

Chapitre 7

Complément sur la dérivation

I. Approfondissement sur les dérivées

1) Fonction composée

Définition :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J , et g une fonction définie et dérivable sur J .

La **fonction composée** des fonctions u et g , notée $g \circ u$, est définie sur I par :

$$g \circ u(x) = g(u(x)) .$$

Exemples :

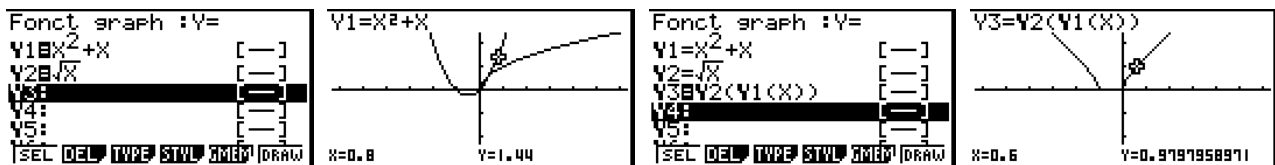
Soit u et g les fonctions suivantes :

$$u : I =]0; +\infty[\rightarrow J =]0; +\infty[\quad \text{et} \quad g : J =]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + x \qquad \qquad \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

La fonction composée est la fonction $g \circ u : I \rightarrow \mathbb{R}$

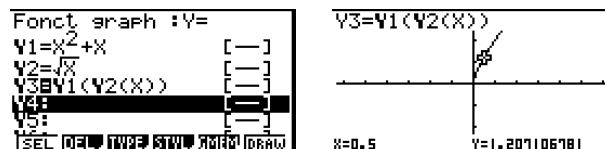
$$x \mapsto g(u(x)) = \sqrt{x^2 + x}$$



Remarques :

- Sur l'exemple précédent, $u \circ g$ est définie par : $u \circ g :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$

$$x \mapsto x + \sqrt{x}$$



- Les propriétés précédentes sont des cas particuliers :

- Pour $f(x) = \sqrt{u(x)}$

$$u : E \rightarrow]0; +\infty[\quad \text{et} \quad g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto u(x) \qquad \qquad \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

La fonction f peut s'écrire $f = g \circ u : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{u(x)}$$

- Pour $f(x) = (u(x))^n$

$$u : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto u(x) \quad \quad \quad x \mapsto x^n$$

La fonction f peut s'écrire $f = g \circ u : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (u(x))^n$$

- Pour $g(x) = f(ax+b)$

$$u : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax+b \quad \quad \quad x \mapsto f(x)$$

La fonction g peut s'écrire $g = f \circ u : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(ax+b)$$

Propriété : associativité de la composition de fonctions

La composée de fonctions est associative.

Soit u, v et w trois fonctions vérifiant les conditions de définition requises alors :

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$$

Exemple :

Soit trois fonctions u, v et w définies par $u : x \mapsto x^2 - 2$, $v : x \mapsto e^x$, $w : x \mapsto 1 - x$

- $w \circ v(x) = w(v(x)) = w(e^x) = 1 - e^x$
et donc $(w \circ v) \circ u(x) = w \circ v(u(x)) = w \circ v(x^2 - 2) = 1 - e^{x^2 - 2}$
- $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2 - 2}$
et donc $w \circ (v \circ u)(x) = w \circ (v \circ u(x)) = w(e^{x^2 - 2}) = 1 - e^{x^2 - 2}$

Propriété : non commutativité de la composition de fonctions

La composée de fonctions n'est pas commutative.

Exemple :

Soit trois fonctions u, v et w définies par $u : x \mapsto x^2 - 2$, $v : x \mapsto e^x$

- $u \circ v(x) = u(v(x)) = u(e^x) = (e^x)^2 - 2 = e^{2x} - 2$
- $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2 - 2}$

Donc $u \circ v(x) \neq v \circ u(x)$.

2) Dérivée d'une fonction composée

Propriété :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle E , à valeurs dans un intervalle F et g une fonction définie et dérivable sur F .

La fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ est dérivable en tout nombre réel x de E et sa dérivée est la fonction :

$$(g \circ u)' : x \mapsto g'(u(x)) \times u'(x).$$

Démonstration :

Soit x_0 , un réel de l'intervalle I . On veut montrer que $g \circ u$ est dérivable en x_0 donc que $\frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 .

$$\frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \times \frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(x_0)}{u(x) - u(x_0)}$$

D'une part, u étant dérivable en x_0 , on sait que $\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $u'(x_0)$ quand x tend vers x_0 .

D'autre part, lorsque x tend vers x_0 , $u(x)$ tend vers $u(x_0)$ car u est continue en x_0 . (puisque'elle est dérivable sur I).

De plus, comme g est dérivable en $u(x_0)$, $\frac{g(u(x)) - g(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)}$ tend vers $g'(u(x_0)) = (g' \circ u)(x_0)$.

Donc :

$\frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \times \frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(x_0)}{u(x) - u(x_0)}$ tend vers $u'(x_0) \times g'(u(x_0))$ pour tout x_0 de I .

Exemple :

La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est la composée de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, à valeurs dans $]0; +\infty[$, et de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

On sait que $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

La fonction f est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$u'(x) \times g'(u(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times -\frac{1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

Cas particuliers :

- La fonction f , définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$, est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- Si, pour tout x de I , $u(x) > 0$, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- Soit n , un entier relatif non nul, et f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$.
 - Si $n \geq 1$, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = n u'(x) (u(x))^{n-1}$.
 - Si $n \leq -1$ et si u ne s'annule pas sur I , alors f est dérivable sur I et
$$f'(x) = n u'(x) (u(x))^{n-1}.$$

Monotonie d'une fonction composée

Propriétés :

- Si g et u sont de **même monotonie** alors la fonction $g \circ u$ est **croissante**.
- Si g et u sont de **monotonie contraire** alors la fonction $g \circ u$ est **décroissante**.

Démonstration :

La fonction dérivée de la fonction $g \circ u$ est la fonction notée $(g \circ u)'(x) = (g'(u(x))) \times u'(x)$.

- Si u et g sont croissantes alors u' et g' sont positives et $(g \circ u)'$ l'est aussi.
Si u et g sont décroissantes alors u' et g' sont négatives et $(g \circ u)'$ est positive.
Dans les deux cas, $g \circ u$ est croissante.
- Si u est croissante et g est décroissante alors u' est positive et g' est négative donc $(g \circ u)'$ est négative.
Si u est décroissante et g est croissante alors u' est négative et g' est positive donc $(g \circ u)'$ est négative.
Dans les deux cas, $g \circ u$ est décroissante.

3) Dérivée seconde

Définitions :

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

La fonction f est **deux fois dérivable** sur I si f' est elle-même dérivable sur I .

On note f'' la dérivée de f' . Elle est appelée **dérivée seconde** de f .

Exemple :

Soit f , la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 5x + e^x$.

f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et on a $f'(x) = 3x^2 + 5 + e^x$.

f' est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et on a $(f')'(x) = 6x + e^x$.

f est donc deux fois dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée seconde est définie par $f''(x) = 6x + e^x$.

II. Convexité : approche graphique

1) Fonctions convexes et concaves

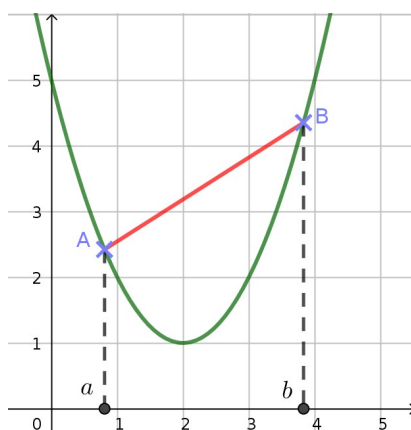
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère.

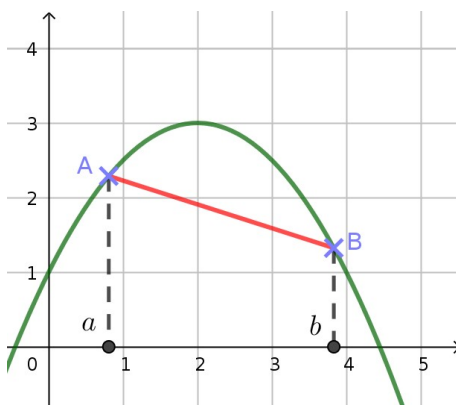
- f est **convexe** sur I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe \mathcal{C} située entre les points $A(a ; f(a))$ et $B(b ; f(b))$ est **en dessous** de la sécante (AB).
- f est **concave** sur I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe \mathcal{C} située entre les points $A(a ; f(a))$ et $B(b ; f(b))$ est **au-dessus** de la sécante (AB).

Exemples :

- La fonction représentée ci-dessous est convexe :



- La fonction représentée ci-dessous est concave :



- La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur \mathbb{R} .
- La fonction racine carrée est concave sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.

Remarque :

Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s) elle est concave.

Propriétés :

- Si f est une fonction **convexe** sur un intervalle I alors, pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0 ; 1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

- Si f est une fonction **concave** sur un intervalle I alors, pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0 ; 1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Démonstration :

Soient deux réels x et y et soit t un réel de $[0 ; 1]$.

Soient $A(x ; f(x))$ et $B(y ; f(y))$.

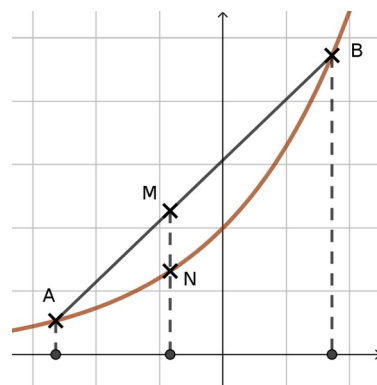
Alors le point $M(tx + (1-t)y ; tf(x) + (1-t)f(y))$ appartient au segment $[AB]$, sécante de \mathcal{C}_f .

f étant convexe, cette sécante est située au-dessus de \mathcal{C}_f .

M est donc située au-dessus du point N de coordonnées

$(tx + (1-t)y ; f(tx + (1-t)y))$.

D'où $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.



Propriété :

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I .

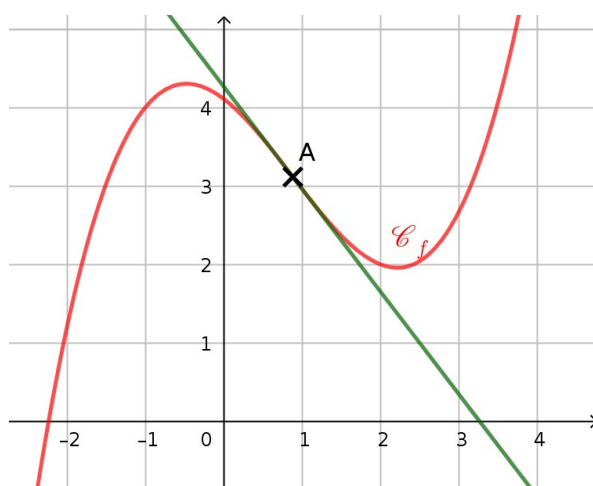
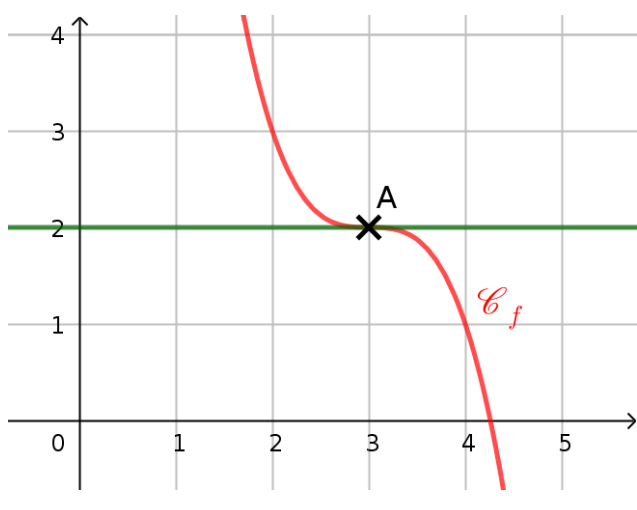
2) Point d'inflexion

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , \mathcal{C} sa courbe représentative et A un point de \mathcal{C} .

A est un **point d'inflexion** de \mathcal{C} si \mathcal{C} admet une tangente en A et si \mathcal{C} traverse cette tangente en A .

Exemples :



Remarque :

En l'abscisse d'un point d'inflexion A de la courbe représentative de f , la fonction f change de convexité.

III. Convexité des fonctions dérivables

1) Caractérisation de la convexité

Propriétés :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur l'intervalle I .
- f'' est positive sur l'intervalle I .
- f' est croissante sur I .

Exemple :

On considère la fonction polynôme f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On a $f''(x) = 6$.

La fonction f'' est positive sur \mathbb{R} , donc la fonction f est convexe sur \mathbb{R} .

Propriétés :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est concave sur l'intervalle I .
- f'' est négative sur l'intervalle I .
- f' est décroissante sur I .

2) Convexité et tangente

Propriétés :

Soit f une fonction définie et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

Soit I un intervalle sur lequel f est dérivable.

- Sur l'intervalle I , f est convexe si et seulement si \mathcal{C}_f est au-dessus de toutes ses tangentes.
- Sur l'intervalle I , f est concave si et seulement si \mathcal{C}_f est en dessous de toutes ses tangentes.

Démonstration :

On suppose f convexe sur I . Soit $x_0 \in I$.

- L'équation de la tangente T_{x_0} à \mathcal{C}_f au point d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Soit Φ la fonction définie sur I par la différence entre la fonction et sa tangente.

$$\Phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0).$$

Alors Φ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant Φ' sa dérivée, on obtient :

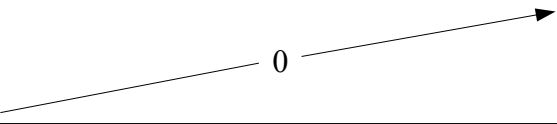
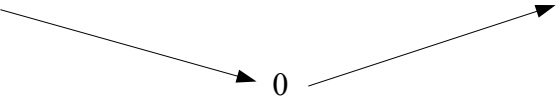
$$\Phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0).$$

- La fonction f est convexe sur I , donc la fonction f' est croissante sur I , donc la fonction Φ' l'est aussi.

Or $\Phi'(x_0) = 0$, donc pour tout réel x de I :

- si $x \leq x_0$, alors $\Phi'(x) \leq 0$
- si $x \geq x_0$, alors $\Phi'(x) \geq 0$

Donc, la fonction Φ est décroissante sur $]-\infty ; x_0] \cap I$ et croissante sur $]x_0 ; +\infty] \cap I$.

x	x_0
$\Phi'(x)$	
$\Phi(x)$	

De plus, $\Phi(x_0) = 0$, donc 0 est le minimum de Φ sur I , donc la fonction Φ est positive sur I .

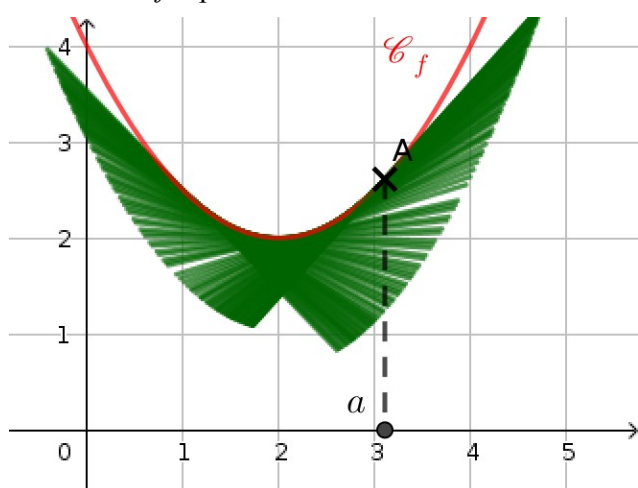
Donc, pour tout réel x appartenant à I , $f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) \geq 0$.

Donc \mathcal{C}_f est au-dessus de T_{x_0} sur l'intervalle I .

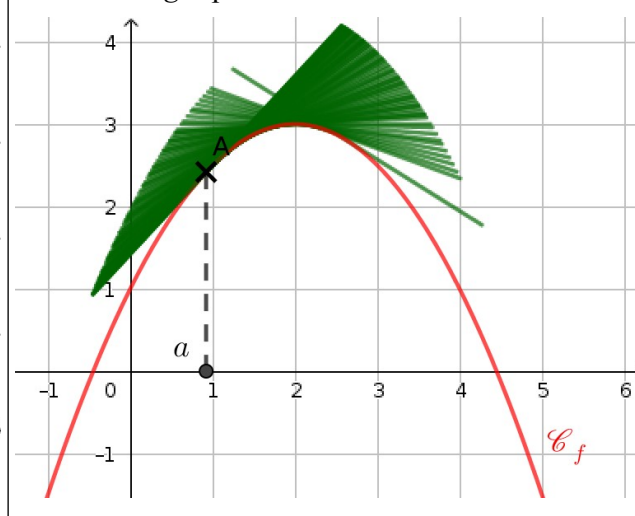
- En conclusion, sur I , la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de toutes ses tangentes.

Exemple :

La fonction f représentée ci-dessous est convexe.



La fonction g représentée ci-dessous est concave.



Remarque :

Une fonction croissante et convexe sur un intervalle I est une fonction qui croît « de plus en plus vite » sur I . Si elle est dérivable sur I , les pentes des tangents à sa courbe représentative augmentent quand les abscisses augmentent.

Pour une fonction croissante et concave, c'est le contraire : elle croît « de moins en moins vite ».

3) Point d'inflexion

Propriétés :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I , \mathcal{C}_f sa courbe représentative et a un réel appartenant à I .

- Si f' change de sens de variation en a , alors \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a .
- Si f'' s'annule et change de signe en a , alors \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a .