Chapitre 14

Inéquations

I. Signe d'un produit, d'un quotient

1) Signe d'un produit

Propriété :
Le produit de deux nombres non nuls est strictement positif si, et seulement si, ces deux nombres sont de même signe ; sinon, il est strictement négatif.

Tableau de signes d'un produit

- On étudie le signe de chaque facteur.
- On regroupe dans un seul tableau le signe de chaque facteur.
- Sur une dernière ligne, on déduit le signe du produit.

Exemple :
On veut connaître le signe de $f(x)=(2x-1)(-x+1)$ selon les valeurs de x.

- Signe de $2x-1$:
  $2x-1=0 \Leftrightarrow x=0{,}5$

$x \longmapsto 2x-1$ est une fonction affine strictement croissante car son coefficient directeur est 2 (et 2>0).

x	$-\infty$		0,5		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

- Signe de $-x+1$:
  $-x+1=0 \Leftrightarrow x=1$

$x \longmapsto -x+1$ est une fonction affine strictement décroissante car son coefficient directeur est -1 (et -1<0).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$	

On regroupe alors les tableaux :

x	$-\infty$		0,5		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)=(2x-1)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La dernière ligne du tableau donne le signe de $f(x)$:

- $f(x)$ est strictement positif pour $x \in]0{,}5;1[$.
- $f(x)$ strictement négatif pour $x \in]-\infty;0{,}5[\cup]1;+\infty[$.
- $f(x)$ s'annule pour $x=0{,}5$ et $x=1$.

2) Signe d’un quotient

Propriété :
Le quotient de deux nombres non nuls est strictement positif si, et seulement si, ces deux nombres sont de même signe ; sinon, il est strictement négatif.

Tableau de signes d’un quotient

- On cherche la ou les valeurs qui annulent le dénominateur (valeurs interdites).
- On étudie le signe du numérateur et du dénominateur.
- On regroupe dans un seul tableau le signe du numérateur et du dénominateur.
- Sur une dernière ligne, on déduit le signe du quotient.

Exemple :

On veut connaître le signe de $f(x)=\dfrac{2x-1}{-x+1}$.

$-x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.
Ainsi, 1 est la valeur interdite de $f(x)$, c’est-à-dire que l’ensemble de définition de *f* est $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

x	$-\infty$		$0{,}5$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)=\dfrac{2x-1}{-x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

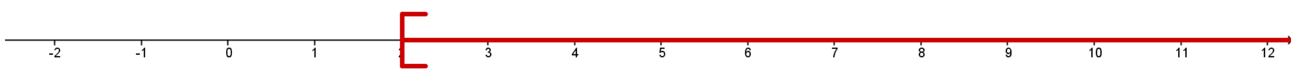
La dernière ligne du tableau donne le signe de $f(x)$:

- $f(x)$ est strictement positif pour $x \in]0{,}5;1[$.
- $f(x)$ est strictement négatif pour $x \in]-\infty;0{,}5[\cup]1;+\infty[$.
- $f(x)$ s’annule pour $x=0{,}5$.

II. Résolution d’inéquations

Définition :
Résoudre une inéquation, c’est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l’inégalité soit vraie : ces valeurs sont les solutions de l’inéquation.

Exemple :
Résoudre l’inéquation $3x-6\geqslant 0$.
$3x-6\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 2$.
L’ensemble des solutions est : $[2;+\infty[$



1) *Méthode algébrique*

Si l'inéquation n'est pas du premier degré :

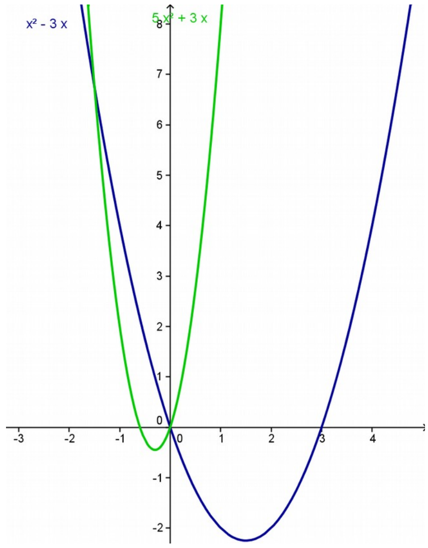
- On regroupe dans un même membre tous les termes.
- On réduit au même dénominateur et on factorise.
- On réalise un tableau de signe et on conclut

Exemples :

- Résoudre l'inéquation (I_1) : $x^2-3x\leqslant 5x^2+3x$

(I_1) $\Leftrightarrow$ $0\leqslant 4x^2+6x$

(I_1) $\Leftrightarrow$ $0\leqslant 2x(2x+3)$



On dresse le tableau de signes.

x	$-\infty$		-1,5		0		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x(2x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

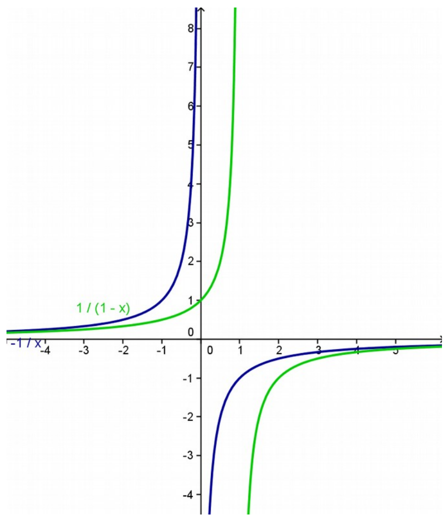
L'ensemble des solutions de (I_1) est : $]-\infty;-1{,}5]\cup[0;+\infty[$.

- Résoudre l'inéquation (I_2) : $\dfrac{1}{1-x}\geqslant -\dfrac{1}{x}$

(I_2) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x}\geqslant 0$.

(I_2) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x+(1-x)}{(1-x)x}\geqslant 0$.

(I_2) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{(1-x)x}\geqslant 0$.



On dresse le tableau de signes.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{1}{(1-x)x}$		$-$	||	$+$	||	$-$	

L'ensemble des solutions de (I_2) est : $]0;1[$

2) *Méthode utilisant les fonctions « de référence ».*

Pour des inéquations du type $f(x)<k$, où *f* est une fonction polynôme de degré deux ou une fonction homographique, on peut utiliser les variations des fonctions pour résoudre les inéquations.

- On dresse le tableau de variations ou on trace la courbe représentative de *f*.
- On résout $f(x)=k$.
- On conclut grâce aux variations.

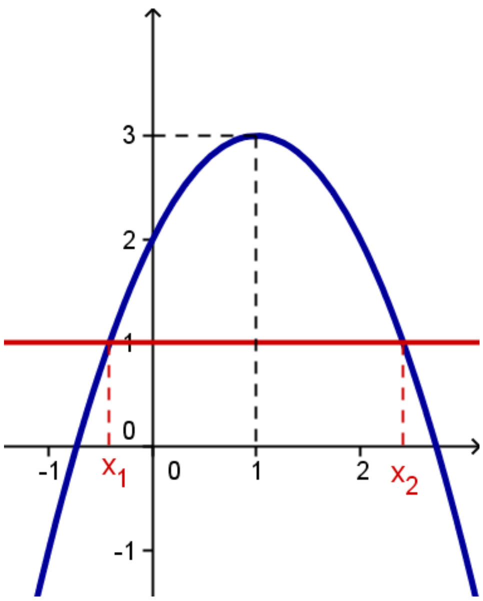
Exemple :

Soit $f(x)=-(x-1)^2+3$.

Résoudre l'inéquation $f(x)<1$.

- On a vu que *f* est strictement croissante, puis strictement décroissante.
  Son maximum est atteint lorsque $-(x-1)^2=0$, c'est-à-dire lorsque $x=1$. Il est égal à 3.
- $f(x)=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=2$.
  $f(x)=1 \Leftrightarrow x-1=\sqrt{2}$ ou $x-1=-\sqrt{2}$
  $f(x)=1 \Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}$ ou $x=1-\sqrt{2}$
- On dresse le tableau de variations et on trace la représentation graphique de *f*.

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
f(x)	$-\infty$ ↗	1 ↗	3 ↘	1 ↘	$-\infty$



En utilisant le tableau de variations ou la courbe, on peut affirmer que l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $]-\infty;1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2};+\infty[$.