Chapitre 7
Logarithme népérien

I. Logarithme népérien

1) Définition

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
Cette fonction usuelle est continue et admet donc des primitives sur $]0;+\infty[$.

Définition :
La fonction logarithme népérien est **la fonction** notée ln :
- elle est définie sur des réels strictement positifs : $x \in \ ]0;+\infty[$
- sa dérivée est la fonction inverse : $\ln'=\frac{1}{x}$
- elle s'annule en 1 : $\ln(1)=0$

Remarques :
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
- Le logarithme de zéro n'existe pas.
- Le logarithme d'un nombre négatif n'existe pas.

2) Propriété fondamentale du logarithme

Propriété :
Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs :

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$$

Démonstration :
a étant un réel strictement positif, on considère la fonction *h* définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\ln(ax)-(\ln a+\ln x)$.
Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
Ainsi pour tout $x>0$, $h'(x)=a\times\ln'(ax)-0-\ln'(x)=a\times\frac{1}{ax}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$.
La dérivée de *h* est toujours nulle, ce qui signifie que *h* est une fonction constante sur $]0;+\infty[$.
Or $h(1)=\ln(a\times 1)-(\ln a+\ln 1)=\ln a-\ln a=0$
Par conséquent, la fonction *h* est constamment nulle sur $]0;+\infty[$, et ainsi $\ln(ax)=\ln a+\ln x$.
x étant quelconque dans $]0;+\infty[$, en posant $x=b$, on retrouve la propriété fondamentale.

Exemple :

$$\ln 6+\ln 5+\ln\frac{1}{30}=\ln\frac{6\times 5\times 1}{30}=\ln 1=0$$

3) Propriétés algébriques

Propriétés :

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs et *n* entier relatif :

$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

$\ln(a^n)=n\times\ln(a)$; $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$

Démonstrations :

- Soit $a>0$. $a\times\frac{1}{a}=1$, donc $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=\ln 1$ $\Leftrightarrow$ $\ln a+\ln\left(\frac{1}{a}\right)=0$. D'où $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$.
- Soit $a>0$ et $b>0$. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln a-\ln b$.
- Si $n=0$, l'égalité est évidente : $\ln(a^0)=\ln 1=0=0\times\ln a$.
  Si $n\geqslant 1$ et $a>0$, alors $a^n=a\times\ldots\times a$, donc $\ln(a^n)=\ln a+\ldots+\ln a=n\ln a$.
  Si $n\leqslant -1$ et $a>0$, alors $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$, donc $\ln(a^n)=-\ln(a^{-n})=-(-n)\ln a=n\ln a$.
- $(\sqrt{a})^2=a$, donc $\ln((\sqrt{a})^2)=\ln a$, ou encore $2\ln(\sqrt{a})=\ln a$. Ainsi $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

Exemples :

- $\ln 12-\ln 6+\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{12}{6}+\ln 3-\ln 2=\ln 3$
- $\ln 4^{-3}+5\ln 2=-3\ln 4+5\ln 2$. Or $\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$.
  D'où $\ln 4^{-3}+5\ln 2=-\ln 2$
- $\ln\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln 5$

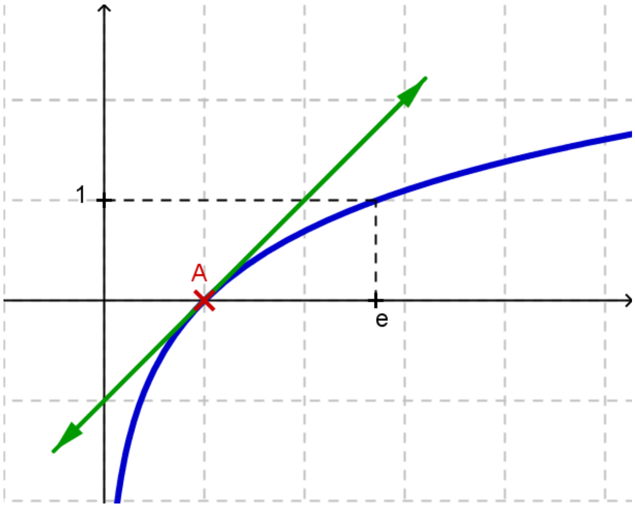
II. Fonction ln

1) Propriétés analytiques de la fonction ln

Propriétés :

- La fonction ln est **continue** et **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)=-\infty$, donc l'axe des ordonnées d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)=\frac{1}{x}$	$\Vert$	$+$	1	$+$	
$\ln(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est $y=x-1$

Démonstrations :

- La fonction ln est dérivable donc continue.
- Comme la dérivée de la fonction ln est la fonction inverse et lorsque $x>0$, alors $\frac{1}{x}>0$.
  Ainsi la dérivée est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante.
- De plus $\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$; ainsi la tangente T à $\mathscr{C}_{\ln}$ en $A(0;1)$ a pour équation $y=x-1$.
- Soit M un réel fixé aussi grand que l'on veut, et n un entier naturel vérifiant $n\ln(10)>M$.
  Pour tout x tel que $x>10^n$, on a $\ln(x)>\ln(10^n)$ (car ln est strictement croissante)
  $$\Leftrightarrow \ln(x)>n\times\ln(10) \Leftrightarrow \ln(x)>M$$
  Cela signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$.
- En posant $X=\frac{1}{x}$, on a $\ln(x)=\ln\left(\frac{1}{X}\right)=-\ln(X)$.
  Or si x → 0 avec $x>0$, alors X → +∞ et ln(X) → +∞
  d'où -ln(X) → +∞
  Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)=-\infty$

Propriétés :

Pour $A>0$ et $B>0$:

- $\ln(A)=\ln(B) \Leftrightarrow A=B$
- $\ln(A)\leqslant\ln(B) \Leftrightarrow A\leqslant B$

2) Le nombre e

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $[2;3]$ et $\ln(2) \simeq 0{,}7 < 1$ et $\ln(3) \simeq 1{,}1 > 1$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ln prend une seule fois la valeur 1.

Définition :
Il existe un unique nombre, noté **e**, tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Avec la calculatrice on vérifie $\mathrm{e} \simeq 2{,}718281828$.

Propriétés :
Soit *m* un entier relatif : l'équation

- $\ln(x) = m$ a pour unique solution $x = \mathrm{e}^m$.
- $\ln(x) \geqslant m \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^m$
- $\ln(x) \leqslant m \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \mathrm{e}^m$

Démonstration :

- Si *m* est un entier naturel, on peut écrire :
$$m = m \times 1 = m \times \ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}^m)$$
- Si *m* est entier relatif négatif, alors il existe un entier naturel *n* tel que $m = -n$:
$m = -n \times 1 = n \times (-\ln(\mathrm{e})) = n \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, d'où $m = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^n}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-n}) = \ln(\mathrm{e}^m)$.
L'équation $\ln(x) = m$, avec $m \in \mathbb{Z}$, s'écrit donc $\ln(x) = \ln(\mathrm{e}^m) \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^m$.

Exemples :

- La solution de l'équation $\ln(x) = 2$ est $x = \mathrm{e}^2$.
- La solution de l'équation $\ln(x) = -1$ est $x = \mathrm{e}^{-1}$
Or $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\ln(\mathrm{e}) = -1$, donc cette solution s'écrit $x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
- La solution de l'équation $\ln(x) = \frac{1}{2}$ est $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.
Or $\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \frac{1}{2}$, donc cette solution s'écrit $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

III. Croissances comparées

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstrations :

- On souhaite comparer $\ln(x)$ et $\sqrt{x}$,
  En étudiant la fonction *g* définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$.
  $$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$
  Comme $x > 0$, la dérivée est du signe de $\sqrt{x} - 2$.
  Or $\sqrt{x} - 2 \geqslant 0 \iff \sqrt{x} - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 4$
  D'où le tableau de variations de *g* :

x	0		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$2-\ln 4$	↗	

  Le minimum de la fonction *g* est $2 - \ln 4$, strictement positif :
  pour $x \in \,]0;+\infty[$, $\sqrt{x} - \ln(x) > 0$
  $\iff \sqrt{x} > \ln(x)$
  $x > 0$ donc on a :
  $\dfrac{\sqrt{x}}{x} > \dfrac{\ln(x)}{x} \iff \dfrac{1}{\sqrt{x}} > \dfrac{\ln(x)}{x}$

  Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$.
  Ainsi pour $x \geqslant 1$, on obtient l'encadrement $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
  Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$; donc, par limite par encadrement, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
- On pose $X = \dfrac{1}{x}$, alors $x \times \ln(x) = \dfrac{1}{X} \times \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\dfrac{\ln(X)}{X}$.
  Or lorsque $x \to 0$, avec $x > 0$, alors $X \to +\infty$;donc $\dfrac{\ln(X)}{X} \to 0$, c'est-à-dire $x \ln(x) \to 0$.
- Comme $\dfrac{\ln(x)}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-1}} \times \ln\dfrac{(x)}{x}$ et de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$, car $n - 1 \geqslant 1$,
  par produit, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$.
- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. Donc pour $x = 1$, $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.
  Or d'après la définition du nombre dérivé en un point :
  $\ln'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ (car $\ln 1 = 0$). D'où le résultat.
- Il suffit d'utiliser le résultat précédent en posant $1 + x = X$.

Exemples :

- La fonction $f\ : x \longmapsto \dfrac{\ln(x^4)}{x^3}$ présente en $+\infty$ la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
  $\dfrac{\ln(x^4)}{x^3} = \dfrac{4\ln x}{x^3} = \dfrac{4}{x^2} \times \dfrac{\ln x}{x}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- La fonction $g\ : x \longmapsto x^2 \ln(x^3)$ présente en 0 la forme indéterminée $0 \times \infty$
  $x^2 \ln(x^3) = x^2 \times (3\ln x) = (3x) \times (x \ln x)$. Or $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x) = 0$. D'où
  $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$; donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x\ln(x)}{x-1} = 2$.
  En effet, $\dfrac{2x\ln x}{x-1} = 2x \times \dfrac{\ln x}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 1} 2x = 2$

IV. Logarithme d'une fonction

On considère une fonction *u*, définie sur un intervalle I et telle que, pour tout *x* de I, on a $u(x) > 0$.
On souhaite étudier la composée $\ln \circ u$, notée aussi $\ln u$.

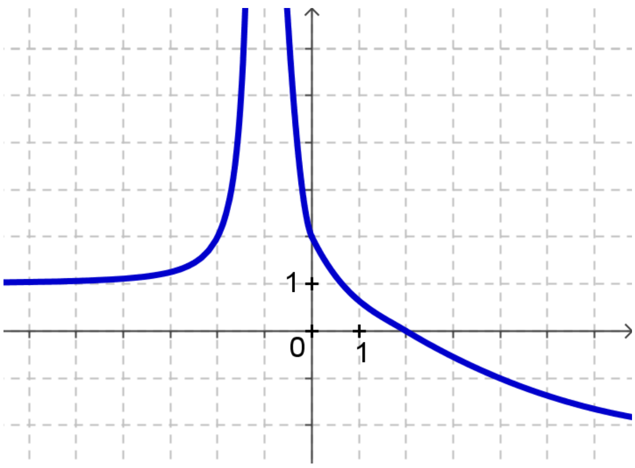
1) *Sens de variation de* $\ln u$

Propriété :
Soit *u* une fonction définie et **strictement positive** sur un intervalle I.
Les fonctions *u* et $\ln u$ ont même sens de variation sur I.

Démonstration :
Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, par composée, si la fonction *u* est croissante sur I, alors la fonction $\ln u$ est croissante sur I et si la fonction *u* est décroissante sur I, alors la fonction $\ln u$ est décroissante sur I.

Exemple :
u est la fonction et $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de *u*.
$u(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty;-1[\, \cup\,]-1;2[$,
donc $\ln u$ est définie sur $]-\infty;-1[\, \cup\,]-1;2[$.

u et $\ln u$ ont même sens de variation :



x	$-\infty$	-1	2
$f(x) = \ln(u(x))$	$\nearrow$	||	$\searrow$

2) *Dérivée de* $\ln u$

Propriétés :
Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

- La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln(u)$.

Démonstration :
La fonction u est dérivable sur I de dérivée u'. On applique la dérivée d'une fonction composée :

$$(\ln\circ u)'(x)=u'(x)\times\ln'(u(x))=u'(x)\times\frac{1}{u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemples :

- f est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\ln(x^2+1)$.
  Le polynôme u définie par $u(x)=x^2+1$ est strictement positif et dérivable sur ℝ.
  Donc, pour tout réel x :
  $$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}.$$
- La fonction $g: x\longmapsto\ln(2x-1)$ est définie pour $2x-1>0$, c'est-à-dire pour $x>\frac{1}{2}$.
  Alors, pour tout x de l'intervalle $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$:
  $$g'(x)=\frac{2}{2x-1}.$$
- Une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}$ est la fonction ln.
- Sur l'intervalle $]-\infty;0[$, x est strictement négatif.
  Une primitive sur $]-\infty;0[$ de $x\longmapsto\frac{1}{x}$ est donc la fonction $x\longmapsto\ln(-x)$.
- La fonction $\frac{4x^3}{x^4+1}$ se présente sous la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^4+1$.
  Or pour tout x de ℝ, $x^4+1>0$.
  Donc une primitive sur ℝ de la fonction f est la fonction $x\longmapsto\ln(x^4+1)$.

3) *Limites de* $\ln u$

Propriétés :
α désigne un nombre, ou $+\infty$ ou $-\infty$, et ℓ un nombre strictement positif :

- si $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\ln(u(x))=+\infty$
- si $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=0$, avec $u(x)>0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\ln(u(x))=-\infty$
- si $\lim\limits_{x\to\alpha}u(x)=\ell$, avec $\ell>0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\ln(u(x))=\ln(\ell)$

Exemple :

Soit $f=\ln u$; u étant connue par sa courbe $\mathscr{C}_u$ dans l'exemple précédent.

- Si $x \to -\infty$, alors $u(x) \to 1$; et par composée $\ln(u(x)) \to \ln 1=0$.
- Si $x \to -1$, avec $x<-1$, alors $u(x) \to +\infty$; et par composée $\ln(u(x)) \to +\infty$.
- Si $x \to -1$, avec $x>-1$, alors $u(x) \to +\infty$; et par composée $\ln(u(x)) \to +\infty$.
- Si $x \to 2$, avec $x<2$, alors $u(x) \to 0$ avec $u(x)>0$; et par composée $\ln(u(x)) \to -\infty$.

On a donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(u(x))=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-1^-} \ln(u(x))=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} \ln(u(x))=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to2^-} \ln(u(x))=-\infty$$

V. La fonction logarithme décimal

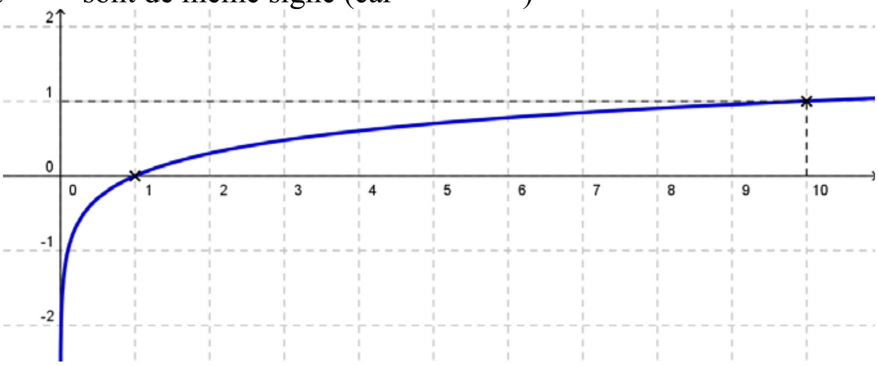
Définition :

La fonction **logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarque :

- On a donc $\log 1=0$, $\log 10=1$.
- Posons $k=\dfrac{1}{\ln 10}$. Ce nombre k est positif, et $\log x=k\ln x$.
  On en déduit que les propriétés de la fonction log sont analogues à celles de la fonction ln : logarithme d'un produit, d'un quotient, limites,...
- $\log x$ et $\ln x$ sont de même signe (car $\ln 10>0$)



Exemple :

$$\log 100=\frac{\ln(10^2)}{\ln(10)}=\frac{2\ln 10}{\ln 10}=2$$