Chapitre 4
Étude de fonctions

I. Fonction dérivable, fonction continue

1) Dérivabilité

Définition :
Soit *I* un intervalle contenant un nombre réel a et *f* une fonction définie sur *I*.
On dit que la fonction *f* est **dérivable en *a*** si la limite du rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0 existe et est égale à un nombre réel $f'(a)$.
Ce nombre $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé** de la fonction *f* en a.

Remarques :
- On écrit $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$. Ce qui s'écrit aussi $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.
- Une fonction *f* n'est pas dérivable en a lorsque le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ n'a pas de limite ou a une limite infinie lorsque h tend vers 0.

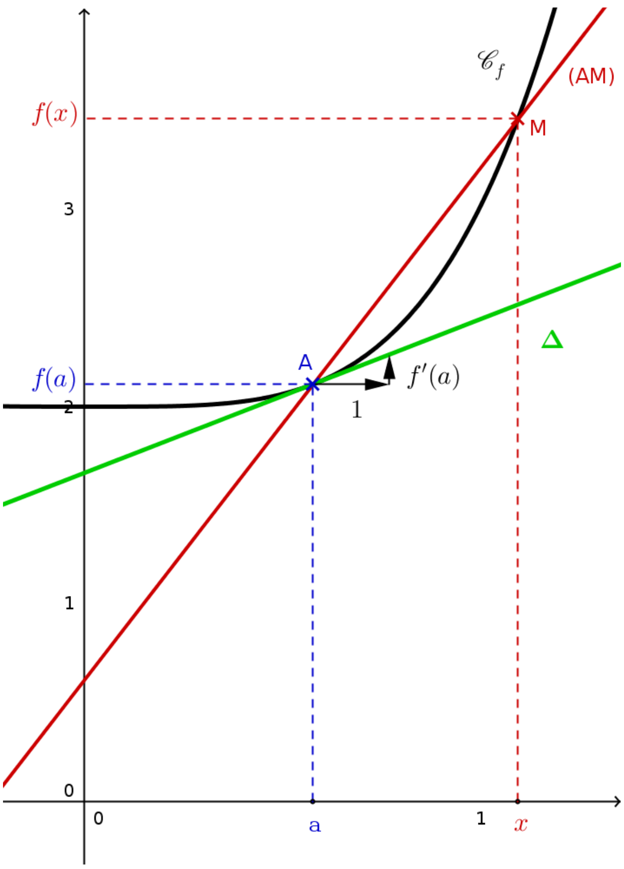
Exemples :
- Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^3$ et $a=1$.
  Pour $h\neq 0$, on a $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(1+h)^3-1^3}{h}=\frac{(1+3h+3h^2+h^3)-1}{h}=3+3h+h^2$.
  Or $\lim\limits_{h\to 0} h^2+3h+3=3$.
  Donc la fonction *f* est dérivable en 1 et le nombre dérivé de *f* en 1 vaut 3. Donc $f'(1)=3$.
- La fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
  En effet $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$ et $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$.

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle *I*, dérivable en a, un nombre réel appartenant à *I*, et de nombre dérivé $f'(a)$ en a.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et *A* le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
La **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point *A*** est la droite qui passe par *A* et qui a comme coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Remarque :

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) où $A(a;f(a))$ et $M(x;f(x))$.

Quand x tend vers a, cette droite tend vers une position limite : la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A.



Propriété :

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, A un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a.

Une **équation de la tangente** à $\mathscr{C}_f$ en A est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Définitions :

Une fonction f est **dérivable sur un intervalle *I*** lorsqu'elle est dérivable en tout nombre réel x appartenant à I.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction définie sur I qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre dérivé de la fonction f en x est appelé **fonction dérivée** de f et est notée f'.

2) Continuité

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et un réel a de I.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.

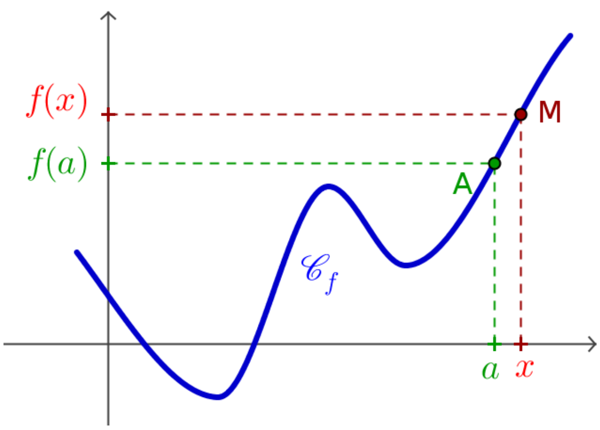
Pour tout réel x de I, on considère le point M de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x.

Ainsi, on a : $A(a;f(a))$ et $M(x;f(x))$.

En général, lorsque x est proche de a, le point M est proche du point A, c'est-à-dire que le réel $f(x)$ est proche du nombre $f(a)$.

On dit alors que la fonction ***f* admet pour limite en *a* le réel** $f(a)$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors « sans trou » autour de A, elle ne présente pas de « saut » en A.



Définition :

Soit une fonction f définie sur un intervalle *I*.

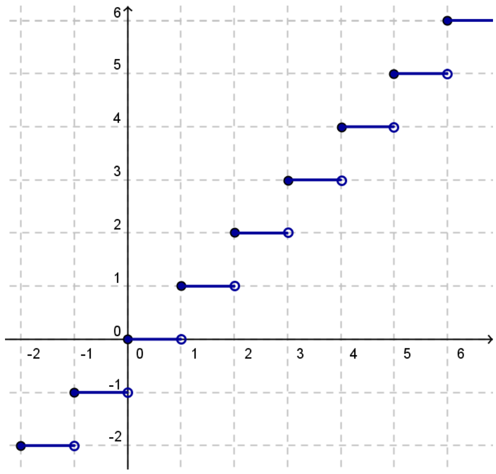
On dit que la fonction *f* est **continue en** un réel ***a*** de *I* si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

On dit que la fonction *f* est **continue sur *I*** si *f* est continue en tout réel *a* de *I*.

Exemples :

- Les fonctions carrée, cube, cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière E est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x)=n$, où n est l'entier relatif tel que $n \leqslant x < n+1$.
  Ainsi si $0 \leqslant x < 1$ alors $E(x)=0$ et si $1 \leqslant x < 2$ alors $E(x)=1$.
  Donc $\lim_{x \to 1^-} E(x)=0$ alors que $E(1)=1$.
  On dit que E est **discontinue** en 1, et de façon générale, en tout entier relatif.
  La courbe $\mathscr{C}_E$ est « en escaliers » et présente des sauts en ses points d'abscisses entières.



Propriété (admise) :

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle *I* est **continue** sur *I*.

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0, mais sont continues en 0.

Conséquences :

- Les fonctions usuelles (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue, cosinus, sinus) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ et les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

Remarques :

Ne pas confondre continuité et dérivabilité.

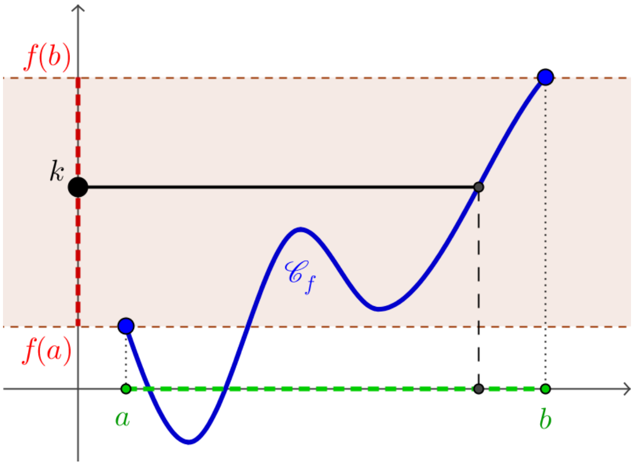
- Une fonction f est **continue en *a*** si la courbe $\mathscr{C}_f$ ne présente pas de saut en son point d'abscisse *a*.
- Une fonction *f* est **dérivable en *a*** si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale en son point d'abscisse *a*.

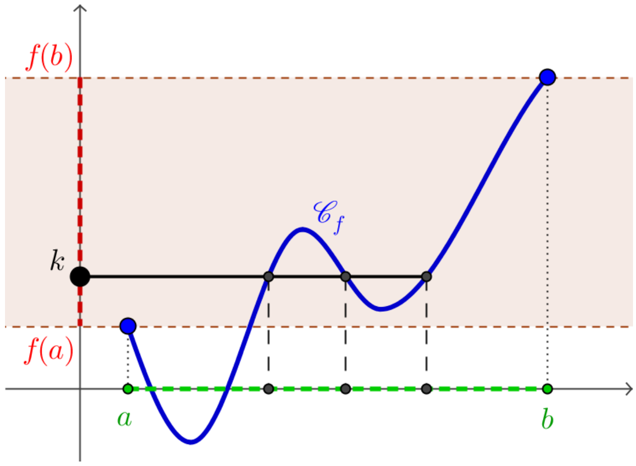
II. Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété (admise) :
f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel *k* compris entre *f(a)* et *f(b)* il existe **au moins** un réel *c* compris entre *a* et *b*, tel que $f(c)=k$.

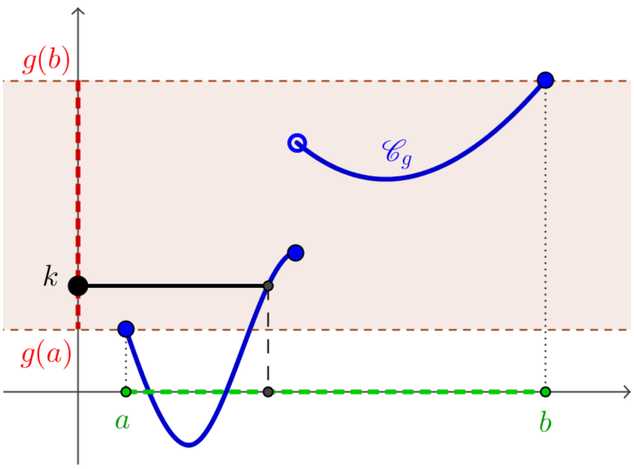
Exemples :

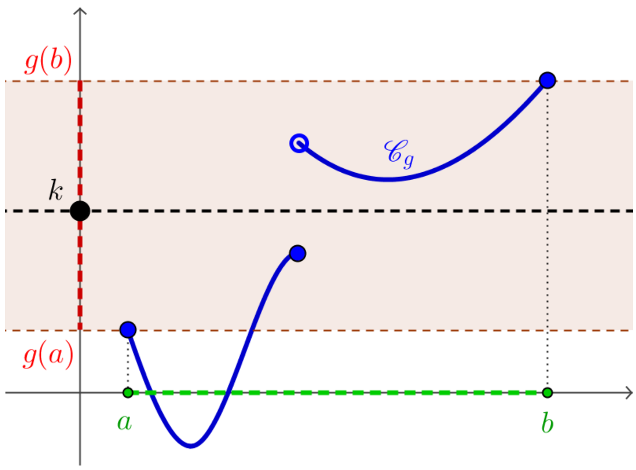
- *f* est continue sur $[a;b]$, toutes les valeurs comprises entre *f(a)* et *f(b)* sont prises au moins une fois.





- *g* n'étant pas continue sur $[a;b]$, certaines valeurs comprises entre *g(a)* et *g(b)* ne sont pas atteintes par *g*.





Remarque :
La continuité permet de dire que des solutions existent.

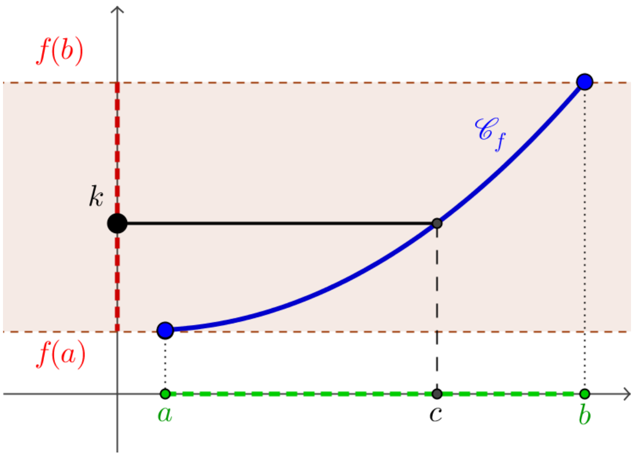
Propriété :
Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$ et k un nombre compris entre *f(a)* et *f(b)*, alors l'équation $f(x)=k$ admet une **unique solution** c située dans l'intervalle $[a;b]$.

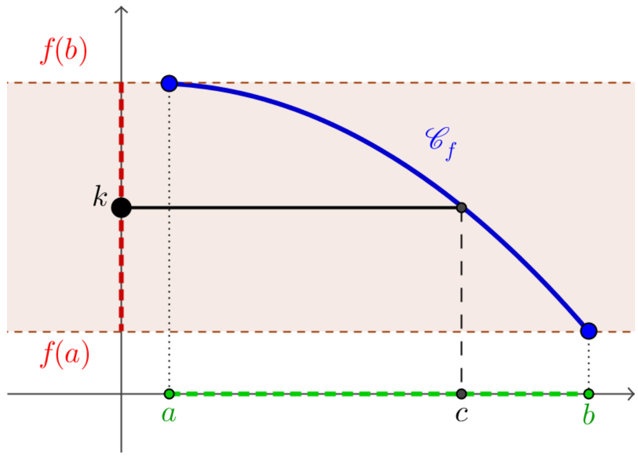
Démonstration :
Soit un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Comme f est continue sur $[a;b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c)=k$. Il reste à prouver l'unicité.
Dans le cas où la fonction f est strictement croissante sur $[a;b]$, on a :

- pour tout réel x de $[a;c[$, $f(x)<f(c)$, c'est-à-dire $f(x)<k$
- pour tout réel x de $]c;b]$, $f(x)>f(c)$, c'est-à-dire $f(x)>k$

L'équation $f(x)=k$ n'admet donc pas d'autre solution que c dans l'intervalle $[a;b]$.
Dans le cas où la fonction f est strictement décroissante sur $[a;b]$, on raisonne de la même façon.

Exemples :





Remarques :

- Dans le cas particulier où 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, sous les hypothèses du théorème précédent, f prend une fois et une seule la valeur 0.
  Ceci signifie que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $]a;b[$.
- Ce théorème s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b.
- Dans un **tableau de variation** les **flèches** obliques traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** d'une fonction sur un intervalle.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x)=-x^3+3x^2+1$$

$f'(x)=-3x^2+6x=3x(-x+2)$
$f'(x)=0$ pour $x=0$ et $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Sur $[2;4]$, la fonction f est continue (c'est une fonction polynôme) et strictement décroissante.
$f(2)=5$ *Et* $f(4)=-15$. Ainsi l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[2;4]$.

Calculatrice

- Étude de f sur $[a;b]$. On suppose la fonction continue.

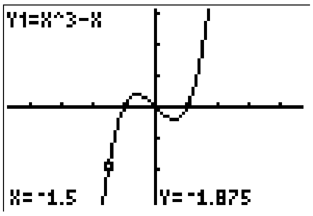
On souhaite savoir si l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

```
PROGRAM:TVI
:Prompt A,B
:If Y1(A)*Y1(B)≥0
:Then
:Disp "PAS SOL UNIQUE"
:Else
:If Y2(xfMin(Y2,X,A,B))*Y2(xfMax(Y2,X,A,B))≤0
:Then
:Disp "Y1 PAS MONOTONE"
:Else
:Disp "UNIQUE SOL"
:End
:End
```

```
Graph1 Graph2 Graph3
\Y1=X^3-X
\Y2=nbreDérivé(Y1,X,X)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

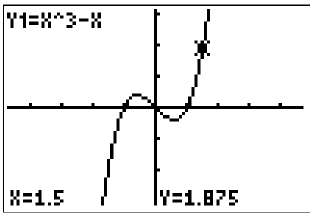
```
prgmTVI
A=?1.5
B=?2
PAS SOL UNIQUE
Done
```

```
prgmTVI
A=?-2
B=?3
Y1 PAS MONOTONE
Done
```




```
prgmTVI
A=?-0.5
B=?2
PAS SOL UNIQUE
Done
```

```
prgmTVI
A=?0.1
B=?2
Y1 PAS MONOTONE
Done
```




```
prgmTVI
A=?0.7
B=?1.2
UNIQUE SOL
Done
```

```
prgmTVI
A=?-0.2
B=?0.2
UNIQUE SOL
Done
```

- **Algorithme : approcher, à 10^{-n} près les solutions de l'équation $f(x)=k$ sur $[a;b]$.**

Cas où la fonction est continue et strictement **croissante** sur $[a;b]$

Tant que $b-a>10^{-n}$ faire

$m \leftarrow \dfrac{(a+b)}{2}$

Si $f(m)<k$ alors

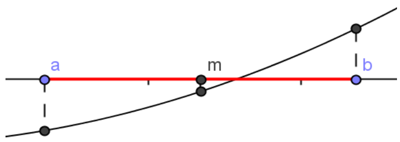
$a \leftarrow m$

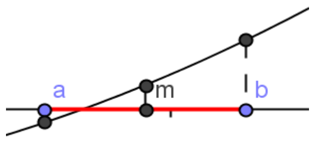
Sinon

$b \leftarrow m$

Fin Si

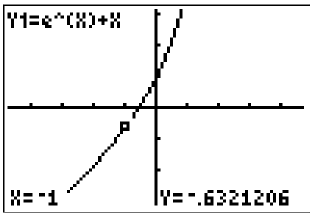
Fin Tant que

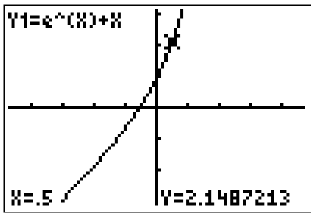





```
PROGRAM:DICHO
:Prompt A,B,E
:While (B-A)>E
:(A+B)/2→M
:If Y1(M)<0
:Then
:M→A
:Else
:M→B
:End
:End
:Disp "X ENTRE",A,B
```

```
Graph1 Graph2 Graph3
\Y1=e^(X)+X
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```






```
prgmDICHO
A=?-2
B=?1
E=?0.01
X ENTRE
-.5703125
-.564453125
Done
```

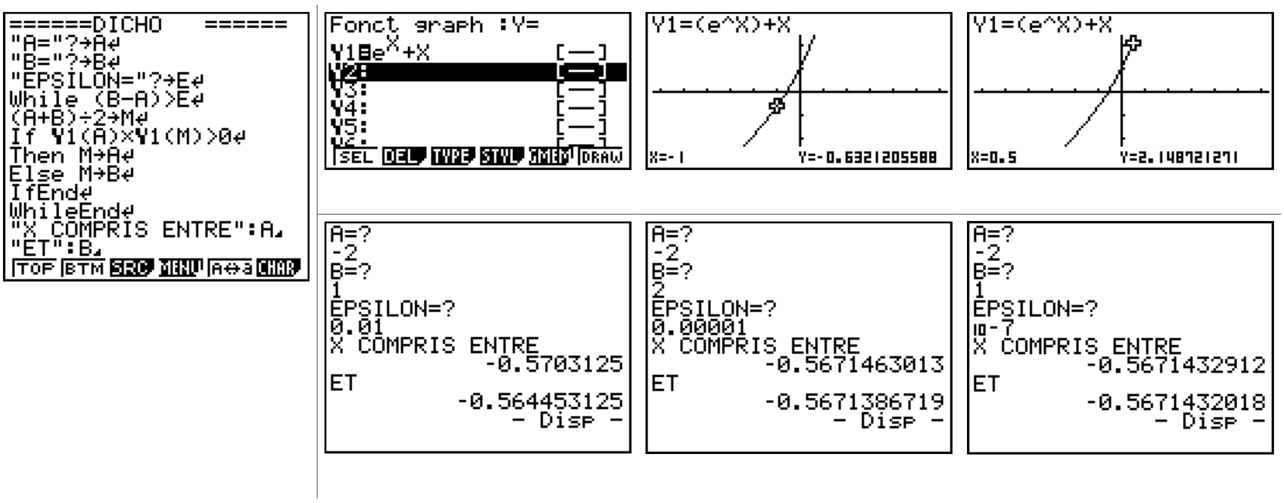
```
prgmDICHO
A=?-2
B=?2
E=?0.00001
X ENTRE
-.5671463013
-.5671386719
Done
```

```
prgmDICHO
A=?-2
B=?1
E=?10^(-7)
X ENTRE
-.5671432912
-.5671432018
Done
```

- **Algorithme : approcher, à 10^{-n} près les solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[a;b]$.**

Cas où la fonction est continue et strictement **monotone** sur $[a;b]$

Tant que $b-a>10^{-n}$ faire
  $m \leftarrow \dfrac{(a+b)}{2}$
  Si $f(a)\times f(m)>0$ alors
    $a \leftarrow m$
  Sinon
    $b \leftarrow m$
  Fin Si
Fin Tant que



Python

```python
# On importe la fonction exponentielle
from math import exp

# On définit la fonction
def f(x):
    return exp(x) + x

# On implémente l'algorithme
def dichotomie(a, b, epsilon):
    while (b - a) > epsilon:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    print("La solution appartient à l'intervalle ["+
          str(a)+";"+str(b)+"] avec une précision de", epsilon)
```

```
>>> dichotomie(-1,2,0.000001)
La solution appartient à l'intervalle [-0.5671436786651611;-0.5671429634094238]
avec une précision de 1e-06
>>>
```

III. Calculs de dérivées

1) *Rappel*

Dérivées usuelles

fonction f	Ensemble de dérivabilité de f	fonction dérivée f'
$f(x)=x^n \ (n\in\mathbb{Z})$	$\mathbb{R}$ (si $n\in\mathbb{N}$) ou $\mathbb{R}^*$ (si $n<0$)	$f'(x)=n\times x^{n-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Règle de calculs

Propriétés :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Soit u' et v' les fonctions dérivées correspondantes.

$(u+v)'=u'+v'$; $(ku)'=ku'$ avec k constante

$(uv)'=u'v+uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec v qui ne s'annule pas sur I.

2) *Composition de fonctions*

Dérivée de $\sqrt{u(x)}$

Propriété :
Soit u une fonction définie, **positive** et dérivable sur un intervalle I de fonction dérivée u'.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x)=\sqrt{u(x)}$.
La fonction f est dérivable en tout nombre réel x de I tel que $u(x)\neq 0$, et on a :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Démonstration :
Soit x un nombre réel tel que $u(x)>0$.
Choisissons J, inclus dans I, contenant x.
Soit un réel h non nul tel que $x+h$ appartienne à J et $u(x+h)\geqslant 0$.
Calculons $A=\dfrac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}$, puis étudions sa limite lorsque h tend vers 0.
Comme $\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}>0$, on peut écrire :

$$A=\frac{\left(\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}\right)\left(\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}\right)}{h\left(\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}\right)}=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}$$

La fonction u est dérivable en x donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$$

La fonction u est continue en x donc $\lim\limits_{h\to 0}u(x+h)=u(x)$. Ainsi :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \text{ d'où } \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

- La fonction u définie sur ℝ par $u(x)=x^2+x$ est positive, dérivable sur $[0;+\infty[$ et $u'(x)=2x+1$. Pour $x\in]0;+\infty[$, $u(x)>0$.

  Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.
- Étude de la dérivabilité de f en 0.

  Pour $h>0$, $A=\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{\sqrt{h^2+h}}{h}=\sqrt{1+\dfrac{1}{h}}$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} A=+\infty$.

  Donc f n'est pas dérivable en 0.

Dérivée de $(u(x))^n$, $n\in\mathbb{Z}^*$

Propriété :

Soit *u* une fonction définie et dérivable sur un intervalle *I* de fonction dérivée u' , et *n* un entier naturel non nul.

Soit f la fonction définie sur *I* par $f(x)=(u(x))^n$.

La fonction f est dérivable en tout nombre réel *x* de l'intervalle *I* et on a :

$$f'(x)=n(u(x))^{n-1}u'(x)$$

Démonstration :

Pour *x* un nombre réel de *I*, il faut calculer $A=\dfrac{(u(x+h))^n-(u(x))^n}{h}$, puis déterminer la limite de *A* lorsque *h* tend vers 0.

- La fonction $x\longmapsto x^n$ est dérivable sur ℝ, c'est-à-dire que pour tout nombre réel $z>0$, $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{(z+k)^n-z^n}{k}=nz^{n-1}$. Posons $\varepsilon(k)=\dfrac{(z+k)^n-z^n}{k}-nz^{n-1}$.

  La fonction est définie sur ℝ* et $\lim\limits_{k\to 0}\varepsilon(k)=0$.

  Par transformation d'écriture de $\varepsilon(k)$, on obtient $(z+k)^n-z^n=(nz^{n-1}+\varepsilon(k))\times k$.

  Cette dernière égalité donne, en posant $z=u(x)$ et $z+k=u(x+h)$:

  $(u(x+h))^n-(u(x))^n=(n(u(x))^{n-1}+\varepsilon(u(x+h)-u(x)))\times(u(x+h)-u(x))$
- $A=\dfrac{(u(x+h))^n-(u(x))^n}{h}=\left(n(u(x))^{n-1}+\varepsilon(u(x+h)-u(x))\right)\times\left(\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\right)$

  La fonction u est dérivable en *x* donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$.

  Par continuité de u en *x* et composition de limites, on a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(u(x+h)-u(x))=0$.

  On en déduit donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h))^n-(u(x))^n}{h}=n(u(x))^{n-1}u'(x)$$

Propriété (admise) :

Soit *u* une fonction définie et dérivable sur un intervalle *I* de fonction dérivée u' , et *n* un entier négatif non nul.

Soit f la fonction définie sur *I* par $f(x)=(u(x))^n$ avec $u(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$.

La fonction f est dérivable en tout nombre réel *x* de l'intervalle *I* et on a :

$$f'(x)=n(u(x))^{n-1}u'(x) .$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=(-5x+1)^4$.

Comme la fonction $u : x \longmapsto -5x+1$ est dérivable sur ℝ de dérivée $u' : x \longmapsto -5$, la fonction f est dérivable sur ℝ et $f'(x)=-5\times4\times(-5x+1)^3=-20(-5x+1)^3$.

Dérivée de $f(ax+b)$

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels et f une fonction définie et dérivable sur ℝ.

La fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ est dérivable en tout nombre réel x et sa dérivée est la fonction :

$$x \longmapsto af'(ax+b).$$

Démonstration :

- Premier cas : $a=0$

  La fonction f est une fonction constante $x \longmapsto f(b)$. Elle est donc dérivable, de dérivée nulle.

  La fonction $x \longmapsto af'(ax+b)$ est bien la fonction nulle car $a=0$.
- Deuxième cas $a\neq0$

  Soit h un nombre réel quelconque différent de 0.

  On a $\dfrac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}=a\times\dfrac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}$.

  Comme $\dfrac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}$ admet pour limite $f'(ax+b)$ lorsque ah tend vers 0, on obtient $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}=a\times f'(ax+b)$.

Exemple :

La fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$ par $g(x)=\dfrac{1}{3x+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$, $g(x)=f(3x+5)$ avec $f(x)=\dfrac{1}{x}$ or $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Par conséquent, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$, $g'(x)=\dfrac{-3}{(3x+5)^2}$.

Dérivée d'une fonction composée

Définition :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J, et g une fonction définie et dérivable sur J.
La **fonction composée** des fonctions u et g, notée $g \circ u$, est définie sur I par :

$$g \circ u(x) = g(u(x)) .$$

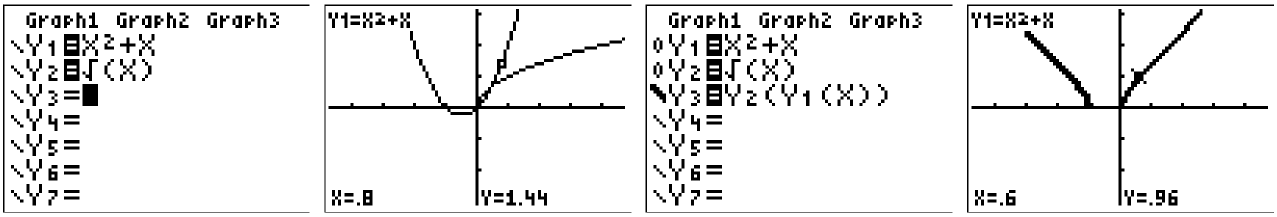
Exemples :
Soit u *et* g les fonctions suivantes :

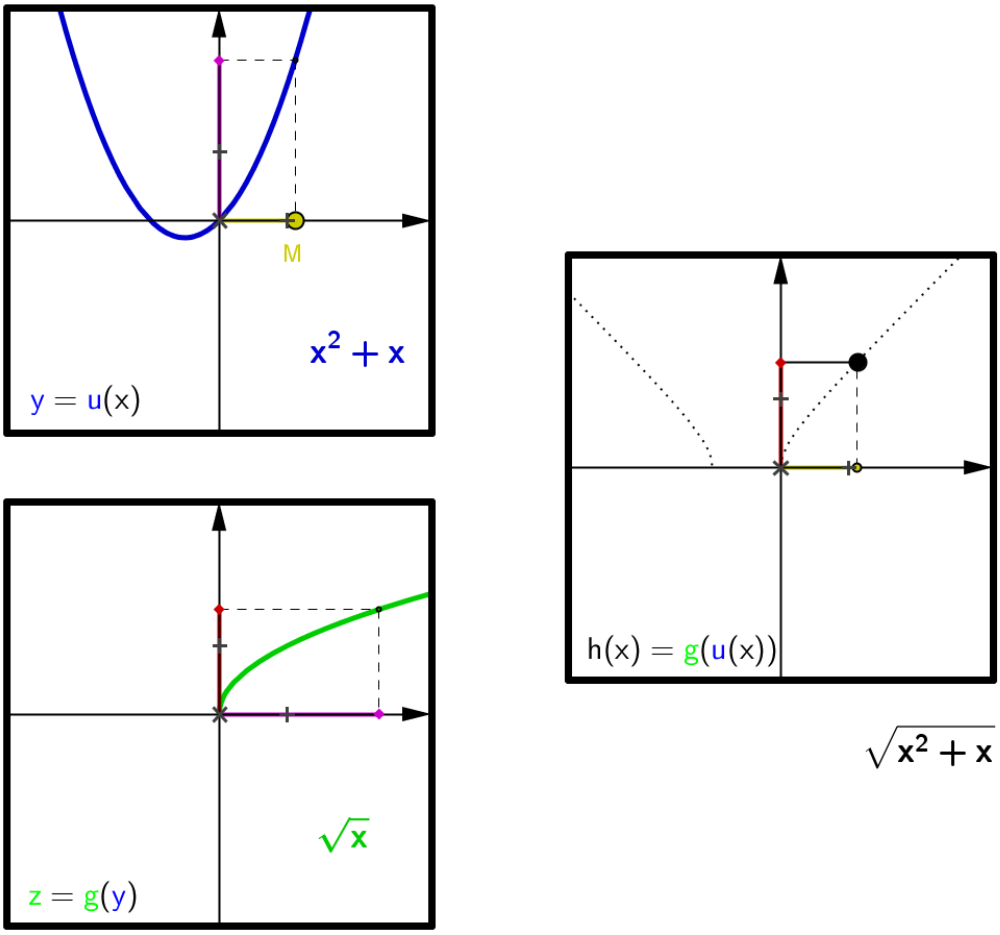
$u: I = [0;+\infty[\rightarrow J = [0;+\infty[$ et $g: J = [0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 + x$ $\qquad$ $x \longmapsto \sqrt{x}$

La fonction composée est la fonction $g \circ u : I \rightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(u(x)) = \sqrt{x^2 + x}$





Remarques :

- Sur l'exemple précédent, $u\circ g$ est définie par : $u\circ g:\begin{array}{l}[0;+\infty[\to [0;+\infty[\\ x\longmapsto x+\sqrt{x}\end{array}$
- Les propriétés précédentes sont des cas particuliers :
  - Pour $f(x)=\sqrt{u(x)}$

    $u:\begin{array}{l}E\to]0;+\infty[\\ x\longmapsto u(x)\end{array}$ et $g:\begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R}\\ x\longmapsto \sqrt{x}\end{array}$

    La fonction f peut s'écrire $f=g\circ u:\begin{array}{l}E\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto\sqrt{u(x)}\end{array}$
  - Pour $f(x)=(u(x))^n$

    $u:\begin{array}{l}E\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto u(x)\end{array}$ et $g:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto x^n\end{array}$

    La fonction f peut s'écrire $f=g\circ u:\begin{array}{l}E\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto(u(x))^n\end{array}$
  - Pour $g(x)=f(ax+b)$

    $u:\begin{array}{l}E\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto ax+b\end{array}$ et $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto f(x)\end{array}$

    La fonction *g* peut s'écrire $g=f\circ u:\begin{array}{l}E\to\mathbb{R}\\ x\longmapsto f(ax+b)\end{array}$

Propriété (admise) :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle *E*, à valeurs dans un intervalle *F* et *g* une fonction définie et dérivable sur *F*.

La fonction $f:x\longmapsto g(u(x))$ est dérivable en tout nombre réel *x* de *E* et sa dérivée est la fonction :

$$(g\circ u)':x\longmapsto g'(u(x))\times u'(x)\,.$$

Exemple :

La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ est la composée de la fonction $u:x\longmapsto\sqrt{x}$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, à valeurs dans $]0;+\infty[$, et de la fonction $g:x\longmapsto\frac{1}{x}$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

On sait que $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

La fonction f est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$u'(x)\times g'(u(x))=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times-\frac{1}{(\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

Annexe 1 : Approximation d'un point fixe

On souhaite approcher le point fixe d'une fonction f, c'est-à-dire une solution (supposée isolée) de l'équation $f(x)=x$ à l'aide d'une suite (u_n) telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ et examiner la qualité de cette approximation.

Principe :

Pour que la suite définie par u_0 et $u_{n+1}=f(u_n)$ converge vers un point fixe α de f, deux conditions suffisent :

- Trouver un intervalle *I* contenant α tel que l'on ait à la fois $f(\mathrm{I})\subset \mathrm{I}$ et $|f'|\leqslant k<1$ sur I (il existe un réel *k*, $0<k<1$, tel que, pour tout *x* de *I*, $|f'|\leqslant k$).
- Choisir u_0 dans *I*.

Différentes étapes :

Sous les hypothèses précédentes, on peut établir successivement :

- $u_n \in I$, pour tout *n*. Ce résultat s'obtient par récurrence (immédiate) puisque $u_0 \in I$ et $f(\mathrm{I})\subset \mathrm{I}$.
- $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant k|u_n-\alpha|$. On applique l'inégalité des accroissements finis : $|f(u_n)-f(\alpha)|\leqslant k|u_n-\alpha|$ avec $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(\alpha)=\alpha$.
- $|u_n-\alpha|\leqslant k^n|u_0-\alpha|$: récurrence immédiate basée sur l'inégalité précédente.
- $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$. Sachant que $0<k<1$, $\lim_{n\to+\infty} k^n=0$
- Pour que u_n soit une valeur approchée de α à ϵ près (ϵ>0 donné), il suffit que $k^n|u_0-\alpha|<\epsilon$

Remarques :

- On utilise l'**inégalité des accroissements finis**.

Propriété :

Soit *f* la fonction définie sur $[a;b]$, continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.
Soit *k* un réel tel que, pour tour *x* ∈ $[a;b]$, $|f'(x)|\leqslant k$, alors

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leqslant k$$

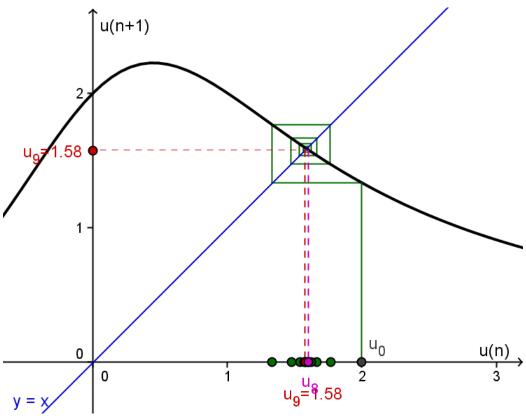
- En ce qui concerne la rapidité de convergence de la suite (u_n), l'inégalité $|u_n-\alpha|\leqslant k^n|u_0-\alpha|$ montre que plus *k* est petit, plus la convergence s'accélère.

Exemple :

Solution de l'équation $\frac{2x+4}{2+x^2}=x$. On choisit $\mathrm{I}=[1;2]$.

- On vérifie que f est décroissante sur *I* et $f(\mathrm{I})=\left[\frac{4}{3};2\right]$ donc $f(\mathrm{I})\subset \mathrm{I}$.
- De plus $f'(x)=\frac{-2x^2-8x+4}{(x^2+2)^2}$ et on vérifie que sur *I*, $|f'(x)|<0{,}72$.

En prenant $u_0=2$, on est donc certain d'obtenir la solution de l'équation $f(x)=x$.



Équation $f(x)=0$

Intérêt :

On peut approcher une solution d'une équation $f(x)=0$ en se ramenant à une équation au point fixe.

Principe :

- On détermine un intervalle $[a;b]$ tel que l'équation $f(x)=0$ admette une solution unique, notée α, dans $[a;b]$.
- On introduit une fonction g définie sur $[a;b]$ telle que l'équation au point fixe $g(x)=x$ ait une seule solution sur $[a;b]$: α.
  Par exemple, il suffit de prendre $g(x)=x+k\times f(x)$ avec k réel, ou encore $g(x)=x+k(x)\times f(x)$. On a bien, alors, $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x$.
- On construit la suite (u_n) : $u_{n+1}=g(u_n)$ pour obtenir une approximation de α.

Choix de *g* :

Nous cherchons une fonction g en fonction des critères suivants :

- Il existe un intervalle *I* contenant α avec $|g'|\leqslant k<1$ sur *I*.
- La rapidité de convergence de la suite (u_n) est d'autant meilleurs que le majorant *k* de $|g'|$ sur *I* est voisin de 0.

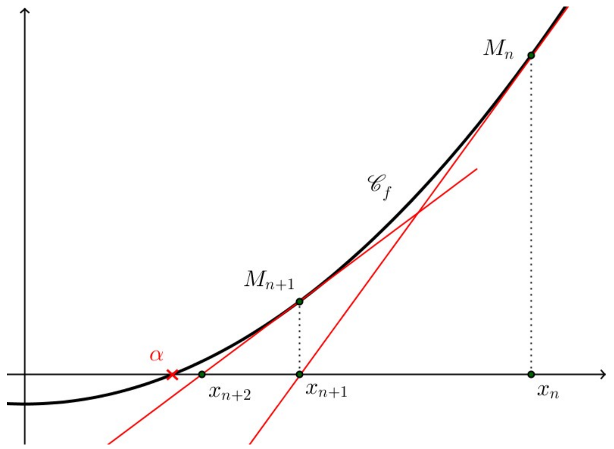
Algorithme de Newton

Cet algorithme permet de construire une suite (u_n) convergeant rapidement vers α en choisissant :

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Il tire sa performance du fait que $g'(\alpha)=0$ (sous des hypothèses convenables) ce qui assure l'existence d'un intervalle *I* sur lequel $|g'|\leqslant k<1$ (sous réserve que g' soit continu).
Cet algorithme est également appelé « méthode des tangentes ».

Sur la figure ci-dessous, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $\mathrm{M}_n(x_n;f(x_n))$ coupe l'axe $(\mathrm{O}x)$ au point $x_{n+1}=g(x_n)$



Soit x_n une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x)=0$.
On pose $x_{n+1}=x_n+h$ et x_{n+1} étant plus proche de α $f(x_{n+1})=f(x_n+h)$ est encore plus négligeable que $f(x_n)$.

Or pour *h* petit, $f'(x_n)\simeq\dfrac{f(x_n+h)-f(x_n)}{h}$.

Donc en supposant $f(x_n+h)=0$, on a bien $h\simeq-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ et donc $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ soit $x_{n+1}=g(x_n)$.

Remarque :

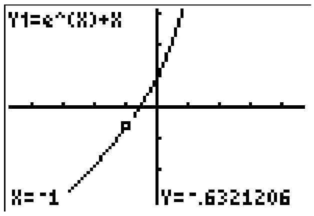
La convergence est quadratique, ce qui signifie intuitivement que le nombre de chiffres corrects est approximativement doublé à chaque étape.

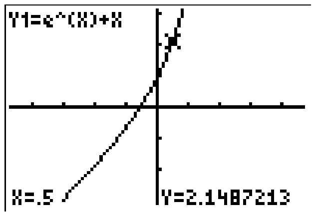
Calculatrice :

On sait déjà que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[a;b]$.

```
PROGRAM:NEWTON
:Prompt A,B,E
:Y4(xfMax(Y4,X,A
,B))→K
:If K≥1
:Then
:Disp "PAS POSSI
BLE"
:Else
:0→N
:A→U
:While (B-A)*K^N
>E
:Y3(U)→U
:N+1→N
:End
:Disp "SOL ENVIR
ON",U
:End
```

```
 Graph1 Graph2 Graph3
\Y1=e^(X)+X
\Y2=nbreDérivé(Y
1,X,X)
\Y3=X-Y1/Y2
\Y4=abs(nbreDéri
vé(Y3,X,X))
\Y5=
```






```
prgmNEWTON
A=?-0.6
B=?-0.5
E=?0.0001
SOL ENVIRON
      -.5671432836
              Done
```

```
prgmNEWTON
A=?-1
B=?0
E=?10^(-9)
SOL ENVIRON
      -.5671432904
              Done
```

```
prgmNEWTON
A=?-5
B=?6
E=?0.0001
PAS POSSIBLE
              Done
```

Méthode de Héron

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-2$.

En utilisant l'algorithme de Newton, on crée une suite (u_n) convergeant vers $\sqrt{2}$.

- On ramène l'étude sur l'intervalle $\mathrm{I}=]1;2[$.

  En effet la solution de $f(x)=0$, $\sqrt{2}$ appartient bien à I et on vérifie facilement que l'équation possède une unique solution appartenant à I.

  Sur I, on a donc $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ avec $f(x)=x^2-2$ et $f'(x)=2x$ donc $g(x)=x-\dfrac{x^2-2}{2x}=\dfrac{x^2+2}{2x}$ soit $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$.

- $g'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x^2}$ donc sur I, $|g'(x)|<1$ ce qui assure la convergence de la suite :

$$u_{n+1}=g(u_n) \text{ avec } u_0\in\mathrm{I}.$$

- Étude de $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$ avec $u_0\in\mathrm{I}=]1;2[$.

  On montre que (u_n) est une suite décroissante, puis (par récurrence) que :

  - pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(u_n-\sqrt{2})^2\leqslant\dfrac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})^2$ et enfin,
  - pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $u_n-\sqrt{2}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}(u_0-\sqrt{2})$ et en fait pour l'algorithme :

$$u_n-\sqrt{2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \text{ avec } u_0=2$$

```
PROGRAM:HERON
:Prompt E
:0→N
:2→U
:While 0.5^(2^N)
≥E
:0.5(U+2/U)→U
:N+1→N
:End
:Disp U,N
```

```
prgmHERON
E=?0.001
       1.414213562
                 4
              Done
```

```
prgmHERON
E=?10^(-8)
       1.414213562
                 5
              Done
```

```
prgmHERON
E=?10^(-12)
       1.414213562
                 6
              Done
√(2)
       1.414213562
```

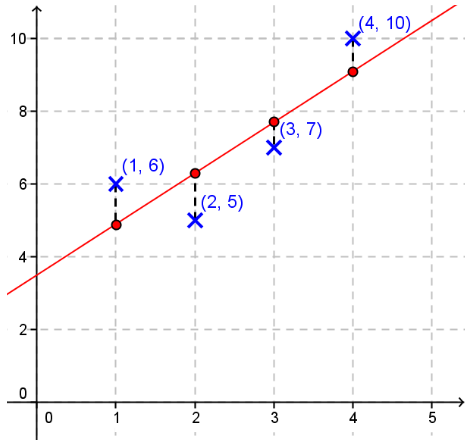
Annexe 2 : Méthode des moindres carrés

Régression linéaire

De nombreuses quantités physiques sont reliées par des conditions du type $y = ax + b$. Par des expériences, on arrive à connaître des couples $(x_i ; y_i)$ et on cherche à déterminer *a* et *b*. En général, en raison des erreurs de mesure, les points $(x_i ; y_i)$ ne sont pas alignés, mais sont « presque » sur une même droite. Il faut alors choisir *a* et *b* de sorte que la droite soit la « meilleure » possible.
Pour cela, il faut choisir une mesure de l'écart entre une droite $y = ax + b$ et le nuage de points expérimentaux $(x_i ; y_i)$. On choisit, en général, pour une abscisse donnée, le carré de la différence entre le point théorique et le point expérimental, c'est-à-dire $(y_i - (ax_i + b))^2$.

L'écart total, pour *n* points, est donc :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$



Effectuer une **régression linéaire**, c'est trouver la droite qui minimise cet écart : on parle de **droite des moindres carrés**.

On interprète cet écart comme une **fonction à deux variables** *a* et *b*.

Donc $f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$ et on cherche à obtenir le **minimum** de cette fonction.
Le minimum de cette fonction à deux variables s'obtient en un point où les **dérivées partielles** s'annulent.

Donc on obtient *a* et *b* en résolvant le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ax_i - b\right) \times -x_i = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ax_i - b\right) \times -1 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues *a* et *b*.

$$\begin{cases} 2a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b - 2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2+b\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i+b\times n=\sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a\,n\sum_{i=1}^{n} x_i^2+b\,n\sum_{i=1}^{n} x_i=n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} x_i+b\,n\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} y_i\sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

Soit, par combinaison :

$$\begin{cases} a\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)=n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-\sum_{i=1}^{n} y_i\sum_{i=1}^{n} x_i \\ a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2+b\,n\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} y_i\sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} a=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-\sum_{i=1}^{n} y_i\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i+b\times n=\sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

et donc, en posant $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, on obtient :

$$\begin{cases} a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} \\ b=\overline{y}-a\,\overline{x} \end{cases}$$

On rappelle que la variance de la série X est $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$.

Définition :

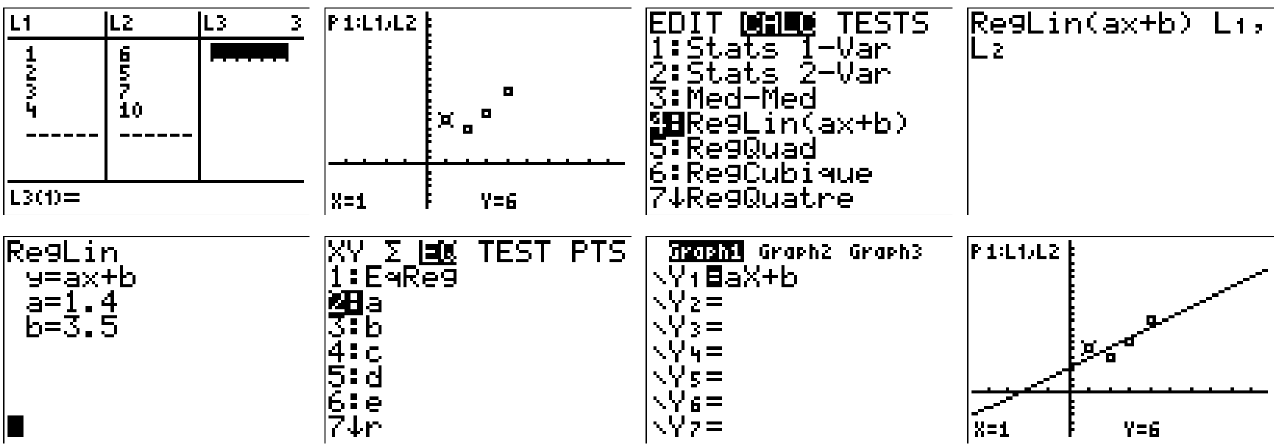
On nomme **covariance** de deux séries X et Y et on note $\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ la valeur :

$$\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

Intuitivement, la covariance est une mesure de la variation simultanée de deux variables aléatoires.

On a donc également : $\begin{cases} a=\dfrac{\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\mathrm{V}(X)} \\ b=\overline{y}-a\,\overline{x} \end{cases}$

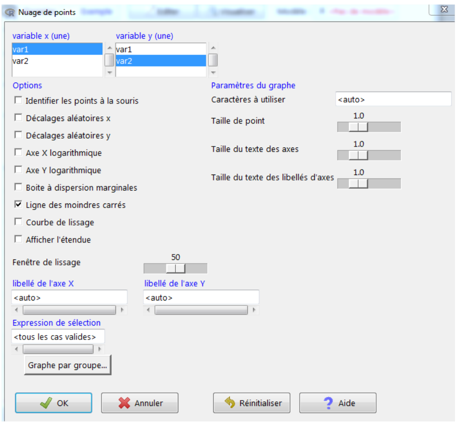
Calculatrice :

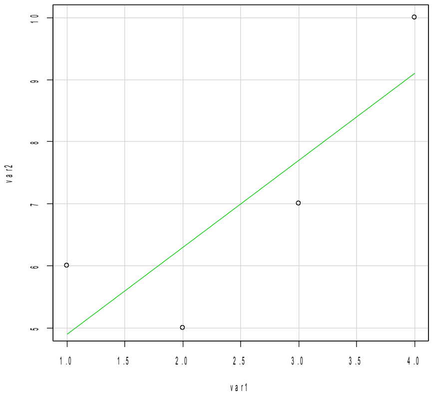


Logiciel R

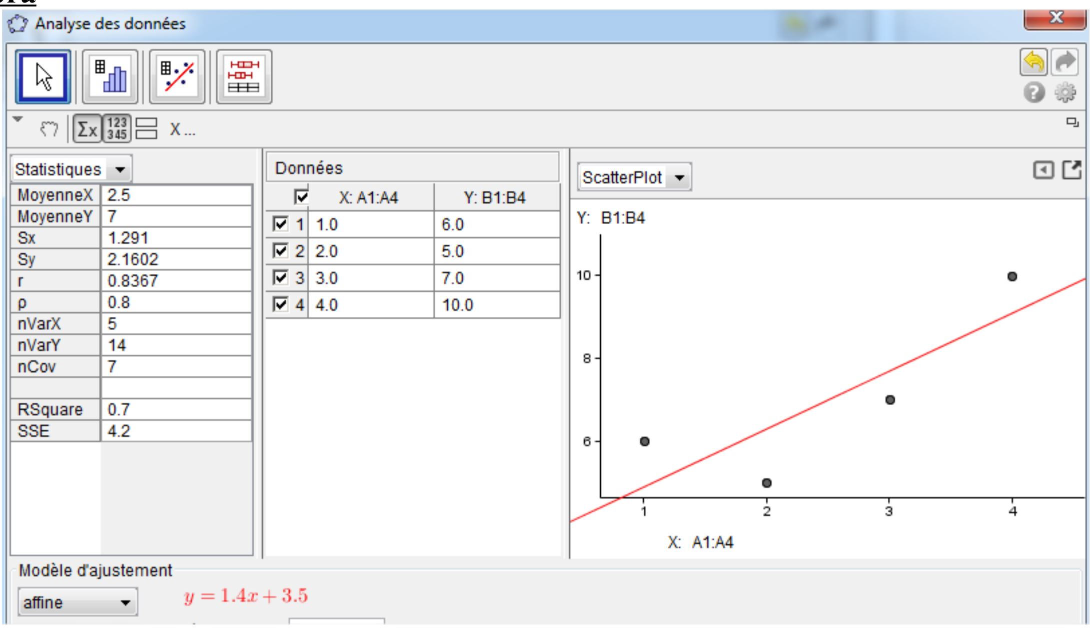

Editeur de données

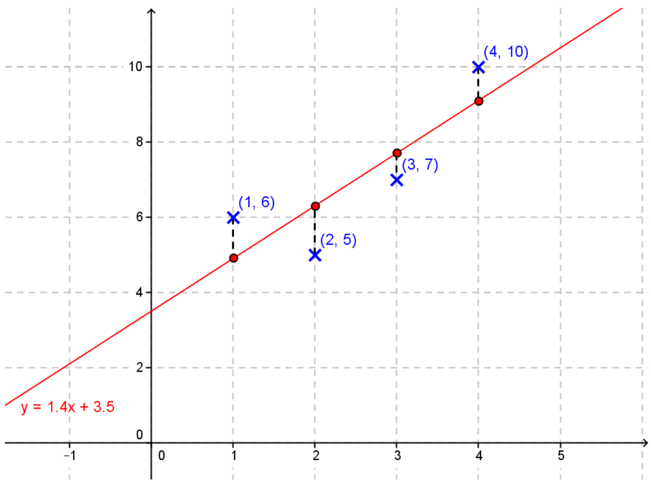
	var1	var2
1	1	6
2	2	5
3	3	7
4	4	10

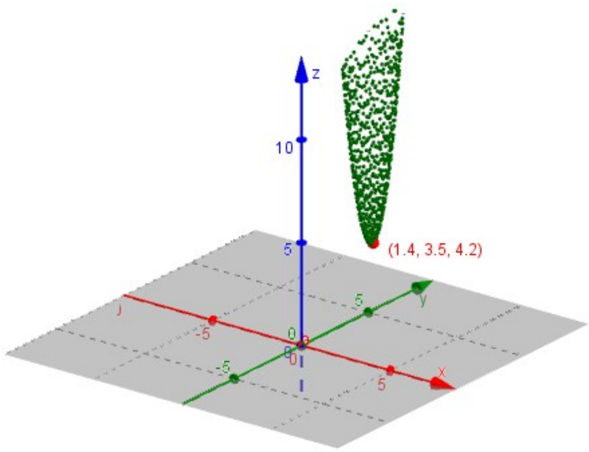




Geogebra







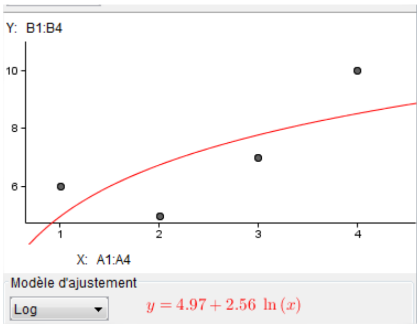
Méthode des moindres carrés

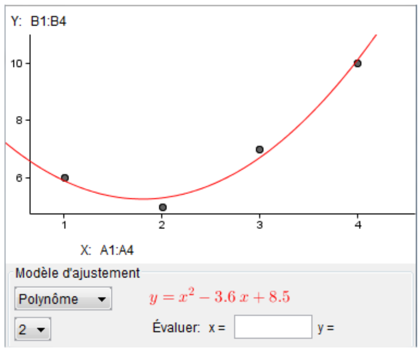
Toutes les quantités physiques ne sont pas linéaires. On peut parfois s'y ramener si l'évolution est exponentielle (étude d'une population) en prenant le logarithme, ou si l'évolution est logarithmique (étude de pH) en prenant l'exponentielle. Mais ce n'est pas toujours le cas.
Lorsque la dépendance entre y et x est régie par une fonction f, où f dépend de certains paramètres, la méthode des moindres carrés consiste à trouver les paramètres pour minimiser :

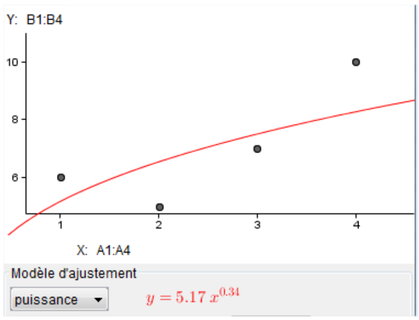
$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

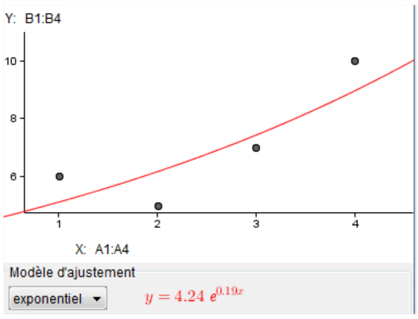
où les $(x_i ; y_i)$ sont les points expérimentaux.

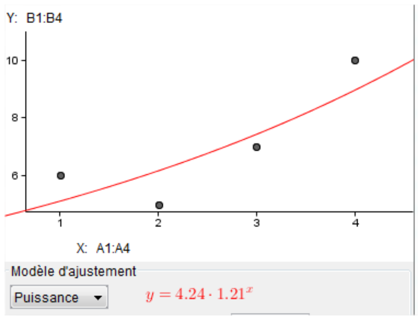
<u>Exemples :</u>

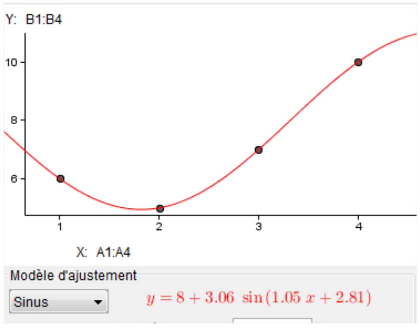












Mais aussi...