# Chapitre 7

# Vecteurs

## I. Vecteur et translation

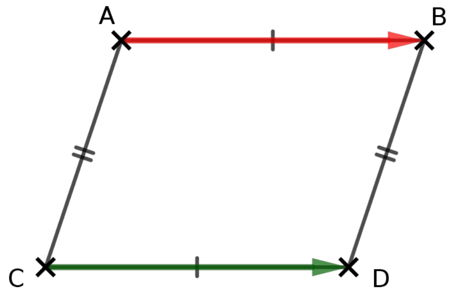
### 1) Translation

**Définition :**
Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan.
La **translation** du plan **qui transforme $A$ en $B$** est appelé **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour **direction** celle de la droite (AB), pour **sens** celui de A vers B et pour **longueur** la longueur AB.

**Exemple :**
Image D d'un point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

1er cas : $C \notin (AB)$

D est le point tel que ABDC est un parallélogramme.

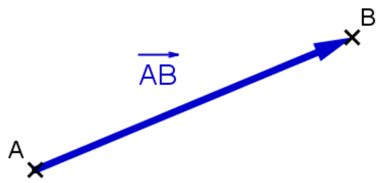



2e cas : $C \in (AB)$

D est le point de (AB) tel que AB = CD et tel que le sens de C vers D soit le même que celui de A vers B.


### 2) Notion de vecteur

- La notation $\vec{AB}$ se lit « vecteur $AB$ ».
  Le vecteur $\vec{AB}$ est représenté par une flèche.
  $A$ est l'**origine** du vecteur et $B$ son **extrémité**.



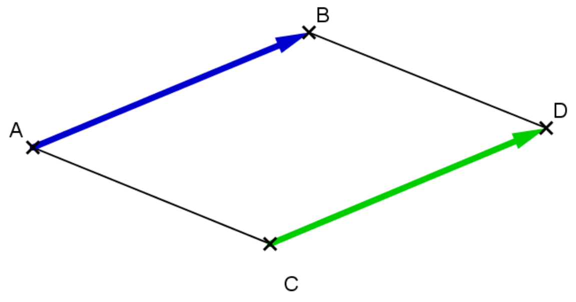

- Si $A$ et $B$ sont confondus, $\vec{AB}$ s'écrit $\vec{AA}$.
  On dit que $\vec{AA}$ est le **vecteur nul** note $\vec{0}$.
  Ainsi $\vec{AA}=\vec{0}$. Le vecteur nul n'a pas de direction.

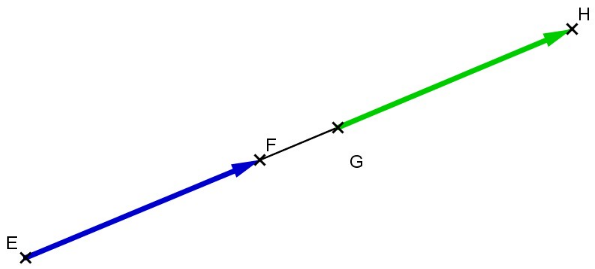
## 3) *Égalité de vecteurs*

**Définition :**

L'égalité de deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ non nuls se définit en disant qu'ils ont :

- même direction : $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles
- même sens
- même longueur



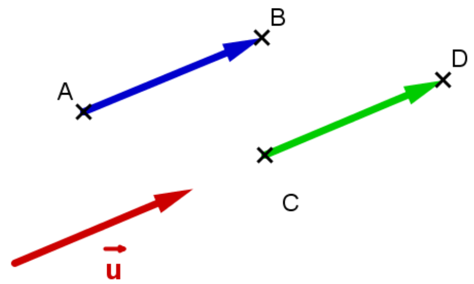

**Remarques :**

- $\vec{AB}=\vec{CD}$ ⇔ ***ABDC* est un parallélogramme** ⇔ $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
- On peut aussi utiliser une lettre pour désigner un vecteur.

Si $\vec{u}$ est représenté par un vecteur $\vec{AB}$ , on écrit $\vec{u}=\vec{AB}$
$\vec{u}$ désignera tous les vecteurs égaux à $\vec{AB}$ .

$$\vec{u}=\vec{AB}=\vec{CD}$$

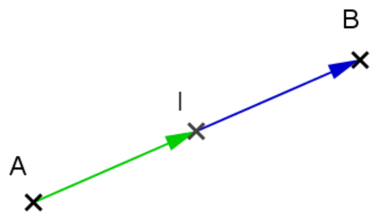
$\vec{AB}$ , $\vec{CD}$ ,... sont des représentants de $\vec{u}$ .




**Propriété :**

Soit trois points $A$, $I$ et $B$.

$\vec{AI}=\vec{IB}$ si, et seulement si, $I$ est le milieu de $[AB]$.



# II. Vecteur et coordonnées

Le plan est muni d'un repère ($O$ ; $I$, $J$)

## 1) *Coordonnées d'un vecteur*

### Coordonnées de $\vec{u}$

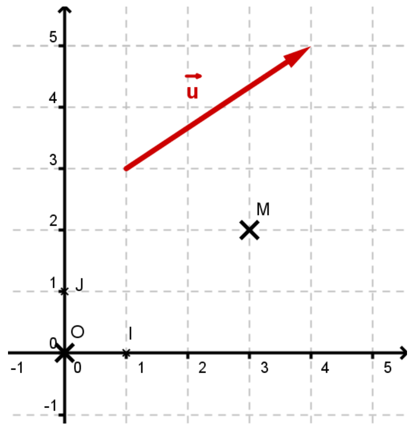
**Définition :**

Les **coordonnées d'un vecteur** $\vec{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ .

Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ .

**Exemples :**

Les coordonnées de $M$ sont (3 ; 2) donc, par définition, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ .




**Notation :**

$\vec{u}$ ($x$ ; $y$) signifie que les coordonnées de $\vec{u}$ sont ($x$ ; $y$)

On utilise aussi la notation $\vec{u}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ .

**Remarque :**

Si $\vec{u}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors :

$\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow x=x'$ **et** $y=y'$

### Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

**Théorème :**

Soients $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ , les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

**Notation :** $\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

*Démonstration :*

Par définition, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix}$ où M est le point tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ .

Il s'agit donc de prouver que :

$x_M-x_O=x_M=x_B-x_A$ et $y_M-y_O=y_M=y_B-y_A$

Or $OMBA$ est un parallélogramme, donc [$AM$] et [$OB$] ont le même milieu $K$.

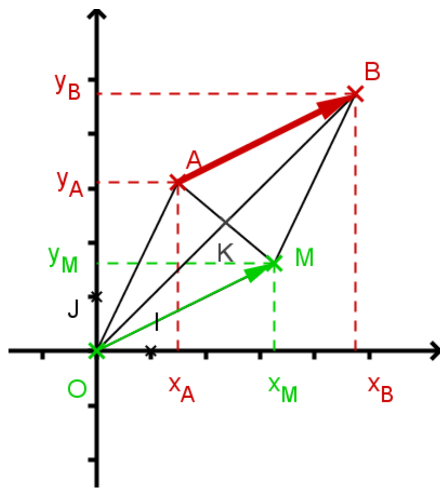
Comme $K$ est le milieu de [$AM$], $2x_K=x_M+x_A$ .

De plus, $K$ est le milieu de [$OB$] donc

$2x_K=x_B+x_O=x_B+0=x_B$ .

On a donc $x_M+x_A=x_B$ et, par conséquent, $x_M=x_B-x_A$

On montre de même que $y_M=y_B-y_A$




**Exemple :**

Soients $A(3;-4)$ et $B(5;-1)$ , on a donc $x_B-x_A=5-3=2$ et $y_B-y_A=-1-(-4)=3$ donc:

$\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ .

### 2) ***Propriétés***

**Propriétés :**

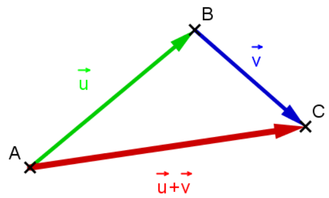
- Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont égaux si, et seulement si leurs coordonnées sont égales.
- $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}=\vec{DC}$ $\Leftrightarrow$ $x_B-x_A=x_C-x_D$ **et** $y_B-y_A=y_C-y_D$ .

## III. Somme de vecteurs

### 1) ***Vecteur somme***

**Définition :**
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
La somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$ .

En enchaînant ces deux translations, un point $A$ a pour image le point $B$ vérifiant $\vec{AB}=\vec{u}$ et le point $B$ a pour image le point $C$ avec $\vec{BC}=\vec{v}$ .
Par définition, le point $C$ est l'image du point $A$ par la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ .




### 2) ***Relation de Chasles***

**Propriété :**
Quels que soient les points A, B et C du plan, on a :

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$$

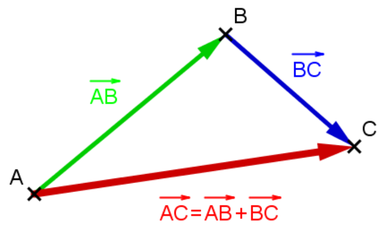
**Théorème :**
Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ).
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.
La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ .

*Démonstration :*

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ .
On choisit un point $A(x_A;y_A)$ et les points $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{BC}$ .
On a : $x=x_B-x_A$ et $y=y_B-y_A$
$x'=x_C-x_B$ et $y'=y_C-y_B$
On additionne les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ :

$$x+x'=(x_B-x_A)+(x_C-x_B)=x_B-x_A+x_C-x_B=x_C-x_A$$
$$y+y'=(y_B-y_A)+(y_C-y_B)=y_B-y_A+y_C-y_B=y_C-y_A$$

On obtient les coordonnées du vecteur $\vec{AC}$ , c'est à dire celles du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$

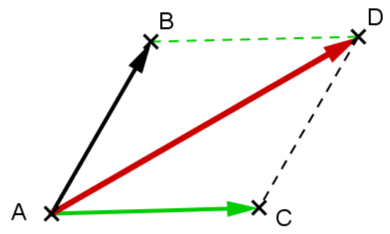



**Exemple :**
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$. $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2+4\\-5+7\end{pmatrix}$ soit $\vec{w}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

**Règle du parallélogramme**
Soit $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ deux vecteurs de même origine $A$.
On a $\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$ si, et seulement si, $D$ est le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

*Démonstration :*

- Si $ABDC$ est un parallélogramme on a $\vec{AC}=\vec{BD}$
  En utilisant la relation de Chasles, on en déduit que :
  $\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}$
- Réciproquement, si $\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$, comme $\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}$, alors $\vec{BD}=\vec{AC}$ et $ABDC$ est un parallélogramme.



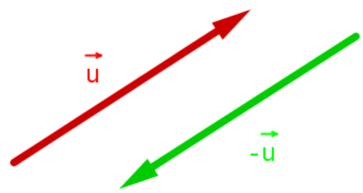

**Propriétés :**
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ ; $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ ; $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

## 3) Opposé d'un vecteur

$\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}$, donc on peut définir le vecteur $\vec{BA}$ comme l'opposé du vecteur $\vec{AB}$.
On écrit : $\vec{BA}=-\vec{AB}$

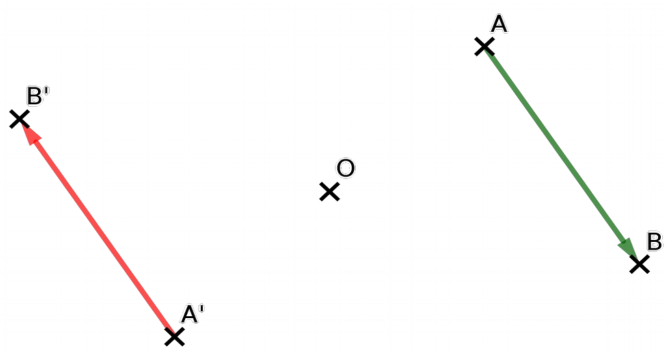
**Définition :**

- L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$.
- L'opposé du vecteur $\vec{AB}$ est le vecteur $-\vec{AB}=\vec{BA}$.




**Exemple :**
Soit $A(-2;4)$ et $B(3;-2)$.
Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées :
$x_{\vec{AB}}=x_B-x_A=3+2=5$ et $y_{\vec{AB}}=y_B-y_A=-2-4=-6$
donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{BA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$.

**Propriété :**
Si une symétrie centrale de centre O transforme un point A en un point A’ et un point B en un point B’, alors $\vec{A'B'}=-\vec{AB}$



# IV. Vecteurs colinéaires

## 1) Multiplication d'un vecteur par un nombre

Le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

**Définition :**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et *k* un nombre réel.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel *k* est le vecteur $k\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

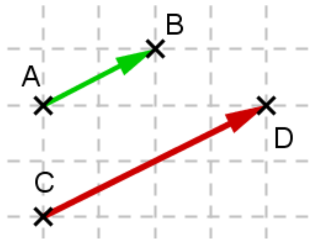
**Remarque :**

Lorsque $k \neq 0$ et $\vec{AB} \neq \vec{0}$, le vecteur $k\vec{AB}$ est le vecteur $\vec{CD}$ tel que :

- $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont la même direction : (AB)//(CD)

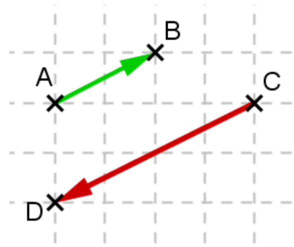
Si $k>0$

- $\vec{CD}$ et $\vec{AB}$ ont le **même sens**
- $CD = k \times AB$




Si $k<0$

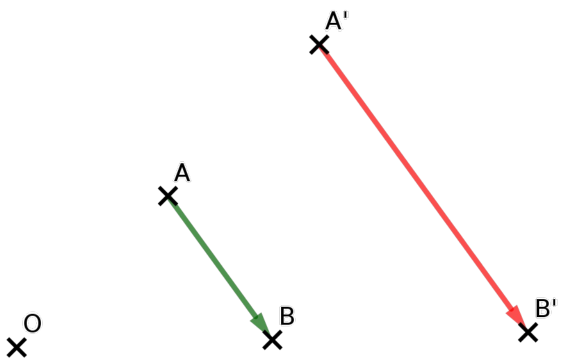
- $\vec{CD}$ et $\vec{AB}$ sont de **sens contraire**
- $CD = (-k) \times AB$




**Convention :** Si $k=0$ ou si $\vec{AB} = \vec{0}$, on convient que $k\vec{AB} = \vec{0}$.

**Propriété :**

Si une homothétie de centre O et de rapport *k* transforme un point A en un point A’ et un point B en un point B’, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$




## 2) Règle de calculs

**Propriétés :**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels *k* et *k'* :

- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

**Exemples :**

- $3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF})=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{EF}$
- $2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EF})=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{EF}$
- $2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AB}=(2-5)\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AB}$
- $-5(2\overrightarrow{AB})=-10\overrightarrow{AB}$

## 3) *Conséquence*

**Définition :**
Deux vecteurs, non nuls, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.

**Théorème :**
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre $k$ tel que $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ .

**Remarques :**

- On a donc :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ($AB$) et ($CD$) sont des droites parallèles | $\Leftrightarrow$ | $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires | $\Leftrightarrow$ | Il existe un nombre $k$ tel que $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ . |

- Dire que trois points $A$, $B$, $C$ distincts deux à deux sont alignés équivaut à dire qu'il existe un nombre $k$ tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

## 4) *Utilisation des coordonnées*

Dans un repère, les coordonnées de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et celles de $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ .

La colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ , non nuls, se traduit par l'existence d'un nombre $k$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$ , c'est-à-dire $x'=kx$ et $y'=ky$ .

Le tableau

| | |
|---|---|
| $x$ | $x'$ |
| $y$ | $y'$ |

est donc un tableau de proportionnalité

**Théorème :**
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy'-x'y=0$ .

**Exemples :**

- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\20\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $2\times20-(-8)\times(-5)=40-40=0$ .
- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $(-3)\times2-5\times4=-6-20=-26$ .