

Chapitre 4

Dérivabilité des fonctions

I. Dérivabilité d'une fonction

1) Taux de variation

Définition :

Soit I un intervalle contenant un nombre réel a et f une fonction définie sur I .

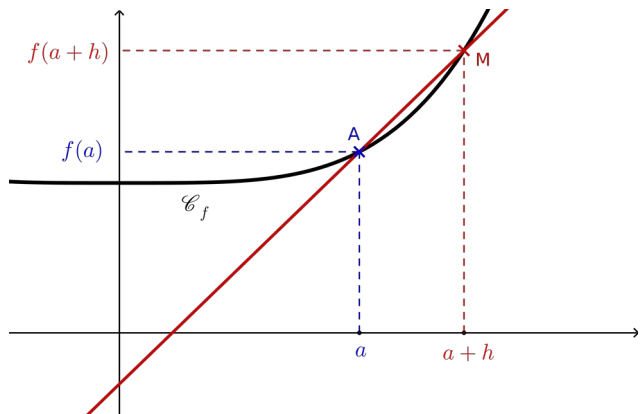
Le nombre $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est appelé **taux de variation** de f entre a et $a+h$.

Remarque :

$A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$ appartiennent à \mathcal{C}_f .

Le coefficient directeur de la droite (AM) est donc $\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}$, soit $\tau(h)$.

Le nombre $\tau(h)$ dépend de a .



2) Nombre dérivé

Définition :

Soit I un intervalle contenant un nombre réel a et f une fonction définie sur I .

On dit que la **fonction f est dérivable en a** si la limite du rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0, avec $a+h$ dans I , existe et est égale à un nombre réel ℓ .

Ce nombre ℓ est appelé **nombre dérivé de la fonction f en a** . On le note $f'(a)$.

On a donc :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ et $a = 1$.

Pour $h \neq 0$, on a $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \frac{(1+3h+3h^2+h^3) - 1}{h} = 3 + 3h + h^2$.

On a vu que $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3h + 3 = 3$.

Donc la fonction f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 vaut 3. Donc $f'(1) = 3$.

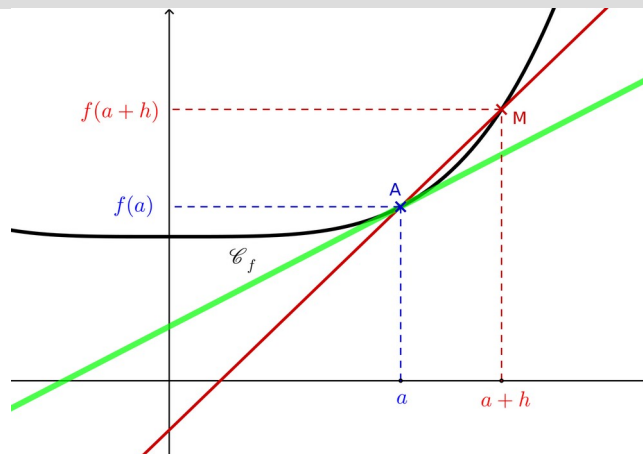
3) Interprétation graphique

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a , nombre réel appartenant à I , et de nombre dérivé ℓ en a .

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a et M le point de \mathcal{C}_f d'abscisse $a+h$ avec $a+h$ appartenant à I et $h \neq 0$.

Le nombre dérivé ℓ de f en a est la limite du coefficient directeur de la droite (AM) lorsque le point M se rapproche du point A , c'est-à-dire lorsque h tend vers 0.



4) Fonction dérivée f'

Définition :

Une fonction f est **dérivable sur un intervalle I** lorsqu'elle est dérivable en tout nombre réel x appartenant à I .

Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction définie sur I qui, à tout nombre réel x , fait correspondre le nombre dérivé de la fonction f en x est appelée **fonction dérivée** de f .

La fonction dérivée de f est notée f' .

Exemples :

- Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = k$ (k fixé),

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } h \neq 0 : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$$

Ainsi on a :

$$(k)' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

- Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x$,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } h \neq 0 : \frac{(x+h) - x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Ainsi on a :

$$(x)' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

- Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } h \neq 0 : \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Ainsi on a :

$$(x^2)' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

- Pour la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$,

pour tout $x \in [0; +\infty[$ et $h \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \text{ de plus } \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x}$$

Ainsi, pour $x \in]0; +\infty[$:

$$(\sqrt{x})' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- Pour la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } h \neq 0 : \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Ainsi on a :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

5) Continuité et dérivabilité

Propriété (admise):

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur I .

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fautive : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0, mais sont continues en 0.

Remarques :

Ne pas confondre continuité et dérivabilité.

- Une fonction f est **continue en a** si la courbe \mathcal{C}_f ne présente pas de saut en son point d'abscisse a .
- Une fonction f est **dérivable en a** si la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a .

II. Tangente à une courbe

1) Tangente en un point à une courbe

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a , nombre réel appartenant à I .

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan et A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a .

La **tangente** à la courbe \mathcal{C}_f au point A est la **droite passant** par A et ayant comme **coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$** .

Exemple :

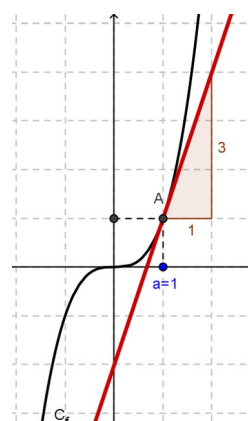
Soit f la fonction définie sur l'intervalle \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3$$

Le point A d'abscisse $a=1$ de la courbe \mathcal{C}_f a comme coordonnées $(1; 1)$.

De plus, le nombre dérivé de f en $a=1$ est égal à $f'(1) = 3$.

La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A est la droite passant par A et ayant comme coefficient directeur 3.



Remarque :

Le point $A(a; f(a))$ est le point de contact de la tangente et de \mathcal{C}_f .

2) Équation d'une tangente à une courbe

Propriété :

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, A un point de \mathcal{C}_f d'abscisse a et $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a .

Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ et le point A d'abscisse $a = 1$ de la courbe \mathcal{C}_f .

On a : $a = 1$; $f(a) = 1^3 = 1$; $f'(a) = 3$.

D'où $y = f'(a)(x - a) + f(a) = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$.

Une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A est donc $y = 3x - 2$.

III. Formules de dérivées

1) Dérivées et opérations

Dérivée d'une somme de fonctions

Propriété :

La somme $u + v$ de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(u + v)' = u' + v'$$

Exemple :

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + x$ est la somme de deux fonctions u et v définies par $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$

Or u et v sont dérivables sur \mathbb{R} et $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 1$.

Dérivée d'un produit de fonctions

Propriété :

Le produit uv de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exemple :

La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ est le produit des deux fonctions u et v définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Or u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et on a vu que : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.

La dérivée de ku est k fois la dérivée de u .

Si k est une constante : $(ku)'(x) = k \times u'(x)$.

Exemple : dérivée d'une fonction polynôme

La fonction trinôme définie par $f(x) = 2x^2 + 8x + 3$.

En utilisant les règles de calculs des dérivées on obtient :

$$f'(x) = 2 \times 2x + 8 \times 1 + 0 = 4x + 8$$

Dérivée d'un quotient de fonctions**Propriété :**

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

De plus, pour tout x de I , $v(x) \neq 0$.

Le quotient $\frac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur I , et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple :

La fonction f définie sur $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x-1}$ est le quotient des fonctions u et v définies par : $u(x) = x$ et $v(x) = x - 1$

v ne s'annule pas sur chacun des intervalles $] -\infty; 1[$ et $] 1; +\infty[$ et u et v sont dérivables sur ces intervalles : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

Donc f est dérivable sur $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - x \times 1}{(x-1)^2}$

Ainsi pour tout $x \in] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

Propriété :

v est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.

Exemple :

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ est l'inverse de la fonction v définie par $v(x) = x^2+1$ ($v(x) \neq 0$ pour tout réel x).

Or pour tout réel x , $v'(x) = 2x$. Donc $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

2) Dérivées usuelles

À partir des règles de calcul sur les fonctions dérivées établies on peut dresser un tableau des dérivées usuelles à connaître.

fonction f	Ensemble de définition de f	Ensemble de dérivabilité de f	fonction dérivée f'
$f(x) = k$ (k constante)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = n \times x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) Dérivée d'une fonction composée

Fonction composée

Définition :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J , et g une fonction définie et dérivable sur J .

La **fonction composée** des fonctions u et g , notée $g \circ u$, est définie sur I par $g \circ u(x) = g(u(x))$.

Exemple :

Soit u et g les fonctions suivantes :

$$u : I = [0; +\infty[\rightarrow J = [0; +\infty[\quad \text{et} \quad g : J = [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + x \qquad \qquad \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

La fonction composée est la fonction $g \circ u : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(u(x)) = \sqrt{x^2 + x}$$

Remarques :

- Sur l'exemple précédent, $u \circ g$ est définie par : $u \circ g : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$

$$x \mapsto x + \sqrt{x}$$

- Pour $f(x) = \sqrt{u(x)}$

$$u : E \rightarrow]0; +\infty[\quad \text{et} \quad g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto u(x) \qquad \qquad \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

La fonction f peut s'écrire $f = g \circ u : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{u(x)}$$

- Pour $f(x) = (u(x))^n$

$$u : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto u(x) \qquad \qquad \qquad x \mapsto x^n$$

La fonction f peut s'écrire $f = g \circ u : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (u(x))^n$$

- Pour $g(x) = f(ax+b)$

$$u : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax+b \qquad \qquad \qquad x \mapsto f(x)$$

La fonction g peut s'écrire $g = f \circ u : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(ax+b)$$

Propriété : non commutativité de la composition de fonctions

La composée de fonctions n'est pas commutative.

Exemple :

Soit trois fonctions u, v et w définies par $u : x \mapsto x^2 - 2$, $v : x \mapsto e^x$

- $u \circ v(x) = u(v(x)) = u(e^x) = (e^x)^2 - 2 = e^{2x} - 2$
- $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2 - 2}$

Donc $u \circ v(x) \neq v \circ u(x)$.

Dérivation

Propriété :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle E , à valeurs dans un intervalle F et g une fonction définie et dérivable sur F .

La fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ est dérivable en tout nombre réel x de E et sa dérivée est la fonction :

$$(g \circ u)' : x \mapsto g'(u(x)) \times u'(x).$$

Exemple :

La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est la composée de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, à valeurs dans $]0; +\infty[$, et de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.

On sait que $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

La fonction f est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$u'(x) \times g'(u(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times -\frac{1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

Cas particuliers :

- La fonction f , définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$, est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- Si, pour tout x de I , $u(x) > 0$, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- Soit n , un entier relatif non nul, et f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$.
 - Si $n \geq 1$, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = n u'(x) (u(x))^{n-1}$.
 - Si $n \leq -1$ et si u ne s'annule pas sur I , alors f est dérivable sur I et

$$f'(x) = n u'(x) (u(x))^{n-1}.$$

- Soit a et b deux nombres réels et f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable en tout nombre réel x et sa dérivée est la fonction :

$$x \mapsto a \times f'(ax + b)$$

Exemple :

La fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$ par $g(x) = \frac{1}{3x+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$.

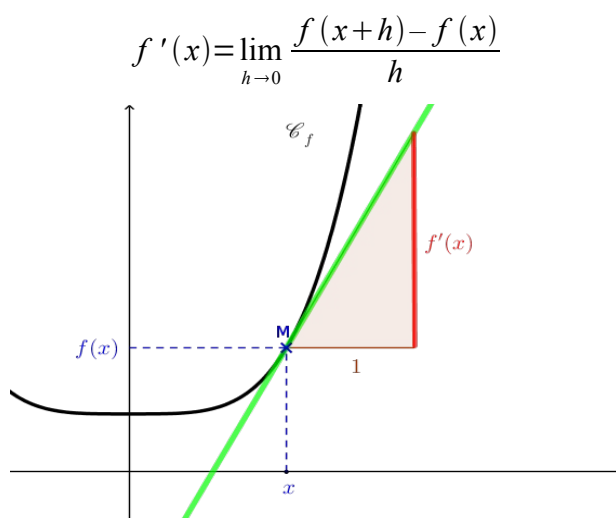
Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$, $g(x) = f(3x+5)$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$ or $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Par conséquent, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$, $g'(x) = \frac{-3}{(3x+5)^2}$.

IV. Fonction dérivée et étude de fonction

1) Interprétation graphique

Dire que f est dérivable sur I signifie que, pour tout réel x de I , la courbe \mathcal{C}_f , représentant la fonction f , admet une seule tangente, de coefficient directeur :



Il semble donc exister un lien entre les variations de f et le signe de f' .

2) Sens de variation

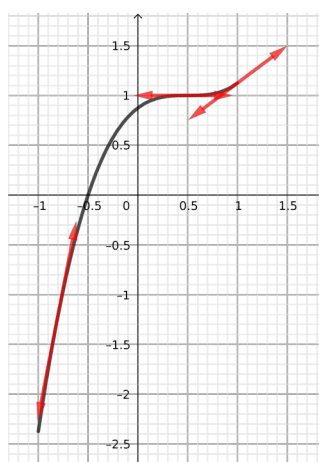
Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si la fonction f est **croissante** sur I , alors la dérivée est **positive** sur I .
- Si la fonction f est **décroissante** sur I , alors la dérivée est **négative** sur I .
- Si la fonction f est **constante** sur I , alors la dérivée est **nulle** sur I .

Exemple :

f est croissante sur $[-1 ; 1]$:



Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si la dérivée est **positive** sur I , alors la fonction f est **croissante** sur I .
- Si la dérivée est **négative** sur I , alors la fonction f est **décroissante** sur I .
- Si la dérivée est **nulle** en toute valeur de I , alors la fonction f est **constante** sur I .

Remarque :

L'étude du signe de la dérivée permet donc de donner le sens de variation d'une fonction.

Exemple :

Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x^2$, nous avons vu que $f'(x)=2x$, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)=2x$	$-$	0	$+$
$f(x)=x^2$	$+\infty$	0	$+\infty$

Remarque :

Pour étudier les variations d'une fonction f , il n'est pas systématiquement nécessaire de déterminer la fonction dérivée f' et d'en étudier le signe.

Par exemple, soit g définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^3 - 8}$.

On sait que la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $]2; +\infty[$ donc g est décroissante sur $]2; +\infty[$.

V. Extremum

1) Extremum local

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f admet un **minimum local** en a , s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I , contenant a et tel que pour tout x de J , $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un **maximum local** en a , s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I , contenant a et tel que pour tout x de J , $f(x) \leq f(a)$.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-8 ; 7]$ dont voici le tableau de variations :

x	-8	-1	4	7
$f(x)$	10	-2	6	-5

Diagramme du tableau de variations :
-8 -1 4 7
10 -2 6 -5
Des flèches indiquent la variation : une flèche descendante de 10 à -2, une flèche ascendante de -2 à 6, et une flèche descendante de 6 à -5.

D'après le tableau de variations, $f(x) \geq f(-1)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-8 ; 4[$, donc la fonction f admet un minimum local en -1 qui vaut -2.

Ce n'est pas le minimum de la fonction car $f(7) = -5$.

2) Lien avec la dérivation

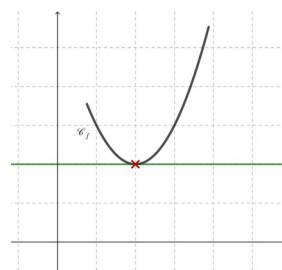
Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel appartenant à I .

Si la fonction admet un **extremum** en a , alors $f'(a) = 0$.

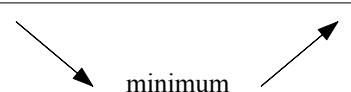
Remarque :

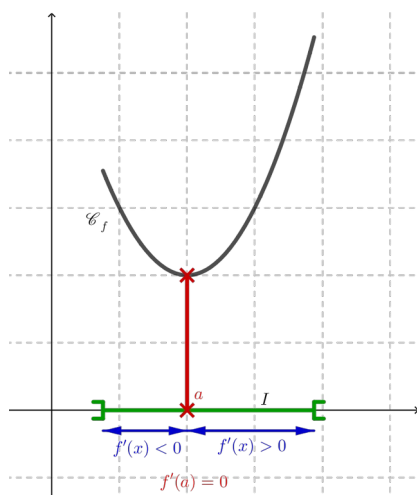
Si $f(a)$ est un extremum local, alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.

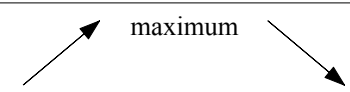


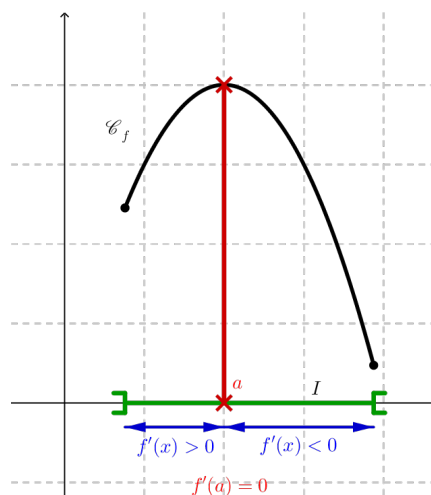
Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel appartenant à I .
Si la dérivée s'annule en **changeant de signe** en a , la fonction admet un extremum en a .

x	a		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	 minimum		



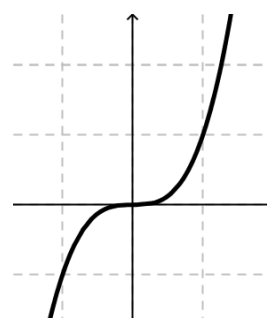
x	a		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	 maximum		



Remarques :

- L'hypothèse du changement de signe est nécessaire.

La fonction $x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum sur \mathbb{R} , pourtant elle a une dérivée qui s'annule en $x=0$ (mais la dérivée ne change pas de signe).



- Pour l'intervalle I , l'hypothèse qu'il soit ouvert permet d'éviter que le nombre réel a soit une de ses extrémités. Si tel est le cas, l'étude des variations permet de conclure.

Par exemple, dans la situation ci-contre où f admet un maximum en a .

