

# Chapitre 11

## Produit scalaire dans l'espace

### I. Produit scalaire

#### 1) Produit scalaire dans l'espace

##### Définition :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace et  $A, B, C$  trois points tels que  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$ . Les points  $A, B, C$  appartiennent à un plan  $\mathcal{P}$  et le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans l'espace est, par définition, égal au produit scalaire des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  calculé dans le plan  $\mathcal{P}$ .

##### Conséquence :

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de l'espace, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

##### Remarques :

- Le produit scalaire ne dépend que des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et non du choix de leurs représentants ou du plan  $\mathcal{P}$ , car ce produit scalaire peut s'exprimer au moyen des normes de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  seulement :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- Pour calculer un produit scalaire, on choisit deux représentants des vecteurs situés dans un même plan.

##### Propriété :

Le **carré scalaire** d'un vecteur  $\vec{u}$  de l'espace est le **réel** noté  $\vec{u}^2$ , vérifiant  $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ .

On a, comme dans le plan :  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$  et par suite  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$ .

*Démonstration :*

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{u}\|^2) = \frac{1}{2} (2\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{0}\|^2) = \frac{1}{2} (2\|\vec{u}\|^2) = \|\vec{u}\|^2$$

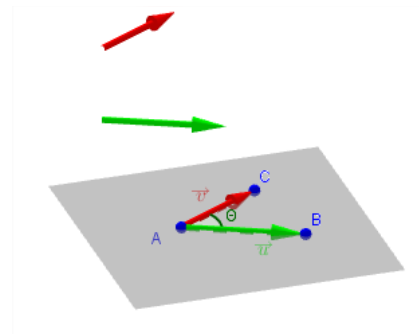
#### 2) Autres expressions du produit scalaire

- Cosinus

##### Propriété :

Si  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$  sont deux vecteurs non nuls de l'espace, alors

$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos \theta$  avec  $\theta = \widehat{BAC}$ .



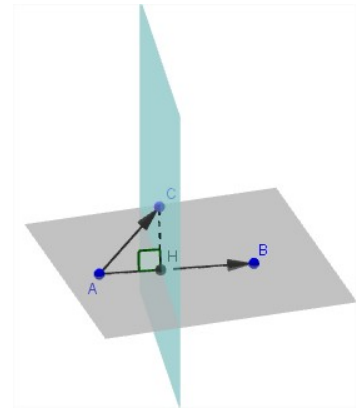
- **Projection orthogonale**

**Propriété :**

Si  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$  sont deux vecteurs non nuls de l'espace et si  $H$  est le projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ .

**Remarque :**

Si  $K$  est le projeté orthogonal du point  $B$  sur la droite  $(AC)$ , on a aussi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AK} \cdot \vec{AC}$ .

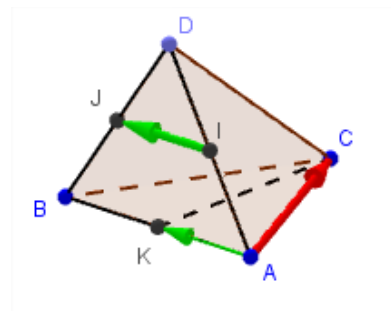


**Exemple :**

Soit le tétraèdre régulier ABCD de côté 1.

On a  $\vec{IJ} \cdot \vec{AC} = \vec{AK} \cdot \vec{AC}$  et comme ABC est équilatéral, le point C se projette orthogonalement sur  $[AB]$  en son milieu  $K$  :

$$\vec{IJ} \cdot \vec{AC} = \vec{AK} \cdot \vec{AC} = \vec{AK}^2 = \frac{1}{4}$$



## II. Propriétés du produit scalaire

### 1) Repère orthonormé de l'espace

**Définition :**

Un repère  $(O; I, J, K)$  de l'espace est **orthonormé** lorsque les droites  $(OI)$ ,  $(OJ)$  et  $(OK)$  sont **deux à deux perpendiculaires** et qu'on a les égalités de distances  $OI = OJ = OK = 1$ .

**Remarque :**

Lorsque le repère  $(O; I, J, K)$  de l'espace est orthonormé, chaque axe est perpendiculaire à toute droite passant par le point  $O$  et contenue dans le plan défini par les deux autres axes. Ainsi la droite  $(OI)$  est perpendiculaire à toute droite du plan  $(OJK)$  passant par  $O$ .

**Propriété :**

Soit  $(O; I, J, K)$  un **repère orthonormé** de l'espace et  $M$  un point de coordonnées  $(x; y; z)$  dans ce repère.

La longueur  $OM$  est la norme du vecteur  $\vec{OM}$ . Elle vérifie :

$$OM = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

*Démonstration :*

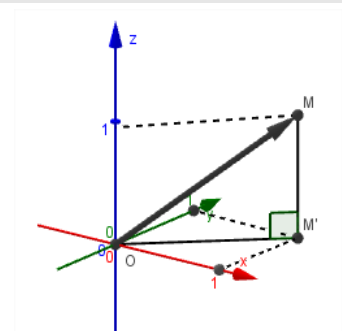
Soit  $M$  le point de coordonnées  $(x; y; z)$ .

On note  $M'$  le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $(xOy)$ .

Donc  $M'(x; y; 0)$ .

Le repère est orthonormé donc  $OM^2 = OM'^2 + MM'^2$ , c'est-à-dire :

$$\|\vec{OM}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



**Remarque :**

Si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  alors

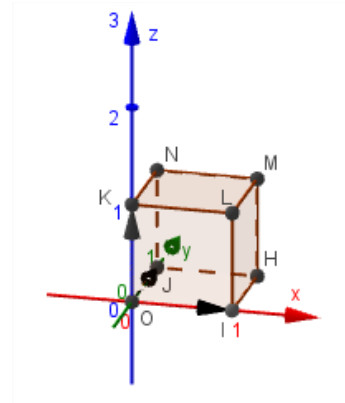
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

**Exemple :**

Un cube dont l'arête mesure une unité de longueur fournit un modèle de repère orthonormé de l'espace.

On note le repère  $(O; I, J, K)$  ou  $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ .

$$OM = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

**2) Expression analytique du produit scalaire****Propriété :**

Dans un repère orthonormé de l'espace, si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$
**Démonstration :**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Ainsi

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} [(x^2 + y^2 + z^2) + (x'^2 + y'^2 + z'^2) - ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)].$$

En développant le membre de droite, il vient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xx' - x'^2 - y'^2 - z'^2 + 2yy' - y'^2 - z'^2 + 2zz' - z'^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (2xx' + 2yy' + 2zz') = xx' + yy' + zz'$$

**Exemple :**

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-4) + 2 \times 5 + 3 \times 7 = 27$

**Remarques :**

- Si  $\vec{u} = \vec{v}$  la formule donne  $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ . On retrouve  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- Si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  alors :  

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$
- La formule est fautive si le repère n'est pas orthonormé.

### 3) Propriétés algébriques

#### Propriétés :

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace et  $k$  un réel.

- **Symétrie :**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- **Bilinéarité :**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ et } \vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

#### Démonstrations :

- Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $k\vec{u}$  et  $\vec{v}$  étant coplanaires, les propriétés de symétrie et  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$  résultent des propriétés de produit scalaire dans le plan.
- Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  peuvent ne pas être coplanaires.

On choisit un repère orthonormé de l'espace et on note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ .

Alors  $\vec{v} + \vec{w} \begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \\ z' + z'' \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') + z(z' + z'')$

Donc,  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x x' + y y' + z z' + x x'' + y y'' + z z'' = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

#### Propriétés (identités remarquables) :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace :

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  soit  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  soit  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$  soit  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

#### Exemple :

$ABCD$  est un tétraèdre régulier de côté  $a$ .

$I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des arêtes  $[AD]$  et  $[BC]$ .

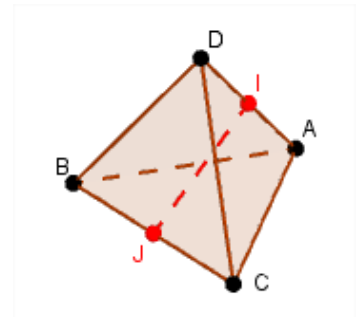
Pour calculer la longueur  $IJ$ , on peut procéder ainsi :

$$IJ^2 = \vec{IJ}^2 = (\vec{IA} + \vec{AJ})^2 \text{ (d'après la relation de Chasles)}$$

$$(\vec{IA} + \vec{AJ})^2 = (\vec{AJ} - \vec{AI})^2 \text{ (car } I \text{ est le milieu de } [AD])$$

$$\text{Donc } IJ^2 = AJ^2 - 2\vec{AJ} \cdot \vec{AI} + AI^2$$

Or dans le triangle équilatéral  $ABC$ , on sait que  $AJ = a \frac{\sqrt{3}}{2}$



On sait aussi que  $AI = \frac{1}{2}a$ .  $\vec{AJ} \cdot \vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AC} \cdot \vec{AD}$ .

Or,  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB \times AD \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a^2$  et de même  $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2}a^2$ . Donc  $\vec{AJ} \cdot \vec{AI} = \frac{1}{4}a^2$ .

Ainsi  $IJ^2 = \frac{3}{4}a^2 - 2 \times \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$  et  $IJ = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### III. Produit scalaire et orthogonalité

#### Définition :

Deux **vecteurs** sont **orthogonaux** lorsque leur **produit scalaire** est **nul**.

#### 1) Orthogonalité de deux droites

#### Propriété :

Deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont **orthogonales** si, et seulement si,  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ .

#### *Démonstration :*

$A$  est un point de l'espace.

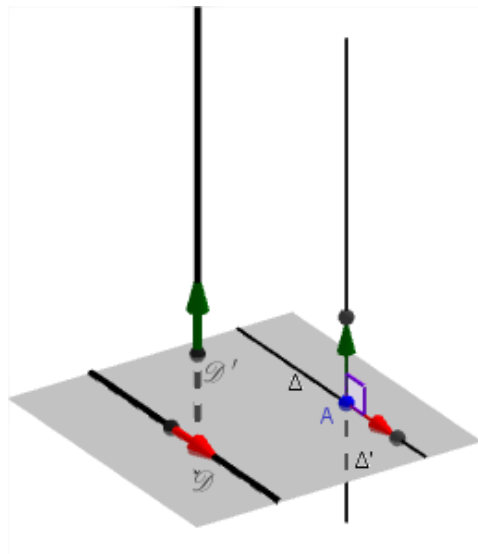
$\Delta$  et  $\Delta'$  sont les droites qui passent par  $A$  et de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ .

La définition de deux droites orthogonales permet d'affirmer que :

$\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont orthogonales si, et seulement si,  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont perpendiculaires en  $A$ .

Or, on sait que dans le plan,  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont perpendiculaires si, et seulement si,  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ .

On en déduit que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont orthogonales si, et seulement si,  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ .

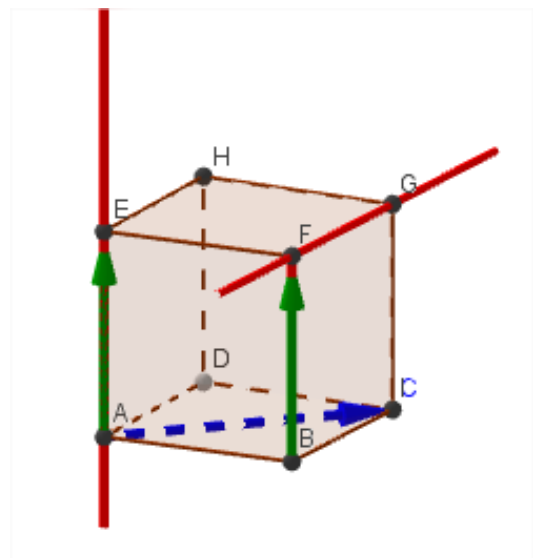


#### Exemple :

Dans le cube  $ABCDEFGH$  :

- $\vec{u} = \vec{BF}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$  sont orthogonaux.
- Les droites  $(AE)$  et  $(FG)$  sont orthogonales, car :

$$\vec{AE} \cdot \vec{FG} = \vec{AE} \cdot \vec{AD} = 0$$



## 2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

### Propriétés :

$d$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

$\mathcal{P}$  est un plan dirigé par un couple  $(\vec{v}; \vec{v}')$  de vecteurs non colinéaires.

La droite  $d$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$$

### Démonstration :

Par définition, dire que  $d$  et  $\mathcal{P}$  sont orthogonaux signifie que  $d$  est orthogonale à toutes les droites du plan  $\mathcal{P}$ , ce qui équivaut à  $\vec{u} \cdot \vec{MN} = 0$  quels que soient les points  $M$  et  $N$  du plan  $\mathcal{P}$ .

- La condition est nécessaire

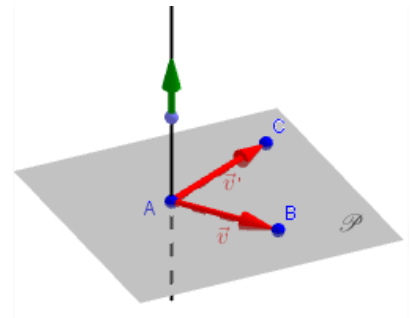
En effet, si  $d$  et  $\mathcal{P}$  sont orthogonaux, alors quels que soient les points  $M$  et  $N$  de  $\mathcal{P}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{MN} = 0$ .

Donc, en particulier  $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$  et  $\vec{u} \cdot \vec{AC} = 0$

- La condition est suffisante

En effet, quels que soient les points  $M$  et  $N$  de  $\mathcal{P}$ , il existe des nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{MN} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}'$  car le couple  $(\vec{v}; \vec{v}')$  dirige  $\mathcal{P}$ .

Donc  $\vec{u} \cdot \vec{MN} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{v}') = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$ .



### Remarques :

- Le produit scalaire permet donc de démontrer le théorème :  
*Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.*
- Tout plan admet au moins une droite qui lui est orthogonale.

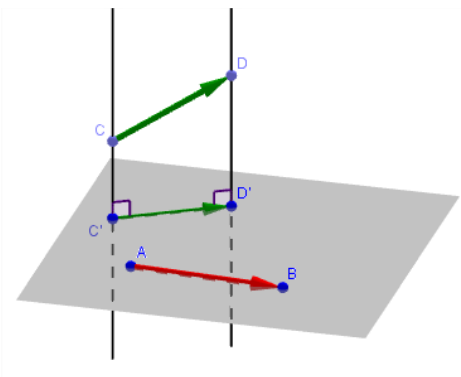
### Remarque : projection orthogonale sur un plan

On ne change pas le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  en remplaçant l'un d'entre eux (par exemple  $\vec{CD}$ ) par le vecteur  $\vec{C'D'}$  tel que  $C'$  et  $D'$  sont les projetés orthogonaux de  $C$  et  $D$  sur un plan  $\mathcal{P}$  contenant la droite  $(AB)$ .

En effet :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CC'} + \vec{C'D'} + \vec{D'D}) = \vec{AB} \cdot \vec{CC'} + \vec{AB} \cdot \vec{C'D'} + \vec{AB} \cdot \vec{D'D}.$$

$$\text{Or } \vec{AB} \cdot \vec{CC'} = \vec{AB} \cdot \vec{D'D} = 0 \text{ donc } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}.$$



## IV. Équation cartésienne d'un plan

### 1) Vecteur normal à un plan

#### Définition :

Dire qu'un vecteur  $\vec{n}$  non nul est **normal** à un plan  $\mathcal{P}$  signifie que toute droite de vecteur directeur  $\vec{n}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ .

#### Propriété :

$A$  est un point de l'espace et  $\vec{n}$  un vecteur non nul.

L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est le plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

#### Démonstration :

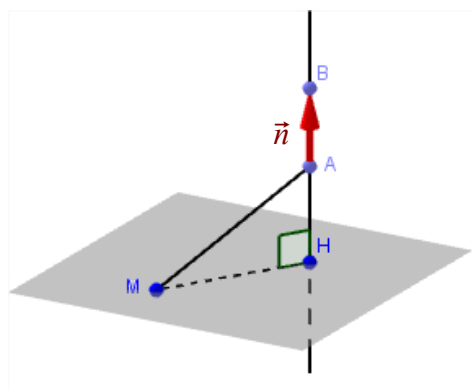
On note  $\vec{n} = \vec{AB}$  et  $H$  le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur la droite  $(AB)$ .

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = \vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB}.$$

Ainsi  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$  si, et seulement si,  $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0$  c'est-à-dire  $A = H$  car les vecteurs  $\vec{AH}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires.

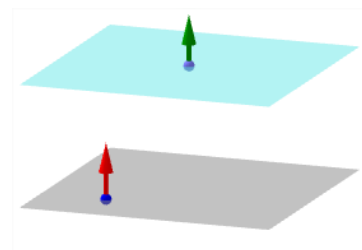
Autrement dit,  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$  si, et seulement si,  $A$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $(AB)$ .

L'ensemble cherché est donc le plan passant par  $A$  et orthogonal à  $(AB)$ .



#### Propriété :

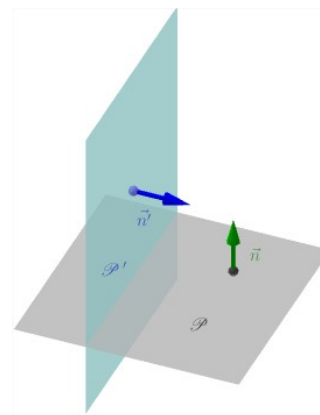
Deux plans sont **parallèles** si, et seulement si, un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.



#### Propriété :

$\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont deux plans de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$ .

Dire que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont **perpendiculaires** signifie que  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ .



## 2) Équation cartésienne d'un plan

### Propriétés :

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

- Un plan de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  a une équation de la forme  $ax+by+cz+d=0$ , où  $d$  désigne un nombre réel. On dit que c'est une **équation cartésienne** de ce plan.
- Réciproquement  $a, b, c$  et  $d$  étant quatre nombres réels donnés avec  $a, b$  et  $c$  non tous nuls, l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que  $ax+by+cz+d=0$  est un plan de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

### Démonstration :

- Un point  $M(x; y; z)$  appartient au plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  si, et seulement si,  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ , c'est-à-dire  $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$ .  
En posant  $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$ , on obtient  $ax+by+cz+d=0$ .
- $\mathcal{E}$  est l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  qui vérifient  $ax+by+cz+d=0$  où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels non tous nuls.

On peut supposer, par exemple,  $a$  non nul.

Le point  $A\left(\frac{-d}{a}; 0; 0\right)$  est alors un point de  $\mathcal{E}$  et l'équation équivaut à :

$$a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0, \text{ c'est-à-dire } \vec{AM} \cdot \vec{n}=0 \text{ avec } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{E}$  est donc le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

### Remarque :

Tout vecteur orthogonal à  $\vec{n}$  est un vecteur du plan  $\mathcal{P}$ .

### Exemples :

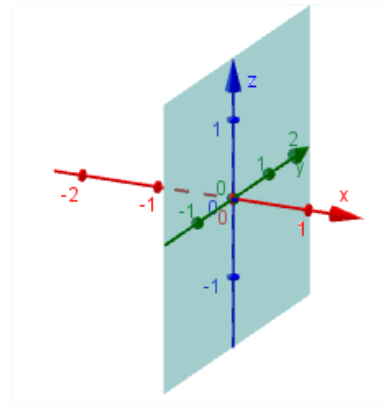
- Dans un repère orthonormé on donne le point  $A(2; -1; 0)$  et le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  a pour équation :

$$-1(x-2)+2(y+1)+3z=0 \text{ soit } -x+2y+3z+4=0$$



- $x=0$  est une équation du plan  $(yOz)$  : ceci signifie qu'un point appartient au plan  $(yOz)$  si, et seulement si, ses coordonnées sont de la forme  $(0; y; z)$ ,  $y$  et  $z$  réels.

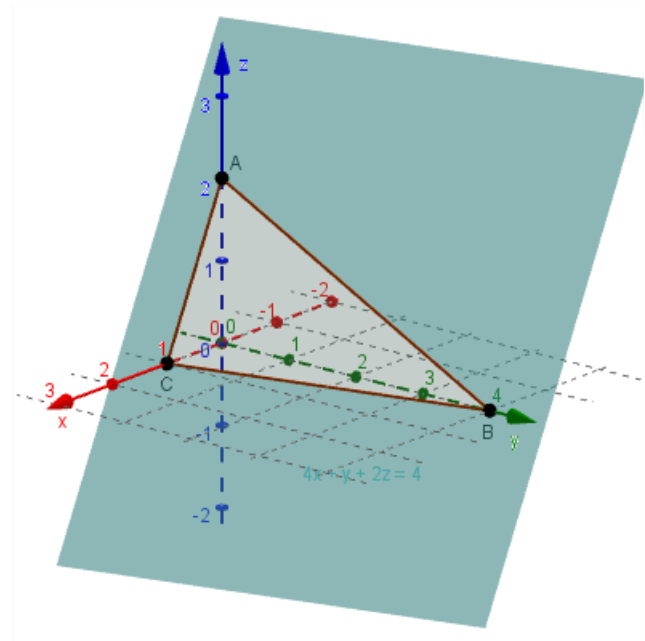


- L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que  $4x + y + 2z - 4 = 0$  est un plan  $\mathcal{P}$  de

vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

$A(0; 0; 2)$ ,  $B(0; 4; 0)$  et  $C(1; 0; 0)$  sont des points non alignés de  $\mathcal{P}$ .

$\mathcal{P}$  est le plan  $(ABC)$



### 3) Équations cartésiennes d'une droite

#### Propriété :

Si les triplets  $(a; b; c)$  et  $(a'; b'; c')$  ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$
 caractérise une droite et il est appelé **système d'équations cartésiennes** de cette droite.

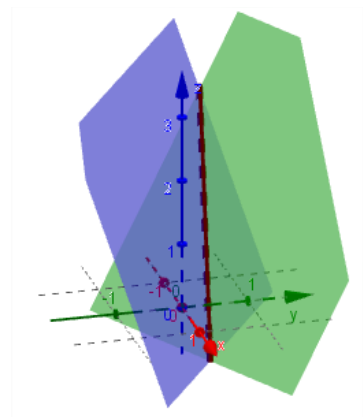
*Démonstration :*

Si les vecteurs  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  ne sont pas colinéaires, alors les

plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  d'équations respectives :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ et } a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sont sécants en une seule droite



## Annexe 1 : Systèmes

### Définition :

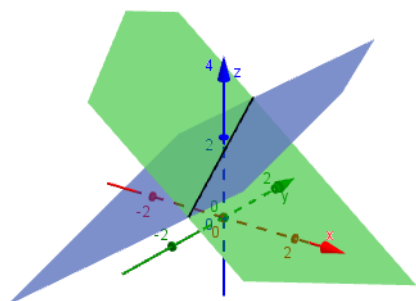
Un **système de trois équations linéaires** à trois inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver **tous** les triplets  $(x ; y ; z)$  vérifiant **simultanément** ces trois équations.

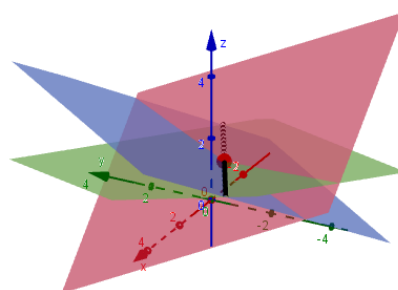
Il existe de nombreux cas de figure :

Système de deux équations à trois inconnues



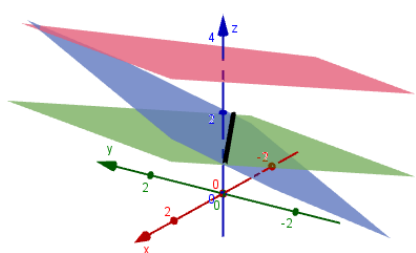
une infinité de solution

Les trois plans se coupent en un seul point



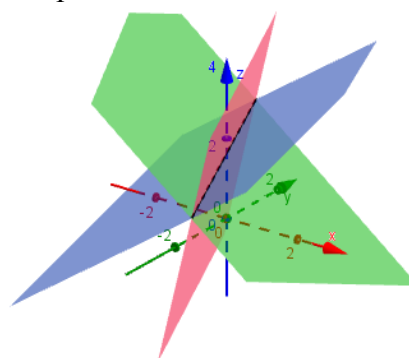
une unique solution

Deux plans sont parallèles



pas de solution

Trois plans ont une droite commune



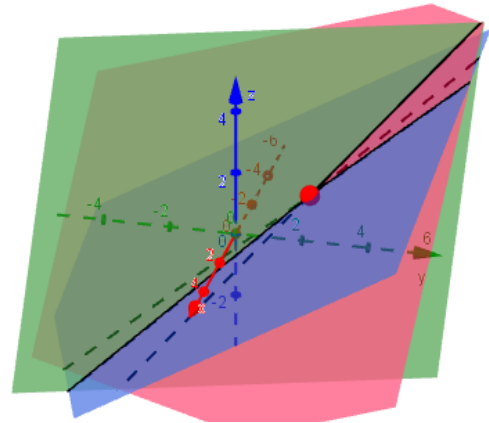
pas de solution

Ne disposant pas de méthode pour connaître à priori le nombre de solutions, on résout donc ce système en choisissant l'une des deux méthodes connues : **substitution** ou **combinaison**.

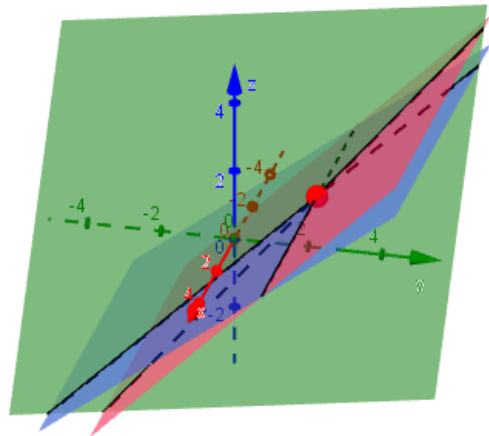
### Méthode de Gauss :

Le but de la méthode de Gauss est de transformer, par des combinaisons linéaires appropriées, un système (S) donné en un système triangulaire (S') plus facile à résoudre.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 & [1] \\ -x + 3y - 5z = 2 & [2] \\ 2x - y + 3z = -1 & [3] \end{cases}$$

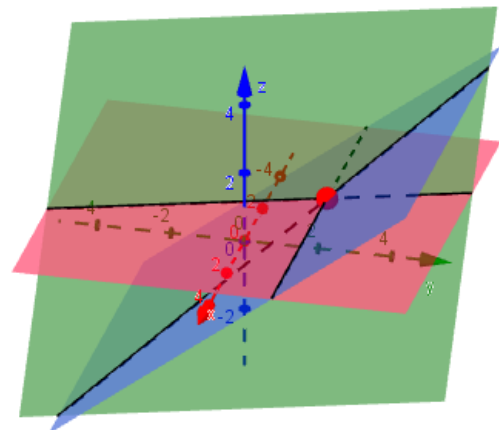


$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 & [1] \\ 10y - 13z = 7 & [2'] = 3[2] + [1] \\ -5y + 5z = -5 & [3'] = 3[3] - 2[1] \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 & [1] \\ 10y - 13z = 7 & [2'] \\ -3z = -3 & [3''] = 2[3'] + [2'] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 & [1] \\ 10y - 13z = 7 & [2'] \\ z = 1 & [3'''] \end{cases}$$

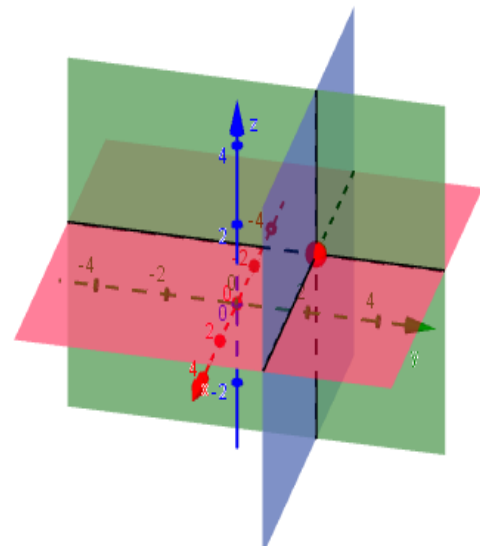
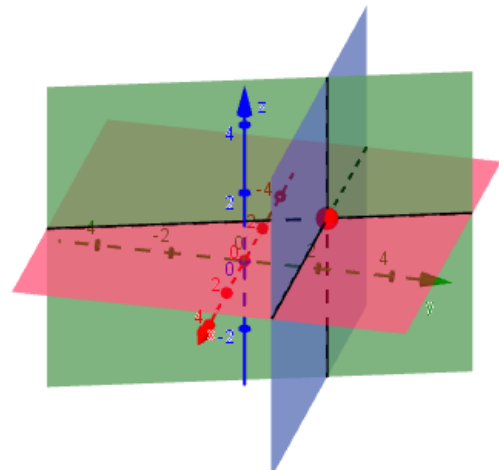


$$\begin{cases} 3x + y + 2 \times 1 = 1 & [1] \\ 10y - 13 \times 1 = 7 & [2'] \\ z = 1 & [3''] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = -1 & [1] \\ y = 2 & [2'] \\ z = 1 & [3''] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2 = -1 & [1] \\ y = 2 & [2'] \\ z = 1 & [3''] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 & [1] \\ y = 2 & [2'] \\ z = 1 & [3''] \end{cases}$$

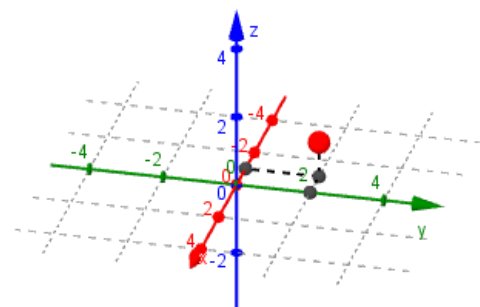


### Vérification :

On vérifie que le triplet  $(-1 ; 2 ; 1)$  est solution de  $S$  :

$$\begin{cases} 3 \times (-1) + 2 + 2 \times 1 = 1 \\ -(-1) + 3 \times 2 - 5 \times 1 = 2 \\ 2 \times (-1) - 2 + 3 \times 1 = -1 \end{cases}$$

Conclusion :  $S$  a une unique solution  $(-1 ; 2 ; 1)$ .



## Annexe 2 : Polynômes orthogonaux

### Espace vectoriel

L'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  avec l'addition et la multiplication par un réel :

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Le vecteur nul est la fonction constante nulle envoyant tous les éléments de  $\mathbb{R}$  sur 0.

### Produit scalaire

L'intégrale du produit de fonctions, sur un intervalle borné, est un produit scalaire de fonctions.

En effet, c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

En effet, soit  $E$ , l'espace vectoriel de fonctions et  $\Phi$  l'application :

$$\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \rightarrow \int_a^b f(x) \times g(x) dx$$

$\Phi$  est une forme :

- bilinéaire :  
 $\Phi(f+f', g) = \Phi(f, g) + \Phi(f', g)$  ;  $\Phi(f, g+g') = \Phi(f, g) + \Phi(f, g')$  et  
 $\Phi(\lambda f, g) = \Phi(f, \lambda g) = \lambda \Phi(f, g)$
- symétrique  
 $\Phi(f, g) = \Phi(g, f)$
- positive  
 $\forall f \in E, \Phi(f, f) \geq 0$
- définie  
 $\Phi(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$

### Orthogonalité

Avec cette définition du produit scalaire, deux fonctions sont orthogonales entre elles si leur produit scalaire est égal à zéro.

#### Polynômes de Legendre

Les polynômes orthogonaux les plus simples sont les polynômes de Legendre pour lesquels l'intervalle d'orthogonalité est  $] -1 ; 1[$  :

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_1(x) = x \quad ; \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \quad ; \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

Ils sont tous orthogonaux sur  $] -1 ; 1[$  :

$$\int_{-1}^1 P_m(x) \times P_n(x) dx = 0 \text{ pour } m \neq n$$

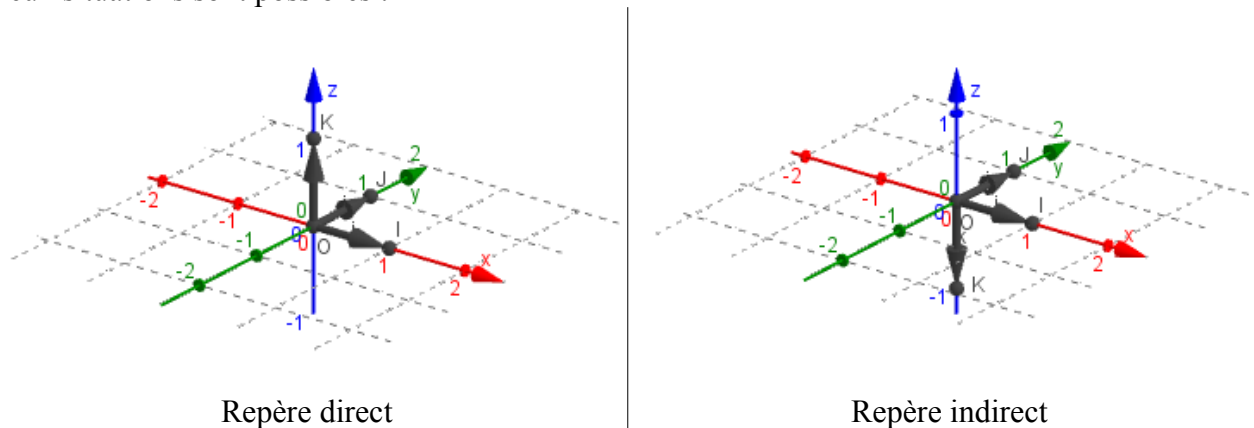
Une **suite de polynômes orthogonaux** est une suite infinie de polynômes à coefficients réels, dans laquelle chaque  $P_n(x)$  est de degré  $n$  et telle que les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux.

## Annexe 3 : Produit vectoriel

### Espace orienté

Considérons, dans l'espace  $\mathcal{E}$ , un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et les points I, J et K définis par  $\vec{OI} = \vec{i}$ ,  $\vec{OJ} = \vec{j}$  et  $\vec{OK} = \vec{k}$ .

Deux situations sont possibles :



Orienter l'espace, c'est distinguer ces deux types de repères.

### Produit vectoriel

#### Définition :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace orienté  $\mathcal{E}$ .

On appelle produit vectoriel de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$ , le vecteur noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  défini ainsi :

- lorsque  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires,  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- lorsque  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires,
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$
  - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe
  - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$

#### Exemples :

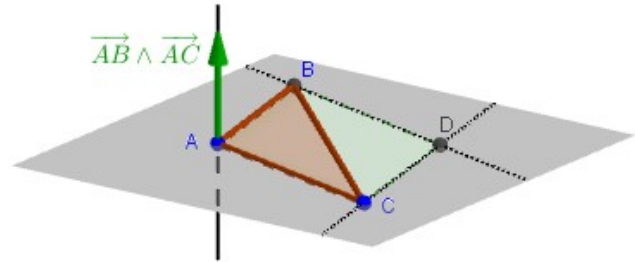
- Si  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormale directe :  
 $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$  ;  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$  ;  $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$  ;  $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux et unitaires, alors  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base orthonormale directe.
- La force magnétique qui s'exerce sur une particule de charge  $q$ , animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est  $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ , le trièdre  $(q \vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$  est direct.

### Propriétés :

- Aire et norme du produit vectoriel

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

On notera que  $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$  est l'aire du parallélogramme formé sur les côtés  $[AB]$  et  $[AC]$ .



- Colinéarité

Le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est nul si, et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

De ce fait, les points A, B et C sont alignés si, et seulement si,  $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = 0$

### Propriétés algébriques :

Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et le réel  $\alpha$  :

- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

### Expression analytique

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormale directe.

Les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  dans cette base sont telles que :

si  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  alors  $\vec{u} \wedge \vec{v}(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$ .