Chapitre 13

Probabilités

I. Vocabulaire

1) Expérience aléatoire

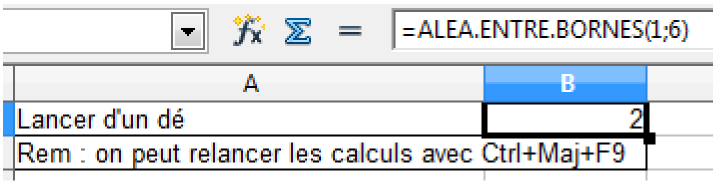
Définition :

Une **expérience** est dite « **aléatoire** » si elle vérifie deux conditions :

- Elle conduit à des **résultats** (ou **issues**) possibles qu'on est parfaitement **capable de nommer**.
- **On ne sait pas** lequel de ces résultats va se produire quand on réalise l'expérience.

Exemple :
« On lance une pièce de monnaie et on regarde sur quelle face elle tombe ».

Remarque :
On utilise parfois le tableur pour simuler une expérience aléatoire :



2) Événement

Définition :

À partir d'une **expérience aléatoire**, on peut définir ce qu'on appelle des **événements** qui sont des **ensembles de résultats**.

Exemples :
Expérience aléatoire : « lancer d'un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 ».

- « obtenir un nombre pair » est un **événement** car c'est l'ensemble des résultats suivants : « obtenir le nombre 2 » ou « obtenir un 4 » ou « obtenir un 6 »
- « obtenir le nombre 1 » est un **événement élémentaire** (il n'est réalisé que par **une issue**).
- « obtenir un nombre impair » est un **événement non élémentaire** (il est réalisé par plus d'une issue)
- « obtenir un nombre inférieur à 7 » est un **événement certain**.
- « obtenir un nombre supérieur à 8 » est un **événement impossible**.

Définition :

Deux **événements** sont **incompatibles** s'ils ne peuvent **pas** se réaliser en **même temps**.

Exemple :
Expérience aléatoire : « lancer d'un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 ».
« obtenir le nombre 1 » et « obtenir un 4 » sont des événements **incompatibles** (ils ne peuvent se produire simultanément).

Définition :

L'événement contraire d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

On le note ***non A*** : $\overline{A}$

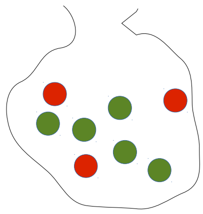
Exemple :
Expérience aléatoire : « lancer d'un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 ».
L'événement « obtenir un nombre impair » est l'événement contraire de l'événement « obtenir un nombre pair ».

II. Probabilité

1) *Définition intuitive*

Pour certaines **expériences aléatoires**, on peut déterminer, par un **quotient**, la « **chance** » qu'un événement a de se produire.
Ce quotient est appelé **probabilité de l'événement.**

Exemple :
Si on tire, au hasard, une boule dans un sac contenant 8 boules dont 3 rouges et 5 vertes, la probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{3}{8}$, car on a 3 « chances » sur 8 de tirer une boule rouge.

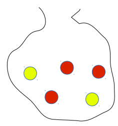


2) *Probabilité et fréquence*

Propriété :

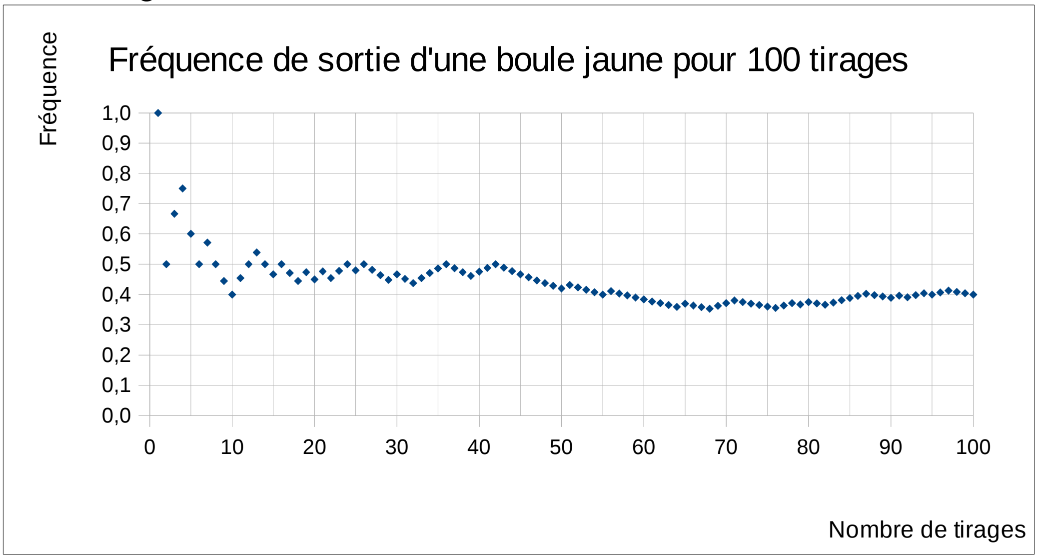
Si on **répète** une expérience aléatoire un **très grand nombre de fois**, la **fréquence** de n'importe quel événement de cette expérience finit par **se stabiliser** autour d'un nombre qui est la **probabilité** de cet événement.

Exemple :
Une urne contient 2 boules jaunes et 3 boules rouges. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à la couleur de la boule tirée.

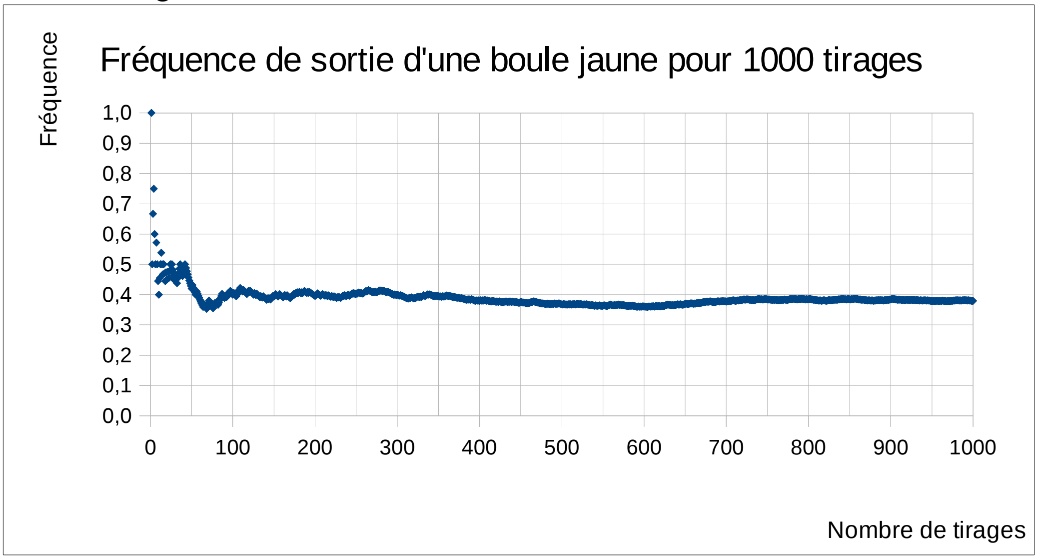


Si on **renouvelle un très grand nombre de fois** cette expérience (en remettant à chaque fois la boule tirée de l'urne), la **fréquence** du résultat « la boule est jaune » **se stabilise** autour de $\frac{2}{5}$ (**probabilité** de l'événement « obtenir une boule jaune »).

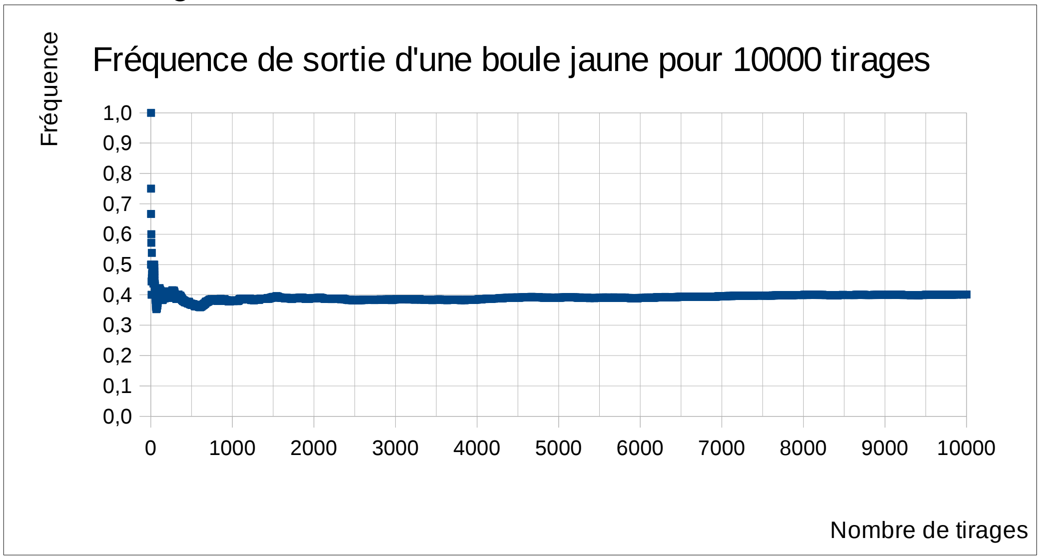
- Pour 100 tirages



- Pour 1000 tirages



- Pour 10000 tirages



3) Calculer une probabilité

Propriété (équiprobabilité) :

Quand les **résultats** (ou **issues**) d'une expérience aléatoire ont tous la **même probabilité** alors la probabilité d'un événement est égale au quotient :

$$\frac{\textit{nombre de résultats favorables à l'évènement}}{\textit{nombre de résultats possibles}}$$

Exemple :
Expérience aléatoire : « on lance un dé à 6 faces numérotées ».

- La probabilité de l'événement : « obtenir un nombre strictement inférieur à 5 » est $\frac{4}{6}$.
- La probabilité de l'événement : « obtenir un nombre inférieur à 7 » est 1 (**événement certain**).
- La probabilité de l'événement : « obtenir un nombre supérieur à 8 » est 0 (**événement impossible**).

Propriétés :
- La **probabilité** d'un événement est un nombre compris **entre 0 et 1**.
- La **somme** des probabilités des événements élémentaires est **égale à 1**.
- La **probabilité** d'un événement **certain** est **1**.
- La **probabilité** d'un événement **impossible** est **0**.

Propriété :

Lorsque deux événements sont **incompatibles**, la probabilité pour que **l'un ou l'autre** se réalise est la **somme** de leurs probabilités.

Exemple :
Expérience aléatoire : « on lance un dé à 6 faces numérotées ».
Les événements A : « obtenir le nombre 1 » et B : « obtenir un nombre pair » sont incompatibles.

Donc la probabilité de A ou B est $p(A)+p(B)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Propriété :

La **somme** des probabilités d'un **événement** A et de son **contraire** est **1** :

$$p(A)+p(\overline{A})=1$$

Exemple :
Expérience aléatoire : « on lance un dé à 6 faces numérotées ».
L'événement contraire de l'événement A : « sortie du nombre 1 » est l'événement $\overline{A}$: « sortie d'un nombre autre que 1 ».

Sa probabilité est : $p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Annexe : Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo permet, par une approche probabiliste, de déterminer des valeurs approchées de π.

- On place des points, aléatoirement, dans un carré de côté 1.
- Puis on compte les points à l'intérieur du quart de cercle de rayon 1.

On obtient ainsi une valeur approchée du rapport entre les aires du quart de cercle et du carré : $\frac{\pi}{4}$