

Chapitre 1

Suites numériques

I. Comportement d'une suite

1) Monotonie

Définitions :

On dit qu'une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} est :

- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.

Une suite (u_n) est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarques :

Deux méthodes permettent l'étude de la monotonie d'une suite,

- **Méthode algébrique** : elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1} .
 - Soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
 - Soit en comparant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier naturel $u_n \geq 0$.
- **Méthode fonctionnelle** : elle s'applique aux suites définies par une formule explicite de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction).

Elle consiste à étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.

Exemples :

- Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2n^2 + n + 5$.

On a :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + (n+1) + 5 - (2n^2 + n + 5)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 4n + 2 + n + 1 + 5 - 2n^2 - n - 5$$

$$u_{n+1} - u_n = 4n + 3$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \text{ car } n \geq 0, \text{ d'où } u_{n+1} > u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

Comme la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + x + 5$ sur \mathbb{R}^+ .

- Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$$

On a $v_{n+1} - v_n = v_n - 2 - v_n = -2$.

D'où $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (v_n) est strictement décroissante.

Contrairement à la fonction f définie par : $x \mapsto x - 2$ qui est croissante sur \mathbb{R} .

2) Suites bornées

Définitions :

Soit M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- **majorée** par M si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. M est appelé un **majorant** de (u_n) .
- **minorée** par m si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. m est appelé un **minorant** de (u_n) .
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques :

- Une suite majorée admet une infinité de majorants.
En effet, si M est un majorant de (u_n) , tous les réels supérieurs à M sont également des majorants de (u_n) . De même, une suite minorée admet une infinité de minorants.
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exemples :

- Soit la suite (u_n) , définie pour tout $n \geq 1$, par $u_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.

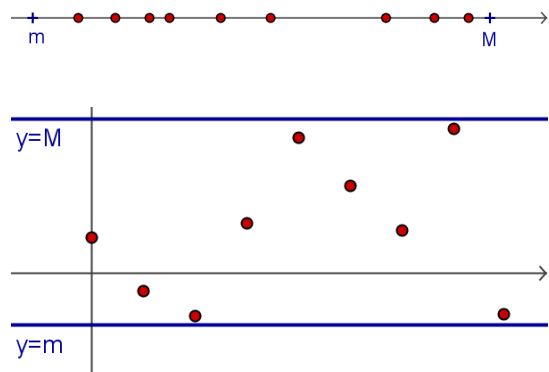
Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif.

- Soit la suite (u_n) , définie pour tout $n \geq 0$, par $u_n = n^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 0$.

Cette suite est donc minorée par 0, qui est, en plus, le **minimum** de la suite, car il est atteint au rang 0.

Représentation graphique d'une suite bornée :

- Sur la droite numérique :
tous les nombres u_n sont compris entre m et M .
- Dans le plan :
tous les points de coordonnées $(n; u_n)$ sont situés entre les droites d'équations $y = m$ et $y = M$.



II. Limites finies

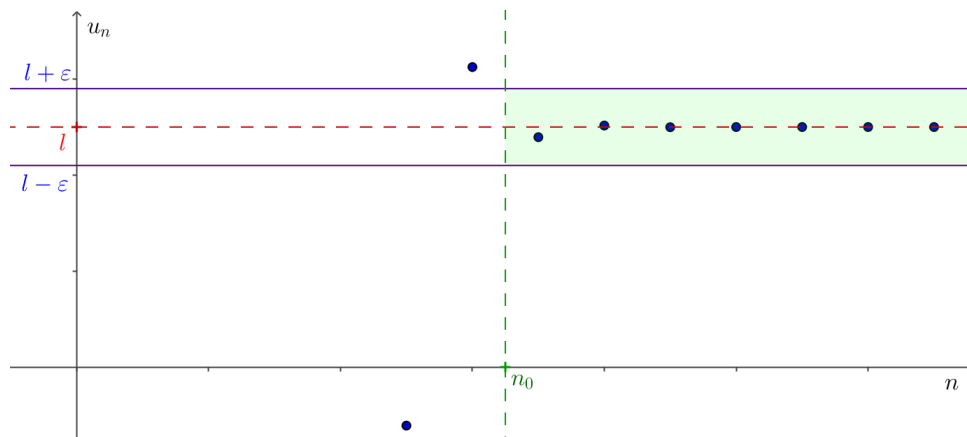
1) Définitions et propriétés

Définition :

Soit une suite (u_n) et un réel ℓ .

On dit que (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi *petit* soit-il) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0 .

Exemple :



La suite (u_n) représentée ci-dessous semble avoir une limite ℓ . Autrement dit, on peut trouver une valeur de n_0 pour laquelle les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de ℓ .

Remarque :

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \text{ soit encore } u_n \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon [, \text{ soit encore } |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Propriété :

Si une suite (u_n) a une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$, cette limite est **unique**.

On la note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Définitions :

- Une **suite convergente** est une suite qui a pour limite un nombre réel ℓ .

On dit aussi que **la suite converge vers ℓ** .

- Une **suite divergente** est une suite qui ne converge pas.

Remarques :

- Si (u_n) converge vers ℓ , les suites (u_{n+1}) , (u_{2n}) , (u_{2n+1}) convergent aussi vers ℓ .
- Une suite convergente est bornée.

2) Limites des suites usuelles

Propriétés :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les suites $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ convergent vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Algorithme :

Déterminer le rang à partir duquel $|q^n| < \varepsilon$ pour $|q| < 1$

```
n ← 0
Tant que |q^n| ≥ ε faire
    n ← n+1
Fin Tant que
```

Calculatrice :

```
PROGRAM:RANG
:Input "Q=",Q
:Input "E=",E
:0→N
:While abs(Q^N)≥
E
:N+1→N
:End
:Disp "N0=",N
```

```
PrgrmRANG
Q=0.8
E=0.00001
N0=
52
Fait
```

```
PrgrmRANG
Q=-0.2
E=10^(-32)
N0=
46
Fait
```

```
=====APPROX =====
"Q="?→Q#
"EPS="?→E#
Q→N#
While Abs (Q^N)≥E#
N+1→N#
WhileEnd#
"N0=":N#
[TOP] [BTM] [SRC] [MENU] [A↔3] [CHAR]
```

```
Q=?
0.8
EPS=?
0.00001
N0=
52
- Disp -
```

```
Q=?
-0.2
EPS=?
10^-32
N0=
46
- Disp -
```

III. Suites divergentes

1) Limite infinie

Définition :

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque, pour tout réel A , l'intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel A , on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

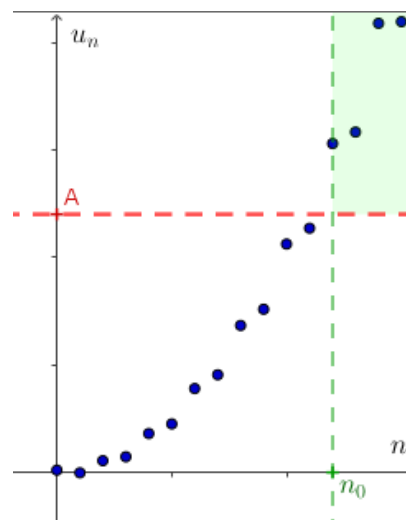
$$u_n \geq A.$$

On le note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple :

La suite (u_n) représentée ci-contre semble avoir pour limite $+\infty$.

En effet pour un réel A choisi, on peut déterminer le rang n_0 à partir duquel tous les termes sont supérieurs ou égaux à A .



Remarques :

- Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ on dit que la suite (u_n) **diverge vers $+\infty$** .
- Concrètement, les termes deviennent aussi grands qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.
- De la même façon :

u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0 .

On le note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Limites des suites usuelles

Propriété :

Les suites (\sqrt{n}) , (n^2) , (n^3) , \dots , (n^p) , où $p \in \mathbb{N}^*$, ont pour limite $+\infty$.

2) Suites sans limite

Une suite n'a pas forcément de limite. On dit également qu'elle **diverge**.

Exemples :

- La suite (u_n) définie sur \mathbb{N} , par $u_n = (-1)^n$ est divergente.
En effet, un intervalle contenant 1 mais pas -1 ne contiendrait qu'un terme sur deux de la suite et ne répondrait donc pas à la définition de la limite d'une suite.
- La suite (v_n) définie sur \mathbb{N} , par $v_n = \sin n$ est divergente.
En effet les termes de la suite se répartissent uniformément dans l'intervalle $[-1; 1]$.
La suite (v_n) n'a donc pas de limite.

IV. Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Soit ℓ et ℓ' deux réels.

1) Somme de deux suites

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure directement

Remarque :

Dans le cas où l'on ne peut pas conclure, on dit que l'on a une **forme indéterminée**.

2) Produit de deux suites

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure directement

3) Quotient de deux suites

On suppose que pour tout entier n , $v_n \neq 0$.

Cas où la suite u est **positive** à partir d'un certain rang.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	0	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	On ne peut pas conclure directement	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$	On ne peut pas conclure directement

Dans le cas où la suite u est **négative** à partir d'un certain rang, on construit un tableau analogue en utilisant la règle des signes.

Exemples :

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} , par $u_n = \frac{2}{3n+5}$ et $v_n = n - \sqrt{n}$

- Pour la suite (u_n) , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et par produit et somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n+5) = +\infty$.

Par quotient, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- Pour la suite (v_n) , on est dans un cas où on ne peut pas conclure directement.

En effet, on ajoute une suite qui tend vers $+\infty$ ($w_n = n$) à une suite qui tend vers $-\infty$ ($u_n = -\sqrt{n}$).

En factorisant par n et en simplifiant, on a $v_n = n \times \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et par quotient puis somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Par produit, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

V. Propriétés sur les limites

1) Limite infinie

Propriétés :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

- **Théorème de minoration :**

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

- **Théorème de majoration :**

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

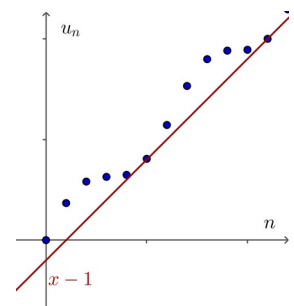
Exemple :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} , par $u_n = n + \sin(n)$.

Pour tout entier n , $\sin(n) \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty$, donc d'après le théorème de minoration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$



2) Limite finie

Propriétés :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' .

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Exemple :

(u_n) est une suite convergente vers un réel ℓ et, pour tout entier naturel n , $u_n < 2$.

D'après la propriété, on peut affirmer que $\ell \leq 2$.

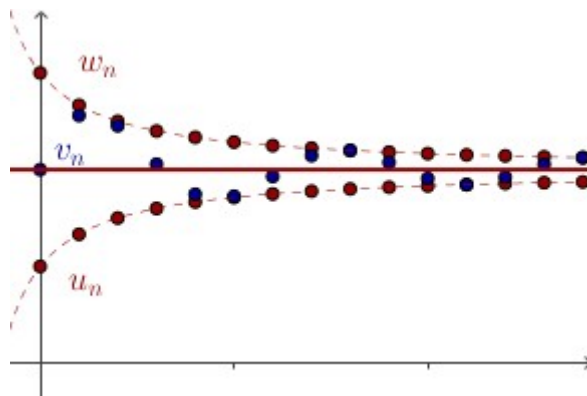
Théorème des gendarmes :

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Soit un entier N et un réel ℓ .

On suppose que pour tout entier $n \geq N$: $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ , alors la suite (v_n) converge également vers ℓ .



Remarques :

- Ce théorème permet de montrer que la suite (v_n) a une limite **et** de connaître cette limite.
- On en déduit que si $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

VI. Suites arithmétiques

1) Rappels

Définition :

Une suite numérique (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre r , appelé **raison** de la suite, tel que pour tout nombre entier naturel n , on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison -5.

Remarque :

Une suite (u_n) est **arithmétique** si, et seulement si, la **variation absolue** entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est **constante**.

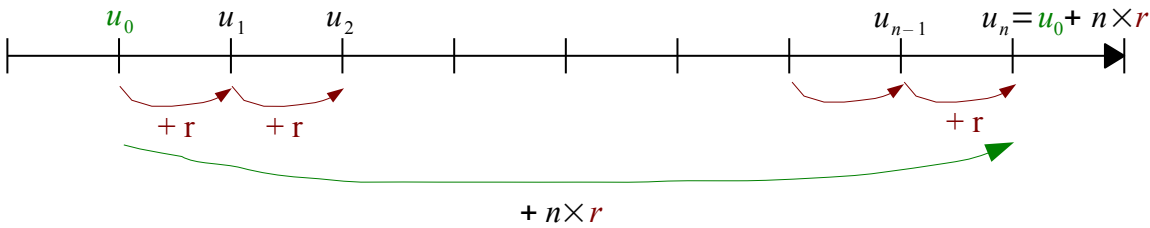
Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

Pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 + nr$.

Remarque :

Terme général en fonction de n : $u_n = u_0 + n \times r$ (formule explicite)



Exemple :

Soit la suite arithmétique (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$

Son premier terme est $u_0 = 3$ et sa raison est -5 .

On a, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr = 3 + n \times (-5) = 3 - 5n$.

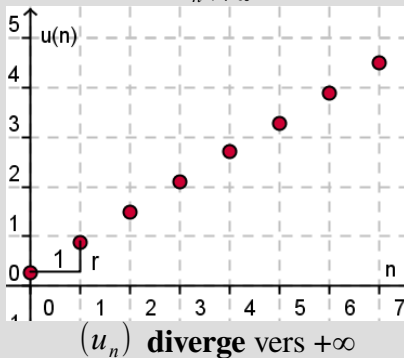
Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le 8^e terme : $u_7 = 3 + 7 \times (-5) = -32$.

2) Limites

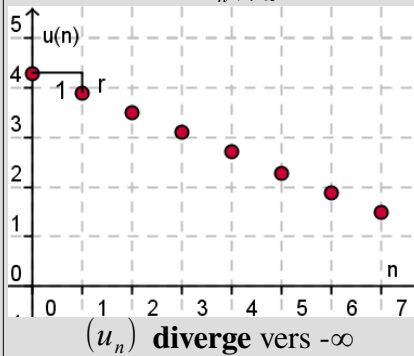
Propriété :

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

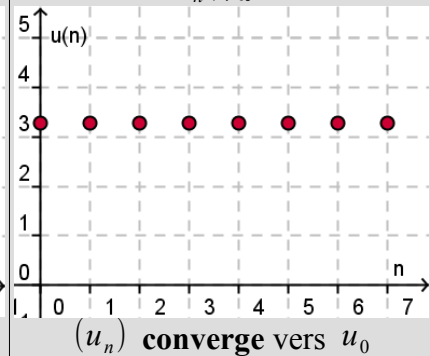
Si $r > 0$, la suite (u_n) est **croissante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



Si $r < 0$, la suite (u_n) est **décroissante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$



Si $r = 0$, la suite (u_n) est **constante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$

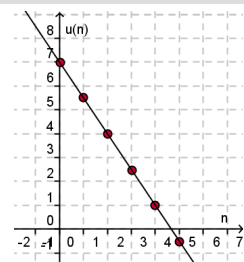


On dit que les **variations** de la suite sont **linéaires**, car les points de sa représentation se situent sur une droite.

La raison de la suite arithmétique est le coefficient directeur de la droite correspondante, d'équation $y = rx + u_0$.

Exemple :

La suite arithmétique (u_n) , de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $-1,5$, a pour représentation graphique des points situés sur la droite d'équation $y = -1,5x + 7$.



VII. Suite géométrique

1) Rappels

Définition :

Une suite numérique (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q , appelé **raison** de la suite, tel que, pour tout nombre entier naturel n , on ait :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemples :

- La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 3.
- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an.
Donc chaque année, sa population est multipliée par $1 + 5\% = 1,05$.
Elle suit une progression géométrique de raison 1,05.

Remarque :

Une suite (u_n) est **géométrique** si, et seulement si, le **coefficient multiplicateur** entre deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou la variation relative $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$) est **constant**.

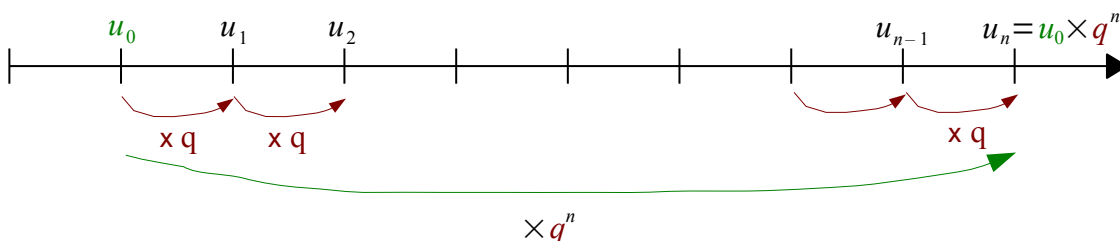
Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

Pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Remarque :

Terme général en fonction de n : $u_n = u_0 \times q^n$ (*formule explicite*)



Exemples :

- Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3.
On a, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$.
Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le terme de rang 5 : $u_4 = 3^4 = 81$.

- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an.
Comme vu précédemment, cette population suit une progression géométrique de raison 1,05.
En notant $u_0=800$ le terme initial de cette suite, on peut déterminer le terme général :

$$u_n = u_0 \times q^n = 800 \times 1,05^n$$

Après 6 années, la ville comptera $u_6 = 800 \times 1,05^6 \simeq 1072$ habitants.

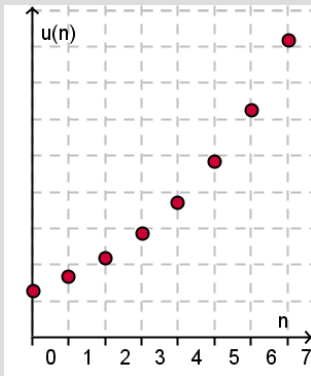
2) Limites

Propriété :

(u_n) est une suite géométrique de premier terme non nul et de raison q .

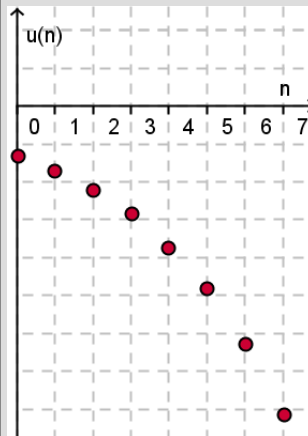
- Si $q > 1$

Si $u_0 > 0$, alors la suite u_n est **croissante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



(u_n) **diverge** vers $+\infty$

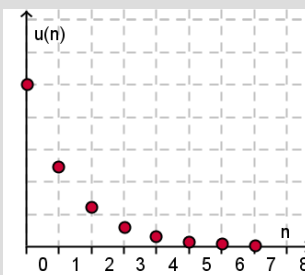
- Si $q > 1$
- Si $u_0 < 0$, alors la suite u_n est **décroissante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$



(u_n) **diverge** vers $-\infty$

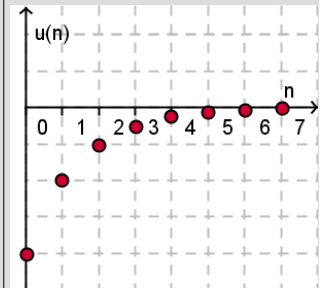
- Si $0 < q < 1$

Si $u_0 > 0$, alors la suite u_n est **décroissante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$



(u_n) **converge** vers 0

Si $u_0 < 0$, alors la suite u_n est **croissante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

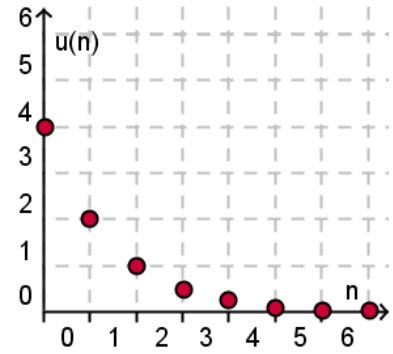


(u_n) **converge** vers 0

- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**. Donc (u_n) **converge** vers u_0 .
- Si $q = 0$, alors la suite (u_n) est **constante** et vaut 0 à partir du second terme.
Donc (u_n) **converge** vers 0.
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) n'a pas de variations régulières.
 - ◆ Si $-1 < q < 0$ alors (u_n) **converge** vers 0.
 - ◆ Si $q \leq -1$ alors (u_n) **diverge** et n'admet pas de limite.

Exemple :

La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=4$ et de raison $\frac{1}{2}$ admet la représentation graphique ci-contre.



3) Somme des termes

Propriété :

Soit (u_n) une **suite géométrique** de raison $q \neq 1$.

La formule suivante donne la **somme des termes consécutifs** :

Somme des termes d'une suite géométrique = premier terme $\times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison q . Donc $u_p = u_{p-1} \times q$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ qS = q(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n) \end{cases}$$
$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ qS = qu_0 + qu_1 + \dots + qu_{n-1} + qu_n \end{cases}$$
$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ qS = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

En soustrayant terme à terme, on obtient :

$$S - qS = u_0 - 0 + u_1 - u_1 + \dots + u_n - u_n + 0 - u_{n+1}$$

$$\text{Donc } S - qS = u_0 - u_{n+1} = u_0 - u_0 \times q^{n+1}$$

$$\text{Ainsi } (1 - q)S = u_0(1 - q^{n+1}) \text{ et } S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Notation :

$$\text{On utilise la notation suivante : } \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple :

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison 2.

On peut exprimer la somme des $n+1$ premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

Et par exemple, pour $n=10$, $S_{10} = 1+2+4+8+16+32+\dots+1024 = 2^{11} - 1 = 2047$.

Propriété :

La limite de la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , avec $0 \leq q < 1$, est égale à

$$\frac{u_0}{1-q}$$

Démonstration :

Nous avons vu que $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Puisque $0 \leq q < 1$, q^{n+1} a pour limite 0, donc S_n a pour limite $\frac{u_0}{1-q}$.

VIII. Suites arithmético-géométrique**1) Définition****Définition :**

Une suite arithmético-géométrique est une suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, pour tout entier naturel n , où a et b sont des réels fixés.

Exemple :

La suite (u_n) , telle que $u_0=12$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0,2u_n+4$ est une suite arithmético-géométrique.

2) Représentation graphique

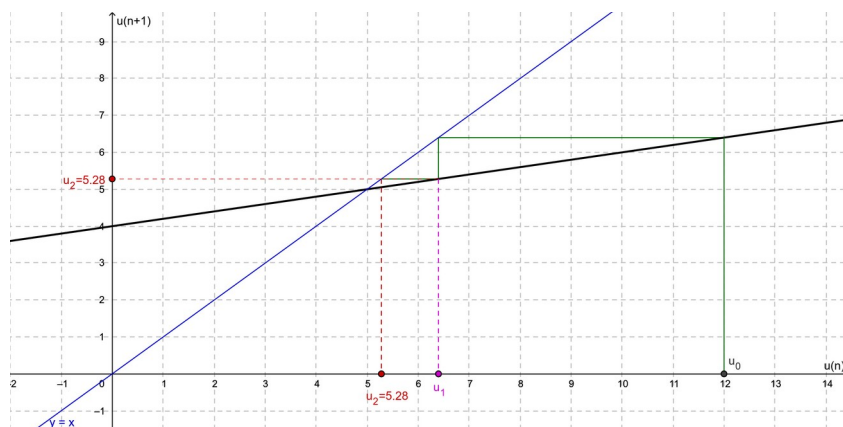
Une suite arithmético-géométrique est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction, définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = ax + b$.

Puisque f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite.

On sait alors représenter graphiquement les premiers termes de cette suite.

Exemple :

Avec l'exemple ci-dessus, on trace la droite Δ , d'équation $y=0,2x+4$ et la droite d , d'équation $y=x$. On place les termes de la suite sur l'axe des abscisses à l'aide de d et Δ .



3) Terme général d'une suite arithmético-géométrique

De la formule de récurrence à la formule explicite

Observons que si la suite (u_n) converge, alors sa limite ℓ est solution de l'équation $\ell = 0,2\ell + 4$.

Cette équation a pour solution $\ell = 5$.

Cela suggère de poser : pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 5$.

De $u_{n+1} = 0,2u_n + 4$, on déduit : $u_{n+1} - 5 = 0,2(u_n - 5)$ soit $v_{n+1} = 0,2v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $a = 0,2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = 7$.

D'où, pour tout n , $v_n = v_0 \times a^n$ soit $v_n = 7 \times 0,2^n$. Ainsi $u_n - 5 = 7 \times 0,2^n$ donc $u_n = 7 \times 0,2^n + 5$.

Méthode générale : détermination d'une formule explicite

Une suite numérique (u_n) vérifie $u_{n+1} = a u_n + b$, avec $a \neq 1$.

- On résout l'équation $\ell = a\ell + b$: elle a une solution unique c .
- On introduit la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - c$.

On prouve qu'elle est géométrique (de raison a) ; il en résulte que, pour tout entier naturel n , $v_n = a^n \times v_0$.

- On revient à la suite initiale : pour tout entier naturel n , $u_n = v_n + c$.

D'où l'expression : $u_n = a^n(u_0 - c) + c$.

4) Étude de la convergence

Sur notre exemple, la raison $a=0,2$ est telle que $-1 < a < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Si on applique cette méthode dans le cas général, on obtient le résultat suivant :

Propriété :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_{n+1} = a u_n + b$, avec $-1 < a < 1$.

La suite (u_n) converge vers le nombre ℓ vérifiant $\ell = a \ell + b$.

Remarque :

On démontre que si $a \leq -1$ ou $a > 1$, la suite est divergente (hormis le cas particulier ou $u_0 = c$, auquel cas elle est constante).