Chapitre 7
Racines carrées

I. Racine carrée d'un nombre positif

1) *Définition*

Définition :

Pour tout nombre **positif** *a*, la **racine carrée** de *a* est le nombre positif dont le carré est *a*.

Exemple :
La racine carrée de 64 est 8 parce que $8^2=64$ et $8\geqslant 0$.

Notation :
La racine carrée de *a* se note $\sqrt{a}$.

2) *Conséquence*

Pour tout nombre **positif** *a* : $\sqrt{a^2}=a$ et $(\sqrt{a})^2=a$.

II. Résolution de l'équation $x^2 = a$

Propriétés :

- Si $a<0$, il n'existe aucun nombre *x* tel que $x^2=a$.
  L'équation n'a **pas de solution.**
- Si $a=0$, le seul nombre tel que $x^2=0$ est 0.
  La solution est 0.
- Si $a>0$, il existe deux nombres tels que $x^2=a$.
  L'équation a **deux solutions** $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration :

$x^2=a$	$\Leftrightarrow$	$x^2-a=0$	$\Leftrightarrow$	$x^2-(\sqrt{a})^2=0$	$\Leftrightarrow$	$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$
Donc		$x-\sqrt{a}=0$		ou	$x+\sqrt{a}=0$	
En conclusion :		$x=\sqrt{a}$		ou	$x=-\sqrt{a}$	

Exemple :
L'équation $x^2=13$ a pour solutions les nombres $\sqrt{13}$ et $-\sqrt{13}$.

III. Produit et quotient de deux racines carrées

Propriété :

Le **produit de deux racines** carrées est égal à la **racine carrée du produit**.

$$\text{Pour } a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0 :$$
$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Propriété :

Le **quotient de deux racines** carrées est égal à la **racine carrée du quotient**.

$$\text{Pour } a \geqslant 0 \text{ et } b > 0 :$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemples :

$\sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{7 \times 5} = \sqrt{35}$

$\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$

Annexe 1 : Approximation

Nous avons vu que, dans la plupart des cas, la racine carrée d'un nombre est un nombre **irrationnel**. Il existe toutefois (et c'est déjà très bien) des algorithmes permettant de déterminer des valeurs approchées de racines carrées.

- **Algorithme de dichotomie.**

La connaissance des carrées parfaits permet de trouver un encadrement à l'unité de notre nombre, il suffit ensuite d'affiner la précision de l'encadrement.

Exemple :

Pour trouver un encadrement de $\sqrt{33}$, on sait que :

$5^2=25$ et $6^2=36$, donc : $5<\sqrt{33}<6$

puis $5{,}7^2=32{,}49$ et $5{,}8^2=33{,}64$ donc : $5{,}7<\sqrt{33}<5{,}8$

…

L'utilisation du tableur est appropriée à ce genre de démarche.

Encadrement au dixième :

5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	**5,7**	**5,8**	5,9	6,0
25,00	26,01	27,04	28,09	29,16	30,25	31,36	32,49	33,64	34,81	36,00

Encadrement au centième :

5,70	5,71	5,72	5,73	**5,74**	**5,75**	5,76	5,77	5,78	5,79	5,80
32,4900	32,6041	32,7184	32,8329	32,9476	33,0625	33,1776	33,2929	33,4084	33,5241	33,6400

Encadrement au millième :

5,740	5,741	5,742	5,743	**5,744**	**5,745**	5,746	5,747	5,748	5,749	5,750
32,947600	32,959081	32,970564	32,982049	32,993536	33,005025	33,016516	33,028009	33,039504	33,051001	33,062500

Encadrement au dix-millième :

5,7440	5,7441	5,7442	5,7443	5,7444	**5,7445**	**5,7446**	5,7447	5,7448	5,7449	5,7450
32,99353600	32,99468481	32,99583364	32,99698249	32,99813136	32,99928025	33,00042916	33,00157809	33,00272704	33,00387601	33,00502500

Encadrement au cent-millième :

5,74450	5,74451	5,74452	5,74453	5,74454	5,74455	**5,74456**	**5,74457**	5,74458	5,74459	5,74460
32,9992802500	32,9993951401	32,9995100304	32,9996249209	32,9997398116	32,9998547025	32,9999695936	33,0000844849	33,0001993764	33,0003142681	33,0004291600

Encadrement au millionième :

5,744560	5,744561	**5,744562**	**5,744563**	5,744564	5,744565	5,744566	5,744567	5,744568	5,744569	5,744570
32,999969593600	32,999981082721	32,999992571844	33,000004060969	33,000015550096	33,000027039225	33,000038528356	33,000050017489	33,000061506624	33,000072995761	33,000084484900

- **Extraction de racine carrée**

Avant l'utilisation des calculatrices, il était possible d'effectuer le calcul des racines carrées « manuellement ».
L'introduction de la notation décimale des nombres, par position, a permis de développer un algorithme tirant parti de cette notation.

On sépare les chiffres du nombre par paires en commençant à partir de la virgule. On place le nombre dont on veut extraire la racine en haut, de la même façon que lorsqu'on effectue une division selon la méthode classique ; la racine carrée sera inscrite au-dessus de ce nombre.

À chaque étape :

- on abaisse la paire de chiffres la plus significative non encore utilisée et on la place au côté d'un reste éventuel de l'étape précédente (initialement nul) ;
- soit ***r*** le résultat intermédiaire de la racine carrée obtenu précédemment (égal à zéro au début). On cherche le plus grand chiffre ***x*** tel que le nombre $y=(20r+x)x$ ne dépasse pas le reste courant ;
- on complète ***r*** en plaçant la décimale ***x*** à sa droite, pour former le nouveau résultat intermédiaire ;
- on soustrait ***y*** de la valeur courante pour former le nouveau reste ;
- si le reste est nul et qu'il n'y a plus de chiffre à abaisser alors l'algorithme se termine sinon on recommence

Remarques :

- Chaque étape de l'algorithme donne une décimale de la racine carrée
- Lorsqu'on a un nombre à virgule, on peut se ramener à un nombre entier par un décalage de la virgule par tranche de 2 chiffres : cela correspond à un décalage de la virgule d'1 chiffre pour la racine carrée. En pratique, le passage de la virgule consiste à mettre une virgule dans la racine (voir l'exemple).

Exemple :

On souhaite calculer $\sqrt{152{,}275}$.
On utilise donc 152,275.
On commence par décaler la virgule, par tranche de 2 afin d'obtenir un nombre entier.
On applique ainsi l'algorithme au nombre 1522750.

	1	52	27	50			y	x	r
Init	1						0		0
$n=1$	1					$(20\times0+1)\times1=1$ $(20\times0+2)\times2=4$	1	1	01
$n=2$	-1 0	 52				$(20\times1+2)\times2=44$ $(20\times1+3)\times3=69$	44	2	012
$n=3$		-44 8	 27			$(20\times12+3)\times3=729$ $(20\times12+4)\times4=976$	729	3	0123
$n=4$		-7	29 98	 50		$(20\times123+3)\times3=7389$ $(20\times123+4)\times4=9856$	7389	3	01233
$n=5$			-73 24	89 61	 **00**	$(20\times1233+9)\times9=222021$	222021	9	01233,9

Ainsi $\sqrt{1522750}\simeq1233{,}9$ (troncature au dixième) donc $\sqrt{152{,}275}\simeq12{,}339$