Chapitre 7

Limites de fonctions

I. Limite à l'infini

1) Limite infinie

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ peut être « aussi grand que l'on veut » dès que x est « assez grand ».

Définition :
Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ où A est un réel, contient tous les $f(x)$ lorsque x est « suffisamment grand », alors f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
On note :

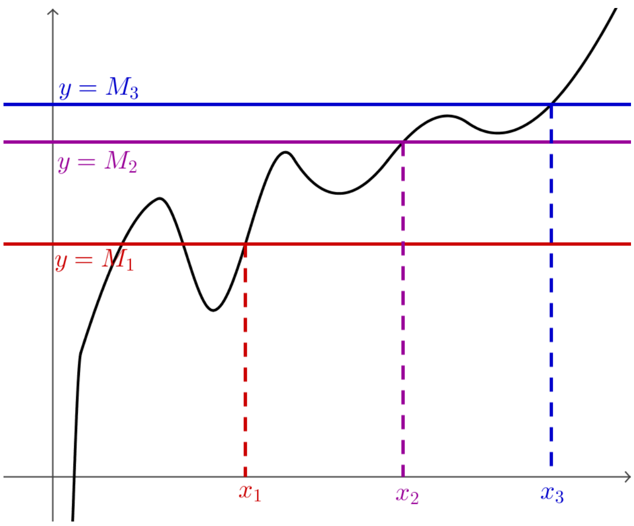
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Exemples :
Fonctions de référence :
$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ pour $n\in\mathbb{N}^*$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

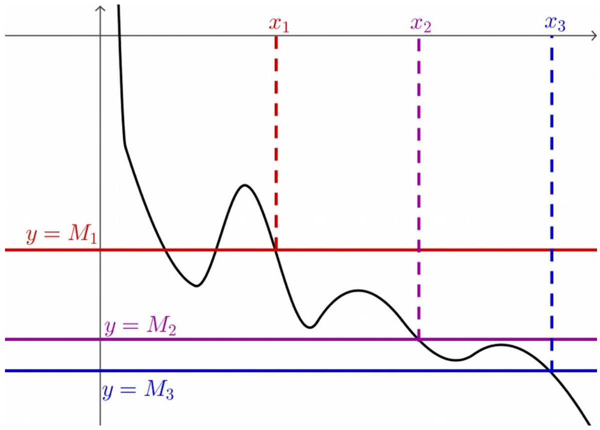
Remarque :
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ se traduit par : $\forall M\in\mathbb{R}$, $\exists x_0\in\mathbb{R}$, $x>x_0 \Rightarrow f(x)>M$.

Interprétation graphique :
La courbe représentative de la fonction f dans un repère est au-dessus de toute droite parallèle à l'axe des abscisses pour x « suffisamment grand ».

Pour $M=M_1$: pour tout $x>x_1$, on a $f(x)>M$.
Pour $M=M_2$: pour tout $x>x_2$, on a $f(x)>M$.
Pour $M=M_3$: pour tout $x>x_3$, on a $f(x)>M$.



De la même façon, on définit les autres limites infinies :

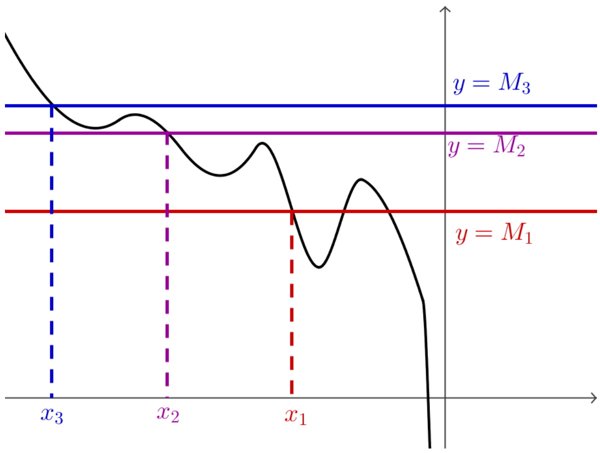


Définition :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se traduit par :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \Rightarrow f(x) < M.$$

Exemple :

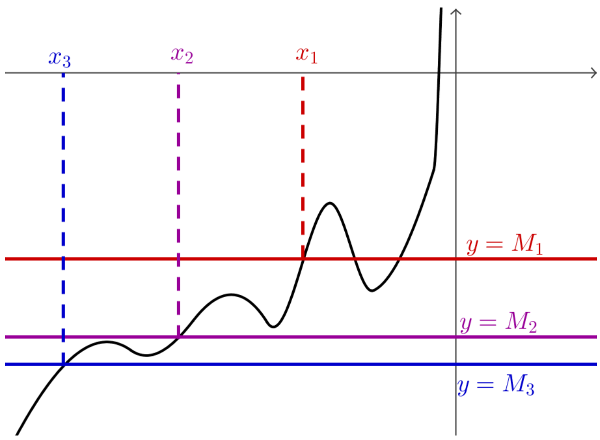
$$\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$$



Définition :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se traduit par :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x < x_0 \Rightarrow f(x) > M.$$

Exemple :
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Prouvons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, c'est-à-dire que pour tout nombre M strictement positif, $f(x) \in]M ;+\infty[$ dès que x est inférieur à un certain nombre A.
La condition $f(x) > M$ s'écrit $x^2 > M$. ceci équivaut à $x < -\sqrt{M}$ ou $x > \sqrt{M}$.
On peut donc prendre $A = -\sqrt{M}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



Définition :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se traduit par :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x < x_0 \Rightarrow f(x) < M.$$

Exemple :

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

2) *Limite finie*

Si $f(x)$ est « aussi proche de L que l'on veut » dès que x est « assez grand », on dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$.

Définition :
Si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les $f(x)$ dès que x est « assez grand », on dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$.
On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

  Quel que soit le réel $k > 0$, il existe un réel $A > 0$, tel que si $x > A$ alors $f(x) \in \,]2-k ; 2+k[$.

  En effet, il suffit de prendre $x > \frac{1}{k}$.

  On a alors $0 < \frac{1}{x} < k$

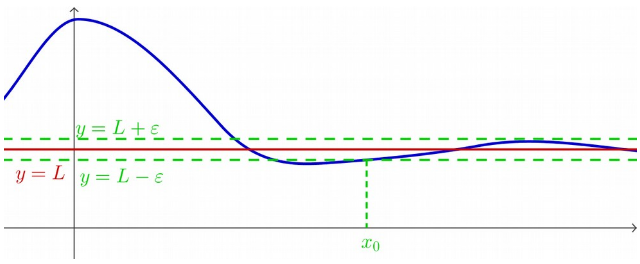
  D'où $2 < 2 + \frac{1}{x} < 2 + k$.

  C'est-à-dire $f(x) \in \,]2-k ; 2+k[$. On a donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
- Fonctions de référence :

  $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Remarque :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se traduit par : $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Interprétation graphique :
La courbe représentant la fonction f dans un repère devient « aussi proche que l'on veut » de la droite d'équation $y = L$ lorsque x est « assez grand ».



Définition :
Lorsque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, on dit que, dans un repère, la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

Remarque :
Pour étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d d'équation $y = L$, on étudie le signe de la différence $f(x) - L$.

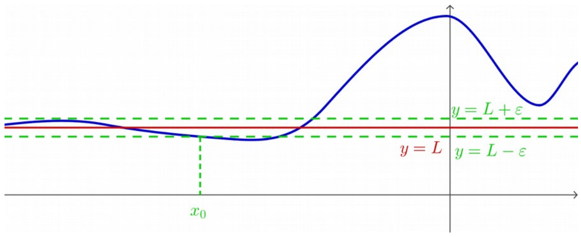
Exemple :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de $\frac{1}{\sqrt{x}}$. De plus, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ donc la courbe est située au-dessus de l'asymptote.

De la même façon, on a :

Définition :
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se traduit par :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$



Exemple :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

II. Limite infinie en un point

Définition :
Soit f une fonction et a un nombre réel, borne de l'ensemble de définition de f n'appartenant pas à cet ensemble.
Si $f(x)$ est « aussi grand que l'on veut » dès que x est « assez proche » de a, on dit que la limite en a de la fonction f est $+\infty$.
On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Remarque :
En pratique, on est parfois amené à étudier séparément les limites de f pour $x > a$ et pour $x < a$.
On parle alors de « limite de f à droite en a », notée $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et de « limite de f à gauche en a », notée $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$. Montrons que $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
  Soit un réel $m > 0$, déterminons un réel $h > 0$ tel que $x \in]1-h; 1+h[\Rightarrow f(x) > m$.
  $\frac{3}{(x-1)^2} > m \Leftrightarrow (x-1)^2 < \frac{3}{m} \Leftrightarrow |x-1| < \sqrt{\frac{3}{m}}$.
  Pour tout $x \in \left]1 - \sqrt{\frac{3}{m}}; 1 + \sqrt{\frac{3}{m}}\right[$, on a $f(x) > m$, c'est-à-dire $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
- Fonctions de référence :
  $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Remarque :
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ se traduit par : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha > 0$, $|x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > M$.

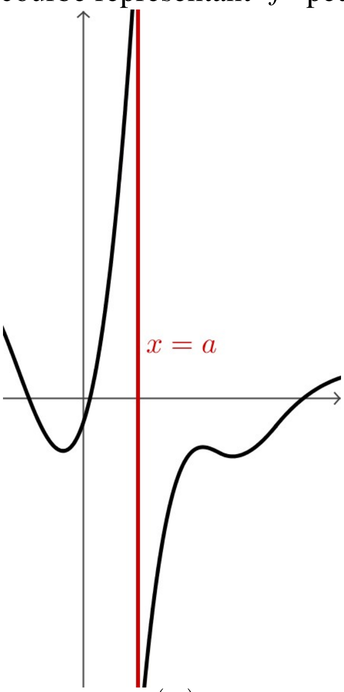
De la même façon, on a :

Définition :
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se traduit par : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha > 0$, $|x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) < M$.

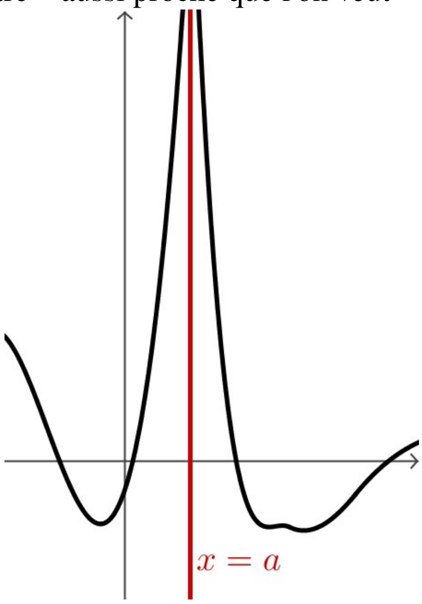
Exemple :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

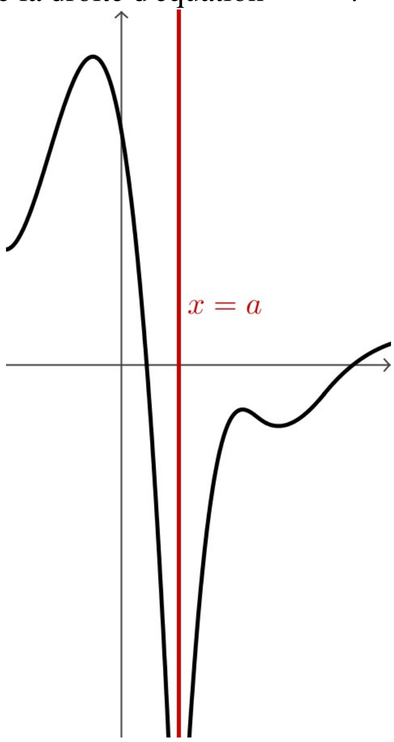
Interprétation graphique :
La courbe représentant f peut être « aussi proche que l'on veut » de la droite d'équation $x = a$.



$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Définition :
Lorsqu'une fonction f admet une limite infinie en un réel a (ou à droite en a ou à gauche en a) on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f.

Exemple :
$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ou $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de ces fonctions.

III. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. L et L' désignent des réels.

Somme

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) =$	$\boldsymbol{L+L'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

Exemple :
On cherche la limite en $+\infty$ de $h(x)=x^2+x$. On pose $h(x)=f(x)+g(x)$ où $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Remarque :
Dans le cas où l'on ne peut pas conclure, on dit que l'on a une **forme indéterminée**.

Produit

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) =$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

Exemple :
On cherche la limite en $+\infty$ de $h(x)=x^2-x$.
On pose $h(x)=f(x)+g(x)$ où $f(x)=x^2$ et $g(x)=-x$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, on aboutit à une forme indéterminée pour la limite de $h(x)$.
Pour lever l'indétermination, on factorise la fonction $h(x)=x(x-1)$.
On pose $h(x)=f(x)\times g(x)$ avec $f(x)=x$ et $g(x)=x-1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$,
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Quotient

- Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	∞
alors $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{L}{L'}$	**0**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

- Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

Remarque :

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0^+$ signifie que la limite de g en a est nulle et pour x « aussi proche de a que l'on veut », $g(x)$ est positif.

Exemple :

On cherche la limite en $+\infty$ de $h(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$.

On pose $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) = (x+1)^2$ et $g(x) = x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, on aboutit à une forme indéterminée pour la limite de $h(x)$.

Pour lever l'indétermination, on développe la fonction $h(x) = \frac{(x^2+2x+1)}{x} = x+2+\frac{1}{x}$.

On pose $h(x) = f(x) + g(x)$ avec $f(x) = x+2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Propriétés :

- Une **fonction polynôme** a même limite en $-\infty$ et en $+\infty$ que son terme de plus haut degré.
- Une **fonction rationnelle** a même limite en $-\infty$ et en $+\infty$ que le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et son dénominateur.

Exemple :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+x-3}{3x+4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$$

2) Composée de deux fonctions

Définition :
Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F et g définie sur un ensemble F.
La fonction $g \circ f$, définie pour tout x de E par $g \circ f(x) = g(f(x))$, est appelée **composée** de f suivie de g.

Exemple :
Soit f et g les fonctions définies sur ℝ par $f(x) = 3x^4 + 5x - 1$ et $g(x) = x^2$.
Alors, pour tout réel x, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x^4 + 5x - 1) = (3x^4 + 5x - 1)^2$.

Remarque :
Attention à l'ordre des lettres pour la composée : en général $g \circ f \neq f \circ g$.

Propriété (admise) :
a, b et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$, f et g sont des fonctions.
Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{X \to b} g(X) = c$ alors $\lim_{x \to a} g[f(x)] = c$.

Exemple :
$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 5\right) = 5$ et $\lim_{X \to 5} X^2 = 25$ donc $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 5\right)^2 = 25$.

Remarque :
Si x se rapproche de a, $f(x)$ se rapproche de b et pour les X proches de b, $g(X)$ se rapproche de c. Donc en posant $X = f(x)$, on obtient que $g(f(x))$ se rapproche de c lorsque x se rapproche de a.

Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

Propriété :
f est une fonction définie sur un intervalle I.
(v_n) est une suite dont tous les termes appartiennent à l'intervalle I.
b et c désignent soit des nombres, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim_{n \to +\infty} v_n = b$ et $\lim_{x \to b} f(x) = c$ alors $\lim_{n \to +\infty} f(v_n) = c$.

Exemple :

Cherchons la limite éventuelle de la suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$.

$u_n = \sqrt{v_n}$ avec $v_n = \frac{3n+2}{n+1}$. Or $\lim_{n \to +\infty} v_n = 3$ et $\lim_{x \to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Cas particulier :
f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ et (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant A$, par $u_n = f(n)$.
La lettre L désigne soit un nombre, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple :

Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

$u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

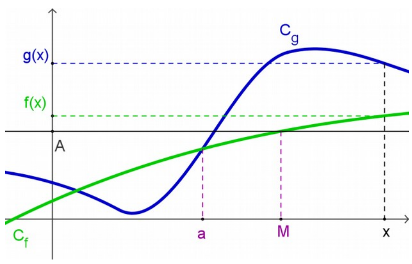
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (voir plus loin), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

IV. Limites et comparaison

1) *Théorèmes de comparaison*

Théorème de minoration :
Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, $f(x) \leqslant g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Démonstration :
Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, tout intervalle $]A;+\infty[$ (avec A un nombre réel) contient tous les $f(x)$ pour x supérieur à un nombre réel M.
Ainsi pour tout $x > M$, $f(x) > A$.
D'après $f(x) \leqslant g(x)$, pour tout $x > a$, $f(x) \leqslant g(x)$.
Donc pour tout x supérieur à la fois à M et a, $g(x) \geqslant f(x) > A$.
Donc, tout intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les $g(x)$ pour x assez grand et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.



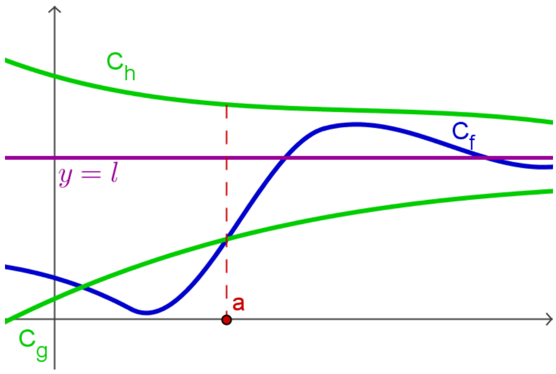
Théorème de majoration :
Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, $f(x) \leqslant g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple :
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + \sin x$.
Pour tout nombre réel x, $\sin x \leqslant 1$, donc $f(x) \leqslant -2x + 1$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x+1) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque :
Ces deux propriétés s'étendent aux cas des limites en $-\infty$ et en un point en changeant l'ensemble de validité et l'inégalité.

2) ***Théorème des gendarmes***

Théorème :
On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que :
pour tout réel $x>a$,
$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$.
On suppose que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=L$ (où L est un nombre réel.)
Alors f admet pour limite L en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$



Démonstration :
Soit $\epsilon>0$ un réel quelconque.
Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L$, par définition, il existe $A\in I$ tel que pour tout $x>A$, on ait $g(x)\in\ ]L-\epsilon\ ;L+\epsilon[$. Sachant aussi que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=L$, par définition, il existe $B\in I$ tel que pour tout $x>B$, on ait $h(x)\in\ ]L-\epsilon\ ;L+\epsilon[$.
Pour tout $x>C$, où C est le plus grand des deux réels A et B, on a $g(x)$ et $h(x)$ dans $]L-\epsilon\ ;L+\epsilon[$. On a donc, pour tout $x>C$: $L-\epsilon\leqslant g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\leqslant L+\epsilon$.
C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Exemple :

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Pour tout nombre réel x, $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$. Donc, pour tout nombre réel $x>0$, $\dfrac{-1}{x}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Remarque :
Ce théorème s'étend au cas de limites en $-\infty$ et en un point en changeant l'ensemble de validité de la condition.

V. Croissances comparées

Propriété :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démonstration :

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$.

Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.
Sur $[0;+\infty[$, $e^x \geqslant 1$, donc $f''(x) \geqslant 0$ et f' est croissante sur $[0;+\infty[$.
$f'(0) = 1$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$.
Donc, f est croissante sur $[0;+\infty[$. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) > 0$, c'est-à-dire $e^x > \frac{1}{2}x^2$.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0 $+$	
$f'(x)$	1 $\nearrow$	
$f(x)$	1 $\nearrow$	

Par conséquent, pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$. Or $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\right) = +\infty$ donc d'après le théorème de minoration, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Propriété :

$$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$$

Démonstration :

Pour tout nombre réel *x*, on pose $X = -x$. Ainsi $xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X}$.

$\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et d'après la propriété précédente, $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc $\lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{X}{e^X}\right) = 0$.

Donc d'après la propriété de la limite d'une fonction composée, $\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$.

Propriété :

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = 0$$

En effet, en posant $X = -x$, alors $xe^{-x} = -Xe^X$. Or $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = 0$.

Généralisation :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Remarque :
On a bien évidemment :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

VI. Résolution d'équation sur un intervalle ouvert

On généralise le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle ouvert.

Propriété :
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $]a;b[$ où *a* désigne un réel ou –∞ et *b* désigne un réel ou +∞.
On suppose que f admet des limites en *a* et *b*, finies ou infinies.
Pour tout k de l'intervalle $\left]\lim_{x \to a} f(x); \lim_{x \to b} f(x)\right[$ ou $\left]\lim_{x \to b} f(x); \lim_{x \to a} f(x)\right[$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a;b[$.

Exemple :
La fonction f définie sur ℝ par $f(x)=x^3+3x+1$ est continue et strictement croissante sur ℝ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
0 appartient à $]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ a une unique solution x_0 sur ℝ.

x	–∞		+∞
$f(x)$	–∞	↗	+∞

Annexe 1 : Prolongement par continuité

Propriété :
Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$, non définie en x_0.
Si f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en x_0 alors la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ l \text{ si } x = x_0 \end{cases} \text{ est continue en } x_0.$$

C'est le **prolongement par continuité** de f en x_0.

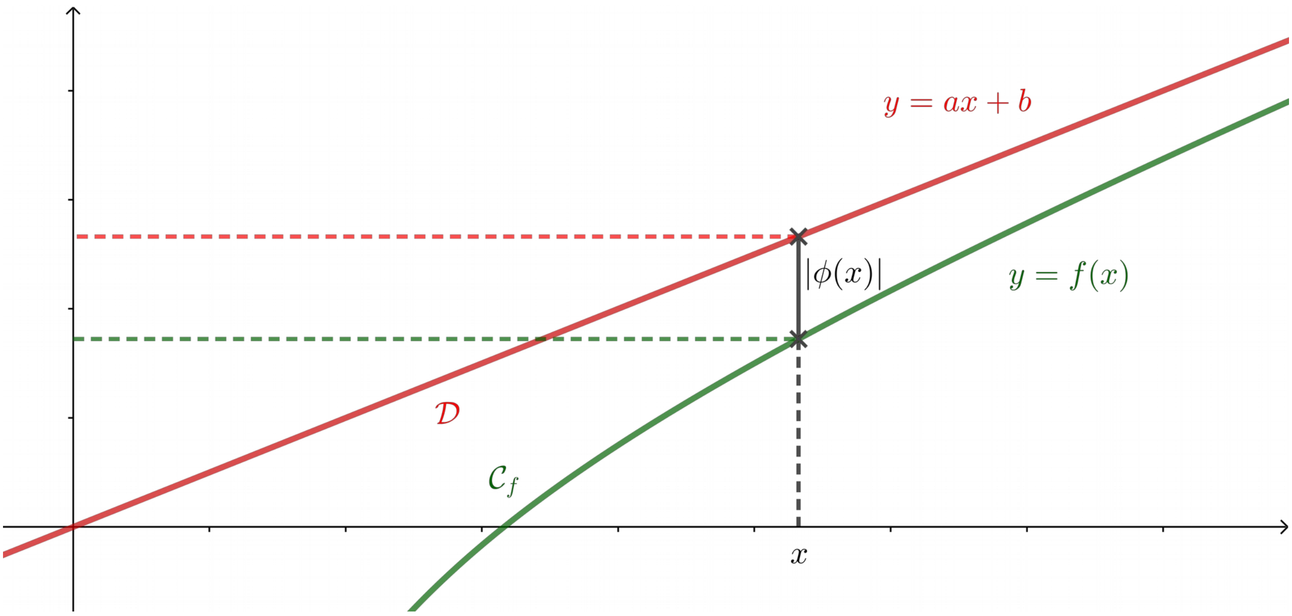
Si, de plus, f est continue sur $I \setminus \{x_0\}$, alors la fonction prolongée $\tilde{f}$ est définie et continue sur I tout entier.

Exemple :
La fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est définie sur $D_f =]-1;0[\cup]0;+\infty[$.
Les fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto x$ sont continues sur D_f et $\forall x \in D_f$, $x \neq 0$ donc f est continue sur D_f.
Puis $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D_f \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est continue et définie sur $]-1;\infty[$.

Annexe 2 : Asymptote oblique

<u>Propriété :</u>
Si $f(x)=ax+b+\phi(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0$, alors $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ la droite asymptote :

$$\mathscr{D}: \; y=ax+b$$



$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0$ signifie que l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ se rapproche de 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

$\phi(x)$ représente l'**écart algébrique** entre les deux courbes, mesuré sur une même verticale *d'abscisse* x, $|\phi(x)|$ étant l'**écart géométrique**.

Annexe 3 : Fonction puissance

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, par définition $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ donc la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ n'est définie que pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Et elle est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme composée de fonctions usuelles continues.
De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \alpha \ln(x) = \mp\infty$ (selon le signe de α).
Donc si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} e^{\alpha \ln(x)} = 0$.
On peut alors prolonger par continuité la fonction « puissance α » en 0.

$$x^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \ln(x)} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \text{, fonction continue sur } \mathbb{R}^+.$$

En revanche si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x \to 0} e^{\alpha \ln(x)} = +\infty$ et la courbe représentative de cette fonction admet une asymptote verticale en 0.