

# Chapitre 7

## Primitives et équations différentielles

### I. Équation différentielle $y' = f$ et primitive

#### 1) Équation différentielle

##### Définitions :

- Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue  $y$  de variable  $x$ , ses dérivées successives  $y', y'', \dots$  et éventuellement d'autres fonctions (constantes,  $f, \dots$ )
- On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

##### Exemple :

La fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est solution de l'équation  $y'' - y = 0$  car, pour  $y(x) = e^{-x}$ ,  $y''(x) = e^{-x}$ , donc

$$y''(x) - y(x) = 0$$

##### Remarques :

- La dérivée est associée à un taux de variation, quotient des variations de  $y$  sur les variations de  $x$ .
- On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle  $y' = \frac{dy}{dx}$  ou  $y' = \frac{dy}{dt}$ .

##### Exemples :

- $2y' + 3y = 0$
- $y'(t) = y^2(t) + 5t + 1$
- $\frac{dy}{dt} + 5y = 0$
- $\frac{dy}{dx} = 2y(x) + x^2$

#### 2) L'équation différentielle $y' = f$

##### Définitions :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

- On dit qu'une fonction  $F$  est **solution de l'équation différentielle  $y' = f$**  sur  $I$  lorsque  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ .
- **Résoudre, sur  $I$ , l'équation différentielle  $y' = f$** , c'est trouver toutes les fonctions  $F$  dérivables sur  $I$  telles que  $F' = f$ .

### Exemple :

Soit (E) l'équation différentielle  $y' = x^2$ . On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ .

La fonction  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$ , donc  $F$  est une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

## 3) Primitive d'une fonction

### Définition :

Une **primitive** d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  est une fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que :

$$F' = f$$

### Exemple :

La fonction  $F : x \mapsto 4x + 1$  est une primitive de la fonction  $f : x \mapsto 4$  sur  $\mathbb{R}$  car  $F'(x) = 4 = f(x)$ .

### Remarque :

$F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si et seulement si  $F$  est solution de l'équation différentielle  $y' = f$ .

Résoudre, sur  $I$ , l'équation différentielle  $y' = f$  revient donc à déterminer toutes les primitives de  $f$  sur  $I$ .

### Propriété :

Toute fonction **continue** sur un intervalle  $I$  admet des primitives sur  $I$ .

### Remarque :

On ne peut pas toujours expliciter les primitives d'une fonction continue sur un intervalle : c'est le cas de  $x \mapsto e^{-x^2}$

### Propriété :

Soient  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $G$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**Les primitives** de  $f$  sur  $I$  (c'est-à-dire les solutions de l'équation différentielle  $y' = f$ ) sont les fonctions  $F$  définies par  $F(x) = G(x) + k$ , où  $k$  est une constante.

### Démonstration :

Soient  $F$  et  $G$  deux primitives de la fonction  $f$  sur  $I$ .

Alors, pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a  $F'(x) = f(x)$  et  $G'(x) = f(x)$ .

On en déduit  $F'(x) = G'(x)$ , soit  $F'(x) - G'(x) = 0$ , soit  $(F - G)'(x) = 0$  pour tout réel  $x$  de  $I$ .

La fonction  $F - G$  a une dérivée nulle sur  $I$ , elle est donc constante sur  $I$ .

On nomme  $k$  cette constante. Ainsi  $F(x) - G(x) = k$  pour tout  $x$  de  $I$ , ce qui montre que ces deux primitives diffèrent d'une constante.

**Exemple :**

La fonction exponentielle est une primitive de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ , car  $\exp' = \exp$ .

Les primitives de la fonction exponentielle sont les fonctions  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = e^x + k$ , où  $k$  est une constante réelle.

**Propriété :**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

Quels que soient  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

Autrement dit, l'équation différentielle  $y' = f$  admet une unique solution  $F$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

**Remarque :**

La condition  $F(x_0) = y_0$  est parfois appelée **condition initiale**.

**Démonstration :**

Soit (E), l'équation différentielle  $y' = f$ .

$f$  est continue et admet donc une primitive  $G$  sur  $I$  :  $G$  est une solution de (E).

Les fonctions  $x \mapsto G(x) + k$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ , sont dérivables sur  $I$  de dérivée  $G'$ , elles sont donc aussi des primitives de  $f$  sur  $I$  et donc des solutions de (E).

La condition  $F(x_0) = y_0$  équivaut à  $G(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - G(x_0)$ .

Ainsi, la valeur de  $k$  est unique et fixée par la condition initiale.

D'où l'unicité de la solution  $F$  de (E) définie sur  $I$  par  $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$ .

**Exemple :**

La fonction  $f : x \mapsto x^2 - 3x + 7$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

Elle admet pour primitives les fonctions de la forme  $x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x + k$ .

La primitive  $F$  de  $f$  qui s'annule en 2 est  $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - \frac{32}{3}$ .

## II. Primitive et opérations

### 1) Primitives des fonctions usuelles

$c$  désigne un réel quelconque.

La fonction $f$ est définie sur $I$ par :	Primitives de $f$ sur $I$ sont définies par $F(x)=...$	Sur $I=...$
$k$ (constante)	$kx+c$	$\mathbb{R}$
$x$	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
$x^n$ (avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$ si $n < -1$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+c$	$] 0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$] 0; +\infty[$
$e^x$	$e^x+c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$

#### Remarque :

On obtient ce tableau par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions de référence.

#### Exemple :

Soit  $f : x \mapsto x^4$ .  $f(x) = x^n$  avec  $n = 4$ , donc la fonction  $F : x \mapsto \frac{x^5}{5}$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 2) Primitives et opérations

#### Propriétés :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions admettant respectivement les fonctions  $F$  et  $G$  comme primitives sur un intervalle  $I$ .

- $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .
- Pour tout réel  $k$ ,  $kF$  est une primitive de  $kf$  sur  $I$ .

**Exemple :**

On cherche une primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$

Une primitive de  $x \mapsto 2$  est  $x \mapsto 2x$ . Une primitive de  $x \mapsto x$  est  $x \mapsto \frac{1}{1+1}x^{1+1}$ .

Donc par addition, une primitive  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{8}x^2 + 2x$

**Remarque :**

Contrairement à la dérivation, il n'existe aucune formule permettant de calculer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions.

**3) Primitives et composition****Propriété :**

Soient  $v$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $J$  et  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  telle que, pour tout  $x \in I$ ,  $u(x) \in J$ .

Alors  $v \circ u$  est une primitive de  $u' \times (v' \circ u)$ .

**Démonstration :**

Soient  $v$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $J$  et  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  telle que, pour tout  $x \in I$ ,  $u(x) \in J$ .

Alors  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ .

**Primitives de fonctions composées**

$u$  désigne une fonction continue sur un intervalle  $I$ .  $c$  désigne un réel quelconque.

Fonction $f$	Primitive de $f$ sur $I$	Conditions sur $u$
$u' u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	Lorsque $n < -1$ , pour tout $x$ de $I$ , $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$u(x) \neq 0$ sur $I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$u(x) > 0$ sur $I$
$u' e^u$	$e^u + c$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ sur $I$
$u' \sin u$	$-\cos u + c$	
$u' \cos u$	$\sin u + c$	

**Remarque :**

Lorsque  $u$  est strictement négative sur  $I$ , une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln(-u)$ .

### III. Équation différentielle du premier ordre

Dans toute cette partie,  $a$  et  $b$  sont des réels et  $f$  est une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

#### 1) Résolution de l'équation $y' = ay$

##### Définition :

L'équation différentielle  $(E_0) : y' = ay$ , qui peut aussi s'écrire  $y' - ay = 0$ , est appelé **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants**.

##### Exemple :

Les équations différentielles  $y' = 5y$  et  $2y' + 9y = 0$  sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

##### Propriété :

L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' = ay$  est l'ensemble des fonctions :  $x \mapsto Ce^{ax}$ , où  $C$  est une constante réelle quelconque.

##### Démonstration :

- Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = Ce^{ax}$ , où  $C$  est un réel.  
Alors,  $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times f(x)$ . Puisque  $f'(x) = a f(x)$  pour tout réel  $x$ ,  $f$  est bien solution de l'équation différentielle  $y' = ay$ .
- Réciproquement, soit  $f$  une solution de l'équation différentielle  $(E) : y' = ay$  et soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$ .

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = e^{-ax} \times f'(x) - ae^{-ax} \times f(x)$ .

Puisque  $f$  est solution de  $(E)$ ,  $f'(x) = a \times f(x)$  pour tout réel  $x$  et ainsi :

$$g'(x) = e^{-ax} \times a f(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0$$

La fonction  $g$  est constante, soit  $e^{-ax} \times f(x) = C$ , avec  $C$  réel.

Puisque  $e^{-ax}$  est différent de 0 pour tout réel  $x$ , on obtient :

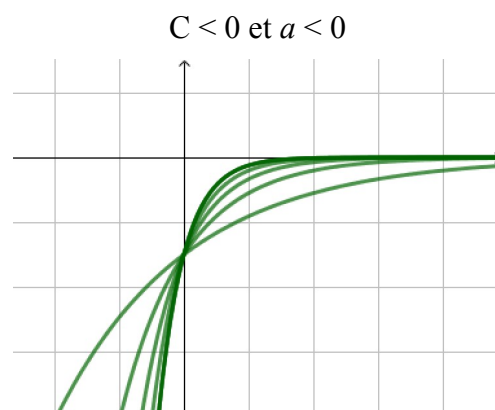
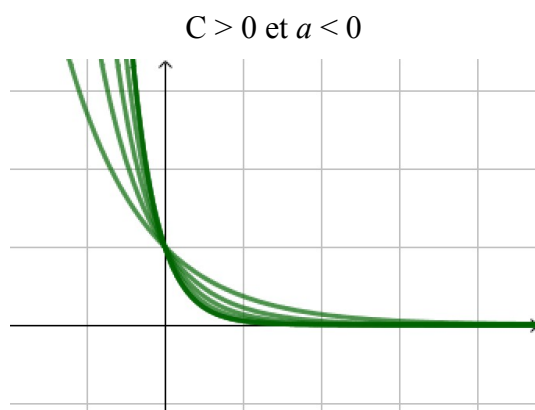
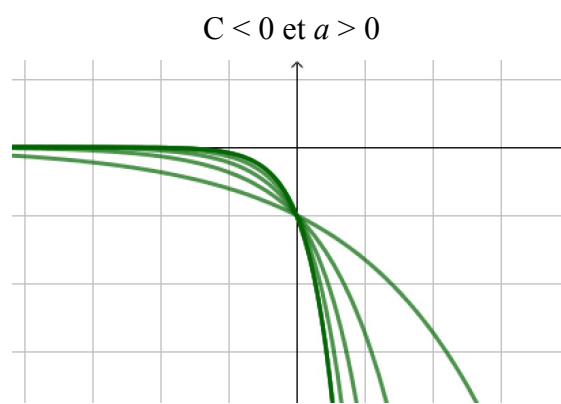
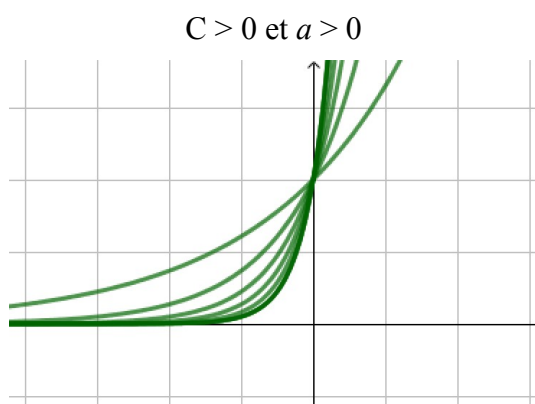
$$f(x) = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}.$$

##### Exemples :

- Soit l'équation différentielle  $y' = 2y$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ .  
L'ensemble de ses solutions est l'ensemble des fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{2x}$ , où  $C$  est un réel.
- L'équation différentielle  $(E) : y' = 3y$  a pour solution les fonctions de la forme  $x \mapsto Ke^{3x}$ .  
L'unique solution de  $(E)$  telle que  $f(0) = 2$  est la fonction  $f(x) = 2e^{3x}$ .

### Remarques :

- Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont solutions de l'équation  $y' = ay$ , alors les fonctions  $f + g$  et  $kf$  (où  $k$  est un réel) sont également solutions de cette équation.
- Soit  $a$  un réel non nul fixé, les courbes des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $y' = ay$  ont les allures suivantes :



## **2) Résolution de l'équation $y' = ay + b$**

### Définition :

L'équation différentielle (E) :  $y' = ay + b$ , qui peut aussi s'écrire  $y' - ay = b$ , est appelé **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

### Remarque :

L'équation différentielle  $y' = ay + b$  a toujours une solution particulière constante.

En effet, la fonction  $f_0$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_0(x) = -\frac{b}{a}$  est solution puisque, pour tout réel  $x$ ,

$$f_0'(x) = 0 \text{ et } a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$$

**Propriété :**

L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  est l'ensemble des fonctions :  $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$  où  $C$  est une constante réelle quelconque.

**Démonstration :**

- On vérifie que toute fonction de la forme  $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ , est solution.
- Réciproquement, il faut prouver que toutes les solutions sont de cette forme.

Nous savons que la fonction  $c : x \mapsto -\frac{b}{a}$  est solution particulière :  $c'(x) = a \times c(x) + b$ .

Considérons  $g$  une solution de l'équation  $y' = ay + b$ , on a alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g'(x) = a \times g(x) + b.$$

Par soustraction, on obtient  $g'(x) - c'(x) = a \times (g(x) - c(x))$ , soit

$(g(x) - c(x))' = a \times (g(x) - c(x))$ . Ainsi la fonction  $g - c$  est solution de l'équation  $y' = ay$ , donc de la forme  $Ce^{ax}$ , ce qui entraîne  $g(x) - c(x) = Ce^{ax}$ , soit  $g(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ .

**Remarque :**

Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante de (E) aux solutions de l'équation homogène associée  $y' = ay$ .

**Exemple :**

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E) :  $y' = y + 1$  sont les fonctions  $x \mapsto Ce^x - 1$ .

Soit  $g$  la seule solution de (E) vérifiant  $g(0) = 1$ .

$g(x) = Ce^x - 1$  et  $g(0) = 1 \Leftrightarrow Ce^0 - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2$ . Donc  $g(x) = 2e^x - 1$ .