Chapitre 5
Le second degré

I. Polynôme du second degré

1) Forme d'une fonction trinôme

Forme réduite

Définition :
On appelle **polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute expression qui peut s'écrire sous la forme ax^2+bx+c où *a, b* et *c* sont des réels et $a\neq 0$.

Exemple :
$P(x)=2x^2-8x+8$ est un trinôme donné sous sa forme réduite avec *a* = 2, *b* = - 8 et *c* = 8.

Forme canonique

Propriété :
Tout trinôme ax^2+bx+c peut s'écrire sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ où α et β sont des réels.
Cette forme s'appelle la **forme canonique** du trinôme.

Démonstration :
Soit $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$,

- $a(x-\alpha)^2+\beta=a(x^2-2\times\alpha\times x+\alpha^2)+\beta=ax^2-2a\alpha x+a\alpha^2+\beta$
- En posant $b=-2a\alpha$ et $c=a\alpha^2+\beta$, on a bien $P(x)=ax^2+bx+c$

Propriété :
Pour tous réels *a, b* et *c* avec $a\neq 0$, on a :

$$P(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta \quad \text{avec} \quad \alpha=-\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta=P(\alpha)$$

Exemples :

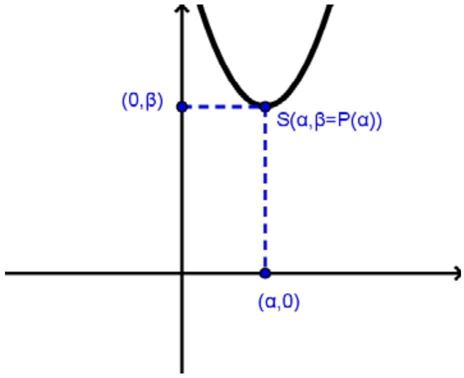
- $P(x)=2x^2-8x+8=2(x^2-4x+4)=2(x-2)^2$
  On obtient donc la forme canonique de *P(x)* avec $a=2$, $\alpha=2$ et $\beta=0$.

- On considère le polynôme $Q(x)=-2x(x-2)+3$
  On a $Q(x)=-2x^2+4x+3$. *(forme réduite avec $a=-2$, $b=4$ et $c=3$)*
  En calculant $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times(-2)}=1$ et $\beta=Q(1)=-2\times 1^2+4\times 1+3=5$
  Donc $Q(x)=-2(x-1)^2+5$ *(forme canonique* avec $a=-2$, $\alpha=1$ *et* $\beta=5$ *)*

2) Représentation graphique

Définition :
La courbe représentative d'une fonction polynôme $P : x \longmapsto ax^2+bx+c$, avec a≠0, est une **parabole**.

Son sommet S(α ; β) a pour abscisse $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et pour ordonnée β=P(α)



Remarque :
Le signe de *a* permet de connaître l'allure de la parabole :

Si $a>0$

La parabole est tournée vers le haut

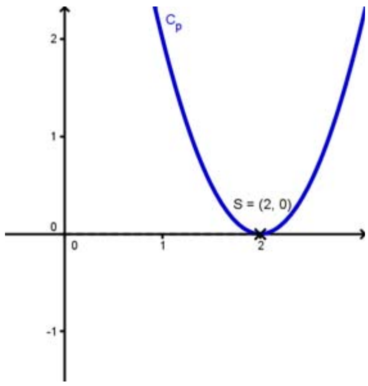
Si $a<0$

La parabole est tournée vers le bas

Exemples :

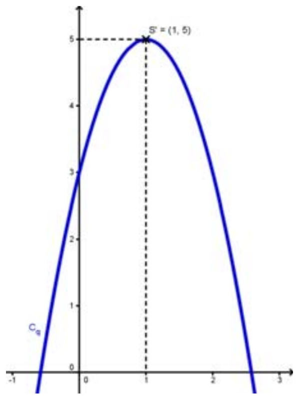
- La courbe représentative de la fonction *P* définie sur ℝ par $P(x)=2x^2-8x+8$ est une parabole C_p de sommet S(2 ; 0)

Comme $a=2$ (positif), la parabole C_p est tournée vers le haut.



- La courbe représentative de la fonction *Q* définie sur ℝ par $Q(x)=-2x^2+4x+3$ est une parabole C_q de sommet S'(1 ; 5)

Comme $a=-2$ (négatif), la parabole C_q est tournée vers le bas.



3) Sens de variation

Théorème :
Suivant le **signe de *a***, on obtient le sens de variation de la fonction polynôme du second degré :

$$f : x \longmapsto ax^2+bx+c \text{ avec } a\neq 0 \;;\; \alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=f(\alpha)$$

- $a>0$ (positif)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

- $a<0$ (négatif)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Démonstration :
Pour le cas où $a>0$
En mettant *f* sous sa forme canonique on obtient $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

- Pour tout *x*, on a $f(x)\geqslant\beta$ (donc β est un minimum de *f* sur]–∞ ; +∞[)
- Pour x_1 et x_2 appartenant à]–∞ ; α[(donc $x_1<\alpha$ et $x_2<\alpha$), on a :
  Si $x_1<x_2$, (donc $x_1-x_2<0$) alors
  $f(x_1)-f(x_2)=[a(x_1-\alpha)^2+\beta]-[a(x_2-\alpha)^2+\beta]$
  $f(x_1)-f(x_2)=a(x_1-\alpha)^2-a(x_2-\alpha)^2=a[(x_1-\alpha)^2-(x_2-\alpha)^2]$
  $f(x_1)-f(x_2)=a[(x_1-\alpha)^2-(x_2-\alpha)^2]=a[[(x_1-\alpha)-(x_2-\alpha)][(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)]]$
  $f(x_1)-f(x_2)=a[[x_1-x_2][x_1+x_2-2\alpha]]$ avec $x_1-x_2<0$ et $x_1+x_2<2\alpha$ donc
  $f(x_1)-f(x_2)>0$ et $f(x_1)>f(x_2)$

  Ainsi *f* est décroissante sur]–∞ ; α[

On démontre les autres cas de la même manière.

II. Équation du second degré

1) Définition

Une **équation du second degré** à **une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2+bx+c=0$$

où a, b et c sont des réels donnés et $a\neq 0$.

Exemples :

- $3x^2-7x+2=0$
- $2x^2-9=0$
- $-x^2+2x=0$
- L'équation (E) $x^2-4+3x=2x^2-x$ peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$
  En effet, (E) équivaut à $x^2-4+3x-2x^2+x=0$ soit $-x^2+4x-4=0$
  Donc ici $a=-1$; $b=4$ et $c=-4$.

2) Discriminant

Propriété :

Pour tous réels a, b et c avec $a\neq 0$, on a :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ avec } \Delta=b^2-4ac$$

Démonstration :

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\times\left(\frac{b}{2a}\right)\times x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x^2+2\times\frac{b}{2a}\times x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Définition :

Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ est appelé **discriminant** de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

3) Résolution

Théorème :

Résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

$\Delta=b^2-4ac$

- Lorsque $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution.
- Lorsque $\Delta=0$, l'équation admet une solution $x=-\frac{b}{2a}$ (dite racine double)
- Lorsque $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration :

On sait que $ax^2+bx+c=0$ équivaut à $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$ donc à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ ($a\neq 0$), c'est-à-dire $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

En posant $X=x+\frac{b}{2a}$, résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ revient donc à résoudre $X^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

- Si $\Delta<0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}<0$. L'équation n' a pas de solution (car X^2 est positif).
- Si $\Delta=0$, alors l'équation s'écrit $X^2=0$. Cette équation a une seule solution $X=0$, c'est-à-dire $x+\frac{b}{2a}=0$ donc $x=-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, alors l'équation admet deux solutions :

  $X_1=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ et $X_2=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

  Soit $x_1+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ et $x_2+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

  - Si $a>0$, $\sqrt{(4a^2)}=2a$ donc :

    $x_1=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
  - Si $a<0$, $\sqrt{(4a^2)}=-2a$ donc :

    $x_1=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{-2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{-2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

<u>Exemples :</u>

- Résolution de l'équation $2x^2-3x+5=0$

  $a=2$, $b=-3$ et $c=5$

  $\Delta=(-3)^2-4\times2\times5=9-40=-31$ donc $\Delta<0$.

  L'équation n'admet aucune solution.

- Résolution de l'équation $3x^2-x-4=0$

  $a=3$, $b=-1$ et $c=-4$

  $\Delta=(-1)^2-4\times3\times(-4)=1+48=49$ donc $\Delta>0$.

  L'équation admet deux solutions :

  $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-7}{6}=\frac{-6}{6}=-1$

  L'ensemble des solutions S={-1; $\frac{4}{3}$ }.

Utilisation de la calculatrice :

```
PROGRAM:DEGRE2
:Prompt A,B,C
:B²-4AC→D
:If D>0
:Then
:Disp "2 SOLS :"
,(-B-√(D))/(2A)▸
Frac,"ET",(-B+√(
D))/(2A)▸Frac
:Else
:If D=0
:Then
:Disp "1 SOL :",
-B/(2A)▸Frac
:Else
:Disp "0 SOL"
:End
```

```
prgmDEGRE2
A=?2
B=?-3
C=?5
0 SOL
              Fait
```

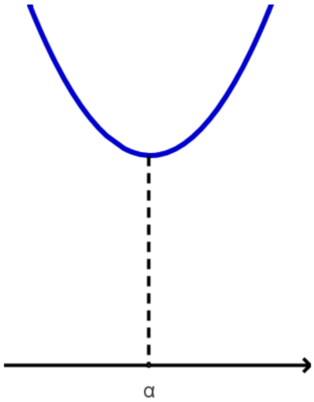
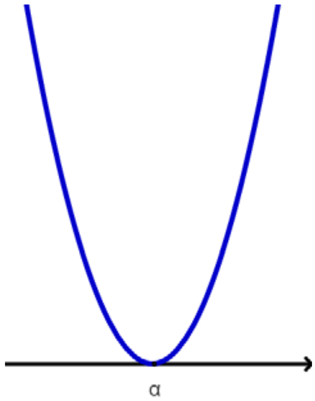
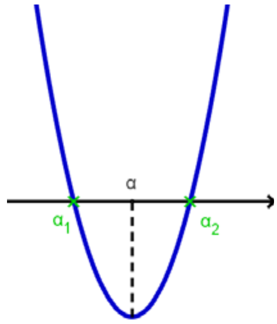
```
prgmDEGRE2
A=?4
B=?-12
C=?9
1 SOL :
               3/2
              Fait
```

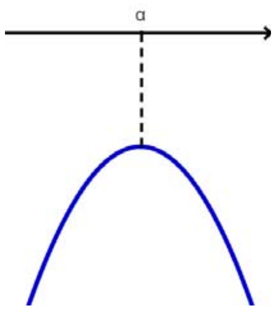
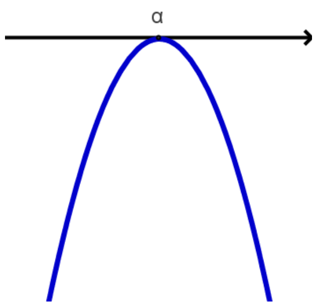
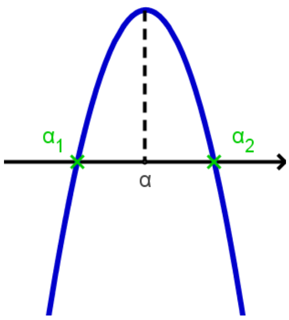
```
prgmDEGRE2
A=?3
B=?-1
C=?-4
2 SOLS :
                -1
ET
               4/3
              Fait
```

III. Synthèse

Soit le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$

<table>
<tr><th>$\Delta=b^2-4ac$</th><th>$\Delta<0$</th><th>$\Delta=0$</th><th>$\Delta>0$</th></tr>
<tr><td>Solutions de l'équation $P(x)=0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une seule solution :
$\alpha=-\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :
$\alpha_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\alpha_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Factorisation de P(x)</td><td>Pas de factorisation</td><td>$P(x)=a(x-\alpha)^2$</td><td>$P(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$</td></tr>
<tr><td>$a>0$

Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Signe de P(x)</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>+</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>+ 0 +</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α_1 α_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>+ 0 – 0 +</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$a<0$

Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Signe de P(x)</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>–</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>– 0 –</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ α_1 α_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>P(x)</td><td>– 0 + 0 –</td></tr></table></td></tr>
</table>

Remarques :

- Lorsque l'**équation** $ax^2+bx+c=0$ admet des **solutions**, ces solutions sont les **racines** du **trinôme** ax^2+bx+c .
  Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
- Lorsque le polynôme a deux racines distinctes α_1 et α_2 , l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des deux racines : $\alpha=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$.