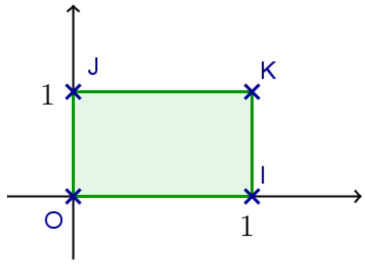
Chapitre 12
Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{OI},\vec{OJ})$, l'unité d'aire (notée u.a.) est l'aire du rectangle OIKJ où K est le point de coordonnées $(1;1)$.



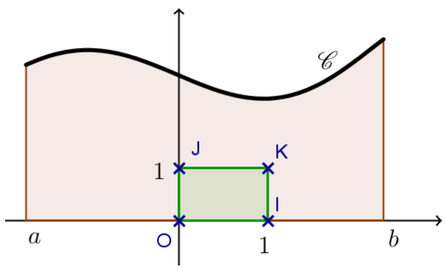
1) Notion d'intégrale

Définition :

f est une fonction **continue** et **positive** sur l'intervalle $[a;b]$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Le **domaine** situé sous sa courbe $\mathscr{C}$ est le domaine situé entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Remarque :

Le domaine peut être défini comme l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que :

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

Définition :

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

L'intégrale de *a* à *b* de la fonction *f* est l'aire, en unités d'aire, du domaine situé sous sa courbe $\mathscr{C}$. On la note :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété :

Pour toute fonction continue et positive sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un **nombre réel** positif ou nul.

Remarques :

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de *a* à *b* de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » ou « somme de *a* à *b* de f ».
- *a* et *b* sont les **bornes d'intégration**.
- *x* est la **variable d'intégration**. On dit que *x* est une variable muette car elle n'intervient pas dans le résultat.

  On peut noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

2) Propriétés immédiates

***f* est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ de courbe représentative $\mathscr{C}$.**

Propriété :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

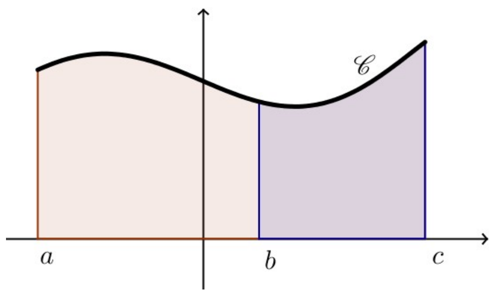
Démonstration :

Le domaine est alors réduit à un segment.

Propriété (relation de Chasles) :

Pour tous nombres réels *a*, *b*, *c* tels que $a\leqslant b\leqslant c$.

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$



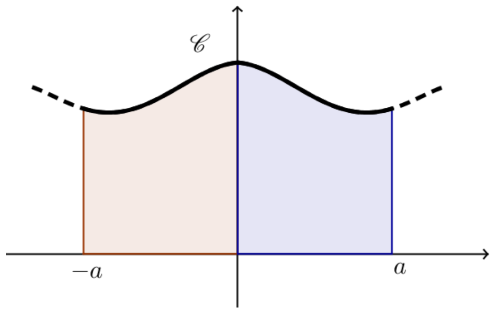
Démonstration :

Cela résulte de l'additivité des aires.

Propriété (conservation par symétrie) :

Si $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à (OJ) alors, pour tout $a>0$.

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ d'où } \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

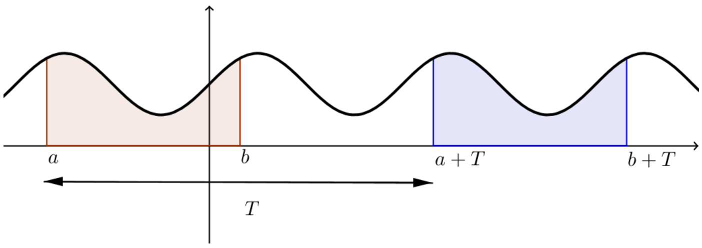


Propriété (conservation par translation) :

Si la fonction est périodique de période T :

$\forall x \in I,\ x+T \in I$ et $f(x)=f(x+T)$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

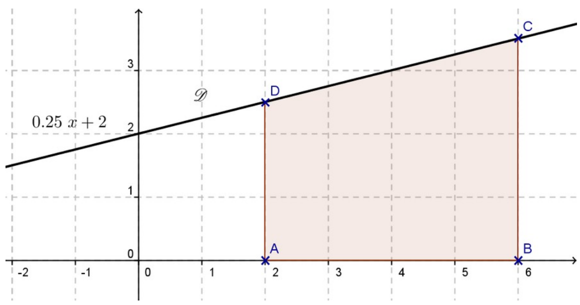


Exemples :

- Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $f(x)=\frac{1}{4}x+2$

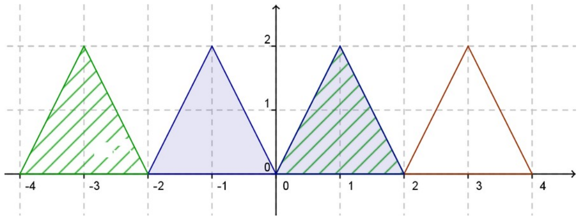
  et $\mathscr{D}$ sa représentation graphique.



$\int_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du trapèze ABCD et vaut :

$$\frac{AD+BC}{2}\times AB=\frac{f(2)+f(6)}{2}\times 4=\frac{2{,}5+3{,}5}{2}\times 4=12 \text{ u.a.}$$

- La fonction f définie sur l'intervalle $[-4;4]$ représentée ci-contre, modélise un signal en dent de scie obtenu en électronique.



Les triangles colorés en bleu sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc :

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Les triangles hachurés se correspondent par une translation, donc

$$\int_{-4}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

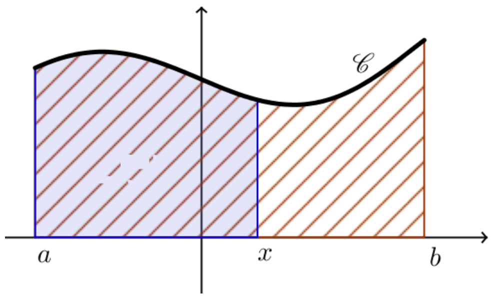
Ainsi $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 4\times\frac{2\times 2}{2} = 4\times 2 = 8$ u.a.

II. Primitives et calcul intégral

1) Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive, définie sur $[a;b]$ et x un nombre réel quelconque de cet intervalle. L'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la partie du plan coloriée en bleu, qui dépend de la valeur x.

Pour $x=b$ cette quantité vaut $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire l'aire de la partie hachurée.



Théorème fondamental :

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

La fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$.

$F_a(x)$ est la primitive de f sur [a ; b] qui s'annule en a.

Démonstration :

Cas où f est croissante sur $[a;b]$.

x_0 désigne un nombre réel de $[a;b]$ et h un nombre réel non nul tel $x_0+h\in[a;b]$.

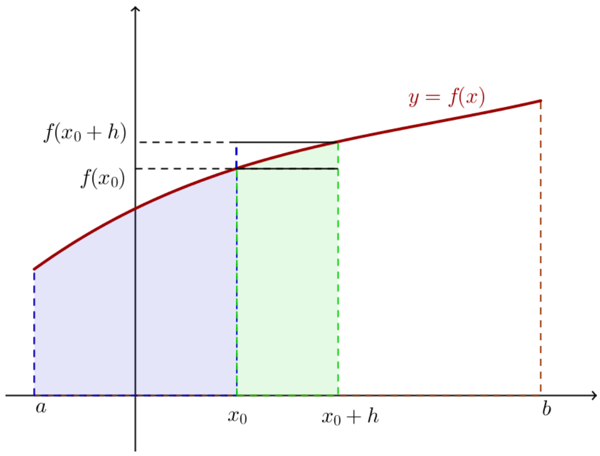
- 1[er] cas : $h>0$

  f est continue et positive sur $[a;b]$ donc d'après la relation de Chasles :

  $$\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  c'est-à-dire

  $$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$



  f est croissante sur $[a;b]$ donc on peut encadrer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ donc :

  $h\times f(x_0)\leqslant F(x_0+h)-F(x_0)\leqslant h\times f(x_0+h)$ et par conséquent,

  $$f(x_0)\leqslant\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)\ .$$

- 2[e] cas : $h<0$. On établit de même que $f(x_0+h)\leqslant\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0)$.

- Conclusion :

  f est continue en x_0 donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$. Le théorème des gendarmes permet de conclure dans les deux cas ci-dessus que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

  F est donc dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.

  Or x_0 est un nombre réel quelconque de $[a;b]$, donc F est dérivable sur $[a;b]$ et $F'=f$.

Remarque :

On admet le théorème dans le cas général.

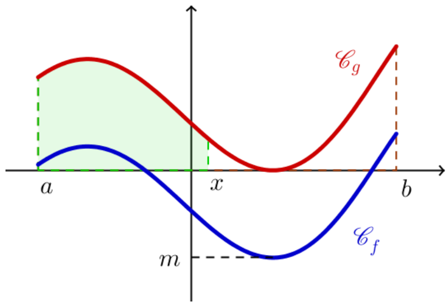
2) Fonctions continues et primitives

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration :

Cas où $I=[a;b]$ et où f admet un minimum m sur I.



La fonction g définie sur I par $g(x)=f(x)-m$ est continue et positive sur $[a;b]$.

Donc, d'après le théorème fondamental, elle admet une primitive G sur $[a;b]$:

$$G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=G(x)+mx$ est une primitive de f sur $[a;b]$ car pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $F'(x)=G'(x)+m=g(x)+m=f(x)$.

Donc, f admet des primitives sur $[a;b]$.

Remarques :

- Une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet un minimum sur cet intervalle.
- On admet le théorème dans le cas général.
- La fonction $x\mapsto \exp(-x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$, mais on n'en connaît pas de primitive « explicite ».

III. Intégrale d'une fonction continue

1) Calcul d'une intégrale

Propriété :

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F est une primitive de f sur $[a;b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

Démonstration :

On a vu que la fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$. Donc il existe un nombre réel k tel que $G(x)=F(x)+k$.

Or $G(a)=0$ donc $F(a)+k=0$, c'est-à-dire $k=-F(a)$.

Donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=G(b)=F(b)+k=F(b)-F(a)$.

Définition : (extension au cas d'une fonction f continue de signe quelconque sur $[a;b]$)

L'intégrale de a à b de f est le nombre réel $F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$.

On note encore :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

Remarques :

- Dans ce cas, on ne peut plus interpréter géométriquement l'intégrale comme l'aire d'un domaine.
- Cette définition ne dépend pas de la primitive F choisie puisque ces primitives diffèrent entre elles d'une constante.
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)-F(a)$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.
- En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on détermine d'abord une primitive F de f sur $[a;b]$ et on écrit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

Propriété :

Si f est continue sur $[a;b]$, alors $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a)) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

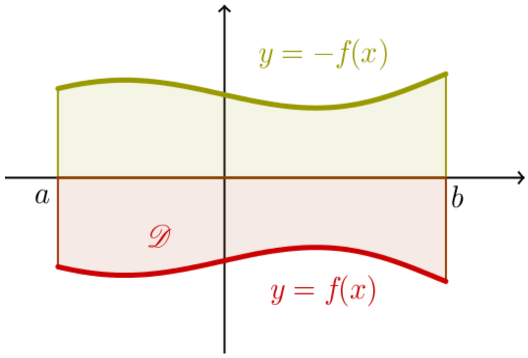
2) Intégrale et aire

Dans un repère orthogonal, $\mathscr{D}$ est le domaine situé entre la courbe représentative d'une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On note aire($\mathscr{D}$), l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en unités d'aire.

Cas d'une fonction *f* continue et négative sur $[a;b]$

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$



En effet, par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine situé sous la courbe de $-f$ (qui est positive).

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $-F$ est une primitive de $-f$ sur $[a;b]$.

Donc :

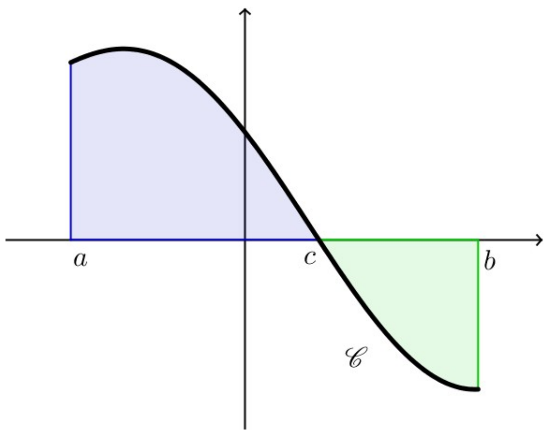
$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x = [-F(x)]_a^b = -(F(b)-F(a)) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque :

On dit que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'**aire algébrique** du domaine $\mathscr{D}$ (elle est positive si f est positive sur $[a;b]$, négative si f est négative sur $[a;b]$).

Cas d'une fonction *f* continue et de signe quelconque sur $[a;b]$

L'aire de $\mathscr{D}$ est la somme des aires algébriques des domaines définis par des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.



Pour la courbe ci-contre :

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

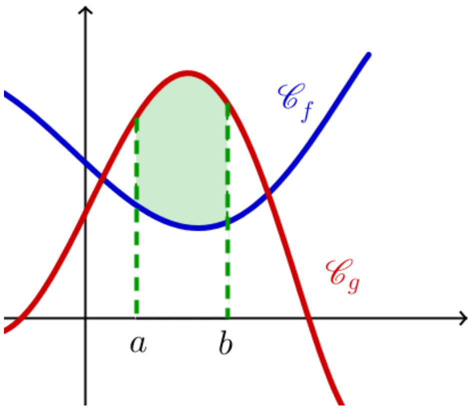
Remarque :

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

Aire entre deux courbes

Propriété :
Si f et g sont continues sur un intervalle I avec $f \leqslant g$ sur I et si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$, l'aire comprise entre les deux courbes représentant f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$



IV. Propriétés des intégrales

Par la suite f et g sont des fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

1) Propriétés algébriques

Propriété (linéarité de l'intégration) :

- $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- Pour tout nombre réel λ, $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration :

Ces propriétés découlent immédiatement des primitives de $f+g$ et λf.

Propriété (relations de Chasles) :

Pour tous nombres réels c, d et e de $[a;b]$,

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

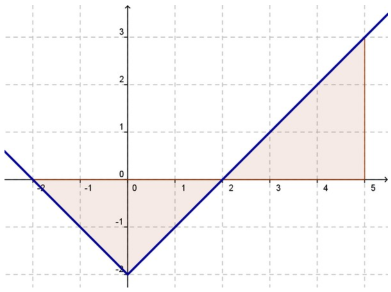
On note F une primitive de f sur $[a;b]$,

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c) + F(e) - F(d) = F(e) - F(c) = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple :

On calcule l'intégrale $K=\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|-2$.

Ainsi $f(x)=\begin{cases} x-2 \text{ si } x\geqslant 0 \\ -x-2 \text{ si } x<0 \end{cases}$.



Donc,

$\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} (-x-2)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{5} (x-2)\,\mathrm{d}x$.

Or $\int_{-2}^{0} (-x-2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{-x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{0}=0-(-2+4)=-2$ et

$\int_{0}^{5} (-x-2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{0}^{5}=\left(\frac{25}{2}-10\right)-0=\frac{5}{2}$.

Donc $K=-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

2) Intégrales et inégalités

On suppose ici que $a<b$

Propriété (positivité) :

- Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $f(x)\geqslant 0$ alors $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.
- Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $f(x)\leqslant 0$ alors $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$.

Démonstration :

Ces propriétés découlent directement de la définition de l'intégrale.

Remarque :

Les propriétés réciproques sont fausses.

Par exemple $\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}=\frac{2^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, mais sur $[-1;2]$, la fonction $x\mapsto x$ ne garde pas un signe constant.

Propriété (ordre) :

Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $g(x)\leqslant f(x)$, alors $\int_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :

Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$ alors $0 \leqslant f(x) - g(x)$.

Donc, $\int_a^b (f(x) - g(x)) \mathrm{d}x \geqslant 0$ et par linéarité, $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$.

3) Valeur moyenne

Définition :

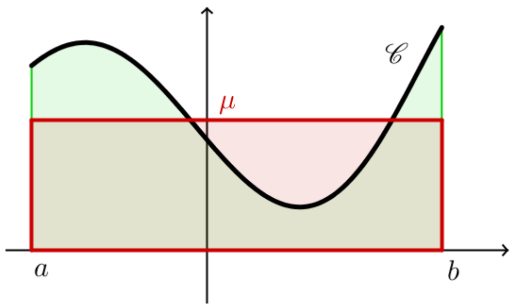
La **valeur moyenne** d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$) est le nombre réel μ défini par $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$.

Interprétation graphique :

Dans un repère orthogonal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.

Alors $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \mu \times (b-a)$.

Donc l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est égale à l'aire du rectangle de dimension μ et $(b-a)$.



Exemple :

La valeur moyenne de la fonction f donnée par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ sur $[1;5]$ vaut $\frac{10}{3}$.

En effet : $\frac{1}{5-1} \int_1^5 (x^2 - 4x + 5) \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \times \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 5x \right]_1^5 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{50}{3} - \frac{10}{3} \right) = \frac{10}{3}$

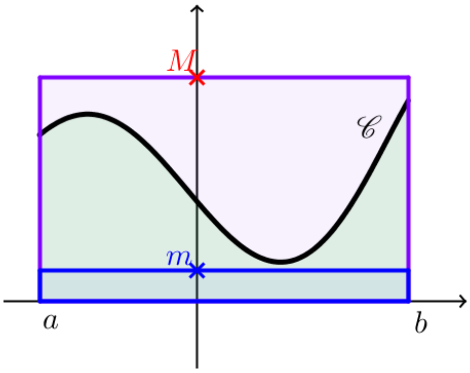
Propriété (inégalité de la moyenne) :

f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux nombres de I tels que $a < b$.

M et m sont deux nombres tels que, pour tout x de $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Démonstration :



Par hypothèse, pour tout x de $[a\,;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

En appliquant les propriétés sur l'ordre :

$$\int_a^b m \,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M \,\mathrm{d}x$$

Les fonctions constantes $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont telles que :

$\int_a^b m \,\mathrm{d}x = [mx]_a^b = m(b-a)$ et $\int_a^b M \,\mathrm{d}x = [Mx]_a^b = M(b-a)$.

D'où le résultat.

4) Intégration par parties

Propriété :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I et a et b deux réels appartenant à I. On a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

La dérivée du produit uv est donnée par $(uv)' = u'v + uv'$.

Alors uv est une primitive de $u'v + uv'$ sur $[a\,;b]$. Donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x$$

$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, d'où la formule.

Exemple :

Calculer $\int_1^2 (x-1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

On définit les fonctions u et v sur $[1\,;2]$ par $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x - 1$.

On a donc, pour tout $x \in [1\,;2]$, $v'(x) = 1$ et on peut choisir $u(x) = \mathrm{e}^x$.

u et v sont dérivables sur $[1\,;2]$ et u' et v' sont continues sur $[1\,;2]$.

On peut donc faire une intégration par parties :

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [(x-1)\mathrm{e}^x]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x = (2-1)\mathrm{e}^2 - (1-1)\mathrm{e}^1 - [\mathrm{e}^x]_1^2 = \mathrm{e}^2 - (\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}) = \mathrm{e}\ .$$