes $(u-v)(u+v)<0$ donc $f(u)-f(v)<0$ et $f(u)<f(v)$.

- Pour démontrer que *f* est strictement décroissante sur $J=]-\infty;0]$, il suffit de démontrer que si *u* et *v* sont des nombres de *J* tels que $u<v$, alors $f(u)>f(v)$.
  Ici les hypothèses s'écrivent $u<v\leqslant 0$. Et on obtient $u-v<0$ et $u+v<0$ donc $(u-v)(u+v)>0$ c'est-à-dire $f(u)>f(v)$.

Remarques :

- La fonction carré admet un **minimum** en 0, de valeur 0.
  Pour tout nombre réel *x*, $x^2\geqslant 0$.
- Tableau de variations

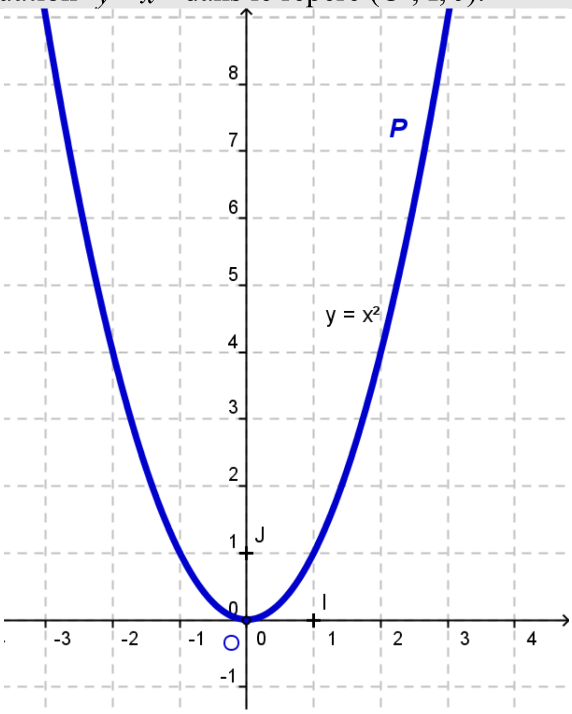
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exemples :

- $4{,}2<7{,}9$ donc, puisque la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a l'inégalité : $4{,}2^2<7{,}9^2$
- -8<-3,2 donc, puisque la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, on a l'inégalité : $(-8)^2>(-3{,}2)^2$

3) *Représentation graphique*

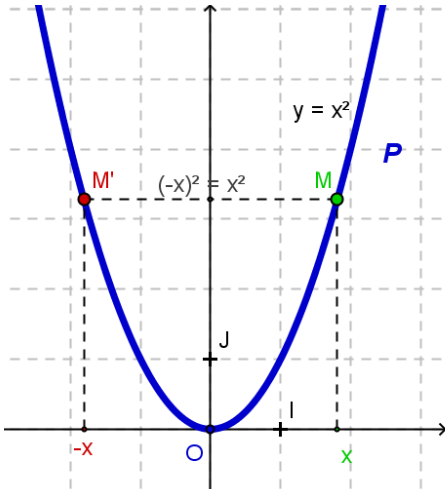
Définition :
La courbe représentative de la fonction carré dans un repère orthogonal (O ; I, J) est appelé **parabole**.
Cette parabole $\mathscr{P}$, a pour équation $y=x^2$ dans le repère (O ; I, J).



Remarque :

- L'origine O du repère est appelé **sommet** de la parabole.
- $M(x;y)$ appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $y=x^2$

Propriété :
La courbe représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
L'axe des ordonnées est **axe de symétrie** de la parabole.

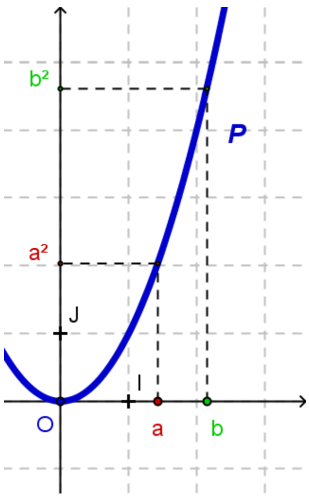


Démonstration :

Pour tout nombre réel x, $(-x)^2=x^2$, donc $f(-x)=f(x)$.
Ainsi les points $M(x\,;f(x))$ et $M'((-x);f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

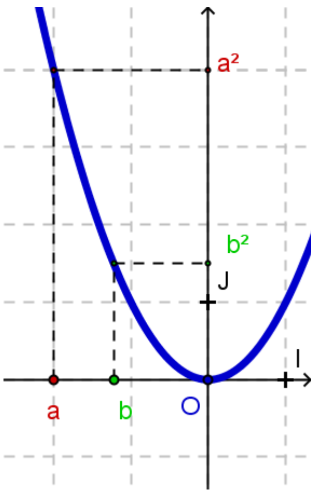
Remarques :

Pour tous nombres a et b positifs :
$a<b$ équivaut à $a^2<b^2$



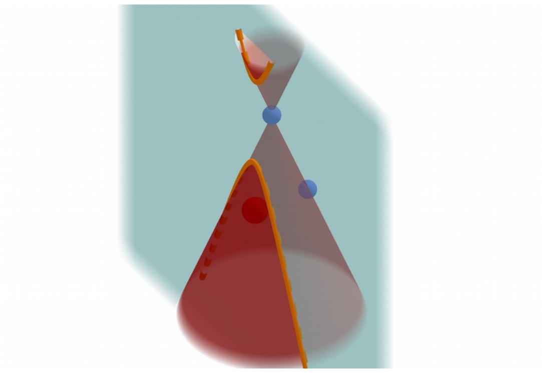
Deux nombres **positifs** sont rangés dans le **même ordre** que leurs carrés.

Pour tous nombres a et b négatifs :
$a<b$ équivaut à $a^2>b^2$



Deux nombres **négatifs** sont rangés dans l'**ordre inverse** de leurs carrés.

II. Fonction inverse



1) Définition

Définition :
La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ qui à chaque réel non nul x, associe son inverse $\frac{1}{x}$.

$$f:]-\infty;0[\cup]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Exemples :
- L'image de 1 par f est 1.
- L'image de 3 par f est $\frac{1}{3}$.
- 7 a un antécédent par f qui est $\frac{1}{7}$.
- 0 n'admet pas d'antécédent par f.

Remarque :
La fonction inverse n'est pas définie en 0.

2) Variations

Théorème :
La fonction $f: x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est :
- strictement **décroissante** sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- strictement **décroissante** sur l'intervalle $]-\infty;0[$

Démonstration :
- Démontrons que f est strictement décroissante sur $I =]0;+\infty[$.
  Il suffit donc de démontrer que si u et v sont deux nombres de I tels que $u<v$, alors $f(u)>f(v)$.
  Or $f(u)-f(v)=\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=\frac{v}{uv}-\frac{u}{uv}=\frac{v-u}{uv}$.
  Par hypothèse, u et v sont deux nombres de I tels que $u<v$. Donc $0<u<v$.
  Ainsi $u<v$ d'où $v-u>0$ et, puisque $u>0$ et $v>0$, $uv>0$.
  Donc d'après la règle des signes $\frac{v-u}{uv}>0$ donc $f(u)-f(v)>0$ et $f(u)>f(v)$.

- Pour démontrer que *f* est strictement décroissante sur $J =]-\infty ; 0[$, il suffit de démontrer que si *u* et *v* sont des nombres de *J* tels que $u < v$, alors $f(u) > f(v)$.

  Ici les hypothèses s'écrivent $u < v < 0$. Et on obtient $v - u > 0$ et $uv > 0$ donc $\frac{v-u}{uv} > 0$ c'est-à-dire $f(u) > f(v)$.

Remarque :

On a donc le tableau de variations suivant :

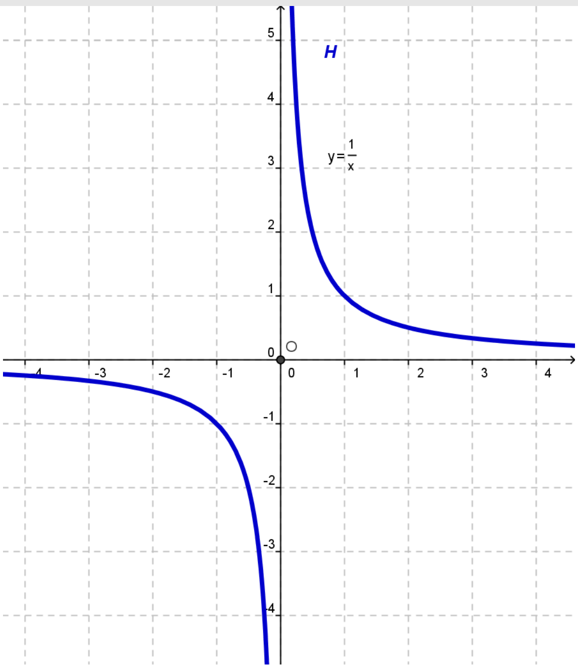
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow 0$

Exemples :

- $0{,}8 < 3{,}5$, donc puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on a l'inégalité : $\frac{1}{0{,}8} > \frac{1}{3{,}5}$.
- $-9 < -1{,}5$, donc puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$, on a l'inégalité : $\frac{1}{-9} > \frac{1}{-1{,}5}$.

3) Représentation graphique

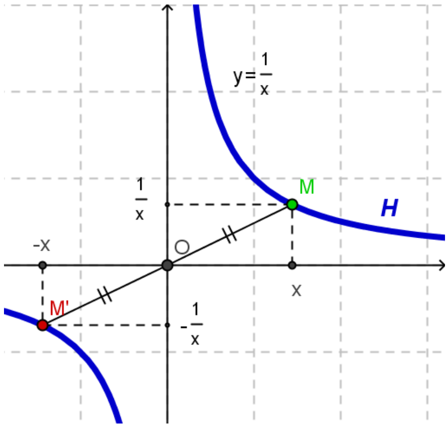
Définition :
La courbe représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormal (O ; I, J) est appelé **hyperbole**.
Cette hyperbole $\mathscr{H}$, a pour équation $y = \frac{1}{x}$ dans le repère (O ; I, J).



Remarque :

$M(x ; y)$ appartient à $\mathscr{H}$ si et seulement si $y = \frac{1}{x}$

Propriété :
La courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine O du repère.
L'origine du repère est **centre de symétrie** de l'hyperbole.

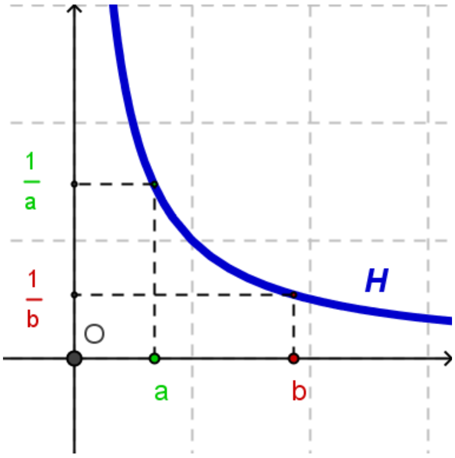


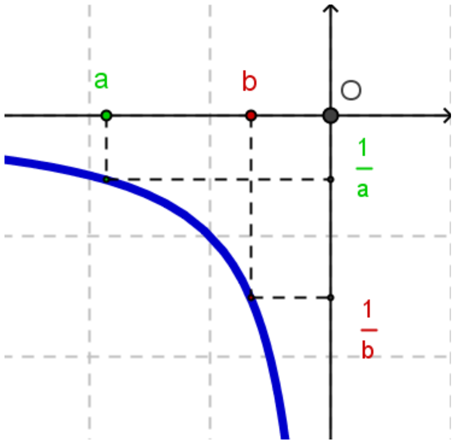
Démonstration :

Pour tout nombre réel non nul x, , donc $f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x}=-f(x)$ donc $f(-x)=-f(x)$.
Ainsi les points $M(x\,;f(x))$ et $M'((-x);f(-x))$ sont symétriques par rapport à O.

Remarques :

Pour tous nombres a et b non nuls de même signe $a<b$ équivaut à $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$





Deux nombres non nuls de **même signe** sont rangés dans l'**ordre contraire** de leurs inverses.