Chapitre 3

Sens de variation d'une fonction

I. Par opérations

1) Somme de fonctions

Propriétés :
Soit u et v deux fonctions définies sur le même intervalle I.

- Si u et v sont **croissantes** sur I, alors la somme $u+v$ est **croissante** sur I.
- Si u et v sont **décroissantes** sur I, alors la somme $u+v$ est **décroissante** sur I.

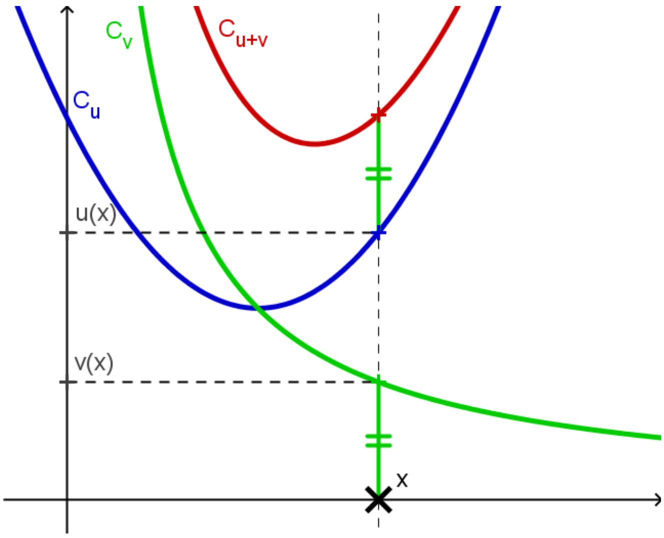
Démonstration :
Supposons que u et v sont croissantes sur I.
Pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $u(a) \leqslant u(b)$ et $v(a) \leqslant v(b)$.
Donc $u(a)+v(a) \leqslant u(b)+v(a) \leqslant u(b)+v(b)$, soit $(u+v)(a) \leqslant (u+v)(b)$
Ainsi, $u+v$ est croissante sur I.
On procède de la même manière pour l'autre cas.

Remarques :

- Les fonctions u et $u+k$ (k est un réel) ont même sens de variation sur I.
- Si u et v n'ont pas même sens de variation, on ne peut pas conclure directement pour le sens de variation de $u+v$.
- Construction graphique :

Pour obtenir la courbe $\mathscr{C}_{u+v}$:
on regarde chaque abscisse x de l'intervalle I, et on ajoute les ordonnées des points des courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ de même abscisse x :

$$y_M = y_A + y_B$$



Exemple :
u et v sont définies sur $[0;+\infty[$ par $u(x)=x$ et $v(x)=x^2$. u et v sont croissantes sur $[0;+\infty[$, donc $f=u+v$, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

2) Produit d'une fonction par un nombre

Propriété :
Soit k un réel non nul et u une fonction définie sur un intervalle I.

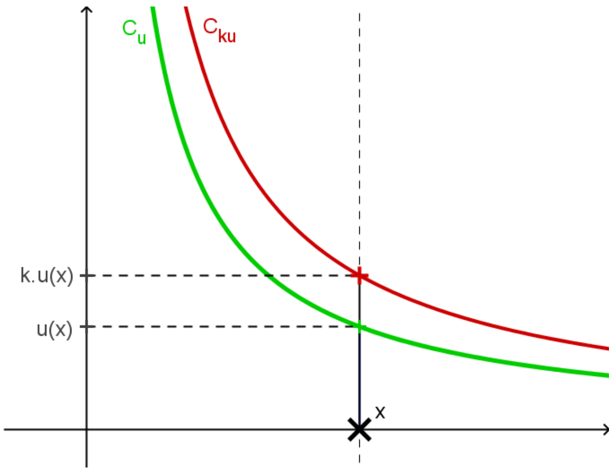
- Si k est strictement **positif**, les fonctions u et ku ont **même** sens de variation.
- Si k est strictement **négatif**, la fonction ku est de sens de variation **contraire** à celui de u.

Démonstration :
Supposons que u est croissante sur I et $k>0$.
Pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $u(a) \leqslant u(b)$.
Donc $ku(a) \leqslant ku(b)$, soit $(ku)(a) \leqslant (ku)(b)$
Ainsi, ku est croissante sur I.
On procède de la même manière pour les autres cas.

Remarques :

- L'opposé $-u$ a le sens de variation contraire de u. La courbe $\mathscr{C}_{-u}$ est symétrique de $\mathscr{C}_u$ par rapport à l'axe des abscisses.
- **Construction graphique :**

Pour obtenir la courbe $\mathscr{C}_{ku}$, on regarde chaque abscisse x de l'intervalle I, on multiplie par k l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}_u$.



Exemple :
On sait que la fonction $x \longmapsto x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$. Donc la fonction $x \longmapsto 2x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$ et la fonction $x \longmapsto -3x^2$ est décroissante sur $[0;+\infty[$.

3) Fonction composée $g \circ u$

Propriétés :
Soit u et g deux fonctions telles que $g \circ u$ est définie sur l'intervalle I.

- Si u et g ont **même sens** de variation, alors leur composée $g \circ u$ est **croissante** sur I.
- Si u et g ont des **sens** de variation **contraires**, alors leur composée $g \circ u$ est **décroissante** sur I.

Démonstration :
Supposons que u et g sont croissantes sur I.
Pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $u(a) \leqslant u(b)$. Or, g étant croissante $g[u(a)] \leqslant g[u(b)]$
Donc $(g \circ u)(a) \leqslant (g \circ u)(b)$
Ainsi, $g \circ u$ est croissante sur I.
On procède de la même manière pour les autres cas.

Exemple :
La fonction $u : x \longmapsto x^2+1$ est croissante sur $]0;+\infty[$ (somme de deux fonctions croissantes) et la fonction $g : X \longmapsto \frac{1}{X}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Ainsi la fonction $g \circ u$ définie sur $]0;+\infty[$ par $(g \circ u)(x) = g[u(x)] = g[x^2+1] = \frac{1}{x^2+1}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

II. A l'aide de la dérivée

1) *Rappels*

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Définitions :

- Dire que *f* est **dérivable en *a*** signifie que la fonction $t : h \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.
  On note $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- $f'(a)$ est appelé le **nombre dérivé de *f* en a**.
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le **taux de variation** de *f* entre a et $a+h$.
- Lorsque *f* est **dérivable** en tout point *x* de I, la fonction $x \longmapsto f'(x)$ est appelé la **fonction dérivée** de *f* et est notée f' .

Règles de calculs :

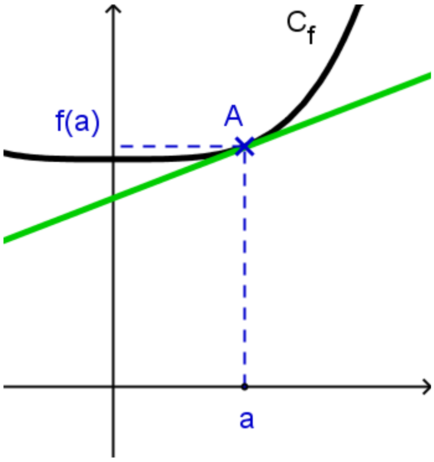
$f(x)$	$f'(x)$	*f* dérivable sur ...
k(constante)	0	$\mathbb{R}$
$x+k$	1	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ pour *n* entier, $a_n \neq 0$ $\mathbb{R}^*$ pour *n* entier, $a_k\, x^k$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Propriétés :

- $(u+v)' = u'+v'$
- $(k \times u)' = k \times u'$
- $(uv)' = u'v+uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Démonstration :

- Considérons une fonction polynôme de degré n :
$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a0 \quad (\text{avec } a_n \neq 0)$$
Chaque fonction $x \longmapsto a_k x^k$, produit de la fonction $x \longmapsto x^k$ par la constante a_k est dérivable sur ℝ.
Donc *f,* somme de fonctions dérivables sur ℝ, est dérivable sur ℝ.
- Une fonction rationnelle, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, quotient de deux fonctions polynômes, est dérivable sur I si $g(x) \neq 0$ sur I.



<u>Interprétation graphique :</u>
f est une fonction dérivable sur un intervalle I et *a* est un réel de I.
$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de *f* dans un repère.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est la droite T qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ a pour équation :
$$y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$$

2) *<u>Étude de fonction</u>*

<u>Variations</u>

<u>Théorème :</u>
Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- *f* est **croissante** sur I si, et seulement si, pour tout réel *x* de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- *f* est **décroissante** sur I si, et seulement si, pour tout réel *x* de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- *f* est **constante** sur I si, et seulement si, pour tout réel *x* de I, $f'(x)=0$.

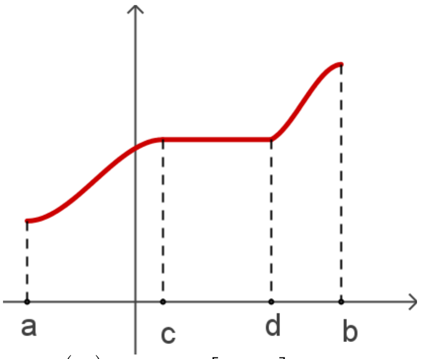
<u>Extremums</u>

<u>Propriété :</u>
Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la dérivée s'annule en changeant de signe, alors la fonction admet un extremum.

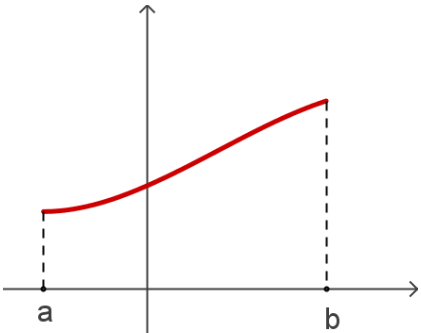
x	a		c		b
f '(x)		+	0	–	
f(x)		↗	*maximum*	↘	

x	a		c		b
f '(x)		–	0	+	
f(x)		↘	*minimum*	↗	

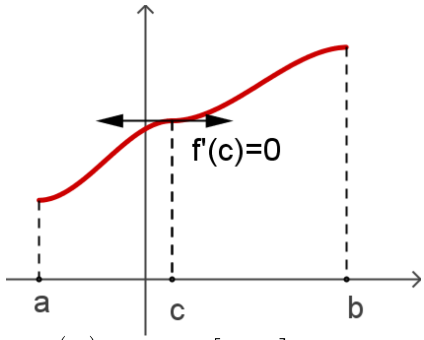
Exemples :



$f'(x)=0$ sur $[c;d]$ contenu dans l'intervalle $[a;b]$.



$f'(x)>0$ sur $[a;b]$



$f'(x)>0$ sur $[a;b]$ sauf en *c*, où $f'(c)=0$.

f est **strictement croissante** sur $[a;b]$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :
Toute fonction **dérivable** sur I est **continue** sur I.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse.
La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Propriété :
Si $f'>0$ sur $]a;b[$, ou si $f'<0$ sur $]a;b[$, alors *f* prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
Pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique sur $[a;b]$.

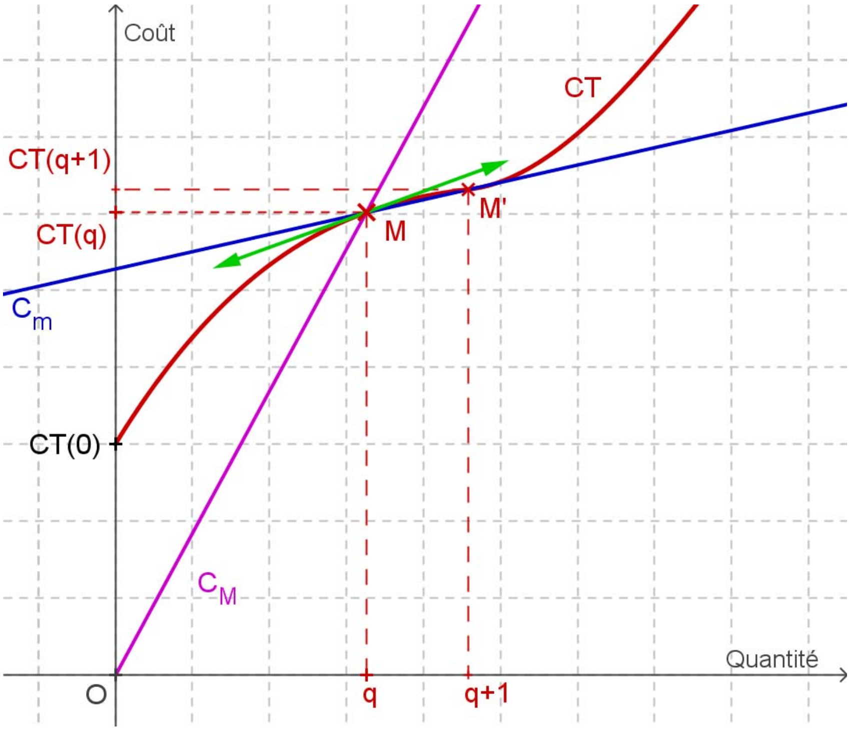
Exemple :
Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^2+x$.
On a $f'(x)=2x+1$ donc $f'(x)>0$ sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f'(x)<0$ sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$.
Sur l'intervalle $I=[0;5]$, on a $f'>0$, donc *f* prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(0)$ et $f(5)$, soit toute valeur entre 0 et 30.

Fonctions de coûts

Le coût total de production d'un produit en quantité *q* est la somme de tous les coûts de fabrication : la fonction de coût total est toujours croissante.

Définition :
Soit $\mathscr{C}$ une courbe de coût total :

- Le **coût total** $CT(q)$ est l'ordonnée du point M de $\mathscr{C}$ d'abscisse la quantité *q*.
- Les **coûts fixes** sont les coûts lorsque l'on produit une quantité nulle $CT(0)$
- Le **coût moyen** est le quotient du coût total par la quantité :
$$C_M(q)=\frac{CT(q)}{q}$$
- Le **coût marginal** en *q* est donné par $C(q+1)-C(q)$



Le coût moyen (C_M) est la pente de la droite (OM) :

$$C_M(q) = \frac{CT(q) - 0}{q - 0}$$

Le coût marginal (C_m) est la pente de la droite (MM') :

$$C_m(q) = \frac{C(q+1) - C(q)}{(q+1) - q}$$

Le **coût marginal** est assimilé à la dérivée du coût total :

$$C_m(q) \approx CT'(q)$$

Propriété :
Lorsque le **coût moyen** est **minimal**, le coût moyen est **égal** au coût marginal.

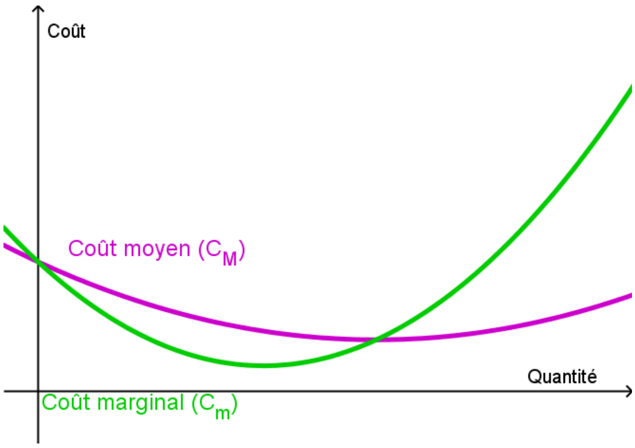
Démonstration :
Lorsque le coût moyen est minimal, sa dérivée s'annule.
Or $C_M(q) = \frac{CT(q)}{q}$, est de la forme $\frac{u}{v}$, et sa dérivée est $C_M'(q) = \frac{CT'(q) \times q - 1 \times CT(q)}{q^2}$.

Ainsi $C_M'(q) = 0 \Leftrightarrow CT'(q) \times q = CT(q) \Leftrightarrow \frac{CT(q)}{q} = CT'(q)$.

Ainsi le coût moyen est égal au coût marginal.

Remarque :
Lorsque le coût d'une unité supplémentaire produite (coût marginal C_m) est inférieur au coût moyen (C_M) calculé jusque-là, le coût moyen diminue.

Et inversement, lorsque le coût d'une unité supplémentaire produite est plus grand que le coût moyen, celui-ci augmente.



III. Dérivée d'une fonction composée

1) Formule générale

Théorème :
Soit u et g deux fonctions telles que la composée $f = g \circ u$ existe sur un intervalle I.
Si u est dérivable en x de I et g est dérivable en $u(x)$, alors la composée $f = g \circ u$ est dérivable en x de I et sa dérivée est :

$$f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x)$$

On écrit aussi $(g \circ u)' = g'(u) \times u'$.

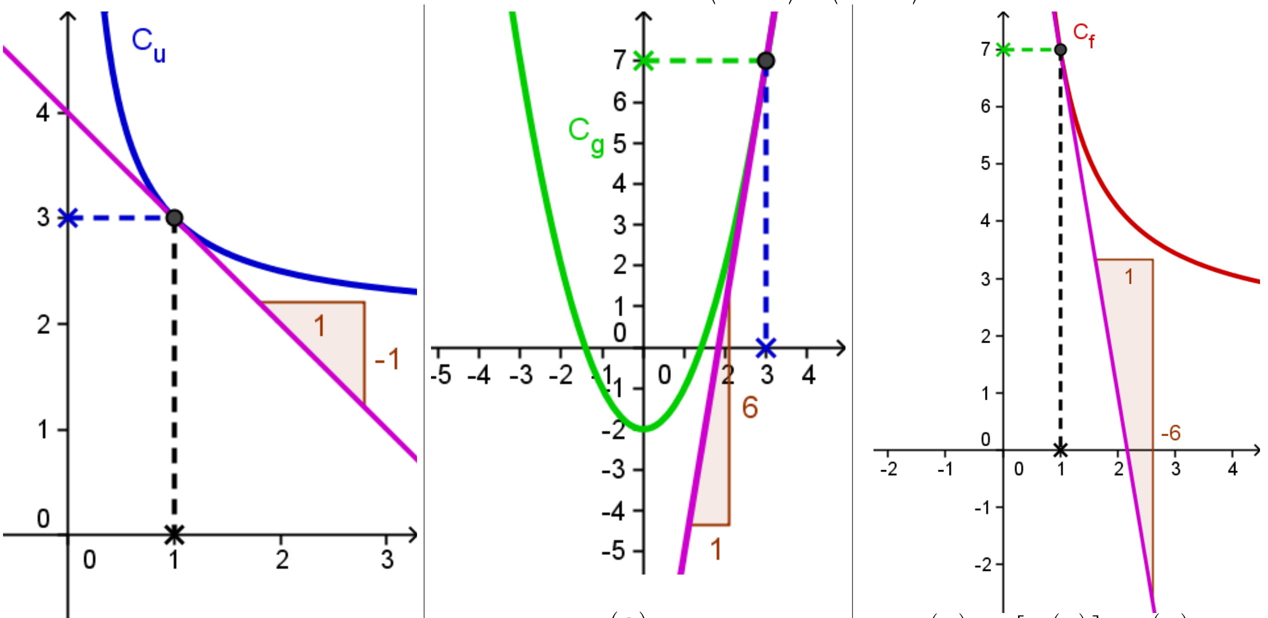
Exemple :
Soit la fonction f définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$.
On pose $u(x) = 100 - x^2$ et $g(X) = \sqrt{X}$. On a donc $f(x) = g[u(x)] = (g \circ u)(x)$
$f : x \longmapsto 100 - x^2 \longmapsto \sqrt{100 - x^2}$.
On a $u'(x) = -2x$ et la dérivée de la racine carrée est $g'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$ lorsque $X > 0$.
Ici $X = 100 - x^2$, donc la dérivée n'existe que $]-10; 10[$. D'où :

$$f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \times (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Interprétation graphique :

Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2$.
La composée $f = g \circ u$ est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (g \circ u)(x) = g[u(x)] = g\left(\frac{1}{x} + 2\right) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)^2 - 2\,.$$



$u(1) = 3$
$u'(1) = -1$

$g(3) = 7$
$g'(3) = 6$

$f(1) = g[u(1)] = g(3) = 7$
$f'(1) = g'[u(1)] \times u'(1)$
$f'(1) = g'(3) \times u'(1) = -6$

2) Formules de dérivées

Propriété :
u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et n est un entier relatif.
Alors la fonction $f=u^n$ est dérivable :

- en tout point de I lorsque $n \geqslant 2$
- en tout point de I où u ne s'annule pas lorsque $n \leqslant -1$.

De plus :

$$f'(x)=n[u(x)]^{n-1}\times u'(x)$$

Démonstration :
Pour tout x de I, $f(x)=[u(x)]^n$.
On peut donc écrire $f(x)=g[u(x)]$ avec $g(y)=y^n$.

- **1er cas :** $n \geqslant 2$: alors la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$: $g'(y)=ny^{n-1}$
  Donc d'après le théorème précédent on sait que f est dérivable sur I et que, pour tout x de I :
  $$f'(x)=g'[u(x)]\times u'(x)=n[u(x)]^{n-1}\times u'(x)$$
- **2e cas :** $n \leqslant -1$: alors la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$: $g'(y)=ny^{n-1}$
  Donc d'après le théorème précédent on sait que f est dérivable sur I et que, pour tout x de I :
  $$f'(x)=g'[u(x)]\times u'(x)=n[u(x)]^{n-1}\times u'(x)$$

Exemples :

- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+3x-1)^4$.
  On peut dire que $f=u^n$ avec $u(x)=x^2+3x-1$ et $n=4$.
  Le polynôme u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,
  $$f'(x)=4(x^2+3x-1)^3\times(2x+3)$$
- g est la fonction définie sur $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $g(x)=\frac{1}{(2x+1)^3}$.
  On peut dire que $g=u^n$ avec $u(x)=2x+1$ et $n=-3$.
  u est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, donc g est dérivable sur I et pour tout réel x,
  $$g'(x)=-3(2x+1)^{-4}\times 2=-6(2x+1)^{-4}=\frac{-6}{(2x+1)^4}$$

Remarques :

- Si $f=\frac{1}{u}$ alors $f'=-\frac{1}{u^2}\times u'=-\frac{u'}{u^2}$
- Si $f=\frac{1}{u^n}$ alors $f'=\frac{-n}{u^{n+1}}\times u'=\frac{-nu'}{u^{n+1}}$

Propriété :
u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors la fonction $f=\sqrt{u}$ est dérivable sur I, et on a :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Démonstration :
Pour tout x de I, $f(x)=\sqrt{u(x)}$.
On peut donc écrire $f(x)=g[u(x)]$ avec $g(y)=\sqrt{y}$.
Pour tout x de I, $u(x)>0$; or g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$.
Donc d'après le théorème précédent on sait que f est dérivable sur I et que, pour tout x de I :

$$f'(x)=g'[u(x)]\times u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\times u'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} .$$

<u>Exemple :</u>
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
On peut dire que $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2+1$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u(x)>0$; donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} .$$