Chapitre 11

Droites dans le plan repéré

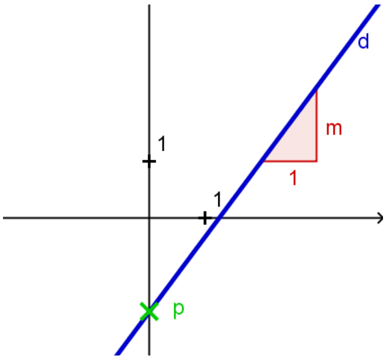
I. Équation de droite

1) Caractérisation analytique

m, p et c sont des nombres réels.

Théorème :
Dans un repère, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $y=mx+p$ ou $x=c$ est une droite.

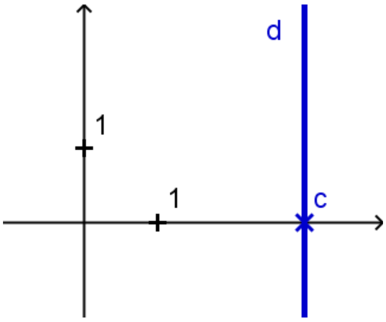
Démonstration :



- L'ensemble d des points $M(x\,;y)$ tels que $y=mx+p$ est la courbe représentative de la fonction affine $x \longmapsto mx+p$, donc d est la droite d'équation $y=mx+p$

d est la droite d'équation $y=mx+p$

m est le **coefficient directeur**
p est l'**ordonnée à l'origine**



- L'ensemble d des points $M(x\,;y)$ tels que $x=c$ est l'ensemble des points d'abscisse c et d'ordonnée quelconque, donc d est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Théorème (réciproque) :
Dans un repère, toute droite ***d*** a une équation soit de la forme $y=mx+p$, soit de la forme $x=c$.

Démonstration (par disjonction de cas) :
d est une droite du plan.

- Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, elle coupe l'axe des abscisses au point A, dont l'abscisse est noté c.
  Un point $M(x\,;y)$ du plan appartient à d si, et seulement si, il a la même abscisse que le point A.
  Une équation de la droite d est donc $x=c$.

- Si d coupe l'axe des ordonnées, on note B et C les points de d d'abscisses respectives 0 et 1.
  On pose $y_B = p$ et $y_C = q$ et f la fonction affine définie par $f(x) = (q-p)x + p$.
  La droite représentant la fonction f passe par B et C puisque $f(0) = p$ et $f(1) = q$.
  On en déduit donc que la droite d est la courbe représentative de la fonction f.
  Ainsi l'équation de d est $y = (q-p)x + p$ qui est bien de la forme $y = mx + p$.

Remarque :
Une équation de droite, dans le plan repéré, est une égalité liant l'abscisse et l'ordonnée d'un point M caractérisant le fait que M appartienne à d.
Ainsi, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x - 7$ a aussi pour équation $3y - x + 21 = 0$ et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ admet aussi pour équation $2x = 1$.
Par contre, une droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une unique équation de la forme $y = mx + p$ (**équation réduite**)

2) Coefficient directeur

Propriété :
Dans un repère, $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points tels que $x_A \neq x_B$.
Le coefficient directeur de (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Démonstration :
L'équation de la droite (AB) est de la forme $y = mx + p$ puisque (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ($x_A \neq x_B$).
On a donc : $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$. D'où $y_A - mx_A = y_B - mx_B$ et ainsi $m(x_B - x_A) = y_B - y_A$.
Par conséquent $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

II. Droites parallèles, droites sécantes

1) Droites parallèles

Théorème :
Dans un repère, la droite d a pour équation $y = mx + p$ et la droite d' a pour équation $y = m'x + p'$.
d **et** ***d'*** **sont parallèles** si et seulement si $m = m'$.

Démonstration :
- Montrons dans un premier temps que la droite d d'équation $y = mx + p$ est parallèle à la droite Δ d'équation $y = mx$.
  - Si $p = 0$, d et Δ ont la même équation. Ainsi elles sont confondues donc parallèles.
  - *Raisonnement par l'absurde :*
    Si $\boldsymbol{p \neq 0}$, supposons que d et Δ sont sécantes en un point $A(x_A ; y_A)$.
    A $\in \Delta$ donc $y_A = mx_A$ et A $\in d$ donc $y_A = mx_A + p$. Ainsi $\boldsymbol{p = 0}$, ce qui est contradictoire.
    Donc d // Δ.

- Soit Δ' la droite d'équation $y=m'x$. On a donc *d'* // Δ'. Ainsi, puisque *d* // *d'* et *d'* // Δ', « *d* // *d'* » si et seulement si « Δ // Δ' ».
  Or Δ et Δ' ont un point commun : l'origine du repère.
  Donc « Δ // Δ' » si et seulement si « Δ et Δ' confondues » si et seulement si « Δ et Δ' ont même équation » si et seulement si « *m* = *m'* ».
  Par conséquent : « *d* // *d'* » si et seulement si « *m* = *m'* ».

Remarque :
Si deux droites sont parallèles à l'axe des ordonnées, elles sont parallèles.

2) Droites sécantes

Théorème (contraposée):
Dans un repère, la droite *d* a pour équation $y=mx+p$ et la droite *d'* a pour équation $y=m'x+p'$.
***d* et *d'* sont sécantes** si et seulement si $m \neq m'$.

Exemple :
Dans un repère, les droites d'équations $y=5x-2$ et $y=-\frac{1}{4}x+1$ sont sécantes car $5 \neq -\frac{1}{4}$.

Remarque :
Lorsque deux droites sont sécantes, pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on résout le système formé à partir des équations de ces deux droites.

Exemple :
Les droites d'équations $y=5x-2$ et $y=-\frac{1}{4}x+1$ sont sécantes en $M(x\,;y)$.

Les coordonnées de M vérifient : $\begin{cases} y = 5x-2 \\ y=-\frac{1}{4}x+1 \end{cases}$. Donc après résolution $\begin{cases} x=\frac{4}{7} \\ y=\frac{6}{7} \end{cases}$ et $M\left(\frac{4}{7};\frac{6}{7}\right)$ est le point d'intersection des deux droites.

3) Alignement de trois points

Théorème :
Étant donné trois points *A*, *B* et *C* distincts deux à deux :
A, *B* et *C* sont alignés si et seulement si (*AB*) et (*AC*) ont le même coefficient directeur.

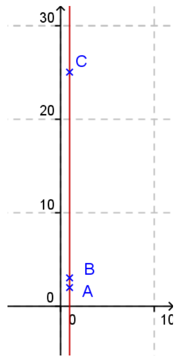
Remarque :
Si *A*, *B* et *C* ont tous la même abscisse, ils sont alignés car ils sont sur la droite d'équation $x=x_A$.

Exemple :
$A(1;-1)$, $B(3;5)$, $C(4;8)$
$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-(-1)}{3-1}=3$ et $\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{8-(-1)}{4-1}=3$.
Les droites (*AB*) et(*AC*) ont le même coefficient directeur donc *A*, *B* et *C* sont alignés.

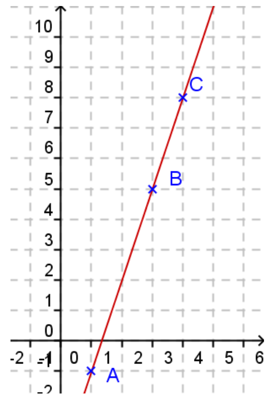
Utilisation de la calculatrice :

```
PROGRAM:ALIGNE
:Input "XA=",M
:Input "YA=",N
:Input "XB=",O
:Input "YB=",P
:Input "XC=",Q
:Input "YC=",R
:If M=O et O=Q
:Then
:Disp "A,B,C ALIGNES"
:Else
:If M=O ou M=Q ou O=Q
:Then
:Disp "A,B,C NON ALIGNES"
:Else
:If (P-N)/(O-M)=(R-N)/(Q-M)
:Then
:Disp "A,B,C ALIGNES"
:Else
:Disp "A,B,C NON ALIGNES"
:End
:End
:End
```

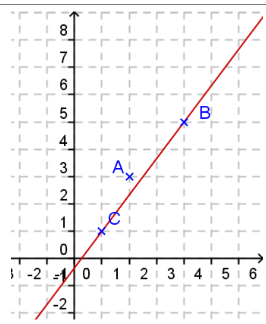
```
prgmALIGNE
XA=1
YA=2
XB=1
YB=3
XC=1
YC=25
A,B,C ALIGNES
                Fait
```

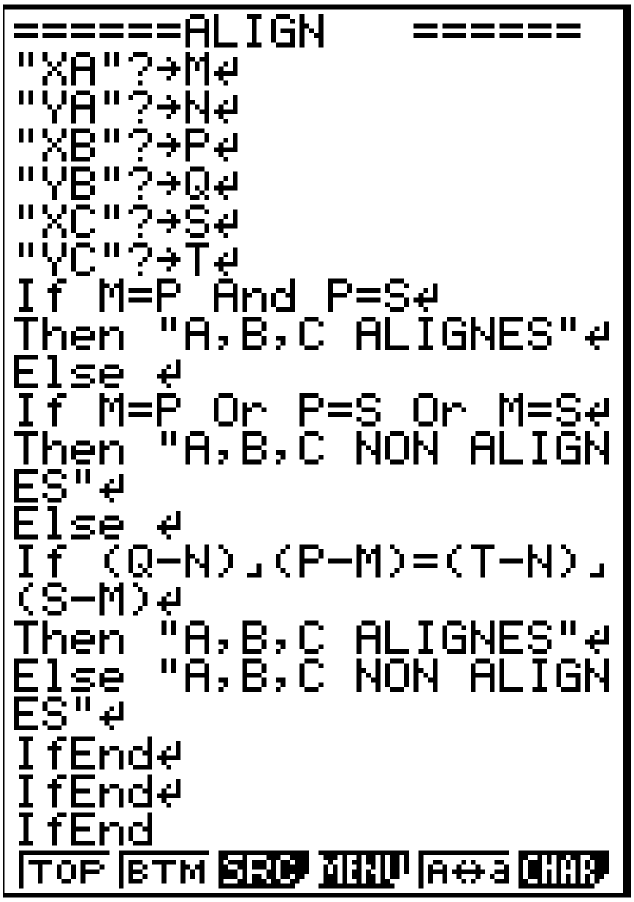



```
prgmALIGNE
XA=1
YA=-1
XB=3
YB=5
XC=4
YC=8
A,B,C ALIGNES
                Fait
```

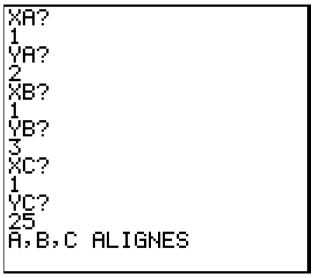



```
prgmALIGNE
XA=2
YA=3
XB=4
YB=5
XC=1
YC=1
A,B,C NON ALIGN…
                Fait
```

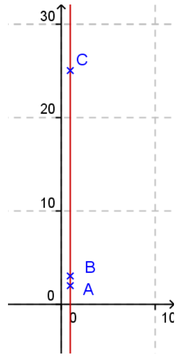


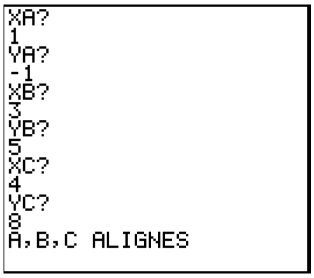


```
======ALIGN    ======
"XA"?→M↵
"YA"?→N↵
"XB"?→P↵
"YB"?→Q↵
"XC"?→S↵
"YC"?→T↵
If M=P And P=S↵
Then "A,B,C ALIGNES"↵
Else ↵
If M=P Or P=S Or M=S↵
Then "A,B,C NON ALIGNES"↵
Else ↵
If (Q-N)⌟(P-M)=(T-N)⌟(S-M)↵
Then "A,B,C ALIGNES"↵
Else "A,B,C NON ALIGNES"↵
IfEnd↵
IfEnd↵
IfEnd
```

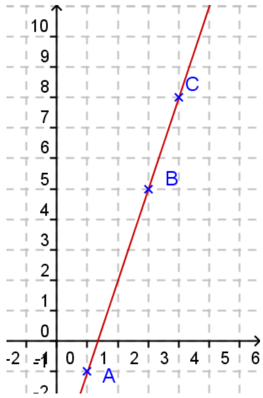



```
XA?
1
YA?
2
XB?
1
YB?
3
XC?
1
YC?
25
A,B,C ALIGNES
```





```
XA?
1
YA?
-1
XB?
3
YB?
5
XC?
4
YC?
8
A,B,C ALIGNES
```



```
XA?
2
YA?
3
XB?
4
YB?
5
XC?
1
YC?
1
A,B,C NON ALIGNES
```