

Chapitre 5

Continuité

I. Fonction continue

1) Continuité

Définition :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

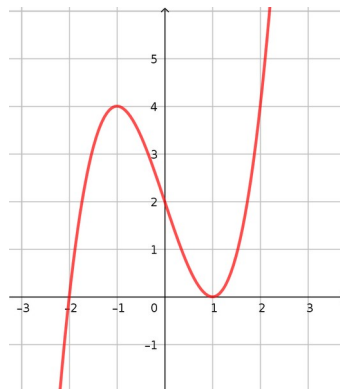
On dit que la fonction f est **continue en** un réel a de I si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

On dit que la fonction f est **continue sur** I si f est continue en tout réel a de I .

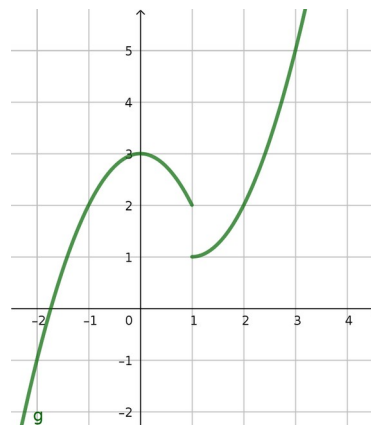
Exemples :

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x + 2$



f est continue sur \mathbb{R} .

- La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



g n'est pas continue en 1, donc elle n'est pas continue sur \mathbb{R} .

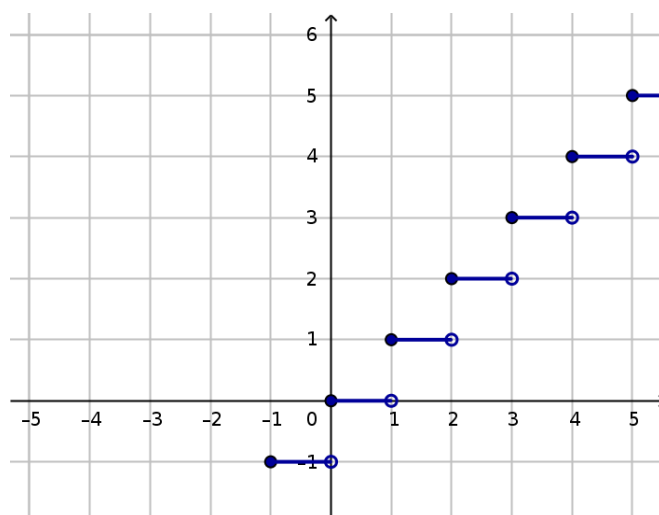
- Les fonctions carrée, cube, cosinus sont continues sur \mathbb{R} .
- La fonction partie entière E est définie sur \mathbb{R} par $E(x)=n$, où n est l'entier relatif tel que $n \leq x < n+1$.

Ainsi si $0 \leq x < 1$ alors $E(x)=0$ et si $1 \leq x < 2$ alors $E(x)=1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x)=0$ alors que $E(1)=1$.

On dit que E est **discontinue** en 1, et de façon générale, en tout entier relatif.

La courbe \mathcal{C}_E est « en escaliers » et présente des sauts en ses points d'abscisses entières.



2) Propriétés

Propriétés (admises):

- Les fonctions affines, les fonctions polynômes, la fonction racine carrée et la fonction exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles formant leur ensemble de définition.

Exemple :

La fonction f , définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$, est continue sur chacun des intervalles $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions polynômes.

Propriété (admise):

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur I .

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fautive : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0, mais sont continues en 0.

Remarques :

Ne pas confondre continuité et dérivabilité.

- Une fonction f est **continue en a** si la courbe \mathcal{C}_f ne présente pas de saut en son point d'abscisse a .
- Une fonction f est **dérivable en a** si la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a .

II. Théorème des valeurs intermédiaires

1) Cas général

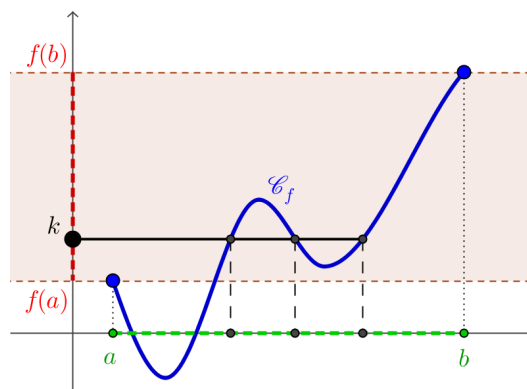
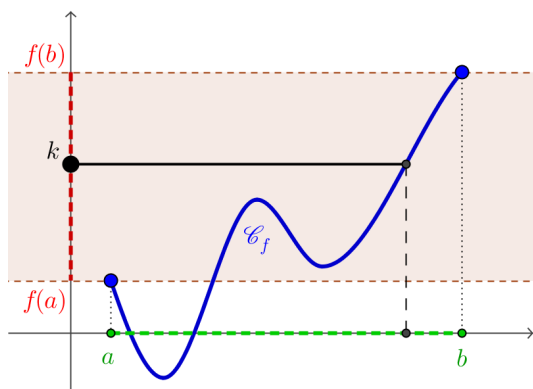
Propriété (admise) :

f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$.

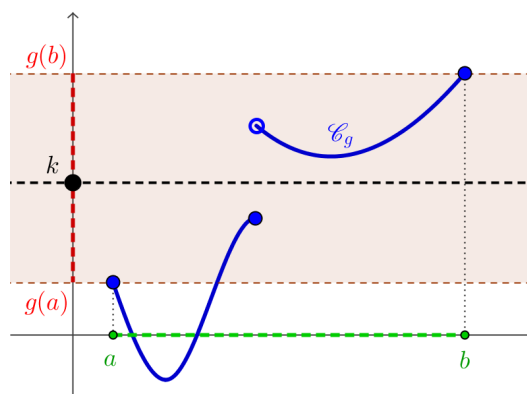
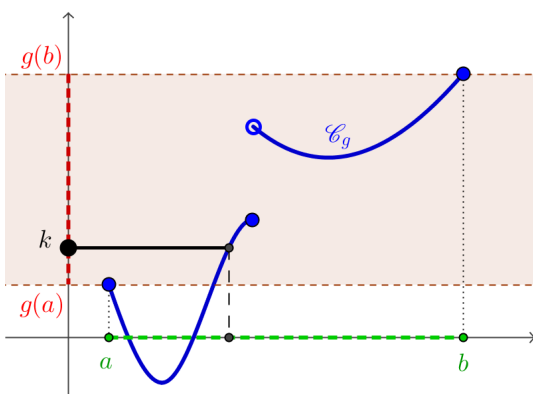
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe **au moins** un réel c compris entre a et b , tel que $f(c) = k$.

Exemples :

- f est continue sur $[a; b]$, toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ sont prises au moins une fois.



- g n'étant pas continue sur $[a; b]$, certaines valeurs comprises entre $g(a)$ et $g(b)$ ne sont pas atteintes par g .



Remarque :

La continuité permet de dire que des solutions existent.

2) Cas des fonctions monotones

Propriété :

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$ et k un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x)=k$ admet une **unique solution** c située dans l'intervalle $[a; b]$.

Démonstration :

Soit un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Comme f est continue sur $[a; b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c de $[a; b]$ tel que $f(c)=k$. Il reste à prouver l'unicité.

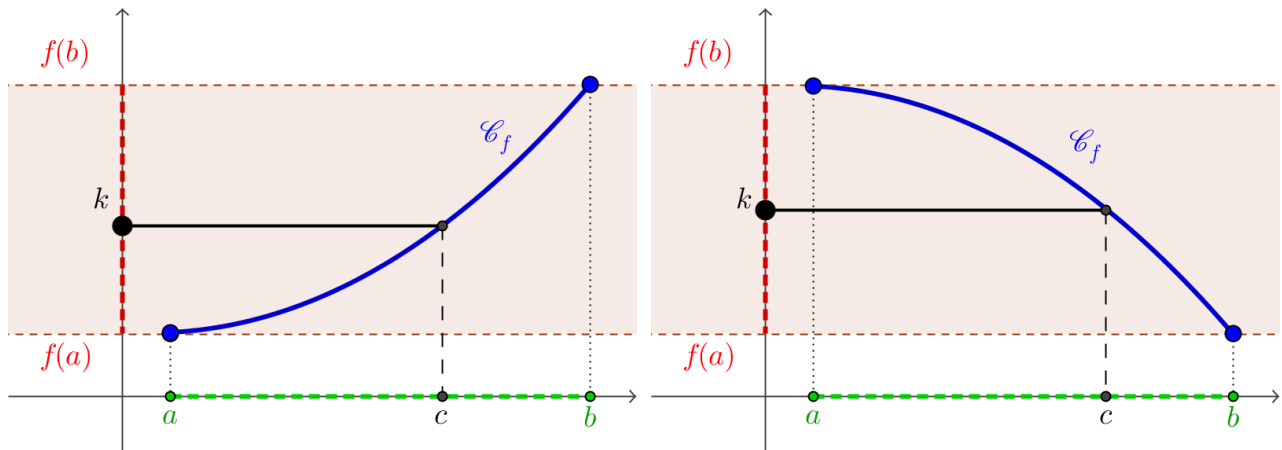
Dans le cas où la fonction f est strictement croissante sur $[a; b]$, on a :

- pour tout réel x de $[a; c[$, $f(x) < f(c)$, c'est-à-dire $f(x) < k$
- pour tout réel x de $]c; b]$, $f(x) > f(c)$, c'est-à-dire $f(x) > k$

L'équation $f(x)=k$ n'admet donc pas d'autre solution que c dans l'intervalle $[a; b]$.

Dans le cas où la fonction f est strictement décroissante sur $[a; b]$, on raisonne de la même façon.

Exemples :



Remarques :

- Dans le cas particulier où 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, sous les hypothèses du théorème précédent, f prend une fois et une seule la valeur 0.

Ceci signifie que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $]a; b[$.

- Ce théorème s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b .
- Dans un **tableau de variation** les **flèches** obliques traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** d'une fonction sur un intervalle.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = 2$$

Sur $[2; 4]$, la fonction f est continue (c'est une fonction polynôme) et strictement décroissante.

$$f(2) = 5 \text{ et } f(4) = -15.$$

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[2; 4]$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0 +	0 -	
$f(x)$	$+\infty$		5	$-\infty$

3) Extension à d'autres intervalles

On généralise le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle ouvert.

Propriété :

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a; b[$ où a désigne un réel ou $-\infty$ et b désigne un réel ou $+\infty$.

On suppose que f admet des limites en a et b , finies ou infinies.

- Pour tout k compris entre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a; b[$.
- Si, de plus, f est strictement monotone sur $]a; b[$, alors cette solution est unique.

Exemple :

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 3x + 1$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

0 appartient à $] -\infty; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution x_0 sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Algorithme : approcher, à 10^{-n} près les solutions de l'équation $f(x)=k$ sur $[a;b]$.

Cas où la fonction est continue et strictement **croissante** sur $[a;b]$

Tant que $b - a > 10^{-n}$ faire

$m \leftarrow (a + b) / 2$

Si $f(m) < k$ alors

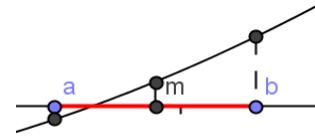
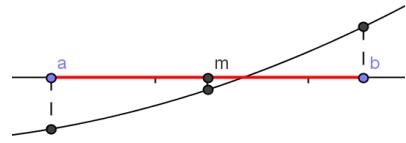
$a \leftarrow m$

Sinon

$b \leftarrow m$

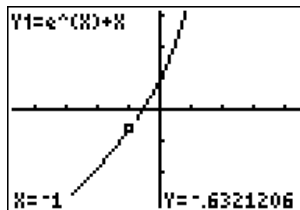
Fin Si

Fin Tant que



```
PROGRAM:DICHO
:Prompt A,B,E
:While (B-A)>E
:(A+B)/2→M
:If Y1(M)<0
:Then
:M→A
:Else
:M→B
:End
:End
:Disp "X ENTRE",
A,B
```

```
Graph1 Graph2 Graph3
\Y1=e^(X)+X
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```



```
PrgrmDICHO
A=?-2
B=?1
E=?0.01
X ENTRE
-.5703125
-.564453125
Done
```

```
PrgrmDICHO
A=?-2
B=?2
E=?0.00001
X ENTRE
-.5671463013
-.5671386719
Done
```

```
PrgrmDICHO
A=?-2
B=?1
E=?10^(-7)
X ENTRE
-.5671432912
-.5671432018
Done
```

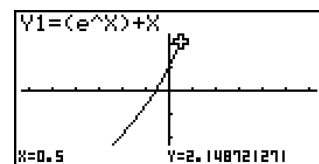
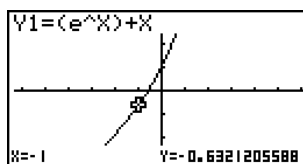
Algorithme : approcher, à 10^{-n} près les solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[a;b]$.

Cas où la fonction est continue et strictement **monotone** sur $[a;b]$

```
Tant que b - a > 10-n faire
    m ← (a + b) / 2
    Si f(a) × f(m) > 0 alors
        a ← m
    Sinon
        b ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

```
=====DICHOT=====
"A=?>A#
"B=?>B#
"EPSILON=?>E#
While (B-A)>E#
  (A+B)/2>M#
  If Y1(A)×Y1(M)>0#
    Then M>A#
  Else M>B#
  IfEnd#
WhileEnd#
"X COMPRIS ENTRE":A,
"ET":B,
[TOP] [BTM] [SRC] [MENU] [A↔B] [CHAP]
```

```
Fonct graph :Y=
Y1BeX+X
Y2:
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:
[SEL] [DEL] [TYPE] [STYL] [ZMEM] [DRAW]
```



```
A=?
-2
B=?
2
EPSILON=?
0.01
X COMPRIS ENTRE
-0.5703125
ET
-0.564453125
- DISP -
```

```
A=?
-2
B=?
2
EPSILON=?
0.00001
X COMPRIS ENTRE
-0.5671463013
ET
-0.5671386719
- DISP -
```

```
A=?
-2
B=?
2
EPSILON=?
10-7
X COMPRIS ENTRE
-0.5671432912
ET
-0.5671432018
- DISP -
```

Python

```
# On importe la fonction exponentielle
from math import exp

# On définit la fonction
def f(x):
    return exp(x) + x

# On implémente l'algorithme
def dichotomie(a, b, epsilon):
    while (b - a) > epsilon:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    print("La solution appartient à l'intervalle [" +
          str(a) + ";" + str(b) + "] avec une précision de", epsilon)
```

```
>>> dichotomie(-1,2,0.000001)
La solution appartient à l'intervalle [-0.5671436786651611;-0.5671429634094238]
avec une précision de 1e-06
>>>
```

III. Application aux suites

1) Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

Propriété :

f est une fonction définie sur un intervalle I .

(v_n) est une suite dont tous les termes appartiennent à l'intervalle I .

b et c désignent soit des nombres, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = c$.

Exemple :

Cherchons la limite éventuelle de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$.

$u_n = \sqrt{v_n}$ avec $v_n = \frac{3n+2}{n+1}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Cas particulier :

f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ et (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geq A$, par $u_n = f(n)$.

La lettre L désigne soit un nombre, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Exemple :

Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

$u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (voir plus loin), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2) Théorème du point fixe

Propriété :

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ .

Si la fonction associée f est continue en ℓ , alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration :

La suite (u_n) est convergente vers ℓ .

De plus, la fonction f est continue en ℓ . Donc $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$.

Par composition, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on en déduit alors que $f(\ell) = \ell$.

Remarques :

- La condition de continuité de f en ℓ est indispensable. Comme ℓ n'est « à priori » pas connue, on prendra en pratique l'ensemble sur lequel la fonction f est continue.
- Si l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions, on choisira celle qui correspondra aux caractéristiques de la suite.