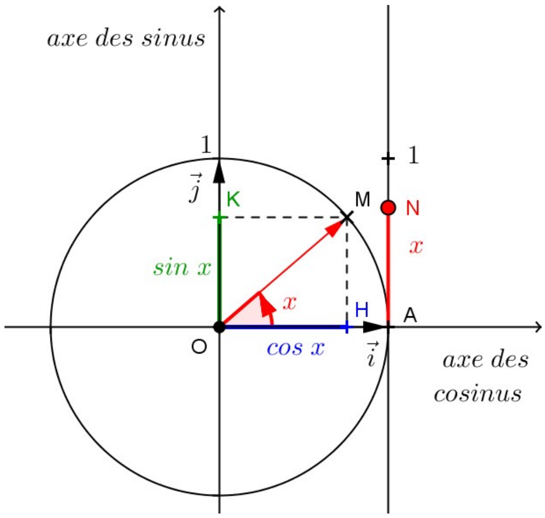
Chapitre 13

Fonctions trigonométriques

I. Définitions

1) Enroulement

On considère le repère du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique, A le point de coordonnées $(1;0)$ et d la droite orientée munie du repère $(A;\vec{j})$.
Soit x un nombre réel quelconque et N le point de d tel que $\overrightarrow{AN}=x\vec{j}$.
La droite d est « enroulée » sur le cercle trigonométrique ; au point N de d correspond un point M de $\mathscr{C}$.
Le nombre x est donc une mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$.
Le cosinus de cet angle est l'abscisse du point M.
Le sinus de cet angle est l'ordonnée du point M.



Ainsi, les deux nombres $\cos x$ et $\sin x$ sont donnés par les points H et K, projetés orthogonaux de M respectivement sur les deux axes $(O;\vec{i})$ et $(O;\vec{j})$.
Pour tout x réel :

$$-1\leqslant\cos x\leqslant 1 \;;\; -1\leqslant\sin x\leqslant 1 \text{ et } \cos^2 x+\sin^2 x=1$$

2) Fonctions

Définitions :

- La fonction $x\longmapsto\sin x$ définie sur ℝ est appelée **fonction sinus** et notée sin.
- La fonction $x\longmapsto\cos x$ définie sur ℝ est appelée **fonction cosinus** et notée cos.

II. Dérivabilité

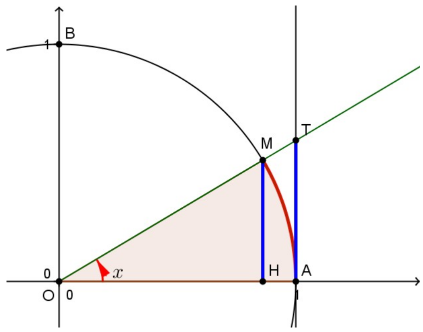
1) Dérivabilité de la fonction sinus

Propriété :
La fonction sinus est dérivable en 0.

Lemmes :

- Montrons que la fonction sinus est continue en $x=0$.

Pour $0<x<\frac{\pi}{2}$ on a :
$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ soit
$0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$
soit $0 \leqslant \sin x \leqslant x$.
Par le théorème des gendarmes,
$$\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0.$$
La fonction sinus étant impaire, on a également :
$$\lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$$



$\mathcal{A}_{\text{OAM}} \leq \mathcal{A}_{\text{secteurOAM}} \leq \mathcal{A}_{\text{OAT}}$

Justification :

- $\mathcal{A}_{\text{OHM}} = \frac{1 \times \sin x}{2}$
- $\mathcal{A}_{\text{secteurOAM}} = \frac{x}{2}$
- $\mathcal{A}_{\text{OAT}} = \frac{1 \times \tan x}{2}$

Ainsi on obtient :
$$\frac{1 \times \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1 \times \tan x}{2}$$

D'où $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.
De plus $\sin 0 = 0$.
On en déduit que la fonction sinus est continue en $x=0$.

- Montrons maintenant que la fonction sinus est dérivable en $x=0$, de nombre dérivé 1.

Pour $0<x<\frac{\pi}{2}$ on a :
$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ soit
$$0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\cos x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow 0 < \cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$
Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.
Comme $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$, on a donc $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

La fonction sinus est impaire, on a donc $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ainsi $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration :

Pour tout nombre réel $h \neq 0$, $\frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}$.

Or $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ donc la fonction sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Propriété :
La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,
$$\sin'(x)=\cos(x)$$

Démonstration :
a désigne un nombre réel. Étudier la dérivabilité en a de la fonction sinus, c'est étudier la limite en 0 de la fonction $h \longmapsto \dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$.

Or pour tout nombre réel $h \neq 0$,
$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\frac{\sin a\cos h+\sin h\cos a-\sin a}{h}=\frac{\sin h\cos a-(1-\cos h)\sin a}{h}.$$

Or $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$, donc $1-\cos(2x)=2\sin^2 x$ donc avec $2x=h$: $1-\cos h=2\sin^2\dfrac{h}{2}$.

$\sin(2x)=2\sin x\cos x$, donc avec $2x=h$: $\sin h=2\sin\dfrac{h}{2}\cos\dfrac{h}{2}$.

D'où $$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}\cos a-2\sin^2\frac{h}{2}\sin a}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\left[\cos\frac{h}{2}\cos a-\sin\frac{h}{2}\sin a\right]}{h}$$

soit $$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right).$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}\cos\left(a+\dfrac{h}{2}\right)=\cos a$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\cos a$.

Ainsi la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $\sin'(x)=\cos x$.

2) Dérivabilité de la fonction cosinus

Propriété :
La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,
$$\cos'(x)=-\sin x$$

Démonstration :
On sait que, pour tout nombre réel x, $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f : x \longmapsto \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

pour tout nombre réel x, $f'(x)=1\times\sin'\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ donc $\cos'(x)=-\sin x$.

III. Étude de la fonction sinus

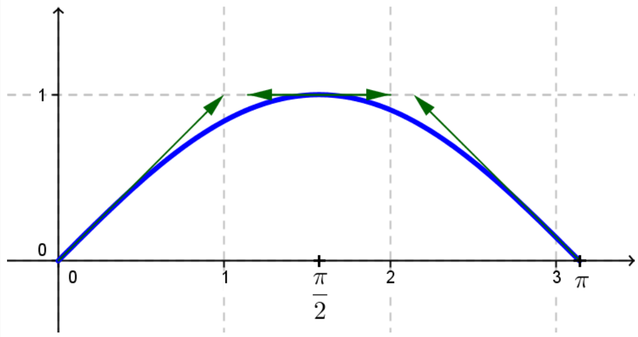
1) Étude sur l'intervalle $[0;\pi]$

Pour tout nombre réel x, $\sin'(x)=\cos x$.
Or $\cos(x)\geqslant 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos x\leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
Donc, la fonction sinus est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Tableau de variation sur $[0;\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$	1	+	0	−	-1
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

Courbe sur $[0;\pi]$

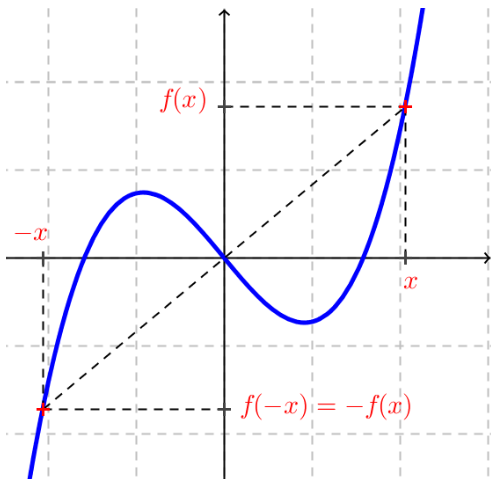


2) Courbe représentative sur $[-\pi;\pi]$

Définition :
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$.
La fonction f est **impaire** si, pour tout nombre réel x de $\mathscr{D}$, le nombre $(-x)$ appartient à $\mathscr{D}$ et :

$$f(-x)=-f(x)$$

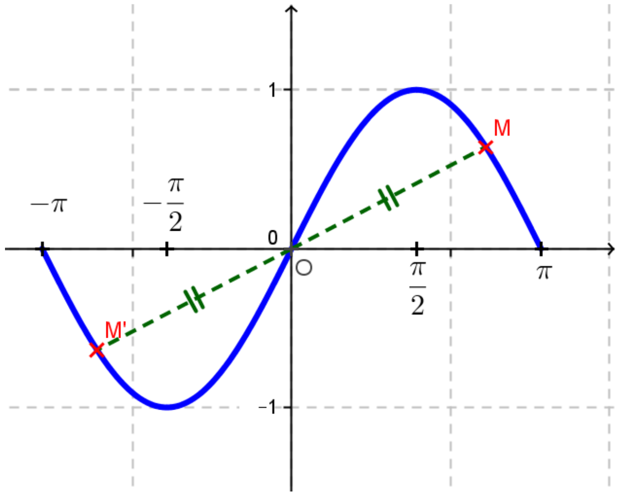
Interprétation graphique :
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



On sait que pour tout nombre réel x, $\sin(-x)=-\sin(x)$.
La fonction sinus est **impaire**.

Propriété :
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est **symétrique par rapport à l'origine** O du repère.

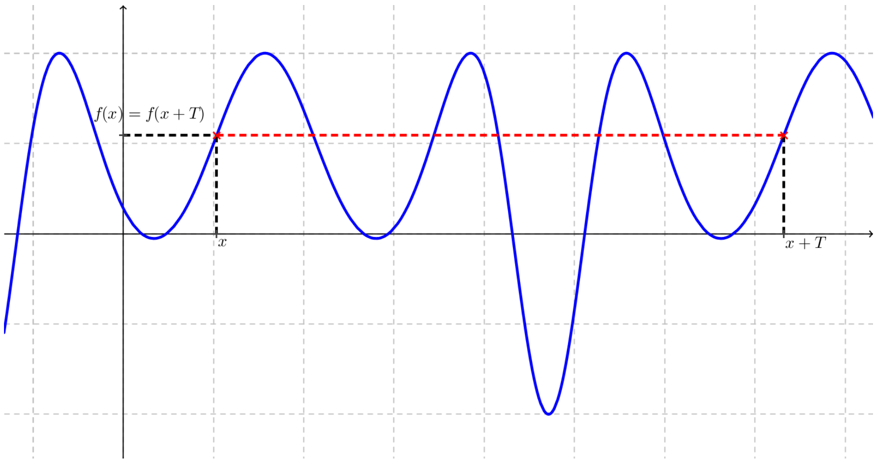
Démonstration :
Pour tout nombre réel x, on note $\mathrm{M}(x;\sin x)$ et $\mathrm{M}'(-x;\sin(-x))$ deux points de $\mathscr{C}$.
Or :
$\frac{x+(-x)}{2}=0$ et $\frac{\sin x+\sin(-x)}{2}=\frac{\sin x-\sin x}{2}=0$
Donc, le milieu de $[\mathrm{MM}']$ est l'origine O du repère et M' est le symétrique de M par rapport à O.



3) Courbe représentative de la fonction sinus

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathscr{D}$.
La fonction f est **périodique de période T** s'il existe un nombre réel strictement positif T tel que, pour tout nombre réel x de $\mathscr{D}$, le nombre $x+\mathrm{T}$ appartient à $\mathscr{D}$ et :
$$f(x+\mathrm{T})=f(x)$$

Interprétation graphique :
Dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction périodique de période T est invariante par translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{i}$.

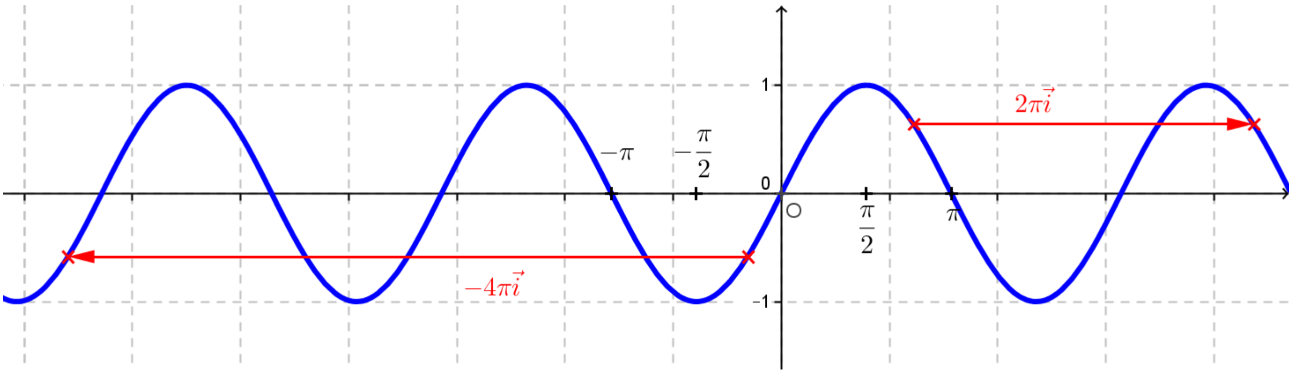


Remarque :
Si T est une période de f et n un entier naturel $n\mathrm{T}$ est également une période de f.

On sait que, pour tout nombre réel x, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$.
La fonction sinus est **périodique de période** 2π.
On en déduit alors que $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

Propriété :
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est **invariante par toute translation de vecteur** $k2\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration :
Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout k de $\mathbb{Z}$, on note $M(x;\sin x)$ et $M'(x+2k\pi, \sin(x+2k\pi))$ deux points de $\mathscr{C}$.
Alors $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} k\times 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MM'}=k2\pi\vec{i}$ et M' est l'image de M par la translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$.



La courbe de la fonction sinus est appelée **une sinusoïde**.

IV. Étude de la fonction cosinus

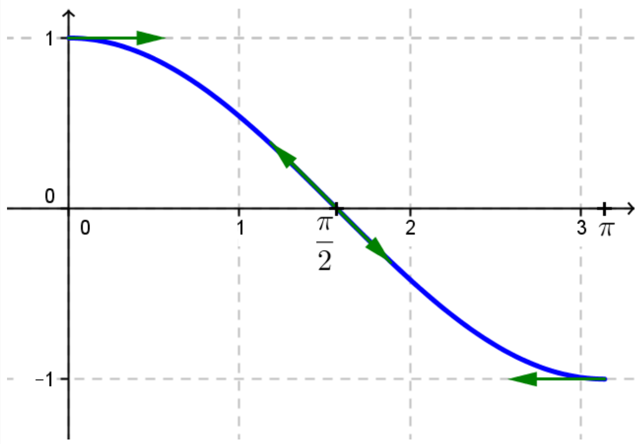
1) Étude sur l'intervalle $[0;\pi]$

Pour tout nombre réel x, $\cos'(x)=-\sin x$.
Or $\sin(x)\geqslant 0$ sur $[0;\pi]$ donc $\cos'(x)\leqslant 0$ sur $[0;\pi]$.
Donc, la fonction cosinus est décroissante sur $[0;\pi]$.

Tableau de variation sur $[0;\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x)$	0	–	-1	–	0
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1

Courbe sur $[0;\pi]$

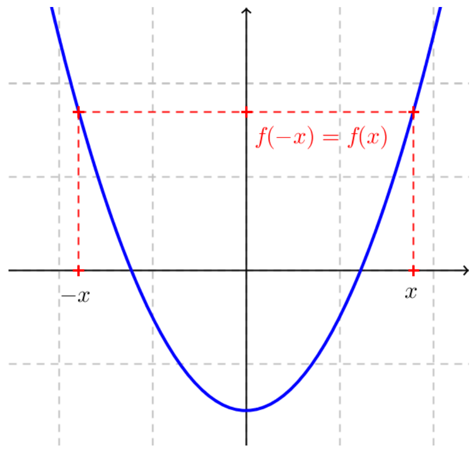


2) Courbe représentative sur $[-\pi;\pi]$

Définition :
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$.
La fonction f est **paire** si, pour tout nombre réel x de $\mathscr{D}$, le nombre $(-x)$ appartient à $\mathscr{D}$ et :

$$f(-x)=f(x)$$

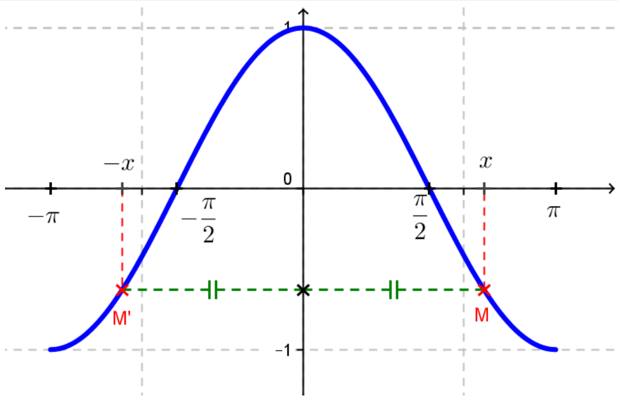
Interprétation graphique :
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



On sait que pour tout nombre réel x, $\cos(-x)=\cos(x)$.
La fonction cosinus est **paire**.

Propriété :
La courbe représentative Γ de la fonction cosinus est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** du repère.

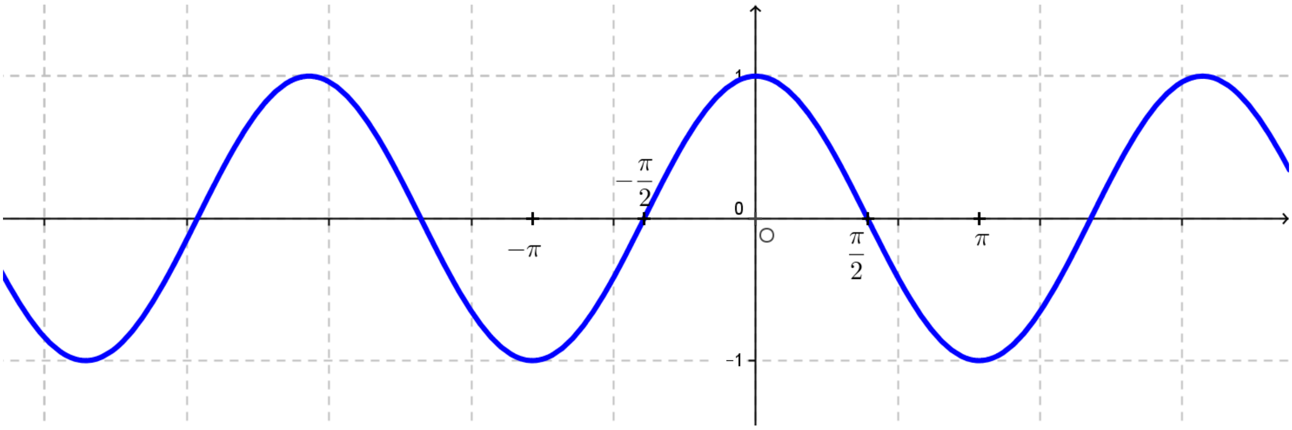
Démonstration :
Pour tout nombre réel x, on note M et M' les points de Γ d'abscisses respectives x et $-x$.
L'ordonnée de M est $\cos x$ et l'ordonnée de M' est $\cos(-x)=\cos x$.
Donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



3) Courbe représentative de la fonction cosinus

On sait que, pour tout nombre réel x , $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$.
La fonction cosinus est **périodique de période** 2π .
On en déduit alors que $\cos(x+k2\pi)=\cos x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété :
Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction cosinus est **invariante par toute translation de vecteur** $k2\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.



Remarques :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$ donc la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est l'image de la courbe représentative Γ de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.
- La courbe de la fonction cosinus est aussi appelée **une sinusoïde**.

Annexe 1 : Équation différentielle

La mécanique, la dynamique, l'électricité, la biologie, la démographie, les probabilités … fourmillent de situations dont l'étude conduit à une **équation différentielle**, que l'on peut présenter sommairement comme une relation entre une fonction et ses dérivées successives, et qui est réalisée sur un intervalle.
Dans une équation différentielle, l'**inconnue est la fonction**.

<u>Exemple :</u>
En physique, le mouvement d'un oscillateur libre non amorti (élastique, électrique, …) est régi par une équation différentielle du **second ordre**, du type :

$y''=w^2 y$ où w est la pulsation de l'oscillateur.

C'est le cas du ressort, du pendule (si on néglige l'amortissement), d'un circuit (*L*, *C*), ou des systèmes entretenus : mouvement des marées, montres, trampolines ,...

Une **fonction solution** sur un intervalle *I* de l'équation différentielle $y''=-w^2y$ est une fonction f , dérivable deux fois sur *I* telle que $f''(x)=-w^2 f(x)$ pour tout *x* de *I*. (Sans précision, on considère que $I=\mathbb{R}$).
Résoudre l'équation différentielle $y''=-w^2y$, c'est trouver toutes les solutions.

Équation $y''+w^2y=0$

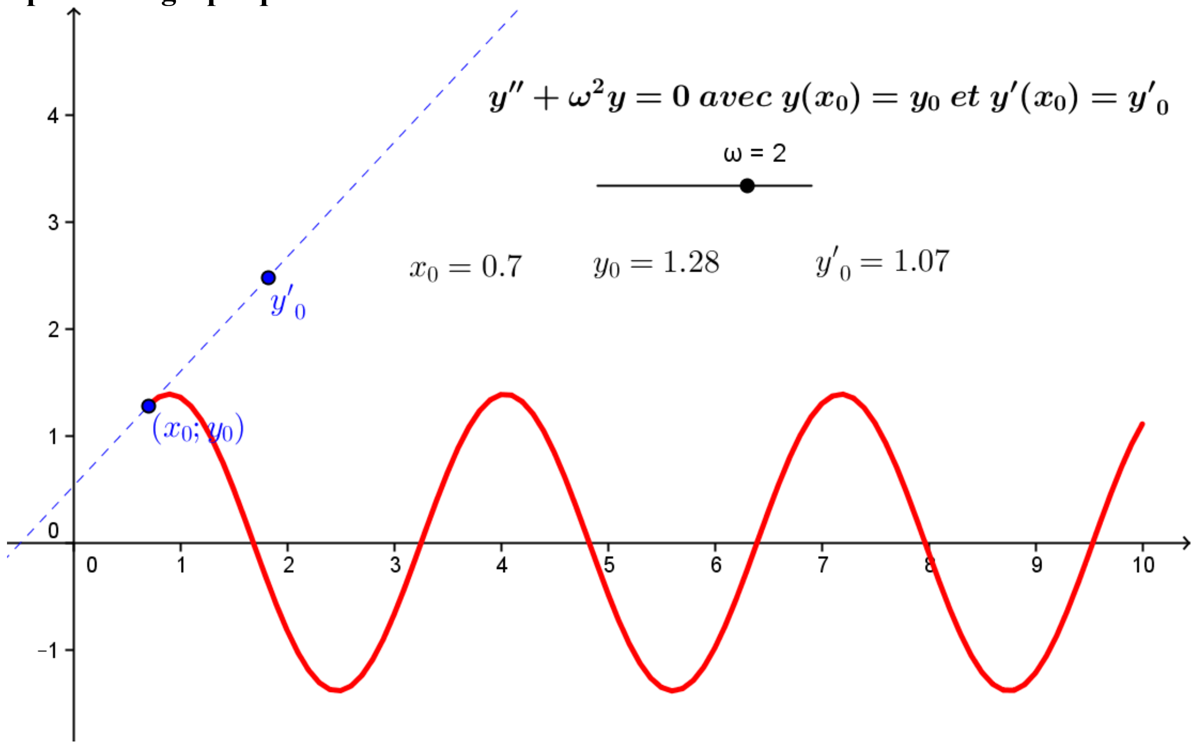
- Les fonctions $x\longmapsto \mathrm{A}\cos wx+\mathrm{B}\sin wx$ (A,B réels) sont solutions
  Si $y(x)=\cos wx$, on a :
  $$y'(x)=-w\sin wx \quad \text{et} \quad y''(x)=-w^2\cos wx=-w^2 y(x)$$
  ce qui montre que $x\longmapsto \cos wx$ est solution de $y''+w^2 y=0$.
  La vérification est analogue pour $x\longmapsto \sin wx$.
  Or on remarque que la combinaison linéaire de deux fonctions vérifiant $y''+w^2 y=0$ est encore solution de $y''+w^2 y=0$. Donc $x\longmapsto \mathrm{A}\cos wx+\mathrm{B}\sin wx$ vérifie $y''+w^2 y=0$.
- Toute solution y telle que $y(0)=y'(0)=0$ est la fonction nulle
  Si y vérifie $y''+w^2 y=0$, la fonction $z=w^2 y^2+y'^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z'=2w^2 y'y+2y'y''$, soit $z'=2y'(y''+w^2 y)=0$, donc z est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
  Si $y(0)=0$ et $y'(0)=0$, on a $z(0)=0$, donc z est la fonction nulle.
  La relation $w^2 y^2+y'^2=0$ avec $w\neq 0$, implique alors $y=y'=0$, donc y est la **fonction nulle**.
- Résolution de $y''+w^2 y=0$
  Si y vérifie $y''+w^2 y=0$, la fonction z :
  $$x\longmapsto y(x)-y(0)\cos wx-\frac{y'(0)}{w}\sin wx$$
  vérifie aussi $y''+w^2 y=0$, d'après la remarque initiale.
  De plus, on vérifie que $z(0)=0$ et $z'(0)=0$, donc d'après la remarque précédente, z est la fonction nulle.

  Il en résulte qu'il existe deux constantes A et B ($\mathrm{A}=y(0)$, $\mathrm{B}=\dfrac{y'(0)}{w}$) telles que :
  $$y(x)=\mathrm{A}\cos wx+\mathrm{B}\sin wx$$

<u>Propriété :</u>

- Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y''+w^2y=0$ ($w\neq 0$) sont les fonctions :
$$x\longmapsto A\cos wx+B\sin wx$$
A, B réels quelconques.
- Il existe une unique solution de cette équation satisfaisant aux conditions initiales :
$$y(x_0)=y_0 \text{ et } y'(x_0)=y'_0$$
(x_0, y_0 et y'_0 réels donnés).

Interprétation graphique :



Annexe 2 : Courbe paramétrée

On considère l'ensemble (Γ) des points $\mathrm{M}(t)$ dont les coordonnées $(x(t);y(t))$ sont définies, pour tout réel *t* de l'intervalle $[-\pi;\pi]$ par :

$$\begin{cases} x(t)=5\cos(t) \\ y(t)=3\sin(t) \end{cases}$$

<u>Étude de la courbe</u>

- Pour tout réel *t* de l'intervalle $[-\pi;\pi]$:

  $$\begin{cases} x(-t)=5\cos(t) \\ y(-t)=-3\sin(t) \end{cases}$$

  Donc $\mathrm{M}(-t)$ est l'image du point $\mathrm{M}(t)$ de (Γ) par la symétrie d'axe $(\mathrm{O}x)$.
  On peut donc ramener l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$.
- Pour tout réel *t* de l'intervalle $[-\pi;\pi]$:

  $$\begin{cases} x(\pi-t)=-5\cos(t) \\ y(\pi-t)=3\sin(t) \end{cases}$$

  Donc $\mathrm{M}(\pi-t)$ est l'image du point $\mathrm{M}(t)$ de (Γ) par la symétrie d'axe $(\mathrm{O}y)$.
  On peut donc ramener l'intervalle d'étude à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- Pour tout réel *t* de l'intervalle $[-\pi;\pi]$:

  $$\begin{cases} x'(t)=-5\sin(t) \\ y'(t)=3\cos(t) \end{cases}$$

On construit le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	
$x(t)$	5	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	3

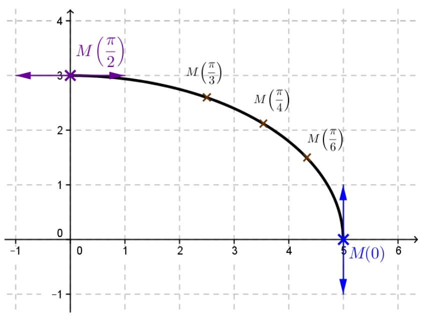
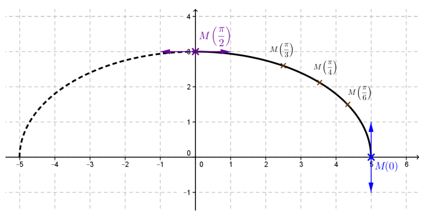
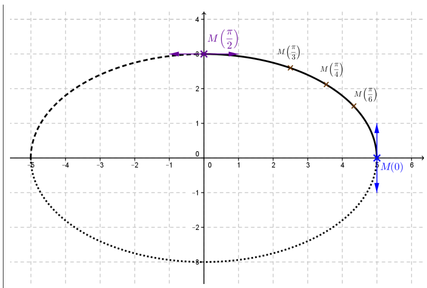
Construction de (Γ)

- On place les points de (Γ) correspondant aux paramètres 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

  $M(0)=(5;0)$; $M\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$; $M\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$;

  $M\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{5}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $M\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0;3)$

- On observe que la tangente au point $M(0)$ est parallèle à l'axe des ordonnées : $x'(0)=0$.
- On observe que la tangente au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est parallèle à l'axe des abscisses : $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.
- On construit la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
- On conclut en traçant le symétrique par rapport à (Oy) puis le symétrique par rapport à (Ox).

On obtient ainsi (Γ)