Chapitre 8

Produit scalaire

I. Produit scalaire

1) Norme d'un vecteur

Définition :
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, et soit A et B deux points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la longueur du segment $[AB]$; on a :

$$\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB.$$

Remarque :

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Propriétés :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- Pour tout nombre réel k, on a $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$ (notamment, $\|-\vec{u}\|=\|\vec{u}\|$).
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leqslant\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire).
- $\|\vec{u}\|=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$.

2) Produit scalaire de deux vecteurs

Définition :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Remarques :

- Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre**
- Soit A, B, C trois points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

Théorème : expression dans un repère orthonormé
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On a alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'.$$

Cette forme est l'**expression analytique** du produit scalaire.

Démonstration :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé.

$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$.

Ainsi $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2) = \dfrac{1}{2}[(x^2+y^2)+(x'^2+y'^2)-((x-x')^2+(y-y')^2)]$.

En développant le membre de droite, il vient :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+x'^2+y'^2-x^2+2xx'-x'^2-y^2+2yy'-y'^2) = \frac{1}{2}(2xx'+2yy') = xx'+yy'$$

Propriété :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on a $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Démonstration :

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{u}\|^2) = \frac{1}{2}(2\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{0}\|^2) = \frac{1}{2}(2\|\vec{u}\|^2) = \|\vec{u}\|^2 .$$

Définition :

Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même, noté $\vec{u}^2$, est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$.

II. Propriétés du produit scalaire

1) Symétrie et bilinéarité

Propriétés :

- Le produit scalaire de deux vecteurs est **symétrique** :
  pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- Le produit scalaire de deux vecteurs est **bilinéaire**, c'est-à-dire que :
  pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ, on a :

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v}) \qquad \text{et} \qquad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

Démonstration :

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ trois vecteurs du plan et λ un nombre réel.

On utilise l'expression analytique du produit scalaire et les propriétés de la multiplication des nombres réels (commutativité et distributivité).

- Symétrie :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v}\cdot\vec{u}$

- Bilinéarité :

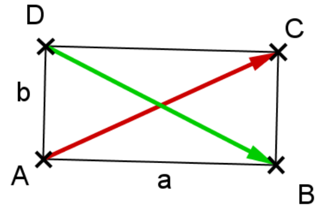
$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = (\lambda x)x' + (\lambda y)y' = \lambda xx' + \lambda yy' = \lambda\times(xx'+yy') = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'') + y(y'+y'') = xx'+xx''+yy'+yy'' = (xx'+yy')+(xx''+yy'') = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Exemples :

- $5\vec{u}\cdot(3\vec{v}-2\vec{w}) = 5\vec{u}\cdot(3\vec{v}) - 5\vec{u}\cdot(2\vec{w}) = 15\vec{u}\cdot\vec{v} - 10\vec{u}\cdot\vec{w}$.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}\cdot(-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$.

- Soit $ABCD$ un rectangle avec $AB=a$ et $AD=b$.
En utilisant la relation de Chasles, on peut décomposer les vecteurs et développer grâce aux propriétés du produit scalaire :



$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\vec{0}+AB\times AB-BC\times DA+\vec{0}=a^2-b^2$

Égalités remarquables :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan, on a :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ soit $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ soit $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ soit $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Démonstration :

On utilise les propriétés de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire :
$(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

Remarques :

- La première égalité nous donne une nouvelle expression du produit scalaire en fonction des normes : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$
- La deuxième égalité correspond à l'expression donnant la définition du produit scalaire.

2) Produit scalaire et orthogonalité

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, et soit A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Théorème :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

On écrit $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Démonstration :

Soit A, B et C trois points du plan distincts deux à deux tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)=0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.
Or $\|\vec{u}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$, $\|\vec{v}\|^2=\|\overrightarrow{AC}\|^2=AC^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2=\|\overrightarrow{CB}\|^2=BC^2$
Ainsi $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A (théorème de Pythagore).
On conclut $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Remarques :

- Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- Le théorème nous donne une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de deux droites : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
- Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$.
  Il ne faut pas en conclure que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux.
  En effet, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=0$
  Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}-\vec{w}$ sont orthogonaux

Propriété :
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si, et seulement si :

$$xx'+yy'=0$$

Exemple :

Dans la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, on peut montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3-\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3+\sqrt{5}\\-2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. En effet : $\vec{u}\cdot\vec{v}=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})+2\times(-2)=3^2-(\sqrt{5})^2-4=9-5-4=0$,

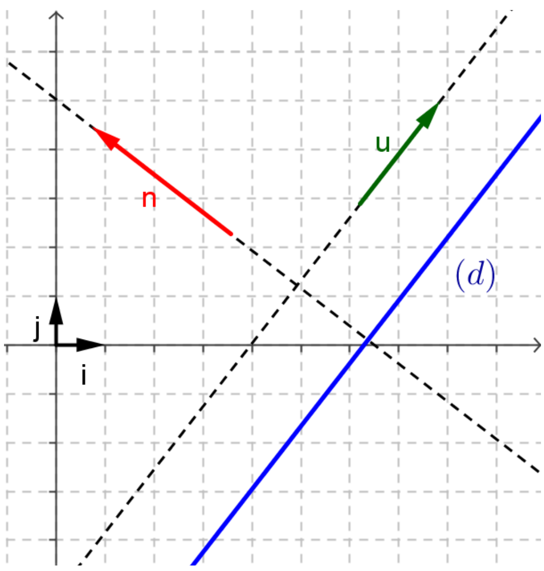
III. Applications en géométrie analytique

Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) *Équation d'une droite de vecteur normal* $\vec{n}$

Définition :
Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un **vecteur normal** à la droite (d) est un vecteur non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

Soit (d) une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $A(x_0;y_0)$ un point de (d).
Un point $M(x;y)$ du plan appartient à la droite (d) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, autrement dit si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.



Or les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$; le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$ vaut donc $a(x-x_0)+b(y-y_0)$.

On en déduit le théorème suivant :

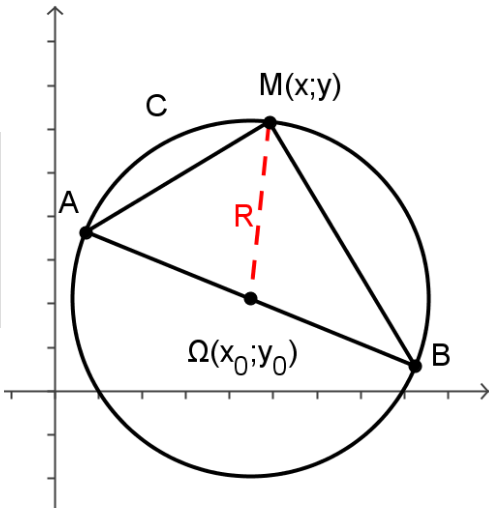
Théorème :
Soit a et b deux nombres réels non nuls tous les deux $((a;b)\neq(0;0))$.
La droite (d) admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ pour vecteur normal si, et seulement si, elle admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$, où $c\in\mathbb{R}$.

Remarques :

- Une droite peut donc être complètement définie par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.
- Dans un repère orthonormé du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, une droite (d) d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.
  De plus, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ont la même norme

Exemple :
Soit (d) la droite d'équation $-2x+5y-18=0$.
Un vecteur normal à (d) est $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$.

2) *Équation d'un cercle*



Propriété :
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(x_0;y_0)$ et de rayon R.
Un point $M(x;y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si :
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$
Cette équation est une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

Démonstration :
$M\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M=R \Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$.
Or dans $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a $\Omega M^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

Propriété :
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$.
Un point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Démonstration :

- Si M est distinct de A et B :
  $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ $\Leftrightarrow$ les droites (MA) et (MB) sont orthogonales
  $\Leftrightarrow$ le triangle AMB est rectangle en M
  $\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.
- Si $M=A$ ou $M=B$, alors le point M appartient évidemment au cercle de diamètre $[AB]$, et le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est nul (car $\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB}=\vec{0}$).

Exemples :

- Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-2;3)$ passant par le point $A(2;1)$ est :
  $(x+2)^2+(y-3)^2=20$
  car $\Omega A^2=(2-(-2))^2+(1-3)^2=4^2+(-2)^2=16+4=20$.
- Soit l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant $x^2+y^2+6x-2y+8=0$.
  $x^2+y^2+6x-2y+8=0 \Leftrightarrow [x^2+6x]+[y^2+2y]+8=0$
  $\Leftrightarrow [(x+3)^2-9]+[(y-1)^2-1]+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^2+(y-1)^2=2$
  On reconnaît l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-3;1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

IV. Autres expressions du produit scalaire

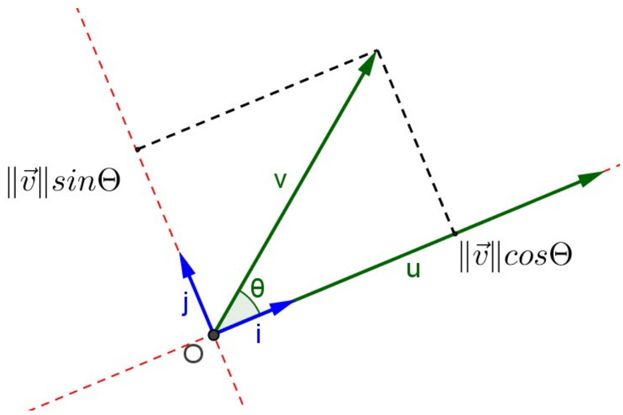
1) Formule du cosinus

Théorème :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et θ une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$.
Alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$.

Démonstration :
Soit O un point du plan.
On pose $\vec{i}=\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\times\vec{u}$ et $\vec{j}$ le vecteur tel que $(\vec{i};\vec{j})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\|\vec{j}\|=1$.
Le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé, dans lequel on a :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\|\vec{u}\|\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}\|\vec{v}\|\cos\theta\\\|\vec{v}\|\sin\theta\end{pmatrix}$$

On a donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\theta+0\times\|\vec{v}\|\sin\theta$.



Notation :
$(\vec{i};\vec{j})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ (pour $k\in\mathbb{Z}$) est équivalent à $(\vec{i};\vec{j})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ qui se lit : « $(\vec{i};\vec{j})$ mesure $\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π »

Remarques :

- Cette formule peut-être très utile pour calculer une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$:
$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$$
- Pour tout réel x, on a $\cos(-x)=\cos(x)$. On peut donc utiliser des angles géométriques.

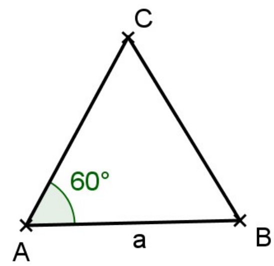
Propriétés :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

Démonstration :
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\theta\equiv0[2\pi]$, donc $\cos\theta=1$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\theta\equiv\pi[2\pi]$, donc $\cos\theta=-1$.

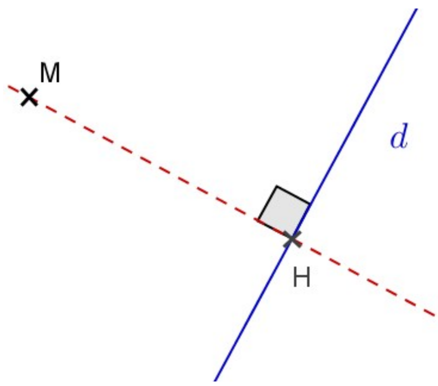
Exemple :
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.
On a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(60°)=AB\times AC\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$$



2) Formule des projetés orthogonaux

Définition :
Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite (d) est le point d'intersection de la droite (d) et de la droite perpendiculaire à (d) passant par le point M.

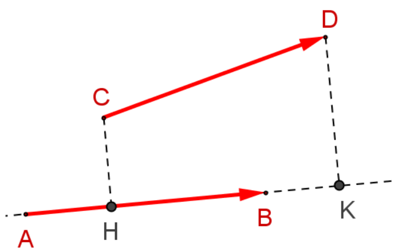


H est le projeté orthogonal de M sur (d)

Théorème :
Soit A, B, C et D quatre points du plan (avec A et B distincts) ;
soit H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).
Alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}=\begin{cases} AB\times HK \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont de même sens} \\ -AB\times HK \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont de sens contraire}\end{cases}$$

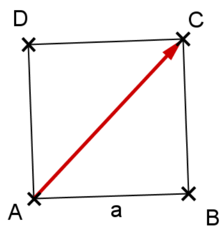
Démonstration :
On a :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KD}$
Or les droites (AB) et (HC) sont, par définition, orthogonales ; il en est donc de même pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$, dont le produit scalaire est nul.
De la même manière, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KD}=0$.
Par conséquent, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$.
Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont colinéaires ; on peut donc conclure en utilisant la propriété précédente.



Exemple :
Soit $ABCD$ un carré de côté a.
On a alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=a^2$$

Car le point C se projette orthogonalement en B sur (AB)



Remarques :

- L'expression donnée dans le théorème est une « définition équivalente » du produit scalaire.
- La formule du cosinus est une « définition équivalente » du produit scalaire, pour des vecteurs non nuls.

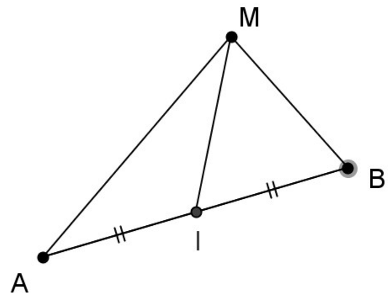
V. Applications au triangle et en trigonométrie

1) *Relations dans le triangle*

Formule de la médiane

Formules de la médiane :
Soit A et B deux points du plan, et I le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point M du plan :

- $MA^2+MB^2=2\,MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$
- $MA^2-MB^2=2\,\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}$

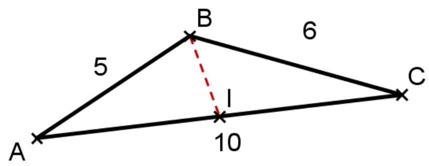


Démonstration :
Pour tout point M du plan, on a $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$.
Ainsi, $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MI}^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$
qui s'écrit encore :
$MA^2+MB^2=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$
Or I est le milieu de $[AB]$; on a donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $IA^2=IB^2=\left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2=\dfrac{AB^2}{4}$.
On a donc $MA^2+MB^2=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\vec{0}+\dfrac{\overrightarrow{AB}^2}{4}+\dfrac{\overrightarrow{AB}^2}{4}=2\,MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$.

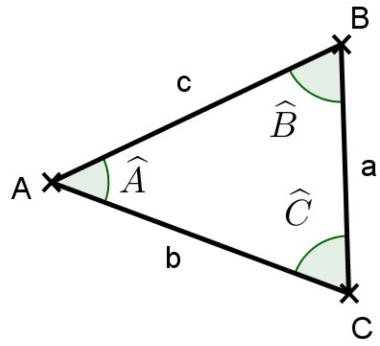
Exemple :

Dans le triangle ABC ci-contre, on a $BA^2+BC^2=2\,BI^2+\dfrac{AC^2}{2}$

On a donc :
$BI^2=\dfrac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-\dfrac{AC^2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(5^2+6^2-\dfrac{10^2}{2}\right)=\dfrac{11}{2}$, soit $BI=\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.



Formule d'Al-Kashi

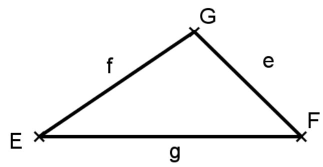


Dans un triangle ABC, on notera :
$a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C} = \widehat{ACB}$

Formule d'Al-Kashi :
Pour tout triangle ABC, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos \widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \widehat{C}$$

Démonstration :
$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{A}$ qui est l'égalité recherchée.



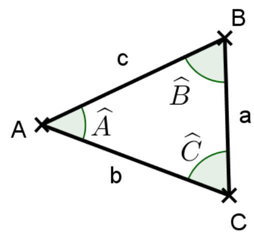
Exemple :
Soit EFG un triangle tel que $EF = 7$, $FG = 4$ et $EG = 5$.
On cherche à déterminer les mesures de ses angles.
On a donc : $g^2 = e^2 + f^2 - 2\,ef \cos \widehat{G}$

Soit $7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos \widehat{G}$. D'où $\cos \widehat{G} = \dfrac{-8}{40} = -0{,}2$ soit $\widehat{G} \simeq 101{,}5\,°$.

De même : $f^2 = e^2 + g^2 - 2\,eg \cos \widehat{F}$. D'où $\cos \widehat{F} = \dfrac{40}{50} = \dfrac{5}{7}$ soit $\widehat{F} \simeq 44{,}4\,°$.

Donc $\widehat{E} = 180 - (\widehat{G} + \widehat{F})$, soit $\widehat{E} \simeq 34{,}1\,°$.

Formule des aires

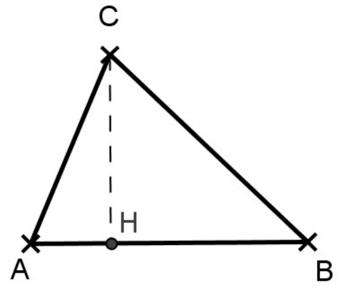


Formule des aires :
Pour tout triangle ABC non aplati, si on note $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ABC, on a :

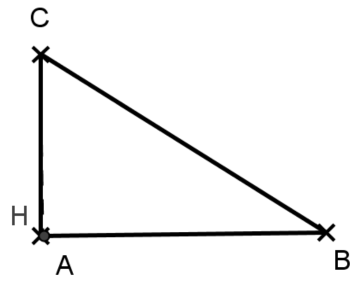
$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$$

Démonstration (par disjonction des cas) :
Appelons H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

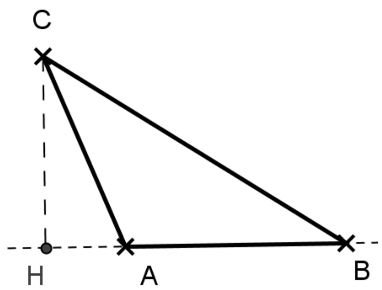
Cas 1 : $\hat{A}$ est aigu
On a $\widehat{HAC} = \widehat{BAC} = \hat{A}$
Dans le triangle AHC rectangle en H, on a $\sin \widehat{HAC} = \dfrac{HC}{AC}$, c'est-à-dire $\sin \hat{A} = \dfrac{HC}{AC}$.
ce que l'on peut encore écrire $HC = b \sin \hat{A}$



Cas 2 : $\hat{A}$ est droit
H et A sont confondus ; on a donc $HC = AC = b$.
Dans ce cas, on a $\hat{A} = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\sin \hat{A} = 1$;
on peut alors écrire $HC = b = b \times 1 = b \times \sin \hat{A}$



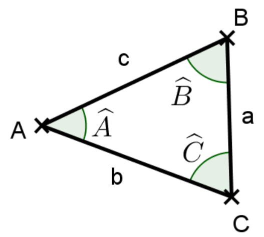
Cas 3 : A est obtus
$\widehat{HAC}$ et $\widehat{BAC} = \hat{A}$ sont supplémentaires ;
ils ont donc le même sinus : $\sin \widehat{HAC} = \sin \hat{A}$
Dans le triangle AHC rectangle en H, on a $\sin \widehat{HAC} = \dfrac{HC}{AC}$,
c'est-à-dire $\sin \hat{A} = \dfrac{HC}{b}$;
ce que l'on peut encore écrire $HC = b \sin \hat{A}$



Dans tous les cas, on peut écrire $HC = b \sin \hat{A}$.
On peut donc exprimer l'aire $\mathscr{S}$ du triangle ABC : $\mathscr{S} = \dfrac{1}{2} AB \times HC = \dfrac{1}{2} c \times b \sin \hat{A}$;
ce qui s'écrit également $\mathscr{S} = \dfrac{1}{2} bc \sin \hat{A}$.

<u>Formule des sinus :</u>
Pour tout triangle ABC non aplati, on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



Démonstration :
On utilise la formule $2S = bc \sin \hat{A} = ac \sin \hat{B} = ab \sin \hat{C}$ et on divise par le produit abc, ce qui donne :

$$\frac{2\,\mathrm{S}}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \quad \text{ou encore} \quad \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2\,\mathrm{S}}.$$

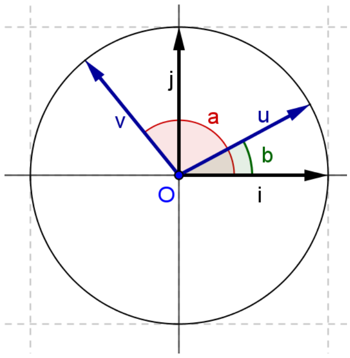
2) Trigonométrie

Formules d'addition :

Pour tous réels a et b, on a :

- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$
- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

Démonstration :



- Soit a et b deux réels. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
  On définit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la façon suivante :
  - $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$
  - $(\vec{i};\vec{u})\equiv b[2\pi]$ et $(\vec{i};\vec{v})\equiv a[2\pi]$

  On peut écrire :
  $(\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};\vec{i})+(\vec{i};\vec{v})=-(\vec{i};\vec{u})+(\vec{i};\vec{v})=-b+a$
  Donc $(\vec{u};\vec{v})\equiv a-b[2\pi]$

  De plus, les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont données par $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$.

  D'une part, on a :
  $\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
  d'autre part, on a :
  $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})=1\times1\times\cos(a-b)$.
  On en déduit $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
- En remplaçant b par $-b$, on obtient :
  $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
- On a $\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+b\right)-a\right)$.

  En appliquant la formule on a :
  $\sin(a-b)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+b\right)-a\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right)\cos a+\sin\left(\frac{\pi}{2}+b\right)\sin a=-\sin b\cos a+\cos b\sin a$
  Donc $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$.
- Puis en remplaçant b par $-b$, on obtient :
  $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Formule de duplication :

Pour tous réel a, on a :

- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
- $\sin 2a=2\sin a\cos a$