Chapitre 1

Le second degré

I. Polynôme du second degré

1) *Forme d'une fonction trinôme*

Forme réduite

Définition :
On appelle **polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute expression qui peut s'écrire sous la forme ax^2+bx+c où *a*, *b* et *c* sont des réels $(a\neq 0)$.

Exemple :
$P(x)=2x^2-8x+8$ est un trinôme donné sous sa **forme réduite** avec *a* = 2, *b* = - 8 et *c* = 8.

Forme canonique

Propriété :
Tout trinôme ax^2+bx+c peut s'écrire sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ où *a*, α et β sont des réels $(a\neq 0)$.
Cette forme s'appelle la **forme canonique** du trinôme.

Démonstration :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \quad (a\neq 0)$$

Or $\left(x+\frac{b}{2\text{a}}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. On en déduit : $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

On a donc : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Propriété :
Pour tous réels *a*, *b* et *c* avec $a\neq 0$, on a donc :

$$P(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta \text{ avec } \alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

Remarque :
On vérifie que β=P(α).
En effet, $P(\alpha)=P\left(\frac{-b}{2a}\right)=a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c=\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{2\text{b}^2}{4a}+\frac{4\text{ac}}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a}=\beta$

Exemples :

- $P(x)=2x^2-8x+8=2(x^2-4x+4)=2(x-2)^2$
  On obtient donc la forme canonique de *P(x)* avec $a=2$, $\alpha=2$ et $\beta=0$.
- On considère le polynôme $Q(x)=-2x(x-2)+3$
  On a $Q(x)=-2x^2+4x+3$. *(forme réduite avec* $a=-2$ *,* $b=4$ *et* $c=3$ *)*
  En calculant $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2\times(-2)}=1$ et $\beta=\dfrac{-4^2+4\times(-2)\times 3}{4\times(-2)}=\dfrac{-16-24}{-8}=5$.
  Donc $Q(x)=-2(x-1)^2+5$ *(forme canonique* avec $a=-2$ *,* $\alpha=1$ *et* $\beta=5$ *)*

Forme factorisée

Il est parfois possible de factoriser *P(x)*. On obtient alors $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
$a(x-x_1)(x-x_2)$ est la **forme factorisée** de *P(x)*.

Exemples :

- $P(x)=2(x-2)^2$ *(forme factorisée avec* $a=2$ *,* $x_1=2$ *et* $x_2=2$ *)*
- $R(x)=x^2-2x-15$ *(forme réduite avec* $a=1$ *,* $b=-2$ *et* $c=-15$ *)*
  $R(x)=(x-1)^2-16$ *(forme canonique avec* $a=1$ *,* $\alpha=1$ *et* $\beta=-16$ *)*
  $R(x)=(x-5)(x+3)$ *(forme factorisée avec* $a=1$ *,* $x_1=5$ *et* $x_2=-3$ *)*
- $T(x)=2(x-1)^2+5$ *On ne peut pas donner la forme factorisée.*

2) *Sens de variation*

Théorème :
Suivant le **signe de *a***, on obtient le sens de variation de la fonction polynôme du second degré :
$f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$; $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$

- $a>0$ (positif)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Le **minimum** β de *f* est atteint pour $x=\alpha$

- $a<0$ (négatif)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

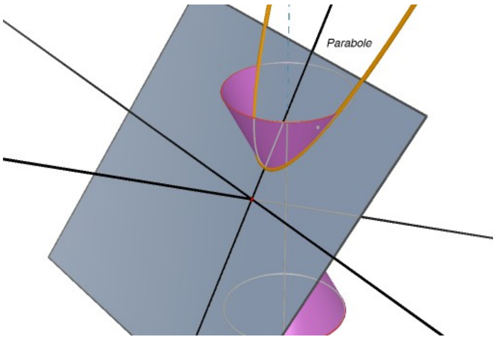
Le **maximum** β de *f* est atteint pour $x=\alpha$

Démonstration :
Pour le cas où $a>0$
En mettant *f* sous sa forme canonique on obtient $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

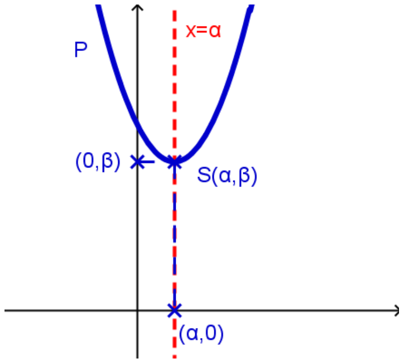
- Pour tout *x*, on a $f(x)\geqslant\beta$ (donc β est un minimum de *f* sur]–∞ ; +∞[)
- Pour x_1 et x_2 appartenant à]–∞ ; α[(donc $x_1<\alpha$ et $x_2<\alpha$), on a :
  Si $x_1<x_2$, (donc $x_1-x_2<0$) alors
  $f(x_1)-f(x_2)=[a(x_1-\alpha)^2+\beta]-[a(x_2-\alpha)^2+\beta]$
  $f(x_1)-f(x_2)=a(x_1-\alpha)^2-a(x_2-\alpha)^2=a[(x_1-\alpha)^2-(x_2-\alpha)^2]$
  $f(x_1)-f(x_2)=a[(x_1-\alpha)^2-(x_2-\alpha)^2]=a[[(x_1-\alpha)-(x_2-\alpha)][(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)]]$
  $f(x_1)-f(x_2)=a[[x_1-x_2][x_1+x_2-2\alpha]]$ avec $x_1-x_2<0$ et $x_1+x_2<2\alpha$ donc
  $f(x_1)-f(x_2)>0$ et $f(x_1)>f(x_2)$
  Ainsi *f* est décroissante sur]–∞ ; α[

On démontre les autres cas de la même manière.

3) Représentation graphique

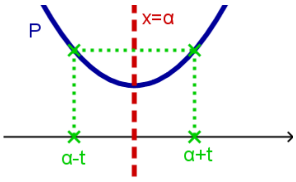


Définition :
La courbe représentative d'une fonction polynôme $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est une **parabole**.



- Son **sommet** S(· ; √2) a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée √2=P(·)
- La droite d'équation $x = \alpha$ est **axe de symétrie** de la parabole.

Démonstration :
$P(\alpha + t) = a(\alpha + t)^2 + b(\alpha + t) + c = a\alpha^2 + b\alpha + c + 2a\alpha t + at^2 + bt = P(\alpha) + at^2 + t(2a\alpha + b)$
Or $\alpha = \frac{-b}{2a}$ donc $2a\alpha + b = 0$. Ainsi $P(\alpha + t) = P(\alpha) + at^2$
De la même manière on a :
$P(\alpha - t) = P(\alpha) + at^2 - t(2a\alpha + b) = P(\alpha) + at^2$
Donc, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\alpha + t) = P(\alpha - t)$
Ainsi $x = \alpha$ est axe de symétrie de la parabole.



Remarque :
Le signe de a permet de connaître l'allure de la parabole :

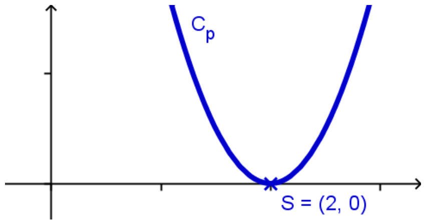
Si $a > 0$
La parabole est tournée vers le haut.

Si $a < 0$
La parabole est tournée vers le bas.

Exemples :

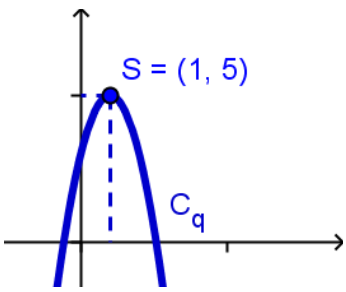
- La courbe représentative de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^2 - 8x + 8$ est une parabole $\mathscr{C}_P$ de sommet S(2 ; 0).

Comme $a = 2$ (positif), la parabole $\mathscr{C}_P$ est tournée vers le haut.



- La courbe représentative de la fonction Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = -2x^2 + 4x + 3$ est une parabole $\mathscr{C}_Q$ de sommet S'(1 ; 5).

Comme $a = -2$ (négatif), la parabole $\mathscr{C}_Q$ est tournée vers le bas.



II. Équation du second degré

1) *Définition*

Définition :
Une **équation du second degré** à **une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2+bx+c=0$$

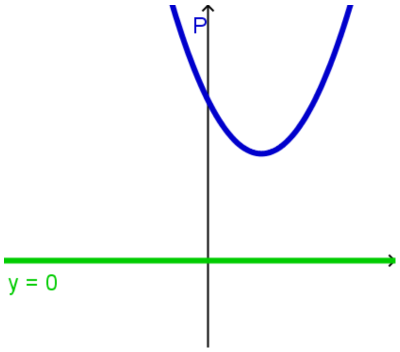
où a, b et c sont des réels donnés et $a\neq 0$.

Exemples :

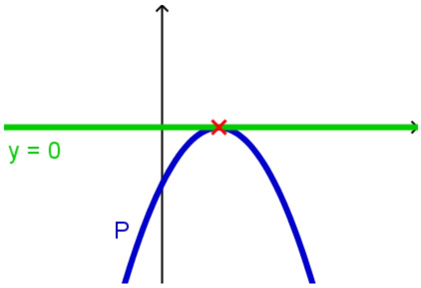
- $3x^2-7x+2=0$
- $2x^2-9=0$
- $-x^2+2x=0$
- L'équation (E) $x^2-4+3x=2x^2-x$ peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$
  En effet, (E) équivaut à $x^2-4+3x-2x^2+x=0$ soit $-x^2+4x-4=0$
  Donc ici $a=-1$; $b=4$ et $c=-4$.

Interprétation graphique :

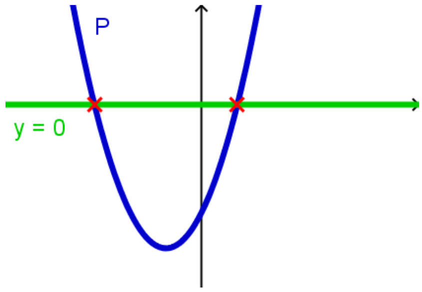
Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ correspondent aux abscisses des points d'intersections entre la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=ax^2+bx+c$ et l'axe des abscisses d'équation $y=0$.



L'équation n'a pas de solution.



L'équation admet une solution.



L'équation admet deux solutions.

2) *Discriminant*

Propriété :
Pour tous réels a, b et c avec $a\neq 0$, on a :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ avec } \Delta=b^2-4ac$$

Démonstration :
On a vu que :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c \text{ donc}$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Définition :
Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ est appelé **discriminant** de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

3) Résolution

Théorème :
Résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$:

$\Delta=b^2-4ac$

- Lorsque $\Delta<0$, l'équation n'a **pas de solution**.
- Lorsque $\Delta=0$, l'équation admet **une solution** $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Lorsque $\Delta>0$, l'équation admet **deux solutions distinctes** :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration :

On sait que $ax^2+bx+c=0$ équivaut à $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]=0$ donc à $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}=0$ $(a\neq 0)$, c'est-à-dire $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$.

En posant $X=x+\dfrac{b}{2a}$, résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ revient donc à résoudre $X^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$.

- Si $\Delta<0$, alors $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$. L'équation n'a pas de solution (car X^2 est positif).
- Si $\Delta=0$, alors l'équation s'écrit $X^2=0$. Cette équation a une seule solution $X=0$, c'est-à-dire $x+\dfrac{b}{2a}=0$ donc $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, alors l'équation admet deux solutions :

$$X_1=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{et} \quad X_2=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

Soit
$$x_1+\frac{b}{2\mathrm{a}}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{et} \quad x_2+\frac{b}{2\mathrm{a}}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

  - Si $a>0$, $\sqrt{4a^2}=2a$ donc :
$$x_1=\frac{-b}{2\mathrm{a}}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b}{2\mathrm{a}}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$$
  - Si $a<0$, $\sqrt{4a^2}=-2a$ donc :
$$x_1=\frac{-b}{2\mathrm{a}}+\frac{\sqrt{\Delta}}{-2\mathrm{a}}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b}{2\mathrm{a}}-\frac{\sqrt{\Delta}}{-2\mathrm{a}}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$$

Exemples :

- Résolution de l'équation $2x^2-3x+5=0$
  $a=2$, $b=-3$ et $c=5$ ainsi $\Delta=(-3)^2-4\times 2\times 5=9-40=-31$ donc $\Delta<0$.
  L'équation n'admet aucune solution.
- Résolution de l'équation $3x^2-x-4=0$
  $a=3$, $b=-1$ et $c=-4$ ainsi $\Delta=(-1)^2-4\times 3\times(-4)=1+48=49$ donc $\Delta>0$.
  L'équation admet deux solutions :
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-7}{6}=\frac{-6}{6}=-1$$
  L'ensemble des solutions S={-1 ; $\frac{4}{3}$ }.

Utilisation de la calculatrice :

```
PROGRAM:DEGRE2
:Prompt A,B,C
:B²-4AC→D
:If D>0
:Then
:Disp "2 SOLS :"
,(-B-√(D))/(2A)►
Frac,"ET",(-B+√(
D))/(2A)►Frac
:Else
:If D=0
:Then
:Disp "1 SOL :",
-B/(2A)►Frac
:Else
:Disp "0 SOL"
:End
```

```
prgmDEGRE2
A=?2
B=?-3
C=?5
0 SOL
                Fait
```

```
prgmDEGRE2
A=?4
B=?-12
C=?9
1 SOL :
                 3/2
                Fait
```

```
prgmDEGRE2
A=?3
B=?-1
C=?-4
2 SOLS :
                  -1
ET
                 4/3
                Fait
```

```
======DEGRE2  ======
"A"?→A↵
"B"?→B↵
"C"?→C↵
"DELTA=":B²-4AC→D◢
↵
If D>0↵
Then "2 SOLUTIONS :"↵
"X1=":(-B-√D)⌟(2A)◢
"X2=":(-B+√D)⌟(2A)◢
↵
Else ↵
If D=0↵
Then "1 SOLUTION:"↵
"X=":-B⌟(2A)◢
↵
Else "0 SOLUTION"↵
IfEnd↵
IfEnd
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

```
A?
2
B?
-3
C?
5
DELTA=
                 -31
0 SOLUTION
```

```
A?
4
B?
-12
C?
9
DELTA=
                   0
1 SOLUTION:
X=
                 3⌟2
            - Disp -
```

```
A?
3
B?
-1
C?
-4
DELTA=
                  49
2 SOLUTIONS :
X1=
                  -1
X2=
                 4⌟3
            - Disp -
```

4) Factorisation du trinôme

Propriété :
On considère le trinôme ax^2+bx+c.

- Lorsque $\Delta>0$, en notant x_1 et x_2 les deux racines, on a :
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
- Lorsque $\Delta=0$, en notant x_0 l'unique racine, on a :
$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$$
- Lorsque $\Delta<0$, le trinôme ax^2+bx+c ne se factorise pas.

Exemple :

On a vu que l'équation $3x^2-x-4=0$ avait deux solutions : -1 et $\frac{4}{3}$.

On a donc $3x^2-x-4=3(x+1)\left(x-\frac{4}{3}\right)$.

Remarques :

- Lorsque l'**équation** $ax^2+bx+c=0$ admet des **solutions**, ces solutions sont les **racines** du **trinôme** ax^2+bx+c.
Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
- Lorsque le polynôme a deux racines distinctes α_1 et α_2, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des deux racines : $\alpha=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$.

5) Signe du trinôme

Propriété :
Soit *f*, une fonction polynôme de degré 2, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ et Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.

- Si $\Delta>0$, alors, x_1 et x_2 étant les racines du trinôme telles que $x_1<x_2$, *f(x)* est du signe de *a* si et seulement si $x\in\,]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$.
- Si $\Delta=0$, alors *f(x)* est du signe de a si et seulement si $x\neq-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, alors, pour tout réel *x*, *f(x)* est du signe de *a*.

Démonstration :

- Si $\Delta>0$, alors, pour tout réel *x*, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme (avec $x_1<x_2$).

On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a

Ainsi, *f(x)* est du signe de *a* si et seulement si $x \in]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$.

- Si $\Delta = 0$, alors, pour tout réel *x*, $f(x) = a(x - x_0)^2$, avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

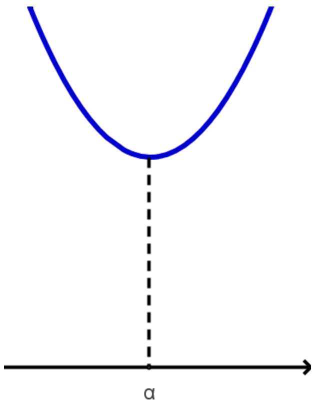
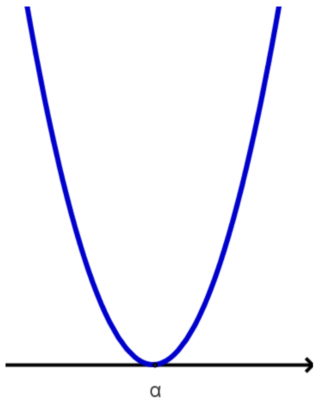
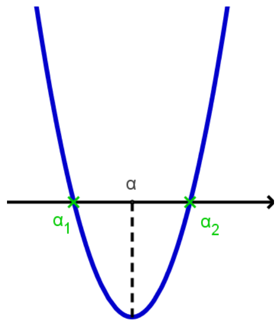
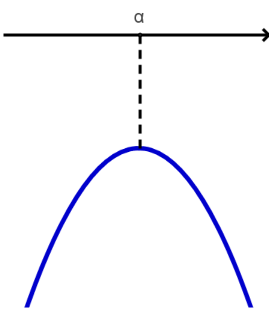
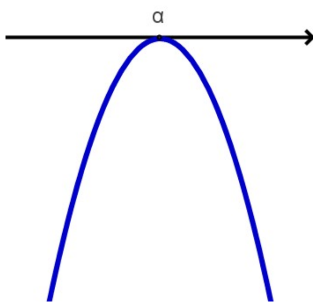
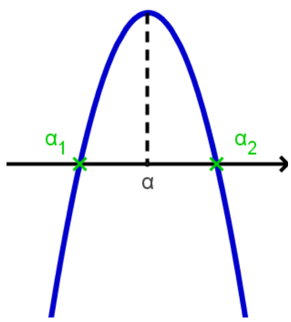
Le carré $(x - x_0)^2$ est strictement positif pour $x \neq x_0$ et il s'annule en x_0 .
Ainsi *f(x)* est du signe de *a* si et seulement si $x \neq -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. On en déduit que, pour tout réel *x*, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Or $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, donc le signe de *f(x)* est celui de *a*.

III. Synthèse

Soit le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$

<table>
<tr><th>$\Delta=b^2-4ac$</th><th>$\Delta<0$</th><th>$\Delta=0$</th><th>$\Delta>0$</th></tr>
<tr><td>Solutions de l'équation $P(x)=0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une seule solution :
$\alpha=-\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :
$\alpha_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\alpha_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Factorisation de P(x)</td><td>Pas de factorisation</td><td>$P(x)=a(x-\alpha)^2$</td><td>$P(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$</td></tr>
<tr><td>$a>0$
Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de P(x)</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>+</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>+ 0 +</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α_1 α_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>+ 0 – 0 +</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$a<0$
Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de P(x)</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>–</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>– 0 –</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α_1 α_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>– 0 + 0 –</td></tr></table></td></tr>
</table>