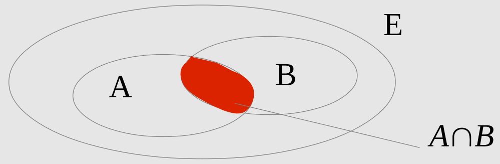
Chapitre 4
Conditionnement et indépendance

I. Probabilité conditionnelle

1) *Probabilité de A sachant B*

Définition :
On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des issues E muni d'une loi de probabilité p.
A et B sont deux événements de E, A étant de probabilité non nulle.
La probabilité de ***B* sachant que *A*** est réalisé est notée $P_A(B)$ et est définie par :

$$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$



Remarque :
Dans le cas d'une loi équirépartie, on a la formule de Laplace :

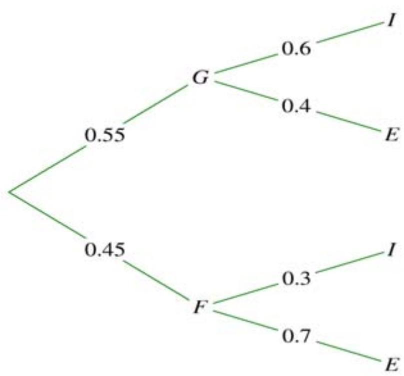
$$p_A(B)=\frac{nombre\ d'éléments\ de\ A\ et\ B}{nombre\ d'éléments\ de\ A}$$

Formule des probabilités composées :
La probabilité de l'événement « A et B », si on connaît la probabilité de l'événement A et la probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé est :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$$

Exemple :
Dans un lycée de 1000 élèves, 45% des élèves sont des filles, 55% des garçons.
Parmi les filles, 30% sont internes et 70% externes.
Parmi les garçons, 60% sont internes et 40% externes.
Cette situation peut être représentée par un arbre pondéré.
Dans ce cas, l'expérience aléatoire est :
« choisir un élève au hasard »

- G est l'événement : « être un garçon »
- F est l'événement : « être une fille »
- I est l'événement : « être un interne »
- E est l'événement : « être un externe »



On suppose ici que la loi de probabilité est équirépartie :
On a ainsi $p(G)=0{,}55$ et $p(F)=0{,}45$.
Sur l'arbre, on peut lire :
$p_G(I)=0{,}6$; $p_G(E)=0{,}4$; $p_F(I)=0{,}3$; $p_F(I)=0{,}7$

D'après la formule des probabilités composées, on a donc :

$$p(F\cap I)=p(F)\times p_F(I)=0{,}45\times 0{,}3=0{,}125$$

Donc la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille interne est 0,125.

Théorème :
Si $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$, alors $p(A)\times p_A(B)=p(B)\times p_B(A)$

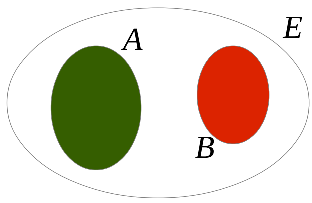
Démonstration :
On sait que $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$ et $p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A)$

Exemple :
Dans un groupe de jeunes, 40% sont des filles et 60% font du ski.
Parmi les filles, il y a 30% de skieuses.
On rencontre une de ces personnes au hasard. Elle fait du ski.
Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ?
F : l'événement « la personne rencontrée est une fille »
S : l'événement « la personne rencontrée fait du ski »
On a : $p(F)=0{,}4$, $p(S)=0{,}6$, $p_F(S)=0{,}3$
On cherche à calculer $p_S(F)$.
On utilise le théorème précédent et on a : $p(F)\times p_F(S)=p(S)\times p_S(F)$;
Donc $p_S(F)=\dfrac{p(F)\times p_F(S)}{p(S)}=\dfrac{0{,}4\times 0{,}3}{0{,}6}=0{,}2$.

2) Formule des probabilités totales

Définition :
Deux événements sont **incompatibles** lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun.

Remarque :
Deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection est vide (ils sont **disjoints**).



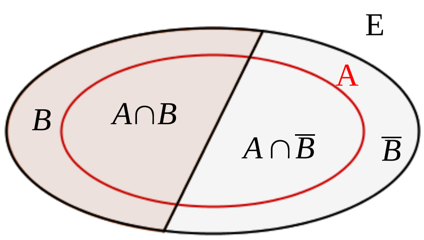
$A\cap B=\emptyset$

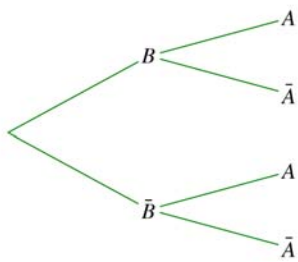
Remarque :
Pour deux événements incompatibles A et B : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

Définition :
Des événements forment une **partition** de l'ensemble E des issues lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion est E.

Remarques :
- B est un événement, alors B et $\overline{B}$ forment une partition de E car $B\cap\overline{B}=\emptyset$ et $B\cup\overline{B}=E$.
- Pour tout événement A :

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) \text{ et } (A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\emptyset$$

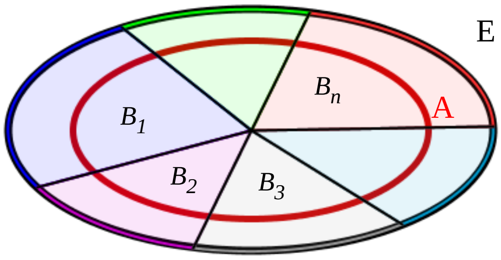




Donc : $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})=p(B)\times p_B(A)+p(\overline{B})\times p_{\overline{B}}(A)$

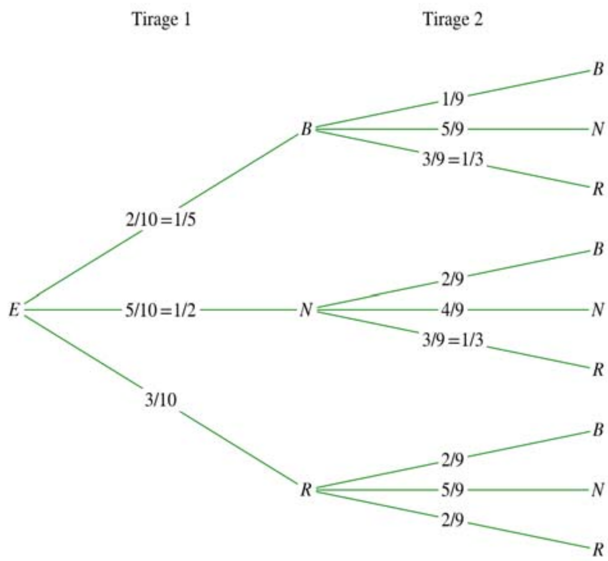
Théorème (Formule des probabilités totales) :
Si les événements B_1, B_2, B_3, … B_n forment une partition de *E*, alors la probabilité de l'événement *A* de l'ensemble *E* est :

$$p(A)=p(A\cap B_1)+p(A\cap B_2)+\ldots+p(A\cap B_n)$$
$$p(A)=p_{B_1}(A)\times p(B_1)+p_{B_2}(A)\times p(B_2)+\ldots+p_{B_n}(A)\times p(B_n)$$



Exemple :
Une urne contient 10 boules : 2 bleues, 5 noires, 3 rouges.
On effectue deux tirages successifs sans remise.

On souhaite calculer la probabilité de l'événement « tirer une boule bleue au 2[e] tirage ».



On a :
B_2 : « tirer une boule bleue au 2e tirage »
B_1 : « tirer une boule bleue au 1[er] tirage »
N_1 : « tirer une boule noire au 1[er] tirage »
R_1 : « tirer une boule rouge au 1[er] tirage »

B_2 peut être réalisé en suivant trois chemins différents :
« B_1 et B_2 » ou « N_1 et B_2 » ou « R_1 et B_2 »
Ces événements sont deux à deux disjoints.

Donc :
$p(B_2)=p(B_1\cap B_2)+p(N_1\cap B_2)+p(R_1\cap B_2)$

D'où : $p(B_2)=p(B_1)\times p_{B_1}(B_2)+p(N_1)\times p_{N_1}(B_2)+p(R_1)\times p_{R_1}(B_2)$.

Ainsi $p(B_2)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

II. Indépendance

1) Événements indépendants

Soit une expérience aléatoire et l'ensemble des résultats E, muni d'une loi de probabilité p.
Soit A et B deux événements de E de probabilités non nulles.

Définition :
Les événements A et B sont **indépendants** lorsque la probabilité de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

$$p_A(B)=p(B) \text{ ou } p_B(A)=p(A)$$

Remarques :

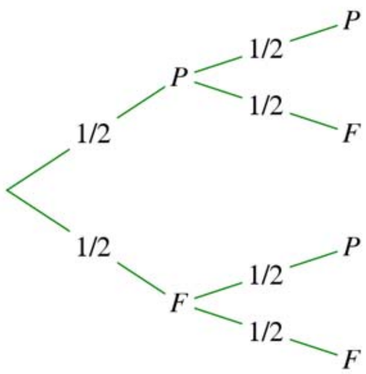
- Dire que les événements « A et B » sont indépendants signifie que la probabilité de l'événement A et B est égale au produit de leurs probabilités :
$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$
En effet, $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$ et $p_A(B)=p(B)$ d'où le résultat.
- On admet que si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants, de même que A et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exemple :
On jette successivement deux pièces de monnaie non truquées.
A : « la 1^ère^ pièce donne FACE »
B : « les deux pièces donnent le même résultat »

Donc on a :

- $A\cap B$: « les deux pièces donnent FACE »
donc $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$.
- $p(A)=\frac{1}{2}$
- B est la réunion des deux événements « obtenir deux FACE » et « obtenir deux PILE »

Donc d'après l'arbre :
$p(B)=p(PP)+p(FF)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$



Par conséquent, $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ et les événements A et B sont indépendants.

2) Principe multiplicatif

Des expériences aléatoires successives sont indépendantes lorsque le résultat obtenu à l'une de ces expériences ne dépend pas des résultats obtenus aux expériences précédentes.

Modélisation :
Dans le cas d'une succession d'expériences **indépendantes**, la probabilité d'une liste de résultats est le **produit** des probabilités de chaque résultat.

Remarque :
Les lancers successifs d'une pièce, d'un dé,... la répétition de tirages, **avec remise**, dans une boîte de boules, de lettres,... , les réponses à un questionnaire,... sont des expériences indépendantes.

Exemples :

- On tire au hasard une boule dans une urne contenant 4 boules rouges (R), 3 boules vertes (V) et 2 boules noires (N).

La loi de probabilité est définie ci-contre.

issue	R	V	N
probabilité	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

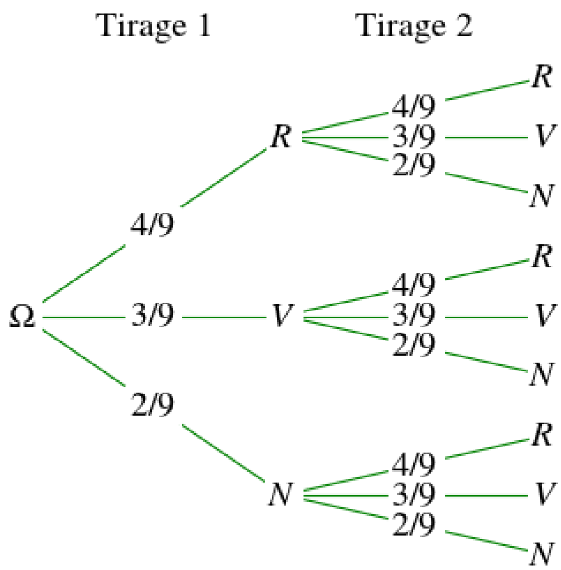
On répète deux fois l'expérience précédente.

La première boule tirée est remise dans l'urne avant le 2e tirage, ainsi les deux expériences sont identiques et indépendantes.

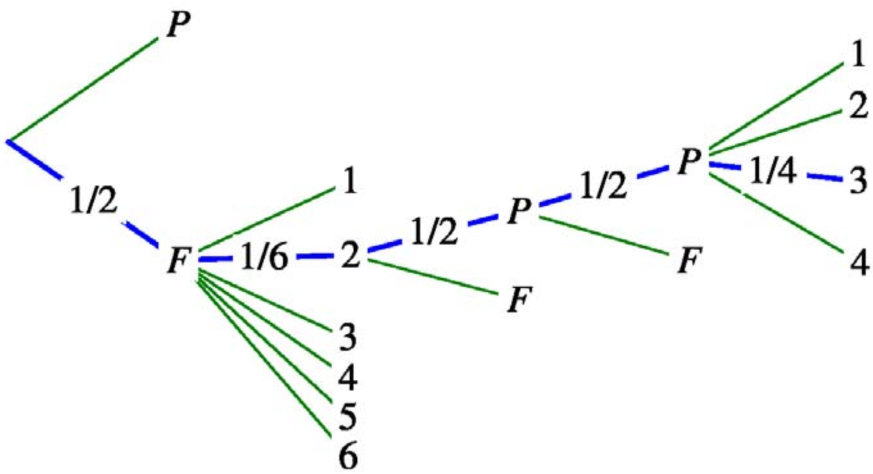
On note p la loi de probabilité sur l'ensemble E des 9 listes de résultats.

S : « Obtenir deux boules de la même couleur » est réalisé par les listes $(R;R)$, $(V;V)$, $(N;N)$.

Donc $p(S)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{3}{9}\times\frac{3}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{29}{81}$



- On lance une pièce, puis un dé à 6 faces, puis une pièce, puis de nouveau une pièce, puis un dé à 4 faces.
(Si on a obtenu FACE sur la 1ère pièce, cela n'agit pas sur le résultat du dé à 6 faces, etc.)



La probabilité d'obtenir la liste $(F;2;P;P;3)$ est alors :
$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{192}$$