Chapitre 6

Les nombres complexes

I. L'ensemble $\mathbb{C}$

1) Ensemble de nombres complexes

Théorème (admis) :
Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, et appelé **ensemble des nombres complexes**, possédant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
- On définit dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication des réels.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $\mathrm{i}^2=-1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de **manière unique** $z=x+\mathrm{i}\,y$ avec x et y réels.

Exemples :

- Soit $z=3+5\mathrm{i}$ et $z'=2-3\mathrm{i}$
  $z+z'=3+5\mathrm{i}+2-3\mathrm{i}=3+2+\mathrm{i}(5-3)=5+2\mathrm{i}$
  $zz'=(3+5\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})=6-9\mathrm{i}+10\mathrm{i}-15i^2=6+\mathrm{i}+15=21+\mathrm{i}$
- $\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}=-\mathrm{i}$; $\mathrm{i}^4=(\mathrm{i}^2)^2=1$

2) Vocabulaire

Définitions :
Si un nombre complexe s'écrit $z=x+\mathrm{i}\,y$ avec x et y réels, alors :

- $x+\mathrm{i}\,y$ s'appelle la **forme algébrique** de z.
- x est la **partie réelle** de z. On note $x=\mathrm{Re}(z)$.
- y est la **partie imaginaire** de z. On note $y=\mathrm{Im}(z)$.
- si $y=0$ alors $z=x\in\mathbb{R}$. On retrouve le fait que $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
- si $x=0$ alors $z=\mathrm{i}\,y$ est dit **imaginaire pur**. On note $\mathrm{i}\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Exemple :
Pour $z=2-\mathrm{i}\sqrt{3}$, on a $\mathrm{Re}(z)=2$ et $\mathrm{Im}(z)=-\sqrt{3}$.

Remarques :

- On note que si $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z)\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(z)\in\mathbb{R}$.
- Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :
$$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$$
- En particulier $z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$ et $\mathrm{Im}(z)=0$

Exemple :
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $3z+2-4i=3$

$$3z+2-4i=3 \Leftrightarrow 3z=1+4i \Leftrightarrow z=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i.$$

3) Conjugué d'un nombre complexe

Définition :
Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$.
On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z}=x-iy$.
Ainsi :

$$\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\bar{z}) \text{ et } \mathrm{Im}(z)=-\mathrm{Im}(\bar{z})$$

Exemples :

$$\overline{-2+3i}=-2-3i \quad ; \quad \bar{5}=5 \quad ; \quad \overline{2i}=-2i$$

La notion de conjugué permet de caractériser les nombres réels et les nombres imaginaires purs parmi les nombres complexes.

Propriété :
Soit z un nombre complexe :

$$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z}=z \quad \text{et} \quad z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z}=-z$$

Démonstration :
On note $x+iy$ la forme algébrique de z :
- $\bar{z}=z \Leftrightarrow x-iy=x+iy \Leftrightarrow -2iy=0 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z=x \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$
- $\bar{z}=-z \Leftrightarrow x-iy=-x-iy \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow z=iy \Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

Remarques :

$$\bar{\bar{z}}=z \quad ; \quad z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z) \quad ; \quad z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$$

II. Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$

1) Opérations sur les nombres complexes

Soient deux nombres complexes z et z' de formes algébriques respectives $x+iy$ et $x'+iy'$.

Définition :
L'**opposé** d'un nombre complexe z est le complexe noté $-z$ défini par :

$$-z=-x-iy$$

Propriétés :
Somme de complexes : $z+z'=(x+x')+i(y+y')$.
Produit de complexes : $zz'=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$.

Remarque :

Les identités remarquables valables dans ℝ le sont également dans ℂ.
De plus, en voici une nouvelle :

$$(x+\mathrm{i}\,y)(x-\mathrm{i}\,y)=x^2-(\mathrm{i}\,y)^2=x^2+y^2$$

Propriété :

Tout nombre complexe non nul z de forme algébrique $x+\mathrm{i}\,y$ admet un **inverse** noté $\frac{1}{z}$ de forme algébrique :

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{x^2+y^2}=\frac{x-\mathrm{i}\,y}{x^2+y^2}$$

Démonstration :

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $x+\mathrm{i}\,y$. On cherche un nombre complexe z' de forme algébrique $x'+\mathrm{i}\,y'$ vérifiant $zz'=1$.

Si $(x+\mathrm{i}\,y)(x'+\mathrm{i}\,y')=1$ alors $(xx'-yy')+\mathrm{i}(xy'+x'y)=1$ d'où $\begin{cases} xx'-yy'=1 \\ xy'+x'y=0 \end{cases}$.

On multiplie la première égalité par $(-y)$ et la deuxième par x :

$\begin{cases} -xx'y+y^2y'=-y \\ x^2y'+x'xy=0 \end{cases}$ par addition, on obtient : $\begin{cases} (x^2+y^2)y'=-y \\ x'y+xy'=0 \end{cases}$

Comme $z\neq0$ alors $x^2+y^2\neq0$ donc :

- si $y\neq0$: $y'=-\frac{y}{x^2+y^2}$. Par suite $x'y=\frac{xy}{x^2+y^2}$ d'où $x'=\frac{x}{x^2+y^2}$.
- si $y=0$: le système devient $\begin{cases} xx'=1 \\ xy'=0 \end{cases}$ et $x\neq0$ donc $\begin{cases} x'=\frac{1}{x} \\ y'=0 \end{cases}$.

Dans tous les cas $\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$.

Réciproquement $(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}\right)=1$.

Exemples :

- L'inverse du complexe $1+\mathrm{i}$ est $\frac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}$.
- L'inverse de i est le complexe : $\frac{-\mathrm{i}}{0^2+1^2}=-\mathrm{i}$

Définition :

On définit le **quotient** $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$, avec $z'\neq0$.

Exemple :

La forme algébrique d'un quotient est obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\frac{1-2\mathrm{i}-\mathrm{i}-2}{1+4}=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$$

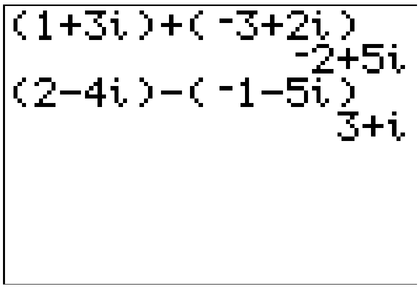
Propriété :

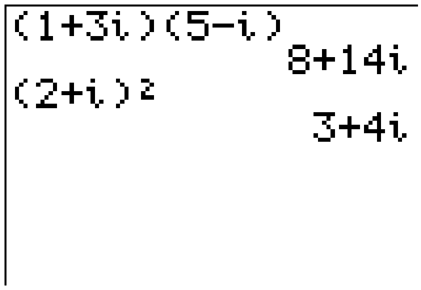
$$zz'=0 \Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z'=0$$

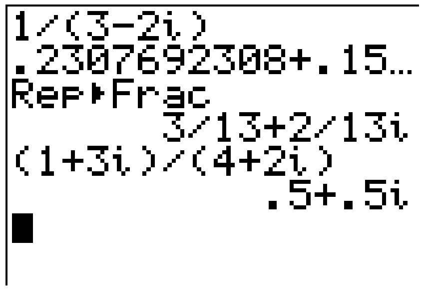
Démonstration :

- Soit z et z' deux nombres complexes.
  Si $z=0$ alors $0\times z'=0$. Si $z'=0$ alors $z\times 0=0$. Donc si $z=0$ ou $z'=0$ alors $zz'=0$.
- Réciproquement si $zz'=0$ démontrons par l'absurde que $z=0$ ou $z'=0$.
  Supposons que $z\neq 0$ et $z'\neq 0$ alors z' admet un inverse $\frac{1}{z'}$ dans $\mathbb{C}$.
  Comme $zz'=0$ on obtient $(zz')\times\frac{1}{z'}=0\times\frac{1}{z'}$ soit $z\times\left(z'\times\frac{1}{z'}\right)=0$ d'où $z=0$.
  D'où la contradiction, par suite soit $z=0$ soit $z'=0$.

Calculatrice







2) Opérations sur les conjugués

Propriétés :

Pour tout nombre complexe z et z' et pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'} \quad ; \quad \overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'} \quad ; \quad \overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$$

De plus si $z'\neq 0$ alors :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

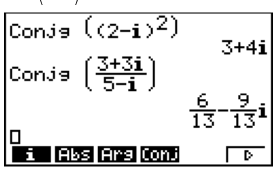
Démonstrations :

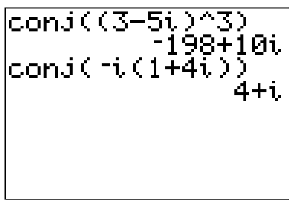
Soit z et z' deux nombres complexes de forme algébrique $x+\mathrm{i}y$ et $x'+\mathrm{i}y'$.

- Comme $z+z'=(x+x')+\mathrm{i}(y+y')$ alors $\overline{z+z'}=(x+x')-\mathrm{i}(y+y')$ donc $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$.
- Comme $zz'=(xx'-yy')+\mathrm{i}(xy'+x'y)$ alors $\overline{zz'}=(xx'-yy')-\mathrm{i}(xy'+x'y)$.
  De plus $\overline{z}\times\overline{z'}=(x+\mathrm{i}y)(x'-\mathrm{i}y')=xx'-\mathrm{i}xy'-\mathrm{i}x'y-yy'=(xx'-yy')-\mathrm{i}(xy'+x'y)$.
  Donc $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.
- Si $z\neq 0$ alors $\overline{z}\neq 0$. Comme $\frac{1}{z}\times z=1$ on a $\overline{\frac{1}{z}\times z}=1$.
  Comme $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$ on obtient $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}\times\overline{z}=1$ d'où $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$

Exemples :

$$\overline{(2-\mathrm{i})^2}=(2+\mathrm{i})^2 \quad ; \quad \overline{\left(\frac{2+3\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}\right)}=\frac{2-3\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}$$





III. Équation du second degré dans ℂ

1) Racine carrée dans ℂ d'un nombre réel

Définition :
a désigne un nombre réel.
Les solutions dans ℂ de l'équation $z^2=a$ sont appelées **racines carrées** de *a* dans ℂ.

Propriété :
Tout nombre réel non nul *a* admet deux racines carrées dans ℂ.
- Si $a>0$, ce sont les nombres $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a<0$, ce sont les nombres $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$.

Exemples :
- Les racines carrées de 2 dans ℂ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
- Les racines carrées de -3 dans ℂ sont $\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2) Équation du second degré à coefficients réels

Propriété :
On considère l'équation $az^2+bz+c=0$ dont les coefficients *a*, *b*, *c* sont des **nombres réels**, avec $a\neq 0$.
On note Δ le réel b^2-4ac appelé le discriminant.
- Si $\Delta>0$, alors l'équation admet deux solutions **réelles** :
$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta=0$, alors l'équation admet une solution **réelle** : $-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta<0$, alors l'équation admet deux solutions **complexes conjuguées** :
$$\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration :

Pour tout nombre complexe z, $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ avec $\Delta=b^2-4ac$.

Résoudre l'équation $az^2+bz+c=0$ revient à résoudre $\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$ car $a\neq 0$.

- Si $\Delta=0$, $\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ équivaut à $z=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, $z+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ soit $z=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, $z+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ soit $z=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z=\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Remarque :
Si l'on note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (avec éventuellement $z_1=z_2$), alors pour tout nombre complexe z, $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

Exemple :

$z^2+z+1=0$ a pour discriminant $\Delta=-3$, donc les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation sont les nombres complexes conjugués : $\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculatrice :

```
PROGRAM:TRINOME
:Prompt A,B,C
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA :",
D
:If D>0
:Then
:Disp "2 SOLS RE
ELLES",(-B-√(D))
/(2*A)▸Frac,"ET"
,(-B+√(D))/(2*A)
▸Frac
:Else
:If D=0
:Then
:Disp "1 SOL REE
LLE",-B/(2*A)▸Fr
ac
:Else
:Disp "2 SOLS CO
MPLEXES",(-B+i*√
(-D))/(2*A),"ET"
,(-B-i√(-D))/(2*
A)
:End
```

```
prgmTRINOME
A=?1
B=?1
C=?1
DELTA :
                  -3
2 SOLS COMPLEXES
-.5+.8660254038i
ET
-.5-.8660254038i
                Done
```

```
prgmTRINOME
A=?1
B=?2
C=?2
DELTA :
                  -4
2 SOLS COMPLEXES
                -1+i
ET
                -1-i
                Done
```

```
prgmTRINOME
A=?1
B=?2
C=?1
DELTA :
                   0
1 SOL REELLE
                  -1
                Done
```

```
prgmTRINOME
A=?3
B=?-1
C=?-4
DELTA :
                  49
2 SOLS REELLES
                  -1
ET
                 4/3
                Done
```

```
======TRINOME ======
"A="?→A↵
"B="?→B↵
"C="?→C↵
"DELTA=":B²-4AC→D◢
↵
If D>0↵
Then "2 SOLS REELLES
:"↵
"X1=":(-B-√D)⌟(2A)◢
"X2=":(-B+√D)⌟(2A)◢
Else ↵
If D=0↵
Then "1 SOL REELLE :"
↵
"X=":-B⌟(2A)◢
↵
Else "2 SOLS COMPLEXE
S :"↵
"X1=":(-B+i√(-D))⌟(2A
)◢
"X2=":(-B-i√(-D))⌟(2A
)◢
IfEnd↵
IfEnd
TOP BTM SRC MENU A↔a CHAR
```

```
A=?
1
B=?
1
C=?
1
DELTA=
                  -3
2 SOLS COMPLEXES :
X1=
   -1⌟2+0.8660254038i
X2=
   -1⌟2-0.8660254038i
              - Disp -
```

```
A=?
1
B=?
2
C=?
1
DELTA=
                   0
1 SOL REELLE :
X=
                  -1
              - Disp -
```

```
A=?
1
B=?
2
C=?
2
DELTA=
                  -4
2 SOLS COMPLEXES :
X1=
                -1+i
X2=
                -1-i
              - Disp -
```

```
A=?
3
B=?
-1
C=?
-4
DELTA=
                  49
2 SOLS REELLES :
X1=
                  -1
X2=
                 4⌟3
              - Disp -
```

IV. Représentation géométrique

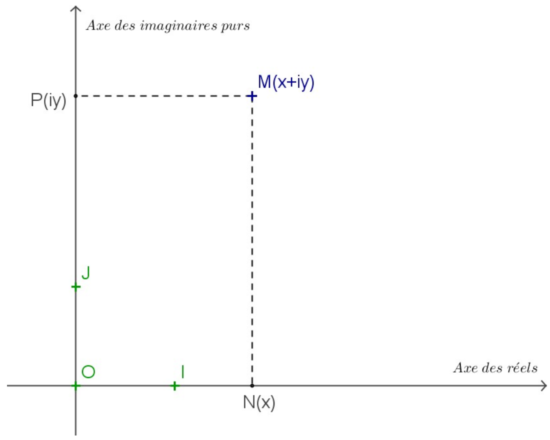
1) *Le plan complexe*

Définitions :

- Le **plan complexe** est le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{OI},\vec{OJ})$.
- À tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}\,y$ avec x et y nombres réels, on associe le point M de coordonnées $(x;y)$.
  On dit que M est le **point image** de z et que $\vec{OM}$ est le **vecteur image** de z.
- Tout point $M(x;y)$ est le point image d'un seul nombre complexe $z=x+\mathrm{i}\,y$.
  On dit que z est l'affixe du point M et du vecteur $\vec{OM}$.

Notation et vocabulaire :

- Pour indiquer que $z=x+\mathrm{i}\,y$ (avec $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$) est l'affixe d'un point M, on note $M(z)$.
- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé aussi **axe des réels**.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé aussi **axe des imaginaires purs**.

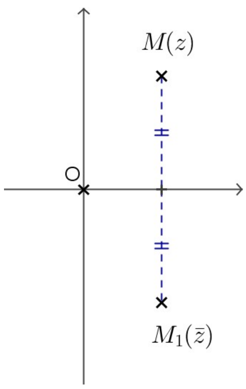


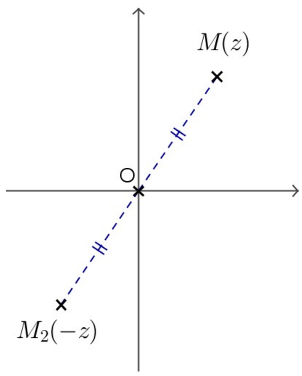
Exemples :

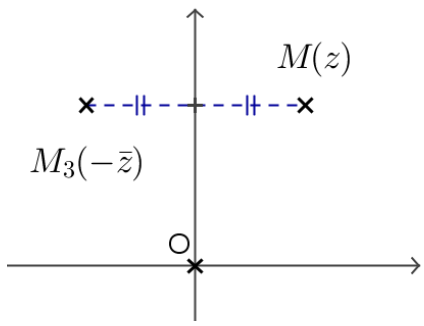
O, I et J ont pour affixes $z_O=0$, $z_I=1$ et $z_J=\mathrm{i}$.

Remarques :

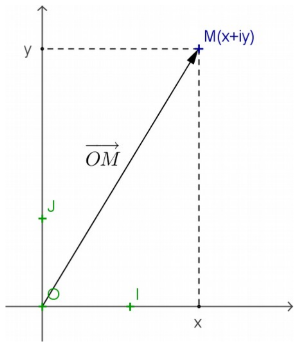
- « M appartient à l'axe des abscisses » équivaut à « $\mathrm{Im}(z)=0$ ».
- « M appartient à l'axe des ordonnées » équivaut à « $\mathrm{Re}(z)=0$ ».
- Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.
- Les points d'affixes z et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine.







2) Affixe d'un vecteur



Dans le plan complexe, $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$, donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $x + \mathrm{i}\,y$.

On dit que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour **affixe** $z_{\vec{u}} = x + \mathrm{i}\,y$.

Exemple :

$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour affixe $-1+\mathrm{i}$ notée $z_{\overrightarrow{IJ}}$.

Propriétés :

- Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs affixes sont égales.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes z et z', alors l'affixe du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est $z+z'$ et celle du vecteur $\lambda\vec{u}$ (λ nombre réel) est λz.

Propriétés :

Deux points A et B du plan complexe ont pour affixes respectives z_A et z_B.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- L'affixe du milieu I du segment [AB] est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstrations :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, l'affixe de $\overrightarrow{OB}$ est z_B et l'affixe de $\overrightarrow{OA}$ est z_A.
  Donc $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- I est le milieu du segment [AB], donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ soit $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
  Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{OI}$, donc $z_A + z_B = 2z_I$.

Exemple :

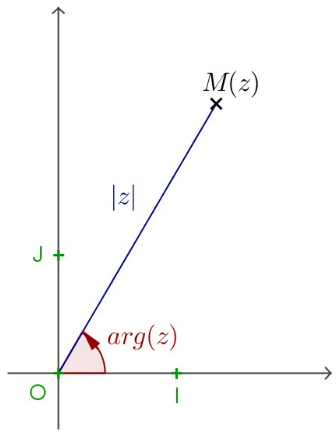
$A(1+\mathrm{i})$ et $B(-2+3\mathrm{i})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -2+3\mathrm{i} - (1+\mathrm{i}) = -3+2\mathrm{i}$.

Le milieu I de [AB] a pour affixe $z_I = \dfrac{1+\mathrm{i}-2+3\mathrm{i}}{2} = -\dfrac{1}{2} + 2\mathrm{i}$.

3) *Module et arguments d'un nombre complexe*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{OI},\vec{OJ})$.



Définition :
Soit z un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.

- Le **module** de z, noté $|z|$, est la distance OM : $|z|=OM$.
- Si z est non nul, on appelle **argument** de z, noté $arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{OI},\vec{OM})$:
$$arg(z)\equiv(\vec{OI},\vec{OM})[2\pi]$$

Exemples :

- $|i|=1$ et $arg(\mathrm{i})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $|-3|=3$ et $arg(-3)\equiv\pi[2\pi]$.
- $|1+i|=\sqrt{2}$ et $arg(1+\mathrm{i})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Remarques :

- 0 n'a pas d'argument.
- Le module d'un réel est égal à sa valeur absolue.
- Si $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels, alors $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.
- Si les points A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B, alors $AB=|z_B-z_A|$.

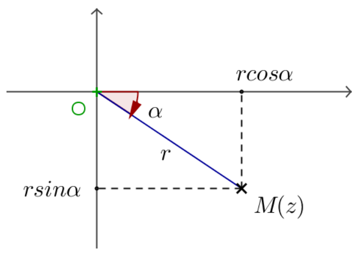
Propriétés :

- Pour tout nombre complexe z, $z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$.
- Pour tout nombre complexe z, $|-z|=|\bar{z}|=|z|$.
- Pour tout nombre complexe **non nul** z :
$$arg(-z)\equiv arg(z)+\pi[2\pi] \quad ; \quad arg(\bar{z})\equiv -arg(z)[2\pi]$$
- z est un réel si, et seulement si, $arg(z)\equiv 0[\pi]$
- z est un imaginaire pur si, et seulement si, $arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$.

V. Forme trigonométrique

1) *Définition*

Définition :
Soit z un nombre complexe non nul, on pose :
$$x=\mathrm{Re}(z) \text{ et } y=\mathrm{Im}(z) \quad ; \quad r=|z| \text{ et } \alpha\equiv arg(z)[2\pi]$$
On a alors $x=r\cos\alpha$ et $y=r\sin\alpha$.
On obtient alors l'écriture $z=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$ qui est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.



Remarque :
Si le nombre complexe non nul z s'écrit $x+\mathrm{i}\,y$ sous forme algébrique et $r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$ sous forme trigonométrique, alors :

- $x=r\cos\alpha$ et $y=r\sin\alpha$
- $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exemples :

- Soit $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$. On a $|z|=\sqrt{3+1}=2$. Alors $z=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ donc la forme trigonométrique de z est $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. Un argument de z est $\dfrac{\pi}{6}$.
- $z=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ n'est pas la forme trigonométrique de z car -3 est négatif.

2) Opérations sur les formes trigonométriques

Propriété :
Les complexes $z=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$ et $z'=r'(\cos\alpha'+\mathrm{i}\sin\alpha')$ avec $r>0$ et $r'>0$ sont égaux si, et seulement si, $\begin{cases} r=r' \\ \alpha=\alpha'+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Démonstration :
Supposons que z et z' soient égaux et non nuls alors $OM=OM'$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})\equiv(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'})[2\pi]$.
La réciproque est évidente.

Propriétés :
Si $z=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$ et $z'=r'(\cos\alpha'+\mathrm{i}\sin\alpha')$, alors on a :

- $zz'=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+\mathrm{i}\sin(\alpha+\alpha'))$
- $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}(\cos(-\alpha)+\mathrm{i}\sin(-\alpha))$ lorsque $z\neq 0$.
- $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha')+\mathrm{i}\sin(\alpha-\alpha'))$ lorsque $z'\neq 0$.

Démonstrations :
$zz'=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha'+\mathrm{i}\sin\alpha')$.

- $zz'=rr'(\cos\alpha\cos\alpha'+\mathrm{i}\cos\alpha\sin\alpha'+\mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha\sin\alpha')$.
  Comme $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ et $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$, on obtient :
  $$zz'=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+\mathrm{i}\sin(\alpha+\alpha'))$$
  Comme $r>0$ et $r'>0$, on a $rr'>0$ donc $rr'(\cos(\alpha+\alpha')+\mathrm{i}\sin(\alpha+\alpha'))$ est la forme trigonométrique de zz'.
  D'où $\begin{cases} |zz'|=rr'=|z|\times|z'| \\ arg(zz')\equiv\alpha+\alpha'\equiv arg\,z+arg\,z'[2\pi]\end{cases}$.

- Pour $z \neq 0$, $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{r^2}=\frac{r(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{r^2}=\frac{1}{r}(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))$.

  Comme $\frac{1}{r}>0$, on a $\begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{r}=\frac{1}{|z|} \\ arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\alpha' \equiv -arg\, z\,[2\pi] \end{cases}$.

Conséquences :
Quels que soient les nombres z et z' non nuls, $n \in \mathbb{N}$ on a :

Opération	Produit	Puissance
Module	$\lvert z \times z'\rvert=\lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$; $n \in \mathbb{N}$
Argument	$arg(z \times z') \equiv arg\, z + arg\, z'[2\pi]$	$arg(z^n) \equiv n\, arg(z)[2\pi]$

Opération	Inverse	Quotient
Module	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z\rvert}$; $z \neq 0$	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$; $z' \neq 0$
Argument	$arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg\, z[2\pi]$	$arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg\, z - arg\, z'[2\pi]$

Propriété (inégalité triangulaire) :
Quels que soient les nombres z et z' non nuls, on a :

$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$$

Propriétés :

- $|z_B - z_A| = AB$ et $arg(z_B - z_A) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$
- $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA}$ et $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})$

Démonstrations :

- Il existe un unique point M dans le plan complexe tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
  Donc $z_M = z_B - z_A$ en notant z_M l'affixe du point M .
  Par suite $|z_B - z_A| = |z_M| = OM = AB$ et $arg(z_B - z_A) = arg(z_M) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$.
- $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA}$ et

  $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = arg(z_B - z_C) - arg(z_A - z_C) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{CB}) - (\vec{u}\,;\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}\,;\vec{u}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})$

Conséquences :

- Les points *A*, *B* et *C* sont alignés si, et seulement si, $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv 0[\pi]$.
- Les droites (BC) et (AC) sont perpendiculaires si, et seulement si, $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

- Caractérisation du cercle Γ de centre $\Omega(w)$ et de rayon R :
$$M(z)\in\Gamma \Leftrightarrow \Omega M=R \Leftrightarrow |z-w|=R$$
- Caractérisation de la médiatrice Δ de $[AB]$:
$$M(z)\in\Delta \Leftrightarrow AM=BM \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B|$$

VI. Forme exponentielle

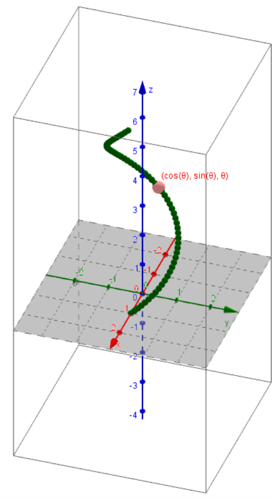
1) *La fonction* $\theta \longmapsto \cos(\theta)+i\sin(\theta)$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

$$f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$$
$$\theta\longmapsto \cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

- Pour tous nombres réels θ et θ', $f(\theta+\theta')=f(\theta)f(\theta')$.
En effet,
$f(\theta+\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$
$f(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta)$
et
$f(\theta)f(\theta')=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')$
$f(\theta)f(\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta)$
Donc $f(\theta)f(\theta')=f(\theta+\theta')$ et la fonction vérifie une relation fonctionnelle analogue à celle de la fonction exponentielle.
- Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On admet qu'alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(\theta)=\cos'(\theta)+i\sin'(\theta)$
Ainsi, pour tout nombre réel θ, $f'(\theta)=-\sin(\theta)+i\cos(\theta)$ et donc $f'(\theta)=i(i\sin(\theta)+\cos(\theta))=i f(\theta)$.
Cette propriété est à rapprocher du fait que si $g(x)=e^{kx}$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=kg(x)$.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$\theta\longmapsto(\cos\theta;\sin\theta)$



On obtient des points M de $\mathbb{R}^3$ avec $M(\cos\theta;\sin\theta;\theta)$

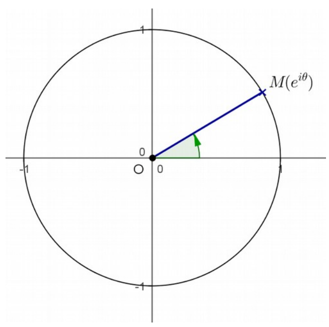
Définition :

Pour tout nombre réel θ, $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

Ainsi, $e^{i\theta}$ est **le** nombre complexe de **module 1** dont un **argument** est **θ**.
En d'autres termes, le cercle trigonométrique de centre l'origine O du repère est l'ensemble des points d'affixes $e^{i\theta}$ où θ décrit $\mathbb{R}$.

Exemples :

- $e^{i0}=e^{i2\pi}=1$
- $e^{i\pi}=-1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$



2) Formes exponentielles

Tout nombre complexe $z\neq 0$ admet une forme trigonométrique $z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.
On peut donc écrire $z=|z|e^{i\theta}$.

Définition :
Une forme exponentielle d'un nombre complexe $z\neq 0$ dont un argument est θ, est l'écriture $z=|z|e^{i\theta}$.

Propriétés :
Pour tous nombres réels θ et θ', pour tout nombre entier naturel *n*,

- $|e^{i\theta}|=1$ et $arg(e^{i\theta})\equiv\theta[2\pi]$
- $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$
- $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$ (formule de Moivre)
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\overline{e^{i\theta}}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$
- $e^{i\theta}=e^{i\theta'}$ si, et seulement si, $\theta\equiv\theta'[2\pi]$

Exemple :
Le nombre $z=-2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ n'est pas écrit sous forme exponentielle.
Pour l'écrire sous forme exponentielle, on peut utiliser le fait que $e^{\mathrm{i}\pi}=-1$.
Alors $z=2e^{\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=2e^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

Propriétés :
Pour tout réel θ et pour tout entier relatif *n* :

- Formule de Moivre : $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$.
- Formule d'Euler : $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\mathrm{i}}$.

Démonstrations :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\begin{cases}|e^{\mathrm{i}\theta}|=1\\ \arg(e^{\mathrm{i}\theta})\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$ alors $\begin{cases}|(e^{\mathrm{i}\theta})^n|=|(e^{\mathrm{i}\theta})|^n=1\\ \arg((e^{\mathrm{i}\theta})^n)\equiv n\arg(e^{\mathrm{i}\theta})\equiv n\theta[2\pi]\end{cases}$

  On peut écrire $(e^{i\theta})^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$. Par suite, $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$.

  Pour tout $n\in\mathbb{Z}^-$, on pose $n'=-n$ alors $n'\in\mathbb{N}$. Comme $e^{in\theta}=e^{-in'\theta}=\dfrac{1}{e^{in'\theta}}$, on a :

  $$\begin{cases}\left|\dfrac{1}{e^{\mathrm{i}n'\theta}}\right|=\dfrac{1}{|e^{\mathrm{i}n'\theta}|}=1\\ \arg\left(\dfrac{1}{e^{\mathrm{i}n'\theta}}\right)\equiv-\arg(e^{\mathrm{i}n'\theta})\equiv-n'\arg(e^{\mathrm{i}\theta})\equiv-n'\theta\equiv n\theta[2\pi]\end{cases}$$

  Donc pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$.
- Pour tout réel θ, on a $\begin{cases}e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\\ e^{-\mathrm{i}\theta}=\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)=\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)\end{cases}$,

  Par somme, $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$ soit $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.

  Par différence, $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2\mathrm{i}\sin\theta$ soit $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\mathrm{i}}$

Conséquences

<u>Formules d'addition :</u>
Pour tous réels a et b, on a :

- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$
- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

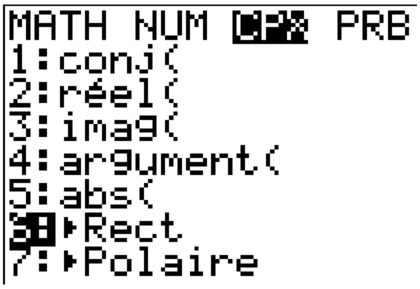
Démonstration :
Comme $e^{ia}\times e^{ib}=e^{i(a+b)}$, en passant à la forme algébrique, on obtient :
$(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)=\cos(a+b)+i\sin(a+b)$, en développant :
$(\cos a\cos b-\sin a\sin b)+i(\cos a\sin b+\cos b\sin a)=\cos(a+b)+i\sin(a+b)$.

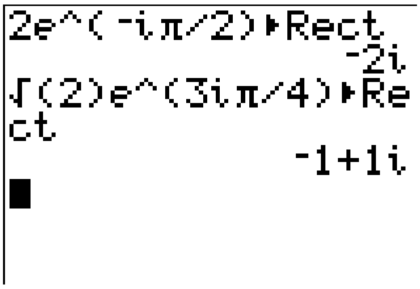
<u>Formule de duplication :</u>
Pour tout réel a, on a :

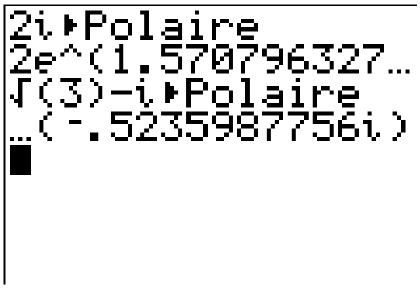
- $\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a=\cos^2 a-\sin^2 a$
- $\sin 2a=2\sin a\cos a$

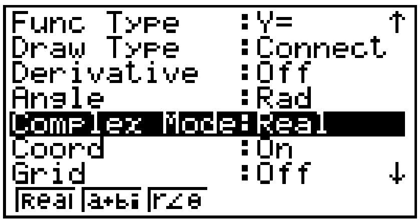
Démonstration :
Comme $(e^{ia})^2=e^{2ia}$, en passant à la forme algébrique, on obtient :
$(\cos a+i\sin a)^2=\cos(2a)+i\sin(2a)$, en développant :
$\cos^2 a+2i\cos a\sin a-\sin^2 a=\cos(2a)+i\sin(2a)$.

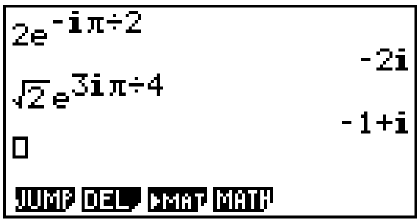
<u>Calculatrice :</u>

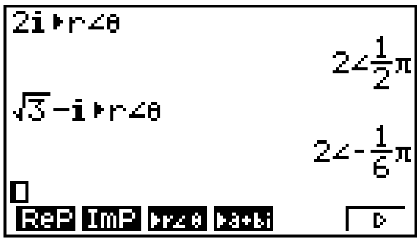






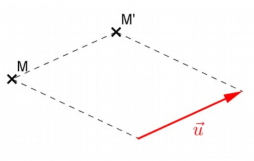
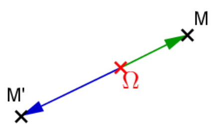
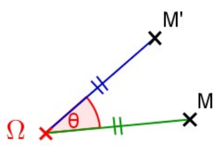






Annexe 1 : Transformations

Soit F une transformation du plan dans le plan qui, à tout point M associe le point M'.
On lui associe une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à un complexe z, affixe du point M, associe le complexe z', affixe du point M'.
$z'=f(z)$ est l'écriture complexe de la transformation F .

	Transformation et éléments caractéristiques	Définition géométrique	Écriture complexe associée
	T est la translation de vecteur $\vec{u}$	$\mathrm{T}(\mathrm{M})=\mathrm{M}'$ équivaut à : $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}=\vec{u}$	$\vec{u}$ est un vecteur d'affixe b : $z'=z+b$
	H est l'homothétie de contre Ω et de rapport k non nul	$\mathrm{H}(\mathrm{M})=\mathrm{M}'$ équivaut à : $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'}=k\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$	Ω est un point d'affixe ω : $z'-\omega=k(z-\omega)$
	R est la rotation de centre Ω et d'angle θ	Pour $\mathrm{M}\neq\Omega$, $\mathrm{R}(\mathrm{M})=\mathrm{M}'$ équivaut à : $\begin{cases}\Omega\mathrm{M}'=\Omega\mathrm{M}\\(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}};\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'})\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$	Ω est un point d'affixe ω : $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$

Annexe 2 : Équations polynomiales

Interprétation graphique

On considère la fonction f :

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto az^2+bz+c$$

Et on cherche les valeurs de z tel que $az^2+bz+c=0$

On utilise la forme algébrique de z ($z=x+iy$) et à partir de $az^2+bz+c=(a(x^2-y^2)+bx+c)+\mathrm{i}(2axy+by)$.

On peut donc considérer que f est la fonction :

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$(x;y) \longmapsto (ax^2-ay^2+bx+c;2axy+by)$$

En utilisant le fait que $az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(az^2+bz+c)=0$ et $\mathrm{Im}(az^2+bz+c)=0$

On se ramène au problème suivant :

On considère les fonctions g et h

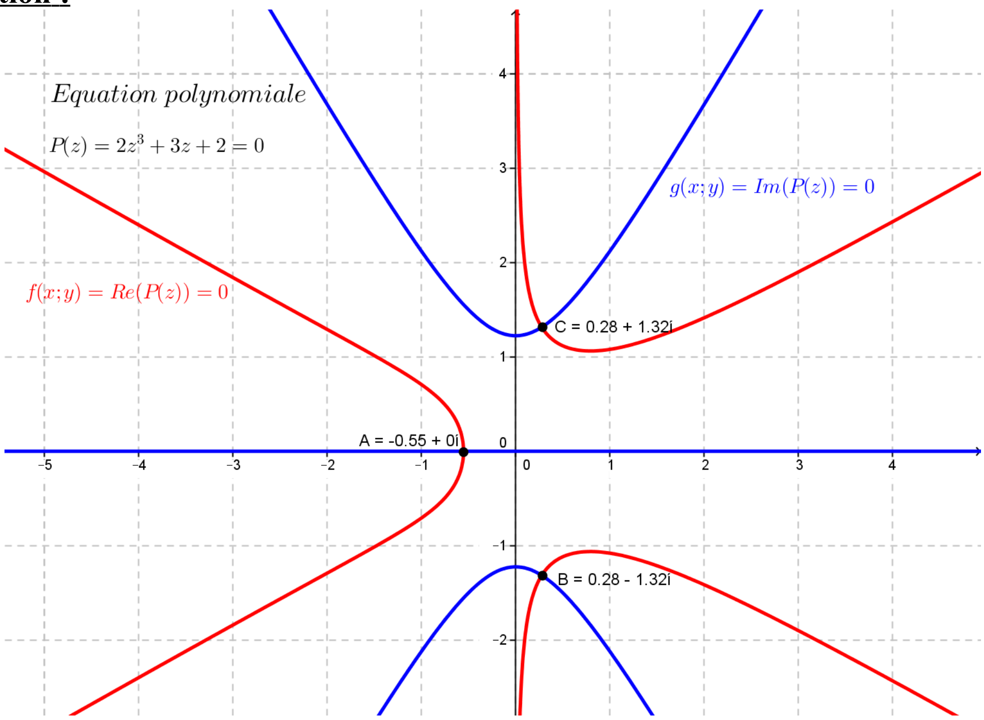
$$g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x;y) \longmapsto ax^2-ay^2+bx+c$$

$$h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x;y) \longmapsto 2axy+by$$

Soit $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de $ax^2-ay^2+bx+c=0$ et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de $2axy+by=0$.

On s'intéresse finalement à l'intersection des 2 courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

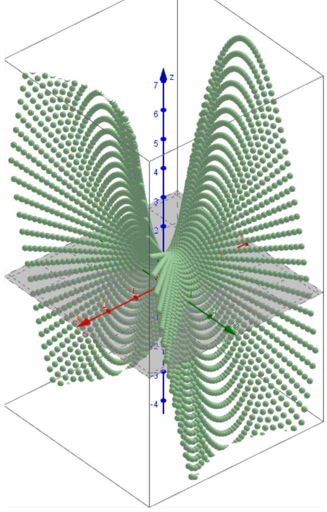
Généralisation :



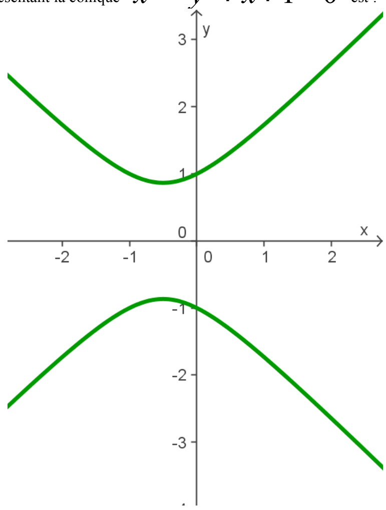
Exemples :

- $z^2+z+1=0$

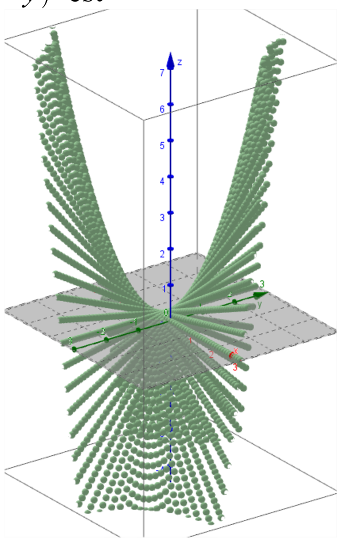
La surface représentant les points $(x\,;y\,;x^2-y^2+x+1)$ est :



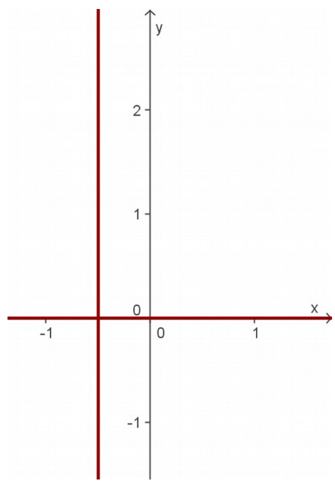
La courbe $\mathscr{C}_1$ représentant la conique $x^2-y^2+x+1=0$ est :



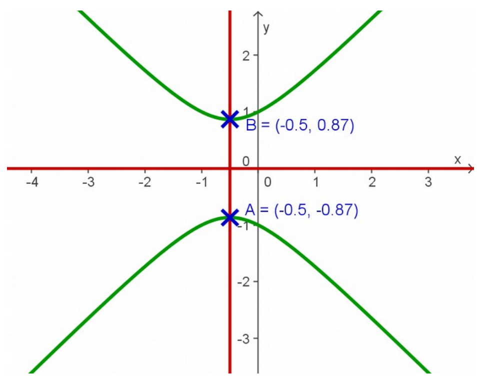
La surface représentant les points $(x\,;y\,;2xy+y)$ est



La courbe $\mathscr{C}_2$ représentant la conique $2xy+y=0$ est :



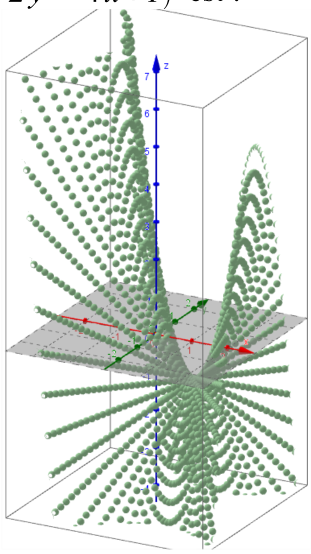
Donc les solutions de l'équation correspondent aux affixes des points d'intersections de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$:



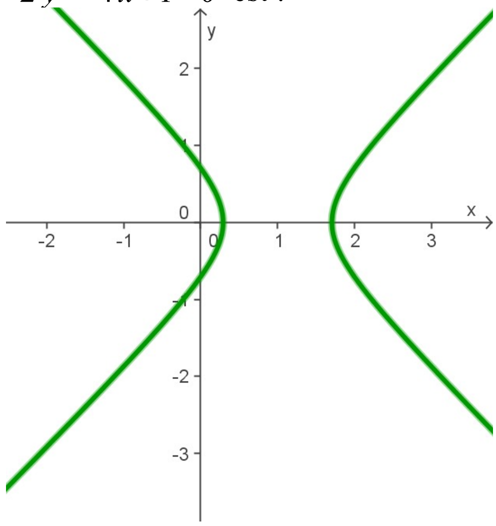
On a donc $z_1=\dfrac{-1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $2z^2-4z+1=0$

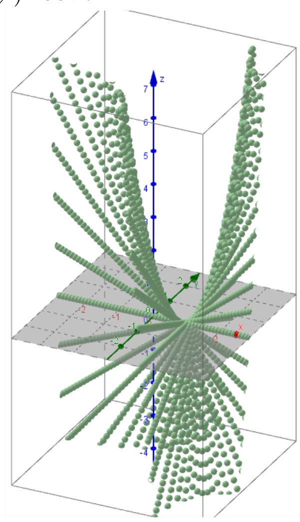
La surface représentant les points $(x\,;y\,;2x^2-2y^2-4x+1)$ est :



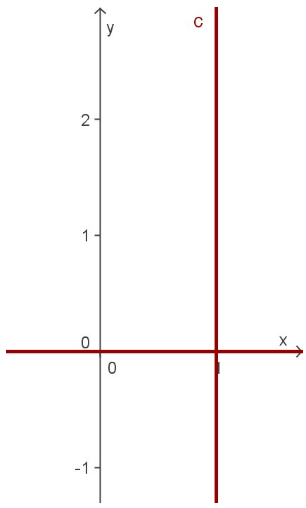
La courbe $\mathscr{C}_1$ représentant la conique $2x^2-2y^2-4x+1=0$ est :



La surface représentant les points $(x\,;y\,;4xy-4y)$ est :

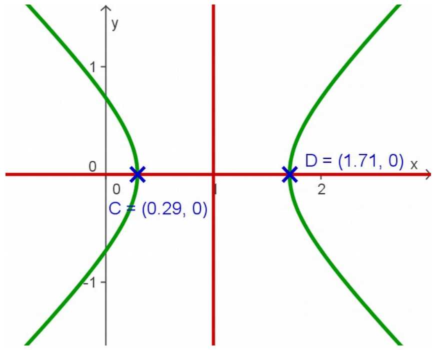


La courbe $\mathscr{C}_2$ représentant la conique $4xy-4y=0$ est :



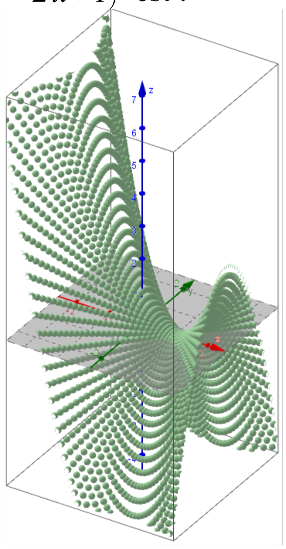
Donc les solutions de l'équation correspondent aux affixes des points d'intersections de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$:

On a donc $z_1=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

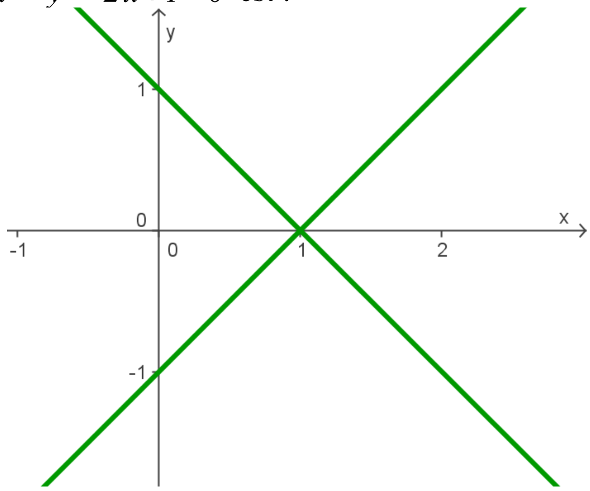


- $z^2 - 2z + 1 = 0$

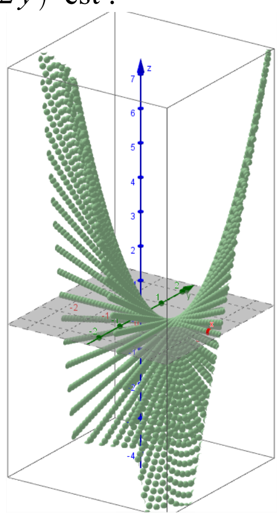
La surface représentant les points $(x\,;y\,;x^2 - y^2 - 2x + 1)$ est :



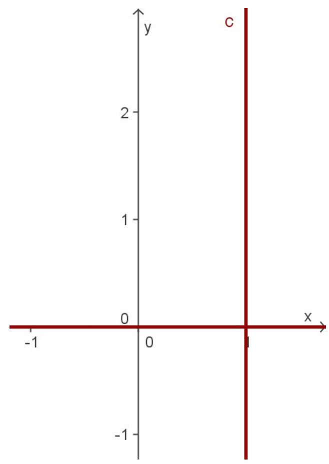
La courbe $\mathscr{C}_1$ représentant la conique $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ est :



La surface représentant les points $(x\,;y\,;2xy - 2y)$ est :



La courbe $\mathscr{C}_2$ représentant la conique $2xy - 2y = 0$ est :



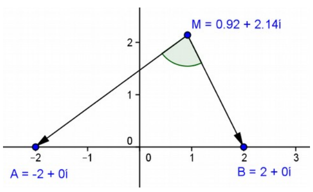
Annexe 3 : Lieux géométriques

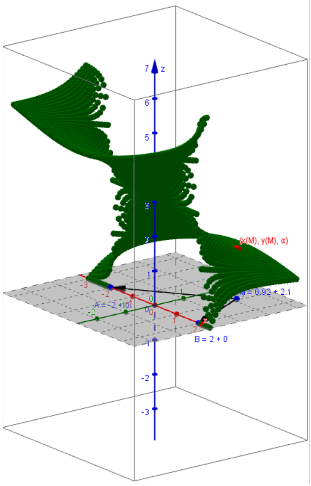
- $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=k$

Soit A et B, 2 points de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $M(x;y)$ un point de $\mathbb{R}^2$ (ou du plan).

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$(x;y)\longmapsto(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$$

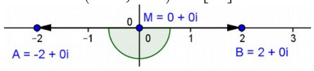
On obtient des points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x;y;(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}))$

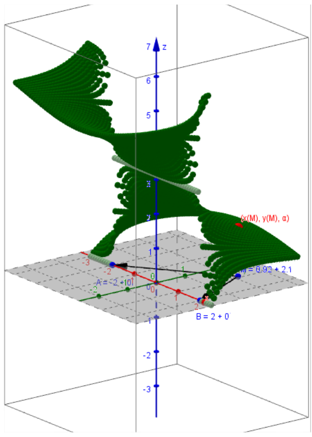




On vérifie que les points A, M et B sont alignés pour :

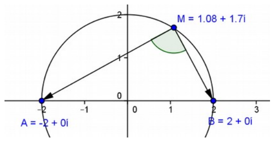
$$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})\equiv 0[\pi]$$

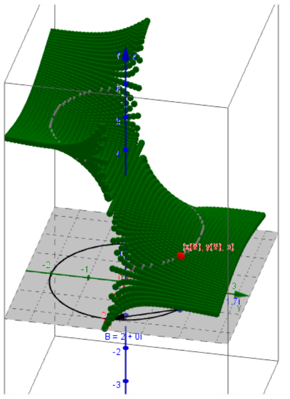




On vérifie que (MA) et (MB) sont perpendiculaires pour :

$$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$$



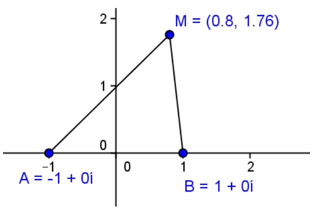


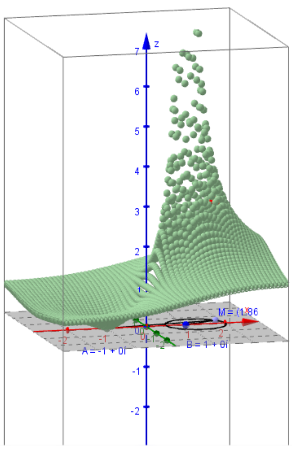
- $\dfrac{MA}{MB}=k$

Soit A et B, 2 points de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $M(x;y)$ un point de $\mathbb{R}^2$ (ou du plan).

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$(x;y)\longmapsto\frac{MA}{MB}$$

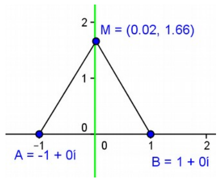
On obtient des points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $\left(x;y;\dfrac{MA}{MB}\right)$

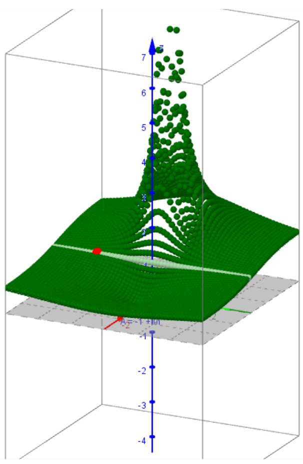




On vérifie que $M\in\Delta$ (Δ médiatrice de [AB]) pour :

$$\frac{MA}{MB}=1$$





On vérifie que pour $k\neq1$, $M\in\mathscr{C}$