# Chapitre 6

# Dérivation et applications

## I. Nombre dérivé d'une fonction *f* en un nombre réel *a*

### 1) Limite en zéro d'une fonction

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle contenant 0 ou bien sur un intervalle de borne 0 (de la forme $]a;0[$ ou $]0;a[$ ).
Étudier la limite de *f* lorsque *x* tend vers 0, consiste à étudier les valeurs de $f(x)$ lorsque *x* se rapproche de 0.

**Définition :**
On dit que $f(x)$ admet pour **limite** le réel α lorsque *x* tend vers 0 si les nombres $f(x)$ peuvent être aussi proches de α que l'on veut, pourvu que *x* soit suffisamment proche de 0.
On écrit $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\alpha$ , ce qui se lit : « La limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers 0 est égale à α. »

**Exemples :**

- Soit la fonction *f* définie sur $[-1;0[\cup]0;1]$ par $f(x)=x^2+3x+3$ .

Étudions ce que deviennent les valeurs de $f(x)$ lorsque la variable *x* tend vers zéro, *x* prend par exemple successivement les valeurs -0,1 ; -0,01 ; -0,001 ; … et les valeurs 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; …

| $x$ | -0,1 | -0,01 | -0,001 | … | 0,001 | 0,01 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=x^2+3x+3$ | 2,71 | 2,9701 | 2,997001 | … | 3,003001 | 3,0301 | 3,31 |

On constate que les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 3 lorsque la variable *x* tend vers zéro.
D'où $\lim\limits_{x\to 0} x^2+3x+3=3$ .
Dans cet exemple, la limite de $f(x)$ lorsque *x* se tend vers 0 est égale à un nombre réel.

- Soit la fonction *f* définie sur $[-1;0[\cup]0;1]$ par $f(x)=\frac{1}{x^2}$ .

| $x$ | -0,1 | -0,01 | … | 0,01 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{1}{x^2}$ | 100 | 10000 | … | 10000 | 100 |

Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ .
Dans cet exemple, les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes et ne sont pas bornées lorsque *x* tend vers 0.

- Soit la fonction $f$ définie sur $[-1;0[\cup]0;1]$ par $f(x)=\frac{|x|}{x}$

| $x$ | -0,1 | -0,01 | … | 0,01 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{|x|}{x}$ | -1 | -1 | … | 1 | 1 |

Dans ce cas on dit que la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers 0 n'existe pas.
Dans cet exemple, les valeurs de $f(x)$ ne se rapproche pas d'un unique réel lorsque *x* tend vers 0.

## 2) Nombre dérivé

**Définition :**

Soit I un intervalle contenant un nombre réel $a$ et $f$ une fonction définie sur I.

On dit que la **fonction $f$ est dérivable en $a$** si la limite du rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $h$ tend vers 0, avec $a+h$ dans I, existe et est égale à un nombre réel $\ell$.

Ce nombre $\ell$ est appelé **nombre dérivé de la fonction $f$ en $a$**.

On le note $f'(a)$.

On a donc :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

**Exemple :**

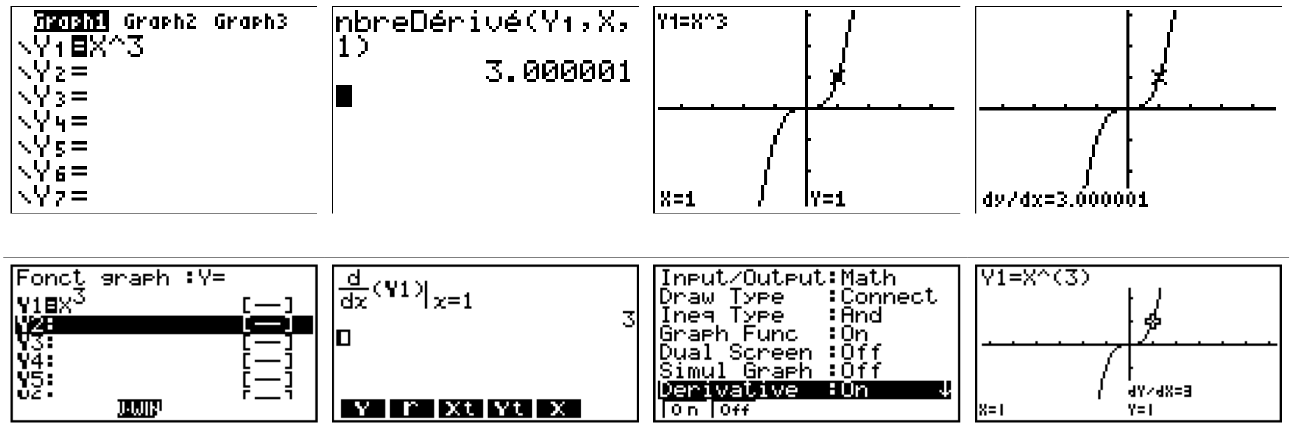
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ et $a=1$.

Pour $h\neq 0$, on a $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(1+h)^3-1^3}{h}=\dfrac{(1+3h+3h^2+h^3)-1}{h}=3+3h+h^2$.

On a vu que $\lim\limits_{h\to 0} h^2+3h+3=3$.

Donc la fonction $f$ est dérivable en 1 et le nombre dérivé de $f$ en 1 vaut 3. Donc $f'(1)=3$.

**Calculatrice :**



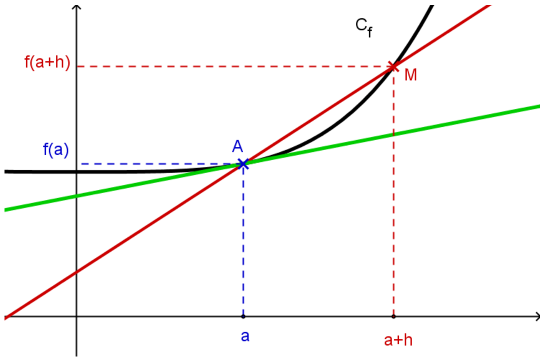

## 3) Interprétation graphique :

**Propriété :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en $a$, nombre réel appartenant à I, et de nombre dérivé $\ell$ en $a$.

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, $A$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$ et $M$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+h$ avec $a+h$ appartenant à I et $h\neq 0$.

Le nombre dérivé $\ell$ de $f$ en $a$ est la limite du coefficient directeur de la droite $(AM)$ lorsque le point $M$ se rapproche du point $A$, c'est-à-dire lorsque $h$ tend vers 0.




*Démonstration :*
On a $A(a;f(a))$ et $M(a+h;f(a+h))$ avec $h \neq 0$.
Le coefficient directeur de la droite $(AM)$ est donc égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Le nombre dérivé de *f* en *a*, c'est-à-dire la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque *h* tend vers 0, est donc bien la limite du coefficient directeur de la droite $(AM)$ lorsque le point *M* se rapproche du point *A*.

# II. Tangente à une courbe

## 1) Tangente en un point à une courbe

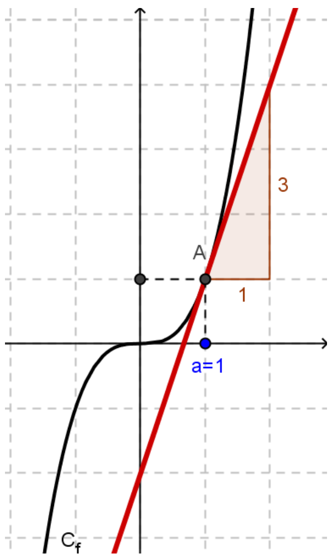
**Définition :**
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en *a*, nombre réel appartenant à I.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et *A* le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse *a*.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est la droite passant par *A* et ayant comme coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

**Exemple :**
Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle ℝ par :

$$f(x)=x^3$$

Le point *A* d'abscisse $a=1$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ a comme coordonnées $(1;1)$.
De plus, le nombre dérivé de *f* en $a=1$ est égal à $f'(1)=3$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point *A* est la droite passant par *A* et ayant comme coefficient directeur 3.




**Remarque :**
Le point $A(a;f(a))$ est le point de contact de la tangente et de $\mathscr{C}_f$.

## 2) Équation d'une tangente à une courbe

**Propriété :**
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction $f$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, $A$ un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$ et $f'(a)$ le nombre dérivé de $f$ en $a$.
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

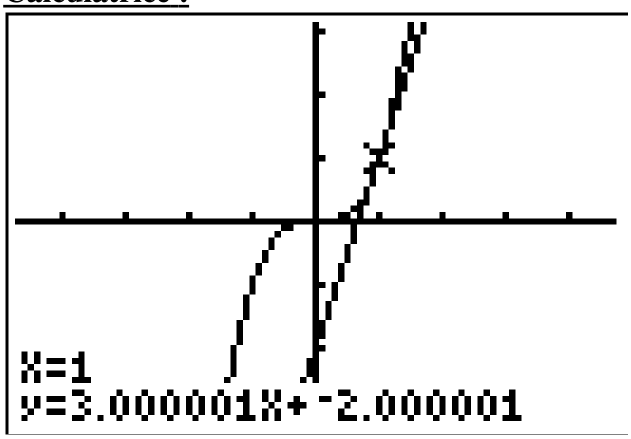
*Démonstration :*
Dans un repère, une équation d'une droite $\mathscr{D}$ ayant comme coefficient directeur $f'(a)$ est :

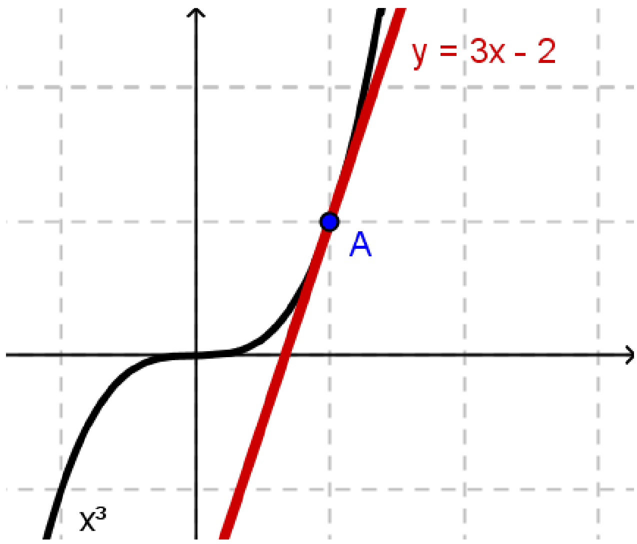
$$y = f'(a)x + b$$

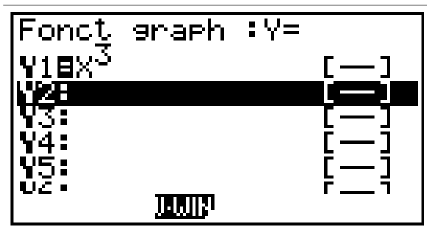
avec $b$ son ordonnée à l'origine.
Comme $A(a ; f(a))$ appartient à $\mathscr{D}$, ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{D}$ c'est-à-dire :
$f(a) = f'(a) \times a + b$. On en déduit que $b = f(a) - f'(a)a$.
L'équation de $\mathscr{D}$ est donc : $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$ soit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

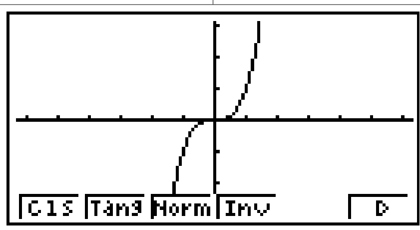
**Exemple :**
Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et le point $A$ d'abscisse $a = 1$ de la courbe $\mathscr{C}_f$.
On a : $a = 1$ ; $f(a) = 1^3 = 1$ ; $f'(a) = 3$.
D'où $y = f'(a)(x-a) + f(a) = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$.
Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A$ est donc $y = 3x - 2$.

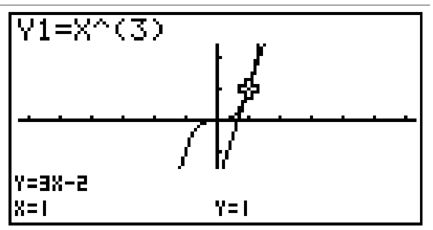
**Calculatrice :**



# III. Fonction dérivée

## 1) Fonction dérivée $f'$

**Définition :**
Une fonction *f* est **dérivable sur un intervalle I** lorsqu'elle est dérivable en tout nombre réel *x* appartenant à I.

**Définition :**
Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction définie sur I qui, à tout nombre réel *x*, fait correspondre le nombre dérivé de la fonction *f* en *x* est appelée **fonction dérivée** de *f*.
La fonction dérivée de *f* est notée $f'$.

**Exemples :**

- Pour la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=k$, (*k* fixé)

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$ : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{k-k}{h}=0$

Ainsi on a $(k)' : x \longmapsto f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} 0=0$

- Pour la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x$,

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$ : $\dfrac{(x+h)-x}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Ainsi on a $(x)' : x \longmapsto f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} 1=1$

- Pour la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^2$,

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$ : $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=2x+h$

Ainsi on a $(x^2)' : x \longmapsto f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} 2x+h=2x$

- Pour la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$,

pour tout $x \in [0;+\infty[$ et $h \neq 0$ : $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ de plus $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{x+h}=\sqrt{x}$

Ainsi, pour $x \in\ ]0;+\infty[$ : $(\sqrt{x})' : x \longmapsto f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- Pour la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$,

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $h \neq 0$ : $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)}-\dfrac{1}{x}}{h}=\dfrac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\dfrac{-h}{x(x+h)}\times\dfrac{1}{h}=-\dfrac{1}{x(x+h)}$

Ainsi on a $(x)' : x \longmapsto f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{x(x+h)}=-\dfrac{1}{x^2}$

## 2) *Dérivées et opérations*

## Dérivée d'une somme de fonctions

**Théorème :**
La somme $u+v$ de deux fonctions dérivables sur un intervalle *I* est une fonction dérivable sur *I* et :

$$(u+v)'=u'+v'$$

*Démonstration :*
Soit $f(x)=(u+v)(x)=u(x)+v(x)$ avec *u* et *v* dérivables sur *I*.
Pour tout $x \in I$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}=\dfrac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}$
Donc : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}+\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$
Et *u* et *v* étant dérivables sur *I :*
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)$
ainsi $(u+v)'(x)=f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=u'(x)+v'(x)$

**Exemple :**
La fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^2+x$ est la somme de deux fonctions *u* et *v* définies par $u(x)=x^2$ et $v(x)=x$
Or *u* et *v* sont dérivables sur ℝ et $u'(x)=2x$ et $v'(x)=1$
Donc pour tout $x \in$ ℝ, $f'(x)=2x+1$ .

## Dérivée d'un produit de fonctions

**Théorème :**
Le produit *uv* de deux fonctions dérivables sur un intervalle *I* est une fonction dérivable sur *I* et :

$$(uv)'=u'v+uv'$$

*Démonstration :*
Soit $f(x)=(uv)(x)=u(x)\times v(x)$ avec *u* et *v* dérivables sur *I*.
Pour tout $x \in I$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=\dfrac{[u(x+h)\times v(x+h)]-[u(x)\times v(x)]}{h}$
Donc : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{u(x+h)\times v(x+h)-u(x)\times v(x+h)+u(x)\times v(x+h)-u(x)\times v(x)}{h}$
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h)+\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}\times u(x)$
Et *u* et *v* étant dérivables sur *I :*
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)$ de plus $\lim\limits_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$ ainsi
$(uv)'(x)=f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$

**Exemple :**
La fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$ est le produit des deux fonctions $u$ et $v$ définies par : $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

Or $u$ et $v$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et on a vu que : $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc, pour tout $x>0$, $f'(x)=\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

**Cas particulier :**
Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $k$ un nombre réel.
La dérivée de $ku$ est $k$ fois la dérivée de $u$.
Si $k$ est une constante : $(ku)'(x)=k\times u'(x)$

**Exemple :** dérivée d'une fonction polynôme
La fonction trinôme définie par : $f(x)=2x^2+8x+3$
En utilisant les règles de calculs des dérivées on obtient :
$f'(x)=2\times 2x+8\times 1+0=4x+8$

## Dérivée d'un quotient de fonctions

**Théorème :**
$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$.
De plus, pour tout $x$ de $I$, $v(x)\neq 0$
Le quotient $\dfrac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur $I$, et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

*Démonstration :*
Soit $f(x)=\dfrac{u}{v}(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u$ et $v$ dérivables sur $I$ et $v(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(\frac{u}{v})(x+h)-(\frac{u}{v})(x)}{h}=\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}=\frac{\frac{u(x+h)\times v(x)-u(x)\times v(x+h)}{v(x+h)\times v(x)}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{u(x+h)\times v(x)-u(x)\times v(x)+u(x)\times v(x)-u(x)\times v(x+h)}{v(x+h)\times v(x)}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x)-\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\times u(x)\right]\times\frac{1}{v(x+h)\times v(x)}$$

Et u et v étant dérivables sur I :
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)$ de plus $\lim\limits_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$
ainsi puisque $v(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

**Exemple :**

La fonction *f* définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ est le quotient des fonctions *u* et *v* définies par : $u(x)=x$ et $v(x)=x-1$

*v* ne s'annule pas sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ et *u* et *v* sont dérivables sur ces intervalles : $u'(x)=1$ et $v'(x)=1$ .

Donc *f* est dérivable sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1\times(x-1)-x\times 1}{(x-1)^2}$

Ainsi pour tout $x\in$ $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

**Cas particulier :**

*v* est une fonction dérivable sur un intervalle *I* telle que, pour tout $x\in I$, $v(x)\neq 0$ .

Alors la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur *I* et : $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2}$ .

**Exemple :**

La fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ est l'inverse de la fonction *v* définie par $v(x)=x^2+1$ ( $v(x)\neq 0$ pour tout réel *x*).

Or pour tout réel *x*, $v'(x)=2x$ . Donc $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ .

## 3) *Dérivées usuelles*

À partir des règles de calcul sur les fonctions dérivées établies on peut dresser un tableau des dérivées usuelles à connaître.

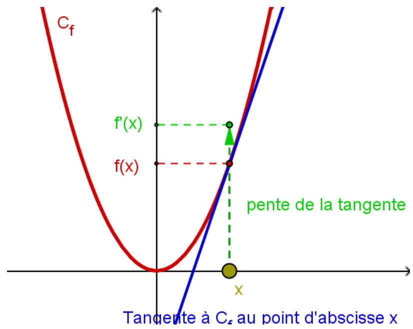
| fonction *f* | Ensemble de définition de *f* | Ensemble de dérivabilité de *f* | fonction dérivée $f'$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)=k$ (*k* constante) | ℝ | ℝ | $f'(x)=0$ |
| $f(x)=x$ | ℝ | ℝ | $f'(x)=1$ |
| $f(x)=x^2$ | ℝ | ℝ | $f'(x)=2x$ |
| $f(x)=x^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$) | ℝ | ℝ | $f'(x)=n\times x^{n-1}$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $[0;+\infty[$ | $]0;+\infty[$ | $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |

# IV. Fonction dérivée et étude de fonction

## 1) *Interprétation graphique*

Dire que *f* est dérivable sur *I* signifie que, pour tout réel *x* de *I*, la courbe $C_f$, représentant la fonction *f*, admet une seule tangente, de coefficient directeur :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



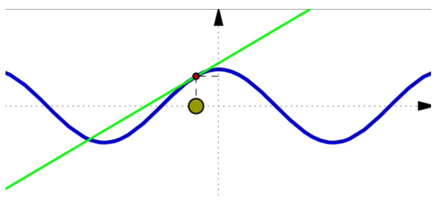

## 2) *Sens de variation*

**Théorème :**
Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle *I*.

- Si la fonction $f$ est **croissante** sur *I*, alors la dérivée est **positive** sur *I*.
- Si la fonction $f$ est **décroissante** sur *I*, alors la dérivée est **négative** sur *I*.
- Si la fonction $f$ est **constante** sur *I*, alors la dérivée est **nulle** sur *I*.

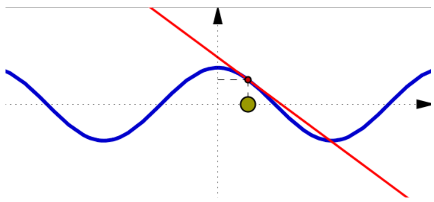
*Démonstration :*
On considère un réel $h>0$ et tel que $x+h \in I$.
Pour tout réel *x* de *I*, $x+h>x$ :

- Si *f* est croissante sur *I*, alors $f(x+h)\geqslant f(x)$ ;
  donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est positif et alors la dérivée sera positive.



*De même, si* $h<0$ *, on démontrerait que* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *reste positif.*

- Si *f* est décroissante sur *I*, alors $f(x+h)\leqslant f(x)$ ;
  donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est négatif et alors la dérivée sera négative.



*De même, si* $h<0$ *, on démontrerait que* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *reste négatif.*

**Théorème réciproque (admis) :**
Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle *I*.

- Si la dérivée est **positive** sur *I*, alors la fonction $f$ est **croissante** sur *I*.
- Si la dérivée est **négative** sur *I*, alors la fonction $f$ est **décroissante** sur *I*.
- Si la dérivée est **nulle** en toute valeur de *I*, alors la fonction $f$ est **constante** sur *I*.

**Remarque :**
L'étude du signe de la dérivée permet donc de donner le sens de variation d'une fonction.

**Exemple :**
Pour la fonction $f$ définie sur ℝ par $f(x)=x^2$, nous avons vu que $f'(x)=2x$, on a donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)=2x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)=x^2$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**Remarque :**
Pour étudier les variations d'une fonction $f$, il n'est pas systématiquement nécessaire de déterminer la fonction dérivée $f'$ et d'en étudier le signe.

Par exemple, soit $g$ définie sur $]2;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^3-8}$.

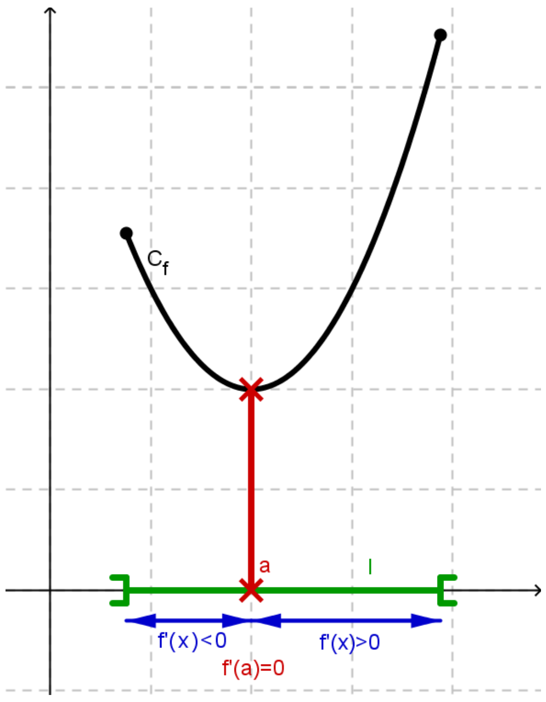
On sait que la fonction $x \longmapsto x^3$ est croissante sur $]2;+\infty[$ donc $g$ est décroissante sur $]2;+\infty[$.

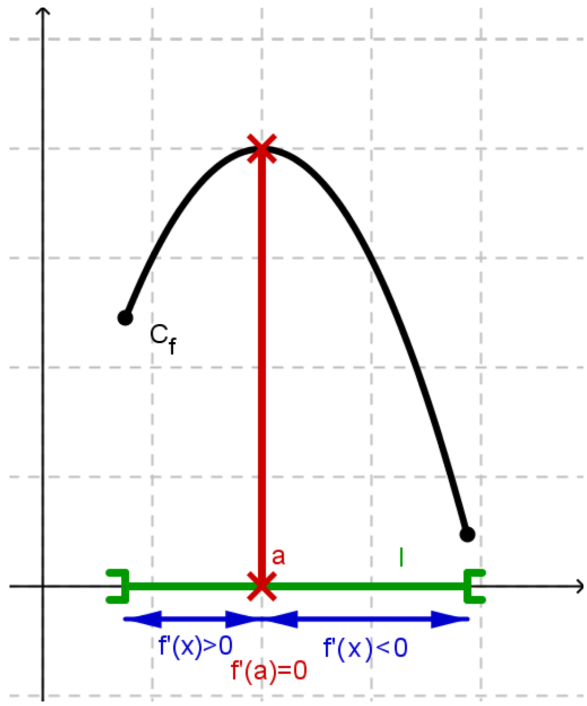
## 3) Extremum

**Théorème :**
Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et *a* un nombre réel appartenant à I.
Si la dérivée s'annule en **changeant de signe** en *a*, la fonction admet un extremum en *a*.

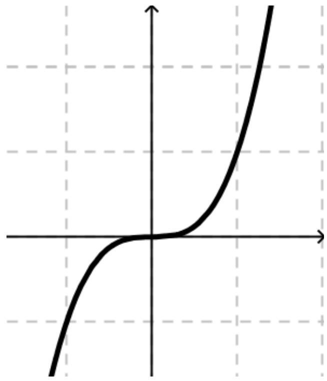
| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | minimum | ↗ |

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | maximum | ↘ |

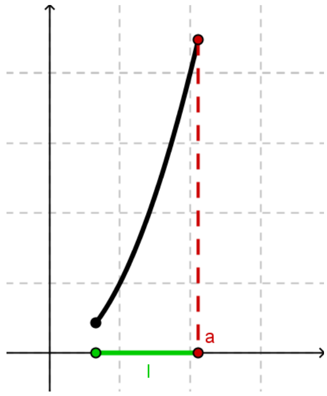


**Remarques :**



- L'hypothèse du changement de signe est nécessaire.
  La fonction $x \longmapsto x^3$ n'admet pas d'extremum sur ℝ, pourtant elle a une dérivée qui s'annule en $x=0$ (mais la dérivée ne change pas de signe).




- Pour l'intervalle I, l'hypothèse qu'il soit ouvert permet d'éviter que le nombre réel *a* soit une de ses extrémités. Si tel est le cas, l'étude des variations permet de conclure.
  Par exemple, dans la situation ci-contre où *f* admet un maximum en *a*.

**Cas particulier :**

**Propriété :**
Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec *a*, *b* et *c* des nombres réels et $a\neq 0$.
Cette fonction *f* admet en $x=\frac{-b}{2a}$ un minimum si $a>0$ et un maximum si $a<0$.

*Démonstration :*
Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec *a*, *b* et *c* des nombres réels et $a\neq 0$.
La dérivée de la fonction *f* est donnée par $f'(x)=2ax+b$ et $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$.

- Cas $a>0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{2a}$

Le tableau de variations de *f* est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2\text{a}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

Donc *f* admet un minimum en $x=-\frac{b}{2a}$

- Cas $a<0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{2a}$

Le tableau de variations de *f* est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2\text{a}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | |

Donc *f* admet un maximum en $x=-\frac{b}{2a}$