Chapitre 1

Fonctions de référence

I. Fonction valeur absolue

1) Valeur absolue

Définition :

La **valeur absolue** d'un réel *x* est le nombre, noté **|** *x* **|**, qui est égal au nombre *x* si *x* est positif, et au nombre -*x* si *x* est négatif.

Donc, | *x* | = $\begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Exemples :

- $|5| = 5$ car $5 > 0$
- $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$ car $3-\pi < 0$
- $|2-t| = \begin{cases} 2-t \text{ si } 2-t \geqslant 0 \text{ soit } t \leqslant 2 \\ t-2 \text{ si } 2-t \leqslant 0 \text{ soit } t \geqslant 2 \end{cases}$

Remarques :

- Une valeur absolue est toujours positive : pour tout réel *x*, $|x| \geqslant 0$.
- Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : pour tout réel *x*, $|x| = |-x|$.
- Pour tout réel *x*, $\sqrt{x^2} = |x|$ et pour tout réel $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = |x|$.

Propriétés :

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- Pour tous réels *x* et *y*, on a :
  - $|xy| = |x| \times |y|$
  - si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
  - $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ **(inégalité triangulaire)**

2) Fonction valeur absolue

Définition :

La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

On a donc, $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Remarque :

La fonction valeur absolue est une fonction **affine par morceaux**.

Propriété :

La fonction valeur absolue est **paire**.

Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est donc **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.

Démonstration :

Soit f la fonction valeur absolue.

Pour tout réel x, on a $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

Les deux points de coordonnées $(x ; f(x))$ et $(-x ; f(-x))$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriétés :

La fonction valeur absolue est **strictement décroissante** sur $]-\infty ; 0]$.

La fonction valeur absolue est **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Son **minimum** sur $\mathbb{R}$ est 0 et il est atteint pour $x = 0$.

Démonstration :

Pour tout réel x positif, $f(x) = x$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tout réel x négatif, $f(x) = -x$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

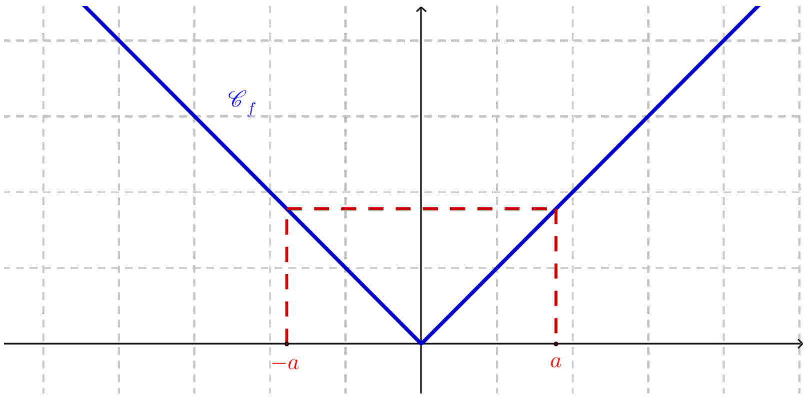
Pour tout réel x, on a $f(x) = |x|$ et $|x| \geq 0$. De plus $f(0) = 0$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geq f(0)$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative :



II. Polynôme du second degré

1) Forme d'une fonction trinôme

Forme réduite

Définition :

Une fonction **polynôme du second degré** (ou **trinôme**) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression peut être mise sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels $(a \neq 0)$.

Les réels a, b et c sont les **coefficients** de la fonction polynôme.

Exemple :

$P(x)=2x^2-8x+8$ est une fonction trinôme donnée sous sa **forme réduite** avec :

$$a = 2,\ b = -8 \text{ et } c = 8.$$

Forme canonique

Propriété :

Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ où a, α et β sont des réels $(a \neq 0)$.

Cette forme s'appelle la **forme canonique** du trinôme.

Démonstration :

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$ avec $(a\neq 0)$.

Or $\left(x+\frac{b}{2\text{a}}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. On en déduit : $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

On a donc : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Propriété :

Pour tous réels *a*, *b* et *c* avec $a\neq 0$, on a donc :

$$P(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta \text{ avec } \alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

Remarque :

On vérifie que β = P(α).

En effet, $P(\alpha)=P\left(\frac{-b}{2a}\right)=a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c=\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{2\text{b}^2}{4a}+\frac{4\text{ac}}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a}=\beta$

Exemples :

- $P(x)=2x^2-8x+8=2(x^2-4x+4)=2(x-2)^2$

  On obtient donc la forme canonique de P(*x*) avec $a=2$, $\alpha=2$ et $\beta=0$.
- On considère le polynôme $Q(x)=-2x(x-2)+3$

  On a $Q(x)=-2x^2+4x+3$. (forme réduite avec $a=-2$, $b=4$ et $c=3$)

  En calculant $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times(-2)}=1$ et $\beta=\frac{-4^2+4\times(-2)\times 3}{4\times(-2)}=\frac{-16-24}{-8}=5$.

  Donc $Q(x)=-2(x-1)^2+5$ (forme canonique avec $a=-2$, $\alpha=1$ et $\beta=5$)

Forme factorisée

Propriété :

Il est parfois possible de factoriser *P*(*x*). On obtient alors $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

$a(x-x_1)(x-x_2)$ est la **forme factorisée** de *P(x).*

Exemples :

- $P(x)=2(x-2)^2$ (forme factorisée avec $a=2$, $x_1=2$ et $x_2=2$)
- $R(x)=x^2-2x-15$ (forme réduite avec $a=1$, $b=-2$ et $c=-15$)

  $R(x)=(x-1)^2-16$ (forme canonique avec $a=1$, $\alpha=1$ et $\beta=-16$)

  $R(x)=(x-5)(x+3)$ (forme factorisée avec $a=1$, $x_1=5$ et $x_2=-3$)
- $T(x)=2(x-1)^2+5$ *On ne peut pas donner la forme factorisée.*

2) Sens de variation

Propriété :

Suivant le **signe de *a***, on obtient le sens de variation de la fonction polynôme du second degré :

$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$; $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$

- $a>0$ (positif)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	β	↗	$+\infty$

Le **minimum** β de *f* est atteint pour $x=\alpha$.

- $a<0$ (négatif)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	β	↘	$-\infty$

Le **maximum** β de f est atteint pour $x=\alpha$.

Démonstration :

Pour le cas où $a>0$

En mettant *f* sous sa forme canonique on obtient $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

- Pour tout *x*, on a $f(x)\geqslant\beta$ (donc β est un minimum de *f* sur]–∞ ; +∞[)
- Pour x_1 et x_2 appartenant à]–∞ ; α[(donc $x_1<\alpha$ et $x_2<\alpha$), on a :

  Si $x_1<x_2$, (donc $x_1-x_2<0$) alors

  $f(x_1)-f(x_2)=[a(x_1-\alpha)^2+\beta]-[a(x_2-\alpha)^2+\beta]$

  $f(x_1)-f(x_2)=a(x_1-\alpha)^2-a(x_2-\alpha)^2=a[(x_1-\alpha)^2-(x_2-\alpha)^2]$

  $f(x_1)-f(x_2)=a[(x_1-\alpha)^2-(x_2-\alpha)^2]=a[[(x_1-\alpha)-(x_2-\alpha)][(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)]]$

  $f(x_1)-f(x_2)=a[[x_1-x_2][x_1+x_2-2\alpha]]$ avec $x_1-x_2<0$ et $x_1+x_2<2\alpha$ donc

  $f(x_1)-f(x_2)>0$ et $f(x_1)>f(x_2)$

  Ainsi *f* est décroissante sur]–∞ ; α[

On démontre les autres cas de la même manière.

3) Représentation graphique

Définition :

La courbe représentative d'une fonction polynôme $P: x \longmapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est une **parabole**.

Propriétés :

- Son **sommet** S (α ; β) a pour abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et pour ordonnée β = P(α).
- La droite d'équation $x = \alpha$ est axe de symétrie de la parabole.

Démonstration :

$P(\alpha+t) = a(\alpha+t)^2 + b(\alpha+t) + c = a\alpha^2 + b\alpha + c + 2a\alpha t + at^2 + bt = P(\alpha) + at^2 + t(2a\alpha + b)$

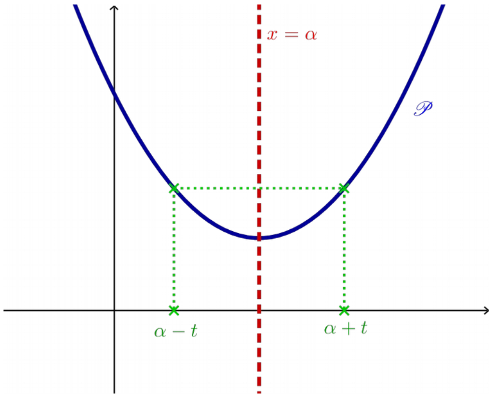
Or $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ donc $2a\alpha + b = 0$. Ainsi $P(\alpha+t) = P(\alpha) + at^2$

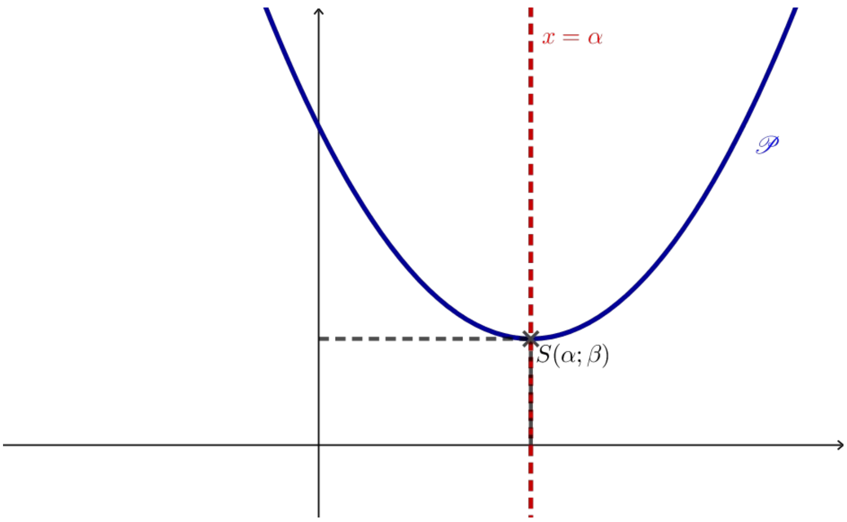
De la même manière on a :

$P(\alpha-t) = P(\alpha) + at^2 - t(2a\alpha + b) = P(\alpha) + at^2$

Donc, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\alpha+t) = P(\alpha-t)$.

Ainsi $x = \alpha$ est axe de symétrie de la parabole.





Remarque :

Le signe de *a* permet de connaître l'allure de la parabole :

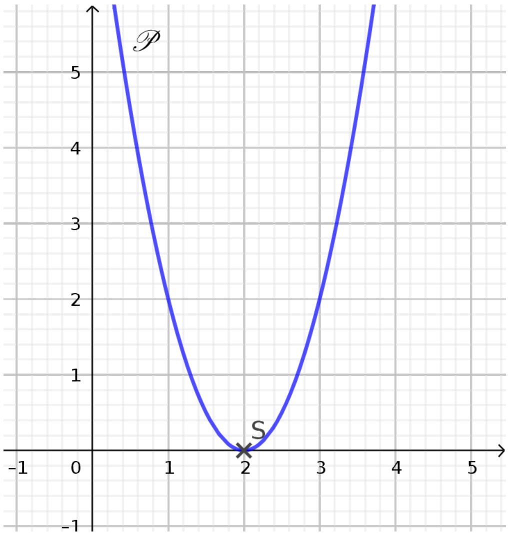
Si $a>0$, alors la parabole est tournée vers le haut.

Si $a<0$, alors la parabole est tournée vers le bas.

Exemples :

- La courbe représentative de la fonction P définie sur ℝ par $P(x)=2x^2-8x+8$ est une parabole $\mathscr{P}$ de sommet S(2 ; 0).

Comme $a=2$ (positif), la parabole $\mathscr{P}$ est tournée vers le haut.



- La courbe représentative de la fonction Q définie sur ℝ par $Q(x)=-0{,}5x^2+4x-2$ est une parabole $\mathscr{C}_Q$ de sommet S'(4 ; 6).

Comme $a=-0{,}5$ (négatif), la parabole $\mathscr{C}_Q$ est tournée vers le bas.