Chapitre 1

Raisonnement par récurrence

I. Généralités sur les suites

1) Définition d'une suite

Définition :
Une suite u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **fonction** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $n \longmapsto u(n)$.
Le nombre $u(n)$ est alors noté u_n.

Remarques :

- Définir une suite (u_n) par une **formule explicite**, c'est connaître une relation entre le terme u_n et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  On peut alors calculer immédiatement chaque terme de la suite en fonction de son rang.
- Définir une suite (u_n) par une **relation de récurrence**, c'est connaître une relation entre chaque terme u_n et le (ou les) précédent(s) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
  Il faut alors connaître le(s) premier(s) terme(s) de la suite pour calculer de proche en proche chaque terme de la suite.

Exemples :

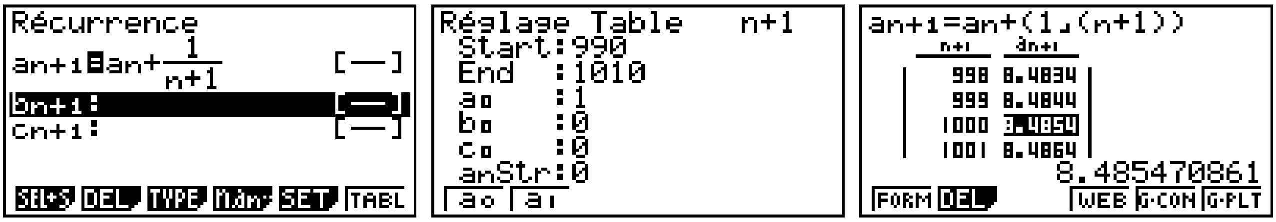
- La suite (u_n), définie par $u_n=(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est définie de manière explicite.
- La suite (v_n), définie par $v_n=n^2+3n-5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est aussi définie de manière explicite.
  On peut calculer, par exemple, v_{20} de manière immédiate par :
  $$v_{20}=20^2+3\times 20-5$$
  donc $v_{20}=455$.
- La suite (w_n), telle que $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = 5w_n + 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est définie par récurrence.
  Le calcul d'un terme de cette suite exige a *priori* de connaître les termes qui le précédent.
- La suite (F_n), telle que $\begin{cases} F_0 = 1 \text{ et } F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est définie par récurrence.

Remarque :
Connaître la suite de manière explicite permet de trouver un terme précis ou d'étudier le comportement de la suite pour de grandes valeurs de rang.
La relation de récurrence permet, par exemple, de connaître les variations d'une suite.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}$.

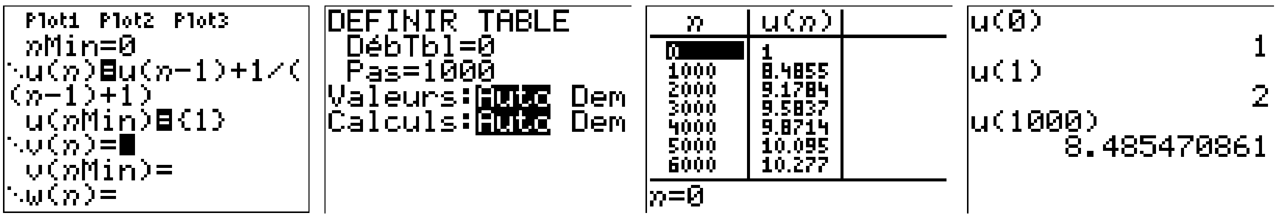
Donner la valeur de u_{1000} à 10^{-4} près.



Pour l'utilisation de logiciel ou pour la programmation, il est parfois plus simple d'exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.

En effet, pour calculer u_1 avec $u_{n+1}=f(u_n)$ il faut utiliser $n=0$ alors que pour calculer u_1 avec $u_n=f(u_{n-1})$ on utilise $n=1$.

Ici, on a donc, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases}$



Tableur :

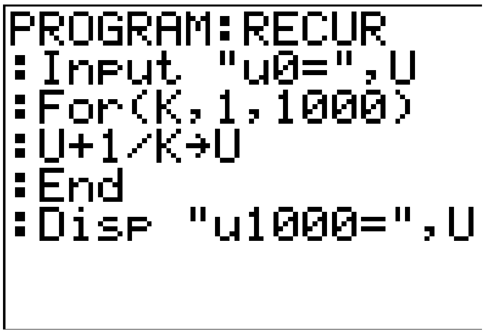
B3 =B2+1/(A3)

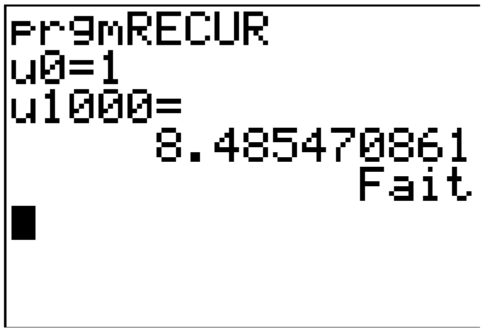
	A	B	C
1	n	u(n)	
2	0	1	
3	1	2	
4	2	2,5	
5	3	2,833333333	
999	997	8,482467856	
1000	998	8,48346986	
1001	999	8,484470861	
1002	1000	8,485470861	
1003			

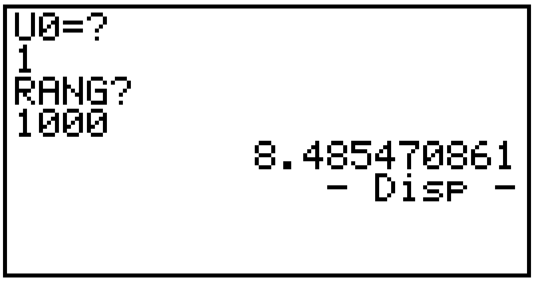
Algorithme :

$u \leftarrow 1$
Pour k allant de 1 jusqu'à 1000
$$u \leftarrow u + \frac{1}{k}$$
Fin Pour

- **Calculatrice**







- **Python**

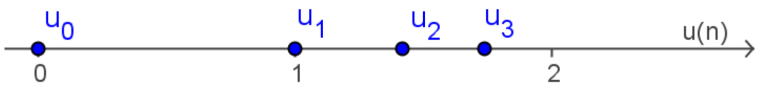
```
u = 1
for i in range(1,1001):
    u = u + 1/i
print("Le terme de rang", i, "vaut", u)
```

```
Le terme de rang 1000 vaut 8.485470860550365
>>>
```

2) Représentation graphique

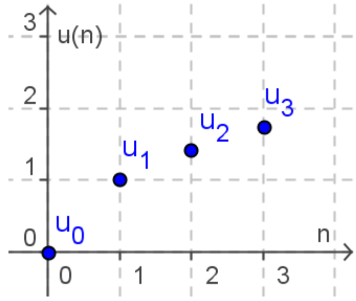
Représentons graphiquement la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ pour $n \geqslant 0$.

- Sur la droite numérique :
  on place les réels u_n pour les premières valeurs de *n*.



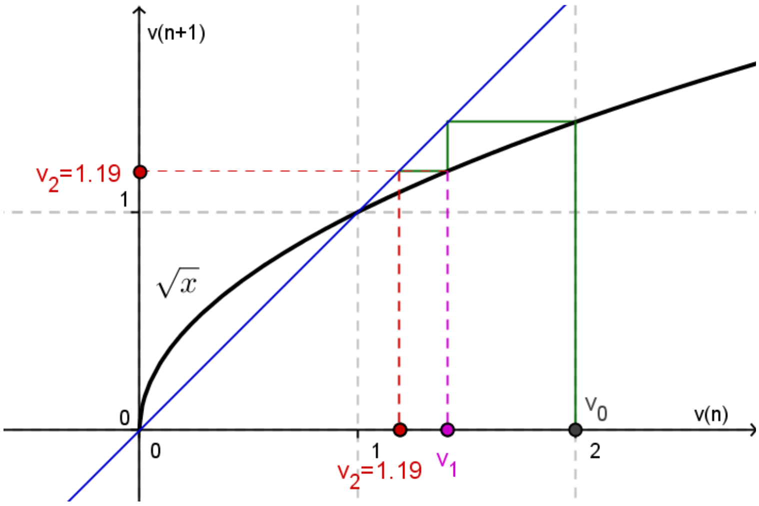
- Dans le plan :

  on place les points de coordonnées $(n; u_n)$ pour les premières valeurs de *n*.



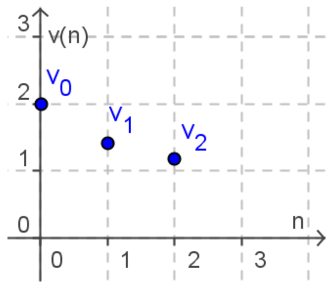
Représentons graphiquement la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n} \end{cases}$ pour $n \geqslant 0$.

- Sur la droite numérique :
  on place les réels v_n pour les premières valeurs de *n*.

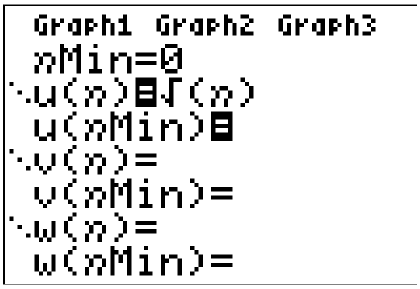


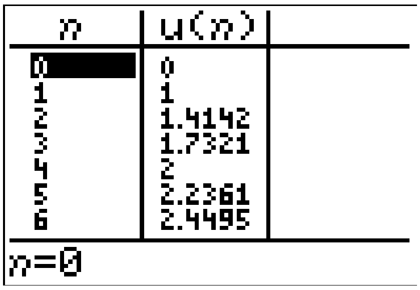
- Dans le plan :

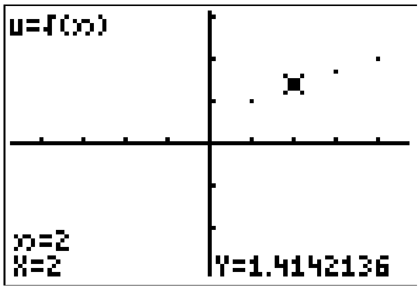
  on place les points de coordonnées $(n; v_n)$ pour les premières valeurs de *n*.

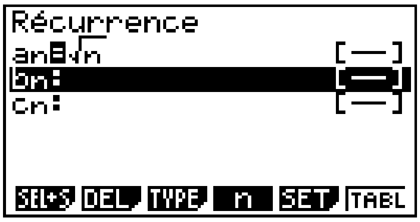


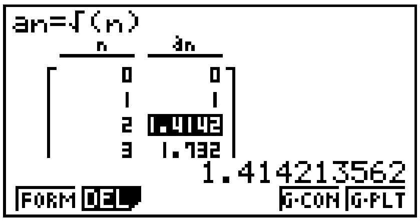
Calculatrice :

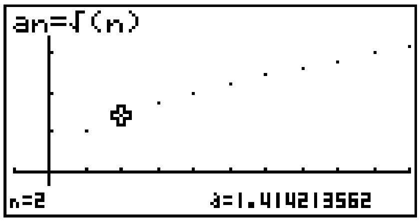


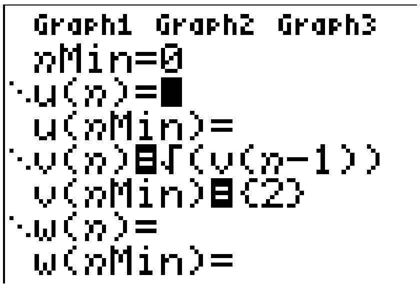


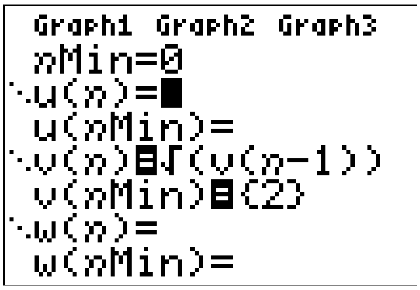


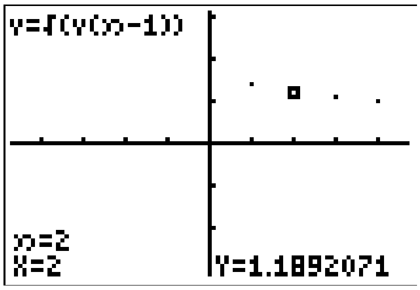


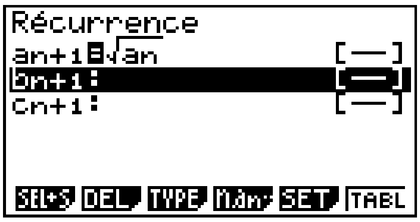


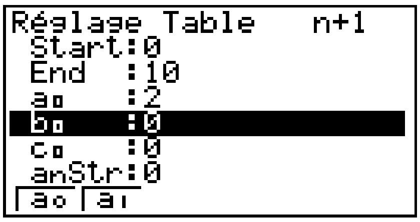


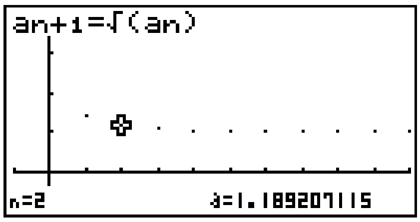












3) *Suites arithmétiques et géométriques*

Suite arithmétique

Définition :
Une suite numérique (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre *r*, appelé **raison** de la suite, tel que pour tout nombre entier naturel *n*, on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :

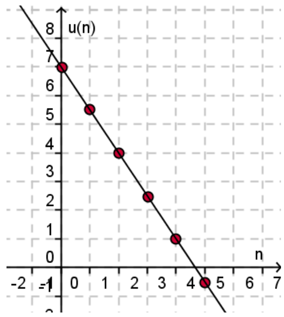
La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison -5.

Propriété :
Une suite arithmétique de raison *r* est croissante si $r \geqslant 0$, décroissante si $r \leqslant 0$.

Remarques :

- Pour *n* et *p* deux entiers naturels, on peut toujours déterminer l'un des termes u_n ou u_p en fonction de l'autre par la relation :
$$u_n = u_p + (n - p) r$$
En particulier, $u_n = u_0 + nr$.
- Les points de coordonnées $(n ; u_n)$ dans un repère du plan sont alignés sur une droite de coefficient directeur *r*.

Exemple :
La suite arithmétique (u_n) , de premier terme $u_0 = 7$ et de raison -1,5, a pour représentation graphique des points situés sur la droite d'équation $y = -1{,}5x + 7$.



Suite géométrique

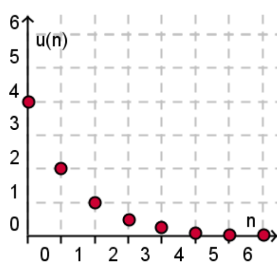
Définition :
Une suite numérique (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel *q* ($q \neq 0$), appelé **raison** de la suite, tel que, pour tout nombre entier naturel *n*, on ait :
$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple :
La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 3.

Propriété :
La suite géométrique (q^n) est croissante si $q > 1$ et décroissante si $0 < q < 1$.
La suite (q^n) n'est pas monotone si $q < 0$.

Remarque :
Pour *n* et *p* deux entiers naturels, on peut toujours déterminer l'un des termes u_n ou u_p en fonction de l'autre par la relation :
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$
En particulier : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple :
La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$ admet la représentation graphique ci-contre.



Calcul de sommes

- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

II. Raisonnement par récurrence

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 4^n - 1$.
On a donc :

$$u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 3 \ ; \ u_2 = 15 \ ; \ u_3 = 63 \ ; \ u_4 = 255 \ ; \ u_5 = 1023 \ \ldots$$

On remarque que tous ces nombres sont des multiples de 3.
On peut **conjecturer** que :

« pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3 »

La démonstration de ce résultat repose sur un type de raisonnement appelé « raisonnement par récurrence ».

Le principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Définition :
On dit que la propriété $\mathcal{P}$ est **héréditaire** à partir du rang n_0 lorsque :
si pour un entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Axiome de récurrence :
Si la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (**initialisation**) et si $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang n_0 , alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque :
Un axiome est une propriété admise, qui sert de base à la construction d'une théorie.

Exemple :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $4^n - 1$ est multiple de 3 ».
Démontrons, par récurrence, que la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :**
  $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \times 0$. Donc $4^0 - 1$ est bien multiple de 3.
  Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé, tel que $4^n - 1 = 3 \times k$, avec k entier. (il s'agit de l'*hypothèse de récurrence*)
  Pour cet entier n quelconque et fixé, on remarque que :
  $$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = (3+1) \times 4^n - 1 = 3 \times 4^n + (4^n - 1) .$$
  Or d'après l'hypothèse de récurrence : $4^n - 1 = 3 \times k$. On en déduit donc que :
  $$4^{n+1} - 1 = 3 \times 4^n + 3 \times k = 3 \times (4^n + k) = 3 \times k'$$, avec k' entier.
  Donc $4^{n+1} - 1$ est multiple de 3.
  On a montré que, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
- **Conclusion :**
  Pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est multiple de 3.

La propriété $\mathscr{P}(n)$ peut alors être considérée comme vraie pour tout entier naturel n.

Remarques :
Il est important de respecter les étapes de la démonstration.

- La phase d'initialisation est indispensable.
  Par exemple, la proposition : « 2^n est un multiple de 3 » est héréditaire pourtant elle est fausse.
- La conclusion termine le raisonnement en combinant les étapes d'initialisation et d'hérédité.
  La propriété est vraie au rang n_0 (initialisation) et elle est héréditaire à partir du rang n_0 donc la propriété est vraie au rang $n_0 + 1$.
  La propriété est vraie au rang $n_0 + 1$ et elle est héréditaire à partir du rang n_0 donc la propriété est vraie au rang $n_0 + 2$.
  En procédant ainsi, pas à pas, on peut conclure que la propriété est vraie pour n'importe quel entier $n \geqslant n_0$.

Annexe : Méthode de descente infinie

La méthode de **descente infinie** est un argument mathématique voisin de la **démonstration par récurrence**, mais aussi de la **démonstration par l'absurde**, qui utilise le fait qu'une suite d'entiers naturels strictement décroissante est nécessairement finie.
Cette méthode repose sur l'une des propriétés des entiers naturels : « tout ensemble non vide d'entiers naturels possède un plus petit élément. »

Principe

Soit $\mathrm{P}(n)$ une propriété faisant intervenir un entier naturel *n*.
On cherche à démontrer que $\mathrm{P}(n)$ est fausse pour tout *n*.

- Pour cela on suppose que pour un entier *a* quelconque, $\mathrm{P}(a)$ est vraie.
- Par un argument mathématique à préciser dans chaque cas, on montre que si $\mathrm{P}(n)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(m)$ est également vraie pour un entier *m* strictement inférieur à *n*.
- On peut alors conclure que $\mathrm{P}(n)$ n'est jamais vraie car la suite des entiers naturels vérifiant la propriété $\mathrm{P}(n)$ ne peut jamais être strictement décroissante et infinie.

Cette méthode sert essentiellement à démontrer qu'il n'existe pas de nombre entier répondant à une certaine propriété, en construisant une nouvelle solution entière strictement plus petite que la précédente (en un sens à préciser dans chaque cas). Si une supposition induit la possibilité de l'existence d'une suite infinie et strictement décroissante d'entiers naturels alors cette supposition est fausse : en effet on construirait ainsi un entier qui serait plus petit que le plus petit des entiers répondant au problème posé.

Exemple :

Pour montrer qu'il n'existe pas d'entiers naturels non nuls *x* et *y* tels que : $x^2=2y^2$ (1)

- on suppose qu'il existe de tels entiers. Alors *x* serait pair et s'écrirait $2x_1$.
- L'égalité (1) s'écrirait $4x_1^2=2y^2$, puis $2x_1^2=y^2$.
  On aurait alors *y* pair. Il s'écrirait $2y_1$. Les entiers x_1 et y_1 vérifieraient de nouveau $x_1^2=2y_1^2$. Et, comme par hypothèse, *x* et *y* sont non nuls, on aurait $0<x_1<x$ et $0<y_1<y$.
  Ainsi de suite, on pourrait créer une suite infinie et strictement décroissante d'entiers naturels vérifiant (1).
- C'est absurde ; donc il n'existe pas d'entiers naturels non nuls *x* et *y* tels que $x^2=2y^2$.