Chapitre 1
Continuité et limites

I. Langage de la continuité

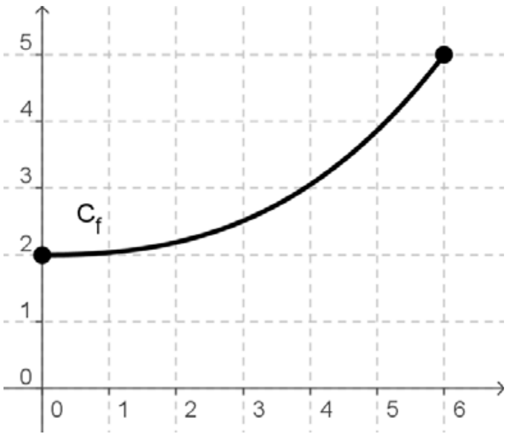
1) Notion intuitive

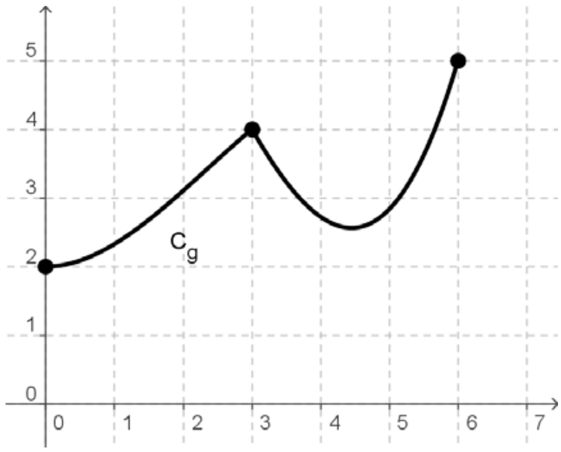
Une fonction *f* est **continue** sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe $\mathscr{C}_f$ se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon.

Interprétation :
Soit *f* une fonction **continue en a** (*a* étant dans l'intervalle I) :
Si *x* est un réel proche de *a*, alors *f(x)* est proche de *f(a)* ; ce que l'on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

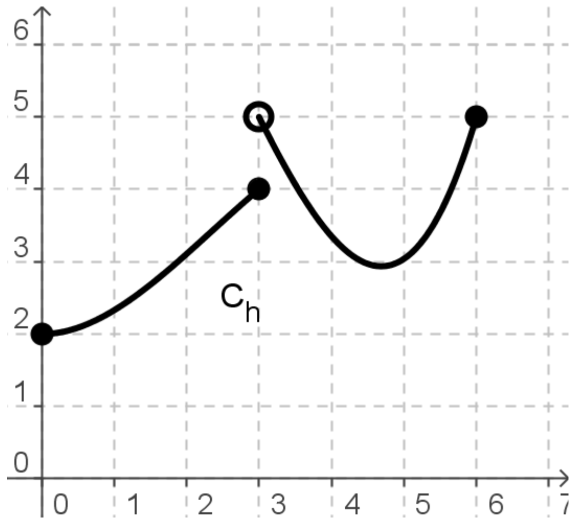
Exemples :

- *f* et *g* sont continues sur $[0;6]$.

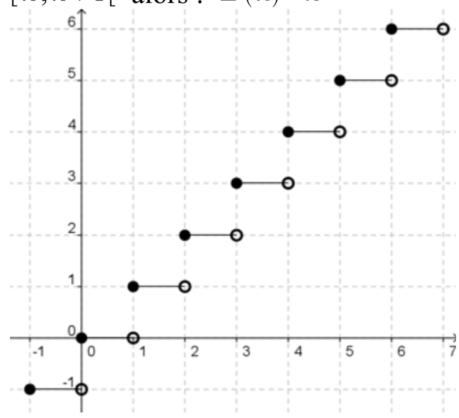




- *h* et *E* ne sont pas continues sur $[0;6]$.



E(x) est la fonction partie entière définie sur ℝ par :
pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$,
si $x \in [n;n+1[$ alors : $E(x)=n$



2) *Fonctions continues*

Propriété (admise) :
Les fonctions de référence (fonctions affines, carré, inverse, racine carrée) sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

- Les fonctions $f : x \longmapsto x$, $g : x \longmapsto x^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- $h : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- $k : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Propriété (admise) :
Une fonction obtenue par opérations (somme, produit, quotient et composition) sur les fonctions de référence est continue sur chaque intervalle où elle est définie.

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles (quotients de fonctions polynômes) sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

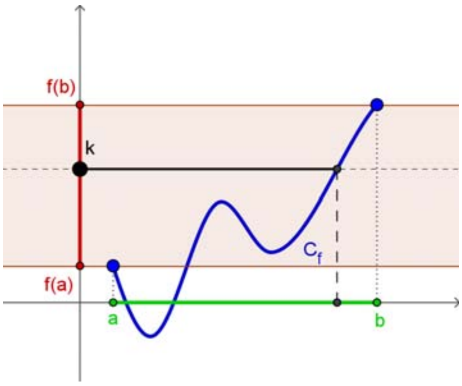
Propriété (admise) :
Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

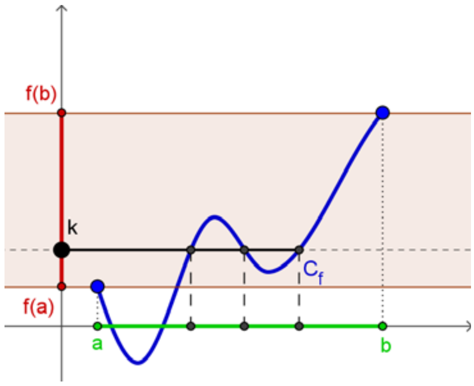
Remarque :
Lorsque la fonction est définie par morceaux, sur deux intervalles $[a;b[$ et $[b;c[$, il est nécessaire de regarder ce qui se passe en *b* (ligne brisée ou saut)

3) *Théorème des valeurs intermédiaires*

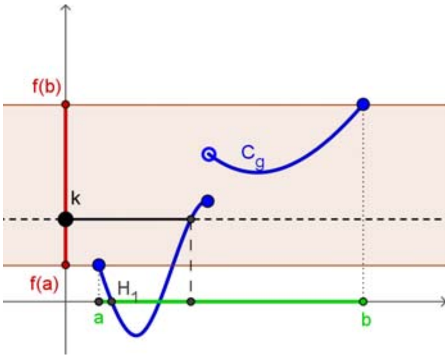
Propriété :
f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel *k* compris entre *f(a)* et *f(b)* il existe **au moins** un réel *c* compris entre *a* et *b*, tel que $f(c)=k$.

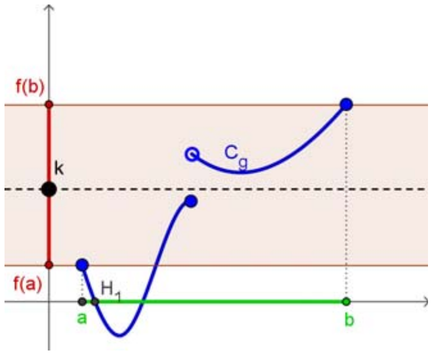
Exemples :
- *f* est continue sur $[a;b]$, toutes les valeurs comprises entre *f(a)* et *f(b)* sont prises au moins une fois.





- *g* n'étant pas continue sur $[a;b]$, certaines valeurs comprises entre *g(a)* et *g(b)* ne sont pas atteintes par *g*.

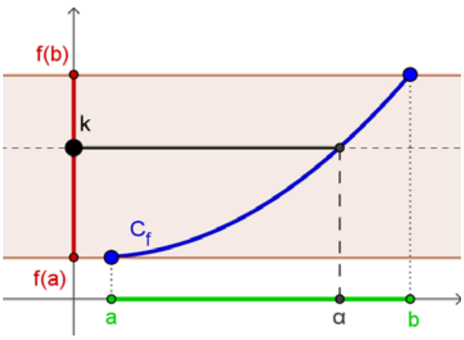


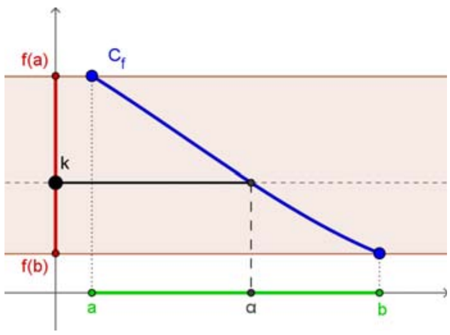


Remarque :
La continuité permet de dire que des solutions existent.

Théorème :
Soit *f* une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$ et *k* un nombre compris entre *f(a)* et *f(b)*, alors l'équation $f(x)=k$ admet une **unique solution** α située dans l'intervalle $[a;b]$.

Exemples :





Remarques :
- Dans le cas particulier où 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, sous les hypothèses du théorème précédent, *f* prend une fois et une seule la valeur 0.
  Ceci signifie que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $]a;b[$.
- Dans un tableau de variation les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle.

Exemple :
Soit la fonction *f* définie sur ℝ par :

$$f(x)=-x^3+3x^2+1$$

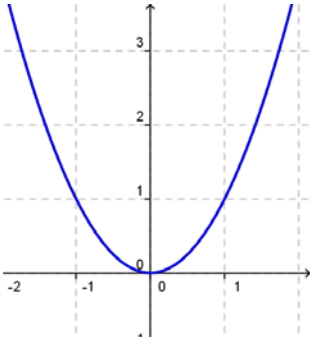
$$f'(x)=-3x^2+6x=3x(-x+2)$$
$$f'(x)=0 \text{ pour } x=0 \text{ et } x=2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

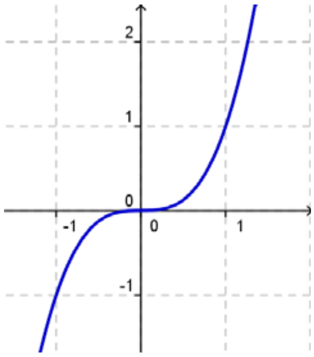
Sur $[2;4]$, la fonction f est continue (c'est une fonction polynôme) et strictement décroissante. $f(2)=5$ Et $f(4)=-15$. Ainsi l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[2;4]$.

II. Limites et opérations

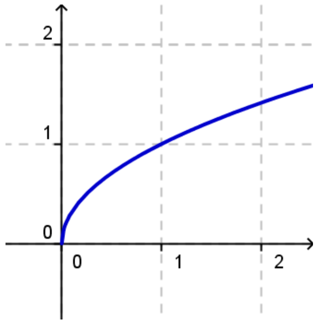
1) *Limites de fonctions usuelles*



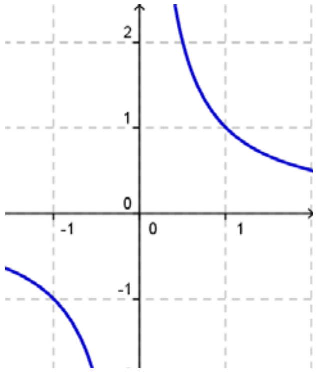
$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$$



$$\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$



$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$$



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}=-\infty$$

Remarque :

Lorsque *a* appartient à l'ensemble de définition de *f*, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

2) *Limites par opérations*

Propriétés :

Si $\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

Si $\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L non nul	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=$	$L\times L'$	$\pm\infty$	**?**	$\pm\infty$

Si $\lim_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L$\neq$0	L	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
et $\lim_{x\to\alpha} g(x)=$	L' non nul	0	$\pm\infty$	L'	0	$\pm\infty$
alors $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}=$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	**?**	**?**

Remarque :
En cas de **forme indéterminée** (**?**), on ne peut pas conclure par ces propriétés. Il faut alors utiliser d'autres techniques pour lever l'indétermination.

3) *Limites à l'infini de polynômes*

Propriétés :
- A l'infini, une **fonction polynôme** a même limite que son **terme de plus haut degré**.
- A l'infini, une **fonction rationnelle** a même limite que le **quotient** de ses termes de **plus haut degré**.

Exemple :

f est la fonction rationnelle définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3-x^2}{2x^2-2}$.

On a donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

III. Limites par composition et comparaison

1) *Limite par composition*

Définition :
g est une fonction définie sur un intervalle J.
u est une fonction définie sur un intervalle I telle que *u(x)*∈I.
La fonction composée *u* suivie de *g*, est la fonction *f* définie sur I par :

$$f(x)=g[u(x)]$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & \text{J} & \\ x\longmapsto & u(x) \longmapsto & g[u(x)] \\ x\longmapsto & & f(x) \end{array}$$

Exemple :

u et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $u(x)=9+\dfrac{1}{x}$ et $g(X)=\sqrt{X}$

La fonction *u* suivie de *g* est définie par :

pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=(g\circ u)(x)=g[u(x)]=g\left(9+\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{9+\dfrac{1}{x}}$.

Propriété :
α, *k* et *l* désignent des nombres réels, ou +∞ ou –∞.
Soit *u* et *g* deux fonctions telles que la composée $f=g\circ u$ existe sur un intervalle de borne α.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=k$ et si $\lim\limits_{X\to k} g(X)=l$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$

Exemple :

Étude de la limite $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x)=\sqrt{9+\dfrac{1}{x}}$.

- On a $\lim_{x\to 0^+} u(x)=\lim_{x\to 0^+} 9+\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X}=+\infty$.

  Donc, par composée, $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{9+\frac{1}{x}}=+\infty$. D'où $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

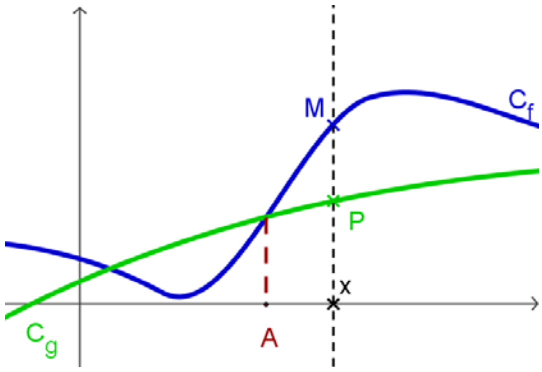
- On a $\lim_{x\to+\infty} u(x)=\lim_{x\to+\infty} 9+\frac{1}{x}=9$ et $\lim_{X\to 9} \sqrt{X}=3$.

  Donc, par composée, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9+\frac{1}{x}}=3$. D'où $\lim_{x\to 0^+} f(x)=3$

2) Limite par comparaison

Propriété :
S'il existe un réel A tel que :
pour tout $x\geqslant A$, on a $f(x)\geqslant g(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Remarques :
- Sur $[A;+\infty[$, le point M de $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus du point P de $\mathscr{C}_g$ de même abscisse.
- Il existe une propriété analogue pour étudier une limite en $-\infty$.



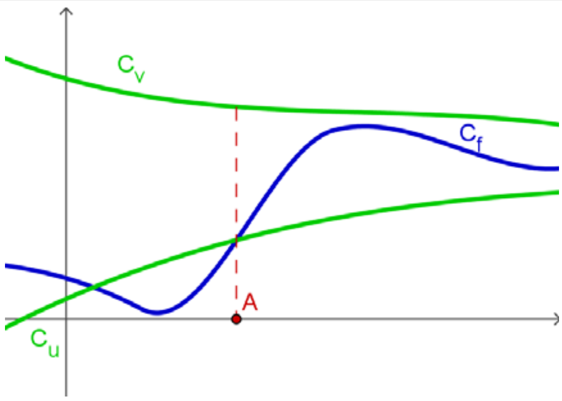
Exemple :
f est une fonction telle que pour tout $x\geqslant 1$, $f(x)\geqslant x^2$.
On sait que $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, on a donc, par comparaison, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Théorème (des gendarmes) :
S'il existe un réel A tel que :
pour tout $x\geqslant A$, on a $u(x)\leqslant f(x)\leqslant v(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} u(x)=l$ et $\lim_{x\to+\infty} v(x)=l$
alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Exemple :
f est une fonction telle que, pour tout $x>0$:

$$\frac{1}{2}x\leqslant f(x)+3\leqslant\frac{1}{x}$$

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}=0$
d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)+3=0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$



IV. Droites asymptotes

1) Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne ouverte c et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Propriété :
Si la limite de $f(x)$ est infinie, quand x tend vers c, alors la droite d'équation $x=c$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

Remarque :
Si $\lim\limits_{x \to c} f(x)=+\infty$ alors le nombre c est une valeur interdite pour la fonction f.

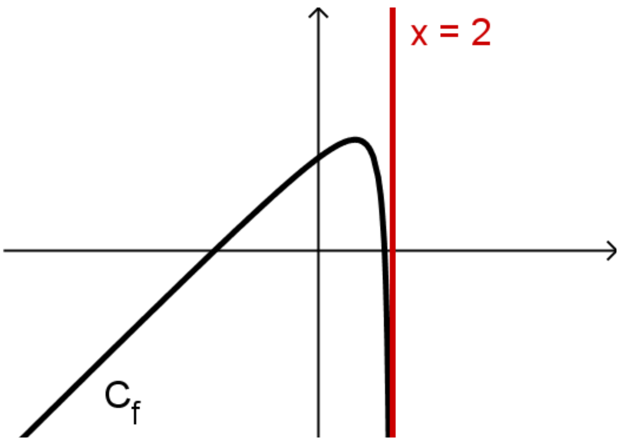
Exemple :

Soit $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x-2}$ définie sur $]-\infty;2[$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} x+3=5$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

Donc, par somme, on a $\lim\limits_{x \to 2^-} x+3+\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

Ainsi la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.



2) Asymptote horizontale

Soit f une fonction,de courbe $\mathscr{C}_f$,définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$.

Propriété :
Si la limite de $f(x)$ est un nombre b, quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors la droite d'équation $y=b$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (ou$-\infty$).

Exemple :

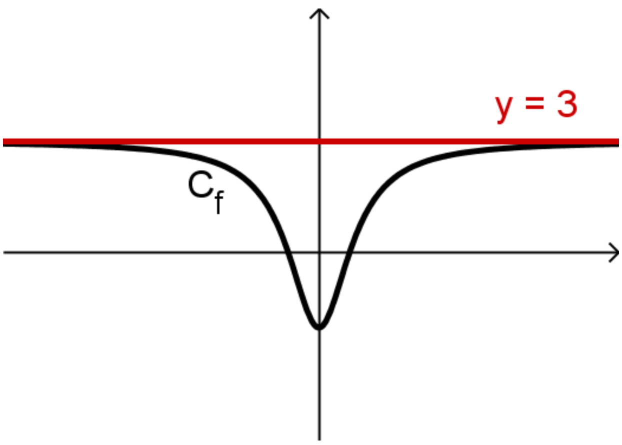
Soit $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

$f(x)$ est un quotient de polynômes, d'où :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-2}{x^2+1}=\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2}=3$

Ainsi la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

On pourrait vérifier que $y=3$ est également asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.



3) *Asymptote oblique*

Soit f une fonction,de courbe $\mathscr{C}_f$,définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$ et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y=ax+b$.

Propriété :
Si la limite de $f(x)-(ax+b)$ est nulle, quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (ou $-\infty$).

Exemple :

Soit $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x-2}$ définie sur $]-\infty;2[$ et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y=x+3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+3+\dfrac{1}{x-2}-(x+3)$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=0$

Ainsi la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x+3$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.