Chapitre 4
Probabilités

I. Fluctuation d'échantillonnage

On considère une expérience pour laquelle on observe un caractère, ce caractère prenant un nombre fini de résultats X_1 ; X_2 ; … ; X_n (appelés **modalités**)

1) *Distribution de fréquences*

Définition :
L'ensemble des fréquences observées s'appelle la **distribution de fréquences** de l'expérience.

Propriété :
La somme des fréquences d'une distribution est égale à 1 :

$$f_1+f_2+\ldots+f_n=1$$

Exemple :
On considère un dé à six faces équilibré.

- On jette 100 fois ce dé (échantillon A).

On obtient la distribution des fréquences de chacune des faces dans le tableau ci-contre.

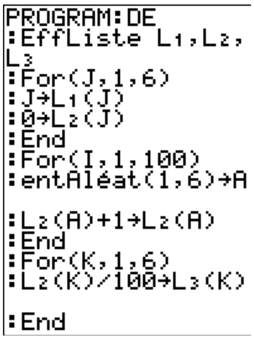
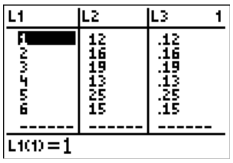
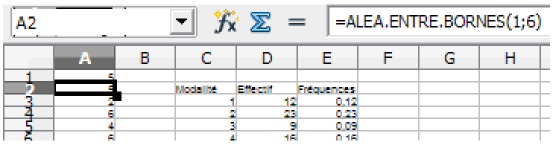
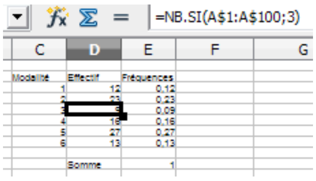
Modalité x_i	1	2	3	4	5	6
A : fréquence f_i	0,12	0,23	0,09	0,16	0,27	0,13

- Un second échantillon de 100 jets du même dé fournit une autre distribution de fréquences (échantillon B).

Modalité x_i	1	2	3	4	5	6
B : fréquence f_i	0,19	0,15	0,15	0,15	0,2	0,16

Sur les deux échantillons, les fréquences observées pour chacune des six modalités sont différentes.

Remarque :
On est parfois amené à produire des échantillons par **simulation**.
Une simulation peut être faite avec un objet usuel (pièce de monnaie, dé, …) ou bien avec des outils de simulation.
Dans l'exemple précédent : générer un échantillon de taille 100 pour un lancer de dé :

Utilisation de la calculatrice	Utilisation du tableur
  	 

Utilisation de la calculatrice :

```
PROGRAM:DE
:EffListe L₁,L₂,
L₃
:For(J,1,6)
:J→L₁(J)
:0→L₂(J)
:End
:For(I,1,100)
:entAléat(1,6)→A

:L₂(A)+1→L₂(A)
:End
:For(K,1,6)
:L₂(K)/100→L₃(K)

:End
```

```
prgmDE
             Fait
```

```
L1      L2      L3     1
1       12      .12
2       16      .16
3       19      .19
4       13      .13
5       25      .25
6       15      .15
------  ------  ------
L1(1)=1
```

Utilisation du tableur :

```
A2                 =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)
     A     B     C          D          E
1    5
2    5           Modalité   Effectif   Fréquences
3    2                  1         12        0,12
4    6                  2         23        0,23
5    4                  3          9        0,09
6    6                  4         16        0,16
```

```
=NB.SI(A$1:A$100;3)
C          D          E
Modalité   Effectif   Fréquences
       1         12        0,12
       2         23        0,23
       3          9        0,09
       4         16        0,16
       5         27        0,27
       6         13        0,13

           Somme              1
```

2) Fluctuations d'échantillonnage

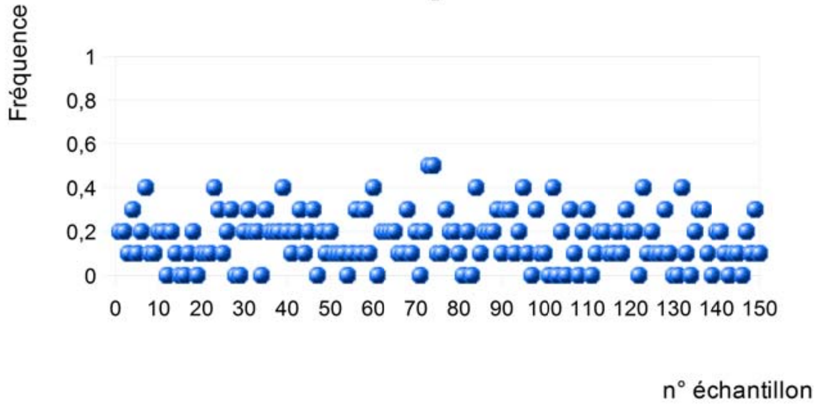
Définition :
Les variations de distribution de fréquences obtenues pour des échantillons de même taille s'appellent **fluctuations d'échantillonnage**.

Remarques :

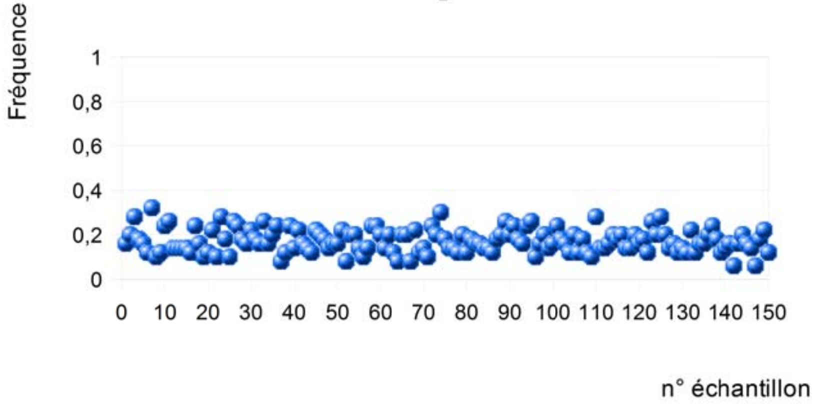
- Les échantillons proviennent d'une même **expérience aléatoire**.
  Ainsi, chaque répétition est **indépendante** des expériences précédentes.
- Lorsque la taille des échantillons augmente, les fluctuations s'atténuent.

Exemple :
Pour 150 échantillons, observons les fluctuations pour des échantillons de différentes tailles.

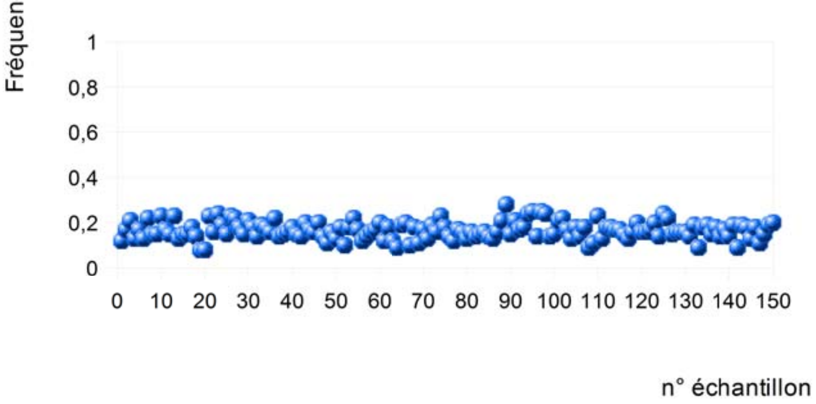
- ○ Échantillon de taille 10 : variations de fréquence de sortie du 2 :



- ○ Échantillon de taille 50 : variations de fréquence de sortie du 2 :



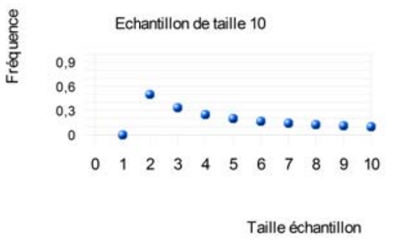
- ○ Échantillon de taille 100 : variations de fréquence de sortie du 2 :

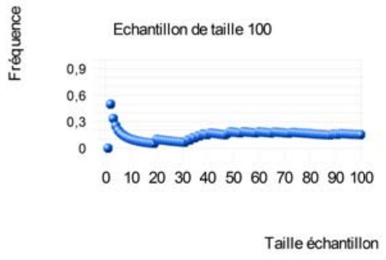


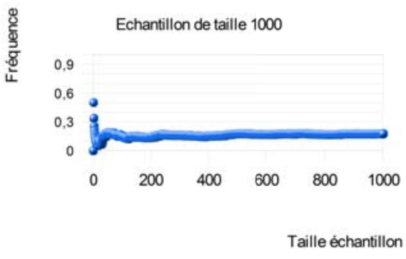
- La théorie des probabilités explique les fluctuations d'échantillonnage et leurs atténuations avec la taille des échantillons :
  Les fréquences des modalités obtenues au fur et à mesure ont tendance à se stabiliser lorsque le nombre de répétitions (taille de l'échantillon) devient très élevé.
  Il existe donc une **distribution de fréquences « théorique »** vers laquelle se rapproche la distribution de fréquences observées, quand n devient grand.

Exemple :

Observons l'évolution de la fréquence de sortie du 2 en fonction de la taille de l'échantillon :







3) *Loi de probabilité*

Soit *E* l'ensemble des *n* résultats provenant d'une expérience aléatoire :

$$E=\{x_1;x_2;\ldots;x_i;\ldots;x_n\}$$

Définir une **loi de probabilité** sur *E*, c'est associer à chaque résultat x_i un nombre p_i positif tel que la somme de tous les p_i soit égale à 1.

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

avec $0\leqslant p_i\leqslant 1$ et $\sum_{i=1}^{i=n} p_i=1$

Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir sur l'ensemble *E* une loi de probabilité *P*.

Remarque :

Loi des grands nombres :

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité *P*, les distributions des fréquences obtenues sur des séries de taille *n* se rapprochent de *P* quand *n* devient grand.

Exemple :

On lance deux dés équilibrés à six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on s'intéresse à la somme obtenue.

Trois lois de probabilités sont proposées pour modéliser cette expérience :

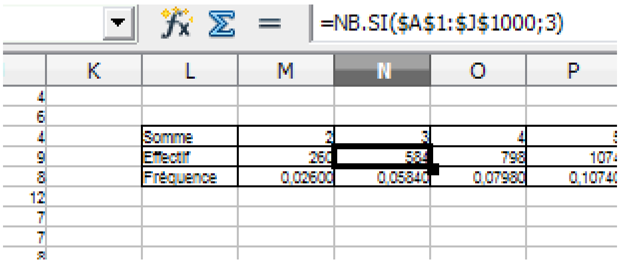
Somme x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Loi 1	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
Loi 2	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$
Loi 3	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Une et une seule de ces trois lois modélise l'expérience.

Effectuons une simulation de l'expérience (10000 lancers) afin de déterminer la loi de probabilité qui convient.

D4 =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)+ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	7	7	8	8	6	6	8	9	8	4
2	6	8	7	7	11	7	10	6	4	6
3	8	9	9	9	6	8	8	7	9	4
4	8	8	9	7	6	12	2	8	4	9
5	9	5	8	6	12	10	8	2	4	8
6	8	7	9	8	8	9	5	7	6	12



=NB.SI($A$1:$J$1000;3)

	K	L	M	N	O	P
4						
6						
4		Somme	2	3	4	5
9		Effectif	260	584	798	1074
8		Fréquence	0,02600	0,05840	0,07980	0,10740
12						
7						
7						
8						

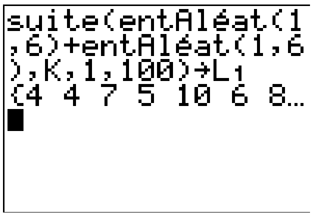
Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	260	584	798	1074	1405	1632	1471	1105	864	542	265
Fréquence	0,0260	0,0584	0,0798	0,1074	0,1405	0,1632	0,1471	0,1105	0,0864	0,0542	0,0265

C'est donc la Loi 3 qui convient.

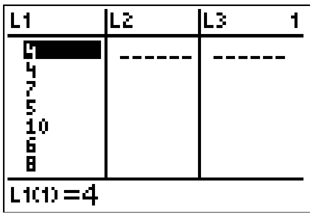
Remarques :

- La loi des grands nombres précise que : si le nombre des observations est important, alors les chances de s'écarter beaucoup des fréquences « théoriques » sont faibles.
- A l'aide d'une simulation sur un grand nombre d'expériences, on peut écarter des modèles de lois de probabilités mais **on ne peut rien prouver**.

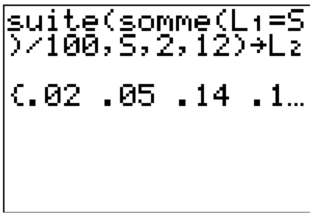
Utilisation de la calculatrice :



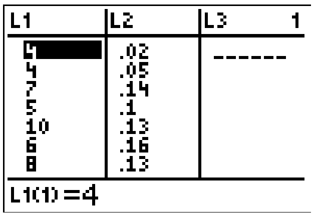
```
suite(entAléat(1
,6)+entAléat(1,6
),K,1,100)→L₁
{4 4 7 5 10 6 8…
```



```
L1      L2      L3     1
4       ------  ------
4
7
5
10
6
8
L1(1)=4
```



```
suite(somme(L₁=S
)/100,S,2,12)→L₂

{.02 .05 .14 .1…
```



```
L1      L2      L3     1
4       .02     ------
4       .05
7       .14
5       .1
10      .13
6       .16
8       .13
L1(1)=4
```

4) Caractéristiques d'une loi de probabilité

On considère la loi de probabilité P définie par :

x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_1	p_2	p_3	…	p_n

où les x_i sont des réels.

- L'**espérance** de la loi P est le nombre :

$$\mu = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$$

- La **variance** de la loi P est le réel positif V défini par :

$$V = p_1 (x_1 - \mu)^2 + p_2 (x_2 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - \mu)^2$$

- L'**écart type** est alors défini comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Exemple :

On lance deux dés équilibrés à six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on a vu que la loi de probabilité de l'expérience aléatoire est donnée par :

Somme x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Loi *P*	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On a donc :

$$\mu=\frac{1}{36}\times 2+\frac{2}{36}\times 3+\frac{3}{36}\times 4+\frac{4}{36}\times 5+\frac{5}{36}\times 6+\frac{6}{36}\times 7+\frac{5}{36}\times 8+\frac{4}{36}\times 9+\frac{3}{36}\times 10+\frac{2}{36}\times 11+\frac{1}{36}\times 12$$

et $\mu=\frac{252}{36}=7$

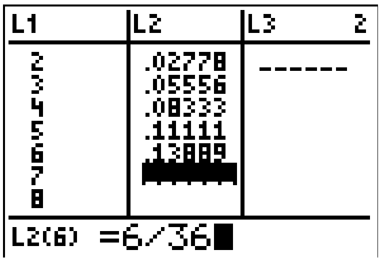
L'espérance de la loi *P* est 7.

$$V=\frac{1}{36}(2-7)^2+\frac{2}{36}(3-7)^2+\frac{3}{36}(4-7)^2+\frac{4}{36}(5-7)^2+\frac{5}{36}(6-7)^2+\frac{6}{36}(7-7)^2+\frac{5}{36}(8-7)^2+\frac{4}{36}(9-7)^2+\frac{3}{36}(10-7)^2+\frac{2}{36}(11-7)^2+\frac{1}{36}(12-7)^2$$

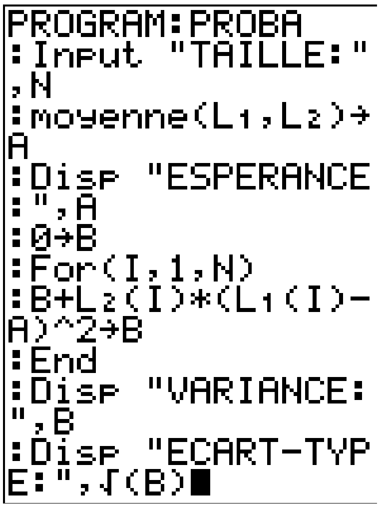
La variance de la loi *P* est $\frac{35}{6}\simeq 5{,}83$

Et par conséquent l'écart type de la loi *P* est $\sigma=\sqrt{\frac{35}{6}}\simeq 2{,}42$

Utilisation de la calculatrice :

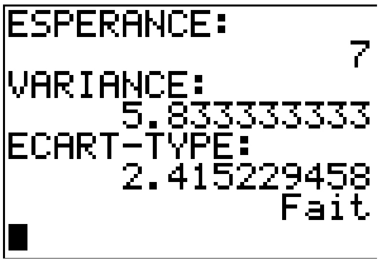


```
L1     L2      L3     2
  2    .02778  ------
  3    .05556
  4    .08333
  5    .11111
  6    .13889
  7
  8
L2(6) =6/36
```



```
PROGRAM:PROBA
:Input "TAILLE:"
,N
:moyenne(L₁,L₂)→
A
:Disp "ESPERANCE
:",A
:0→B
:For(I,1,N)
:B+L₂(I)*(L₁(I)-
A)^2→B
:End
:Disp "VARIANCE:
",B
:Disp "ECART-TYP
E:",√(B)
```

```
prgmPROBA
TAILLE:11
```



```
ESPERANCE:
              7
VARIANCE:
    5.833333333
ECART-TYPE:
    2.415229458
           Fait
```

II. Vocabulaire des probabilités

1) Évènement

Définition :
Une **issue** d'une expérience aléatoire est un résultat possible de cette expérience.

Exemple :
On lance deux fois une pièce de monnaie : obtenir PILE puis FACE est une issue, notée PF.

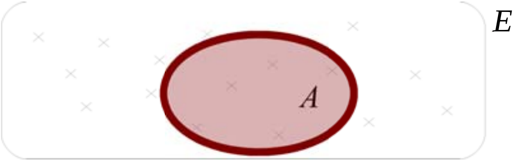
L'ensemble de toutes les issues différentes possibles est :

E = {PP ; PF ; FP ; FF}

Si la pièce est équilibrée, on munit cet ensemble de la loi de probabilité définie par le tableau ci-contre.

Issue x_i	PP	PF	FP	FF
Probabilité p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Définition :
Une partie A de l'ensemble des résultats E est un **événement**.
On dit qu'une issue **réalise** un événement A, lorsque l'issue est un résultat appartenant à la partie A.



$A \subset E$

Exemple :
On lance une seule fois un dé équilibré à six faces.

$E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

On considère l'évènement A défini par : « le résultat obtenu est pair ».
On obtient la partie de E telle que $A = \{2 ; 4 ; 6\}$
L'issue 2 réalise A ($2 \in A$). L'issue 3 ne réalise pas A ($3 \notin A$).

Évènements particuliers :

- $\emptyset$ est l'**évènement impossible :** aucune issue ne le réalise, c'est l'ensemble vide.
- E est l'**évènement certain :** toutes les issues le réalisent.
- Un **événement élémentaire** est un événement qui n'a qu'une issue.

2) Probabilité d'un événement

Définition :
Étant donné un événement A de E, la probabilité de A, $p(A)$, est la somme des probabilités des évènements élémentaires de A.

Exemple :
Considérons un dé pipé.
Les résultats obtenus après un très grand nombre de lancers ont permis de proposer la loi de probabilité définie ainsi :
$p(1)=\frac{1}{6}$; $p(2)=\frac{1}{12}$; $p(3)=\frac{1}{12}$; $p(4)=\frac{1}{3}$; $p(5)=\frac{1}{12}$; $p(6)=\frac{1}{4}$ (on a bien $\sum_{i=1}^{i=6} p(i)=1$)
Soit A, l'évènement : « obtenir un nombre pair ». $A=\{2 ; 4 ; 6\}$
La probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à $p(2)+p(4)+p(6)=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$.
Donc $p(A)=\frac{2}{3}$.

III. Propriétés d'une loi de probabilité

1) Équiprobabilité

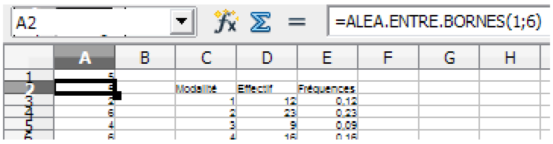
Définition :
La loi de probabilité sur un ensemble fini E est **équirépartie**, lorsque toutes les issues de E ont la même probabilité. Ainsi, comme la somme des probabilités p_i est égale à 1, dans le cas de n issues, chaque issue à une probabilité $p_i=\frac{1}{n}$.

Théorème :
Dans le cas de l'équiprobabilité sur E, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A)=\frac{nombre\ d'issues\ dans\ A}{nombre\ d'issues\ dans\ E}=\frac{nombre\ de\ cas\ \ favorables}{nombre\ de\ cas\ \ possibles}$$

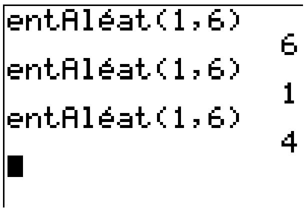
Remarque :
Considérer que les éléments de E sont **choisis au hasard**, c'est prendre l'**équiprobabilité** pour modèle de l'expérience aléatoire.

Exemple :
- Lancer d'un dé : l'équiprobabilité traduit le fait que le dé est supposé équilibré :



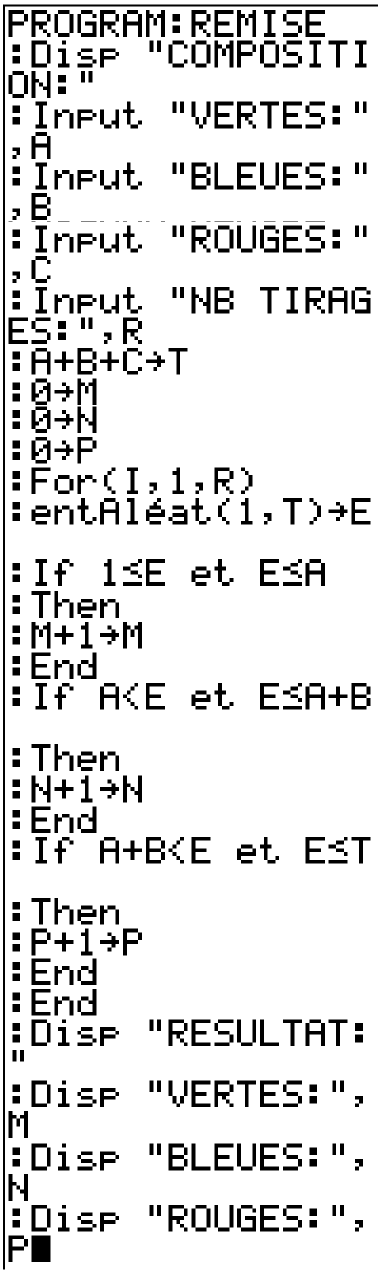
=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	5							
2	[illegible]		Modalité	Effectif	Fréquences			
3	2		1	12	0,12			
4	6		2	23	0,23			
5	4		3	9	0,09			
6	6		4	16	0,16			

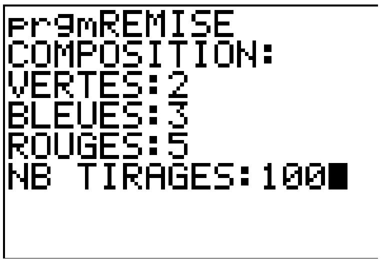


```
entAléat(1,6)
                  6
entAléat(1,6)
                  1
entAléat(1,6)
                  4
█
```

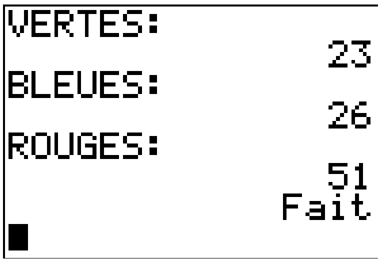
- Tirage avec remise dans une urne avec des boules vertes, bleues et rouge : l'équiprobabilité traduit le fait que chaque boule a la même « chance » d'être tirée.



```
PROGRAM:REMISE
:Disp "COMPOSITI
ON:"
:Input "VERTES:"
,A
:Input "BLEUES:"
,B
:Input "ROUGES:"
,C
:Input "NB TIRAG
ES:",R
:A+B+C→T
:0→M
:0→N
:0→P
:For(I,1,R)
:entAléat(1,T)→E

:If 1≤E et E≤A
:Then
:M+1→M
:End
:If A<E et E≤A+B

:Then
:N+1→N
:End
:If A+B<E et E≤T

:Then
:P+1→P
:End
:End
:Disp "RESULTAT:
"
:Disp "VERTES:",
M
:Disp "BLEUES:",
N
:Disp "ROUGES:",
P█
```



```
prgmREMISE
COMPOSITION:
VERTES:2
BLEUES:3
ROUGES:5
NB TIRAGES:100█
```



```
VERTES:
                23
BLEUES:
                26
ROUGES:
                51
              Fait
█
```

2) *Probabilités des évènements particuliers*

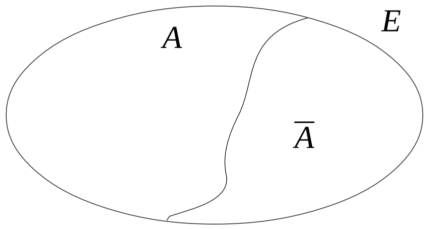
Quelle que soit la loi de probabilité sur l'ensemble *E*, on a les probabilités suivantes :

- Pour l'**évènement certain** $p(E)=1$, car la somme des probabilités est égale à 1.
- Aucune issue ne réalise l'**ensemble vide** $\emptyset$, donc $p(\emptyset)=0$.
- *A* est une partie de *E*, c'est-à-dire *A* est inclus dans *E* ($A \subset E$), donc $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

3) *Opérations sur les évènements*

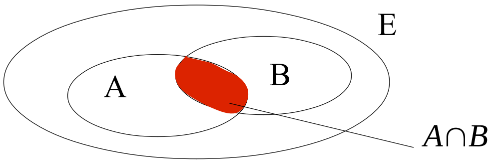
- Pour tout événement A de E, on peut définir son **contraire** noté $\overline{A}$ constitué de toutes les issues de E qui ne réalisent pas A.

$\overline{A}$ se lit « **non** A » ou « A barre »

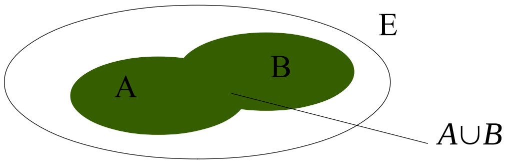


Soit A et B deux évènements de E :

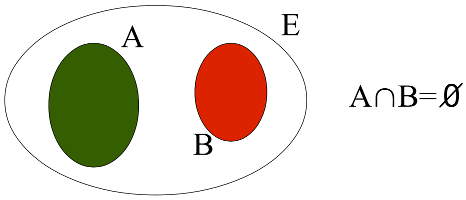
- l'évènement $A\cap B$ est constitué des issues qui réalisent A **et** B en même temps :
  $A\cap B$ se lit « A **inter** B », mais aussi « A et B ».



- l'évènement $A\cup B$ est constitué des issues qui réalisent A **ou** B (ou au sens <u>inclusif</u> du mot) :
  $A\cup B$ se lit « A **union** B », mais aussi « A ou B ».



- lorsqu'aucune issue ne réalisent simultanément A et B, on a $A\cap B=\emptyset$
  (dans ce cas le ou de « A ou B » est un ou <u>exclusif</u>)
  On dit que A et B sont deux évènements **incompatibles** ou **disjoints**.



4) *Propriétés des probabilités*

Soit A et B deux évènements de E :

- Quelle que soit la loi de probabilité sur E :

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

- Si A et B sont deux évènements incompatibles :

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$

- Si A et $\overline{A}$ sont contraires :

$$p(A)+p(\overline{A})=p(E)=1 \text{ donc } p(\overline{A})=1-p(A)$$

Exemple :

Pour la loi de probabilité P :
A *:* le nombre obtenu est un multiple de 3
B *:* le nombre obtenu est un carré

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- A = {3 ; 6 ; 9 ; 12 } donc $P(A)=\frac{2}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{1}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$
- B = {4 ; 9} donc $p(B)=\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{7}{36}$

$A\cap B$: le nombre est un multiple de 3 et un carré
$A\cup B$ *:* le nombre est un multiple de 3 ou un carré
C *:* le nombre n'est ni un multiple de 3, ni un carré.

- $A\cap B$={9} donc $p(A\cap B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
- $A\cup B$={3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12} donc $p(A\cup B)=\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{1}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$
- Les événements C et ($A\cup B$) sont contraires donc $p(C)=1-p(A\cup B)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$