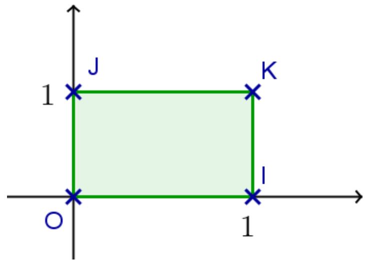
Chapitre 10

Intégration

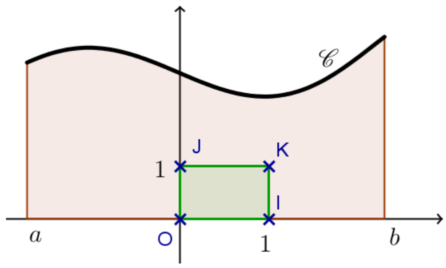
I. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition :
Dans un repère orthogonal $(O;\vec{OI},\vec{OJ})$, l'unité d'aire (notée u.a.) est l'aire du rectangle OIKJ où K est le point de coordonnées $(1;1)$.



1) *Notion d'intégrale*

Définition :
f est une fonction **continue** et **positive** sur l'intervalle $[a;b]$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Le **domaine** situé sous sa courbe $\mathscr{C}$ est le domaine situé entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Remarque :
Le domaine peut être défini comme l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que :

$$a\leqslant x\leqslant b \text{ et } 0\leqslant y\leqslant f(x)$$

Définition :
f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de *a* à *b* de la fonction *f* est l'aire, en unités d'aire, du domaine situé sous sa courbe $\mathscr{C}$. On la note :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété :

Pour toute fonction continue et positive sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un **nombre réel** positif ou nul.

Remarques :

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » ou « somme de a à b de f ».
- a et b sont les **bornes d'intégration**.
- x est la **variable d'intégration**. On dit que x est une variable muette car elle n'intervient pas dans le résultat.
  On peut noter indifféremment :
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

2) *Propriétés immédiates*

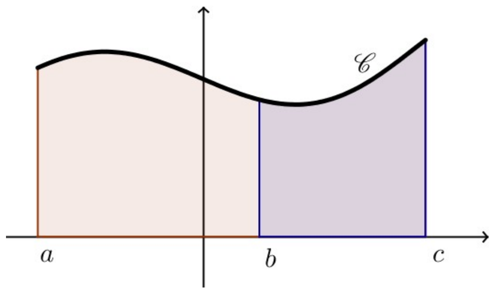
f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ de courbe représentative $\mathscr{C}$.

Propriété :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

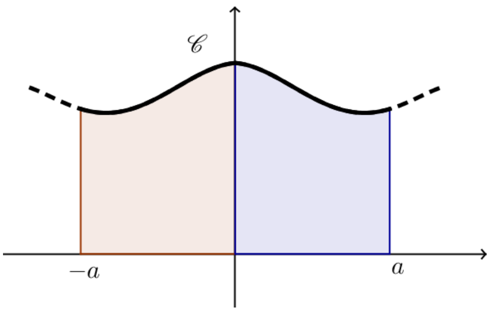
Démonstration :
Le domaine est alors réduit à un segment.

Propriété (relation de Chasles) :
Pour tous nombres réels a, b, c tels que $a\leqslant b\leqslant c$.
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

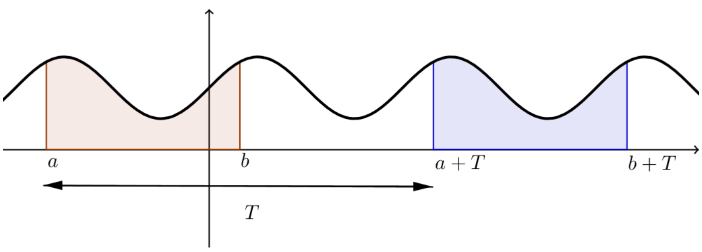


Démonstration :
Cela résulte de l'additivité des aires.

Propriété : (conservation par symétrie) :
Si $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à (OJ) alors, pour tout $a>0$.
$$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\text{d'où } \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$



Propriété : (conservation par translation) :
Si la fonction est périodique de période T :
$\forall x\in I,\ x+T\ \in\ I$ et $f(x)=f(x+T)$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

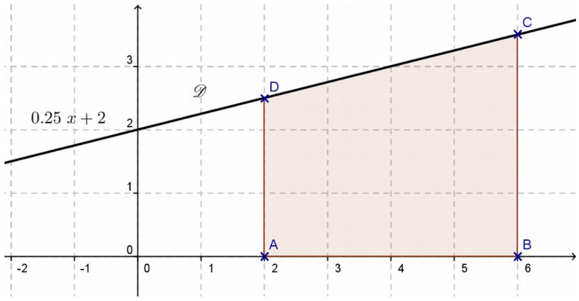


Exemples :

- Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{4}x+2$$

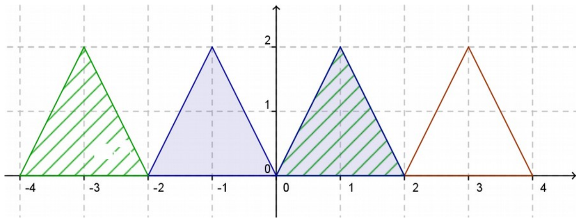
et $\mathscr{D}$ sa représentation graphique.



$\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du trapèze ABCD et vaut :

$$\frac{AD+BC}{2}\times AB=\frac{f(2)+f(6)}{2}\times 4=\frac{2{,}5+3{,}5}{2}\times 4=12 \text{ u.a.}$$

- La fonction f définie sur l'intervalle $[-4;4]$ représentée ci-contre, modélise un signal en dent de scie obtenu en électronique.



Les triangles colorés en bleu sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc :

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Les triangles hachurés se correspondent par une translation, donc

$$\int_{-4}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

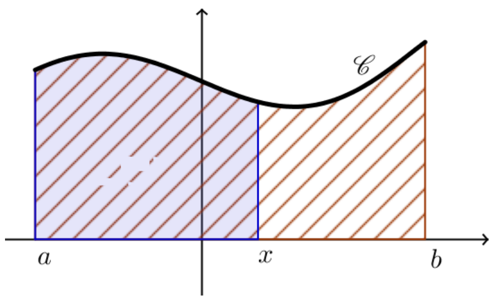
Ainsi $\int_{-4}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=4\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4\times\frac{2\times 2}{2}=4\times 2=8$ u.a.

II. Notion de primitives

1) *Théorème fondamental*

Soit f une fonction continue et positive, définie sur $[a;b]$ et x un nombre réel quelconque de cet intervalle. L'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la partie du plan coloriée en bleu, qui dépend de la valeur x.

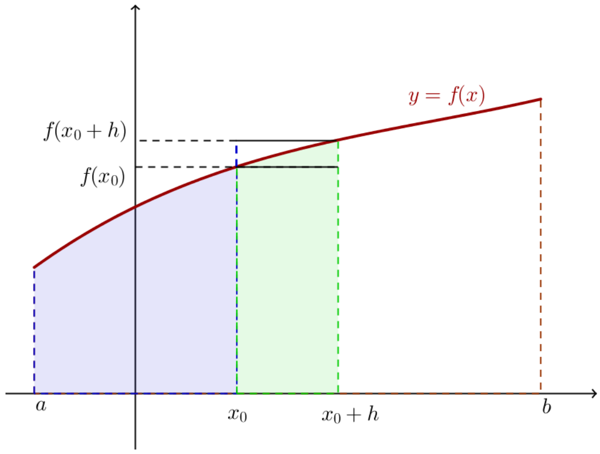
Pour $x=b$ cette quantité vaut $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire l'aire de la partie hachurée.



Théorème fondamental :
f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

Démonstration : cas où f est croissante sur $[a;b]$.
x_0 désigne un nombre réel de $[a;b]$ et h un nombre réel non nul tel $x_0+h \in [a;b]$.

- 1^{er} cas : $h>0$
  f est continue et positive sur $[a;b]$ donc d'après la relation de Chasles :
  $$\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$
  c'est-à-dire
  $$F(x_0+h)-F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$



  f est croissante sur $[a;b]$ donc on peut encadrer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ donc :
  $h \times f(x_0) \leqslant F(x_0+h)-F(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$ et par conséquent
  $$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$
- 2^{e} cas : $h<0$. On établit de même que $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$.
- **Conclusion :**
  f est continue en x_0 donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Le théorème des gendarmes permet de conclure dans les deux cas ci-dessus que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$.
  F est donc dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
  Or x_0 est un nombre réel quelconque de $[a;b]$, donc F est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$.

Remarque :
On admet le théorème dans le cas général.

2) *Primitive d'une fonction sur un intervalle*

Définition :
f est une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que F est une **primitive** de f sur I signifie que F est **dérivable** sur I et que $F' = f$.

Exemple :
$x \longmapsto x^2 - x$ et $x \longmapsto x^2 - x + 5$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto 2x-1$.

Propriétés :
f est une fonction définie sur *I* et qui admet une primitive F sur *I*.

- L'ensemble des primitives de f sur *I* est constitué par les fonctions G définies sur *I* par $G(x)=F(x)+k$ où *k* décrit ℝ.
- Il existe **une primitive** de f sur *I* et une seule vérifiant la **condition initiale** $G(x_0)=y_0$ où x_0 est un nombre réel donné de *I* et où y_0 est un nombre réel donné.

Démonstrations :

- Si sur *I*, $G(x)=F(x)+k$, alors G est dérivable sur *I* et $G'(x)=F'(x)=f(x)$.
  Donc, G est une primitive de f sur *I*.
  Réciproquement, si G est une primitive de f sur *I*, alors pour tout *x* de *I*, $G'(x)=f(x)$.
  Or $F'(x)=f(x)$, donc $(G-F)'=0$ et la fonction $G-F$ est constante sur *I*.
  Donc, il existe un nombre réel k tel que, pour tout x de *I*, $G(x)-F(x)=k$, soit $G(x)=F(x)+k$.
- $G(x_0)=y_0$ s'écrit $F(x_0)+k=y_0$, soit $k=y_0-F(x_0)$. Donc $G(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$.

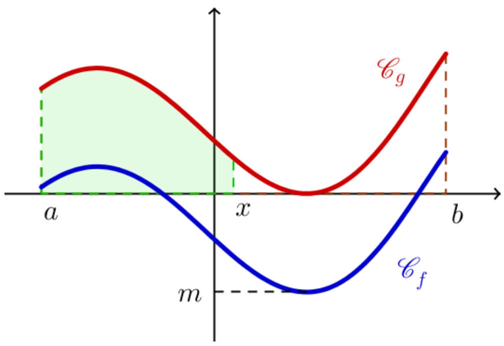
Exemples :

- Les primitives de $f:x\longmapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par : $F:x\longmapsto x\ln x-x+k$, où k est un réel.
  En effet, si $F(x)=x\ln x-x$, alors $F'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$
- Les primitives de $f:x\longmapsto 4x+4$ sur ℝ sont les fonctions $F:x\longmapsto 2x^2+4x+k$, avec k réel.
  Une seule vérifie la condition initiale $F(1)=2$ car $6+k=2 \Leftrightarrow k=-4$.

III. Calculs de primitives

1) Fonctions continues et primitives

Théorème :
Toute fonction continue sur un intervalle *I* admet des primitives sur *I*.



Démonstration : cas où $I=[a;b]$ et où f admet un minimum *m* sur *I*.
La fonction g définie sur I par $g(x)=f(x)-m$ est continue et positive sur $[a;b]$.
Donc, d'après le théorème fondamental, elle admet une primitive G sur $[a;b]$:

$$G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=G(x)+mx$ est une primitive de f sur $[a;b]$ car pour tout nombre réel *x* de $[a;b]$, $F'(x)=G'(x)+m=g(x)+m=f(x)$.
Donc, f admet des primitives sur $[a;b]$.

Remarques :

- Une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet un minimum sur cet intervalle.
- On admet le théorème dans le cas général.
- La fonction $x \longmapsto \exp(-x^2)$ est continue sur ℝ, donc elle admet des primitives sur ℝ, mais on n'en connaît pas de primitive « explicite ».

2) *Primitives des fonctions usuelles*

c désigne un réel quelconque.

La fonction f est définie sur I par :	Primitives de f sur I sont définies par $F(x)=\ldots$	Sur $I=\ldots$
k (constante)	$k\,x+c$	ℝ
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	ℝ
x^n (avec $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	ℝ si $n\geqslant 0$ $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n<-1$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+c$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+c	ℝ
$\sin x$	$-\cos x+c$	ℝ
$\cos x$	$\sin x+c$	ℝ

Exemple :

On cherche une primitive F de la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x)=\frac{1}{4}x+2$$

Une primitive de $x\longmapsto 2$ est $x\longmapsto 2x$.

Une primitive de $x\longmapsto x$ est $x\longmapsto \frac{1}{1+1}x^{1+1}$.

Donc par addition, une primitive F est définie sur ℝ par :

$$F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}x^2+2x=\frac{1}{8}x^2+2x$$

3) Primitives et opérations

u désigne une fonction continue sur un intervalle I.
c désigne un réel quelconque.

Fonction f	Primitive de f sur I	Conditions sur u
$u'u^n$ (avec $n\in\mathbb{Z}\backslash\{-1\}$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	Lorsque $n<-1$, pour tout x de I, $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	$u(x)\neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u+c$	$u(x)>0$ sur I
$u'e^u$	e^u+c	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	$u(x)>0$ sur I
$u'\sin u$	$-\cos u+c$	
$u'\cos u$	$\sin u+c$	

Remarque :

Lorsque u est strictement négative sur I, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(-u)$.

IV. Intégrale d'une fonction continue

1) Calcul d'une intégrale

Propriété :

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F est une primitive de f sur $[a;b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

Démonstration :

On a vu que la fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a;b]$. Donc il existe un nombre réel k tel que $G(x)=F(x)+k$.
Or $G(a)=0$ donc $F(a)+k=0$, c'est-à-dire $k=-F(a)$.
Donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=G(b)=F(b)+k=F(b)-F(a)$.

Définition : (extension au cas d'une fonction f continue de signe quelconque sur $[a;b]$)
L'intégrale de a à b de f est le nombre réel $F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$.
On note encore :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

Remarques :

- Cette définition ne dépend pas de la primitive F choisie puisque ces primitives diffèrent entre elles d'une constante.
- La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)-F(a)$ est la primitive de f sur *I* qui s'annule en *a*.
- En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on détermine d'abord une primitive F de f sur $[a;b]$ et on écrit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

Propriété :

Si f est continue sur $[a;b]$, alors $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a)) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2) *Intégrale et aire*

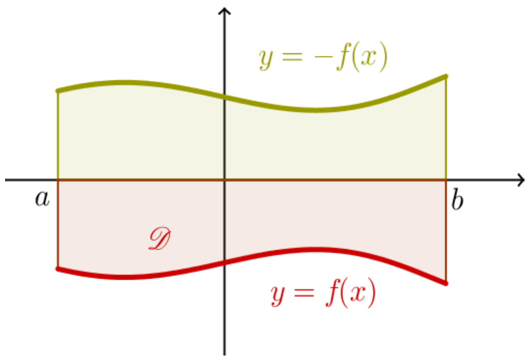
Dans un repère orthogonal, $\mathscr{D}$ est le domaine situé entre la courbe représentative d'une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.
On note aire($\mathscr{D}$) l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en unités d'aire.

Cas d'une fonction *f* continue et négative sur $[a;b]$

aire($\mathscr{D}$)= $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ u.a.

En effet, par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine situé sous la courbe de $-f$ (qui est positive).

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $-F$ est une primitive de $-f$ sur $[a;b]$.



Donc :

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x = [-F(x)]_a^b = -(F(b)-F(a)) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vocabulaire :

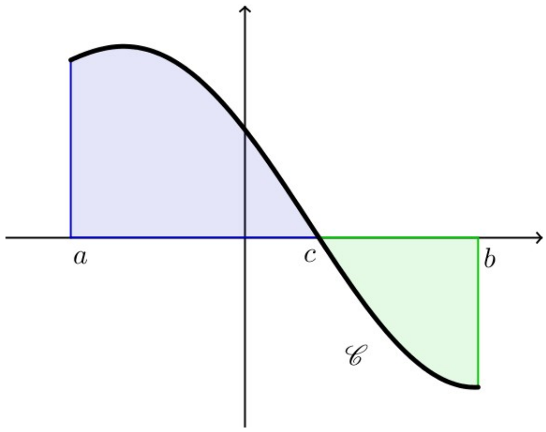
On dit que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'**aire algébrique** du domaine $\mathscr{D}$ (elle est positive si f est positive sur $[a;b]$, négative si f est négative sur $[a;b]$).

Cas d'une fonction *f* continue et de signe quelconque sur $[a;b]$

L'aire de $\mathscr{D}$ est la somme des aires algébriques des domaines définis par des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Pour la courbe ci-contre :

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$



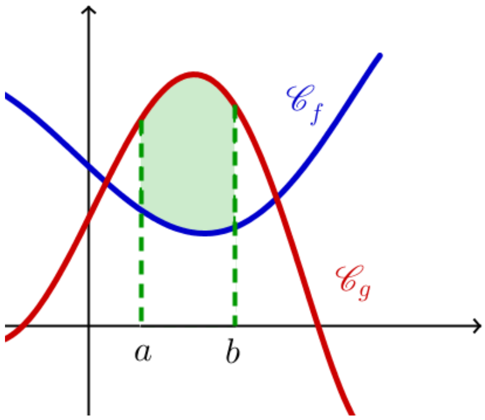
Remarque :

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

Aire entre deux courbes

Propriété :
Si f et g sont continues sur un intervalle I avec $f \leqslant g$ sur I et si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$, l'aire comprise entre les deux courbes représentant f et g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$



V. Propriétés des intégrales

Par la suite f et g sont des fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

1) *Propriétés algébriques*

Propriété (linéarité de l'intégration) :

- $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- Pour tout nombre réel λ, $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration :
Ces propriétés découlent immédiatement des primitives de $f+g$ et λf.

Propriété (relations de Chasles) :
Pour tous nombres réels *c*, *d* et *e* de $[a;b]$,

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x+\int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x$$

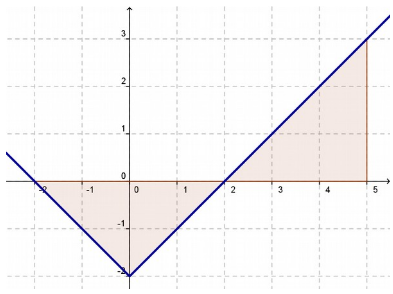
Démonstration :
On note F une primitive de f sur $[a;b]$,

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x+\int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x=F(d)-F(c)+F(e)-F(d)=F(e)-F(c)=\int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple :

On calcule l'intégrale $K=\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=|x|-2$.

Ainsi $f(x)=\begin{cases} x-2 \text{ si } x\geqslant 0 \\ -x-2 \text{ si } x<0 \end{cases}$.



Donc,

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}(-x-2)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{5}(x-2)\,\mathrm{d}x.$$

Or $\int_{-2}^{0}(-x-2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{-x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{0}=0-(-2+4)=-2$ et

$\int_{0}^{5}(-x-2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{0}^{5}=\left(\frac{25}{2}-10\right)-0=\frac{5}{2}$.

Donc $K=-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

2) *Intégrales et inégalités*

On suppose ici que $a<b$

Propriété (positivité) :

- Si, pour tout nombre réel *x* de $[a;b]$, $f(x)\geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.
- Si, pour tout nombre réel *x* de $[a;b]$, $f(x)\leqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$.

Démonstration :
Ces propriétés découlent directement de la définition de l'intégrale.

Remarque :
Les propriétés réciproques sont fausses.
Par exemple $\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}=\frac{2^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, mais sur $[-1;2]$, la fonction $x\longmapsto x$ ne garde pas un signe constant.

Propriété (ordre) :

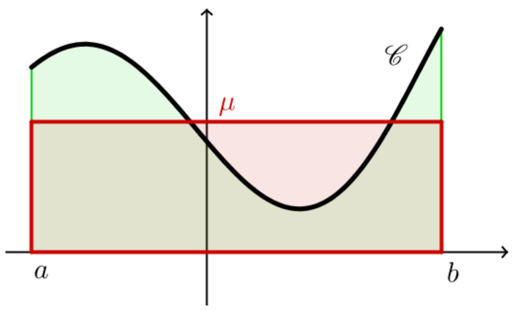
Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $g(x)\leqslant f(x)$, alors $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :
Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $g(x)\leqslant f(x)$ alors $0\leqslant f(x)-g(x)$.
Donc, $\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ et par linéarité, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

3) Valeur moyenne

Définition :
La **valeur moyenne** d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a<b$) est le nombre réel μ défini par $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interprétation graphique :
Dans un repère orthogonal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.
Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu\times(b-a)$.
Donc l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est égale à l'aire du rectangle de dimension μ et $(b-a)$.



Exemple :

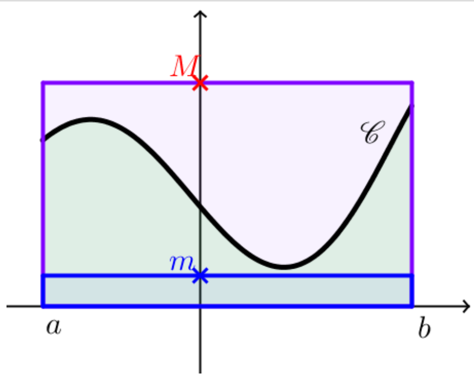
La valeur moyenne de la fonction f donnée par $f(x)=x^2-4x+5$ sur $[1;5]$ vaut $\frac{10}{3}$.

En effet : $\frac{1}{5-1}\int_1^5 (x^2-4x+5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x\right]_1^5 = \frac{1}{4}\times\left(\frac{50}{3}-\frac{10}{3}\right)=\frac{10}{3}$

Propriété (inégalité de la moyenne) :
f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux nombres de I tels que $a<b$.
M et m sont deux nombres tels que, pour tout x de $[a;b]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$. Alors :

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Démonstration :
Par hypothèse, pour tout x de $[a;b]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$.
En appliquant les propriétés sur l'ordre :
$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x$
Les fonctions constantes $x\longmapsto m$ et $x\longmapsto M$ sont telles que :
$\int_a^b m\,\mathrm{d}x=[mx]_a^b=m(b-a)$ et $\int_a^b M\,\mathrm{d}x=[Mx]_a^b=M(b-a)$.
D'où le résultat.



Annexe 1 : Approximation numérique

Lorsque nous ne connaissons pas l'expression explicite d'une primitive, différentes méthodes permettent d'obtenir des approximations numériques.
L'enjeu sera alors de connaître l'erreur commise par ses approximations.

Remarque :
Il arrive parfois que l'on connaisse une primitive mais cela n'est pas suffisant pour calculer les intégrales.

Par exemple, $\int_1^2 \frac{1}{t} \mathrm{d}t = \ln 2$, mais comment calcule-t-on $\ln 2$?

Principe :
On souhaite approcher $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

- On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles ($n \in \mathbb{N}^*$) de même longueur $h=\frac{b-a}{n}$ et on note, pour tout $i \in \{0\,;1\,;2\,;\ldots;n\}$, $x_i = a + ih$.
- On remplace alors f par une fonction sur chaque subdivision de l'intervalle.

Méthode des rectangles

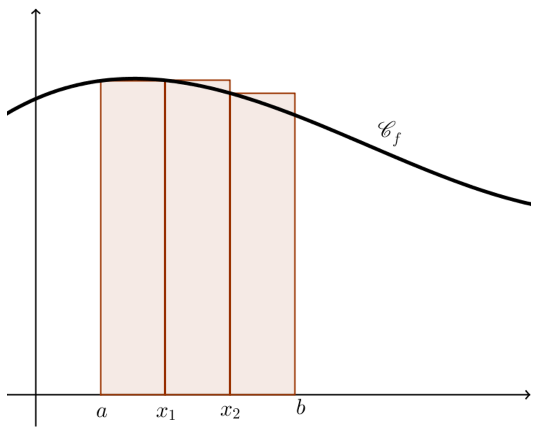
On remplace f par une fonction en escalier.

Méthode des rectangles à gauche :

On remplace f par la fonction en escalier qui prend, sur chaque subdivision, la même valeur à l'extrémité gauche de cette subdivision que f.

La valeur approchée de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est :

$$\mathrm{R}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$



Démonstration :
L'aire du rectangle de base $[x_i ; x_{i+1}]$ est $f(x_i) \times (x_{i+1} - x_i)$, donc :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \times (x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

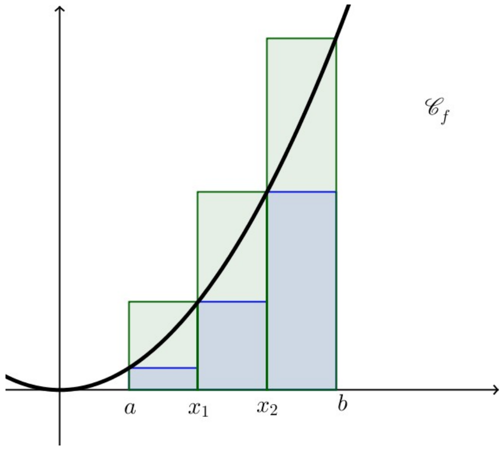
Remarque :
On peut définir, de même, la méthode des rectangles à droites.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Cas particulier : lorsque la fonction est monotone.

Dans le cas où la fonction étudiée est croissante, par exemple, on a alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$



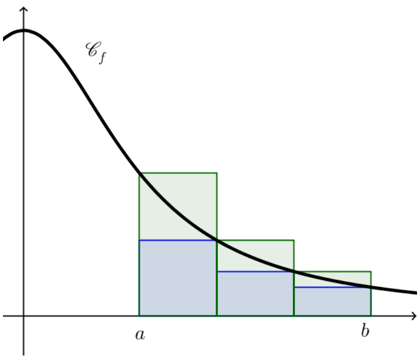
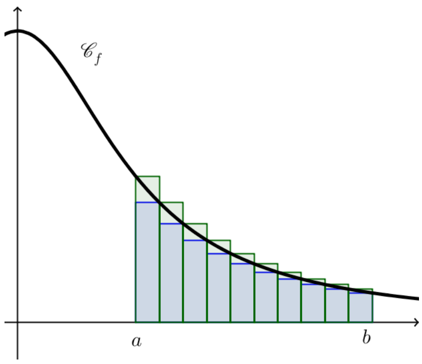
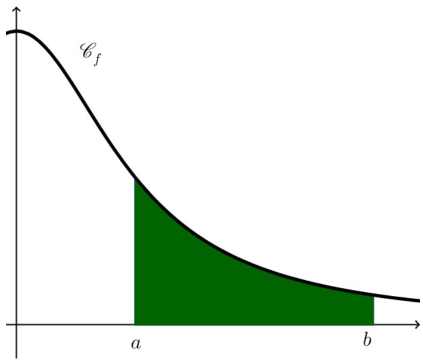
On obtient alors une évaluation de notre approximation.

Exemple :

On souhaite calculer $I=\int_1^3 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

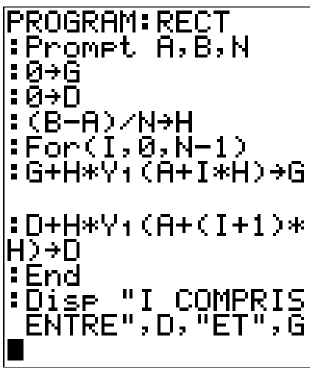
On vérifie facilement que f est décroissante sur $]0;+\infty[$.

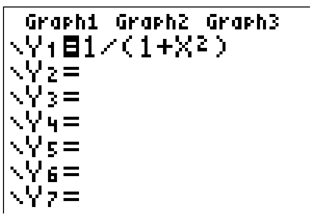
On a ainsi :

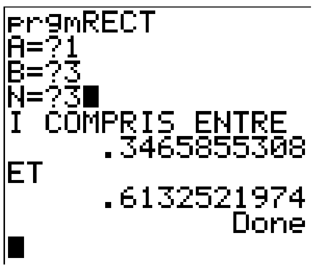
Pour $n=3$	Pour $n=10$	Pour $n=1000$
		
$0{,}34659 \leqslant I \leqslant 0{,}61325$	$0{,}42511 \leqslant I \leqslant 0{,}50511$	$0{,}46325 \leqslant I \leqslant 0{,}46405$

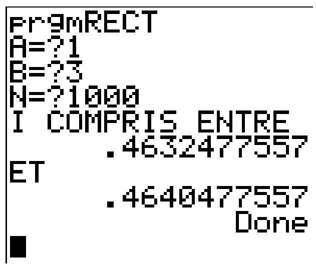
Calculatrice :

On suppose la fonction décroissante.









Cas général :

La méthode des rectangles (à gauche, par exemple) permet d'approcher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sans considérations particulières sur la monotonie de *f*.
On peut démontrer que si *f* est dérivable et f' est continue avec $\mathrm{M}_1 = max\,\{|f'(x)|\,;x \in [a\,;b]\}$, alors,

$$\left|\mathrm{R}n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(b-a)^2 \times \mathrm{M}_1}{2n}$$

On en déduit que (R_n) converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarques :

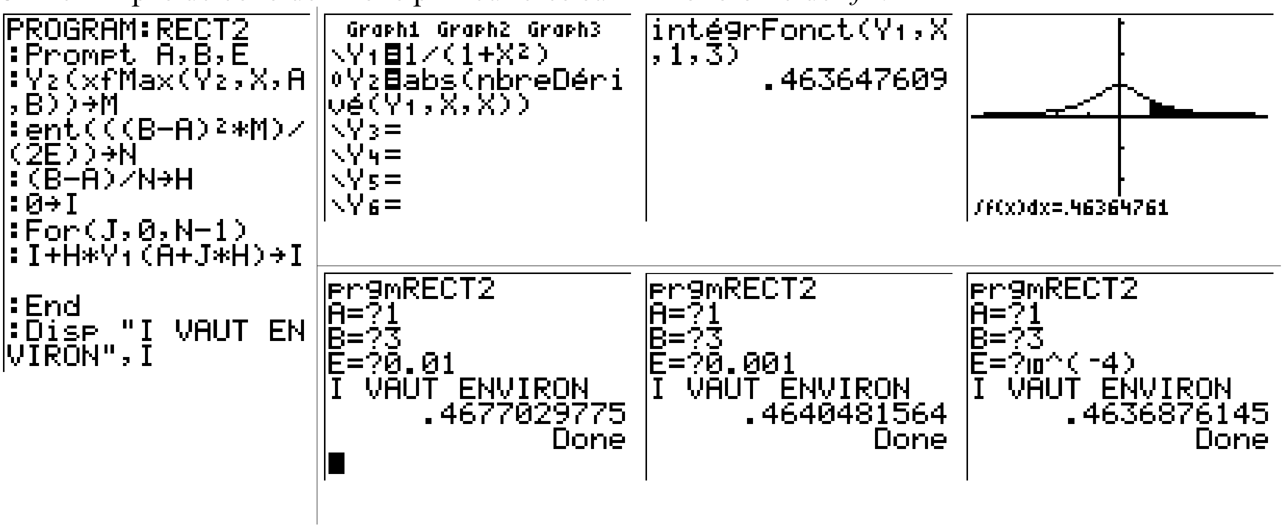
- Pour la démonstration, on utilise l'**inégalité des accroissements finis**.

Propriété :
Soit *f* la fonction définie sur $[a\,;b]$, continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.
Soit *k* un réel tel que, pour tour $x \in [a\,;b]$, $|f'(x)| \leqslant k$, alors

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant k$$

- On peut ainsi déterminer le nombre de pas nécessaires afin d'obtenir la précision souhaitée.

Calculatrice :
On ne fait pas de considérations particulières sur la monotonie de f .

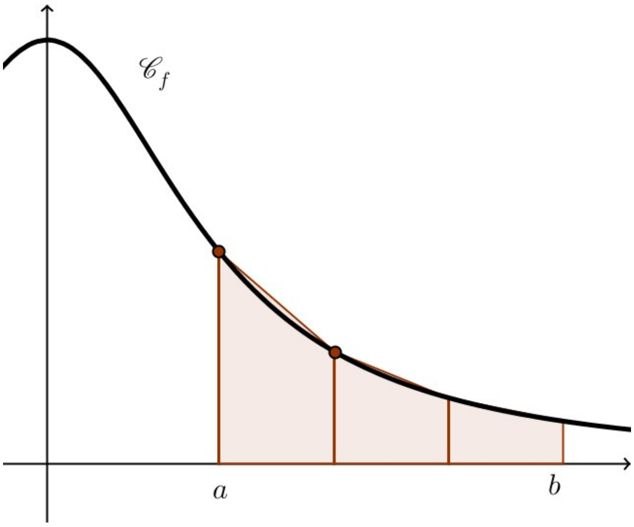


Autres méthodes

Lorsque *f* est de classe C^n sur l'intervalle $I=[a;b]$, on note $M_i = max\{|f^{(i)}(x)|; x \in [a;b]\}$.

Méthode des trapèzes

On remplace la courbe représentative de *f*, sur chaque subdivision, par le segment qui joint $(x_i, f(x_i))$ à $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.



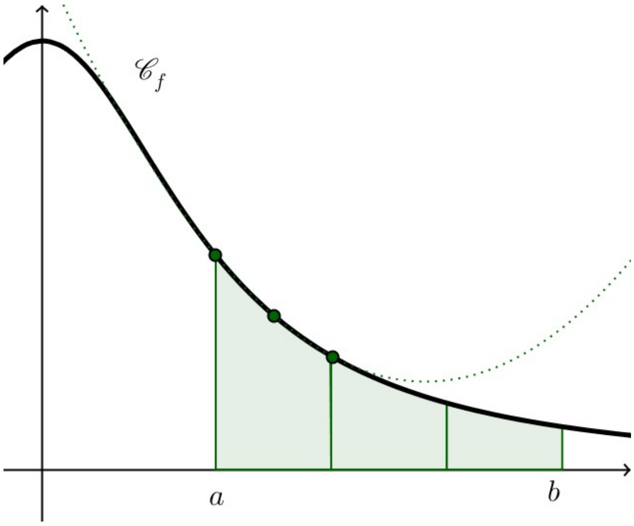
$$T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Évaluation de l'erreur :

$$\left|T\, n - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 \times M_2}{12\, n^2}$$

Méthode de Simpson

On remplace la courbe représentative de *f*, sur chaque subdivision, par la parabole passant par $(x_i, f(x_i))$, $(\xi_i, f(\xi_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ où ξ_i est le milieu du segment $[x_i; x_{i+1}]$.



$$S_n = \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\right)$$

Évaluation de l'erreur :

$$\left|S\, n - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^5 \times M_4}{2880\, n^4}$$

Remarque :

f est de classe C^n sur I si elle est *n* fois dérivables sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

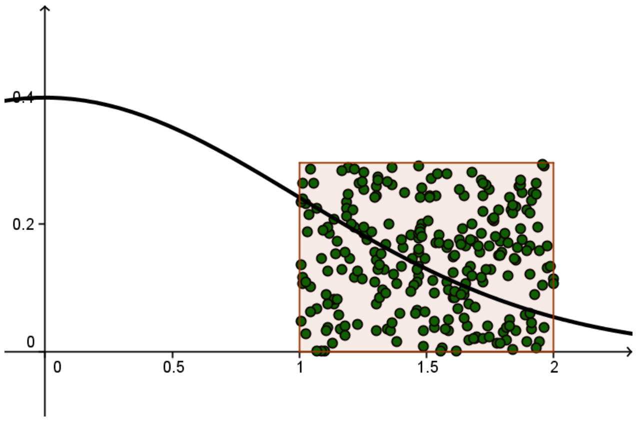
Annexe 2 : Approche probabiliste d'une intégrale

Si le calcul d'aires permet d'améliorer la connaissance de probabilités via les intégrales, la réciproque est également vraie.

Soit une surface *S*, dont l'aire *A* est connue, qui en contient une autre, *L* d'aire inconnue.
La **méthode de Monte-Carlo** consiste à envoyer des points au hasard dans *S*.
On dénombre alors le nombre total n_S de points et le nombre n_L qui se sont trouvés, par hasard, dans *L*.
Il est alors probable que le rapport des aires de *L* et *S* soit proche du rapport de n_L sur n_S. La marge d'erreur sera statistiquement d'autant plus faible que le nombre de points n_S sera grand.

<u>Exemple :</u>

Pour $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$



$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{n_L}{n_S}\times A$$

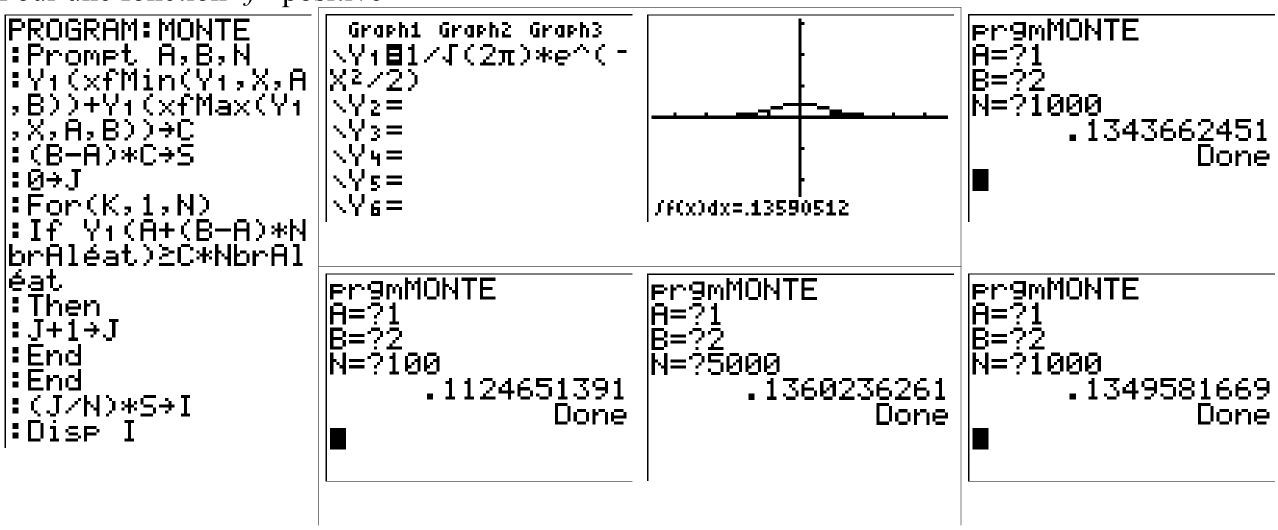
Ici $A=0{,}29596$

- pour $n_S=261$ on obtient $n_L=124$ donc :
  $I\simeq 0{,}1406$
- pour $n_S=1000$ on obtient $n_L=458$ donc :
  $I\simeq 0{,}1356$

Avec la calculatrice, on obtient : $I\simeq 0{,}1359051975$

<u>Calculatrice :</u>

Pour une fonction f positive



Annexe 3 : Calcul de volume

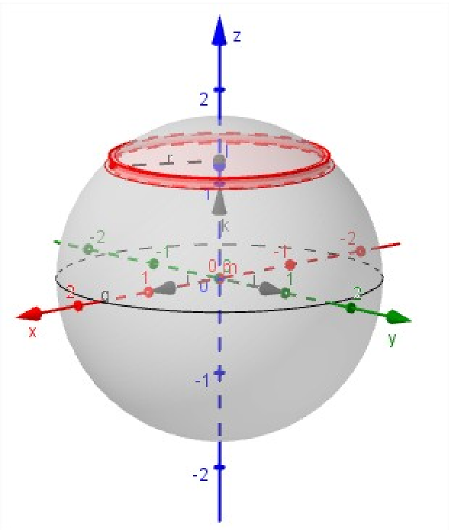
Dans le plan on a approché une aire par la somme des aires de rectangles, puis en faisant tendre leur largeur vers 0, on a calculé cette aire par une intégrale.

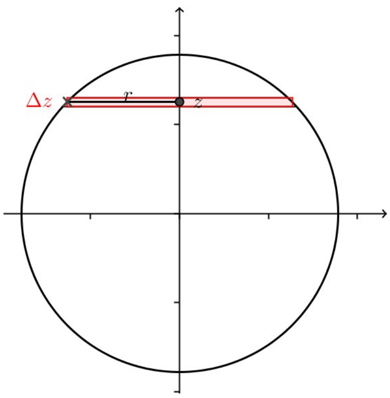
De même, dans l'espace, on approche le volume d'un solide par la somme des volumes de petits cylindres. En faisant tendre leur hauteur vers 0, on aboutit au calcul d'un volume à l'aide d'une intégrale.
$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.
L'unité de volume est le volume du cube construit sur les côtés [OI], [OJ] et [OK] tels que $\vec{OI}=\vec{i}$, $\vec{OJ}=\vec{j}$ et $\vec{OK}=\vec{k}$.

Propriété :
On considère un solide (Σ) limité par les plans parallèles d'équations : $z=a$ et $z=b$ $(a\leqslant b)$.
Pour tout z $(a\leqslant z\leqslant b)$, on note :
- $\mathscr{P}_z$ le plan perpendiculaire à (Oz) et de cote z
- $S(z)$ l'aire de la section du solide par le plan $\mathscr{P}_z$.

Lorsque S est une fonction dérivable sur $[a;b]$, le volume V du solide est calculé (en u.v.) par :

$$V=\int_a^b S(z)\,\mathrm{d}z$$





De $r(z)=R^2-z^2$, on en déduit :

$V_{cylindre}=\pi\times r(z)\times\Delta z$
$V_{cylindre}=\pi(R^2-z^2)\Delta z$

On admet qu'en sommant ces volumes de $z=-R$ à $z=R$ quand leur hauteur tend vers 0, la somme de ces volumes tend vers $\int_{-R}^{R}\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$.

$$\int_{-R}^{R}\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\pi R^2\,\mathrm{d}z-\int_{-R}^{R}\pi z^2\,\mathrm{d}z=\pi R^2[z]_{-R}^{R}-\pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$\int_{-R}^{R}\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z=\pi R^2(R-(-R))-\pi R^2\left(\frac{R^3}{3}-\left(-\frac{R^3}{3}\right)\right)=2\pi R^3-\frac{2}{3}\pi R^2=\frac{4}{3}\pi R^3$$

On retrouve bien ainsi le volume de la boule : $\mathscr{V}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Annexe 4 : Intégration par partie

En mathématiques, l'intégration par parties est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul.

Propriété :
Soit $\mathrm{I}=[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, w une fonction continue définie sur *I* et u une fonction dérivable et sa dérivée u' est continue sur *I*. Soit W une primitive de w sur *I*. Alors :

$$\int_a^b u(x)w(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)\mathrm{W}(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)W(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque :
La démonstration du théorème découle directement de la formule de dérivation d'un produit de fonction :

$$(u\mathrm{W})'=u'\mathrm{W}+uw$$

donc :

$$uw=(u\mathrm{W})'-u'\mathrm{W}$$

puis on intègre.

Intégrale de Wallis

On s'intéresse à la suite réelle (W_n) définie, pour $n\in\mathbb{N}$, par :

$$W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriétés :

- $\mathrm{W}_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $\mathrm{W}_1=1$
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n>0$
- $W_n-W_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)[1-\sin(x)]\,\mathrm{d}x\geqslant 0$

On en déduit que W_n est une suite décroissante, minorée donc convergente.

<u>Calcul des intégrales</u>

Relation de récurrence :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)[1-\cos^2(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

On utilise alors une intégration par parties pour $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{cases} u'(x) = \cos(x)\sin^{n-2}(x) \\ v(x) = \quad \cos(x) \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x) \\ v'(x) = \quad -\sin(x) \end{cases}$$

Ainsi on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{n-1}\mathrm{W}_n .$$

On obtient alors :

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{W}_{n-2} - \frac{1}{n-1}\mathrm{W}_n .$$

Et finalement, pour tout $n \geqslant 2$: $\mathrm{W}_n = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{W}_{n-2}$.

On tire ainsi une expression des termes de la suite, selon la parité de leur rang :

- Si n est pair : $n = 2p$.

$$\mathrm{W}_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \mathrm{W}_0 \text{ soit}$$

$$\mathrm{W}_{2p} = \frac{2p}{2p} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2} \times \mathrm{W}_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

- Si n est impair : $n = 2p+1$.

$$\mathrm{W}_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} \times \mathrm{W}_1 \text{ soit}$$

$$\mathrm{W}_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

On remarque que les termes de rang pair sont irrationnels, tandis que ceux de rang impair sont rationnels.