

Chapitre 6

Dérivation

I. Nombre dérivé d'une fonction f en un nombre réel a

1) Limite en zéro d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant 0 ou bien sur un intervalle de borne 0 (de la forme $]a; 0[$ ou $]0; a[$).

Étudier la limite de f lorsque x tend vers 0, consiste à étudier les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

Définition :

On dit que $f(x)$ admet pour **limite** le réel α lorsque x tend vers 0 si les nombres $f(x)$ peuvent être aussi proches de α que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0.

On écrit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha$, ce qui se lit : « La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à α . »

Exemples :

- Soit la fonction f définie sur $[-1; 0[\cup]0; 1]$ par $f(x) = x^2 + 3x + 3$.

Étudions ce que deviennent les valeurs de $f(x)$ lorsque la variable x tend vers zéro, x prend par exemple successivement les valeurs -0,1 ; -0,01 ; -0,001 ; ... et les valeurs 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ...

x	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1
$f(x) = x^2 + 3x + 3$	2,71	2,9701	2,997001	...	3,003001	3,0301	3,31

On constate que les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 3 lorsque la variable x tend vers zéro.

D'où $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3x + 3 = 3$.

Dans cet exemple, la limite de $f(x)$ lorsque x se tend vers 0 est égale à un nombre réel.

- Soit la fonction f définie sur $[-1; 0[\cup]0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

x	-0,1	-0,01	...	0,01	0,1
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	100	10000	...	10000	100

Dans ce cas, on écrit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Dans cet exemple, les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes et ne sont pas bornées lorsque x tend vers 0.

- Soit la fonction f définie sur $[-1; 0[\cup]0; 1]$ par $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

x	-0,1	-0,01	...	0,01	0,1
$f(x) = \frac{ x }{x}$	-1	-1	...	1	1

Dans ce cas on dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 n'existe pas.

Dans cet exemple, les valeurs de $f(x)$ ne se rapproche pas d'un unique réel lorsque x tend vers 0.

2) Taux de variation

Définition :

Soit I un intervalle contenant un nombre réel a et f une fonction définie sur I .

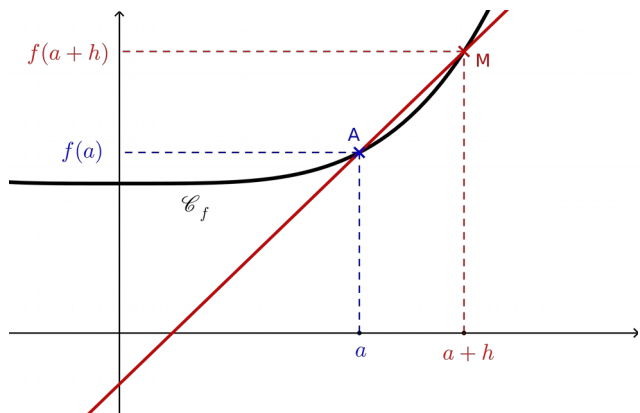
Le nombre $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est appelé **taux de variation** de f entre a et $a+h$.

Remarque :

$A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$ appartiennent à \mathcal{C}_f .

Le coefficient directeur de la droite (AM) est donc $\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}$, soit $\tau(h)$.

Le nombre $\tau(h)$ dépend de a .



3) Nombre dérivé

Définition :

Soit I un intervalle contenant un nombre réel a et f une fonction définie sur I .

On dit que la **fonction f est dérivable en a** si la limite du rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0, avec $a+h$ dans I , existe et est égale à un nombre réel ℓ .

Ce nombre ℓ est appelé **nombre dérivé de la fonction f en a** . On le note $f'(a)$.

On a donc :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

Exemple :

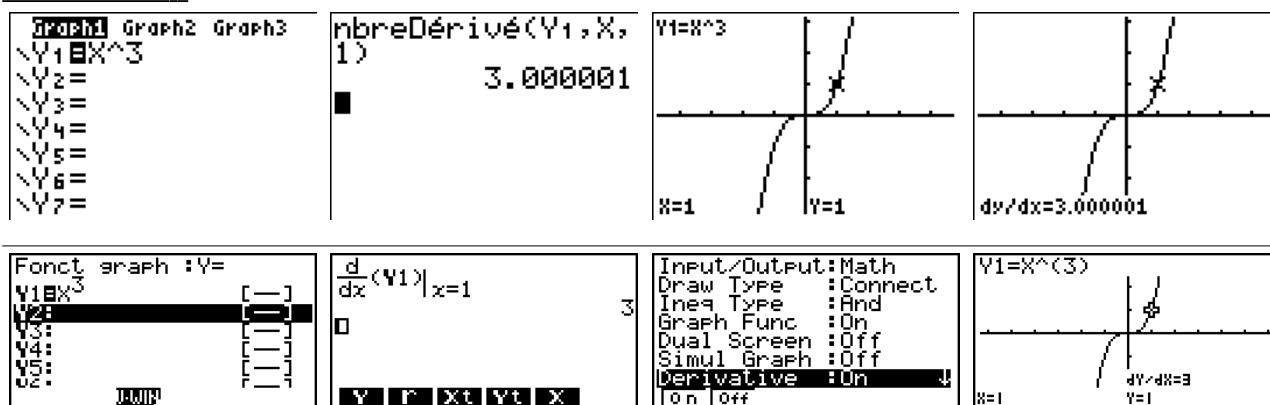
Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ et $a = 1$.

Pour $h \neq 0$, on a $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \frac{(1+3h+3h^2+h^3) - 1}{h} = 3 + 3h + h^2$.

On a vu que $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3h + 3 = 3$.

Donc la fonction f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 vaut 3. Donc $f'(1) = 3$.

Calculatrice :



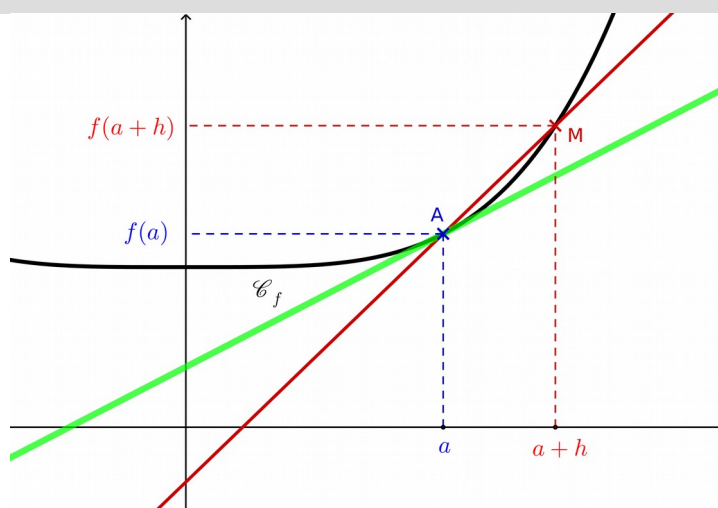
4) Interprétation graphique

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a , nombre réel appartenant à I , et de nombre dérivé ℓ en a .

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a et M le point de \mathcal{C}_f d'abscisse $a+h$ avec $a+h$ appartenant à I et $h \neq 0$.

Le nombre dérivé ℓ de f en a est la limite du coefficient directeur de la droite (AM) lorsque le point M se rapproche du point A , c'est-à-dire lorsque h tend vers 0.



Démonstration :

On a $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$ avec $h \neq 0$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est donc égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Le nombre dérivé de f en a , c'est-à-dire la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0, est donc bien la limite du coefficient directeur de la droite (AM) lorsque le point M se rapproche du point A .

II. Tangente à une courbe

1) Tangente en un point à une courbe

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a , nombre réel appartenant à I .

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan et A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a .

La **tangente** à la courbe \mathcal{C}_f au point A est la **droite passant** par A et ayant comme **coefficient directeur le nombre dérivé** $f'(a)$.

Exemple :

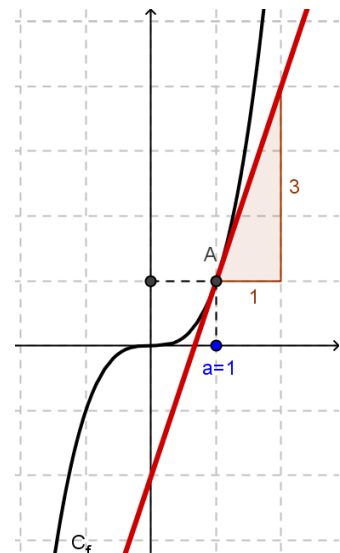
Soit f la fonction définie sur l'intervalle \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3$$

Le point A d'abscisse $a=1$ de la courbe \mathcal{C}_f a comme coordonnées $(1; 1)$.

De plus, le nombre dérivé de f en $a=1$ est égal à $f'(1)=3$.

La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A est la droite passant par A et ayant comme coefficient directeur 3.



Remarque :

Le point $A(a; f(a))$ est le point de contact de la tangente et de \mathcal{C}_f .

2) Équation d'une tangente à une courbe

Propriété :

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, A un point de \mathcal{C}_f d'abscisse a et $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a .

Une **équation de la tangente** à \mathcal{C}_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration :

Dans un repère, une équation d'une droite \mathcal{D} ayant comme coefficient directeur $f'(a)$ est :

$$y = f'(a)x + b$$

avec b son ordonnée à l'origine.

Comme $A(a; f(a))$ appartient à \mathcal{D} , ses coordonnées vérifient l'équation de \mathcal{D} c'est-à-dire :

$$f(a) = f'(a) \times a + b.$$

On en déduit que $b = f(a) - f'(a)a$.

L'équation de \mathcal{D} est donc : $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$ soit $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple :

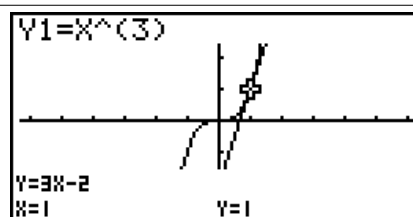
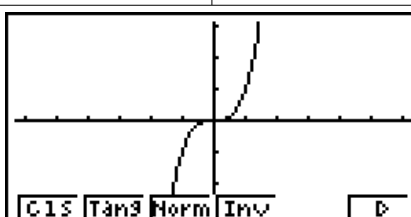
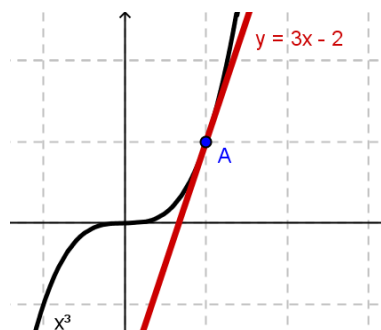
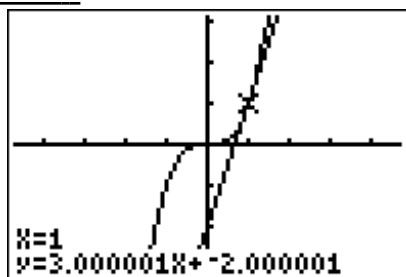
Soit f la fonction définie sur l'intervalle \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ et le point A d'abscisse $a = 1$ de la courbe \mathcal{C}_f .

On a : $a = 1$; $f(a) = 1^3 = 1$; $f'(a) = 3$.

D'où $y = f'(a)(x - a) + f(a) = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$.

Une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A est donc $y = 3x - 2$.

Calculatrice :



III. Fonction dérivée

1) Fonction dérivée f'

Définition :

Une fonction f est **dérivable sur un intervalle I** lorsqu'elle est dérivable en tout nombre réel x appartenant à I .

Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction définie sur I qui, à tout nombre réel x , fait correspondre le nombre dérivé de la fonction f en x est appelée **fonction dérivée** de f .

La fonction dérivée de f est notée f' .

Exemples :

- Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = k$ (k fixé),

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } h \neq 0 : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$$

Ainsi on a :

$$(k)' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

- Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x$,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } h \neq 0 : \frac{(x+h) - x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Ainsi on a :

$$(x)' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

- Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } h \neq 0 : \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Ainsi on a :

$$(x^2)' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

- Pour la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$,
pour tout $x \in [0; +\infty[$ et $h \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \text{ de plus } \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x}$$

Ainsi, pour $x \in]0; +\infty[$:

$$(\sqrt{x})' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- Pour la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } h \neq 0 : \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Ainsi on a :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

2) Dérivées et opérations

Dérivée d'une somme de fonctions

Propriété :

La somme $u+v$ de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

Démonstration :

Soit $f(x) = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$ avec u et v dérivables sur I .

$$\text{Pour tout } x \in I, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h} = \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h}$$

$$\text{Donc : } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Et u et v étant dérivables sur I :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$$

$$\text{ainsi } (u+v)'(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$$

Exemple :

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x^2+x$ est la somme de deux fonctions u et v définies par $u(x)=x^2$ et $v(x)=x$

Or u et v sont dérivables sur \mathbb{R} et $u'(x)=2x$ et $v'(x)=1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=2x+1$.

Dérivée d'un produit de fonctions**Propriété :**

Le produit uv de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Démonstration :

Soit $f(x)=(uv)(x)=u(x) \times v(x)$ avec u et v dérivables sur I .

$$\text{Pour tout } x \in I, \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h} = \frac{[u(x+h) \times v(x+h)] - [u(x) \times v(x)]}{h}$$

$$\text{Donc : } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x+h) + u(x) \times v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \times v(x+h) + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times u(x)$$

Et u et v étant dérivables sur I :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x) \text{ de plus } \lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) = v(x) \text{ ainsi}$$

$$(uv)'(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

Exemple :

La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$ est le produit des deux fonctions u et v définies par : $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

Or u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et on a vu que : $u'(x)=1$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.

La dérivée de ku est k fois la dérivée de u .

Si k est une constante : $(ku)'(x) = k \times u'(x)$

Exemple : dérivée d'une fonction polynôme

La fonction trinôme définie par $f(x) = 2x^2 + 8x + 3$.

En utilisant les règles de calculs des dérivées on obtient :

$$f'(x) = 2 \times 2x + 8 \times 1 + 0 = 4x + 8$$

Dérivée d'un quotient de fonctions**Propriété :**

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

De plus, pour tout x de I , $v(x) \neq 0$.

Le quotient $\frac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur I , et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Démonstration :

Soit $f(x) = \frac{u}{v}(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec u et v dérivables sur I et $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} = \frac{\frac{u(x+h) \times v(x) - u(x) \times v(x+h)}{v(x+h) \times v(x)}}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{u(x+h) \times v(x) - u(x) \times v(x+h)}{v(x+h) \times v(x)}}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times v(x) - \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \times u(x) \right] \times \frac{1}{v(x+h) \times v(x)}$$

Et u et v étant dérivables sur I :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) \text{ de plus } \lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) = v(x)$$

ainsi puisque $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

Exemple :

La fonction f définie sur $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x-1}$ est le quotient des fonctions u et v définies par : $u(x) = x$ et $v(x) = x - 1$

v ne s'annule pas sur chacun des intervalles $] -\infty; 1[$ et $] 1; +\infty[$ et u et v sont dérivables sur ces intervalles : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

Donc f est dérivable sur $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - x \times 1}{(x-1)^2}$

Ainsi pour tout $x \in] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

Propriété :

v est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.

Exemple :

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ est l'inverse de la fonction v définie par $v(x) = x^2 + 1$ ($v(x) \neq 0$ pour tout réel x).

Or pour tout réel x , $v'(x) = 2x$. Donc $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

3) Dérivées usuelles

À partir des règles de calcul sur les fonctions dérivées établies on peut dresser un tableau des dérivées usuelles à connaître.

fonction f	Ensemble de définition de f	Ensemble de dérivabilité de f	fonction dérivée f'
$f(x)=k$ (k constante)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x)=1$
$f(x)=x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x)=n \times x^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) Composition de fonction

Définition :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J , et g une fonction définie et dérivable sur J .

La **fonction composée** des fonctions u et g , notée $g \circ u$, est définie sur I par $g \circ u(x) = g(u(x))$.

Exemple :

Soit u et g les fonctions suivantes :

$$u : I = [0; +\infty[\rightarrow J = [0; +\infty[\quad \text{et} \quad g : J = [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + x$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

La fonction composée est la fonction $g \circ u : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(u(x)) = \sqrt{x^2 + x}$$

Remarque :

Sur l'exemple précédent, $u \circ g$ est définie par : $u \circ g : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$

$$x \mapsto x + \sqrt{x}$$

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels et f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable en tout nombre réel x et sa dérivée est la fonction :

$$x \mapsto a \times f'(ax + b).$$

Exemple :

La fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$ par $g(x) = \frac{1}{3x+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$.

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$, $g(x) = f(3x+5)$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$ or $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Par conséquent, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$, $g'(x) = \frac{-3}{(3x+5)^2}$.