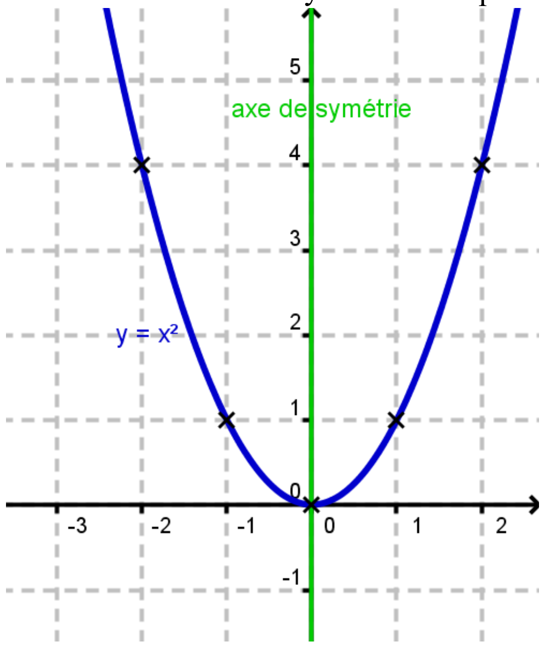
Chapitre 3
Généralités sur les fonctions

I. Fonctions usuelles

1) Fonction carré

Définition :
La **fonction carré** est définie sur ℝ par $f(x)=x^2$

Représentation graphique :
Sa courbe représentative est la **parabole** de sommet l'origine du repère.
Comme $(-x)^2=x^2$, l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la parabole.



Sens de variation :
La fonction carré est décroissante sur]–∞; 0] et croissante sur [0 ;+∞[.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Conséquences :

- Deux nombres positifs et leurs carrés sont dans le même ordre.
  Si $0\leqslant a<b$ alors $0\leqslant a^2<b^2$
- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont dans l'ordre inverse.
- L'équation $x^2=a$ avec $a>0$ possède deux solutions.

2) *Fonction inverse*

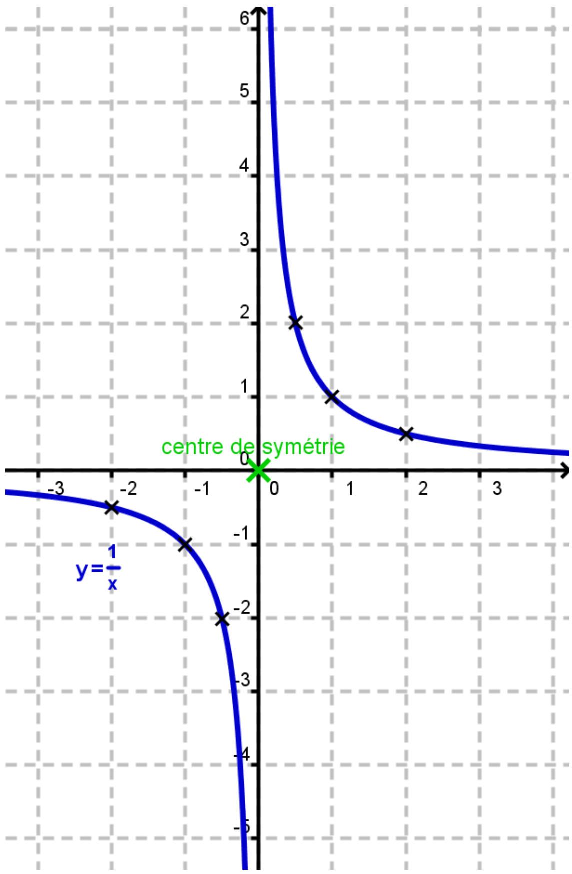
Définition :

La **fonction inverse** est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Représentation graphique :

Sa courbe représentative est l'**hyperbole** d'asymptotes les axes du repère.

Comme $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$, l'origine du repère est centre de symétrie de l'hyperbole.



Sens de variation :

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ 0	

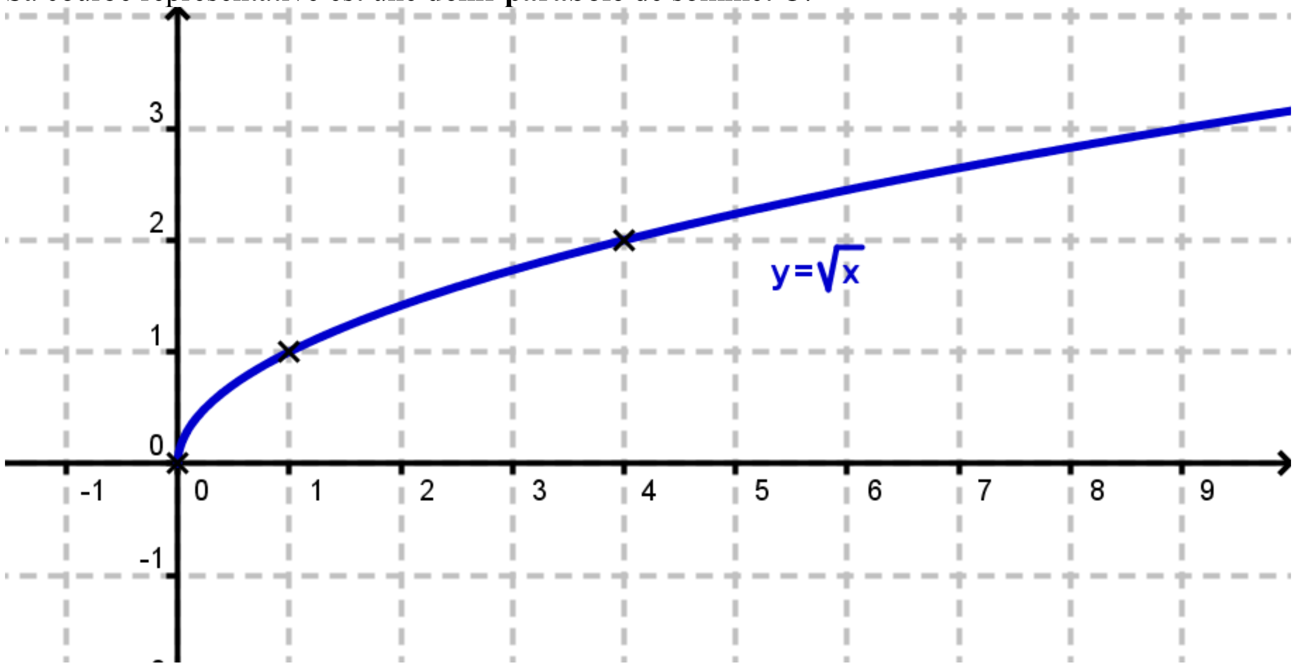
Remarques :

- On note $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ sous la forme $\mathbb{R}^*$: c'est la réunion de deux intervalles : $]-\infty;\,0[\cup]0\,;+\infty[$.
  0 est valeur interdite
- La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$: $-3<2$ et $-\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

3) *Fonction racine carrée*

Définition :
La **fonction racine carrée** est définie sur [0 ;+∞[par $f(x)=\sqrt{(x)}$.

Représentation graphique :
Sa courbe représentative est une **demi-parabole** de sommet O.



Sens de variation :
La fonction racine carrée est croissante sur [0 ;+∞[.

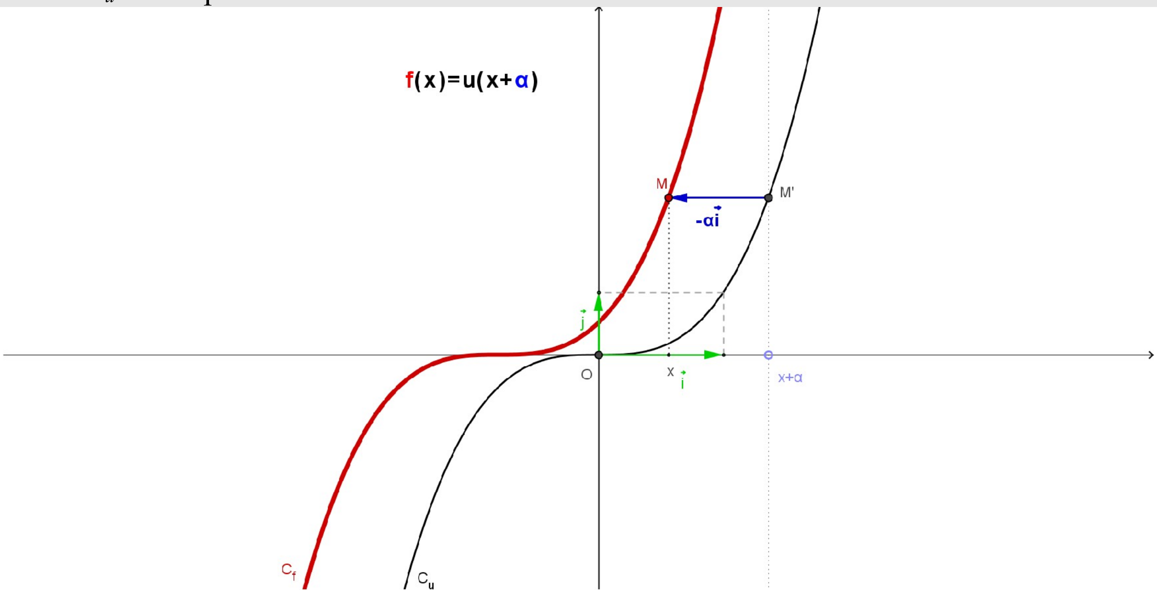
x	0		+∞
f(x)	0	↗	+∞

II. Fonctions associées

Soit u une fonction, C_u sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ α et β deux réels donnés.

1) Fonction $x \longmapsto u(x+\alpha)$

La courbe C_f de la fonction f définie par $f(x)=u(x+\alpha)$ est la **translatée** de la courbe C_u par la translation de vecteur **-α** $\vec{i}$.
La courbe C_u est déplacée à l'horizontale de -α unités.



Remarques :

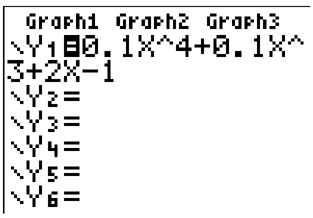
- Pour une valeur de x, on va chercher le point M' de C_u d'abscisse $x+\alpha$, puis on translate M' de -α $\vec{i}$ pour obtenir le point M de C_f.
- Si la fonction u est définie sur [a ; b], on peut calculer $u(x+\alpha)$ seulement lorsque $x+\alpha \in$ [a ; b], c'est à dire $x \in$ [a-α;b-α].
  Ainsi la fonction f définie par $f(x)=u(x+\alpha)$ est définie sur [a-α;b-α].

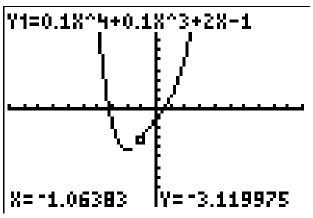
Démonstration :
Soit M un point quelconque de la courbe C_f :

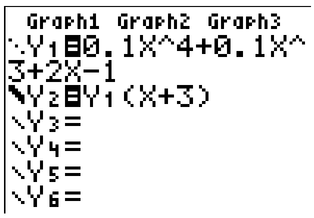
$$M(x\,;y) \in C_f \quad\Leftrightarrow\quad y=f(x) \;\Leftrightarrow\quad y=u(x+\alpha) \quad\Leftrightarrow\quad M'(x+\alpha\ ;y) \in C_u$$

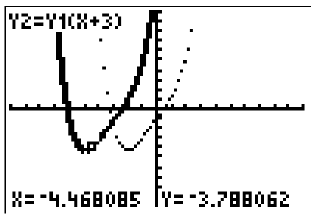
et le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ a pour coordonnées (x-(x +α) ; y-y)=(-α ; 0),
D'où $\overrightarrow{M'M}$ = -α $\vec{i}$.
M est donc le translaté de M' point de C_u par la translation de vecteur -α $\vec{i}$.

Calculatrice :



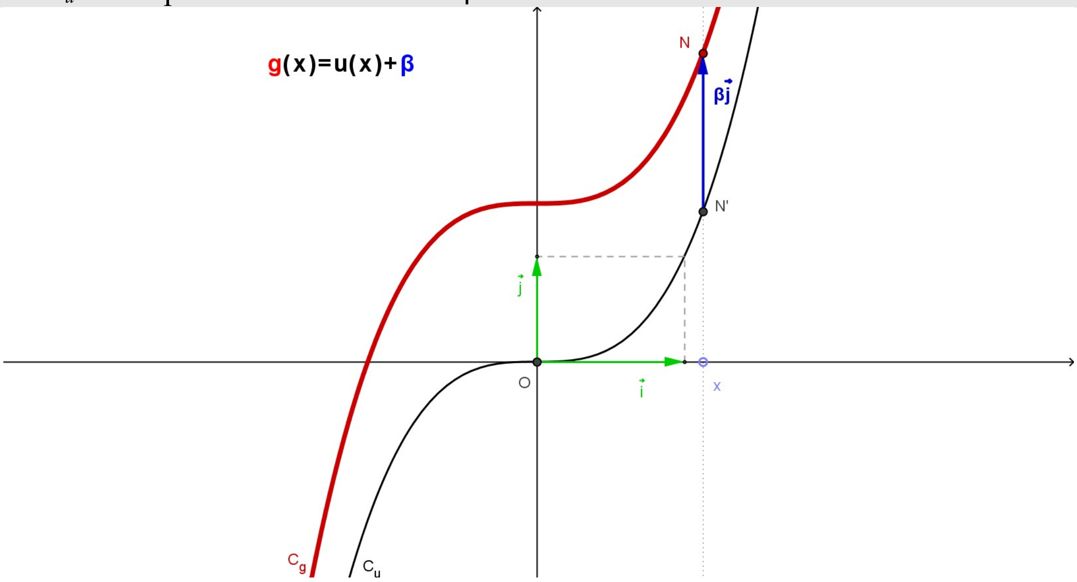






2) Fonction $x \longmapsto u(x)+\beta$

La courbe C_g de la fonction g définie par $g(x)=u(x)+\beta$ est la **translatée** de la courbe C_u par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$.
La courbe C_u est déplacée à la verticale de β unités.

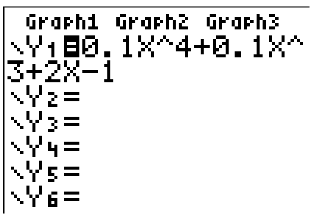


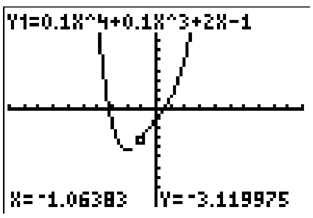
Démonstration :
Soit N un point quelconque de la courbe C_g :

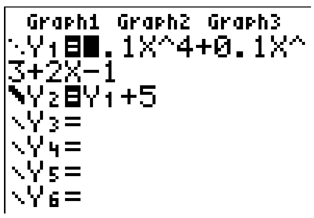
$N(x\,;y) \in C_g \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow y = u(x) + \beta \Leftrightarrow y-\beta = u(x) \Leftrightarrow N'(x\,;y-\beta) \in C_u$

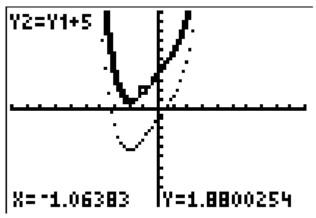
et le vecteur $\overrightarrow{N'N}$ a pour coordonnées $(x-x\,;y-(y-\beta)) = (0\,;\beta)$. D'où $\overrightarrow{N'N} = \beta\vec{j}$.
N est donc le translaté de N' point de C_u par la translation de vecteur $\beta\vec{j}$.

Calculatrice :









3) Sens de variation

Soit u une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$:

- Sur l'intervalle $[a-\alpha\,;b-\alpha]$, la fonction f définie par $f(x) = u(x+\alpha)$ a le **même sens de variation** que u sur $[a\,;b]$.
- Sur l'intervalle $[a\,;b]$, la fonction g définie par $g(x)=u(x)+\beta$ a le **même sens de variation** que u sur $[a\,;b]$.

Exemple :

x	-3	4	5
$u(x)$	3 ↘	0 ↗	1

x	-4	3	4
$u(x+1)$	3 ↘	0 ↗	1

x	-3	4	5
$u(x)+2$	5 ↘	2 ↗	3

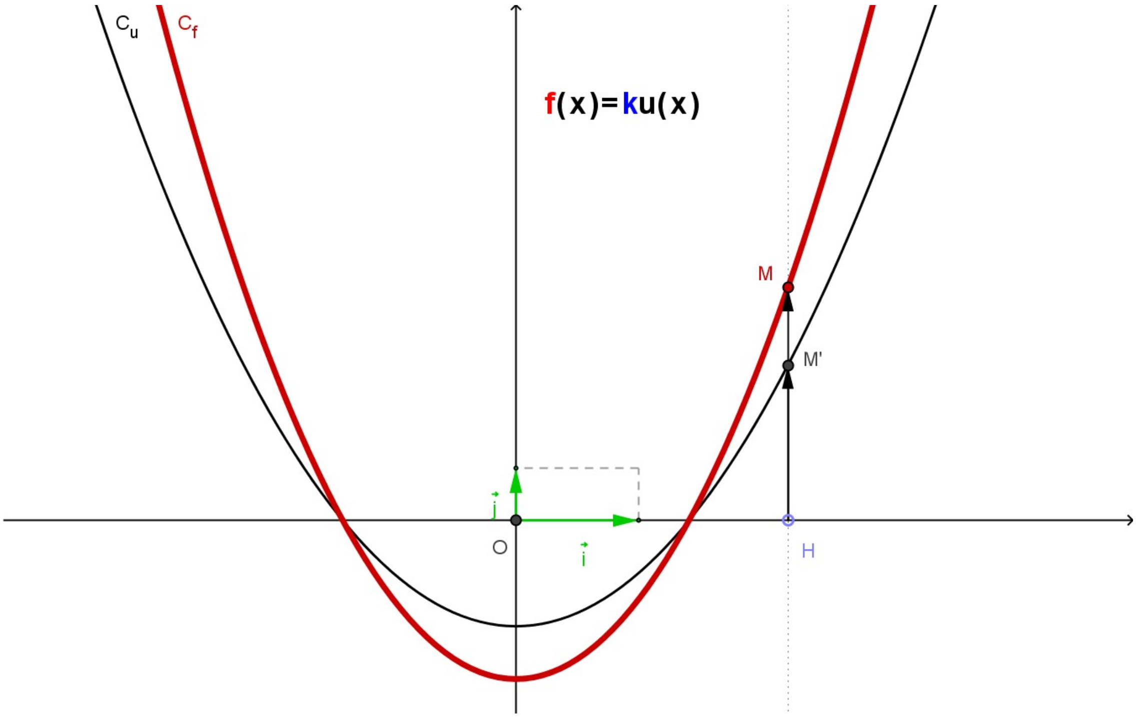
III. Produit d'une fonction par un nombre

Soit u une fonction définie sur un intervalle I, C_u sa courbe représentative et k un nombre réel non nul.

1) Fonction $x \longmapsto k \times u(x)$

La fonction f, donnée par $f(x)=k\times u(x)$, a le même ensemble de définition que la fonction u.

Pour obtenir sa courbe C_f : à chaque abscisse, on multiplie par k l'ordonnée du point de C_u .



Exemple :

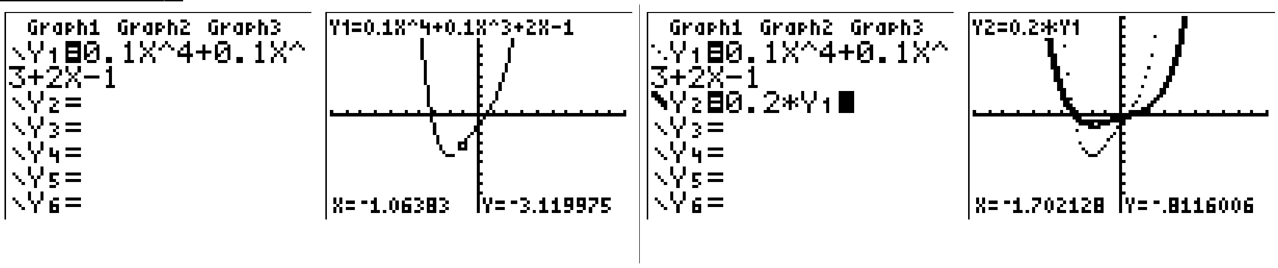
Pour la courbe C_f de la fonction $f=\frac{3}{2}u$, on multiplie par $\frac{3}{2}$ l'ordonnée de M', soit $\overrightarrow{HM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{HM'}$.

Cas particulier : La fonction -u, opposée de u, est telle que :

$$-u(x)=(-1)\times u(x) .$$

Sa courbe C_{-u} est la **symétrique** de la courbe C_u par rapport à l'axe des abscisses.

Calculatrice :



2) Sens de variation de k.u

- Si k est **positif**, les fonctions u et ku ont **même sens de variation** sur l'intervalle I.
- Si k est **négatif**, les fonctions u et ku ont des **sens de variation contraires** sur l'intervalle I.

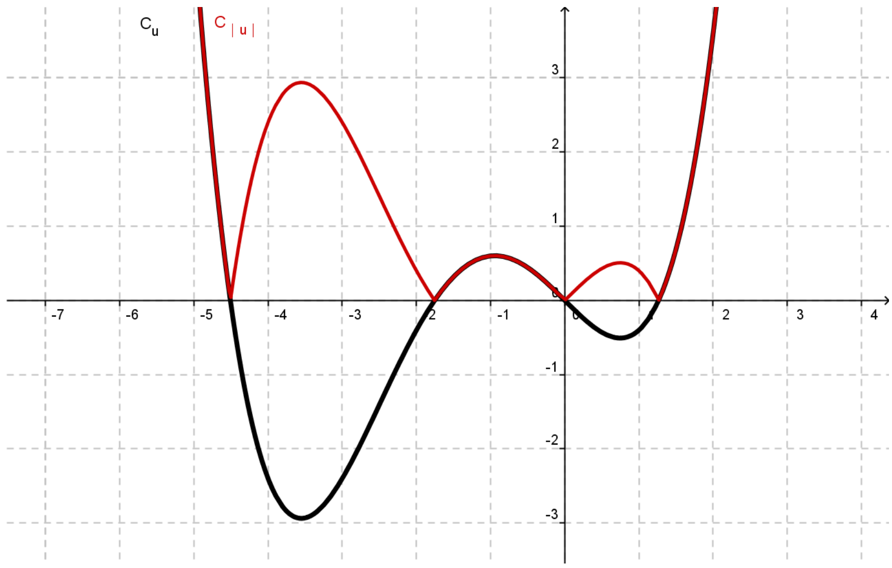
Démonstration :
Soit a et b deux réels d'un intervalle I où la fonction u est décroissante :
si $a \leqslant b$, alors $u(a) \geqslant u(b)$.
En multipliant par k négatif, on obtient $k \times u(a) \leqslant k \times u(b)$, ce qui signifie que la fonction $k \times u$ est croissante sur I.
Ainsi u et $k \times u$ ont des sens de variation contraires.
On procède de la même manière pour les autres cas.

Cas particulier : La fonction opposée

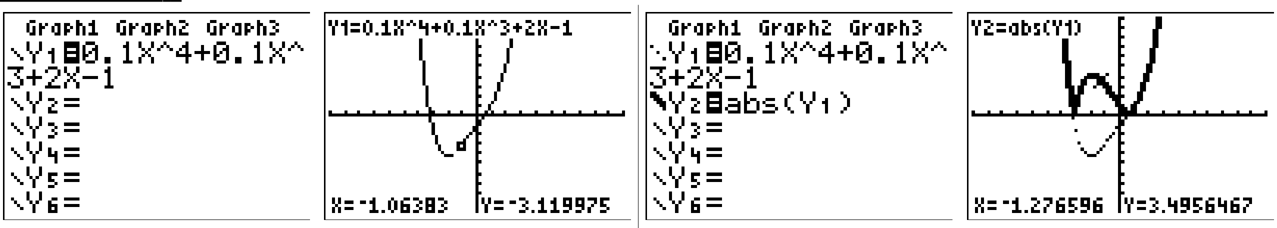
Comme $-u = (-1) \times u$, la **fonction opposée** de u a un sens de **variation contraire** de celui de la fonction u.

3) Fonction valeur absolue $x \longmapsto |u(x)|$

- Sur tout intervalle où $u(x) \geqslant 0$, alors $|u(x)| = u(x)$: la courbe C_u est située au-dessus de l'axe des abscisses et la courbe $C_{|u|}$ est confondue avec la courbe C_u.
- Sur tout intervalle où $u(x) \leqslant 0$, alors $|u(x)| = -u(x)$: la courbe C_u est située au-dessous de l'axe des abscisses et la courbe $C_{|u|}$ est la symétrique de C_u par rapport à l'axe des abscisses.



Calculatrice :



IV. Somme et différence de fonctions

Soit u et v deux fonctions définies sur le même intervalle I, et C_u et C_v leurs courbes représentatives.

1) Somme de fonctions $u + v$

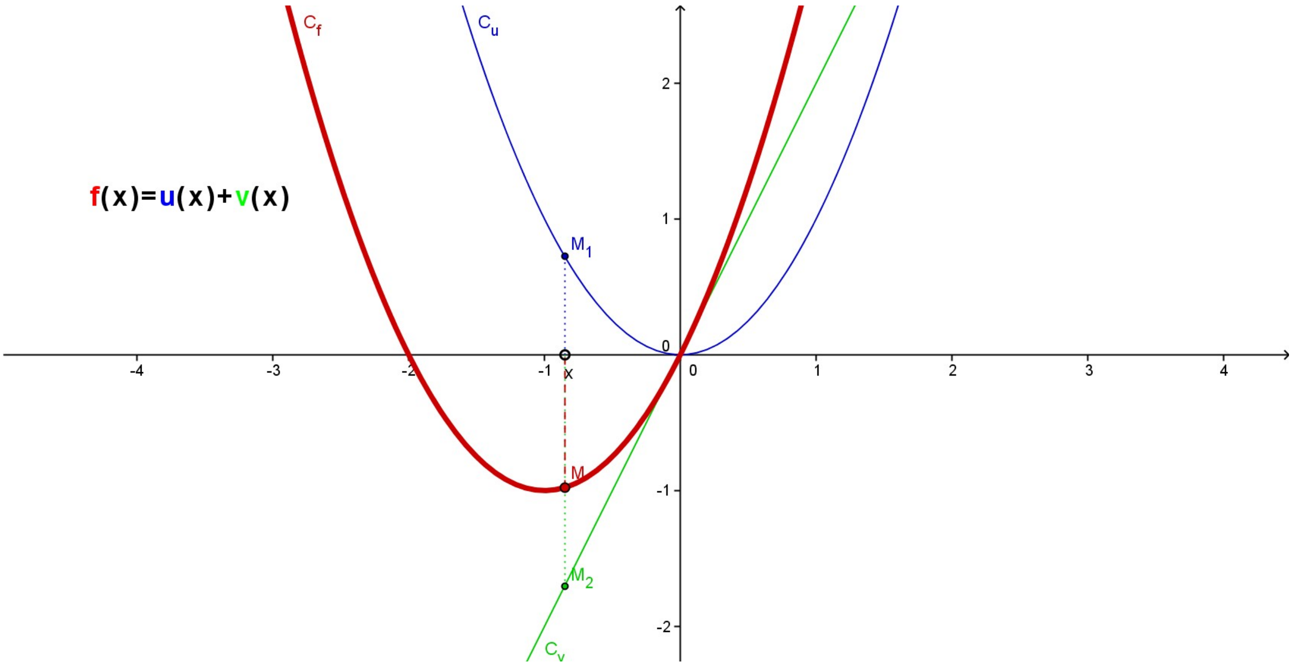
Définition :

La somme $u + v$ est la fonction définie sur l'intervalle I par :

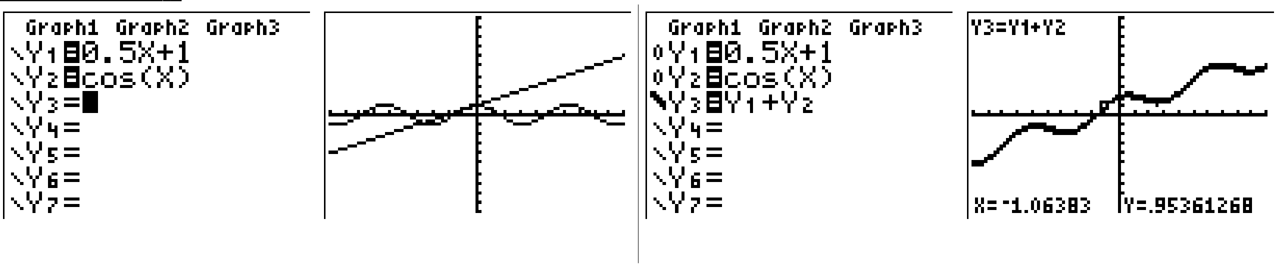
$$(u+v)(x) = u(x)+v(x)$$

Représentation :

Pour obtenir la courbe C_{u+v} à chaque abscisse x de I, on ajoute les ordonnées des points de C_u et C_v de même abscisse : $y_M = y_{M_1} + y_{M_2}$.



Calculatrice :



2) Sens de variation de u+v

- Si u et v sont deux fonctions **croissantes** sur l'intervalle I, la somme $u+v$ est **croissante** sur I.
- Si u et v sont deux fonctions **décroissantes** sur l'intervalle I, la somme $u+v$ est **décroissante** sur I.

Démonstrations :

- Si u et v sont croissantes sur I, pour $a \leqslant b$ dans I, alors $u(a) \leqslant u(b)$ et $v(a) \leqslant v(b)$.
  Donc $u(a)+v(a) \leqslant u(b)+v(b)$, ce qui signifie que la somme $u+v$ est croissante sur I.
- Si u et v sont décroissantes sur I, pour $a \leqslant b$ dans I, alors $u(a) \geqslant u(b)$ et $v(a) \geqslant v(b)$.
  Donc $u(a)+v(a) \geqslant u(b)+v(b)$, ce qui signifie que la somme $u+v$ est décroissante sur I.

3) Différence de fonctions u – v

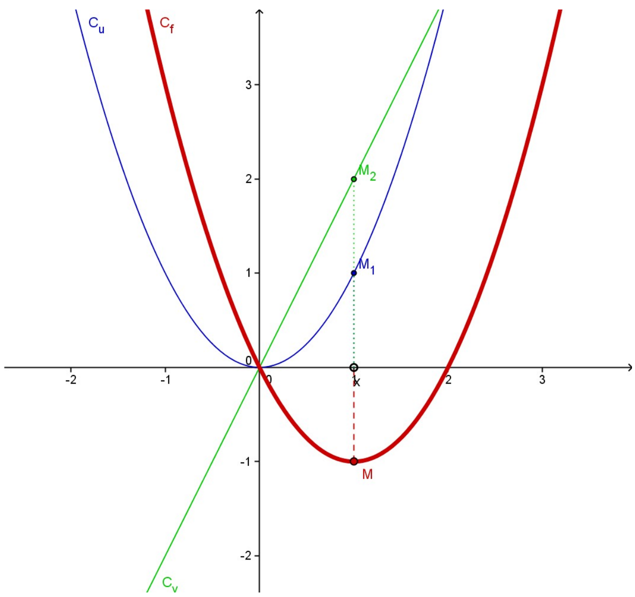
Définition :

La différence $u - v$ est la fonction définie sur l'intervalle I par :

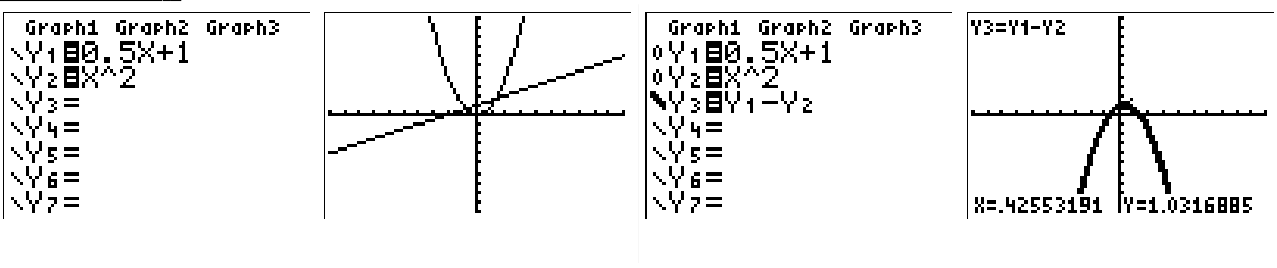
$$(u-v)(x) = u(x) - v(x)$$

Remarques :

- Si la fonction u est croissante sur I et la fonction v est décroissante sur I, alors la fonction $-v$ est croissante sur I et la différence $u - v$ est croissante sur I.
- On peut lire le maximum d'une différence de fonctions $u-v$, en cherchant la distance maximale en verticale entre les courbes C_u et C_v.



Calculatrice :



V. Composition de fonctions

1) Fonction f suivie de g

Définition :

Soit f et g deux fonctions.
La fonction « f suivie de g » est donnée par le montage suivant :

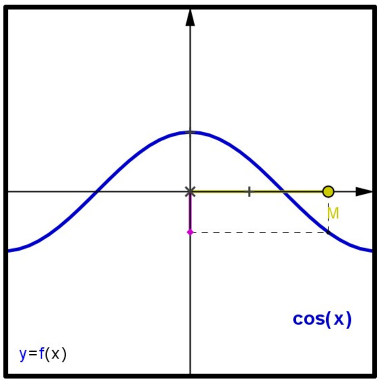
- au réel $\boldsymbol{x}$, on associe son **image** $\boldsymbol{f(x)}$ par la fonction f, on obtient un réel y
- puis au réel $\boldsymbol{y}$ obtenu, on associe son image $\boldsymbol{g(y)}$ par la fonction g.

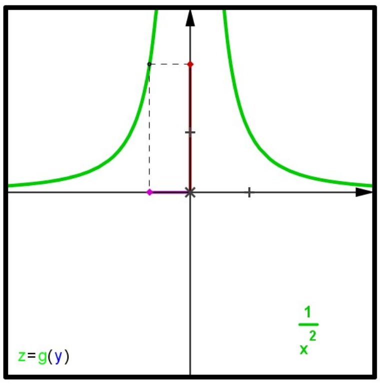
Comme $y=f(x)$, finalement on obtient $h(x)=g(f(x))$

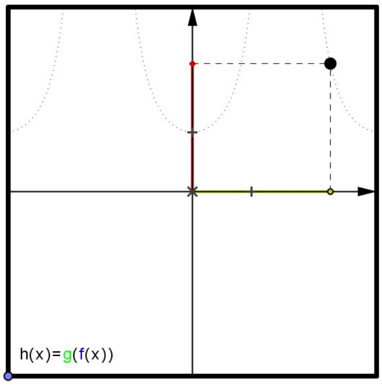
$$x \longmapsto f(x)=y \longmapsto g(y)=g(f(x))=h(x)$$

Exemples :

-



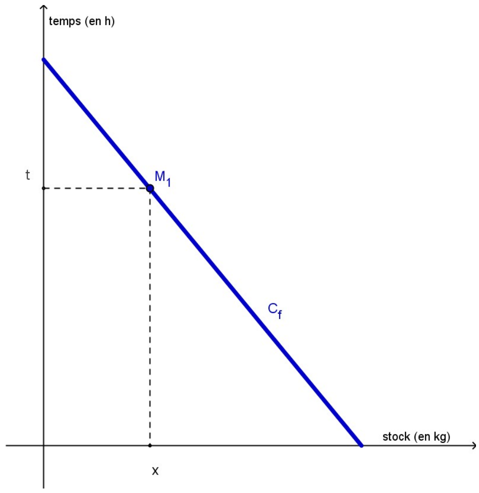




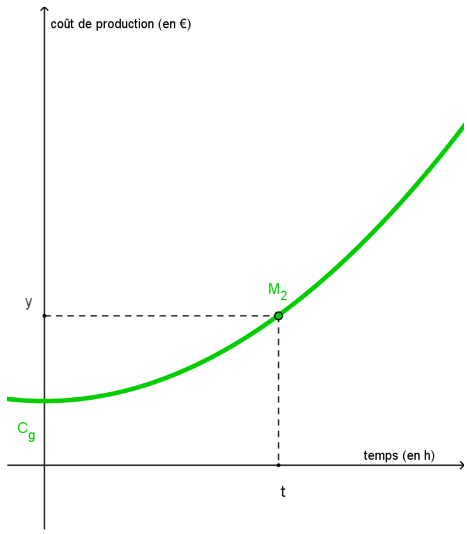
$\frac{1}{\cos(x)^2}$

•

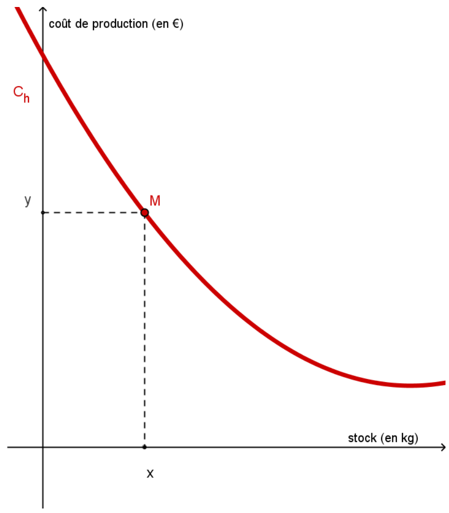
- Le temps d'utilisation d'une machine (en *h*) est fonction du stock de matières premières (en *kg*) selon la fonction *f* représentée par la courbe C_f.



- Le coût de production (en €) est fonction du temps d'utilisation de la machine selon la fonction *g* représentée par la courbe C_g.



- Alors le coût de production est fonction du stock de matières premières selon la fonction *h* représentée par C_h.

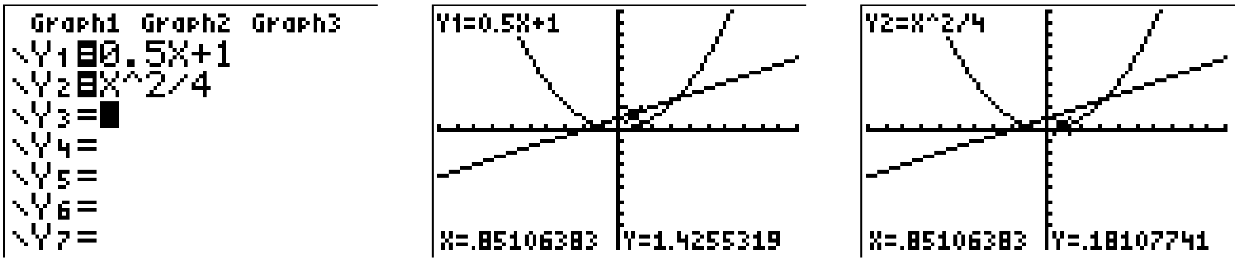


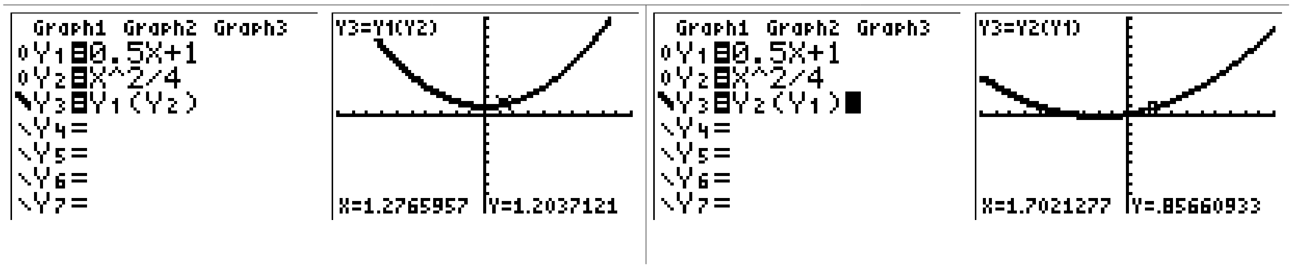
A $M_1(x\,;\,t)$ de la courbe C_f correspond le point $M_2(t\,;\,y)$ de la courbe C_g.
On obtient alors $M(x\,;\,y)$ de la courbe C_h.

<u>Remarque :</u>

Si la fonction *f* est définie sur l'intervalle [*a* ; *b*], alors l'image par *f* de cet intervalle doit être dans l'intervalle de définition D_g de la fonction *g*.
Pour tout *x* de [*a* ; *b*], *f(x)* ∈ D_g .

<u>Calculatrice :</u>





2) <u>Sens de variation de la fonction composée</u>

- La composée d'une fonction **croissante** suivie d'une fonction **croissante** est **croissante**.
- La composée d'une fonction **croissante** suivie d'une fonction **décroissante** est d**écroissante**.
- La composée d'une fonction **décroissante** suivie d'une fonction **croissante** est **décroissante**.
- La composée d'une fonction **décroissante** suivie d'une fonction **décroissante** est **croissante**.

Démonstration :
Il suffit d'utiliser la définition du sens de variation d'une fonction.
Par exemple : Pour tout réels *a* et *b* de *I*, tels que $a \leqslant b$, la fonction *f* décroissante change l'ordre des images $f(a) \geqslant f(b)$ puis la fonction *g* décroissante change de nouveau l'ordre des images $g(f(a)) \leqslant g(f(b))$.
Donc la fonction composée « *f* suivie de *g* » est, dans ce cas, croissante.