Chapitre 8
Orthogonalité et distance dans l'espace

I. Orthogonalité dans l'espace

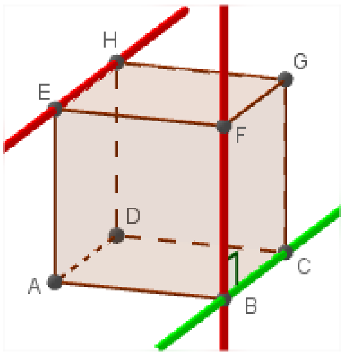
1) Orthogonalité de deux droites

Définition :

Deux droites sont **orthogonales** signifie que leurs parallèles menées d'un point quelconque sont perpendiculaires.

Exemple :

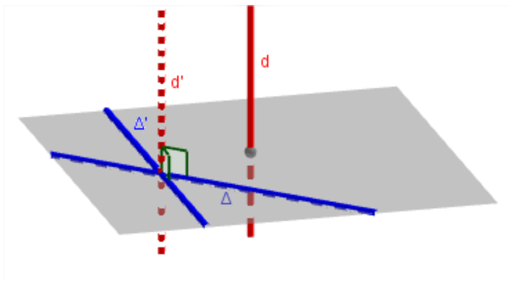
Dans ce cube ABCDEFGH, les droites (BF) et (EH) sont orthogonales, car la parallèle à (EH) passant par B et (FB) sont perpendiculaires : (EH) // (BC) et (BC)⊥(BF).



2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition :

Dire qu'une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont **orthogonaux** signifie que la droite d est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathscr{P}$.



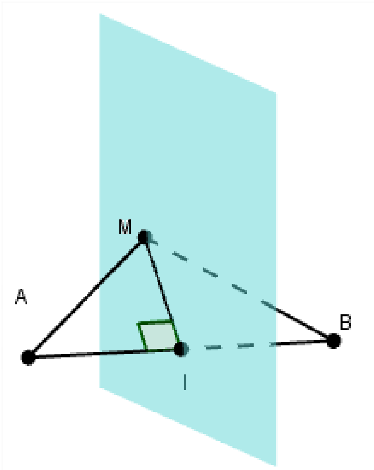
Propriété :

Dire qu'une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont **orthogonaux** signifie que la droite d est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$.

Plan médiateur

Définition :

Le **plan médiateur** d'un segment $[AB]$ est le plan orthogonal à (AB) qui passe par le milieu de $[AB]$.



Propriété :

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est aussi l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et B.

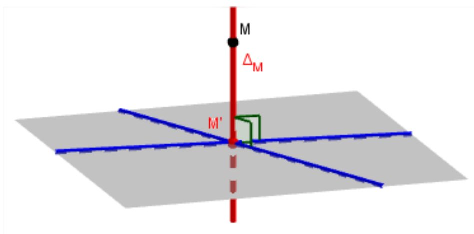
Projection orthogonale sur un plan

Définition :

$\mathscr{P}$ est un plan et M est un point.

Il existe une unique droite Δ_M passant par M et orthogonale à $\mathscr{P}$.

On dit que le point M' d'intersection de Δ_M et $\mathscr{P}$ est le **projeté orthogonal** du point M sur le plan $\mathscr{P}$.



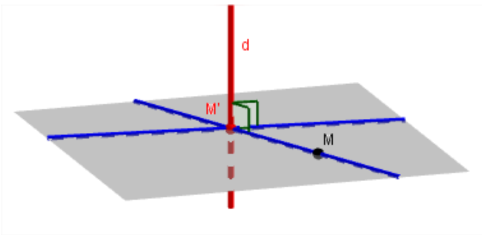
Projection orthogonale sur une droite

Définition :

d est une droite et M est un point.

Il existe un unique plan $\mathscr{P}_M$ passant par M et orthogonale à d.

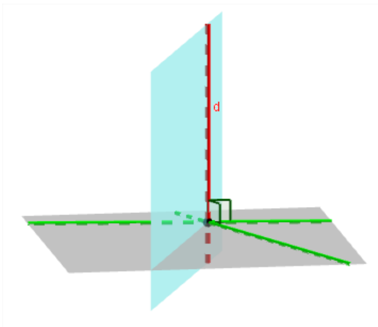
On dit que le point M' d'intersection de $\mathscr{P}_M$ et d est le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d.



3) Orthogonalité de deux plans

Définition :

Deux plans sont **perpendiculaires** lorsque l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.



II. Produit scalaire

1) Produit scalaire dans l'espace

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Les points A, B, C appartiennent à un plan $\mathscr{P}$ et le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans l'espace est, par définition, égal au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathscr{P}$.

Remarque :

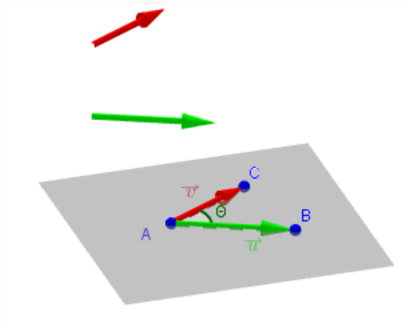
$\vec{u}\cdot\vec{v}$ ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis.

Propriété :

Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace, alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AC\times\cos\theta \text{ avec } \theta=\widehat{BAC}.$$

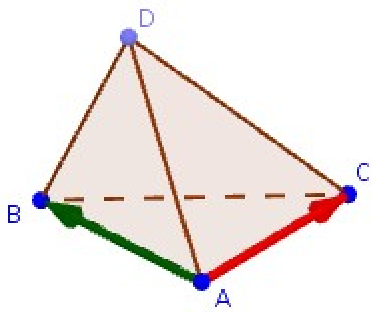
Lorsque l'un des vecteurs est nul, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$



Exemple :

Soit le tétraèdre régulier ABCD de côté 4 cm.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=4\times4\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=8$$



Remarque :

En particulier, $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\widehat{BAB})=\|\vec{u}\|^2\times\cos(0)=\|\vec{u}\|^2$.

Le **carré scalaire** d'un vecteur $\vec{u}$ de l'espace est le **réel** noté $\vec{u}^2$, vérifiant $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$.

On a, comme dans le plan : $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ et par suite $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$.

Propriété :

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = AB × AH si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = - AB × AH si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire.

2) Propriétés algébriques du produit scalaire

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ, on a :

- Le produit scalaire de deux vecteurs est **symétrique** :

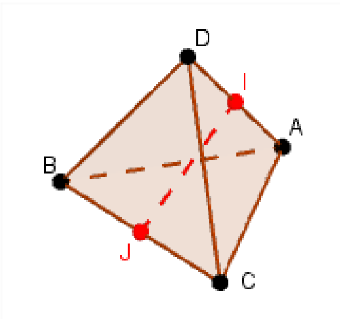
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u} .$$

- Le produit scalaire de deux vecteurs est **bilinéaire**, c'est-à-dire que :

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v}) \quad \text{et} \quad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ soit $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ soit $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ soit $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Exemple :



ABCD est un tétraèdre régulier de côté *a.*

I et *J* sont les milieux respectifs des arêtes $[AD]$ et $[BC]$.

Pour calculer la longueur IJ , on peut procéder ainsi :

$IJ^2=\vec{IJ}^2=(\vec{IA}+\vec{AJ})^2$ (d'après la relation de Chasles)

$(\vec{IA}+\vec{AJ})^2=(\vec{AJ}-\vec{AI})^2$ (car *I* est le milieu de $[AD]$)

Donc $IJ^2=AJ^2-2\,\vec{AJ}\cdot\vec{AI}+AI^2$

Or dans le triangle équilatéral ABC, on sait que $AJ=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On sait aussi que $AI=\dfrac{1}{2}a$. $\vec{AJ}\cdot\vec{AI}=\dfrac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})\cdot\dfrac{1}{2}\vec{AD}=\dfrac{1}{4}\vec{AB}\cdot\vec{AD}+\dfrac{1}{4}\vec{AC}\cdot\vec{AD}$.

Or, $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=AB\times AD\times\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}a^2$ et de même $\vec{AC}\cdot\vec{AD}=\dfrac{1}{2}a^2$. Donc $\vec{AJ}\cdot\vec{AI}=\dfrac{1}{4}a^2$.

Ainsi $IJ^2=\dfrac{3}{4}a^2-2\times\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{4}a^2=\dfrac{1}{2}a^2$ et $IJ=a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Propriétés (formules de polarisation) :</u>

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u+v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

3) Orthogonalité de deux vecteurs

<u>Définition :</u>

Deux **vecteurs** sont **orthogonaux** lorsque leur **produit scalaire** est **nul**.

<u>Remarque :</u>

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace car, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{u}=0$.

III. Orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de deux droites

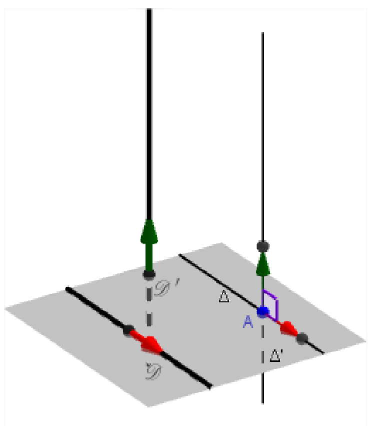
<u>Propriété :</u>

Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont **orthogonales** si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$.

<u>Démonstration :</u>

A est un point de l'espace.

Δ et Δ' sont les droites qui passent par A et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.



La définition de deux droites orthogonales permet d'affirmer que :

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales si, et seulement si, Δ et Δ' sont perpendiculaires en A.

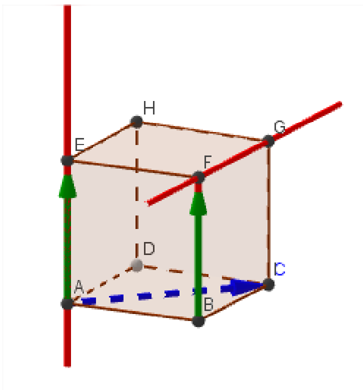
Or, on sait que dans le plan, Δ et Δ' sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$.

On en déduit que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0$.

<u>Exemple :</u>

Dans le cube $ABCDEFGH$:

- $\vec{u}=\overrightarrow{BF}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
- Les droites (AE) et (FG) sont orthogonales, car :
  $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=0$



2) <u>Orthogonalité d'une droite et d'un plan</u>

<u>Propriété :</u>

d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

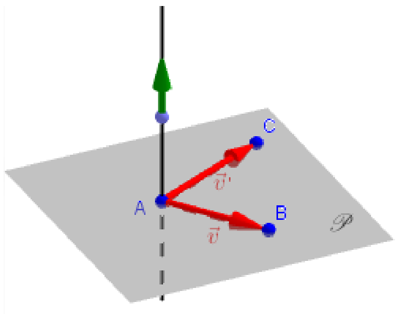
$\mathscr{P}$ est un plan dirigé par un couple $(\vec{v}\,;\vec{v}')$ de vecteurs non colinéaires.

La droite d et le plan $\mathscr{P}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{v}'=0$$

<u>Démonstration :</u>

Par définition, dire que d et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux signifie que d est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathscr{P}$, ce qui équivaut à $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ quels que soient les points M et N du plan $\mathscr{P}$.



- La condition est nécessaire

  En effet, si d et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux, alors quels que soient les points M et N de $\mathscr{P}$, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN}=0$.

  Donc, en particulier $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

- La condition est suffisante

  En effet, quels que soient les points M et N de $\mathscr{P}$, il existe des nombres réels α et β tels que $\overrightarrow{MN}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}\,'$ car le couple $(\vec{v}\,;\vec{v}\,')$ dirige $\mathscr{P}$.

  Donc $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{u}(\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}\,')=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}+\beta\vec{u}\cdot\vec{v}\,'=0$.

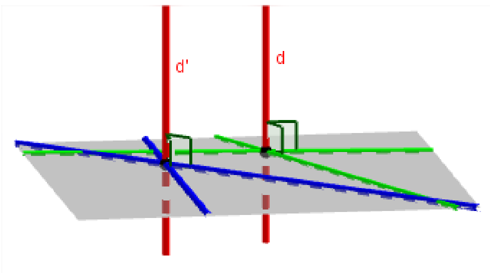
<u>Remarques :</u>

- Le produit scalaire permet donc de démontrer la propriété :

  Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Tout plan admet au moins une droite qui lui est orthogonale.

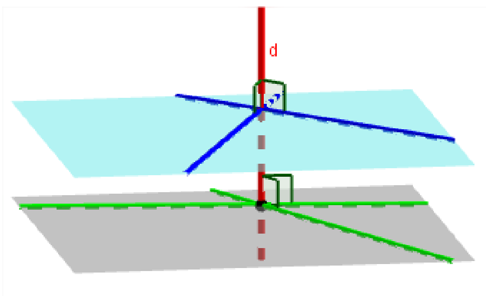
<u>Propriétés :</u>

- Si deux droites sont parallèles alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan alors elles sont parallèles entre elles.



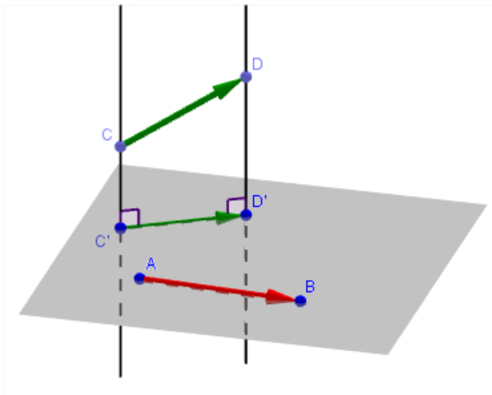
<u>Propriétés :</u>

- Si deux plans sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonal à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite alors ils sont parallèles entre eux.



Remarque : projection orthogonale sur un plan

On ne change pas le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ en remplaçant l'un d'entre eux (par exemple $\overrightarrow{CD}$) par le vecteur $\overrightarrow{C'D'}$ tel que C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur un plan $\mathscr{P}$ contenant la droite (AB).



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'D})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}$.

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}=0$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.

IV. Vecteur normal à un plan

1) Définition

Définition :

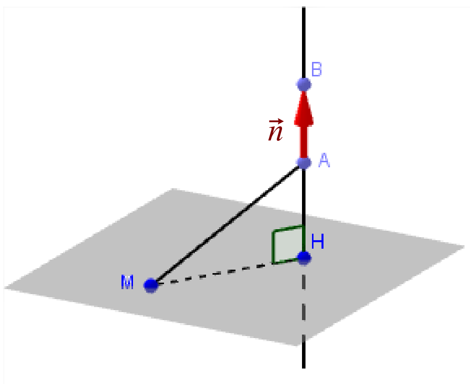
Dire qu'un vecteur $\vec{n}$ non nul est **normal** à un plan $\mathscr{P}$ signifie que toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Propriété :

A est un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ est le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration :



On note $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$ et H le projeté orthogonal d'un point M sur la droite (AB).

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Ainsi $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ c'est-à-dire $A=H$ car les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

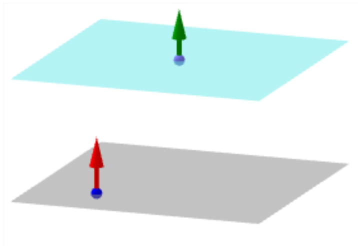
Autrement dit, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ si, et seulement si, A est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

L'ensemble cherché est donc le plan passant par A et orthogonal à (AB).

2) Propriétés

Propriété :

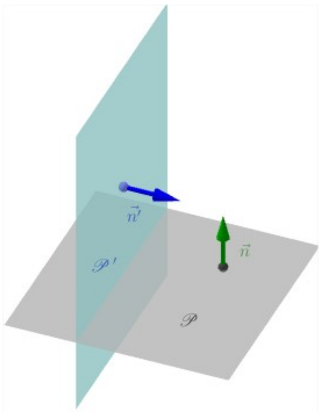
Deux plans sont **parallèles** si, et seulement si, un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.



Propriété :

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

Dire que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont **perpendiculaires** signifie que $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.



V. Calcul de distances

1) Repère orthonormé de l'espace

Définition :

Un repère $(O;I,J,K)$ de l'espace est **orthonormé** lorsque les droites (OI), (OJ) et (OK) sont **deux à deux perpendiculaires** et qu'on a les égalités de distances $OI = OJ = OK = 1$.

Remarque :

Lorsque le repère $(O;I,J,K)$ de l'espace est orthonormé, chaque axe est perpendiculaire à toute droite passant par le point O et contenue dans le plan défini par les deux autres axes.

Ainsi la droite (OI) est perpendiculaire à toute droite du plan (OJK) passant par O.

Propriété :

Soit $(O;I,J,K)$ un **repère orthonormé** de l'espace et M un point de coordonnées $(x;y;z)$ dans ce repère.

La longueur OM est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Elle vérifie :

$$OM=\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Démonstration :

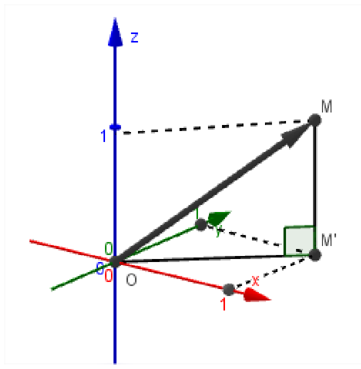
Soit M le point de coordonnées $(x;y;z)$.

On note M' le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy).

Donc $M'(x;y;0)$.

Le repère est orthonormé donc $OM^2=OM'^2+MM'^2$, c'est-à-dire :

$$\|\overrightarrow{OM}\|^2=x^2+y^2+z^2$$



Remarque :

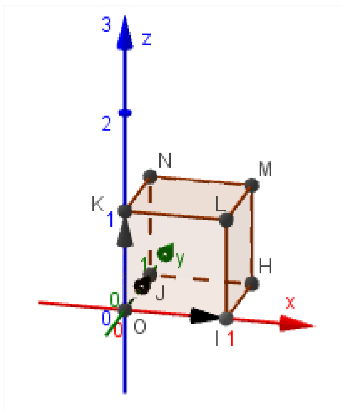
Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Exemple :

Un cube dont l'arête mesure une unité de longueur fourni un modèle de repère orthonormé de l'espace.

On note le repère $(O;I,J,K)$ ou $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$.

$$OM=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$



2) Expression analytique du produit scalaire

Propriété :

Dans un repère orthonormé de l'espace, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

Démonstration :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$, $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2+z'^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$.

Ainsi

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)=\frac{1}{2}[(x^2+y^2+z^2)+(x'^2+y'^2+z'^2)-((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)]\ .$$

En développant le membre de droite, il vient :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-x^2+2xx'-x'^2-y^2+2yy'-y'^2-z^2+2zz'-z'^2)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(2xx'+2yy'+2zz')=xx'+yy'+zz'$$

Exemple :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\5\\7\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times(-4)+2\times5+3\times7=27$

Remarques :

- Si $\vec{u}=\vec{v}$ la formule donne $\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2+z^2$. On retrouve $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Si $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A};z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B};y_\mathrm{B};z_\mathrm{B})$ alors :
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2}$$
- La formule est fausse si le repère n'est pas orthonormé.

Propriété :

Dans un repère orthonormé, une équation de la sphère de centre Ω(a ; b ; c) et de rayon R est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Exemple :

La sphère de centre Ω(1 ; -3 ; 4) et de rayon 2 admet pour équation cartésienne :

$(x-1)^2+(y-(-3))^2+(z-4)^2=2^2$ soit $x^2-2x+1+y^2+6y+9+z^2-8z+16=4$ ou bien encore :

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+22=0$$

3) Équation cartésienne d'un plan

Propriétés :

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

- Un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, où d désigne un nombre réel. On dit que c'est une **équation cartésienne** de ce plan.
- Réciproquement a, b, c et d étant quatre nombres réels donnés avec a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration :

- Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, c'est-à-dire $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.

  En posant $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$, on obtient $ax+by+cz+d=0$.
- $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ qui vérifient $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c sont des nombres réels non tous nuls.

  On peut supposer, par exemple, a non nul.

  Le point $A\left(\frac{-d}{a}\,;0\,;0\right)$ est alors un point de $\mathscr{E}$ et l'équation équivaut à : $a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

  $\mathscr{E}$ est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Remarque :

Tout vecteur orthogonal à $\vec{n}$ est un vecteur du plan $\mathscr{P}$.

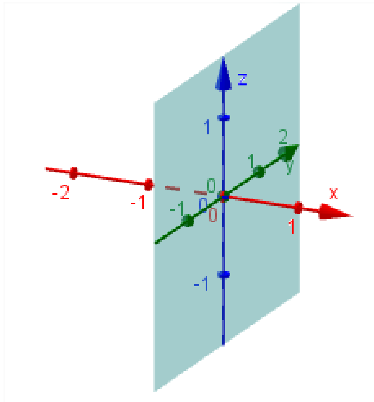
Exemples :

- Dans un repère orthonormé on donne le point $A(2\,;-1\,;0)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$.

  Le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ a pour équation :

  $-1(x-2)+2(y+1)+3z=0$ soit $-x+2y+3z+4=0$

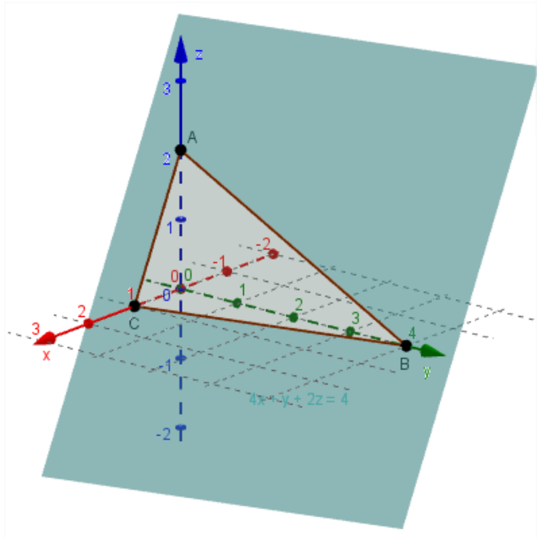
- $x=0$ est une équation du plan (yOz) : ceci signifie qu'un point appartient au plan (yOz) si, et seulement si, ses coordonnées sont de la forme $(0;y;z)$, y et z réels.



- L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $4x+y+2z-4=0$ est un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$.

  $A(0;0;2)$, $B(0;4;0)$ et $C(1;0;0)$ sont des points non alignés de $\mathscr{P}$.

  $\mathscr{P}$ est le plan (ABC)



4) Équations cartésiennes d'une droite

Propriété :

Si les triplets $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ ne sont pas proportionnels,

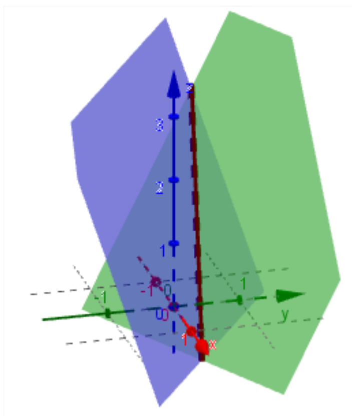
le système $\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$ caractérise une droite et il est appelé **système d'équations cartésiennes** de cette droite.

Démonstration :

Si les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, alors les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives :

$$ax+by+cz+d=0 \text{ et } a'x+b'y+c'z+d'=0$$

sont sécants en une seule droite



VI. Applications

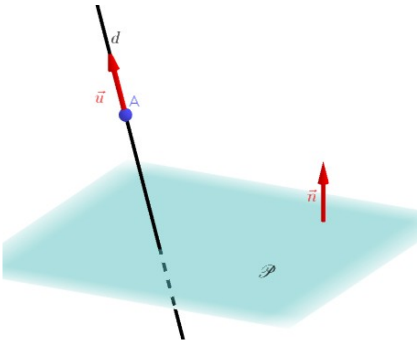
1) Intersection de droites et de plans

Propriétés :

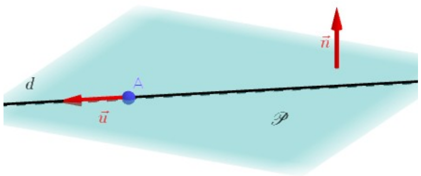
Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, alors la droite d et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :
  - Si A appartient à $\mathscr{P}$ alors la droite est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
  - Si A n'appartient pas à $\mathscr{P}$, alors la droite est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.

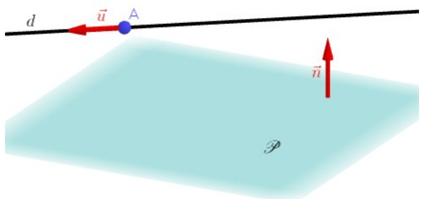
La droite est sécante au plan



La droite est incluse dans le plan



La droite est strictement parallèle au plan



2) Distance d'un point à un plan

Définition :

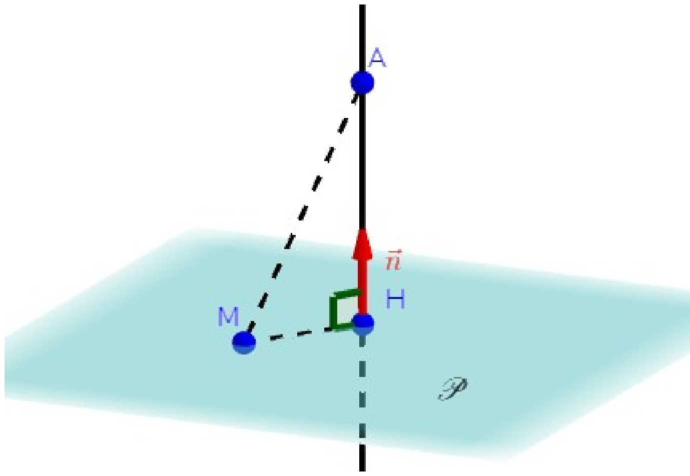
Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et A un point.

La **distance du point A au plan $\mathscr{P}$** est la plus petite des longueurs AM ou M $\in \mathscr{P}$.

Propriété :

Si on note H le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$, alors $d(\text{A}, \mathscr{P}) = \text{AH}$.

Démonstration :



Soit M un point quelconque du plan $\mathscr{P}$. Pour tout M ≠ H, le triangle AHM est rectangle en H, donc AM > AH.

Ainsi, AH est bien la plus petite des longueurs et $d(\mathrm{A}, \mathscr{P})$ = AH.

Propriété :

Soient $\mathscr{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et A(x_A ; y_A ; z_A) un point.

Si on note $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$ et M(x ; y ; z) un point de $\mathscr{P}$, alors :

$$d(\mathrm{A}, \mathscr{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exemple :

La distance entre A(-1 ; 3 ; 2) et $\mathscr{P}$: $x - 3y + 2z - 4 = 0$ est $d(\mathrm{A}, \mathscr{P}) = \frac{|-1-3\times3+2\times2-4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}$.

Donc $d(\mathrm{A}, \mathscr{P}) = \frac{|-10|}{\sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{14}}{14} = \frac{5\sqrt{14}}{7} \approx 2{,}67$.

3) Distance d'un point à une droite

Définition :

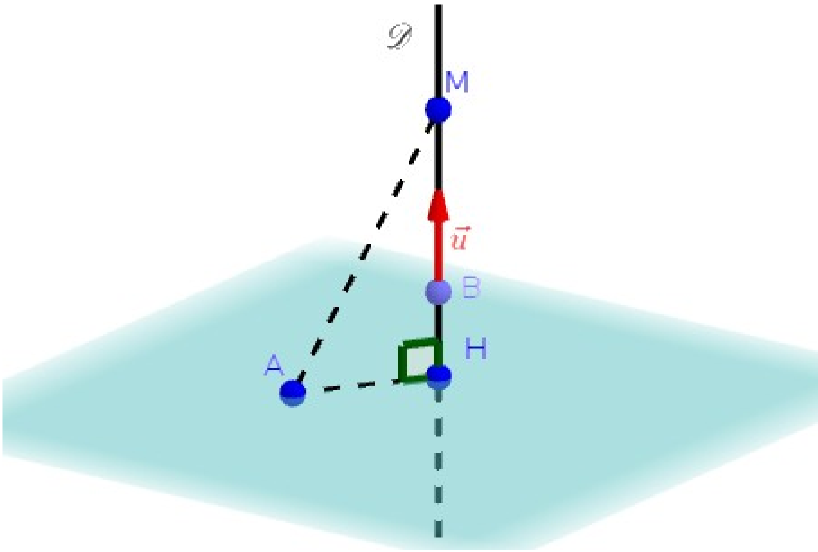
Soient $\mathscr{D}$ une droite de l'espace et A un point.

La **distance du point A à la droite $\mathscr{D}$** est la plus petite des longueurs AM ou M ∈ $\mathscr{D}$.

Propriété :

Si on note H le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$, alors $d(\mathrm{A}, \mathscr{D})$ = AH.

Démonstration :



Pour tout $M \in \mathscr{D}$, AM ⩾ AH donc $d(\text{A}, \mathscr{D})$ = AH.

Propriété :

Soient A un point de l'espace et $\mathscr{D}$ une droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

La **distance du point A à la droite $\mathscr{D}$** est :

$$d(\text{A}, \mathscr{D}) = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\|$$