Chapitre 5

Fonctions : variations

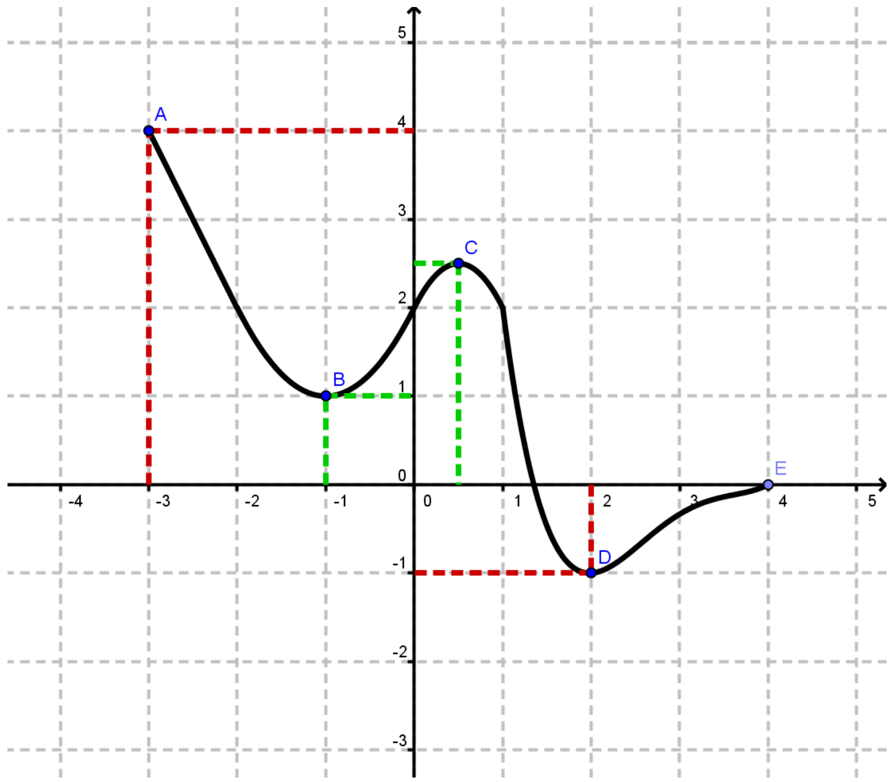
I. Extremums et variations

1) Notions d'extremums

Définitions :
Soit *f* une fonction

- Le **maximum** M de *f* sur un intervalle I est la plus grande valeur prise par *f(x)* lorsque *x* parcourt cet intervalle.
  On a alors pour tout $x \in I, \ f(x) \leqslant M$
- Le **minimum** m de *f* sur un intervalle I est la plus petite valeur prise par *f(x)* lorsque *x* parcourt cet intervalle.
  On a alors pour tout $x \in I, \ f(x) \geqslant m$
- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Exemple :
Les extremums de la fonction *f* « correspondent » aux points A et D.
Le maximum vaut 4 et est atteint lorsque $x = -3$.
Le minimum vaut -1 et est atteint lorsque $x = 2$.
Sur l'intervalle [-1 ; 1], le minimum vaut 1 et est atteint pour $x = -1$; le maximum vaut 2,5 et est atteint pour $x = 0,5$.



2) Sens de variation

Définitions :
f est une fonction et I un intervalle contenu dans son ensemble de définition.

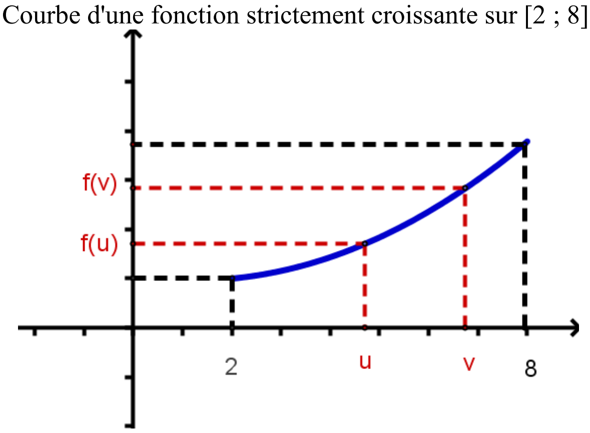
- *f* est **strictement croissante** sur l'intervalle I si pour tous nombres *u* et *v* de l'intervalle I :
  si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$.
- *f* est **strictement décroissante** sur l'intervalle I si pour tous nombres *u* et *v* de l'intervalle I :
  si $u < v$ alors $f(u) > f(v)$.

Remarques :

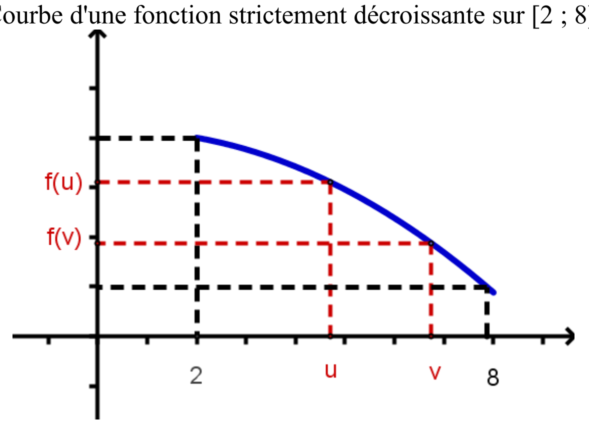
- *f* est **croissante** sur l'intervalle I si pour tous nombres *u* et *v* de l'intervalle I :
  si $u<v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$.
- *f* est **décroissante** sur l'intervalle I si pour tous nombres *u* et *v* de l'intervalle I :
  si $u<v$ *alors* $f(u) \geqslant f(v)$.

Exemples :

Courbe d'une fonction strictement croissante sur [2 ; 8].



Courbe d'une fonction strictement décroissante sur [2 ; 8].



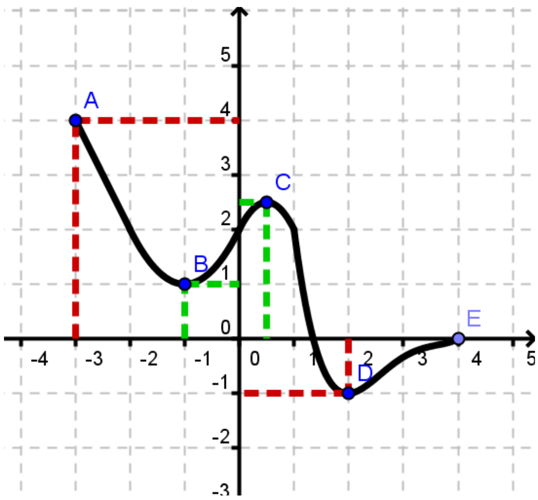
3) Tableau de variation

Un **tableau de variations** résume les variations d'une fonction.

Exemple :

Le tableau suivant donne les variations de la fonction *f* :

x	-3		-1		0,5		2		4
$f(x)$	4	↘	1	↗	2,5	↘	-1	↗	0



II. Résolution graphique d'inéquations

1) Inéquation de la forme f(x)>k

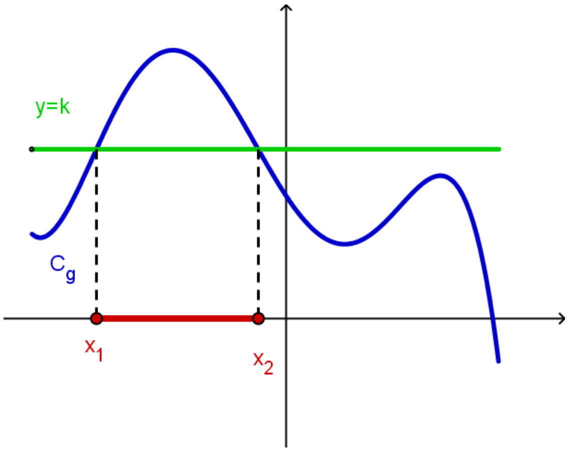
Soient k un nombre réel et f une fonction de domaine de définition D.
On appelle **solution** de l'inéquation $f(x)>k$ tout réel a de D vérifiant $f(a)>k$.
Résoudre l'inéquation $f(x)>k$ consiste à déterminer l'ensemble S de ses solutions.

Propriété :
Les solutions de l'inéquation $f(x)>k$ sont **les abscisses** des points de la courbe C_f situés **au-dessus** de la droite d'équation $y=k$.

Exemple :

- Soit la fonction g représentée par la courbe C_g ci-contre :

L'inéquation $g(x)>k$ a pour solutions les réels de l'intervalle $]x_1;x_2[$.



2) Inéquation de la forme f(x)>g(x)

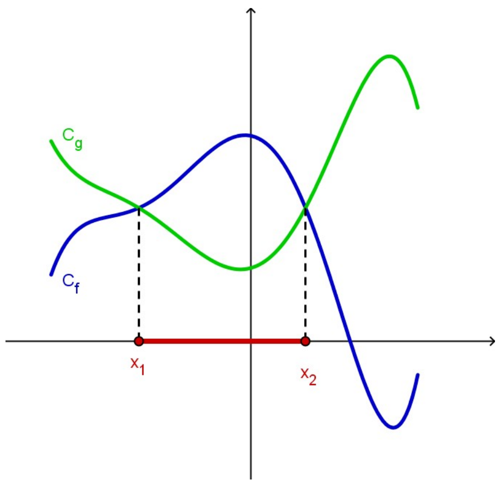
Soit f et g définies sur le même domaine D.
On appelle **solution** de l'inéquation $f(x)>g(x)$ tout réel a de D vérifiant $f(a)>g(a)$.
Résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$ consiste à déterminer l'ensemble S de ses solutions.

Propriété :
Les solutions de l'inéquation $f(x)>g(x)$ sont **les abscisses** des points de la courbe C_f situés **au-dessus** de la courbe C_g .

Exemple :

- Soit les fonctions f et g représentées par les courbes C_f et C_g ci-contre :

L'inéquation $f(x)>g(x)$ a pour solutions les réels de l'intervalle $]x_1;x_2[$.



III. Fonctions affines

1) Définition

Une **fonction affine** est une fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x)=ax+b$$

où a et b sont deux nombres connus

Cas particuliers :

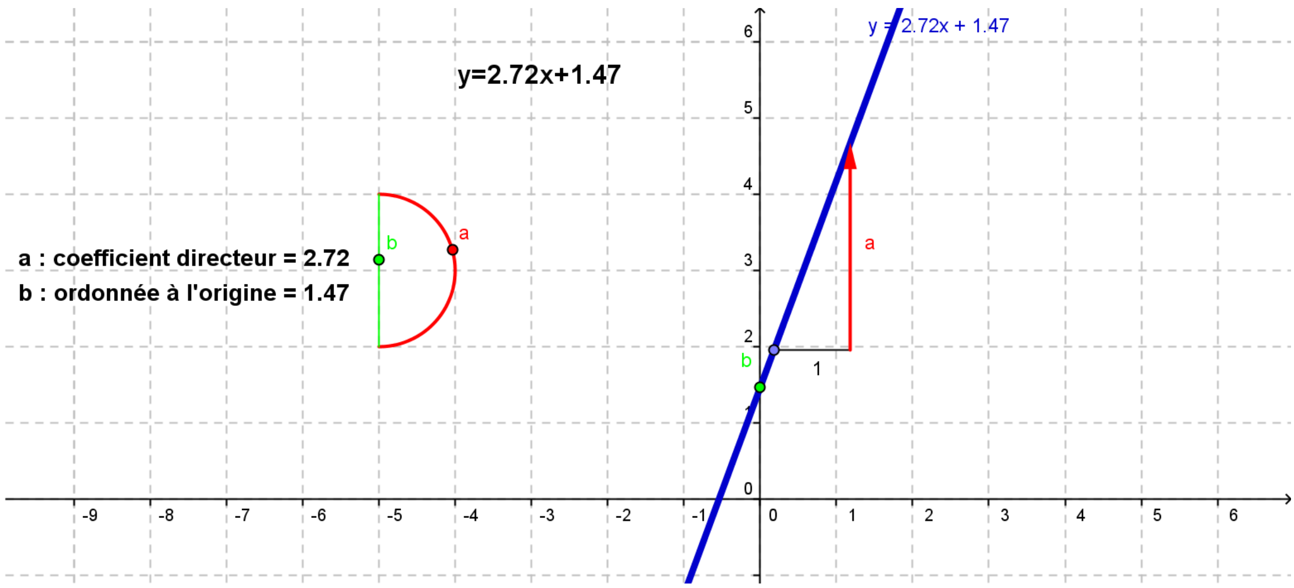
- Si $b = 0$, f est dite **linéaire**.
  Exemple : $f(x)=3x$
- Si $a = 0$, f est dite **constante**.
  Exemple : $f(x)=5$

2) Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine, $f(x)=ax+b$ est une **droite**.

Cette droite a pour équation $y=ax+b$.

- Le nombre a est le **coefficient directeur** de la droite.
- Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine**.



Remarque :
Si $a = 0$, la droite a pour équation $y = b$, elle est parallèle à l'axe des abscisses.

3) *Sens de variations*

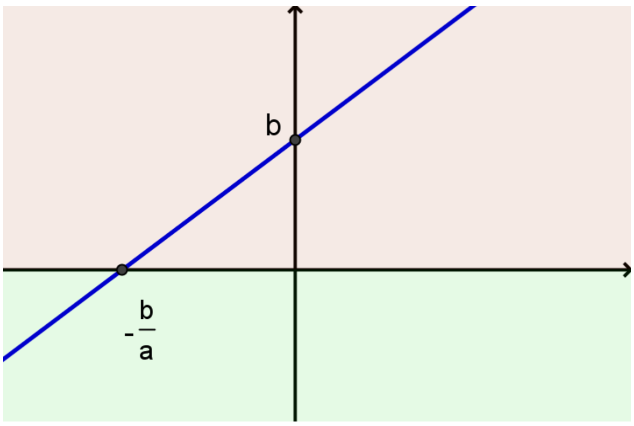
Propriétés :

- *f* est la fonction affine définie par $f(x)=ax+b$.

  Alors pour tout nombre u et v distincts , $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}=a$.

- *f* est la fonction affine définie par $f(x)=ax+b$, avec $a \neq 0$

Si $a > 0$, f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$



Si $a < 0$, f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$

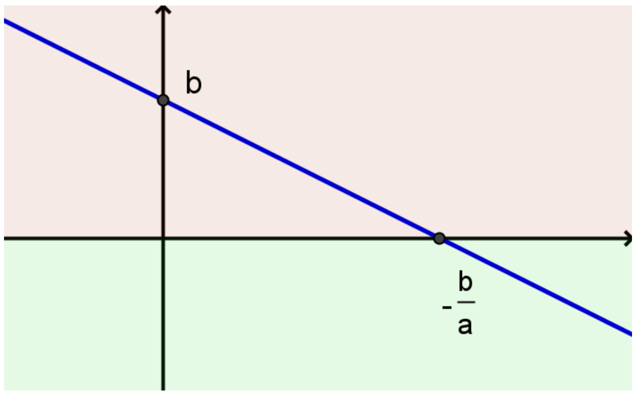


Tableau de signes

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		$+$	0	$-$	

Tableau de variations

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)=ax+b$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)=ax+b$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$