Chapitre 2
Matrices

I. Notion de matrice

Définitions :
Soit m et p deux entiers naturels non nuls.

- Une **matrice** A de **dimension** $m \times p$ est un tableau de nombres à m lignes et p colonnes.
- Le nombre placé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est noté $a_{i,j}$ et s'appelle **coefficient** d'indice $(\mathrm{i};\mathrm{j})$.

Exemples :

- Une matrice A de taille $m \times p$ ($m, p \in \mathbb{N}^*$) peut s'écrire sous la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,j} & \dots & a_{m-1,p} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,p} \end{pmatrix}$$. On note $A=(a_{i,j})_{1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant m,\ 1 \leqslant \mathrm{j} \leqslant p}$.

- $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension (ou taille) 2×3 avec 2 lignes et 3 colonnes avec $b_{1,3}=0$ et $b_{2,1}=-2$.

Remarques :

- Pour délimiter le tableau de nombres, on l'écrit entre parenthèses ou entre crochets.
  Par exemple : $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ définissent la même matrice A telle que :
  $a_{1,1}=1$; $a_{1,2}=-2$; $a_{2,1}=3$ et $a_{2,2}=4$.
- Un coefficient $a_{i,j}$ se note aussi a_{ij} . L'écriture $a_{i,j}$ permet d'éviter des ambiguïtés dans certains cas. Par exemple a_{125} ou encore b_{m-12} .
- Deux matrices sont dites **égales** lorsqu'elles ont les **mêmes dimensions** et que les **coefficients** situés au même emplacement sont **égaux** deux à deux.

Définitions :
Soit n, m et p des entiers naturels non nuls.

- Une matrice de dimensions $1 \times p$ est appelée **matrice ligne**.
- Une matrice de dimensions $m \times 1$ est appelée **matrice colonne**.
- Une matrice de dimensions $n \times n$ est appelée **matrice carrée** d'ordre n.

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{9} & -15 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne (on dit aussi vecteur ligne) de dimension 3.
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne (on dit aussi vecteur colonne) de dimension 2.
- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Remarque :
Les coordonnées des vecteurs sont représentées sous forme de matrice colonne à deux lignes, pour les vecteurs du plan, et à trois lignes pour les vecteurs de l'espace.

Définitions :

- La matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle d'ordre *n*** et est notée O_n .
- Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée **matrice diagonale**.
  Les coefficients $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ forment la diagonale principale de la matrice.

II. Opérations sur les matrices

1) Addition et multiplication par un réel

Définition :
Soit m et p deux entiers naturels non nul.
On considère deux matrices A et B de même dimension $m \times p$.
La **somme** des matrices A et B, notée $A+B$, est la matrice de dimension $m \times p$ dont le coefficient d'indice $(\mathrm{i}\,;\mathrm{j})$, pour $1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant m$ et $1 \leqslant \mathrm{j} \leqslant p$, est égal à $a_{i,j}+b_{i,j}$.

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
- Soit $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 3 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0,1 \end{pmatrix}$. Alors $A+B=\begin{pmatrix} 0,2+5 & 1+1 \\ 3+2 & 0,7+0,1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5,2 & 2 \\ 5 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Propriétés :
Soit A, B et C trois matrices de même dimension.

- La somme de matrices est **commutative** : $A+B=B+A$.
- La somme de matrices est **associative** : $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Remarque :
Ces propriétés découlent de la commutativité et de l'associativité de l'addition dans l'ensemble des nombres réels.

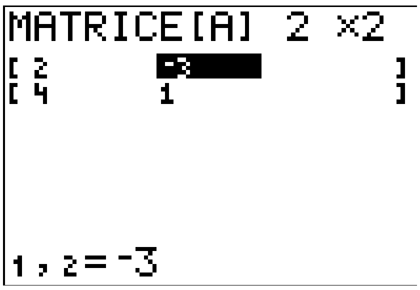
Définition :
Soit m et p deux entiers naturels non nul.
On considère la matrice A de dimension $m \times p$ et le réel k.
Le **produit** de la matrice A **par le réel** k, notée $k \times A$, est la matrice de dimension $m \times p$ dont le coefficient d'indice $(\mathrm{i}\,;\mathrm{j})$, pour $1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant m$ et $1 \leqslant \mathrm{j} \leqslant p$, est égal à $k \times a_{i,j}$.

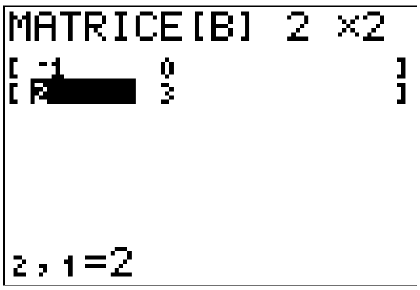
Exemple :
Soit $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 \\ 3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ et $k=1{,}5$. Alors $1{,}5 \times A=\begin{pmatrix} 1{,}5\times 0{,}2 & 1{,}5\times 1 \\ 1{,}5\times 3 & 1{,}5\times 0{,}7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 1{,}5 \\ 4{,}5 & 1{,}15 \end{pmatrix}$.

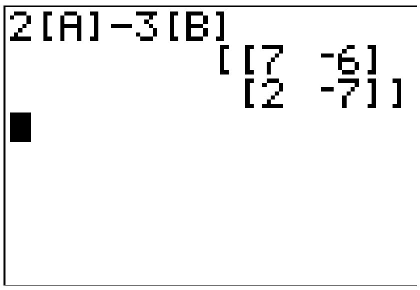
Propriétés :
Soit λ et μ deux nombres réels et A et B deux matrices de même dimension.
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.
- $(\lambda\lambda')A=\lambda(\lambda' A)$

Définitions :
- La matrice $(-1)\times A=-A$ est appelée **matrice opposée** de A.
- La **différence** de deux matrices A et B (notée $A-B$) est la matrice $A+(-B)$.

Exemple :
Soit les matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Alors $2A-3B=2A+(-3)B=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$







Propriétés :
Soit A une matrice carrée d'ordre n.
- $A+(-A)=(-A)+A=O_n$
- $A+O_n=O_n+A=A$
- $0\times A=O_n$

Remarque :
Attention à bien distinguer dans ces égalités le nombre réel nul 0 et la matrice nulle O_n.

2) Produit de deux matrices

Définition :

Soit $A=\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix}$ une matrice ligne de dimension $1\times p$ et $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de dimension $p\times 1$.

Le **produit** $A\times B$ est égal au réel $\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_p b_p$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\times 0 + (-3)\times 4 + 2\times 3 = -6.$$

Définition :

Soit A une matrice de dimension $m\times p$ et B une matrice de dimension $p\times q$.
Le **produit** de la matrice A par la matrice B, noté $A\times B$, est la matrice C de dimension $m\times q$ telle que, pour tout $1\leqslant i\leqslant m$ et $1\leqslant j\leqslant q$, le coefficient $c_{i,j}$ est égal au **produit de la *i*-ième ligne de *A* par la *j*-ième colonne de *B*.**

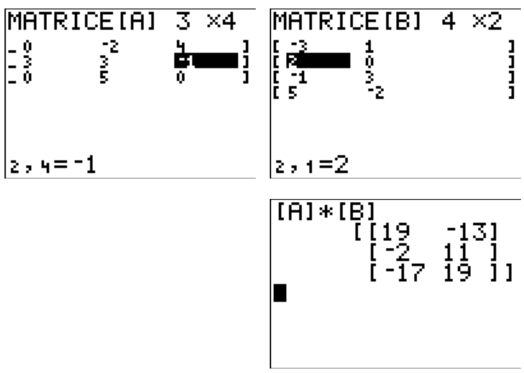
Exemple :

Le produit d'une matrice 3×4 par une matrice 4×2 est une matrice 3×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -13 \\ -2 & 11 \\ -17 & 19 \end{pmatrix}$$

Méthode :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{19} & -13 \\ -2 & 11 \\ -17 & 19 \end{pmatrix} \end{array}$$



Remarque :

Attention aux dimensions des matrices. Pour que le produit AB ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Définition :

La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée **matrice identité d'ordre *n*** et est notée I_n.

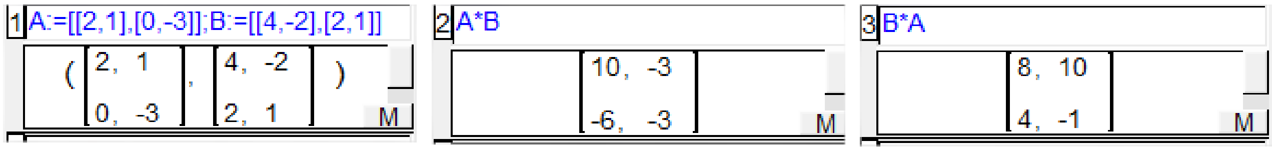
Propriétés :

Soit A, B et C des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

- Le produit de matrices est **associatif** : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- Le produit de matrices est **distributif** par rapport à l'addition :
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \text{ et } (A + B) \times C = A \times C + B \times C \text{ .}$$
- Produit par un réel λ : $(\lambda A) \times B = \lambda A \times B$ et $A \times (\lambda B) = \lambda A \times B$.
- Soit I_n la matrice identité d'ordre n : $I_n \times A = A \times I_n = A$.

Remarques :

- Ces propriétés restent vraies pour tous types de matrices dès lors que les sommes et produits existent.
- Le produit de matrices n'est **pas commutatif**.
Par exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.



- Si $AB = AC$ on ne peut pas en déduire que $B = C$.
Par exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{pmatrix}$ et aussi $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 20 & -6 \end{pmatrix}$.
Une matrice carrée A non nulle telle que pour deux matrices B et C distinctes on ait $A \times B = A \times C$ est dite **non régulière** pour la multiplication.
- Dans ce cas, on a alors $A(B - C) = AB - AC = O_2$.
Si A et M sont deux matrices carrées non nulles telles que $AM = O_n$, on dit que A et M sont des **diviseurs de zéro**.
Par exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Soit A une matrice carrée d'ordre n on notera $A^2 = A \times A$ et plus généralement A^k le produit de k matrices toutes égales à A ($k \in \mathbb{N}^*$). Pour $k = 0$, on pose $A^0 = I_n$.

3) *Application à l'évolution de processus*

Généralités

Lorsqu'on s'intéresse à l'évolution conjointe de plusieurs données reliées entre elles par des relations linéaires, on peut déterminer le passage d'un état des données à un autre en utilisant le produit matriciel.
Si les états possibles à un instant sont numérotés de 1 à n, on peut les représenter par une matrice ligne à n colonnes.

Définition :

On appelle **matrice de transition** des états la matrice carrée A de taille n dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j donne à chaque instant le nombre, ou la proportion, ou la probabilité, des transitions possibles de l'état numéroté i à l'état numéroté j.

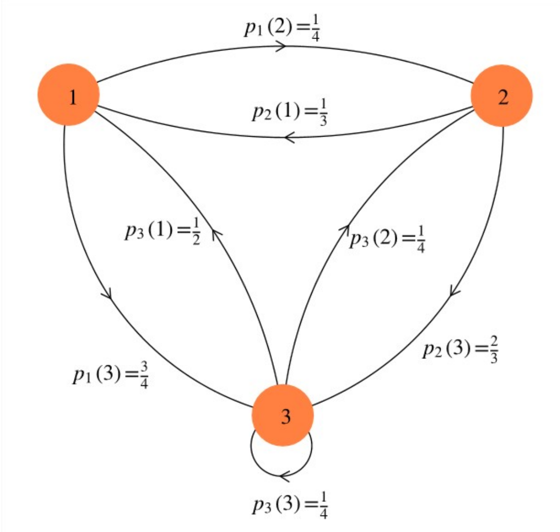
Par définition du produit matriciel, à chaque instant les données observées passent des états représentés par la matrice ligne X aux états représentés par la matrice ligne X' de telle sorte que $X' = XA$.

Marches aléatoires

Exemple :

Sur le **graphe** ci-contre constitué de trois **sommets**. On se déplace d'un sommet à un autre sur ce graphe en suivants les **arêtes orientées**.

À chaque déplacement (ou pas) sur une arête, les **probabilités** de se trouver sur le sommet **extrémité sachant que** l'on est parti du sommet **origine** sont indiquées sur la figure.



Dans le cadre de marches aléatoires

On suppose que ces probabilités sont identiques quel que soit le parcours déjà effectué sur le graphe, donc « arriver au sommet j à partir du sommet i » est un événement indépendant de tous les événements qui ont précédé et sa probabilité est donc toujours la même. On parle de **probabilité de transition** d'un sommet vers l'autre.

Définition :

La **matrice de transition** d'une marche aléatoire est la matrice carrée dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est la probabilité de transition du sommet i vers le sommet j, soit encore la **probabilité d'arriver en *j* sachant qu'on est parti de *i***.

Remarques :

- Les **probabilités de transition du 1er sommet** vers chacun des sommets constituent la **1re ligne** de la matrice, les probabilités de transition du i^e sommet vers chacun des sommets du graphe constituent la i^e ligne.
- Les coefficients de la matrice de transition sont compris entre 0 et 1.
- La somme des coefficients d'une même ligne est donc toujours égal à 1.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, la matrice de transition est $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Soit $a_{i,j} = p_i(j)$.

Définition :
La matrice ligne **état de la marche aléatoire après *n* pas** est la matrice ligne donnant les probabilités d'arriver en chaque sommet après *n* pas.

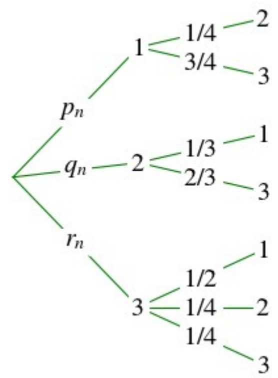
Remarque :
Dans le cadre de marches aléatoires, on travaille parfois avec des matrices de transition A avec $a_{i,j} = p_j(i)$. Les matrices des états sont alors des matrices colonnes. On a alors $X' = AX$.

Exemple :
Soit $X_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne des états de l'exemple précédent.
À l'aide de la **formule des probabilités totales**, on a donc :

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} q_n + \frac{1}{2} r_n$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4} r_n$$

$$r_{n+1} = \frac{3}{4} p_n + \frac{2}{3} q_n + \frac{1}{4} r_n$$



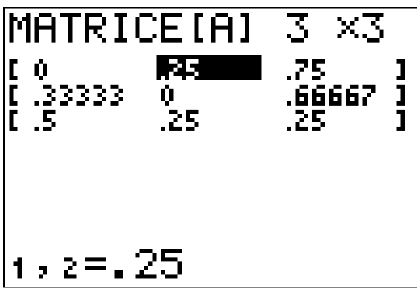
Par définition du produit matriciel, les relations précédentes sont équivalentes à :

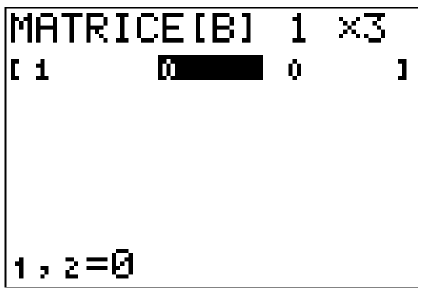
$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = X_n \times A = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} q_n + \frac{1}{2} r_n & \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{4} r_n & \frac{3}{4} p_n + \frac{2}{3} q_n + \frac{1}{4} r_n \end{pmatrix}$$

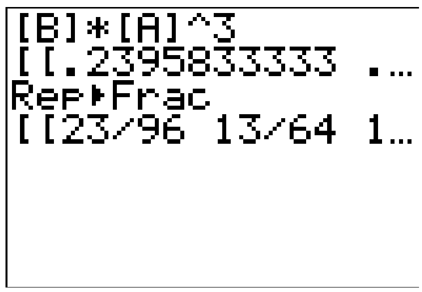
Propriété :
Pour une marche aléatoire associée à un déplacement sur un graphe dont la matrice de transition est notée A et la matrice ligne de l'état après n pas ($n \in \mathbb{N}$), est notée X_n .
On note alors, pour tout $n \geqslant 0$, $X_{n+1} = X_n \times A$ soit $X_n = X_0 \times A^n$.

Exemple :
On suppose que la marche aléatoire a pour départ le sommet n°1 du graphe.
Après 3 pas, l'état de la marche aléatoire est $X_3 = X_0 \times A^3$.
Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $X_3 = \begin{pmatrix} \frac{23}{96} & \frac{13}{64} & \frac{107}{192} \end{pmatrix}$

Ainsi la probabilité d'être arrivé au sommet n°2 après 3 pas est $\frac{13}{64}$.







III. Matrice inversible

1) Définition

Définition :
Soit un entier naturel n non nul.
Une matrice carrée A d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$B\times A=A\times B=I_n.$$

La matrice B est alors unique et s'appelle **inverse de A**. On la note A^{-1}.

Démonstration :
On suppose que la matrice A d'ordre n est inversible.
Soit deux matrices carrées B et C d'ordre n telles que :

$$A\times B=B\times A=I_n \text{ et } A\times C=C\times A=I_n.$$

Alors $B=B\times I_n=B\times(A\times C)=(B\times A)\times C=I_n\times C=C$.
Les matrices B et C sont donc égales.

Exemples :

- La matrice O_n nulle d'ordre n n'est pas inversible car, pour toute matrice carrée A d'ordre n, $O_n\times A=O_n\neq I_n$.
- L'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ est la matrice $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{-3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

  Car $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{-3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{-3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Remarque :
Il existe des matrices non nulles qui n'admettent pas d'inverse.

Propriétés :

- Si A est inversible alors A^{-1} aussi et l'inverse de A^{-1} est A : $(A^{-1})^{-1}=A$.
- Si A et B sont inversibles alors la matrice $A\times B$ est inversible et $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

Démonstrations :

- Par définition de la matrice inverse : $A^{-1}\times A=A\times A^{-1}=I$. Donc A^{-1} est inversible.
- $(A\times B)\times(B^{-1}\times A^{-1})=A\times(B\times B^{-1})\times A^{-1}$ car la multiplication de matrices est associative.
  Comme $B\times B^{-1}=I$, on a $(A\times B)\times(B^{-1}\times A^{-1})=A\times A^{-1}=I$.
  De même $(B^{-1}\times A^{-1})\times(A\times B)=I$.

Cas particulier d'une matrice 2×2

Propriété :

Soit A une matrice carrée d'ordre 2. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La matrice A est **inversible** si et seulement si $ad-bc\neq 0$.

Le réel $ad-bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et noté Δ.

Si $ad-bc\neq 0$, $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Démonstration :

Nous avons vu que O_2 n'est pas inversible. Supposons donc que A est non nulle.

Posons $B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Comme A est non nulle, B l'est également.

On a donc :

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)\,I_2 \text{ et}$$

$$BA=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)\,I_2$$

- Démontrons l'implication : $ad-bc\neq 0 \Rightarrow A$ est inversible

  Si $ad-bc\neq 0$ alors, d'après les égalités matricielles ci dessus, la matrice $B'=\dfrac{1}{ad-bc}B$ est telle que $AB'=B'A=I_2$.

  On en déduit que A est inversible, d'inverse $B'=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

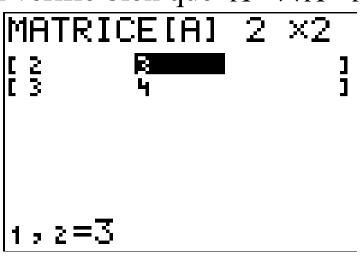
- Démontrons, par l'absurde l'implication : A est inversible $\Rightarrow$ $ad-bc\neq 0$
  Supposons A inversible et $ad-bc=0$. On a alors $AB=0\times I_2=O_2$.
  En multipliant les deux membres de l'égalité par A^{-1} à gauche, il vient $A^{-1}(AB)=A^{-1}O_2$, soit, par associativité, $(A^{-1}A)B=O_2$ et donc $I_2B=O_2$, c'est-à-dire que la matrice B serait nulle.
  Ceci est en contradiction avec le fait que B est supposée non nulle.
  On a donc démontré, par l'absurde que A est inversible $\Rightarrow$ $ad-bc\neq 0$.

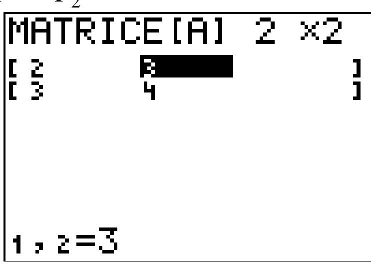
Exemple :

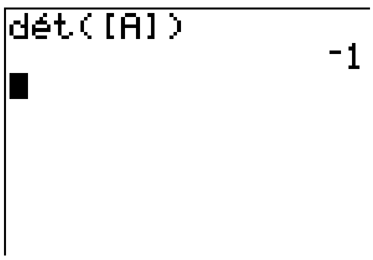
Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On a $\Delta=2\times 4-3\times 3=-1\neq 0$.

Donc la matrice A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

On vérifie bien que $A^{-1}\times A=A\times A^{-1}=I_2$







2) Écriture matricielle d'un système d'équations

Définition :

Un système linéaire à n équations et n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sous la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

peut se traduire matriciellement par $A \times X = B$, où :

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est la **matrice des coefficients du système**.
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ est la **matrice colonne des coefficients du second membre**.
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la **matrice colonne des inconnues**.

Exemple :

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Propriété :

Dans le cas où la matrice A est **inversible**, le système a une **solution unique** donnée par $X = A^{-1}B$.

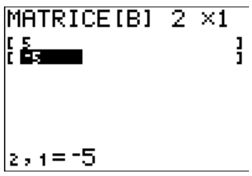
Exemple :

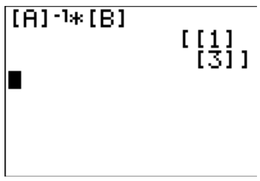
$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$\Delta = -5$ donc le système a une solution unique (c'est un système de Cramer).

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 \end{pmatrix}$$

d'où, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. La solution du système est donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.





Remarque :

Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire.

Si la matrice carrée A n'est pas inversible, alors :

- soit le système n'a pas de solution.
- soit le système a une infinité de solutions.

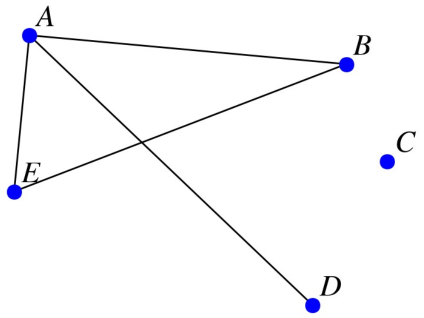
Annexe : Graphe

Graphe non orienté

Définitions :
On appelle **graphe non orienté** la donnée d'un ensemble de points, les **sommets** du graphe, et d'un ensemble de lignes, les **arêtes** du graphe, qui relient certains sommets entre eux.
Le nombre de sommets du graphe est l'**ordre du graphe**.
Deux sommets reliés entre eux par une arête sont **adjacents**.
Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre est un **sommet isolé**.

Exemple :

On considère le graphe G ci-contre.
L'ordre de G est 5 : le graphe a 5 sommets.
Les sommets A et B sont adjacents : ils sont reliés par une arête.
Les sommets B et D ne sont pas adjacents.
Le sommet C est un sommet isolé.



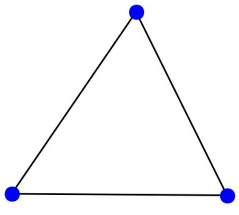
On peut résumer dans un tableau, les degrés ses sommets.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	3	2	0	1	2

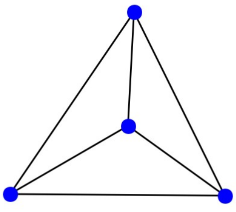
Définition :
Soit G un graphe non orienté.
Le graphe G est **complet** si deux sommets quelconques distincts du graphe sont toujours adjacents.
Autrement dit, tous les sommets sont reliés deux à deux par une arête.

Exemple :
Ci dessous, les graphes complets d'ordre 2, 3, 4 et 5 communément notés K_2 , K_3 , K_4 et K_5 .

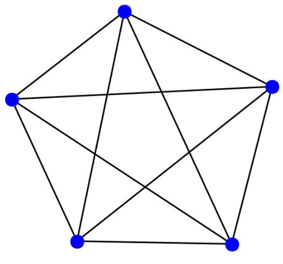
K_2



K_3



K_4



K_5

La notation K_n est un hommage au mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski.

Propriété :
La **somme des degrés** des sommets dans un graphe non orienté est égale au **double du nombre d'arêtes**.

Démonstration :
Pour déterminer le degré d'un sommet, il faut compter le nombre d'arêtes dont il est une extrémité. Lorsque l'on fait la somme des degrés des sommets du graphe, le total revient à compter exactement deux fois chaque arête, d'où le résultat.

Remarque :
Il découle de cette propriété que le nombre de sommets de degré impair est nécessairement pair.

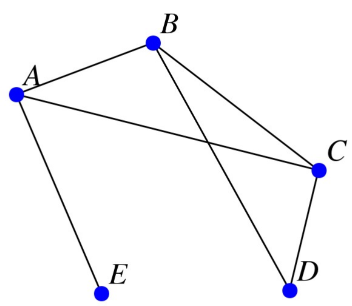
Parcours dans les graphes

- **Chaînes et cycles**

Définitions :
Considérons un graphe non orienté.
Une **chaîne** est une succession d'arêtes telle que l'extrémité de chacune (sauf la dernière) est l'origine de la suivante.
Le nombre d'arêtes qui composent une chaîne est appelé la **longueur de la chaîne**.
Un **chaîne fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité coïncident.
Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

Exemple :

Dans le graphe ci-contre :
- E-A-C-B est une chaîne de longueur 3
- E-A-C-B-A-E est une chaîne fermée de longueur 5.
  Ce n'est pas un cycle car l'arête entre E et A est parcourue deux fois.
- D-B-A-C-D est un cycle de longueur 4.



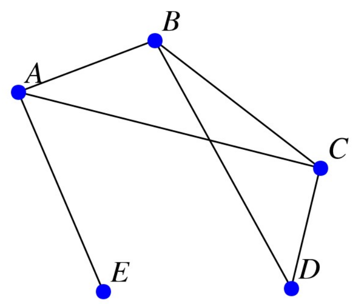
- **Matrice associée à un graphe**

Définition :
Considérons un graphe G non orienté, d'ordre n.
On numérote les sommets de G de 1 à n.
On appelle **matrice d'adjacence associée à G** la matrice A dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j ($1 \leqslant i \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant n$).

Remarque :
Une telle matrice est nécessairement symétrique dans le cas d'un graphe non orienté.

Exemple :

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-dessous est, en supposant les sommets classés dans l'ordre alphabétique.



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

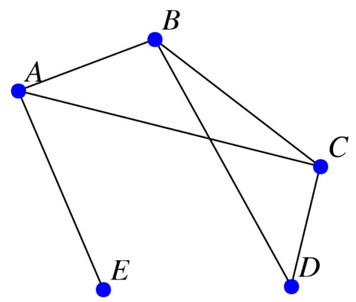
Propriété :

Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté G d'ordre n.

On suppose que les sommets sont numérotés de 1 à n.

Le terme $a_{i\,j}$ à l'intersection de la $i_{ème}$ et de la $j_{ème}$ colonne de la matrice A^k $(k \in \mathbb{N}^*)$ est le **nombre de chaînes** de longueurs k reliant le sommet i au sommet j.

Exemple :



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse au nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à D.

On a $A^3=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Il y a donc 2 chemins de longueurs 3 reliant A à D.

Ces chaînes sont : A-B-C-D et A-C-B-D.

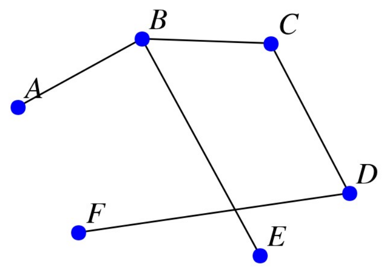
Parcours eulériens

- **Connexité**

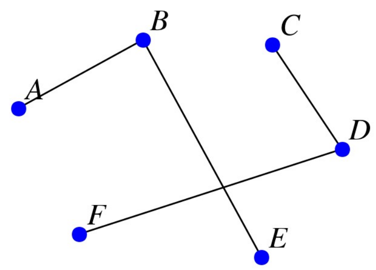
Définition :
Un graphe G est **connexe** si deux sommets quelconques de G sont toujours reliés par une chaîne.

Exemples :

Graphe n°1



Graphe n°2



- Le graphe n°1 est connexe.
- Le graphe n°2 n'est pas connexe : les sommets E et F ne peuvent être reliés par une chaîne.

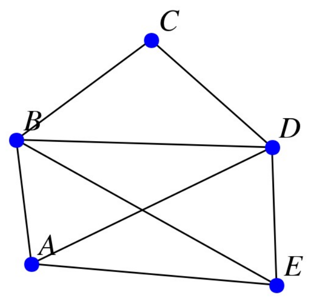
Remarque :
Dans le graphe n°1 connexe, l'arête d'extrémités B et C s'appelle un **isthme**. Sa suppression dans le graphe n°1 déconnecte le graphe (pour donner le graphe n°2). L'arête d'extrémités C et D dans le graphe n°1 est un autre isthme.

- **Chaînes et cycle eulériens**

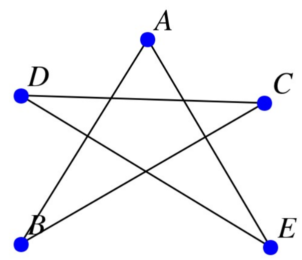
Définitions :
- On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe G toute chaîne qui contient une fois et une seule toutes les arêtes du graphe G.
- On appelle **cycle eulérien** une chaîne eulérienne fermée.

Exemples :

Graphe n°3



Graphe n°4



- Dans le graphe n°3, la chaîne A-B-C-D-A-E-B-D-E est une chaîne eulérienne.
- Dans le graphe n°4, le cycle A-B-C-D-E-A est un cycle eulérien.

<u>Propriété (théorème d'Euler) :</u>

Soit *G* un graphe connexe.

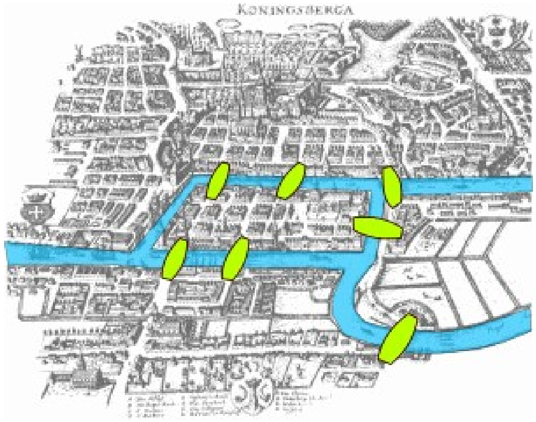
G admet un **cycle eulérien** si, et seulement si, tous les sommets de *G* sont de **degré pair**.

G admet une chaîne eulérienne si, et seulement si, le **nombre de sommets de degré impair dans *G* est 2**.

Si tel est le cas, les extrémités de la chaîne eulérienne sont les deux sommets de degré impair.

<u>Exemple :</u>

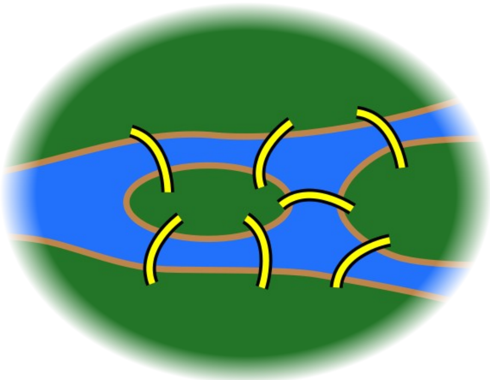
La ville de Kœnigsberg est traversée par la Pregolia, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof, et qui possède 7 ponts comme le montre la figure ci-contre.

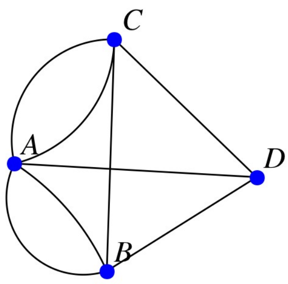


Leonhard Euler a résolu le problème suivant :

« Un piéton peut-il en se promenant traverser une fois et une seule chaque pont ? »

- On construit donc un graphe *G* où les sommets représentent les régions *A*, *B*, *C* et *D* et où chaque arête représente un pont.





- Résoudre le problème revient à chercher dans le graphe précédent une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

Le graphe est connexe (deux sommets quelconques du graphe peuvent toujours être reliés par une chaîne).

Sommet	*A*	*B*	*C*	*D*
Degré	5	3	3	3

En utilisant le théorème d'Euler, *G* n'admet ni de cycle eulérien ni de chaîne eulérienne.

Ainsi, le problème des ponts de Kœnigsberg n'a pas de solution : un piéton ne peut se promener en traversant une fois et une seule chaque pont.

Graphes orientés- graphes pondérés

- **Graphes orientés**

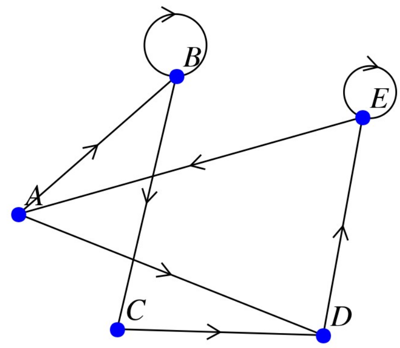
Définitions :

- Un graphe est **orienté** si ses arêtes ne peuvent être parcourues que dans un sens. L'orientation des arêtes est indiquée par des flèches sur les arêtes. Une arête orientée est aussi appelée un **arc**.
- Une **boucle** est un arc dont l'origine et l'extrémité sont identiques.
- Un **chemin** est une succession d'arcs telle que l'extrémité de chacun (sauf le dernier) est l'origine du suivant. Le nombre d'arcs qui composent un chemin est appelé la **longueur du chemin**.
- Un **chemin fermé** est un chemin dont l'origine et l'extrémité coïncident.
- Un **circuit** est chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

Exemple :

Le graphe *G* est orienté d'ordre 5. Il y a une boucle sur les sommets *B* et *E*.

- A-B-B-C-D est un chemin de longueur 4.
- A-B-C-D-E-A est un circuit de longueur 5.



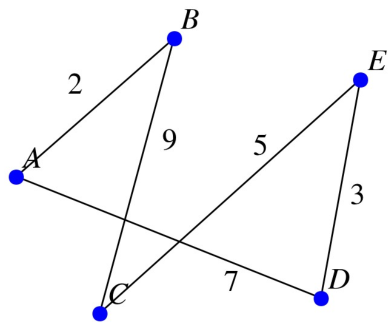
- **Graphe étiquetés**

Définitions :

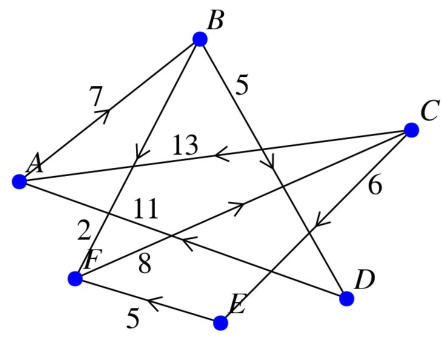
- Un graphe **étiqueté** est un graphe (orienté ou non) dont les liaisons entre les sommets (arêtes ou arcs) sont affectés d'étiquettes (mot, lettre, symbole, ...).
- Un graphe **pondéré** est un graphe étiqueté dont toutes les étiquettes sont des nombres réels positifs ou nuls. Ces nombres sont les **poids** des liaisons (arêtes ou arcs) entre les sommets.
- Le **poids d'une chaîne** (respectivement **d'un chemin**) est la somme des poids des arêtes (resp. des arcs) qui constituent la chaîne (resp. le chemin).
- Une **plus courte chaîne** (resp. un **plus court chemin**) entre 2 sommets est, parmi les chaînes qui les relient (resp. les chemins qui les relient) celle (celui) qui a le poids minimum.

Exemples :

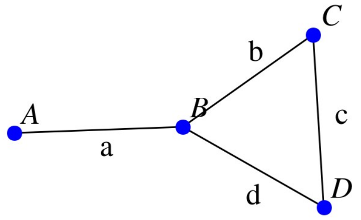
Graphe G_1



Graphe G_2



Graphe G_3



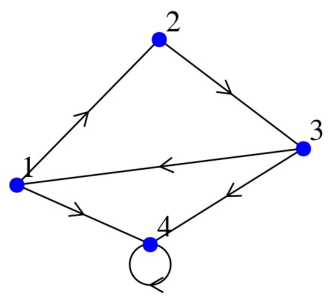
- Le graphe G_1 est un graphe pondéré, non orienté.
- Le graphe G_2 est pondéré et orienté.
- Le graphe G_3 est étiqueté, non orienté.

- ## Matrice d'adjacence d'un graphe orienté

Définition :
Considérons un graphe *G* orienté, d'ordre *n*. On numérote les sommets de *G* de 1 à *n*.
On appelle **matrice d'adjacence associée à *G*** la matrice *A* dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes orientées (d'arcs) allant du sommet *i* vers le sommet *j*.

Exemple :
La matrice d'adjacence associée au graphe ci-dessous, en considérant les sommets rangés dans l'ordre croissant, est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Remarques :
- L'identification des sommets peut aussi s'effectuer avec des lettres. On indique dans ce cas, pour éviter toute ambiguïté, l'ordre choisi sur les lettres pour écrire la matrice d'adjacence.
- On admet que les propriétés de M^n vues pour les graphes non orientés restent valables pour les graphes orientés.

Graphes probabilistes

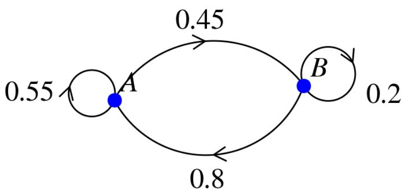
- **Présentation**

Définition :
Un graphe **probabiliste** est un graphe **orienté** et **pondéré** dans lequel :
- il y a au plus un arc d'un sommet à l'autre
- la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

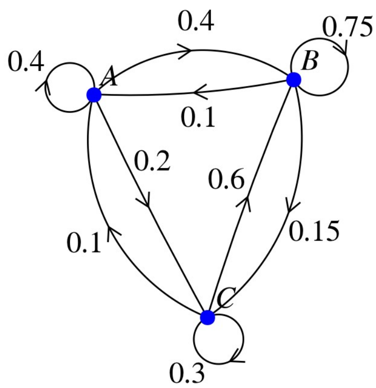
Remarques :
- Les poids des arcs sont alors des probabilités (nombres réels compris entre 0 et 1).
- Un graphe probabiliste indique les différents états possibles d'un système (sommets du graphe) et les probabilités de passage d'un état à l'autre (poids des arcs).

Exemples :

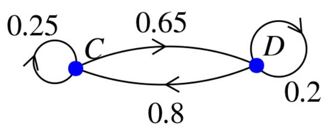
Graphe n°1



Graphe n°2



Graphe n°3



- Le graphe n°1 est un graphe probabiliste d'ordre 2.
- Le graphe n°2 est un graphe probabiliste d'ordre 3.
- Le graphe n°3 n'est pas un graphe probabiliste car la somme des poids des arcs issus du sommet *C* est égal à 0,9.

- **État probabiliste et matrice de transition**

Définition :
Soit une expérience aléatoire à deux issues possibles *A* et *B*.
À chacune de ces issues est affectée une probabilité p_A et p_B .
Lorsque l'on répète cette expérience, dans les mêmes conditions, on se retrouve après chaque réalisation dans un état donné. Cet état à l'issue de chacune des réalisations est appelé **état probabiliste**.
Il peut être représenté par une matrice ligne $P_n=(a_n \quad b_n)$ qui traduit la probabilité d'obtenir l'issue *A* ou l'issue *B* après *n* réalisations de l'expérience aléatoire.
On a : $a_n+b_n=1$, pour tout entier naturel *n*.

Remarque :

On généralise sans difficulté cette définition à une expérience aléatoire ayant un nombre k fini d'issues possibles $(k \geqslant 2)$.

Définition :

Soit G un graphe probabiliste d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La **matrice de transition** M de G est la matrice carrées d'ordre n telle que m_{ij} est égal à la probabilité portée par l'arc reliant le sommet i au sommet j s'il existe et 0 sinon.

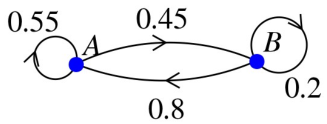
Remarque :

La matrice de transition M permet d'étudier l'évolution du système que schématise le graphe probabiliste.

Exemples :

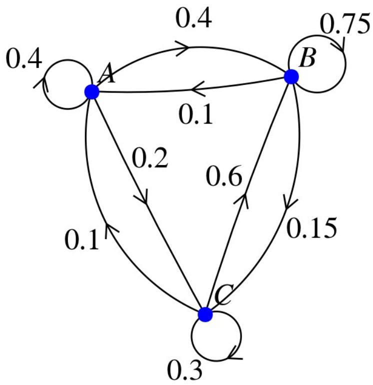
- La matrice de transition M_1 associée au graphe ci-contre est (en supposant les sommets rangés dans l'ordre alphabétique) :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$



- La matrice de transition M_2 associée au graphe ci-contre est (en supposant les sommets rangés dans l'ordre alphabétique) :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$



Propriété :

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste associé à un système donné.
Soit P_0 la matrice-ligne décrivant l'état initial du système étudié.
Soit P_n la matrice-ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n du système étudié.
On a les relations :

$$\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n \times \mathrm{M}$$
$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0 \times \mathrm{M}^n$$

État stable

Définition :

Soit un graphe probabiliste d'ordre n *a*ssocié à une expérience donnée.
On appelle **état stable**, un état probabiliste qui n'évolue pas lors de la répétition de l'événement.

Exemple :

Soit l'état initial $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que $P_1 = P_0$ et, de proche en proche, $P_n = P_0$ pour tout entier naturel *n*.
L'état décrit par la matrice P_0 est donc un état stable.

Propriété :

Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice ne comporte pas de 0.
L'état probabiliste P_n à l'étape *n* converge vers un état *P* indépendant de l'état initial P_0 .
L'état *P* est appelé **état stable du système** : il vérifie l'égalité $PM = P$.