

# Modèle proie-prédateur de Volterra

Objectif: étudier l'évolution conjointe de deux espèces (les proies et les prédateurs) au cours du temps  $t$

$A(t)$ : nombre de proies à l'instant  $t$

$B(t)$ : nombre de prédateurs à l'instant  $t$

L'évolution d'une espèce influence sur l'évolution de l'autre

## Modélisation

On prend en compte les paramètres suivants:

Pour les proies:

- $a$ : taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs
- $b$ : taux de mortalité des proies due aux prédateurs

Pour les prédateurs

- $d$ : taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies
- $c$ : taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées

$t$  est le temps

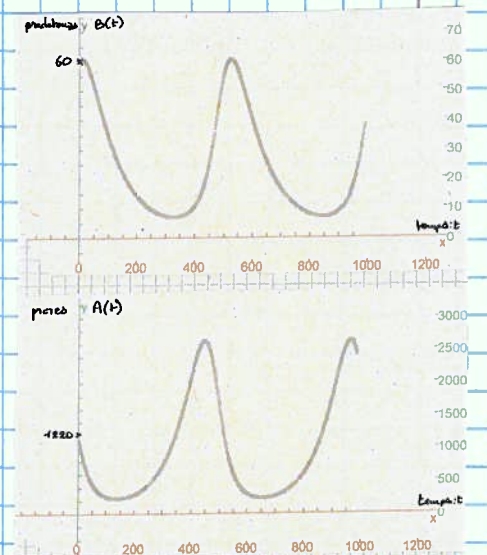
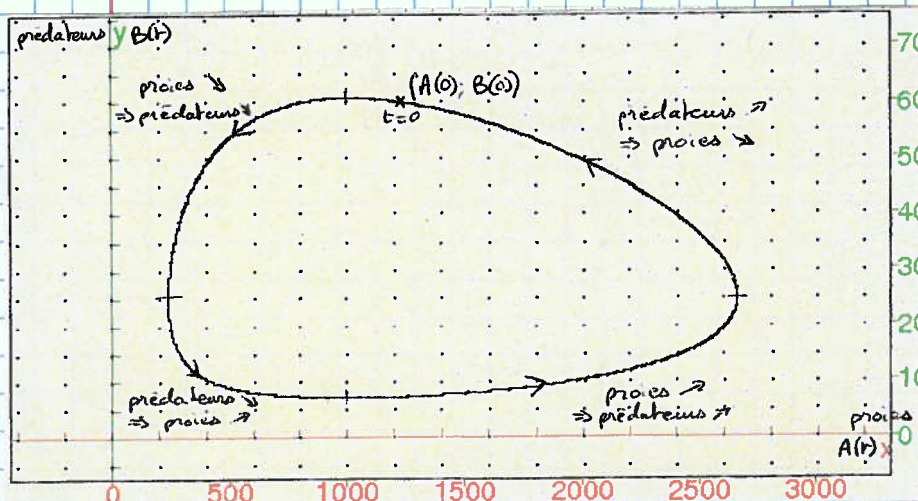
$A(t)$  et  $B(t)$  représentent la variation des populations au cours du temps

On obtient donc le système d'équations différentielles.

$$\begin{cases} A'(t) = a \times A(t) - b \times B(t) \times A(t) = A(t)(a - bB(t)) \\ B'(t) = -d \times B(t) + c \times A(t) \times B(t) = B(t)(-d + cA(t)) \end{cases}$$

## Recherche de solutions (à partir du logiciel Xcas)

pour  $a = 0,05$  ;  $b = 0,002$  ;  $c = 0,00004$  ;  $d = 0,04$  et  $\begin{cases} A(0) = 1220 \\ B(0) = 60 \end{cases}$



Problème: on n'obtient pas d'expressions explicites des fonctions  $A(t)$  et  $B(t)$ .

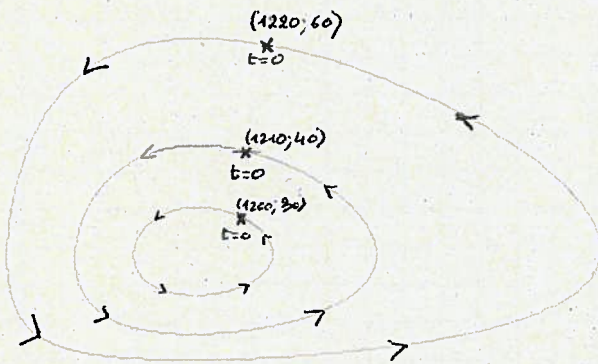


## \* Conditions initiales :

Les cycles observés sont particulièrement sensibles aux valeurs

prédateurs  $y$   $B(t)$

de  $A(0)$  et  $B(0)$



L'amplitude des cycles diminue et la courbe devient plus "symétrique" lorsque les valeurs de  $A(0)$  et  $B(0)$  se rapprochent de 1000 et 25.

## Discretisation :

L'étude des fonctions  $A(t)$  et  $B(t)$  nous invite à se ramener à l'étude de suites  $A_n$  et  $B_n$  avec  $n$  correspondant au nombre d'intervalle de temps. On se ramène ainsi à l'étude du système :

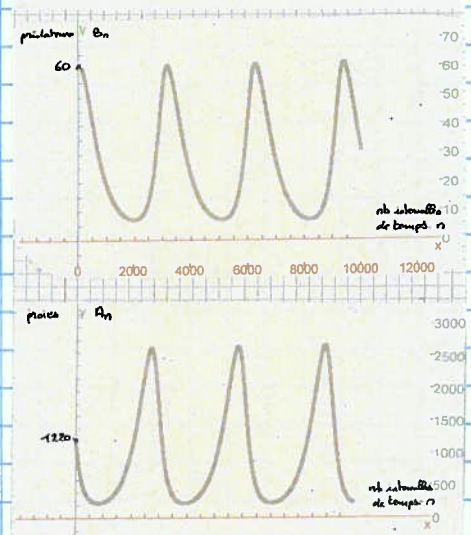
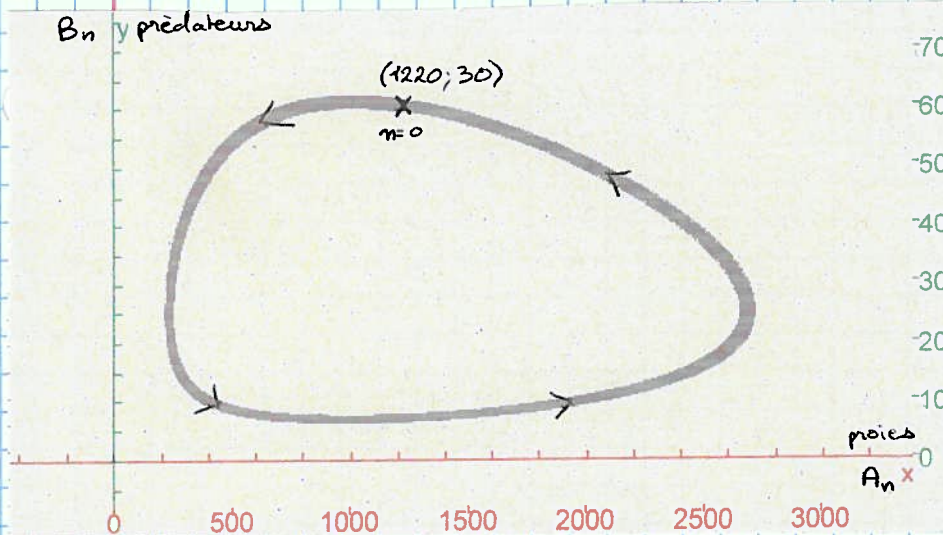
$$\begin{cases} \frac{A_{n+1} - A_n}{(n+1) - n} = A_{n+1} - A_n = A_n(a - bB_n) \\ B_{n+1} - B_n = B_n(-d + cA_n) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} A_{n+1} = (1+a)A_n - bA_nB_n \\ B_{n+1} = (1-d)B_n + cA_nB_n \end{cases}$$

L'étude de ces suites récurrentes peut se faire à l'aide d'un tableur ou d'un programme (ici Xcas)

pour  $a = 0,05$  ;  $b = 0,002$  ;  $c = 0,00004$  ;  $d = 0,04$

et  $\begin{cases} A_0 = 1220 \\ B_0 = 60 \end{cases}$

$B_n$  y prédateurs



Problème : Les calculs sont très lourds et il n'est pas possible d'utiliser de formes explicites pour les suites

On souhaite donc se ramener à l'étude de suites plus simples. Les observations faites sur l'influence des conditions initiales nous invitent à se "translater" autour du point d'équilibre.



## Point d'équilibre

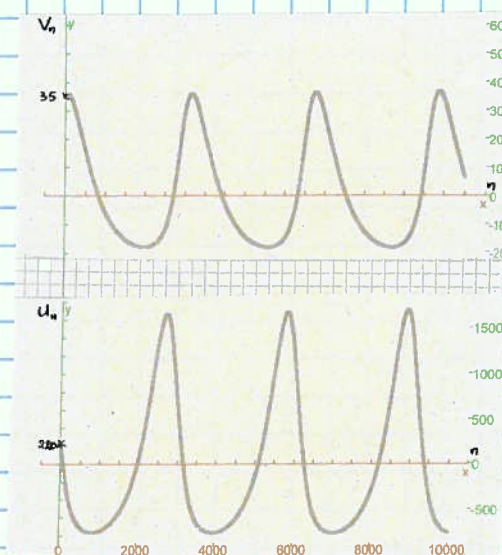
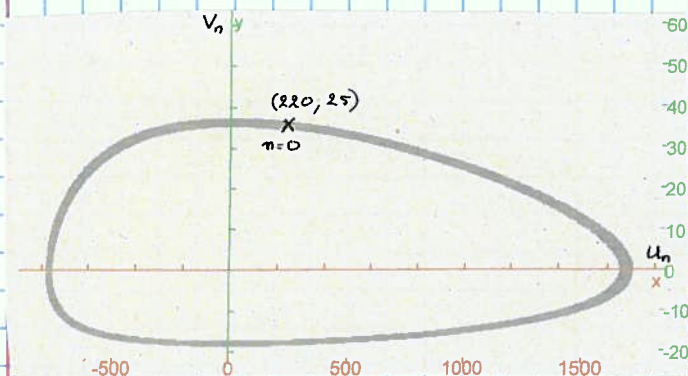
Il s'agit du cas de figure dans lequel les populations restent constantes (leurs évolutions sont alors nulles)

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n \\ B_{n+1} = B_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A_n(a - bB_n) \\ 0 = B_n(-d + cA_n) \end{cases} \quad \text{Le système admet deux solutions } (A_n; B_n) : (0; 0) \text{ et } \left(\frac{d}{c}; \frac{a}{b}\right)$$

Ainsi si les conditions initiales sont  $A_0 = \frac{d}{c} = 1000$  et  $B_0 = \frac{a}{b} = 25$ , les populations des proies et des prédateurs restent constantes au cours du temps

Idee : en se situant "autour" du point d'équilibre, on pourra considérer que le produit  $A_n \times B_n$ , qui ne permet pas d'obtenir une forme explicite, sera négligeable

$$\text{On pose donc } \begin{cases} U_n = A_n - \frac{d}{c} \\ V_n = B_n - \frac{a}{b} \end{cases}$$



On obtient ainsi de nouvelles suites à étudier :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \frac{bd}{c} V_n + b U_n V_n \\ V_{n+1} = \frac{ac}{b} U_n + V_n + c U_n V_n \end{cases}$$

## Linéarisation

Aux alentours du point d'équilibre (plus les populations initiales seront proches du point d'équilibre (ici  $A_0 = 1000$  et  $B_0 = 25$ ), plus l'approximation sera pertinente) on néglige donc le produit  $U_n \times V_n$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \frac{bd}{c} V_n \\ V_{n+1} = \frac{ac}{b} U_n + V_n \end{cases} \quad \text{soit } \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

et par une récurrence immédiate  $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$  avec  $M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix}$

On obtient ainsi aisément les termes de  $U_n$  et  $V_n$  et on se ramène à  $A_n$  et  $B_n$  à partir de  $\begin{cases} A_n = U_n + \frac{d}{c} \\ B_n = V_n + \frac{a}{b} \end{cases}$

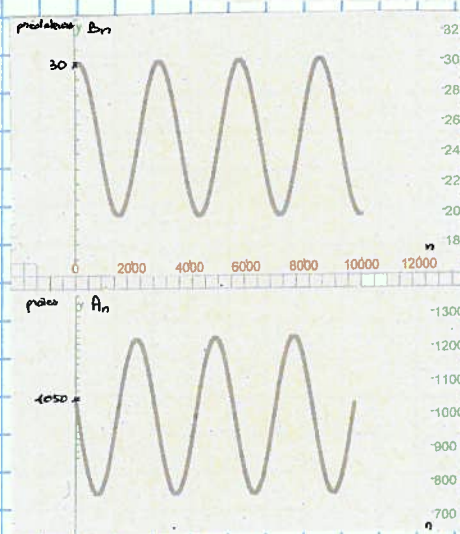
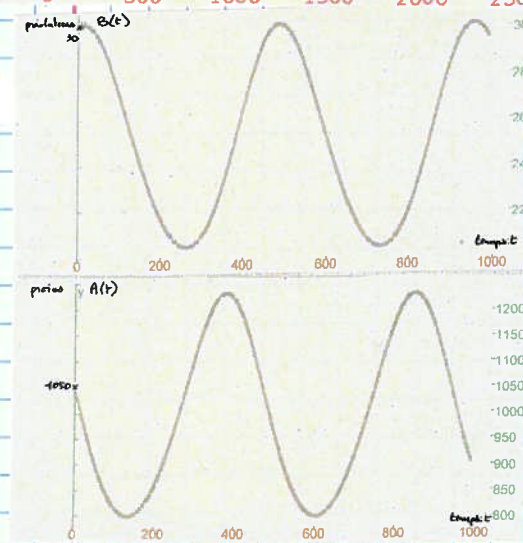
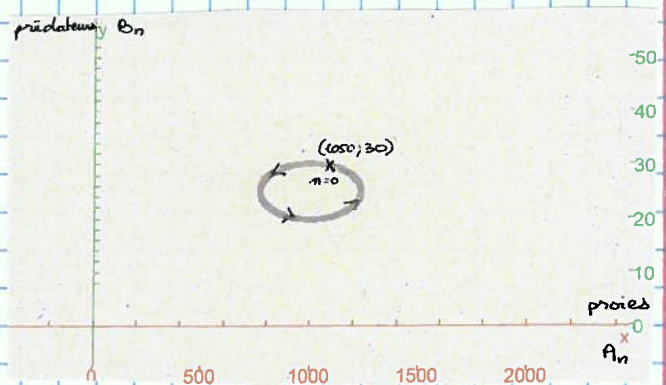
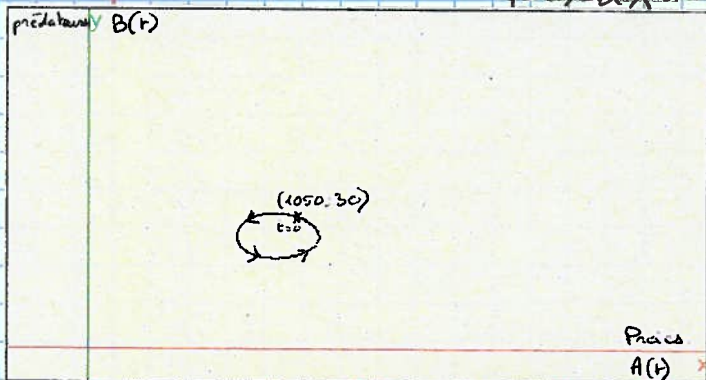


\* Pour des valeurs initiales proches du point d'équilibre, l'approximation est satisfaisante

pour  $A(0) = A_0 = 1050$  et  $B(0) = B_0 = 30$

Résolution du système  $\begin{cases} \dot{A}(t) = A(t)(a - bB(t)) \\ \dot{B}(t) = B(t)(-d + cA(t)) \end{cases}$

Etude des suites  $A_n$  et  $B_n$  à partir de la linéarisation



\* Pour des conditions initiales trop éloignées du point d'équilibre l'approximation n'est plus intéressante

pour  $A_0 = 1220$  et  $B_0 = 60$

