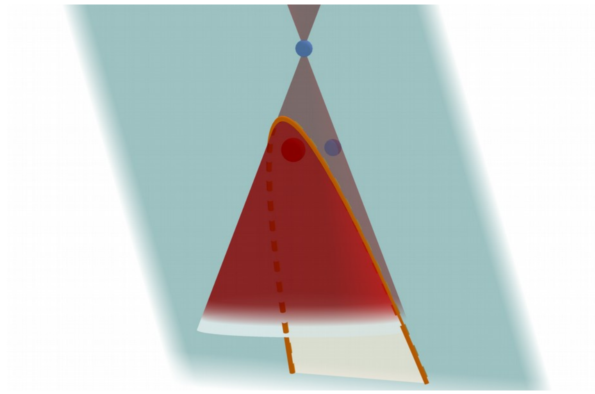
Chapitre 12

Fonctions et expressions algébriques

I. Fonction polynôme de degré 2



1) *Étude préliminaire*

La fonction $x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a \neq 0$

Remarque :
La fonction est définie sur ℝ par l'enchaînement :
$x \rightarrow (x-\alpha) \rightarrow (x-\alpha)^2 \rightarrow a(x-\alpha)^2 \rightarrow a(x-\alpha)^2+\beta$

La **fonction carré** est un cas particulier de la famille des fonctions *f* de la forme $x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ ($a=1$, $\alpha=0$, $\beta=0$).

Définition :
La courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal (O ; I, J) est appelé **parabole**, notée $\mathscr{P}$.

Propriétés :
- Si $a>0$: *f* est alors strictement décroissante puis strictement croissante.
- Si $a<0$: *f* est alors strictement croissante puis strictement décroissante.

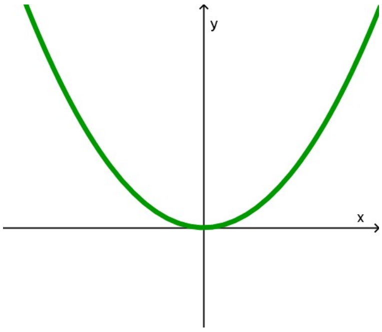
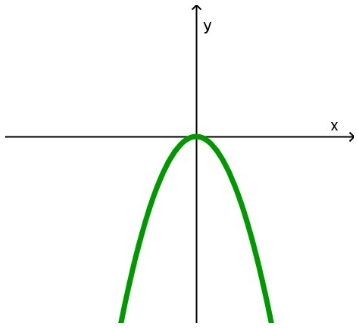
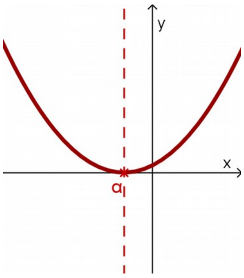
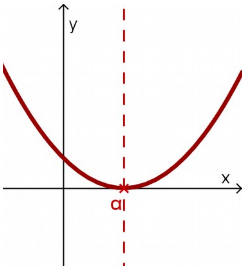
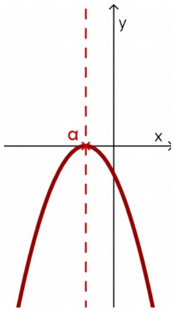
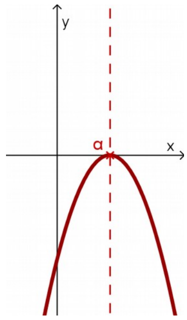
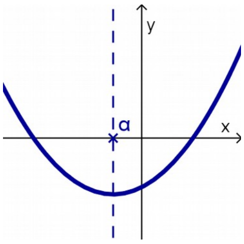
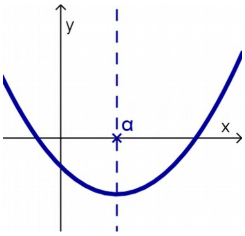
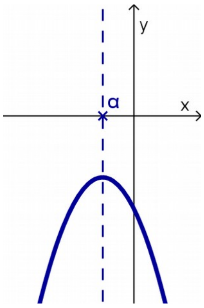
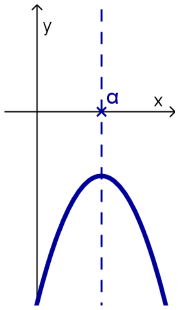
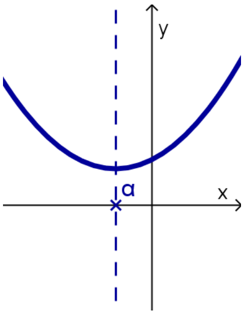
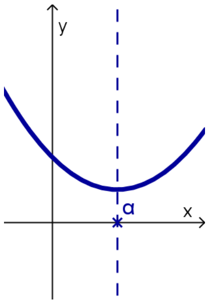
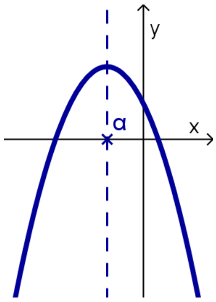
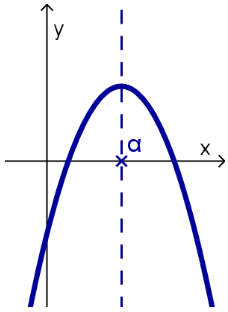
Exemple :
La fonction carré est décroissante (sur]–∞ ; 0]) puis croissante (sur [0 ; +∞[).

Remarque :
Une parabole possède un point correspondant à l'**extremum** de la fonction.
Ce point s'appelle le **sommet** *S* de la parabole.
On montre que $S(\alpha;\beta)$. En effet,
$f(x)-f(\alpha)=a(x-\alpha)^2$ et l'extremum de *f* est atteint pour $x_0=\alpha$ et vaut $f(x_0)=f(\alpha)=\beta$.

Propriété :
Soit x_0 l'abscisse du sommet de *f*.
La courbe représentative de *f* est **symétrique** par rapport à la droite d'équation $x=x_0$.

Remarque :
On montre que $x_0=\alpha$. En effet,
$f(x-\alpha)=f(x+\alpha)$, ce qui prouve que la droite d'équation $x=\alpha$ est **axe de symétrie** de $\mathscr{P}$.

Tableau de synthèse pour $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$a>0$</td><td colspan="2">$a<0$</td></tr>
<tr><td>$a\,x^2$</td><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td></td><td>$\alpha<0$</td><td>$\alpha>0$</td><td>$\alpha<0$</td><td>$\alpha>0$</td></tr>
<tr><td>$a(x-\alpha)^2$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a(x-\alpha)^2+\beta$ — $\beta<0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\beta>0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

2) Fonction polynôme de degré 2

Définition :

Soient a, b et c trois nombres réels avec ***a* non nul**.
On appelle **fonction polynôme de degré 2** (ou **trinôme**) toute fonction f qui à chaque réel x, associe le réel ax^2+bx+c.

Exemples :

- $f(x)=-3x^2+x$ (a=-3, b=1, c=0).
- $h(x)=3(x-2)(x-3)$ est un trinôme car en développant, on obtient :
  $h(x)=(3x-6)(x-3)=3x^2-9x-6x+18=3x^2-15x+18$.
- $k(x)=(2x-1)^2+3$ est un trinôme, car $k(x)=4x^2-4x+1+3=4x^2-4x+4$.
- La **fonction carré** est la plus simple des fonctions trinôme (a=1, b=0, c=0).
- $g(x)=-4x$ n'est pas une fonction polynôme de second degré.

Propriété :

Toute fonction polynôme de degré 2, $f(x)=ax^2+bx+c$ peut se mettre sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

Démonstration :

$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=a(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+\beta=ax^2-2a\alpha x+a\alpha^2+\beta$.

On pose alors $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ (on sait que a≠0) et $\beta=-a\alpha^2+c$.

On obtient alors $f(x)=ax^2-2a\times\left(-\dfrac{b}{2a}\right)x+a\alpha^2+(-a\alpha^2+c)=ax^2+bx+c$.

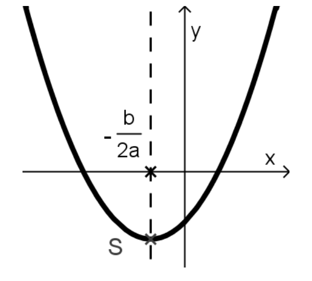
Remarques :

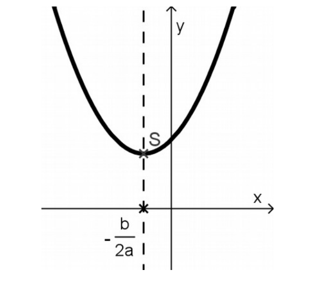
- ax^2+bx+c est la **forme développée** de *f(x)*.
- $a(x-\alpha)^2+\beta$ est la **forme canonique** de *f(x)*.
- Il est parfois possible de factoriser *f(x)*. On obtient alors $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
  $a(x-x_1)(x-x_2)$ est la **forme factorisée** de *f(x)*.

En utilisant les résultats précédents on a donc :

$a>0$:

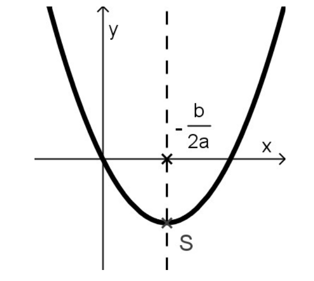
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		↘	m	↗	

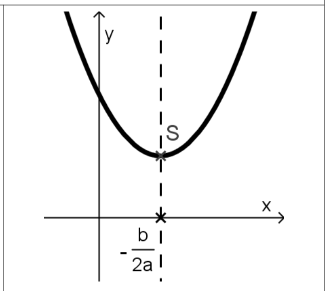




$a<0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		↗	M	↘	





3) *Équation produit*

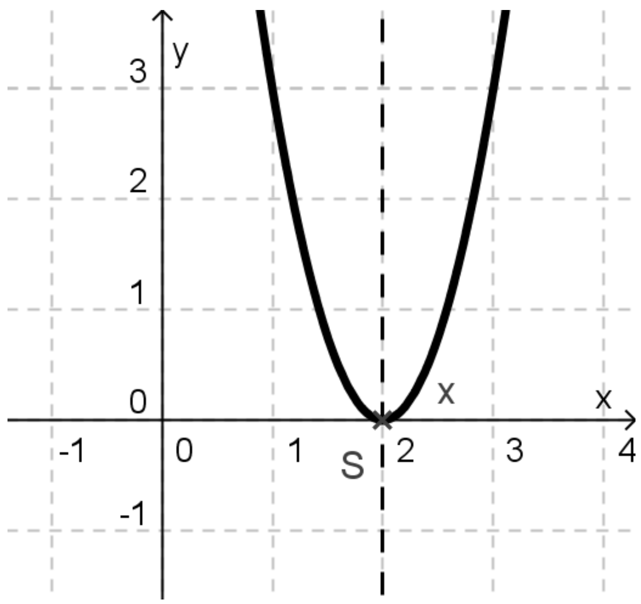
Propriété :
Soient *m*, *n*, *p* et *q* quatre nombres réels avec *m* et *n* non nuls.
L'**équation produit** $(mx+p)(nx+q)=0$ possède **deux solutions** réelles $x_1=-\frac{p}{m}$ et $x_2=-\frac{q}{n}$.

Exemple :
L'équation $(2x+1)(-5x+4)=0$ admet pour solutions $x_1=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{4}{5}$.

Remarques :
- Les deux solutions peuvent éventuellement être confondues.
- Si une fonction polynôme du second degré peut se mettre sous cette forme factorisée, c'est qu'elle peut s'annuler, donc couper l'axe des abscisses en 1 ou 2 points.

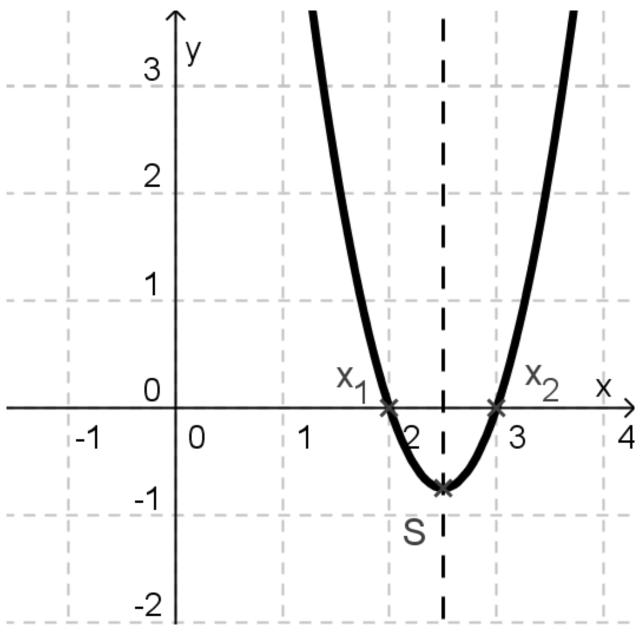
Exemples :

$f(x)=3(x-2)^2$



La solution de $3(x-2)^2=0$ est $x=2$.

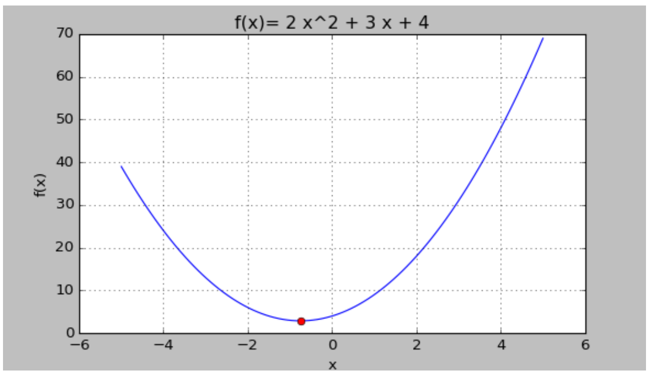
$h(x)=3(x-2)(x-3)$



Les solutions de $3(x-2)(x-3)=0$ sont :
$x_1=2$ et $x_2=3$

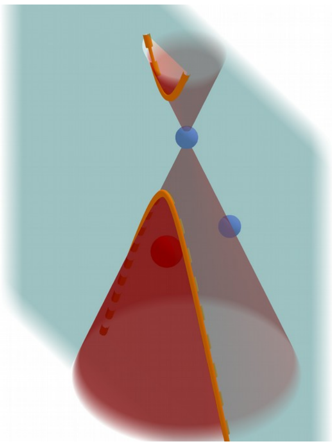
```python
# On importe les bibliothèques nécessaires au tracé
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Fonction annexe pour calculer les images par la fonction
def fonction_polynome(a, b, c, x):
    """ retourne la valeur de f(x)
    avec f(x) = a * x^2 + b * x + c"""
    return a * x ** 2 + b * x + c

def polynome(a, b, c):
    """ Paramètres : les coefficients a, b, c de la fonction polynôme :
    f(x) = a * x^2 + b * x + c avec a ≠ 0
    Retourne les paramètres a, α, β de la forme canonique :
    f(x) = a * (x - α)^2 + β"""
    # Vérification des paramètres
    if a == 0:
        print("Fonction affine")
        return None
    # On imprime la fonction polynôme
    print("f(x) =", a, "x^2 +", b, "x +", c)
    # Calcul des coefficients de la forme canonique
    α = -b / (2 * a)
    β = fonction_polynome(a, b, c, α)
    # Variations de f
    if a > 0:
        print("f est strictement décroissante sur ]-∞;", α,"[")
        print("f est strictement croissante sur ]", α,"; +∞[")
    else:
        print("f est strictement croissante sur ]-∞;", α,"[")
        print("f est strictement décroissante sur ]", α,"; +∞[")
    # Sommet et forme canonique
    print("Son sommet est le point : (", α,";", β, ")")
    print("forme canonique : f(x) =", a, "* (x -", α, ")^2 +", β)
    # Tracé de la courbe
    x = np.linspace(-5, 5, 100)
    plt.plot(x, fonction_polynome(a, b, c, x))
    plt.plot(α, β, 'ro')
    plt.grid()
    plt.ylabel("f(x)")
    plt.xlabel("x")
    plt.title("f(x)= " +str(a) + " x^2 + " + str(b) + " x + " + str(c))
    plt.show()
    # Retourne les paramètres
    return (a, α, β)
```

```
>>> polynome(2,3,4)
f(x) = 2 x^2 + 3 x + 4
f est strictement décroissante sur ]-∞; -0.75 [
f est strictement croissante sur ] -0.75 ; +∞[
Son sommet est le point : ( -0.75 ; 2.875 )
forme canonique : f(x) = 2 * (x - -0.75 )^2 + 2.875
```



II. Fonctions homographiques

1) *Étude préliminaire*



La fonction $x \longmapsto \dfrac{\lambda}{x-\alpha}+\beta$

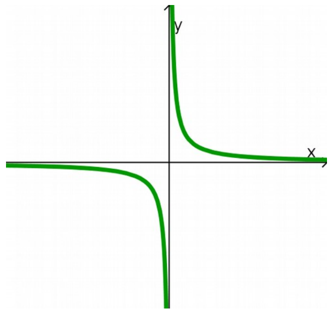
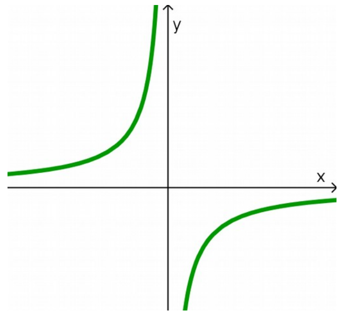
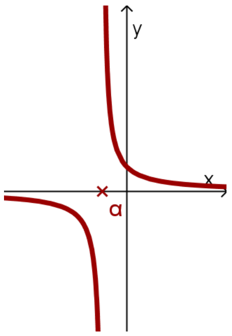
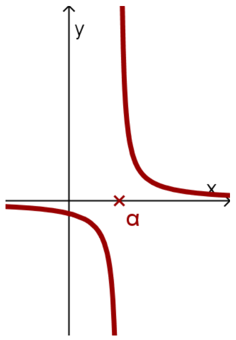
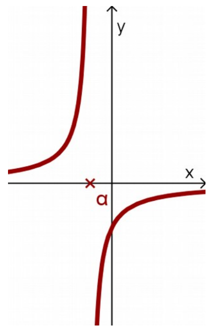
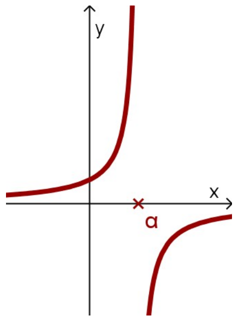
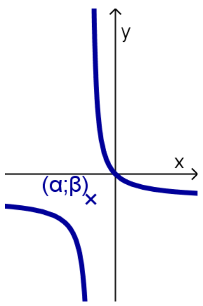
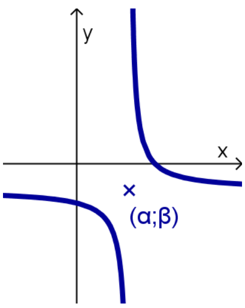
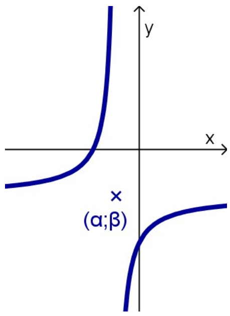
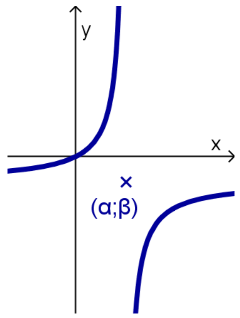
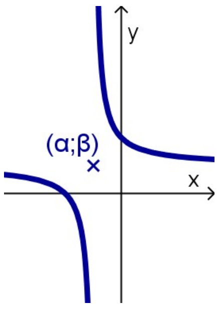
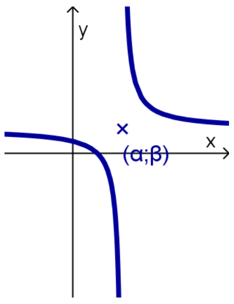
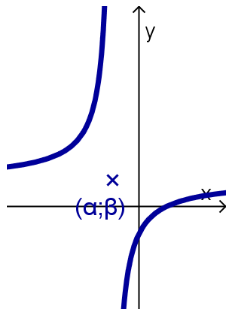
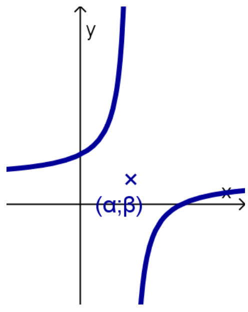
Remarque :
La fonction est définie sur $\mathbb{R}-\{\alpha\}$ par l'enchainement :
$x \to x-\alpha \to \dfrac{1}{x-\alpha} \to \dfrac{\lambda}{x-\alpha} \to \dfrac{\lambda}{x-\alpha}+\beta$

La **fonction inverse** est un cas particulier de la famille des fonctions *f* de la forme $x \longmapsto \dfrac{\lambda}{x-\alpha}+\beta$ ($\lambda=1$, $\alpha=0$, $\beta=0$).

Propriétés :
- Si $\lambda>0$: *f* est alors strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$.
- Si $\lambda<0$: *f* est alors strictement croissante sur $]-\infty;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$.

Remarque :
Une hyperbole possède un **centre de symétrie** $M(\alpha;\beta)$.
En effet :
$$f(\alpha+h)-\beta=\left(\frac{\lambda}{(\alpha+h)-\alpha}+\beta\right)-\beta=\frac{\lambda}{h}=-\left(-\frac{\lambda}{h}\right)=-\left(\frac{\lambda}{-h}\right)=-\left(\frac{\lambda}{(\alpha-h)-\alpha}+\beta\right)+\beta=-f(\alpha-h)+\beta$$
La courbe représentative de *f* est **symétrique** par rapport au point de coordonnées $(\alpha;\beta)$.

Tableau de synthèse pour $f(x)=\dfrac{\lambda}{x-\alpha}+\beta$

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">$\lambda>0$</td><td colspan="2">$\lambda<0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{\lambda}{x}$</td><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$\alpha<0$</td><td>$\alpha>0$</td><td>$\alpha<0$</td><td>$\alpha>0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{\lambda}{x-\alpha}$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\dfrac{\lambda}{x-\alpha}+\beta$</td><td>$\beta<0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\beta>0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline f(x) & & \searrow & \| & \searrow & \end{array}$</td><td colspan="2">$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline f(x) & & \nearrow & \| & \nearrow & \end{array}$</td></tr>
</table>

2) *Fonction homographique*

Définition :
Soient a, b, c et d quatre nombres réels (avec c et $ad - bc$ non nuls).
On appelle **fonction homographique** toute fonction f qui, à chaque réel x n'annulant pas le dénominateur, associe le réel $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Exemples :

- $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ (a=2, b=1, c=1, d=-3).
- La **fonction inverse** est la plus simple des fonctions homographiques (a=0, b=1, c=1, d=0).

Remarque :
L'**ensemble de définition** de $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ est $D_f=\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

Exemple :
$f(x)=\frac{4x-1}{2x-3}$. $D_f=\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ car $2x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{3}{2}$.

Remarque :
Dans le cas $c\neq 0$ et $ad-bc=0$, f n'est pas homographique mais une fonction constante.

Exemple :
Si $a=2$, $b=2$, $c=1$, $d=1$, alors $ad-bc=2-2=0$ et $f(x)=\frac{2x+2}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}$.
Ainsi, pour tout $x\neq -1$, $f(x)=2$.

Propriété :
Toute fonction homographique peut s'écrire sous la forme $x\longmapsto\frac{\lambda}{x-\alpha}+\beta$.

Démonstration :
On sait que $a\neq 0$ et $c\neq 0$. Donc,

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}\times\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}\times\frac{x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}\times\left(\frac{x+\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)=\frac{a}{c}\times\left(1+\frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}}\right)$$

On a donc :

$$f(x)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{a}{c}\times\frac{bc-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} .$$

En posant $\alpha=-\frac{d}{c}$, $\beta=\frac{a}{c}$, $\lambda=\frac{bc-ad}{c^2}$, on a bien $f(x)=\frac{\lambda}{x-\alpha}+\beta$.

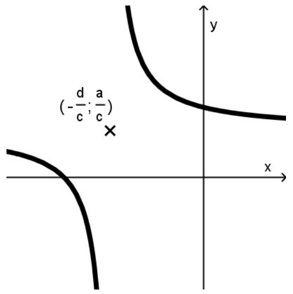
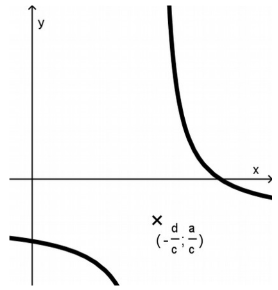
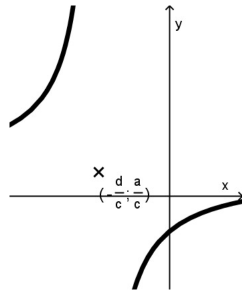
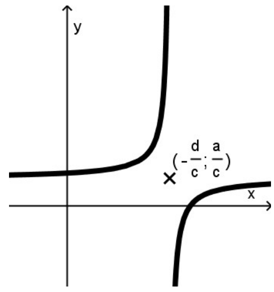
En utilisant les résultats précédents on a donc :

<table>
<tr><th colspan="2">$bc-ad>0$</th><th colspan="2">$bc-ad<0$</th></tr>
<tr><td colspan="2">

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

</td><td colspan="2">

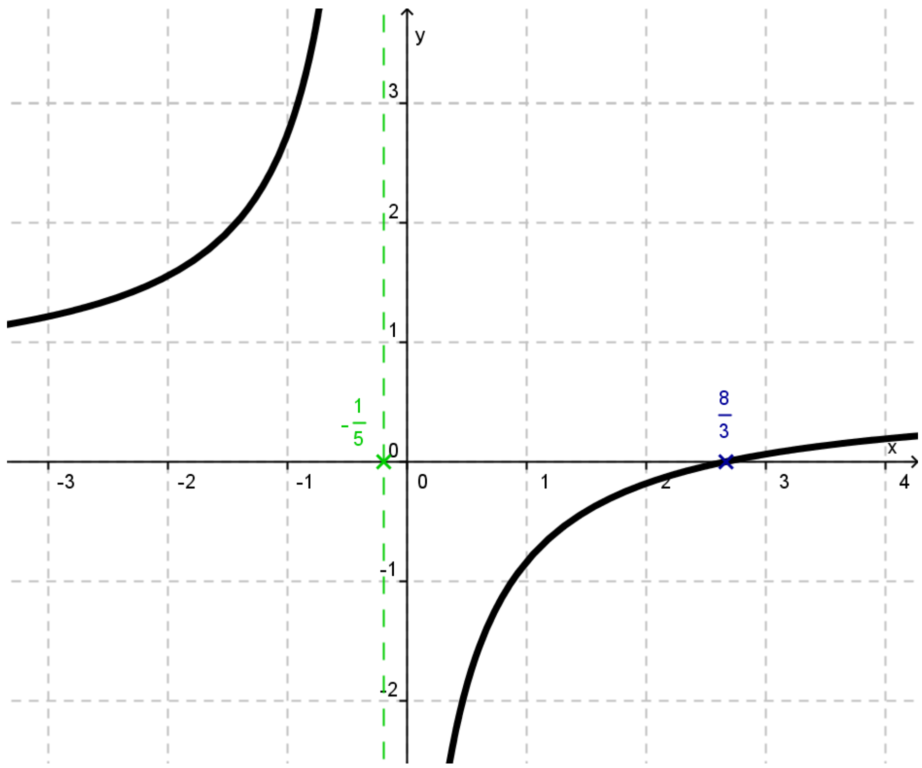
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

3) *Équation quotient*

Propriété :
Soient a,b,c et d quatre nombres réels avec a, c et $bc-ad$ non nuls.
L'**équation quotient** $\frac{ax+b}{cx+d}=0$ n'a de sens que pour $x\neq-\frac{d}{c}$ et admet pour **unique solution** $-\frac{b}{a}$.

Exemple :
L'équation $\frac{3x-8}{5x+1}=0$ est définie pour $x\neq-\frac{1}{5}$ et admet pour unique solution $x=\frac{8}{3}$.



```python
# On importe les bibliothèques nécessaires au tracé
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Fonction annexe pour calculer les images par la fonction
def fonction_homographique(a, b, c, d, x):
    """ retourne la valeur de f(x)
    avec f(x) = a * x^2 + b * x + c"""
    return (a * x + b) / (c * x + d)

def homographique(a, b, c, d):
    """ Paramètres : les coefficients a, b, c, d de la fonction homographique :
    f(x) = (a * x + b) / (c * x + d) avec c ≠ 0 et ad - bc ≠ 0
    Retourne les paramètres λ, α, β de la forme :
    f(x) = λ / (x - α) + β"""
    # Vérification des paramètres
    if c == 0:
        print("Fonction affine")
        return None
    if a * d - b * c == 0:
        print('Fonction "presque" constante')
        return None
    # On imprime la fonction polynôme
    print("f(x) = (", a, "x +", b, ") / (", c, "x +", d, ")")
    # Calcul des coefficients de la forme canonique
    α = -d / c
    β = a / c
    λ = (b * c - a * d)/ (c  ** 2)
    # Variations de f
    if λ > 0:
        print("f est strictement décroissante sur ]-∞;", α,"[")
        print("f est strictement croissante sur ]", α,"; +∞[")
    else:
        print("f est strictement croissante sur ]-∞;", α,"[")
        print("f est strictement décroissante sur ]", α,"; +∞[")
    # Sommet et forme simplifiée
    print("Son centre de symétrie est le point : (", α,";", β, ")")
    print("f(x) = ", λ, "/ (x -", α, ") +", β)
    # Tracé de la courbe
    x = np.linspace(-5, 5, 100)
    plt.plot(x, fonction_homographique(a, b, c, d, x))
    plt.plot(α, β, 'ro')
    plt.grid()
    plt.ylabel("f(x)")
    plt.xlabel("x")
    plt.title("f(x)= ("+str(a)+"x + "+str(b)+") / ("+str(c)+"x + "+str(d)+")")
    plt.show()
    # Retourne les paramètres
    return (λ, α, β)
```

```
>>> homographique(3,-5,2,1)
f(x)  =  ( 3 x + -5 ) / ( 2 x + 1 )
f est strictement croissante sur ]-∞; -0.5 [
f est strictement décroissante sur ] -0.5 ; +∞[
Son centre de symétrie est le point : ( -0.5 ; 1.5 )
f(x)  =   -3.25 /  (x - -0.5 ) + 1.5
```