# Chapitre 10
# Somme de variables aléatoires

## I. Somme de deux variables aléatoires

### 1) Variable aléatoire

**Définitions :**

- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience. On le note $\Omega$.
- Une **variable aléatoire réelle** est une fonction définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X.

On a donc $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \mapsto X(\omega)$

**Exemple :**

On lance une pièce de monnaie. Si on obtient pile, on gagne 5 € et si on obtient face, on gagne 2 €.

On peut alors définir une variable aléatoire X correspondant au gain obtenu en euro.

X est défini sur l'univers $\Omega = \{\text{pile, face}\}$.

On a alors $X(\text{pile}) = 5$ et $X(\text{face}) = 2$.

X peut prendre deux valeurs : 5 et 2.

### 2) Transformation affine

**Définition :**

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers $\Omega$ et $a$ et $b$ deux nombres réels.

On peut définir une variable aléatoire réelle Y telle que, pour tout élément $\omega \in \Omega$,

$$Y(\omega) = aX(\omega) + b$$

On note $Y = aX + b$.

**Exemple :**

- On lance un dé équilibré à six faces et on joue au jeu suivant : le nombre de points obtenus est le résultat du dé multiplié par 5 auquel on ajoute 3.

  En notant respectivement X et Y les variables aléatoires correspondant au résultat du dé et aux points obtenus, on a alors $Y = 5X + 3$.
- X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0,2$.

  $Y = 4X - 0,6$ est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $\{-0,6 ; 3,4 ; 7,4\}$.

## 3) Somme

**Définition :**

Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur l'univers $\Omega$.

On peut définir une variable aléatoire Z sur $\Omega$ telle que, pour tout élément $\omega \in \Omega$,

$$Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

Cette variable aléatoire est appelée **somme des variables aléatoires X et Y**.

On note $Z = X + Y$.

**Exemples :**

- On lance cinq dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus.

  Soit X la variable aléatoire correspondant à cette somme.

  Alors on peut écrire X sous la forme $X = X_1 + X_2 + \dots + X_5$ où,

  pour tout $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$, $X_k$ correspond au résultat du dé numéro $k$.

  L'ensemble des valeurs prises par X est $\{5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; \dots ; 30\}$.

  On remarque que $X \neq 5X_1$.
- X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}2$ et Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}5$.

  X + Y est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $\{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 300\}$.
- On lance 20 fois une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de pile obtenu.

  On peut écrire la variable aléatoire X sous la forme $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{20}$ où,

  pour tout $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; 20\}$, $X_k = 1$ si on a obtenu pile au $k^e$ lancer et $X_k = 0$ si on a obtenu face au $k^e$ lancer.

# II. Caractéristiques des variables aléatoires

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X définie sur $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_r\}$ et on note $\{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_s\}$ l'ensemble des valeurs prises par X où $r$ et $s$ sont des entiers naturels non nuls.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{s} x_i \times p(X = x_i) \quad \text{et} \quad V(X) = \sum_{i=1}^{s} (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)$$

## 1) Espérance

**Propriété :**

En reprenant les notations précédentes, on a $E(X) = \sum_{j=1}^{r} X(\omega_j)\, p(\{\omega_j\})$ .

**Remarque :**

Dans cette propriété, l'espérance s'écrit en fonction des issues $\omega_i$ de l'expérience aléatoire et non en fonctions des valeurs $x_i$ .

**Exemple :**

On jette un dé cubique équilibré, on gagne 2 € si on obtient un nombre pair et on perd 6 € si on obtient un nombre impair.

L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$$E(X)=X(1)\times p(\{1\})+...+X(6)\times p(\{6\})=(-6)\times\frac{1}{6}+...+2\times\frac{1}{6} = -2 \text{ €}$$

**Propriété :**

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω. Alors :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

*Démonstration :*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. Soit Z la variable aléatoire définie sur Ω par Z = X + Y.

On a alors E(X + Y) = E(Z) = $\sum_{j=1}^{r} Z(\omega_j)\, p(\{\omega_j\})$ et donc E(X + Y) = $\sum_{j=1}^{r} (X+Y)(\omega_j)\, p(\{\omega_j\})$ .

On a, par ailleurs, $(X + Y)(\omega_j) = X(\omega_j) + Y(\omega_j)$ .

Donc E(X + Y) = $\sum_{j=1}^{r} X(\omega_j)\, p(\{\omega_j\})+\sum_{j=1}^{r} Y(\omega_j)\, p(\{\omega_j\})$ . D'où E(X + Y) = E(X) + E(Y).

**Remarque :**

Cette propriété permet de déterminer l'espérance de X + Y simplement à l'aide de celles de X et Y (donc sans la connaissance de la loi de probabilité de X + Y).

**Exemple :**

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n$ = 200 et $p$ = 0,2 et Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n$ = 100 et $p$ = 0,5.

E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 200 × 0,2 + 100 × 0,5 = 90

**Propriété :**

Soit X une variable aléatoire et Y la variable aléatoire définie par Y = $a$X + $b$, où $a$ et $b$ sont deux réels. Alors :

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

*Démonstration :*

Si $a$ = 0, on a E(0X + $b$) = E($b$) = $b$ (car Y prend la valeur $b$ et $p$(X = $b$) = 1) et 0 × E(X) + $b$ = $b$

Si $a \neq 0$, en notant $x_1$ ; $x_2$ ; … ; $x_s$ les valeurs prises par X, alors $a$X + $b$ prend les valeurs $ax_1 + b$ ; $ax_2 + b$ ; … ; $ax_s + b$.

Par définition, E($a$X + $b$) = $\sum_{i=1}^{s}(ax_i+b)p(aX+b=ax_i+b)$ .

Or $a$X + $b$ = $ax_i + b$, si et seulement si, X = $x_i$, donc $p(aX+b=ax_i+b)=p(X=x_i)$ .

Ainsi E($a$X + $b$) = $\sum_{i=1}^{s}(ax_i+b)p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{s}ax_i\,p(X=x_i)+\sum_{i=1}^{s}b\,p(X=x_i)$

E($a$X + $b$) = $a\times\sum_{i=1}^{s}x_i\,p(X=x_i)+b\times\sum_{i=1}^{s}p(X=x_i)$ = $a$E(X) + $b$

**Exemple :**

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n$ = 2 et $p$ = 0,2 et soit

Y = 4X – 0,6.

E(Y) = E(4X – 0,6) = 4 E(X) – 0,6 = 4 × (2 × 0,2) – 0,6 = 1

## 2) Variance

**Propriété :**

Soit X une variable aléatoire et Y la variable aléatoire définie par Y = $a$X + $b$, où $a$ et $b$ sont deux réels. Alors :

$$V(Y) = V(aX + b) = V(aX) = a^2\,V(X)$$

*Démonstration :*

Si $a$ = 0, on a V(0X + $b$) = V($b$) = $b$ (car Y prend la valeur $b$ et E(Y) = $b$ donc V(Y) = 0)

et $0^2$ × V(Y) = $b$

Si $a \neq 0$, en notant $x_1$ ; $x_2$ ; … ; $x_s$ les valeurs prises par X, alors $a$X + $b$ prend les valeurs $ax_1 + b$ ; $ax_2 + b$ ; … ; $ax_s + b$.

Par définition, V($a$X + $b$) = $\sum_{i=1}^{s}(ax_i+b-E(aX+b))^2p(aX+b=ax_i+b)$ .

Or $a$X + $b$ = $ax_i + b$, si et seulement si, X = $x_i$, donc $p(aX+b=ax_i+b)=p(X=x_i)$ .

Ainsi V($a$X + $b$) = $\sum_{i=1}^{s}(ax_i+b-aE(X)+b)^2p(X=x_i)$ = $\sum_{i=1}^{s}(ax_i-aE(X))^2p(X=x_i)$

V($a$X + $b$) = $\sum_{i=1}^{s}a^2(x_i-E(X))^2p(X=x_i)=a^2\times\sum_{i=1}^{s}(x_i-E(X))^2p(X=x_i)$ = $a^2$V(X)

**Remarque :**

L'écart type σ($a$X + $b$) vérifie σ($a$X + $b$) = |$a$|σ(X).

**Exemple :**

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0,2$ et soit

$Y = 4X – 0,6$.

$V(Y) = V(4X – 0,6) = V(4X) = 4^2 \times V(X) = 16 \times (2 \times 0,2 \times 0,8) = 5,12$

**Définitions :**

Soient $X_1, X_2, \dots X_n$, $n$ variables aléatoires à valeurs respectivement dans $E_1, E_2, \dots E_n$.

On dit que $X_1, X_2, \dots X_n$ sont **indépendantes** lorsque, pour tout $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, … , $x_n \in E_n$ :

$$p(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) = p(X_1 = x_1) \times p(X_2 = x_2) \times \dots \times p(X_n = x_n)$$

**Remarque :**

Si les variables $X_1, X_2, \dots X_n$ sont deux à deux indépendantes, on ne peut pas en conclure que $X_1, X_2, \dots X_n$ sont mutuellement indépendantes.

**Propriété :**

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur Ω, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

**Remarques :**

- Dans le cas où les expériences ne sont pas indépendantes, il se peut que :
  $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$.
- Si $X_1, X_2, \dots X_n$ sont $n$ variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, alors :
  $$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

# III. Applications

## 1) Application à la loi binomiale

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $p$ un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1].

**Définition :**

Deux variables aléatoires sont dites **identiquement distribuées** lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.

**Remarque :**

Deux variables aléatoires identiquement distribuées peuvent être ou ne pas être indépendantes.

**Propriété :**

Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

**Propriétés :**

Si X suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

*Démonstrations :*

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

  Alors, il existe $n$ variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p$ telles que :

  $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

  Ainsi pour tout $k \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.

  Or, $E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = p + p + \ldots + p = np$.

- Les variables aléatoires $X_1$, $X_2$, … $X_n$ étant indépendantes, par définition de schéma de Bernoulli, on a :

  $V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) = p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p) = np(1-p)$.

- $\sigma(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{np(1-p)}$ .

**Exemple :**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$.

On a $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$.

De plus $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$.

Donc $\sigma(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{3,2} \approx 1,789$

## 2) Échantillons de *n* variables aléatoires identiques et indépendantes

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$ et $X_1$, $X_2$, … $X_n$, $n$ variables aléatoires définies sur $\Omega$ supposées indépendantes et identiquement distribuées.

On note $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ la somme de ces $n$ variables aléatoires et $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ la moyenne de ces $n$ variables aléatoires.

**Propriété :**

Pour tout $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, on a :

- $E(S_n) = nE(X_k)$
- $V(S_n) = nV(X_k)$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X_k)$ .

*Démonstrations :*

- La linéarité de l'espérance donne $E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$. Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance.

  D'où, pour tout $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, $E(S_n) = nE(X_k)$.
- De la même manière, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots X_n$ étant supposées indépendantes, on obtient, pour tout $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, $V(S_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) = nV(X_k)$.

  Enfin, on a $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X_k)$ .

**Remarque :**

Cette propriété généralise les résultats obtenus sur la loi binomiale en considérant, dans ce cas, la variable aléatoire X comme somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres $p$.

**Propriété :**

Pour tout $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, on a :

- $E(M_n) = E(X_k)$
- $V(M_n) = \dfrac{V(X_k)}{n}$ et $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_k)}{\sqrt{n}}$ .

*Démonstrations :*

- Soit $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, la linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent $E(M_n) = E\left(\dfrac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right)=E\left(\dfrac{S_n}{n}\right)=\dfrac{1}{n}E(S_n)=\dfrac{1}{n}\times n\,E(X_k) = E(X_k)$.
- Par ailleurs, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $V(aS_n) = a^2V(S_n)$.

  En combinant cette égalité au résultat de la propriété précédente,

  $V(M_n) = V\left(\dfrac{S_n}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}V(S_n)=\dfrac{1}{n^2}n\,V(X_k)=\dfrac{V(X_k)}{n}$ . On obtient ensuite $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_k)}{\sqrt{n}}$ .

**Remarques :**

- $E(M_n)$ peut s'interpréter comme ceci : en prenant un grand nombre de fois des échantillons de taille $n$ et en calculant, à chaque fois la moyenne de l'échantillon obtenu, la moyenne théorique de ces résultats est égale à $E(X_k)$.

- $V(M_n) = \dfrac{V(X_k)}{n}$ montre que la variance diminue quand la taille de l'échantillon augmente. Elle quantifie la fluctuation d'échantillonnage, c'est-à-dire l'écart moyen entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance.

**Exemple :**

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque paquet de chips issue d'une chaîne de production, associe sa masse en grammes. On note $X_i$ la variable aléatoire qui, à chaque lot de 3 paquets de chips, associe la masse du *i*-ème paquet.

Les variables aléatoires $X_1$, $X_2$ et $X_3$ sont indépendantes et suivent la même loi que X, donc $(X_1, X_2, X_3)$ est un échantillon de taille 3 de la loi de X.

La variable aléatoire somme $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ associe, à chaque lot sa masse en grammes.

La variable aléatoire moyenne $M_3 = \dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$ associe, à chaque lot de 3 paquets, la masse moyenne d'un paquet.

$E(M_3) = E(X)$ et $V(M_3) = \dfrac{1}{3}V(X)$ .