Chapitre 13
Loi des grands nombres

I. Inégalités de concentration

1) Inégalité de Markov

Définition :

Une variable aléatoire est dite **positive ou nulle** dans un univers Ω, lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des réels positifs ou nuls.

Remarque :

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$.

Exemple :

La variable aléatoire donnant le nombre de faces numérotées 1 sur 10 lancers d'un dé est positive ou nulle.

Propriété (inégalité de Markov) :

Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance E(X) et a un nombre réel strictement positif. On a :

$$p(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a} .$$

Démonstration :

Notons $\mathcal{E} = X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ où les valeurs x_i positives sont rangées par ordre croissant.

Le nombre a étant positif, il existe un entier k tel que $x_{k-1} < a \leqslant x_k$.

L'espérance de X est alors :

$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + \dots + x_{k-1} \times p(X = x_{k-1}) + x_k \times p(X = x_k) + \dots + x_n \times p(X = x_n)$.

$E(X) \geqslant x_k \times p(X = x_k) + \dots + x_n \times p(X = x_n)$.

$E(X) \geqslant a \times p(X = x_k) + \dots + a \times p(X = x_n)$.

$E(X) \geqslant a \times (p(X = x_k) + \dots + p(X = x_n))$.

$E(X) \geqslant a \times p(X \geqslant a)$.

Ainsi puisque $a > 0$, on a $p(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

Remarques :

- Ce résultat signifie que la probabilité que X prennent des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grande.
- Si $a \leqslant E(X)$, l'inégalité de Markov n'a pas d'intérêt (on dit qu'elle est triviale).

  En effet la borne $\frac{E(X)}{a}$ est alors supérieure à 1 et donc nécessairement, à la probabilité $p(X \geqslant a)$
- Cette inégalité permet de trouver un majorant mais pas forcément le plus petit possible.

Exemples :

- Soit X une variable aléatoire positive d'espérance 1.

  D'après l'inégalité de Markov, on a $p(X \geqslant 100) \leqslant 0{,}01$.

  Autrement dit, une variable aléatoire positive donc l'espérance vaut 1 a au plus une chance sur 100 de dépasser 100.
- En 2015, le salaire brut mensuel moyen en France était de 2442 €.

  On choisit un salarié au hasard et on note X la variable aléatoire donnant son salaire. Les salaires étant positifs ou nuls, on sait que X est une variable aléatoire positive ou nulle.

  On peut donc appliquer l'inégalité de Markov sur un exemple :

$$p(X \geqslant 7326) \leqslant \frac{2442}{7326} \text{ soit } p(X \geqslant 7326) \leqslant \frac{1}{3}$$

2) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété :

Soit X une variable aléatoire et soit a un nombre réel strictement positif. On a :

$$p(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}.$$

Démonstration :

Comme $a > 0$, les inégalités $|X - E(X)| \geqslant a$ et $[X - E(X)]^2 \geqslant a^2$ sont équivalentes.

De plus la variable $(X - E(X))^2$ est positive ou nulle.

On applique donc l'inégalité de Markov à la variable $[X - E(X)]^2$ et au réel a^2.

Ainsi $p([X - E(X)]^2 \geqslant a^2) \leqslant \frac{E[X-E(X)]^2}{a^2}$. Or $E([X - E(X)]^2) = V(X)$ donc

$p([X - E(X)]^2 \geqslant a^2) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$ et on a bien $p(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$.

Remarques :

- La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins a de l'espérance E(X) est d'autant plus petite que a est grand.
- L'inégalité peut donc aussi s'écrire $p(X \notin]E(X) - a \,;\, E(X) + a[) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$.

- $1 - p(|X - E(X)| \geqslant a) = p(E(X) - a < X < E(X) + a)$.

  L'inégalité peut donc aussi s'écrire $p(|X - E(X)| < a) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{a^2}$.
- On dit que $[E(X) - a \,;\, E(X) + a]$ est un intervalle de fluctuation de X.
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin d'être optimale.

  En réalité il est possible que la probabilité soit bien inférieure au majorant obtenu.

Exemples :

- Dans une usine, la variable aléatoire L donnant la largeur, en millimètres, d'une puce électronique prise au hasard a pour espérance E(L) = 12 et pour variance V(L) = 0,01.

  Si la largeur d'une puce n'appartient pas à]11 ; 13[, c'est-à-dire $|L - 12| \geqslant 1$, la puce n'est pas commercialisable.

  La probabilité qu'une puce ne soit pas commercialisable est donc :

  $p(|L - 12| \geqslant 1)$ comme V(L) = 0,01, on a $p(|L - 12| \geqslant 1) \leqslant \frac{0{,}01}{1^2}$ et donc :

  $$p(|L - 12| \geqslant 1) \leqslant 0{,}01$$
- Si $a = 2\sigma(X)$ où $\sigma(X)$ est l'écart-type de la variable X, alors :

  $$p(|X - E(X)| \geqslant 2\,\sigma(X)) \leqslant \frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2} = \frac{1}{4}.$$

  Autrement dit, la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance d'au moins le double de son écart-type est inférieure à $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire et soit a un nombre réel strictement positif. On a :

$$p(|X - E(X)| \geqslant a\sigma) \leqslant \frac{1}{a^2}.$$

Remarque :

On mesure la dispersion d'une variable aléatoire autour de son espérance en nombre d'écarts-type.

Exemples :

- Dans une usine, la variable aléatoire L donnant la largeur, en millimètres, d'une puce électronique prise au hasard a pour espérance E(L) = 12 et pour variance V(L) = 0,01.

  Donc $\sigma(L) = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$.

  Ainsi la probabilité que la largeur de la puce soit éloignée d'au moins $k = 5$ écarts-type, c'est-à-dire $5 \times 0{,}1 = 0{,}5$ de son espérance 12 est inférieure ou égale à $\frac{1}{5^2} = 0{,}04$.

  Il y a, au maximum, 4 % de chance que la largeur d'une puce soit inférieure ou égale à 12 – 0,5 = 11,5 mm ou supérieure ou égale à 12 + 0,5 = 12,5 mm.

- Pour X qui suit la loi $\mathscr{B}(20 ; 0,45)$,

  on a $E(X) = 20 \times 0,45 = 9$ et $\sigma(X) = \sqrt{20\times0,45\times0,55}\approx2,22$.

  Donc, d'après la propriété précédente, on a $p(|X - 9| \geqslant 2\sigma) \leqslant \frac{1}{2^2}$.

  Donc $p(|X - 9| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0,25$.

  D'autre part $p(|X - 9| \geqslant 2\sigma) = p(X \leqslant 9 - 2\sigma) + p(X \geqslant 9 + 2\sigma) = p(X \leqslant 4) + p(X \geqslant 14)$ puisque X ne prend que des valeurs entières.

  On peut vérifier que $p(X \leqslant 4) + p(X \geqslant 14)$ semble très inférieure à 0,25.

II. Loi des grands nombres

1) L'inégalité de concentration

Définition :

On considère n expériences aléatoire identiques et indépendantes.

On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires associées à ces expériences, toutes de même loi.

On note $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$.

M_n s'appelle la **moyenne empirique** des variables $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Propriété (inégalité de concentration) :

On considère une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience, d'espérance E(X) et de variance V(X).

On répète n fois cette expérience de manière indépendante.

On obtient un échantillon de taille n composé de n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont la même loi (elles ont donc même espérance E(X) et même variance V(X)).

Pour tout réel $a > 0$,

$$p(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{na^2} .$$

Démonstration :

D'après les propriétés sur l'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon, on a $E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n, on obtient :

$p(|M_n - E(M_n)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(M_n)}{a^2}$, c'est-à-dire $p(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{na^2}$.

Exemple :

On lance n fois un dé équilibré à 8 faces et on nomme X_i la variable aléatoire donnant le résultat du i-ème lancer. On admet que $E(X_i) = 4,5$ et $V(X_i) = 5,25$ pour tout entier i entre 1 et n.

Les lancers étant indépendants, $(X_1, X_2, \ldots , X_n)$ est un échantillon de variables aléatoires d'espérance $E(X) = 4,5$ et $V(X) = 5,25$ et de moyenne $M_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$.

D'après l'inégalité de concentration pour $n = 100$ et $a = 0,5$, on a :

$p(|M_{100} - 4,5| \geqslant 0,5) \leqslant \frac{5,25}{100\times 0,5^2}$ soit $p(|M_{100} - 4,5| \geqslant 0,5) \leqslant 0,21$.

La probabilité que l'écart entre M_{100} (la moyenne des 100 premiers résultats) et 4,5 soit supérieure ou égale à 0,5 est inférieure ou égale à 0,21.

2) Loi faible des grands nombres

Propriété :

Soient $(X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_n)$ un échantillon de variables aléatoires suivant la même loi et ayant pour espérance $E(X)$ et $M_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel strictement positif a fixé,

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|M_n - E(X)\right| \geqslant a\right) = 0$$

Démonstration :

On applique l'inégalité de concentration à la variable aléatoire M_n.

$0 \leqslant p\left(\left|M_n - E(X)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X)}{na^2}$ et puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{V(X)}{na^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to\infty} p\left(\left|M_n - E(X)\right| \geqslant a\right) = 0$.

Remarque :

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple :

On lance n fois un dé équilibré à 8 faces et on nomme X_i la variable aléatoire donnant le résultat du i-ème lancer. On admet que $E(X_i) = 4,5$ et $V(X_i) = 5,25$ pour tout entier i entre 1 et n.

Les lancers étant indépendants, $(X_1, X_2, \ldots , X_n)$ est un échantillon de variables aléatoires d'espérance $E(X) = 4,5$ et $V(X) = 5,25$ et de moyenne $M_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$.

Pour $a = 0,1$, d'après la loi des grands nombres, $p(|M_n - 4,5| \geqslant 0,1)$, que l'on peut également écrire $p(M_n \notin]4,4 ; 4,6[)$, tend vers 0 lorsque la taille de l'échantillon tend vers $+\infty$.

On en déduit que $p(M_n \in]4,4 ; 4,6[)$ tend vers 1 lorsque la taille de l'échantillon tend vers $+\infty$. Autrement dit, si l'on fait un nombre suffisamment grand de lancers, on peut rendre l'événement « la moyenne de l'échantillon est dans]4,4 ; 4,6[» aussi probable qu'on le souhaite en prenant n suffisamment grand.