

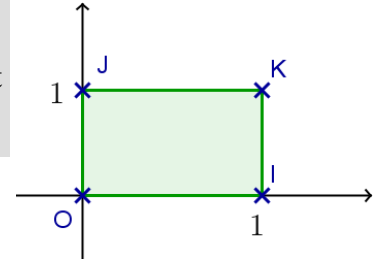
Chapitre 8

Intégration

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$, l'unité d'aire (notée u.a.) est l'aire du rectangle OIKJ où K est le point de coordonnées $(1; 1)$.



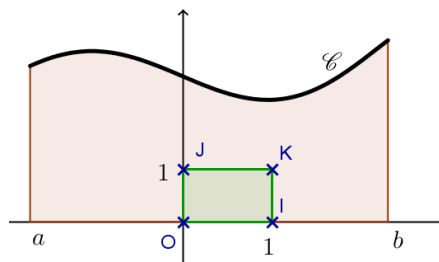
1) Notion d'intégrale

Définition :

f est une fonction **continue** et **positive** sur l'intervalle $[a; b]$.

\mathcal{C} est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Le **domaine** situé sous sa courbe \mathcal{C} est le domaine situé entre \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Remarque :

Le domaine peut être défini comme l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)$$

Définition :

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire, en unités d'aire, du domaine situé sous sa courbe \mathcal{C} . On la note :

$$\int_a^b f(x) dx$$

Propriété :

Pour toute fonction continue et positive sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ est un **nombre réel** positif ou nul.

Remarques :

- $\int_a^b f(x) dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ » ou « somme de a à b de f ».
- a et b sont les **bornes d'intégration**.
- x est la **variable d'intégration**. On dit que x est une variable muette car elle n'intervient pas dans le résultat.

On peut noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

2) Propriétés immédiates

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ de courbe représentative \mathcal{C} .

Propriété :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

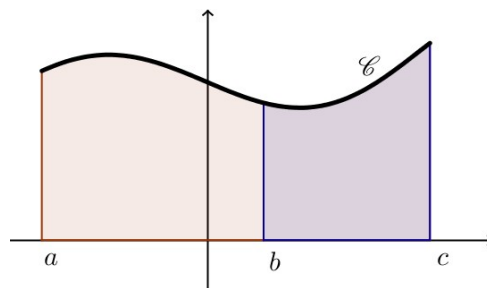
Démonstration :

Le domaine est alors réduit à un segment.

Propriété (relation de Chasles) :

Pour tous nombres réels a, b, c tels que $a \leq b \leq c$.

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



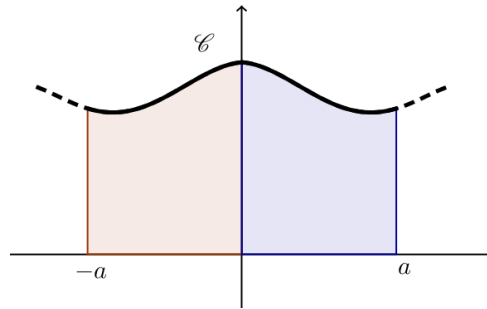
Démonstration :

Cela résulte de l'additivité des aires.

Propriété (conservation par symétrie) :

Si \mathcal{C} est symétrique par rapport à (OJ) alors, pour tout $a > 0$.

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx \quad \text{d'où} \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

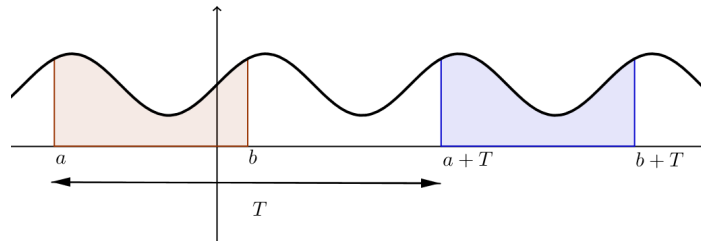


Propriété (conservation par translation) :

Si la fonction est périodique de période T :

$\forall x \in I, x+T \in I$ et $f(x) = f(x+T)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx$$

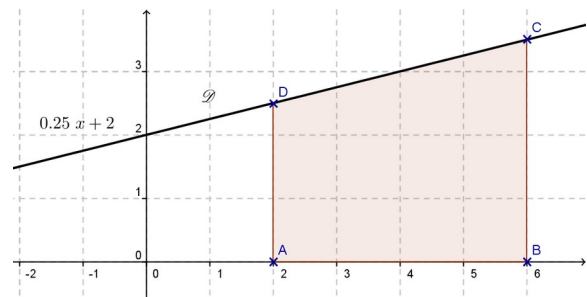


Exemples :

- Soit f la fonction affine définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 2$$

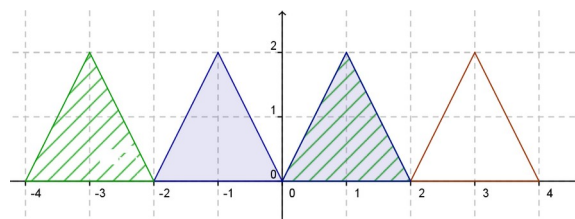
et \mathcal{D} sa représentation graphique.



$\int_2^6 f(x) dx$ est l'aire du trapèze ABCD et vaut :

$$\frac{AD+BC}{2} \times AB = \frac{f(2)+f(6)}{2} \times 4 = \frac{2,5+3,5}{2} \times 4 = 12 \text{ u.a.}$$

- La fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ représentée ci-contre, modélise un signal en dent de scie obtenu en électronique.



Les triangles colorés en bleu sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc :

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$$

Les triangles hachurés se correspondent par une translation, donc

$$\int_{-4}^{-2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$$

$$\text{Ainsi } \int_{-4}^4 f(x) dx = 4 \int_0^2 f(x) dx = 4 \times \frac{2 \times 2}{2} = 4 \times 2 = 8 \text{ u.a.}$$

3) Approximation numérique

Lorsque nous ne connaissons pas l'expression explicite d'une primitive, différentes méthodes permettent d'obtenir des approximations numériques.

L'enjeu sera alors de connaître l'erreur commise par ses approximations.

Remarque :

Il arrive parfois que l'on connaisse une primitive mais cela n'est pas suffisant pour calculer les intégrales.

Par exemple, $\int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln 2$, mais comment calcule-t-on $\ln 2$?

Principe :

On souhaite approcher $\int_a^b f(x) dx$.

- On subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles ($n \in \mathbb{N}^*$) de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et on note, pour tout $i \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$, $x_i = a + i h$.
- On remplace alors f par une fonction sur chaque subdivision de l'intervalle.

Méthode des rectangles

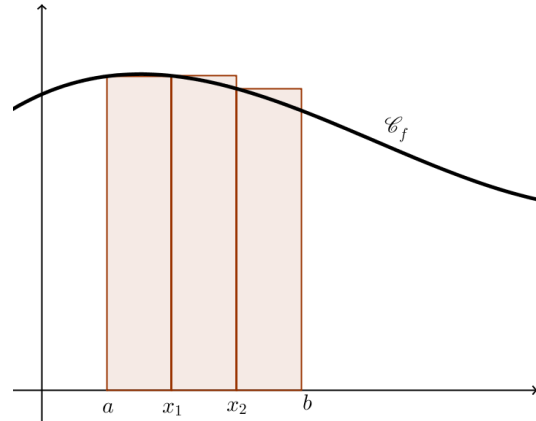
On remplace f par une fonction en escalier.

Méthode des rectangles à gauche :

On remplace f par la fonction en escalier qui prend, sur chaque subdivision, la même valeur à l'extrémité gauche de cette subdivision que f .

La valeur approchée de $\int_a^b f(x) dx$ est :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$



Démonstration :

L'aire du rectangle de base $[x_i; x_{i+1}]$ est $f(x_i) \times (x_{i+1} - x_i)$, donc :

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \times (x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Remarque :

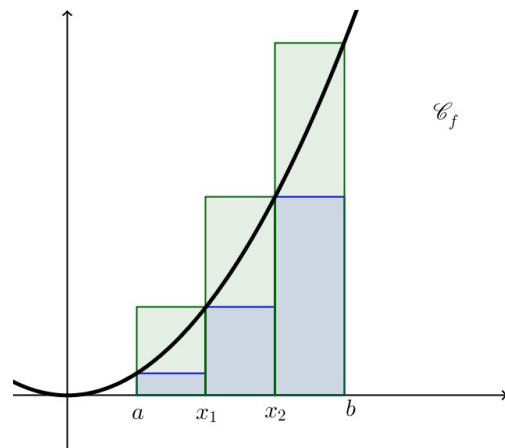
On peut définir, de même, la méthode des rectangles à droites.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Cas particulier : lorsque la fonction est monotone.

Dans le cas où la fonction étudiée est croissante, par exemple, on a alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$



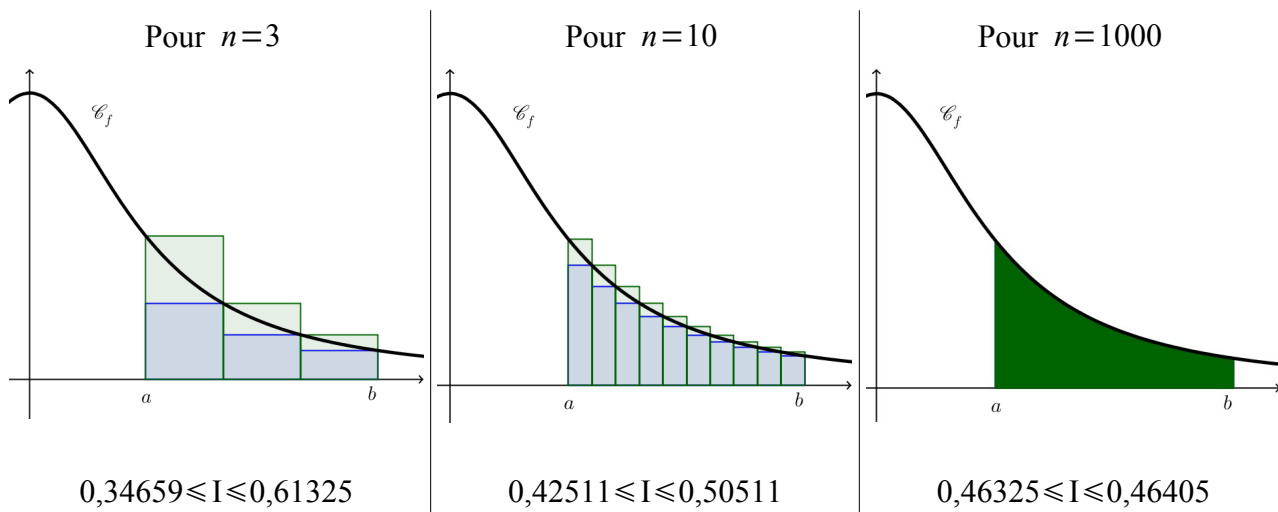
On obtient alors une évaluation de notre approximation.

Exemple :

On souhaite calculer $I = \int_1^3 \frac{1}{1+x^2} dx$.

On vérifie facilement que f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

On a ainsi :



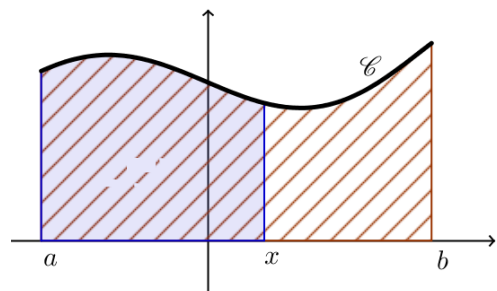
II. Primitives et calcul intégral

1) Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive, définie sur $[a; b]$ et x un nombre réel quelconque de cet intervalle.

L'intégrale $\int_a^x f(t) dt$ est l'aire de la partie du plan coloriée en bleu, qui dépend de la valeur x .

Pour $x=b$ cette quantité vaut $\int_a^b f(t) dt$, c'est-à-dire l'aire de la partie hachurée.



Théorème fondamental :

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$.

$F_a(x)$ est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .

Remarque :

On admet le théorème dans le cas général.

2) Fonctions continues et primitives

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

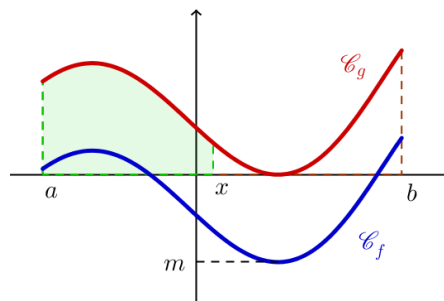
Démonstration :

Cas où $I=[a;b]$ et où f admet un minimum m sur I .

La fonction g définie sur I par $g(x)=f(x)-m$ est continue et positive sur $[a;b]$.

Donc, d'après le théorème fondamental, elle admet une primitive G sur $[a;b]$:

$$G(x)=\int_a^x g(t)dt.$$



La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=G(x)+mx$ est une primitive de f sur $[a;b]$ car pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $F'(x)=G'(x)+m=g(x)+m=f(x)$.

Donc, f admet des primitives sur $[a;b]$.

Remarques :

- Une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet un minimum sur cet intervalle.
- On admet le théorème dans le cas général.
- La fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ est continue sur \mathbb{R} , donc elle admet des primitives sur \mathbb{R} , mais on n'en connaît pas de primitive « explicite ».

3) Intégrale d'une fonction continue

Propriété :

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F est une primitive de f sur $[a;b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration :

On a vu que la fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a;b]$. Donc il existe un nombre réel k tel que $G(x)=F(x)+k$.

Or $G(a)=0$ donc $F(a)+k=0$, c'est-à-dire $k=-F(a)$.

Donc $\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) + k = F(b) - F(a)$.

Définition : (extension au cas d'une fonction f continue de signe quelconque sur $[a;b]$)

L'intégrale de a à b de f est le nombre réel $F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$.

On note encore :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Remarques :

- Dans ce cas, on ne peut plus interpréter géométriquement l'intégrale comme l'aire d'un domaine.
- Cette définition ne dépend pas de la primitive F choisie puisque ces primitives diffèrent entre elles d'une constante.
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a .
- En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x) dx$, on détermine d'abord une primitive F de f sur $[a;b]$ et on écrit :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriété :

Si f est continue sur $[a;b]$, alors $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

Démonstration :

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x) dx$$

III. Propriétés des intégrales

Par la suite f et g sont des fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.

1) Propriétés algébriques

Propriété (linéarité de l'intégration) :

- $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- Pour tout nombre réel λ , $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$

Démonstration :

Ces propriétés découlent immédiatement des primitives de $f+g$ et λf .

Propriété (relations de Chasles) :

Pour tous nombres réels c, d et e de $[a; b]$,

$$\int_c^d f(x) dx + \int_d^e f(x) dx = \int_c^e f(x) dx$$

Démonstration :

On note F une primitive de f sur $[a; b]$,

$$\int_c^d f(x) dx + \int_d^e f(x) dx = F(d) - F(c) + F(e) - F(d) = F(e) - F(c) = \int_c^e f(x) dx$$

Exemple :

On calcule l'intégrale $K = \int_{-2}^5 f(x) dx$ où f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x| - 2$.

$$\text{Ainsi } f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x-2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

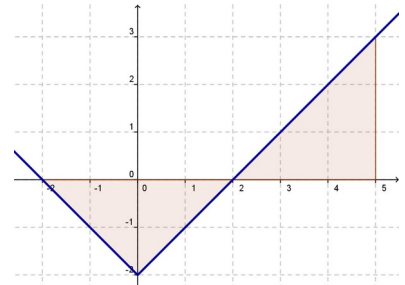
Donc,

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx = \int_{-2}^0 (-x-2) dx + \int_0^5 (x-2) dx.$$

$$\text{Or } \int_{-2}^0 (-x-2) dx = \left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^0 = 0 - (-2+4) = -2 \text{ et}$$

$$\int_0^5 (x-2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^5 = \left(\frac{25}{2} - 10 \right) - 0 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Donc } K = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$



2) Intégrales et inégalités

On suppose ici que $a < b$

Propriété (positivité) :

- Si, pour tout nombre réel x de $[a; b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- Si, pour tout nombre réel x de $[a; b]$, $f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Démonstration :

Ces propriétés découlent directement de la définition de l'intégrale.

Remarque :

Les propriétés réciproques sont fausses.

Par exemple $\int_{-1}^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, mais sur $[-1; 2]$, la fonction $x \mapsto x$ ne garde pas un signe constant.

Propriété (ordre) :

Si, pour tout nombre réel x de $[a; b]$, $g(x) \leq f(x)$, alors $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$.

Démonstration :

Si, pour tout nombre réel x de $[a; b]$, $g(x) \leq f(x)$ alors $0 \leq f(x) - g(x)$.

Donc, $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$ et par linéarité, $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

3) Valeur moyenne

Définition :

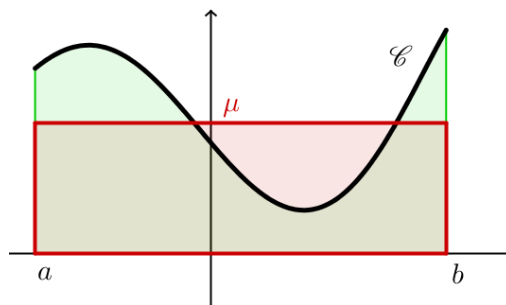
La **valeur moyenne** d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a < b$) est le nombre réel μ défini par $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Interprétation graphique :

Dans un repère orthogonal, \mathcal{C} est la courbe représentative de la fonction f .

Alors $\int_a^b f(x) dx = \mu \times (b-a)$.

Donc l'aire du domaine situé sous la courbe \mathcal{C} est égale à l'aire du rectangle de dimension μ et $(b-a)$.



Exemple :

La valeur moyenne de la fonction f donnée par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ sur $[1; 5]$ vaut $\frac{10}{3}$.

En effet : $\frac{1}{5-1} \int_1^5 (x^2 - 4x + 5) dx = \frac{1}{4} \times \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 5x \right]_1^5 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{50}{3} - \frac{10}{3} \right) = \frac{10}{3}$

Propriété (inégalité de la moyenne) :

f est une fonction continue sur un intervalle I , a et b sont deux nombres de I tels que $a < b$.

M et m sont deux nombres tels que, pour tout x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Démonstration :

Par hypothèse, pour tout x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

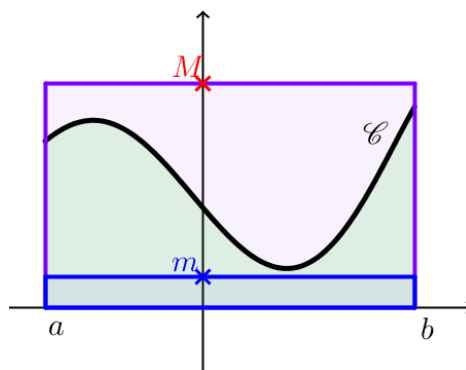
En appliquant les propriétés sur l'ordre :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

Les fonctions constantes $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont telles que :

$$\int_a^b m dx = [mx]_a^b = m(b-a) \text{ et } \int_a^b M dx = [Mx]_a^b = M(b-a).$$

D'où le résultat.



4) Calcul d'aire

Dans un repère orthogonal, \mathcal{D} est le domaine situé entre la courbe représentative d'une fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On note $\text{aire}(\mathcal{D})$, l'aire du domaine \mathcal{D} en unités d'aire.

Cas d'une fonction f continue et négative sur $[a;b]$

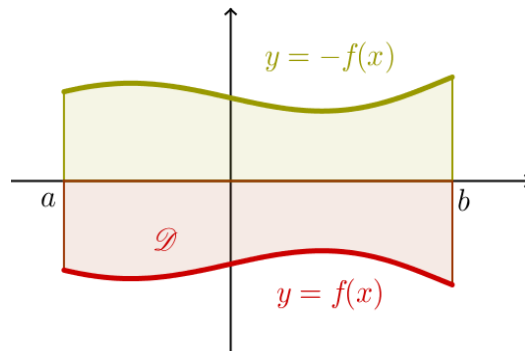
$$\text{aire}(\mathcal{D}) = - \int_a^b f(x) dx \text{ u.a.}$$

En effet, par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de \mathcal{D} est égale à l'aire du domaine situé sous la courbe de $-f$ (qui est positive).

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $-F$ est une primitive de $-f$ sur $[a;b]$.

Donc :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b (-f(x)) dx = [-F(x)]_a^b = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(x) dx.$$



Remarque :

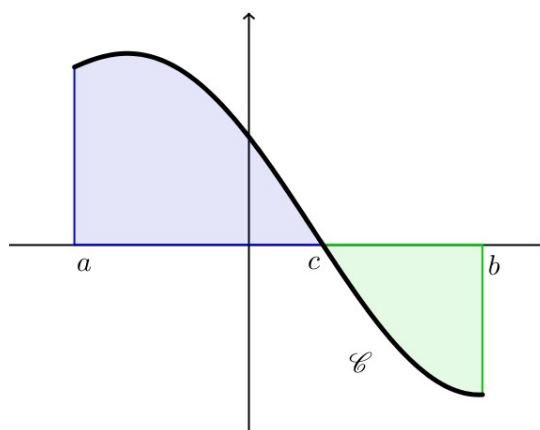
On dit que $\int_a^b f(x) dx$ est l'**aire algébrique** du domaine \mathcal{D} (elle est positive si f est positive sur $[a;b]$, négative si f est négative sur $[a;b]$).

Cas d'une fonction f continue et de signe quelconque sur $[a;b]$

L'aire de \mathcal{D} est la somme des aires algébriques des domaines définis par des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Pour la courbe ci-contre :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx \text{ u.a.}$$



Remarque :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b |f(x)| dx \text{ u.a.}$$

Aire entre deux courbes

Propriété :

Si f et g sont continues sur un intervalle I avec $f \leq g$ sur I et si a et b sont deux réels tels que $a \leq b$, l'aire comprise entre les deux courbes représentant f et g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \text{ u.a.}$$

