Chapitre 5
Primitives

I. Primitive d'une fonction

1) Notion

Définition :
Une primitive d'une fonction *f*, définie sur un intervalle *I*, est une fonction *F*, dérivable sur l'intervalle *I*, telle que la dérivée de *F* est *f* :
$$F'(x) = f(x) \text{ sur } I$$

Remarque :
Une fonction étant notée par une lettre minuscule, l'usage est de noter une primitive par la lettre majuscule correspondante.

Exemples :
- La fonction $F : x \longmapsto 3x+4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto 3$.
- La fonction $G : x \longmapsto x^2+3x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $g : x \longmapsto 2x+3$
- La fonction $K : x \longmapsto x^2+3x+5$ est aussi une primitive sur $\mathbb{R}$ de $g : x \longmapsto 2x+3$

Théorème (admis) :
Toute fonction **continue** sur un intervalle *I* admet une primitive sur *I*.

2) Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème :
Si *F* est **une** primitive d'une fonction *f* sur un intervalle *I*, alors toutes les primitives de *f* sur *I* sont les fonctions *G* définies sur *I* par :
$$G(x) = F(x) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Démonstration :
- Si $G(x)=F(x)+k$, alors $G'(x)=F'(x)+0=F'(x)=f(x)$.
  Donc *G* est une primitive de *f*.
- Si *G* est une primitive de *f* autre que *F*, alors $(G-F)(x)=G(x)-F(x)$.
  Sa dérivée est $(G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$.
  Donc la fonction $G-F$, dont la dérivée est constamment nulle, est une constante *k*.
  Ainsi $G(x)=F(x)+k$ pour tout *x* de l'intervalle *I*.

Remarque :
Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

3) *Primitive prenant une valeur donnée en x_0 de I*

Théorème :
f est une fonction continue sur un intervalle *I*.
x_0 est un réel donné de *I* et y_0 est un réel donné.
Alors, il existe une primitive *G* de *f* sur *I*, et une seule, telle que :

$$G(x_0)=y_0$$

Démonstration :
Soit *F* une primitive de *f* sur *I* : toute autre primitive *G* est définie par $G(x)=F(x)+k$, avec *k* réel.
Pour obtenir l'égalité $G(x_0)=y_0$, c'est-à-dire $F(x_0)+k=y_0$, il est nécessaire et suffisant de choisir $k=y_0-F(x_0)$, et ce choix est unique.

Remarque :
On dit que *G* est **la primitive** de *f* sur *I* qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Exemple :
La fonction *f* : $x\longmapsto 2x$ admet comme primitive sur ℝ la fonction *F* : $x\longmapsto x^2$.
Elle admet aussi comme primitive la fonction :

$$x\longmapsto x^2+15 \quad \text{ou} \quad x\longmapsto x^2+\pi \quad \text{ou} \quad x\longmapsto x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

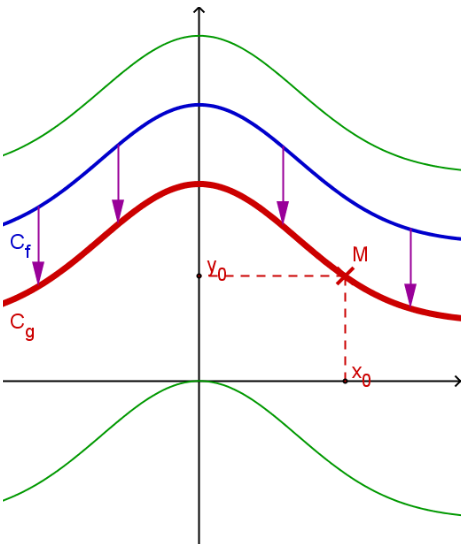
Cette fonction *f* n'admet qu'une seule primitive *G* telle que $G(2)=-3$.
En effet, on sait que $G(x)=x^2+k$, où *k* est une constante réelle ;
or $G(2)=-3$ équivaut à $4+k=-3$ c'est-à-dire $k=-7$.
Donc l'unique primitive de *f* telle que $G(2)=-3$ est la fonction *G* : $x\longmapsto x^2-7$.

4) Interprétation graphique

F étant une primitive de *f* sur *I*, les courbes de toutes les primitives de *f* sur *I* se déduisent de **la courbe de *F*** par **translation** de vecteur $k\vec{j}$, où *k* est un réel quelconque.

Un point $M(x_0;y_0)$ étant donné, il n'existe qu'une **seule courbe** $\mathscr{C}_g$ de la famille passant par ce point.

Pour la trouver, il suffit de translater la courbe $\mathscr{C}_f$ jusqu'à ce qu'elle passe par *M*.



II. Détermination de primitives

1) Propriété de linéarité

Propriété :
Soit α un réel, F une primitive de f sur I *et* G une primitive de g sur I.

- Une primitive de la somme $f+g$ est la somme des primitives $F+G$.
- Une primitive de αf est αF .

Démonstration :

- Comme la dérivée d'une somme est la somme des dérivées :
  $(F+G)'(x)=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$.
  Donc $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- La dérivée du produit d'une fonction par un nombre est le produit de la dérivée par ce nombre, donc :
  $(\alpha F)'(x)=\alpha F'(x)=\alpha f(x)=(\alpha f)(x)$

2) Primitives des fonctions usuelles

c désigne un réel quelconque.

Fonction définie par :	Primitives définies par $F(x)=\ldots$	Sur $I=\ldots$
$f(x)=k$ (constante)	$F(x)=kx+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ (avec $n\in\mathbb{N}$)	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ (avec $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$)	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$

Remarques :

- On peut utiliser la formule :
  Pour $n\in\mathbb{Z}$, $n\leqslant -2$ ou $n\geqslant 1$, les primitives de $f(x)=x^n$ sur I (I=$\mathbb{R}$ si $n\geqslant 1$ et I= $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n\leqslant -2$) sont les fonctions $F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$.
- Ce tableau ne fournit pas de primitive de $f(x)=\frac{1}{x}$.

Exemple :

Soit *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-x^3+3x^2+2}{x^2}$.

D'après la linéarité des primitives, on cherche à écrire $f(x)$ sous la forme d'une somme :

$f(x)=\dfrac{-x^3}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}=-x+3+\dfrac{2}{x^2}=-x+3+2\times\dfrac{1}{x^2}$.

Donc une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$ est donnée par :

$F(x)=-\dfrac{x^2}{2}+3x+2\times\dfrac{-1}{x}+c=-\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{2}{x}+c$.

3) Primitives des formes usuelles

u désigne une fonction continue sur un intervalle *I*.

Fonction	Primitives	Conditions
$f=u'u^n$	$F=\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	Pour $n\in\mathbb{N}$
$f=\dfrac{u'}{u^2}$	$F=-\dfrac{1}{u}+c$	Pour tout *x* de *I*, $u(x)\neq 0$
$f=\dfrac{u'}{u^n}$	$F=\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	Pour $n\in\mathbb{N}$ et $n>1$. Pour tout *x* de *I*, $u(x)\neq 0$.
$f=\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}+c$	Pour tout *x* de *I*, $u(x)>0$.

Remarques :

- Ces formules se retrouvent à partir des formules de dérivation des fonctions composées.
- On peut utiliser la formule :
  Pour $n\in\mathbb{N}$, $n\leqslant -2$ ou $n\geqslant 1$, les primitives de $f=u'u^n$ pour tout *x* de *I* (si $n\leqslant -2$ pour tout *x* de *I* où $u(x)\neq 0$) sont les fonctions $F=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c$.

Exemples :

- Soit *f* définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$.

  f est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$, où $u(x)=x^2-1$. Donc *f* admet comme primitives sur $]-1;1[$ les fonctions :

  $$F(x)=-\frac{1}{x^2-1}+c \text{ avec } c \text{ constante réelle quelconque.}$$

- Soit *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.

  g est de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, où $u(x)=x^4+1$. Donc *g* admet comme primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions :

  $$G(x)=2\sqrt{x^4+1}+c \text{ avec } c \text{ constante réelle quelconque.}$$