Chapitre 7
Suites

I. Notion de suite

1) Définition

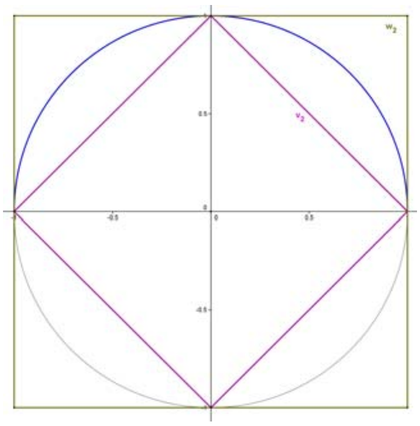
Définition :
Une **suite** *u* est une **fonction** qui à tout nombre **entier** naturel *n* associe un nombre noté *u(n)* ou u_n .

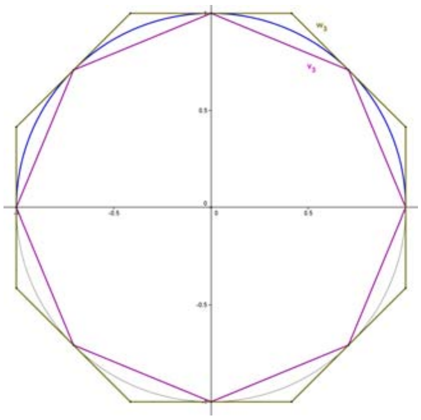
Remarques :

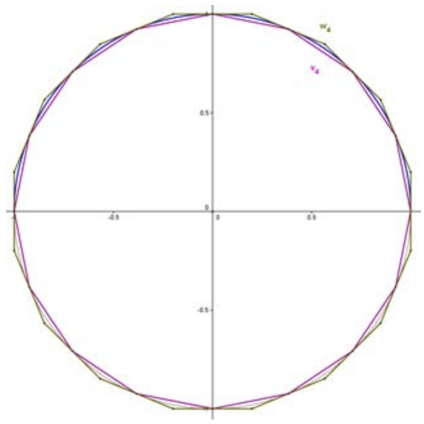
- On a donc : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
  $n \longmapsto u(n)$
- La suite se note *u* ou (u_n) avec des parenthèses. u_n est le terme général et *n* est l'indice.
- Le terme initial de la suite est u_0 , ou u_p quand la suite est définie à partir de l'indice *p*.

Exemples :

- (a_n) est la suite des nombres pairs. On a $a_0=0$, $a_1=2$, $a_2=4$,...
- (b_n) est la suite telle que : $b_1=\frac{1}{1}$, $b_2=\frac{1}{2}$, $b_3=\frac{1}{3}$,...
- (c_n) est la suite telle que $c_0=4$, $c_1=1$, $c_2=0{,}25$, $c_3=0{,}0625$,...
- (d_n) est la suite définie par : $d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
  $n \longmapsto 3^n$
  On a donc $d_0=1$, $d_1=3$, $d_2=9$, ….
- (ϕ_n) est la suite qui à tout entier naturel, non nul, lui associe le nombre de ses diviseurs.
  $\phi_1=1$, $\phi_2=2$, $\phi_3=2$, $\phi_4=3$, …
- On considère un cercle *C* de rayon 1 et deux suites (v_n) et (w_n) , définies de la manière suivante :
  (v_n) est la suite des polygones réguliers à 2^n côtés inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$ et
  (w_n) est la suite des polygones réguliers à 2^n côtés circonscrits au cercle $\mathscr{C}$.





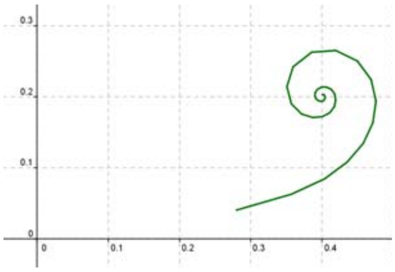


- (f_n) est la suite qui à tout entier *n* associe le produit de tous les entiers, non nul, inférieurs où égal à *n*. Donc : $f_1=1$, $f_2=2\times1=2$, $f_3=3\times2\times1=6$, $f_4=24$, …

- On considère les suites $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$

  avec $(x_0 ; y_0) = (a ; b)$

  Puis on rejoint les points formés.



Exemple avec a = 0,28 et b = 0,04

2) Modes de génération d'une suite

Définitions :

- Une suite est définie par une **formule explicite** lorsque le terme est fonction de l'indice n.
  $u_n = f(n)$
- Une suite est définie par une **formule de récurrence** lorsque le terme est fonction du précédent.
  Dans ce cas, il faut indiquer le **terme initial**.
  $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = a$

Exemples :

- La suite (u_n) définie par $u_n = -n^2 + 3n + 10$ est une suite explicite : c'est la suite des images *f(n)* des entiers naturels n par la fonction associée.
  $$f : x \longmapsto -x^2 + 3x + 10$$
  $u_0 = 10$, $u_1 = 12$, … , $u_{42} = -1628$, …
- La suite v telle que $v_{n+1} = 0{,}8 v_n + 10$, avec $v_0 = 100$ est une suite récurrente de terme initial $v_0 = 100$.
  $v_0 = 100$, $v_1 = 90$, $v_2 = 82$, …
- La suite (w_n) telle que $w_{n+1} = 0{,}8 w_n + 10$, avec $w_0 = -10$ est une suite récurrente de terme initial $w_0 = -10$
  $w_0 = -10$, $w_1 = 2$, $w_2 = 11{,}6$, …
- La suite (Φ_n) qui à tout entier naturel, non nul, lui associe le nombre de ses diviseurs est une suite explicite.
- La suite (f_n) qui à tout entier n associe le produit de tous les entiers, non nul, inférieurs où égal à n peut être définie de façon explicite ou récurrente.

forme explicite	*forme récurrente*
$f_n = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$	$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_n = n \times f_{n-1} \end{cases}$

- La suite (i_n) des nombres entiers naturels peut également être définie des deux manières.

forme explicite	*forme récurrente*
$i_n = n$	$\begin{cases} i_1 = 1 \\ i_n = i_{n-1} + 1 \end{cases}$

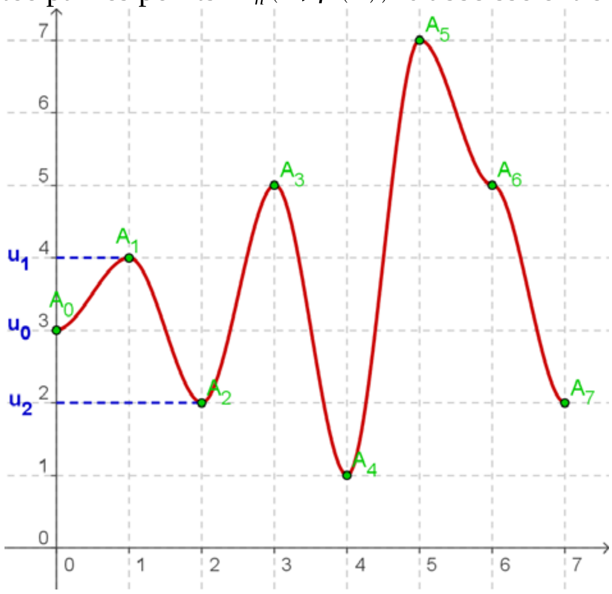
Remarques :

- Pour une suite définie de manière explicite, la fonction associée *f* est définie sur (au moins) $\mathbb{R}^+$.
- Pour une suite définie de manière récurrente, la fonction associée *f* est définie sur *I* avec *f(I)* $\subset$ *I*.

3) *Représentation graphique*

Suite explicite

Soit (u_n) une suite donnée par sa formule explicite $u_n = f(n)$ et C_f la courbe représentative de la fonction associée f.
La suite (u_n) est représentée par les points $A_n(n; f(n))$ d'abscisse entière de la courbe C_f.

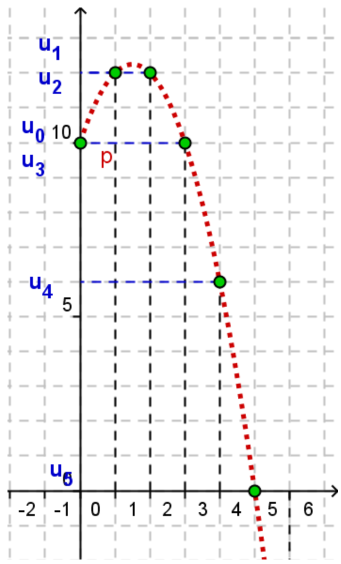


Les termes de la suite sont les ordonnées.

Exemple :

La représentation graphique de la fonction
$f : x \longmapsto -x^2+3x+10$
permet d'obtenir les termes de la suite (u_n)
définie explicitement par $u_n = -n^2+3n+10$.

$u_0=10$; $u_1=12$; $u_2=12$; $u_3=10$; $u_4=6$; $u_5=0$; ...



Suite récurrente

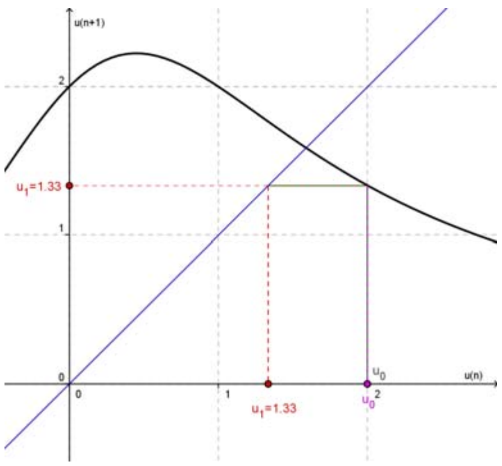
Dans le cas d'une suite $\begin{cases} u_0 = & a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, on peut utiliser une autre représentation graphique.

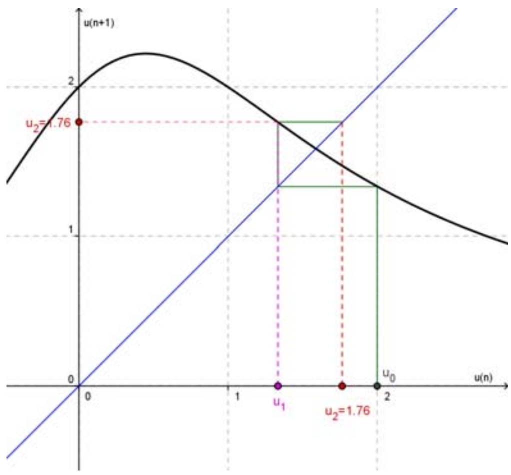
- On trace la représentation graphique C_f de f et la première bissectrice d'équation y = x.
- On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
- On utilise C_f pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.
- On utilise C_f pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
- etc …

Exemples :

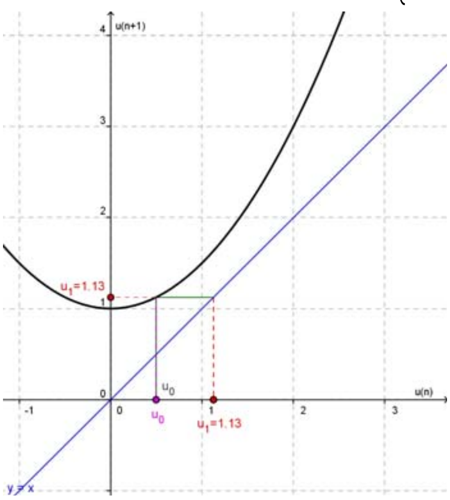
- Soit (u_n), la suite définie par $\begin{cases} u_0 = & 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4}{2 + u_n^{\ 2}} \end{cases}$ on obtient la représentation de la suite sur

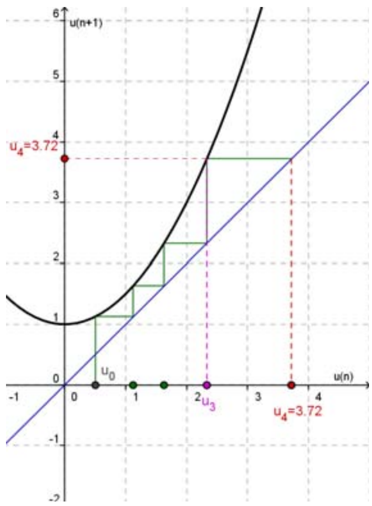
  l'axe des abscisses.





- Soit (v_n), la suite définie par $\begin{cases} v_0 = & 0{,}5 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n^2 + 1 \end{cases}$





4) Sens de variation

Définition :

- Une suite (u_n) est **croissante** lorsque, pour tout entier naturel *n*, on a :
$$u_{n+1} \geqslant u_n \text{ ou } u_{n+1}-u_n \geqslant 0 .$$
- Une suite (u_n) est **décroissante** lorsque, pour tout entier naturel *n*, on a :
$$u_{n+1} \leqslant u_n \text{ ou } u_{n+1}-u_n \leqslant 0 .$$
- Une suite (u_n) est **stationnaire** lorsque, pour tout entier naturel *n*, on a $u_{n+1}=u_n$.

Exemples :

- La suite *u* de terme général $u_n=-2n+1$ est décroissante car, pour tout entier *n* :
$u_{n+1}-u_n=-2(n+1)+1-(-2n+1)=-2$, négatif ; ainsi $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$.
- La suite *v* de terme général $v_n=3^n$ est croissante car, pour tout entier *n* :
$v_{n+1}-v_n=3^{n+1}-3^n=3^n \times 3-3^n \times 1=3^n \times (3-1)=3^n \times 2$, positif ; ainsi $v_{n+1}-v_n \geqslant 0$.

Remarques :

- Pour étudier le sens de variation d'une **suite à terme positif** on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

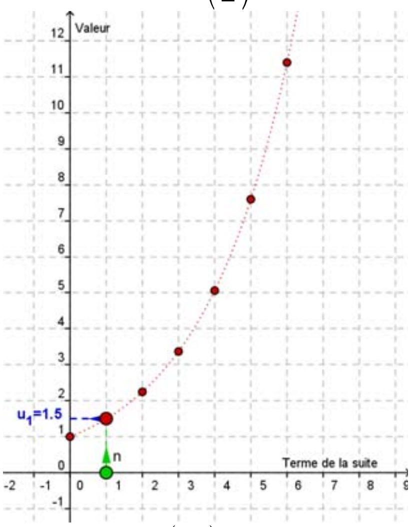
  Exemple : Dans la cas de la suite (v_n) de terme général $v_n=3^n$ (donc pour tout n $v_n>0$)
  on a ainsi : $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=3$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n}>1$ et $v_{n+1}>v_n$.

- Dans le cas d'une suite définie par une formule explicite, l'étude du sens de variation de la fonction associée permet d'obtenir des informations sur la monotonie de la suite.

Théorème :
Soit (u_n) la suite définie par la relation $u_n=f(n)$.
Si la **fonction** *f* est monotone sur [0; +∞[, alors la suite (u_n) est monotone et a **même sens de variation** que *f*.

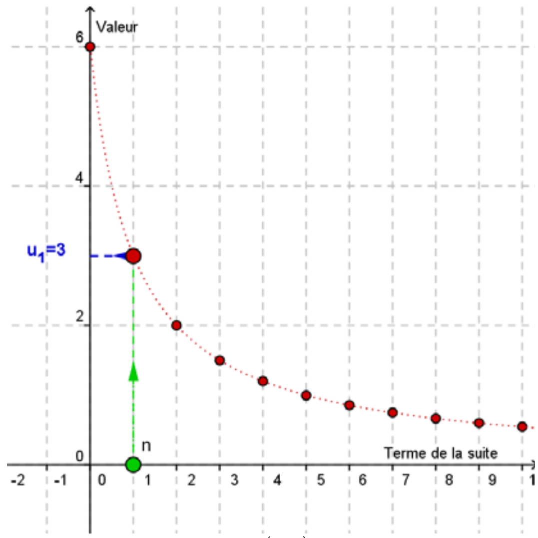
Exemples :

$$u_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$$



f est croissante donc (u_n) est croissante

$$v_n=\frac{6}{n+1}$$



f est décroissante donc (v_n) est décroissante

II. Suite arithmétique

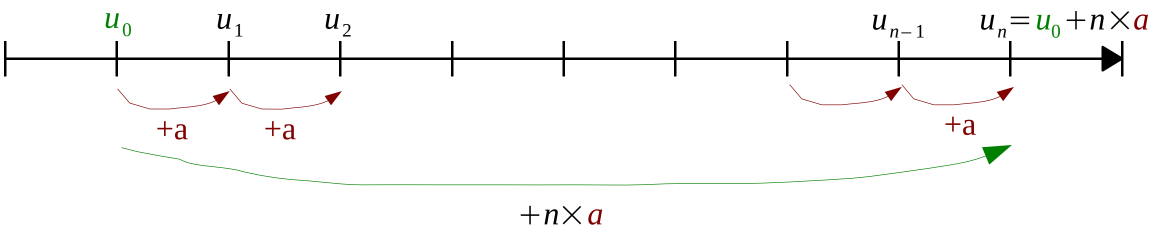
1) *Formules*

Définition :
Une suite est **arithmétique** lorsque, à partir du terme initial, l'on passe d'un terme de la suite au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre ***a*** appelé **raison** :

pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+a$, avec u_o donné.

Cette formule est la **formule de récurrence** de la suite.

Terme général en fonction de *n* : $u_n=u_0+n\times a$ *(formule explicite)*



Remarque :
Si on connaît le terme d'indice *p*, alors $u_n=u_p+(n-p)\times a$.

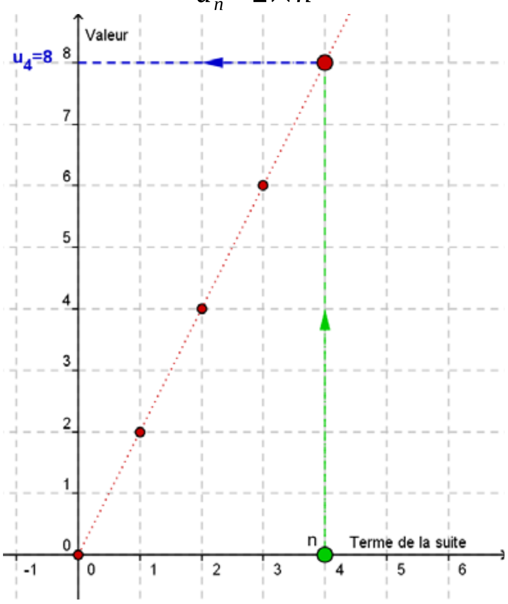
Ainsi $a=\dfrac{u_n-u_p}{n-p}$, la raison *a* est l'accroissement moyen entre deux termes.

En particulier, c'est l'accroissement entre deux termes consécutifs : $a=u_{n+1}-u_n$.

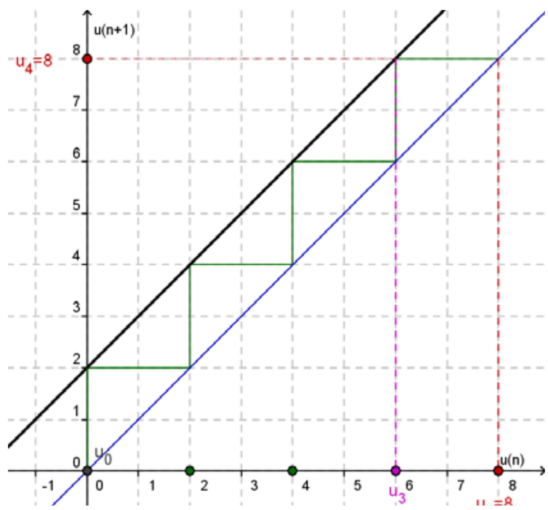
Exemples :

- La suite des nombres pairs (a_n) est définie par $a_{n+1}=a_n+2$ et $a_0=0$ (ou encore par $a_n=2\times n$).
  $a_0=0$, $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, …
  Il s'agit d'une suite arithmétique de raison 2.

$a_n=2\times n$

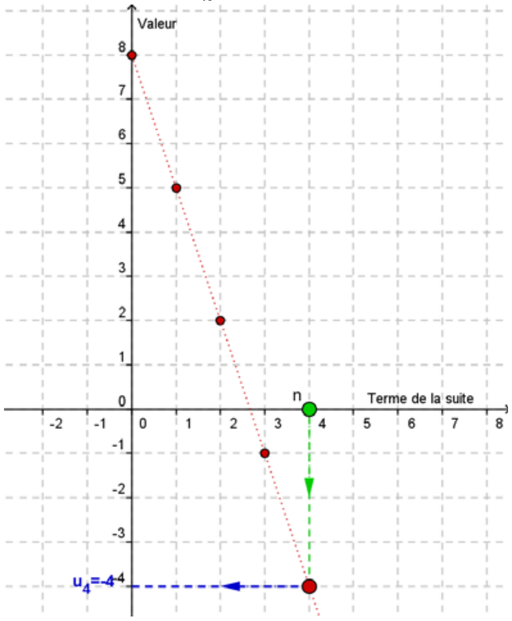


$$\begin{cases} a_0= 0 \\ a_{n+1}=a_n+2 \end{cases}$$

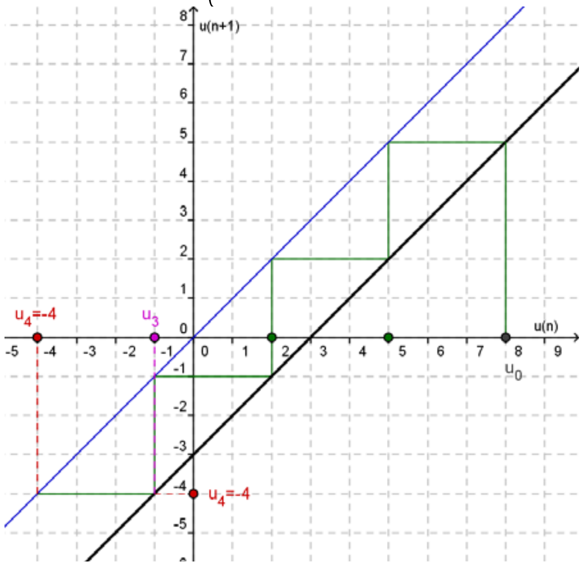


- (u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0=8$.
  Alors $u_1=5$, $u_2=2$, $u_3=-1$, …

$u_n=8-3\times n$



$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1}=u_n-3 \end{cases}$$



2) Sens de variation

Propriétés :

- Si la raison est **positive** alors la suite arithmétique est **croissante**.
- Si la raison est **négative** alors la suite arithmétique est **décroissante**.

Remarque : lien avec la fonction affine.
Comme $u_n=u_0+n\times a$, on peut définir la fonction *f* telle que :

$f(x)=a\,x+b$, avec $b=u_o$ et $x\in[0;+\infty[$.

Une suite arithmétique de raison ***a*** est donc liée à une fonction affine de coefficient ***a***.

Exemples :

- La suite des nombres pairs (a_n) est croissante (sa raison est 2).
- La suite arithmétique (u_n) de raison -3 et de premier terme $u_0=8$ est décroissante.

3) Somme des termes consécutifs

Théorème :
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

$$\textit{Somme des termes d'une suite arithmétique}=\textit{nombre de termes}\times\frac{\textit{premier terme}+\textit{dernier terme}}{2}$$

Démonstration :
Soit (u_n) la suite arithmétique de raison *r.*

$$\begin{cases} S=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n \\ S=u_n+u_{n-1}+\ldots+u_1+u_0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} S=u_0+(u_0+r)+\ldots+(u_n-r)+u_n \\ S=u_n+(u_n-r)+\ldots+(u_0+r)+u_0 \end{cases}$$

En additionnant membres à membres on obtient :

$$2S=u_0+u_n+(u_0+r)+(u_n-r)+\ldots+(u_n-r)+(u_0+r)+u_n+u_0$$
$$2S=(u_0+u_n)+(u_0+r+u_n-r)+\ldots+(u_n-r+u_0+r)+(u_n+u_0)$$
$$2S=(n+1)(u_0+u_n)$$

donc $S=(n+1)\left(\dfrac{u_0+u_n}{2}\right)$.

On utilise la notation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

<u>Cas particulier :</u>
Pour calculer la somme $S=1+2+3+\ldots+n$ des n premiers nombres entiers naturels, on considère la suite (u_n) : 1, 2, 3, … ,n, …
(u_n) est une suite arithmétique de raison 1.
On a donc : $1+2+3+\ldots+n=n\dfrac{(n+1)}{2}$

III. <u>Suite géométrique</u>

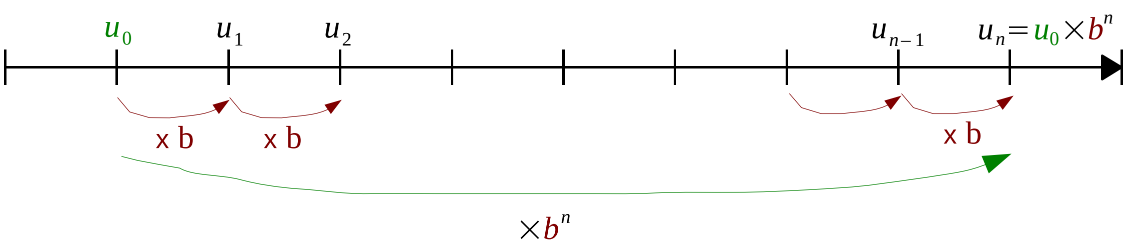
1) <u>Formules</u>

<u>Définition :</u>
Une suite est **géométrique** lorsque, à partir du terme initial, l'on passe d'un terme de la suite au terme suivant en multipliant toujours le même nombre ***b*** appelé **raison** :

pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n\times b$, avec u_o donné.

Cette formule est la **formule de récurrence** de la suite.

Terme général en fonction de *n* : $u_n=u_0\times b^n$ *(formule explicite)*

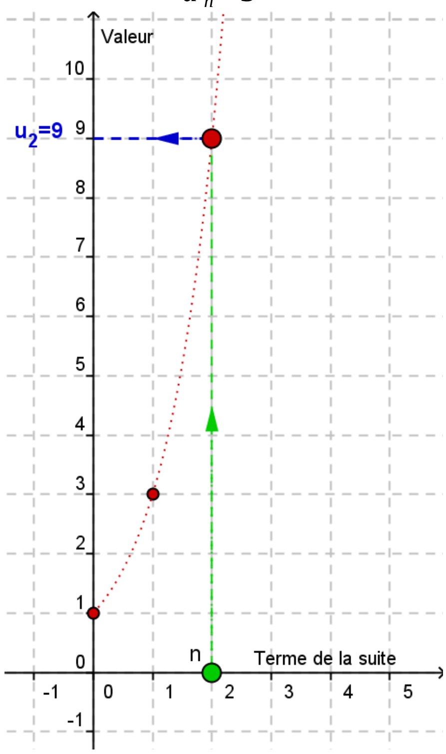


<u>Remarque :</u>
b est le coefficient multiplicateur entre deux termes consécutifs et l'accroissement est :
$u_{n+1}-u_n=u_n\times b-u_n=u_n\times(b-1)$.
Lorsque *b* = 1, la suite est constante.

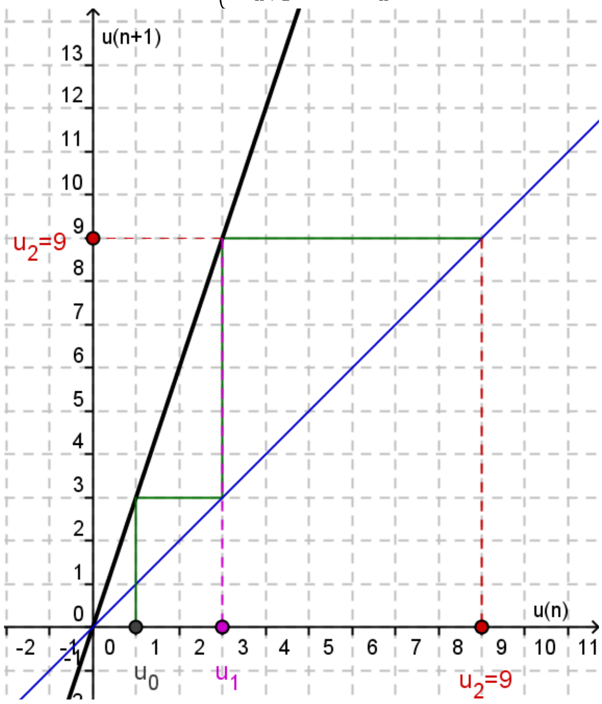
Exemples :

- Soit (d_n) la suite définie par : $d_n = 3^n$.
  Il s'agit d'une suite géométrique de raison 3.
  $d_0 = 1$, $d_1 = 3$, $d_2 = 9$, $d_3 = 27$, …

$d_n = 3^n$

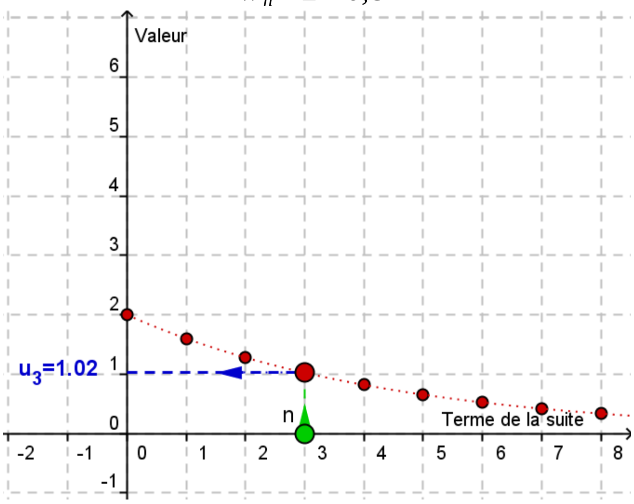


$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = 3 \times d_n \end{cases}$$

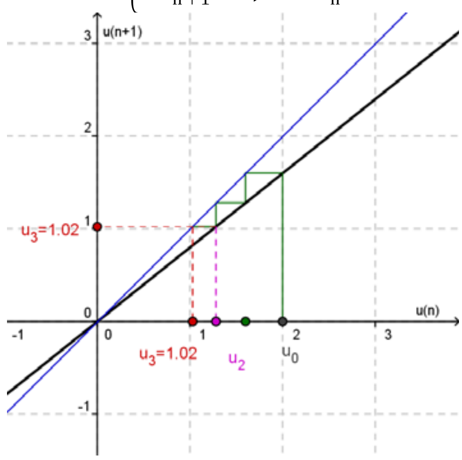


- (w_n) est une suite géométrique de raison 0,8 telle que $w_0 = 2$.
  $w_0 = 2$, $w_1 = 1{,}6$, $w_2 = 1{,}28$, …

$w_n = 2 \times 0{,}8^n$



$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = 0{,}8 \times w_n \end{cases}$$



2) Sens de variation

Propriétés :
Pour une suite géométrique de terme u_0 positif :

- Si la raison est strictement **supérieure à 1** alors la suite géométrique est **croissante**.
- Si la raison est **comprise entre 0 et 1** alors la suite géométrique est **décroissante**.

Exemples :

- La suite (d_n) définie par : $d_n=3^n$ est croissante (sa raison est 3 et $d_0=1$)
- La suite géométrique (w_n) de raison 0,8 et de premier terme 2 est décroissante.

3) Somme des termes consécutifs

Théorème :
La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $b\neq 1$ est :

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=u_0\times\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$$

$$\text{Somme des termes d'une suite géométrique}=\text{premier terme}\times\frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Démonstration :
Soit (u_n) la suite géométrique de raison *b*. Donc $u_p=u_{p-1}\times b$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} S= u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n \\ bS=b(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S= u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n \\ bS=bu_0+bu_1+\ldots+bu_{n-1}+bu_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} S= u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n \\ bS= \quad u_1+u_2+\ \ldots\ +u_n+u_{n+1} \end{cases}$$

En soustrayant terme à terme, on obtient :

$$S-bS=u_0-0+u_1-u_1+\ldots+u_n-u_n+0-u_{n+1}$$

Donc $S-bS=u_0-u_{n+1}=u_0-u_0\times b^{n+1}$

Ainsi $(1-b)S=u_0(1-b^{n+1})$ et $S=u_0\times\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

On utilise la notation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k=u_0\times\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$$

Remarque :

Si *b*=1 alors (u_n) est une suite stationnaire et donc $S=(n+1)u_0$.

IV. Applications

Soit (u_n) une suite à termes positifs :

- la **variation absolue** entre deux termes consécutifs est $u_{n+1}-u_n$.
- le **coefficient multiplicateur** d'un terme et de son précédent est $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- la **variation relative** de deux termes consécutifs est $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=\frac{u_{n+1}}{u_n}-1$.

1) *Nature des suites*

- Une suite (u_n) est **arithmétique** si, et seulement si, la **variation absolue** entre deux termes consécutifs $u_{n+1}-u_n$ est **constante.**
- Une suite (u_n) est **géométrique** si, et seulement si, le **coefficient multiplicateur** entre deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou la variation relative $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$) est **constant**.

Exemples :

- Une production de 5000 tonnes augmente de 200 tonnes par mois : la variation absolue est constante.
  Donc la production suit une loi arithmétique de raison *a* = 200 et de terme initial $u_0=5000$.
  D'où le terme général : $u_n=u_0+na=5000+200\,n$.

- Une production de 5000 tonnes augmente de 4 % par mois : la variation relative est constante.
  Donc la production suit une loi géométrique de raison $b=1+\frac{4}{100}=1{,}04$ et de terme initial $v_0=5000$.
  D'où le terme général : $v_n=v_0\times b^n=5000\times 1{,}04^n$.

2) *Capitaux*

Un capital C_0 est placé au taux annuel *t* %.
Il y a deux possibilités de placement.

À intérêts simples	**À intérêts composés**
Chaque année, les intérêts se calculent sur le capital placé au départ : $C_{n+1}=C_n+C_0\times\frac{t}{100}$ La suite des capitaux est une suite arithmétique de raison $C_0\times\frac{t}{100}$. D'où : $C_n=C_0+n\times C_0\times\frac{t}{100}=C_0\times\left(1+n\times\frac{t}{100}\right)$	Chaque année, les intérêts se calculent sur le capital acquis l'année précédente : $K_{n+1}=K_n+K_n\times\frac{t}{100}=K_n\times\left(1+\frac{t}{100}\right)$ La suite des capitaux est une suite géométrique de raison $1+\frac{t}{100}$. D'où : $K_n=C_0\times\left(1+\frac{t}{100}\right)^n$

Exemple :
Deux capitaux de 2500 € et 2000 € sont placés au taux annuel de 5 %, le premier à intérêts simples et le second à intérêts composés, durant 18 mois.
Le capital acquis pour le premier est : $2500(1+18\times 0{,}05)$ = 4500 €.
Le capital acquis par le second est : $2000(1+0{,}05)^{18}$ = 4813 €

Calculatrice :