Chapitre 3

Géométrie plane

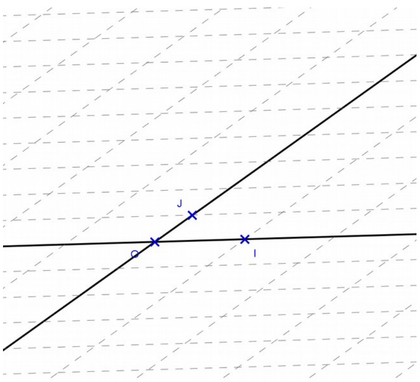
I. Repérage et calculs dans le plan

1) Repère du plan

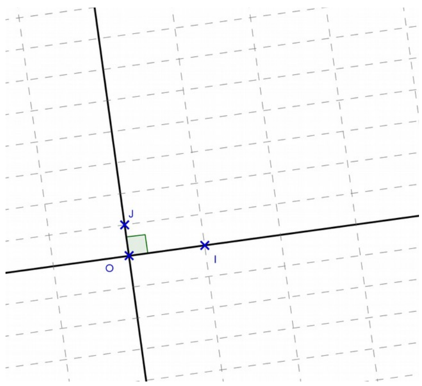
Vocabulaire

Dans un repère (O ; I, J) :

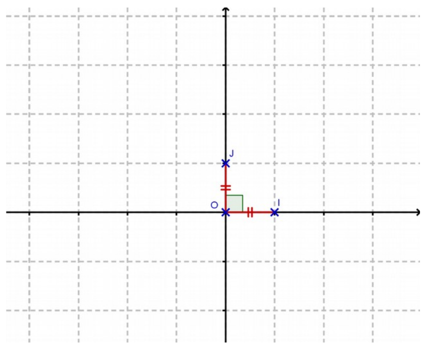
- le point O est l'**origine** du repère.
- l'**axe des abscisses** est la droite (OI), graduée dans le sens de O vers I, avec OI comme **unité de longueur**.
- l'**axe des ordonnées** est la droite (OJ), graduée dans le sens de O vers J, avec OJ comme **unité de longueur**.



Repère quelconque



Repère orthogonal



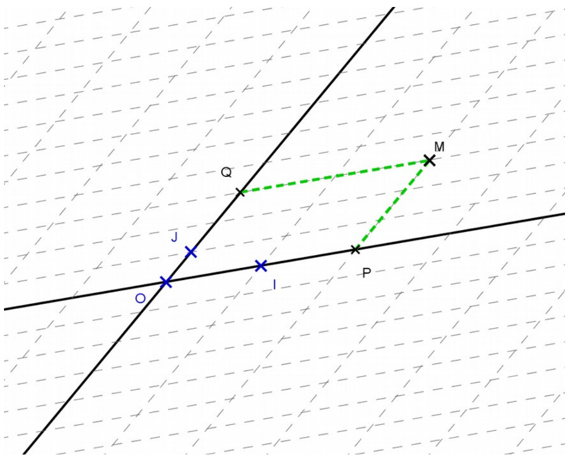
Repère orthonormé

Coordonnées d'un point dans un repère

Soit M un point du plan (muni du repère(O ; I, J)).

La parallèle à (OI) passant par M coupe (OJ) en Q.
La parallèle à (OJ) passant par M coupe (OI) en P.

Le point M est entièrement déterminé par P et Q.



Définitions :

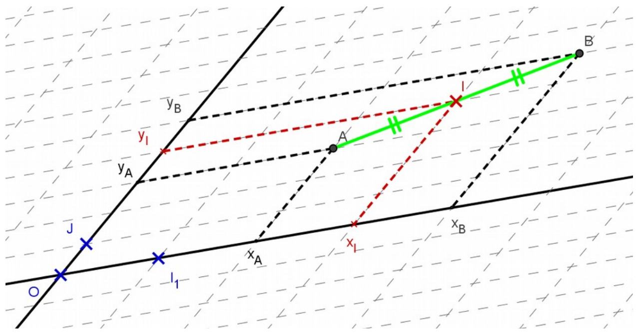
- L'**abscisse** x_M du point M est l'abscisse du point P sur (OI).
- L'**ordonnée** y_M du point M est l'abscisse du point Q sur (OJ).
- Le couple $(x_M ; y_M)$ s'appelle les **coordonnées** du point M dans le repère (O ; I, J).

Exemple :
Sur le repère ci-dessus, les coordonnées du point O sont (0 ; 0).
Q(0 ; 3) ; P(2 ; 0) ; M(2 ; 3)

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété :
Dans tout repère, les coordonnées du milieu I d'un segment [AB] sont :

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$$



2) *Calculs de distances*

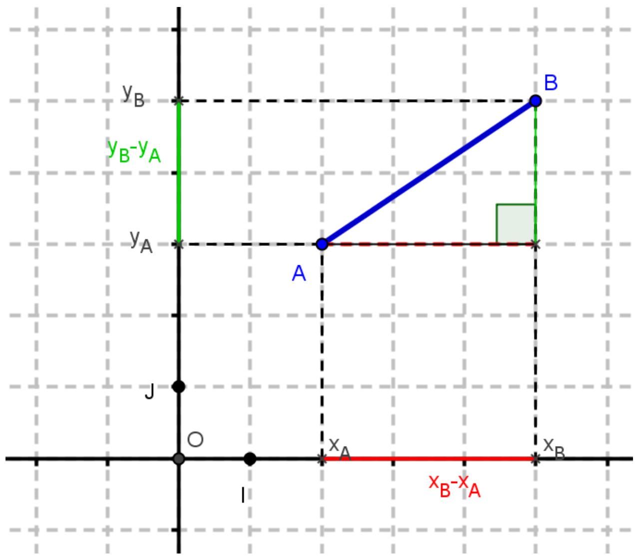
Propriété :
Dans un repère **orthonormé**, la distance AB entre deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ est donnée par :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Exemple :
Dans le repère orthonormé ci-contre, $A(2;3)$ et $B(5;5)$

donc

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{3^2+2^2}$$
$$=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\simeq 3,61$$



Remarques :

- Il faut que le repère soit orthonormé car cette propriété repose sur le théorème de Pythagore.
- $(x_B-x_A)^2=(x_A-x_B)^2$

II. Configurations usuelles du plan

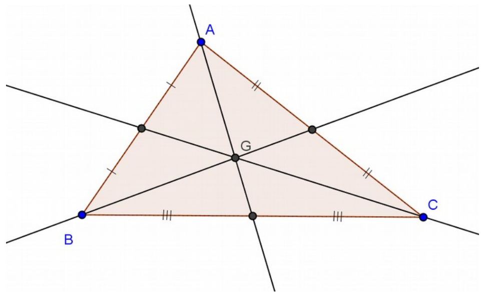
1) Les triangles

Droites et points remarquables

- **Médianes et centre de gravité**

Les **médianes** d'un triangle sont **concourantes**.

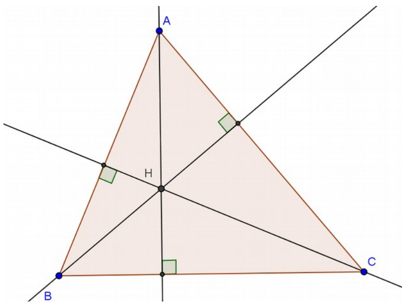
Leur point d'intersection G est appelé **centre de gravité** du triangle.



- **Hauteurs et orthocentre**

Les **hauteurs** d'un triangle sont **concourantes**.

Leur point d'intersection H est appelé **orthocentre** du triangle.

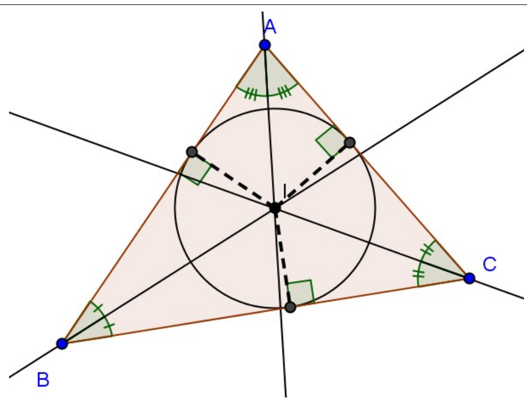


- **Bissectrices et cercle inscrit**

Les **bissectrices** d'un triangle sont **concourantes**.

Leur point d'intersection I est équidistant de chacun des trois côtés du triangle.

I est le centre du **cercle inscrit** dans le triangle.



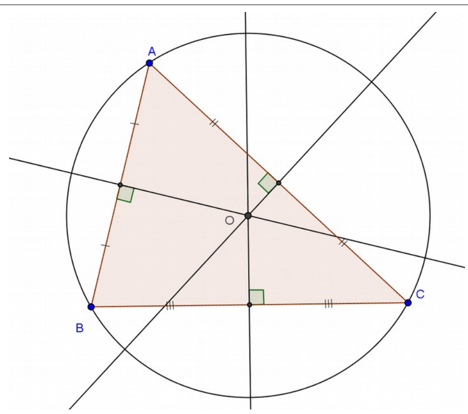
- **Médiatrices et cercle circonscrit**

Les **médiatrices** d'un triangle sont **concourantes**.

Leur point d'intersection O est équidistant de chacun des sommets du triangle :

OA = OB = OC

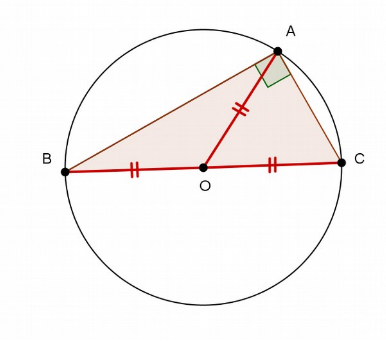
O est le centre du **cercle circonscrit** dans le triangle.



Triangles particuliers

- **Triangle rectangle**

Dans un triangle ABC rectangle en A, le centre O du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse [BC].



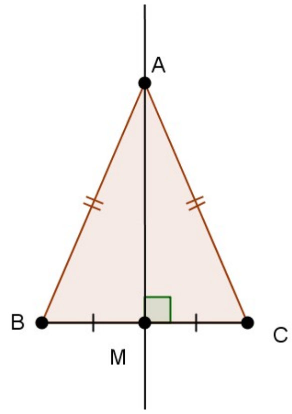
Réciproquement :

- Si dans le triangle ABC le milieu O de [BC] est tel que $OA=\frac{1}{2}BC$, alors le triangle ABC est rectangle en A.
- Si A est un point du cercle de diamètre [BC], alors le triangle ABC est rectangle en A.

- **Triangle isocèle**

Dans un triangle isocèle en A, la médiane (AM) est aussi la hauteur et bissectrice de l'angle $\hat{A}$.

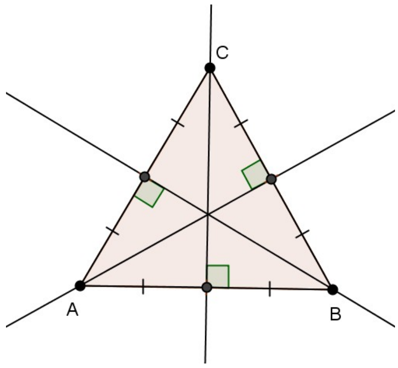
Elle est donc médiatrice de [BC] et axe de symétrie du triangle.



- **Triangle équilatéral**

Dans un triangle équilatéral, le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit sont confondus.

Chaque hauteur est un axe de symétrie.



Programmation :

```
from math import sqrt

# Entrée des coordonnées des sommets
xA = float(input("Abscisse de A : "))
yA = float(input("Ordonnée de A : "))
xB = float(input("Abscisse de B : "))
yB = float(input("Ordonnée de B : "))
xC = float(input("Abscisse de C : "))
yC = float(input("Ordonnée de C : "))
# Calcul des longueurs des côtés
AB = sqrt((xB - xA) ** 2 + (yB - yA) ** 2)
BC = sqrt((xC - xB) ** 2 + (yC - yB) ** 2)
CA = sqrt((xA - xC) ** 2 + (yA - yC) ** 2)
# Détermination de la nature du triangle
if AB == BC:
    print("ABC est un triangle isocèle en B")
if BC == CA:
    print("ABC est un triangle isocèle en C")
if CA == AB:
    print("ABC est un triangle isocèle en A")
if AB ** 2 == BC ** 2 + CA ** 2:
    print("ABC est un triangle rectangle en C")
if BC ** 2 == AB ** 2 + CA ** 2:
    print("ABC est un triangle rectangle en A")
if CA ** 2 == AB ** 2 + BC ** 2:
    print("ABC est un triangle rectangle en B")
```

```
>>>
Abscisse de A : 1
Ordonnée de A : 0
Abscisse de B : -4
Ordonnée de B : 3
Abscisse de C : -3
Ordonnée de C : -1
ABC est un triangle isocèle en C
ABC est un triangle rectangle en C
>>>
```

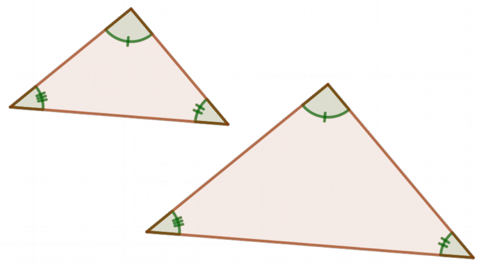
Attention :

La manipulation de nombres réels est un sujet sensible en programmation et source de certaines erreurs.
Par exemple, soit le triangle ABC rectangle en C :

```
>>>
Abscisse de A : -2
Ordonnée de A : -1
Abscisse de B : -4
Ordonnée de B : 3
Abscisse de C : -4
Ordonnée de C : -1
>>>
```

Ici, pour des problèmes de valeurs approchées, le programme ne détecte pas l'égalité de Pythagore.
Dans ces cas, on peut utiliser un logiciel de calcul formel.

- **Triangles semblables**
    - Deux triangles sont semblables si et seulement si leurs angles sont deux à deux de même mesure.
    - Deux triangles sont semblables si et seulement si leurs côtés sont proportionnels.

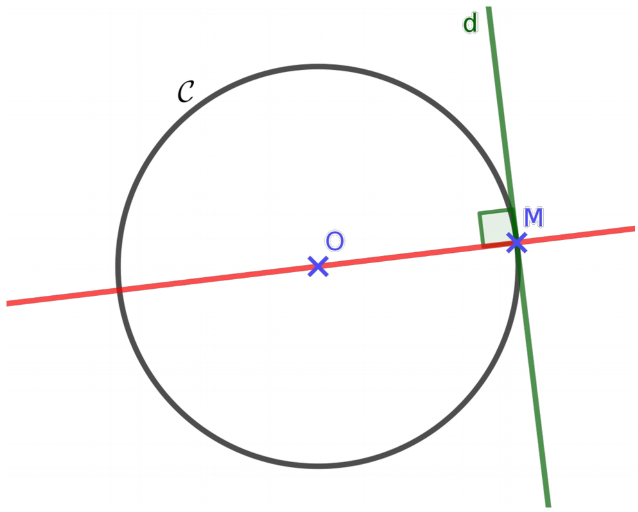


2) *Le cercle*

Définition :
Soit R un réel strictement positif.
Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon R si et seulement si $OM=R$.

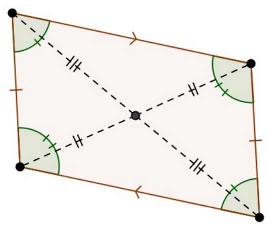
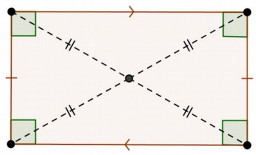
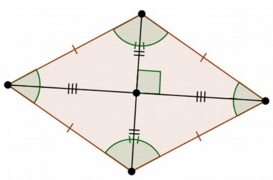
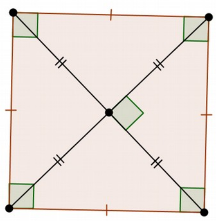
Définition :
La tangente en un point M d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O est la droite (*d*) perpendiculaire en M à la droite (OM).

Remarque :
On dit aussi que la droite (*d*) est tangente en M au cercle $\mathscr{C}$ et que le cercle $\mathscr{C}$ est tangent en M à la droite (*d*).



Propriété :
Un cercle $\mathscr{C}$ et la tangente (*T*) en un point M de ce cercle ont un unique point commun : le point M, appelé point de contact du cercle $\mathscr{C}$ et de la tangente (*T*).

3) *Les quadrilatères*

Quadrilatère	Définitions	Propriétés caractéristiques	Centre et axes de symétrie
 Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ...	ses côtés opposés parallèles deux à deux.	ses diagonales de même milieu.	**un centre** de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales
 Un **rectangle** est un quadrilatère qui a …	quatre angles droits.	ses diagonales de même milieu **et** de même longueur.	**deux axes** de symétrie (les médiatrices de ses côtés) et **un centre** de symétrie (le point d'intersection de ses diagonales)
 Un **losange** est un quadrilatère qui a …	quatre côtés de même longueur.	ses diagonales de même milieu **et** perpendiculaires	**deux axes** de symétrie (ses diagonales) et **un centre** de symétrie (le point d'intersection de ses diagonales)
 Un **carré** est un quadrilatère qui a …	quatre angles droits **et** quatre côtés de même longueur.	ses diagonales de même milieu **et** de même longueur **et** perpendiculaires	**quatre axes** de symétrie et **un centre** de symétrie

Programmation :

```
from math import sqrt

# Entrée des coordonnées des sommets
xA = float(input("Abscisse de A : "))
yA = float(input("Ordonnée de A : "))
xB = float(input("Abscisse de B : "))
yB = float(input("Ordonnée de B : "))
xC = float(input("Abscisse de C : "))
yC = float(input("Ordonnée de C : "))
xD = float(input("Abscisse de D : "))
yD = float(input("Ordonnée de D : "))
# Calcul des coordonnées des milieux des diagonales
parallelogramme = False
xE = (xA + xC) / 2
yE = (yA + yC) / 2
xF = (xB + xD) / 2
yF = (yB + yD) / 2
if xE == xF and yE == yF:
    print("ABCD est un parallélogramme")
    parallelogramme = True
# Calcul des longueurs de e ABC
AB = sqrt((xB - xA) ** 2 + (yB - yA) ** 2)
BC = sqrt((xC - xB) ** 2 + (yC - yB) ** 2)
CA = sqrt((xA - xC) ** 2 + (yA - yC) ** 2)
# Détermination de la nature du parallélogramme
if parallelogramme == True and AB == BC:
    print("ABCD est un losange")
if parallelogramme == True and CA ** 2 == AB ** 2 + BC ** 2:
    print("ABCD est un rectangle")
```

```
>>>
Abscisse de A : 4
Ordonnée de A : 3
Abscisse de B : 2
Ordonnée de B : 4
Abscisse de C : 0
Ordonnée de C : 3
Abscisse de D : 2
Ordonnée de D : 2
ABCD est un parallélogramme
ABCD est un losange
>>>
```

Attention :

La manipulation de nombres réels peut conduire à certaines erreurs.
Par exemple, soit le rectangle ABCD :

```
>>>
Abscisse de A : 5
Ordonnée de A : 5
Abscisse de B : 3
Ordonnée de B : 6
Abscisse de C : 1
Ordonnée de C : 2
Abscisse de D : 3
Ordonnée de D : 1
ABCD est un parallélogramme
>>>
```

Ici, pour des problèmes de valeurs approchées, le programme ne détecte pas l'égalité de Pythagore.
Dans ces cas, on peut utiliser un logiciel de calcul formel.