Chapitre 3

Suites numériques

I. Comportement d'une suite

1) Monotonie

Définitions :

- Une suite (u_n) est **strictement croissante** à partir du rang *p* si, pour tout entier $n \geqslant p$:
$$u_{n+1} > u_n$$
- Une suite (u_n) est **strictement décroissante** à partir du rang *p* si, pour tout entier $n \geqslant p$:
$$u_{n+1} < u_n$$
- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang *p* si, pour tout entier $n \geqslant p$:
$$u_{n+1} \geqslant u_n$$
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang *p* si, pour tout entier $n \geqslant p$:
$$u_{n+1} \leqslant u_n$$
- Une suite (u_n) est **stationnaire** ou constante à partir du rang *p* si, pour tout entier $n \geqslant p$:
$$u_{n+1} = u_n$$

Remarques :

- Si une suite (u_n) est définie de manière explicite telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variations de (u_n) suivent celles de *f*.
- On peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:
  si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout *n*, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$, la suite (u_n) est décroissante.
- Si $u_n > 0$ pour tout *n*, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :
  Si pour tout *n*, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ avec $u_n > 0$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

Exemples :

- Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + n + 5$.
  On a :
$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + (n+1) + 5 - (2n^2 + n + 5)$$
$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 4n + 2 + n + 1 + 5 - 2n^2 - n - 5$$
$$u_{n+1} - u_n = 4n + 3$$
  $u_{n+1} - u_n > 0$ car $n \geqslant 0$, d'où $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Donc (u_n) est strictement croissante (comme la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + x + 5$ sur $\mathbb{R}^+$).

- Soit la suite (v_n) définie sur ℕ par $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$.

  On a $v_{n+1} - v_n = v_n - 2 - v_n = -2$.
  D'où $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Donc (v_n) est strictement décroissante (contrairement à la fonction f définie par : $x \longmapsto x - 2$ qui est croissante sur ℝ).

2) *Suites bornées*

Définitions :
Soit *M* et *m* deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :
- **majorée** par *M* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
- **minorée** par *m* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
- **bornée** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

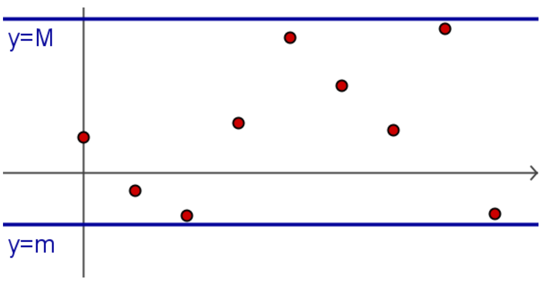
Remarque :
On dit aussi que *M* est un **majorant** et *m* un **minorant** de la suite (u_n).
m et *M* sont des nombres réels indépendants de *n*.

Exemples :
- Soit la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1} = \left\{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots\right\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.
  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif.
- Soit la suite $(n^2)_{n \geqslant 0} = \{0; 1; 4; \ldots\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geqslant 0$. Cette suite est aussi minorée par 0, qui est,en plus, le **minimum** de la suite car il est atteint au rang 0.

Remarques :
- Une suite à termes tous positifs est minorée par 0.
- Une suite croissante est minorée par son premier terme : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n$ et une suite décroissante est majorée par son premier terme : $u_n \leqslant \ldots \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
- Si une suite est majorée par *M*, elle a une infinité de majorants. En particulier tout nombre supérieur à *M* est aussi un majorant de la suite.

Représentation graphique d'une suite bornée :
- Sur la droite numérique :
  tous les nombres u_n sont compris entre *m* et *M*.

- Dans le plan :
  tous les points de coordonnées $(n; u_n)$ sont situés entre les droites d'équations $y = m$ et $y = M$.



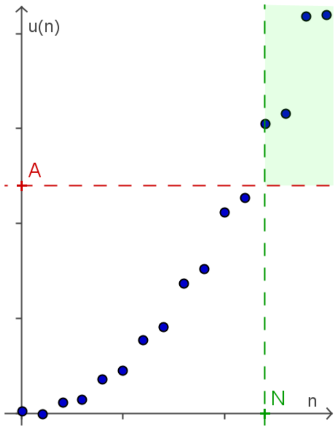
II. Limite d'une suite

1) *Limite infinie*

Définition :
Soit une suite u et un réel A.
On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang N.

Pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n > A$.

On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

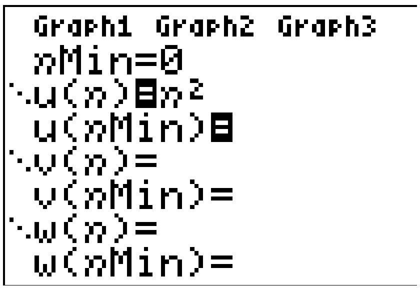


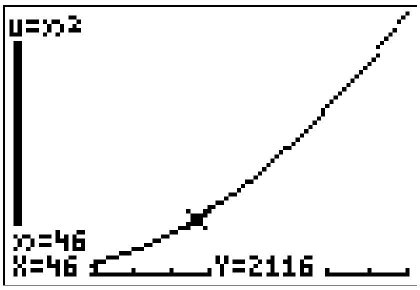
Remarques :

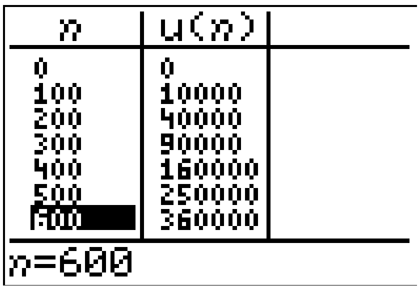
- Lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ on dit que la suite (u_n) **diverge vers +∞**.
- Concrètement, les termes deviennent aussi grand qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.
- De la même façon :
  u_n tend vers -∞ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang N.
  Pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n < A$.
  On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemples :

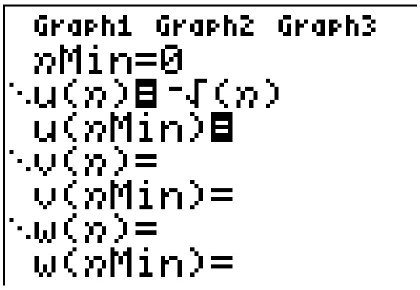
- La suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = n^2$ a pour limite +∞.
  Soit A un réel négatif, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite puisque $n^2 \geqslant 0$.
  Soit A un réel strictement positif, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang $E(\sqrt{A})+1$ où E désigne la fonction partie entière.
  En effet, si $n \geqslant E(\sqrt{A})+1$ alors $n > \sqrt{A}$, puis $n^2 > A$ et donc $u_n > A$.

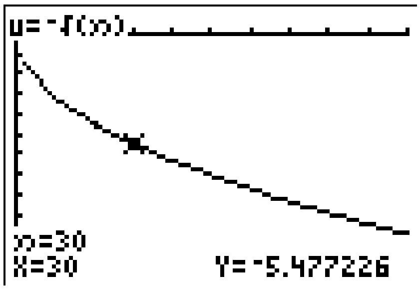


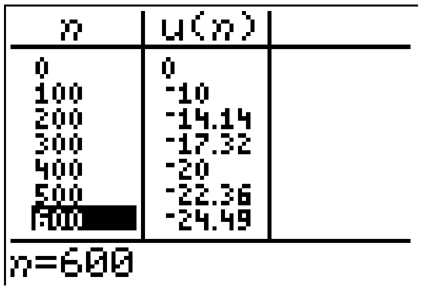




- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=-\sqrt{n}$ a pour limite $-\infty$.
  Soit B un réel positif, l'intervalle $]-\infty\,;B[$ contient tous les termes de la suite (v_n).
  Soit B un réel négatif, l'intervalle $]-\infty\,;B[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang $E(B^2)+1$.
  En effet, si $n\geqslant E(B^2)+1$ alors $n>B^2$ puis $\sqrt{n}>-B$ et donc $v_n<B$.







Limites des suites usuelles

Propriété :
Les suites $(\sqrt{n})$, (n^2), (n^3), … , (n^p), où $p\in\mathbb{N}^*$ont pour limite $+\infty$.

Démonstration :
Soit A un réel. Comme A est destiné à être aussi grand que l'on veut, on suppose $A>0$.
Alors dès que $n>A^2$, on a $A<\sqrt{n}\leqslant n\leqslant n^2\leqslant\ldots\leqslant n^p$.
Donc $\sqrt{n}$, n, n^2, … , n^p appartiennent à $]A\,;+\infty[$ dès que $n>A^2$. Ils ont donc pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Propriété :
Les suites géométriques (q^n) où $q>1$ divergent vers $+\infty$.

pour q réel tel que $q>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$

Démonstration :
Soit $q>1$. Posons $q=1+a$ où $a>0$.

Préliminaire : montrons par récurrence que pour tout $n\geqslant 0$, $(1+a)^n\geqslant 1+na$.

- Initialisation :
  Pour $n=0$, $(1+a)^n=1$ et $1+na=1$ donc l'inégalité est vérifiée pour $n=0$.
- Hérédité :
  Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $(1+a)^n\geqslant 1+na$. Montrons que $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a$.
  $(1+a)^n\geqslant 1+na$ et $(1+a)>0$ donc $(1+a)(1+a)^n\geqslant(1+a)(1+na)$.
  Soit $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+na+a+na^2$, d'où $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a+na^2$.
  Comme $n\geqslant 0$ et $a^2>0$, $1+(n+1)a+na^2\geqslant 1+(n+1)a$.
  Ainsi $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a$.
- Conclusion :
  Pour tout $n\geqslant 0$, $(1+a)^n\geqslant 1+na$.

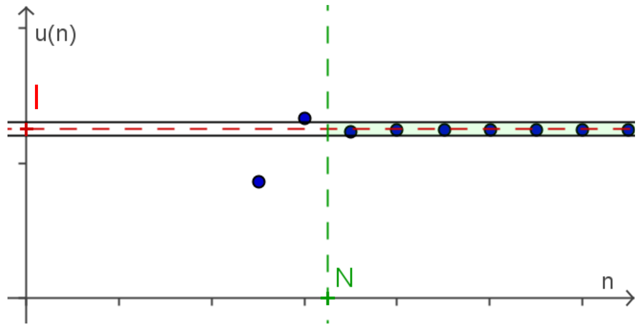
Soit A un réel. Dès que $n\geqslant\dfrac{A-1}{a}$ on aura $1+na\geqslant A$ et donc $(1+a)^n\geq A$.

La suite $((1+a)^n)$ c'est-à-dire la suite (q^n) a donc pour limite $+\infty$.

2) Limite finie

Définition :
Soit une suite u et un réel ℓ.
On dit que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi « petit » soit-il) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang N.

Pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n \in I$.



Propriété :
Si une suite (u_n) a une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$, cette limite est **unique**.
On la note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration :
Supposons que (u_n) admette deux limites l et l' avec $l < l'$:

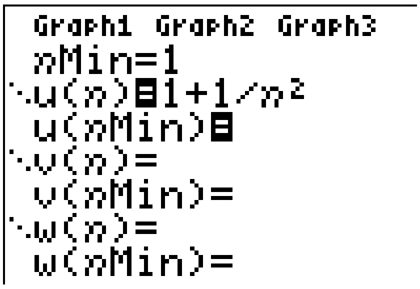
- $\left] l-1 ; \frac{l+l'}{2} \right[$ contient tous les termes u_n à partir du rang n_0.
- $\left] \frac{l+l'}{2} ; l'+1 \right[$ contient tous les termes u_n à partir du rang n_1.

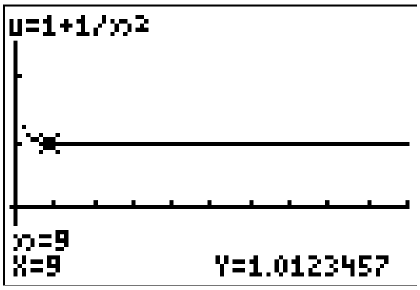
Pour n plus grand que n_0 et n_1, u_n appartiendrait à la fois aux deux intervalles qui sont disjoints.
C'est impossible donc (u_n) ne peut pas admettre deux limites finies distinctes.

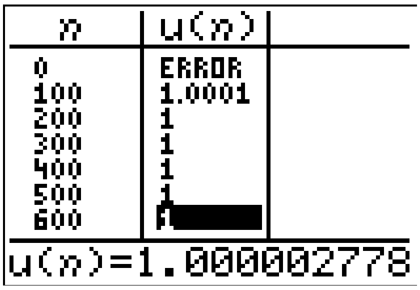
Remarques :

- Lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ on dit que la suite (u_n) **converge vers *l*.**
- Concrètement, les termes u_n deviennent aussi proche de l qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.
  On peut restreindre l'intervalle I à tout intervalle de la forme $] l - \varepsilon ; l + \varepsilon[$, où $\varepsilon > 0$.
- Quand n tend vers $+\infty$, « u_n tend vers l » équivaut à « $u_n - l$ tend vers 0 »
  $u_n \in] l - \varepsilon ; l + \varepsilon[$ s'écrit $| u_n - l | < \varepsilon$.
- Si (u_n) converge vers l, les suites (u_{n+1}), (u_{2n}), (u_{2n+1}) convergent aussi vers l.
- Une suite convergente est bornée.

Exemple :
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ est convergente et sa limite est 1.
Considérons un intervalle ouvert contenant 1 et symétrique par rapport à 1.
Il est donc de la forme $]1-\varepsilon ; 1+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.
Tous les termes de la suite sont dans cet intervalle à partir du rang $E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$.
En effet, si $n \geqslant E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$, on a $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ puis $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$. Comme $\frac{1}{n^2} > 0$ et $\varepsilon > 0$, on a aussi $-\varepsilon < \frac{1}{n^2}$. D'où $-\varepsilon < \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, puis $1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{n^2} < 1 + \varepsilon$. Donc $1 - \varepsilon < u_n < 1 + \varepsilon$.







Limites des suites usuelles

Propriétés :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ les suites $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ convergent vers 0.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

- Pour tout réel q tel que $-1 < q < 1$, la suite géométrique (q^n) converge vers 0.

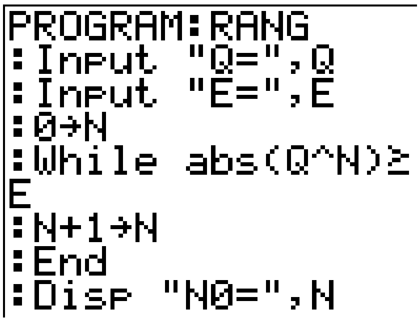
Pour q réel tel que $|q| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

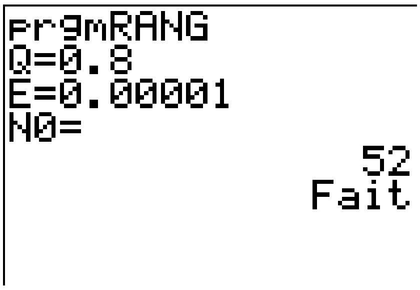
Algorithme :

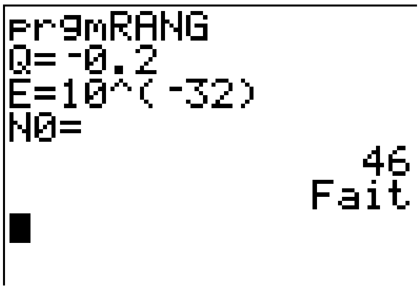
Déterminer le rang à partir duquel $|q^n| < \varepsilon$ pour $|q| < 1$

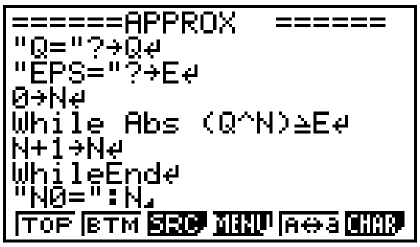
```
n ← 0
Tant que |q^n| ⩾ ε faire
    n ← n+1
Fin Tant que
```

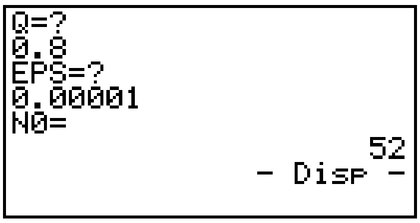
Calculatrice :

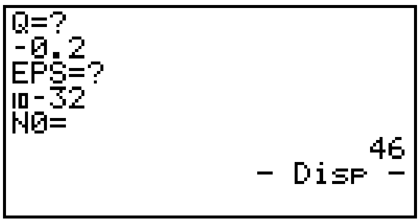










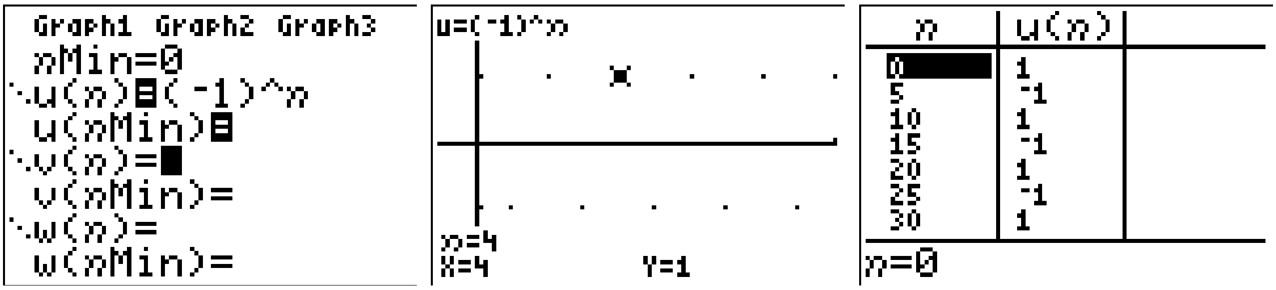


3) Suites sans limite

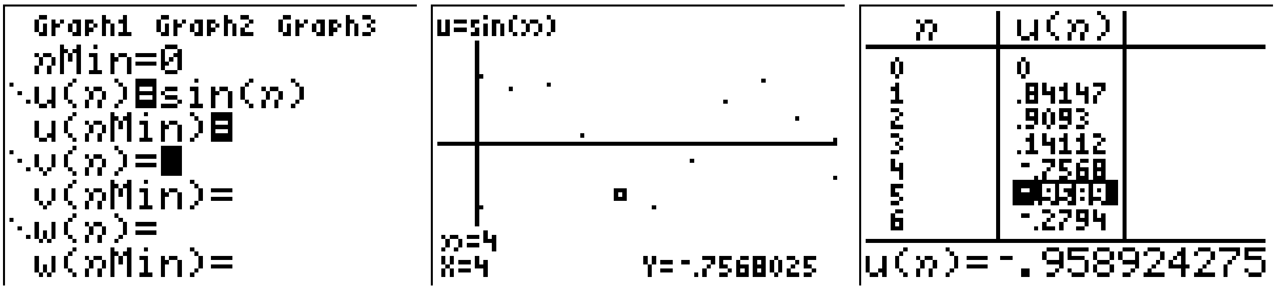
Une suite n'a pas forcément de limite. On dit également qu'elle **diverge**.

Exemples :

- La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n$ est divergente.
  En effet, un intervalle contenant 1 mais pas -1 ne contiendrait qu'un terme sur deux de la suite et ne répondrait donc pas à la définition de la limite d'une suite.



- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\sin n$ est divergente.
  En effet les termes de la suite se répartissent uniformément dans l'intervalle $[-1;1]$.
  La suite (v_n) n'a donc pas de limite.



Limites des suites usuelles

Propriété :
Pour tout réel q tel que $q\leqslant-1$, la suite géométrique (q^n) diverge.
Pour q réel tel que $q\leqslant-1$, q^n n'admet pas de limite.

III. Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Soit l et l' deux réels.

1) Somme de deux suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$\boldsymbol{l+l'}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	**On ne peut pas conclure directement**

Remarque :
Dans le cas où l'on ne peut pas conclure, on dit que l'on a une **forme indéterminée**.

2) Produit de deux suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\boldsymbol{l \times l'}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{+\infty}$	**On ne peut pas conclure directement**

3) Quotient de deux suites

On suppose que pour tout entier n, $v_n \neq 0$.
Cas où la suite ***u* est positive** à partir d'un certain rang.

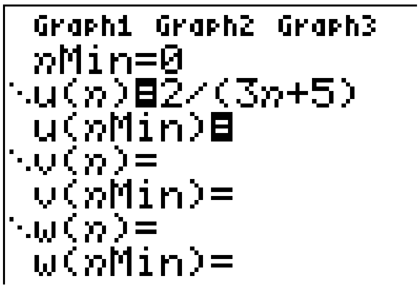
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	0	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n<0$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\boldsymbol{\dfrac{l}{l'}}$	$\boldsymbol{0}$	**On ne peut pas conclure directement**	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	**$+\infty$ si $l'>0$** **$-\infty$ si $l'<0$**	**On ne peut pas conclure directement**

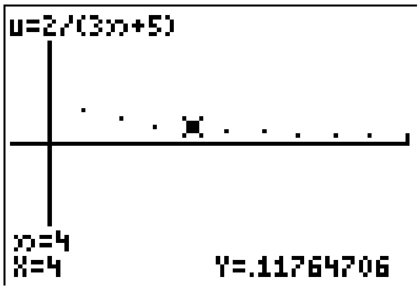
Dans le cas ou la suite ***u* est négative** à partir d'un certain rang, on construit un tableau analogue en utilisant la règle des signes.

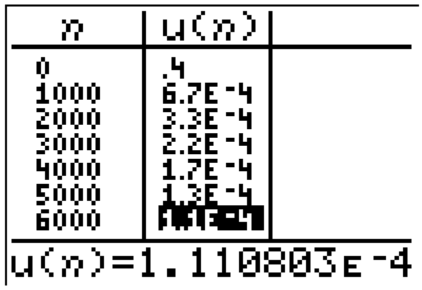
Exemples :
Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n=\frac{2}{3n+5} \quad \text{et} \quad v_n=n-\sqrt{n}$$

- Pour la suite (u_n), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2=2$ et par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+5)=+\infty$.
  Par quotient, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.







- Pour la suite (v_n), on est dans un cas où on ne peut pas conclure directement.
  En effet, on ajoute une suite qui tend vers $+\infty$ ($w_n=n$) à une suite qui tend vers $-\infty$ ($u_n=-\sqrt{n}$).
  En factorisant par n et en simplifiant, on a :

$$v_n=n\times\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}\right)=n\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et par quotient puis somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$.
  Par produit, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

IV. Propriétés sur les limites

1) Détermination de limites par comparaison

Propriétés :
Soit deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n\geqslant N$, $u_n\leqslant v_n$.

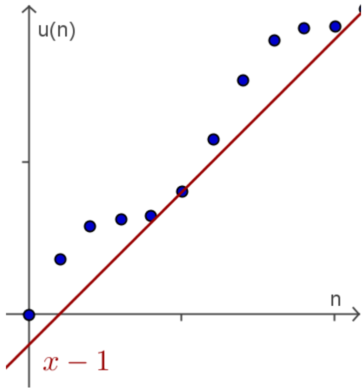
Théorème de minoration :
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

Théorème de majoration :
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

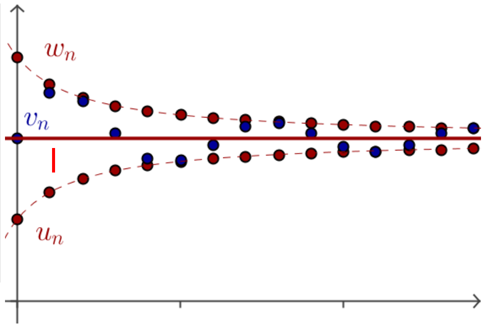
Démonstration :
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
On cherche à démontrer que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de (v_n) à partir d'un certain rang.
Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : pour tout $n\geqslant p$, $u_n>A$.
Alors pour tout entier $n\geqslant max(p;N)$, on a $v_n\geqslant u_n>A$, c'est-à-dire $v_n\in\,]A;+\infty[$.
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.
La démonstration du théorème de majoration est analogue.

Exemple :
Soit la suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n=n+\sin(n)$.
Pour tout entier n, $\sin(n)\geqslant-1$, donc $u_n\geqslant n-1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=+\infty$, donc d'après le théorème de minoration :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty.$$



Théorème des gendarmes :
On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Soit un entier N et un réel ℓ.
On suppose que pour tout entier $n\geqslant N$: $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ,
alors la suite (v_n) **converge** également vers ℓ.



Démonstration :
Soit I un intervalle contenant l. On veut démontrer que cet intervalle contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang n_0.
On utilise les hypothèses :

- (u_n) tend vers l,donc I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_1.
- (w_n) tend vers l,donc I contient tous les termes de la suite (w_n) à partir d'un certain rang n_2.
- $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ à, partir d'un certain rang N.

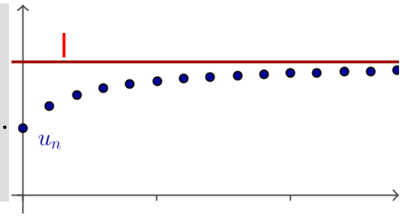
Soit $n_0=max(n_1;n_2;N)$.
I contient donc tous les termes des suites (u_n) et (w_n) à partir du rang n_0.
Et $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ pour tout $n\geqslant n_0$.
Ce raisonnement s'applique pour n'importe quel intervalle ouvert I contenant l, la suite (v_n) tend donc vers l.

Remarques :

- Ce théorème permet de montrer que la suite (v_n) a une limite **et** de connaître cette limite.
- On en déduit que si $|u_n - l|\leqslant v_n$ à partir d'un certain rang avec $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

2) Convergence monotone

Propriété :
Soit une suite (u_n) **convergent** vers un réel ℓ .
Si la suite (u_n) est **croissante**, alors la suite (u_n) est **majorée** par ℓ .
Pour tout entier n, $u_n \leqslant \ell$.



Démonstration :
On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > l$.
- Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant n_0$, $l < u_{n_0} \leqslant u_n$.
- L'intervalle] $l - 1$; u_{n_0} [est un intervalle ouvert qui contient l.
Comme la suite (u_n) converge vers l, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$,
$u_n \in] l - 1 ; u_{n_0} [$.
Ainsi pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n < u_{n_0}$.

Alors, pour tout entier $n \geqslant max(N ; n_0)$, on a $u_{n_0} \leqslant u_n$ et $u_n < u_{n_0}$.
On aboutit à une contradiction, et l'hypothèse initiale est donc fausse.
On en déduit que pour tout entier n, $u_n \leqslant l$.

Propriété :
Une suite qui **converge** est **bornée**.

Démonstration :
Soit la suite (u_n) et sa limite l.
Tout intervalle ouvert contenant l contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
L'intervalle] $l - 1$; $l + 1$[contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0 .
On raisonne par disjonction de cas.
- Si $n \geqslant n_0$, nous venons de voir que u_n est bornée par $l - 1$ et $l + 1$.
- Si $n < n_0$, nous avons un nombre fini de termes.
Il s'agit des termes de l'ensemble $\{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n_0-1}\}$. Comme il y a un nombre fini de termes, il y a un plus grand et un plus petit élément parmi eux.
Notre ensemble est donc borné.

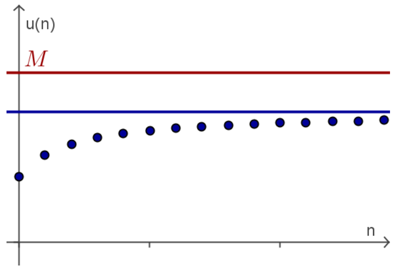
La suite (u_n) est donc bornée dans les deux cas, c'est-à-dire pour les rangs inférieurs à n_0 et à partir du rang n_0 , donc la suite (u_n) est bornée.

Exemple :
La suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = -5 + \dfrac{3}{2 + n^2}$ converge vers -5 et est bornée par -5 et -3,5.

Remarques :
- La réciproque du théorème est fausse.
Par exemple, la suite (v_n) définie sur ℕ par $v_n = (-1)^n$ est bornée mais elle diverge.
- Une suite **non bornée** est **divergente**.
Par exemple, la suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = (-1)^n \times n$ n'est pas bornée, donc elle diverge.

Théorème de convergence monotone (admis) :

- Si une suite est **croissante** et **majorée**, alors elle **converge**.
- Si une suite est **décroissante** et **minorée**, alors elle **converge**.



Remarque :
Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son existence et un majorant (ou minorant) de la limite.

Exemple :
La suite (u_n) définie sur IN par $u_n=5+\frac{1}{n+1}$ est positive, donc minorée par 0, et décroissante.
Par conséquent (u_n) est une suite convergente.

Propriétés :

- Si une suite est **croissante** et **non majorée**, alors elle tend vers +∞.
- Si une suite est **décroissante** et **non minorée**, alors elle tend vers –∞.

Démonstration :
Soit (u_n) une suite non majorée, donc pour tout $M \in$IR, il existe un rang $n_0 \in$IN tel que $u_{n_0}>M$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$ et donc $u_n>M$.
Ce qui signifie que, pour tout $M \in$IR, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]M\,;+\infty[$ à partir d'un certain rang. Donc, par définition, $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
La deuxième proposition se démontre de la même façon.

Remarque :
Une suite croissante est :

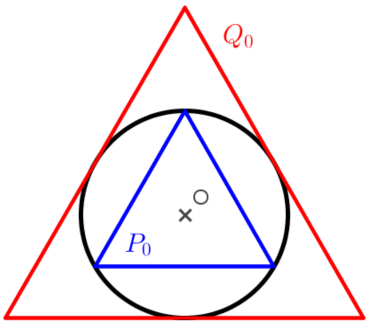
- soit majorée et convergente
- soit non majorée et divergente vers +∞.

Annexe 1 : Approximation de Π

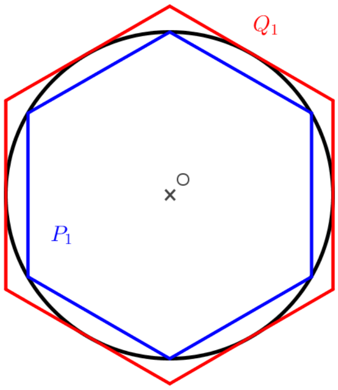
Au III[e] siècle avant J. C., Archimède établit la proposition :
« Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre augmenté d'un segment compris entre les 10 soixante et onzièmes et le septième de son diamètre »,

$$\text{d'où } 3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}\ .$$

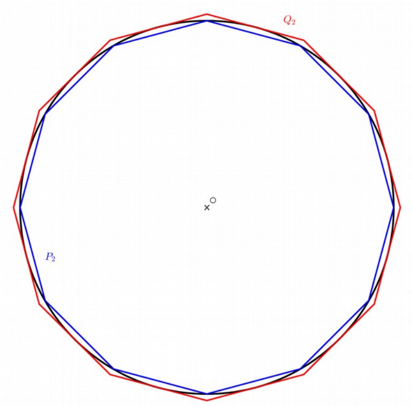
Pour trouver ce résultat, Archimède considère un cercle $\mathscr{C}$ et des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle, à 3×2^n côtés.



3 côtés



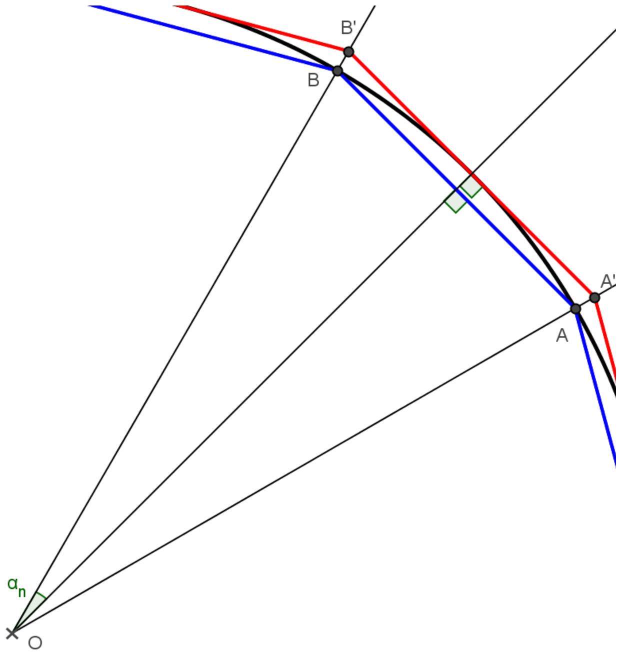
3×2 côtés



3×2^2 côtés

Prenons $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. Son demi périmètre est π.
Si p_n et q_n sont les demi-périmètres respectifs des polygones P_n inscrits et Q_n circonscrits à $\mathscr{C}$ à 3×2^n côtés, on lit géométriquement (et on admet pour la suite) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n<\pi<q_n$.

On a donc :
$p_n=3\times 2^n\times \sin\alpha_n$ et $q_n=3\times 2^n\times \tan\alpha_n$.
De plus $\alpha_n=\dfrac{\pi}{3\times 2^n}$.
On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\alpha_{n+1}=\dfrac{1}{2}\alpha_n$ puis :
$\sqrt{p_n q_{n+1}}=p_{n+1}$ et $\dfrac{2\,p_n q_n}{p_n+q_n}=q_{n+1}$.
Ainsi (q_n) est décroissante et (p_n) est croissante. Donc (p_n) et (q_n) convergent.
On vérifie ensuite que la limite commune de ses suites est π.



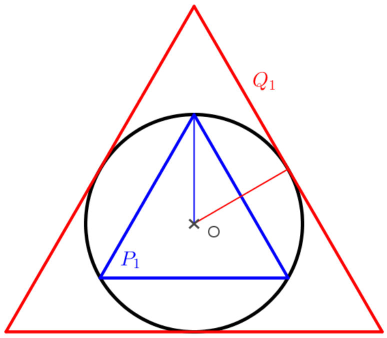
Remarque :
L'encadrement d'Archimède a été obtenu pour $n=5$ soit des polygones à 96 côtés.

Approximation :

On détermine facilement p_0 et q_o.
En effet, dans un triangle équilatéral de côté c, on a la relation $h=\frac{\sqrt{3}}{2}c$ et donc $c=\frac{2}{\sqrt{3}}h$.

Or dans P_0, $h=\frac{3}{2}$ et dans Q_0, $h'=3$.

Donc $p_0=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ et $q_0=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times 3=3\sqrt{3}$.



On peut ainsi approcher π à partir des suites (p_n) et (q_n) définies par :

$$p_0=\frac{3}{2}\sqrt{3}\,,\ q_0=3\sqrt{3}\ \text{ et }\ p_{n+1}=\sqrt{p_n q_{n+1}}\,,\ q_{n+1}=\frac{2\,p_n q_n}{p_n+q_n}$$

Calculatrice :

```
PROGRAM:PI
:Prompt N
:(3/2)*√(3)→P
:3√(3)→Q
:For(I,1,N)
:(2*P*Q)/(P+Q)→Q
:√(P*Q)→P
:End
:Disp 3*2^N,"COT
ES"
:Disp "π EST ENT
RE ",P,"ET",Q
```

```
prgmPI
N=?5
               96
COTES
π EST ENTRE
      3.141031951
ET
        3.1427146
             Done
```

```
prgmPI
N=?10
             3072
COTES
π EST ENTRE
      3.141592106
ET
      3.141593749
             Done
```

```
PROGRAM:PI
:Prompt E
:(3/2)*√(3)→P
:3√(3)→Q
:0→I
:While Q-P>E
:(2*P*Q)/(P+Q)→Q
:√(P*Q)→P
:I+1→I
:End
:Disp 3*2^I,"COT
ES"
:Disp "π VAUT",(
P+Q)/2,"AVEC UNE
 ERREUR",E
```

```
prgmPI
E=?0.001
              192
COTES
π VAUT
      3.141662761
AVEC UNE ERREUR
             .001
             Done
```

```
prgmPI
E=?0.0000001
            24576
COTES
π VAUT
      3.141592658
AVEC UNE ERREUR
             1E-7
             Done
```

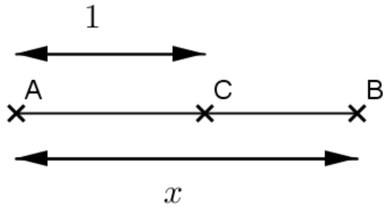
Annexe 2 : Le nombre d'or

« Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison quand, comme elle est toute entière relativement au plus grand segment, ainsi le plus grand relativement au plus petit »

Euclide

Pour Euclide, « droite » signifie « segment ».

Soit trois points *A*, *B* et *C*.
On pose $\mathrm{AB}=x$.
Si le point *C* partage le segment $[\mathrm{AB}]$ en moyenne et extrême raison, on a alors :
$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ soit $\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$ et donc *x* vérifie $x^2-x-1=0$.



Cette équation admet deux solutions : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

La solution positive, notée φ, est appelé le **nombre d'or**.

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On vérifie que φ vérifie $\phi=1+\frac{1}{\phi}$.

Suite de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci sont définis par :

$$a_0=1\ ,\ a_1=1 \text{ et } a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

On s'intéresse alors à la suite $u_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

On vérifie que $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}$.

Donc, si la suite converge, elle converge vers φ.

On montre ensuite, par récurrence, que $|u_n-\phi|\leqslant\left(\frac{1}{\phi}\right)^n|1-\phi|$ et donc que (u_n) converge effectivement vers φ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\phi$.

```
PROGRAM:NBOR
:Prompt N
:1→A
:1→B
:For(I,1,N)
:B/A→U
:B→C
:A+B→B
:C→A
:End
:Disp U
```

```
prgmNBOR
N=?10
          1.618181818
                 Done
```

```
prgmNBOR
N=?100
          1.618033989
                 Done
```

```
(1+√(5))/2
          1.618033989
```

Annexe 3 : Loi des grands nombres

Inégalité de Markov :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité P et ne prenant que des valeurs positives :

$$\forall \epsilon>0 \text{ , } \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\epsilon} \text{ .}$$

Démonstration :
Dans le cas d'une variable aléatoire discrète ne prenant qu'un nombre fini de valeurs positives.

X est à valeurs dans { x_1 , x_2 , …. , x_n }, les x_i sont rangés dans l'ordre croissant.
Soit ϵ un nombre strictement positif fixé.
On a ainsi, par exemple, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{k-1} < \epsilon \leqslant x_k \leqslant x_n$.
Par définition, $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_i P(\mathrm{X}=x_i)$.
Ainsi, on obtient, $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{k-1} x_i P(\mathrm{X}=x_i) + \sum_{\mathrm{i}=k}^{n} x_i P(\mathrm{X}=x_i)$.
Comme X est à valeurs positives $\sum_{\mathrm{i}=1}^{k-1} x_i P(\mathrm{X}=x_i) \geqslant 0$ et donc $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \geqslant \sum_{\mathrm{i}=k}^{n} x_i P(\mathrm{X}=x_i)$.
Ainsi, on a $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \geqslant \sum_{\mathrm{i}=k}^{n} \epsilon P(\mathrm{X}=x_i)$ soit $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \geqslant \epsilon \sum_{\mathrm{i}=k}^{n} P(\mathrm{X}=x_i)$.
Or $\epsilon>0$, et par conséquent, $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\epsilon} \geqslant \sum_{\mathrm{i}=k}^{n} P(\mathrm{X}=x_i)$ et $\sum_{\mathrm{i}=k}^{n} P(\mathrm{X}=x_i) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant \epsilon)$.
D'où le résultat $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\epsilon} \geqslant \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant \epsilon)$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité P, ne prenant que des valeurs positives et possédant une variance $\mathrm{V}(\mathrm{X})$:

$$\forall \epsilon>0 \text{ , } \mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{\epsilon^2} \text{ .}$$

Démonstration :
Par définition, $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2)$.
Soit ϵ un nombre strictement positif fixé : $|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})| \geqslant \epsilon \Leftrightarrow |\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|^2 \geqslant \epsilon^2$
On applique donc l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|^2$:
$\mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|^2 \geqslant \epsilon^2) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|^2)}{\epsilon^2}$ et donc $\mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{\epsilon^2}$.

Théorème de Bernoulli :

On considère une variable aléatoire $\mathrm{X_n}$ suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. On pose $\mathrm{F_n}=\frac{\mathrm{X_n}}{n}$.

$$\forall \epsilon>0 \text{ , } \mathrm{P}(|\mathrm{F_n}-p|\geqslant\epsilon)\leqslant\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} .$$

Démonstration :

$\mathrm{X_n}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ donc $\mathrm{E}(\mathrm{X_n})=np$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X_n})=np(1-p)$.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire $\mathrm{F_n}=\frac{\mathrm{X_n}}{n}$, on a donc :

$\forall \epsilon>0$, $\mathrm{P}(|\mathrm{F_n}-\mathrm{E}(\mathrm{F_n})|\geqslant\epsilon)\leqslant\frac{\mathrm{V}(\mathrm{F_n})}{\epsilon^2}$ soit $\mathrm{P}(|\mathrm{F_n}-\mathrm{E}(\mathrm{F_n})|\geqslant\epsilon)\leqslant\frac{\mathrm{V}(\mathrm{F_n})}{\epsilon^2}$ et donc,

$\forall \epsilon>0$, $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X_n}}{n}-\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X_n}}{n}\right)\right|\geqslant\epsilon\right)\leqslant\frac{\mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{X_n}}{n}\right)}{\epsilon^2}$ d'où $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X_n}}{n}-\frac{\mathrm{E}(\mathrm{X_n})}{n}\right|\geqslant\epsilon\right)\leqslant\frac{\frac{\mathrm{V}(\mathrm{X_n})}{n^2}}{\epsilon^2}$.

D'où le résultat,

$\forall \epsilon>0$, $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X_n}}{n}-p\right|\geqslant\epsilon\right)\leqslant\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$.