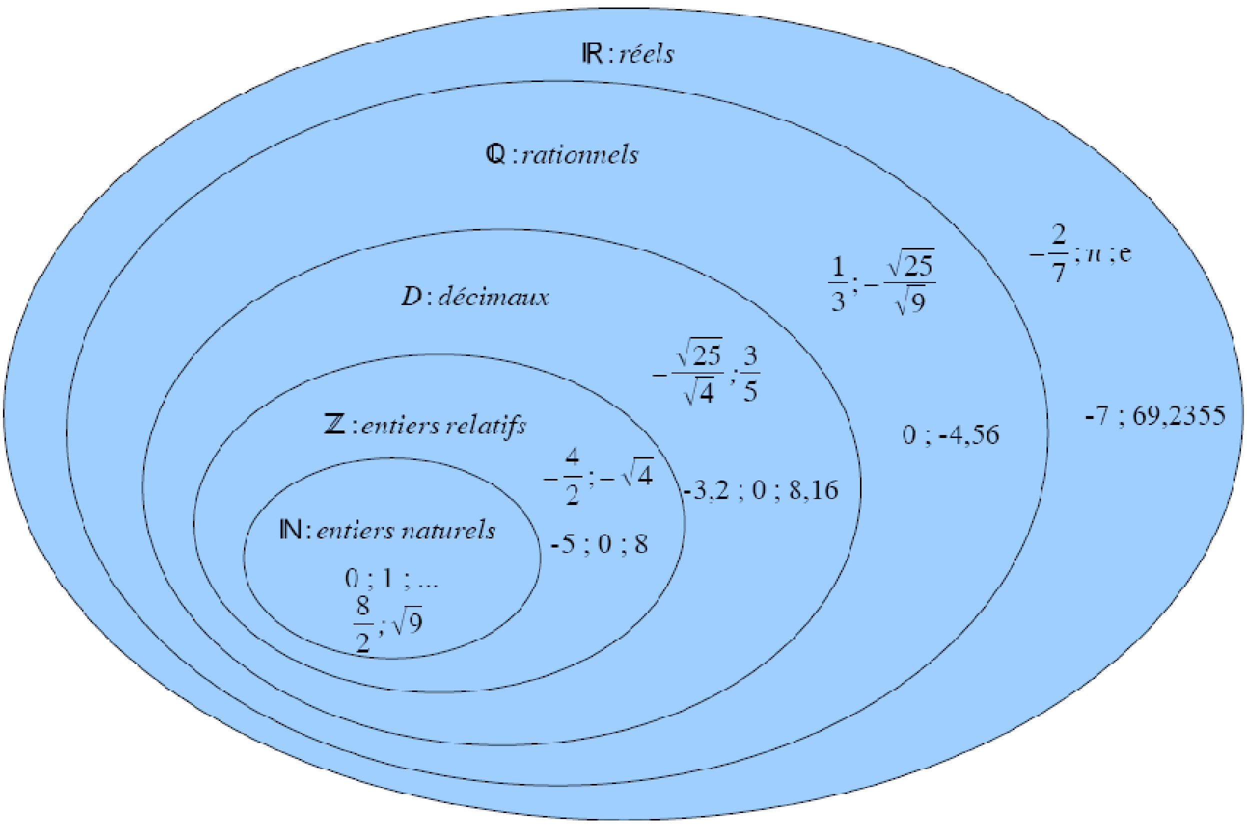
Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

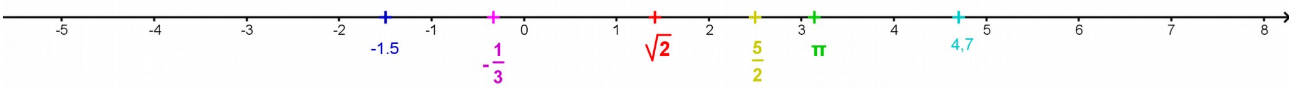
I. L' ensemble ℝ et les intervalles

1) Ensemble ℝ

L'ensemble de tous les nombres, entiers, décimaux, rationnels, irrationnels, est appelé ensemble des **nombres réels**, et il est noté ℝ.



Il est commode de le représenter par une droite graduée (l'ensemble des abscisses des points de la droite correspond à l'ensemble des nombres réels).



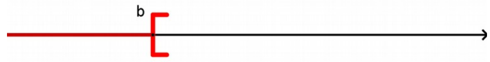
2) *Les intervalles de ℝ*

Certaines **parties** de ℝ sont appelés **intervalles**.

- L'intervalle **fermé [a ; b]** est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.

- L'intervalle **ouvert]c ; d[** est l'ensemble de tous les nombres réels y tels que $c < y < d$.

- On définit de même les intervalles :

Intervalle		Ensemble des nombres x vérifiant	Représentation
[a ; b[	fermé à gauche, ouvert à droite	$a \leqslant x < b$	
]a ; b]	ouvert à gauche, fermé à droite	$a < x \leqslant b$	
[a ; +∞[	fermé à gauche, ouvert à droite	$a \leqslant x$	
]a ; +∞[	ouvert	$a < x$	
]–∞ ; b]	ouvert à gauche, fermé à droite	$x \leqslant b$	
]–∞ ; b[	ouvert	$x < b$	

Exemples :

– 0,5<0,582<0,6 a le même sens que 0,582 ∈]0,5 ; 0,6[.

– Pour dire que 0,5 n'est pas un élément de]0,5 ; 0,6] on écrit 0,5 ∉]0,5 ; 0,6]

Remarque :

L'ensemble des nombres réels se note ℝ ou]–∞ ; +∞[

3) *Intersections et réunions d'intervalles*

- **Intersection**

Définition :
L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I **et** dans J : elle se note I∩J.

Exemple :
Soit A =]-2 ; 3] et B = [1 ; 8] alors A∩B=[1 ; 3].

Remarque :
Il se peut que l'intersection de deux intervalles soit un ensemble ne contenant aucun nombre.
Il est appelé **ensemble vide** et se note Ø.

- **Réunion**

Définition :
La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I **ou** dans J : elle se note I∪J.

Exemple :
Soit A =]-2 ; 3] et B = [1 ; 8] alors A∪B=]-2 ; 8].

II. Notions de fonction

1) *Vocabulaire et notation*

Soit *D* une partie de ℝ.

- Définir une fonction *f* sur *D*, c'est associer, à tout nombre réel *x* appartenant à *D,* un nombre réel **unique** noté *f(x)*.
- Le nombre réel *f(x)* est appelé **l'image** de *x* par la fonction *f*.
- Si *f(a) = b*, on dit que *a* est **un antécédent** de *b* par *f*.
- *D* est appelé l'**ensemble** (ou domaine) **de définition** de la fonction *f*.

La fonction *f* qui, à chaque réel *x* de *D* associe l'unique réel *f(x)* se note :

$$f : \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

2) *Quelques procédés pour décrire une fonction*

- **Fonction décrite par une formule littérale**

Lorsque deux réels *x* et *y* sont liés par une formule littérale, on peut rechercher à exprimer ***y* en fonction de *x***, c'est à dire rechercher une expression d'une fonction qui, à chaque valeur de *x* associe une **unique** valeur de *y*.

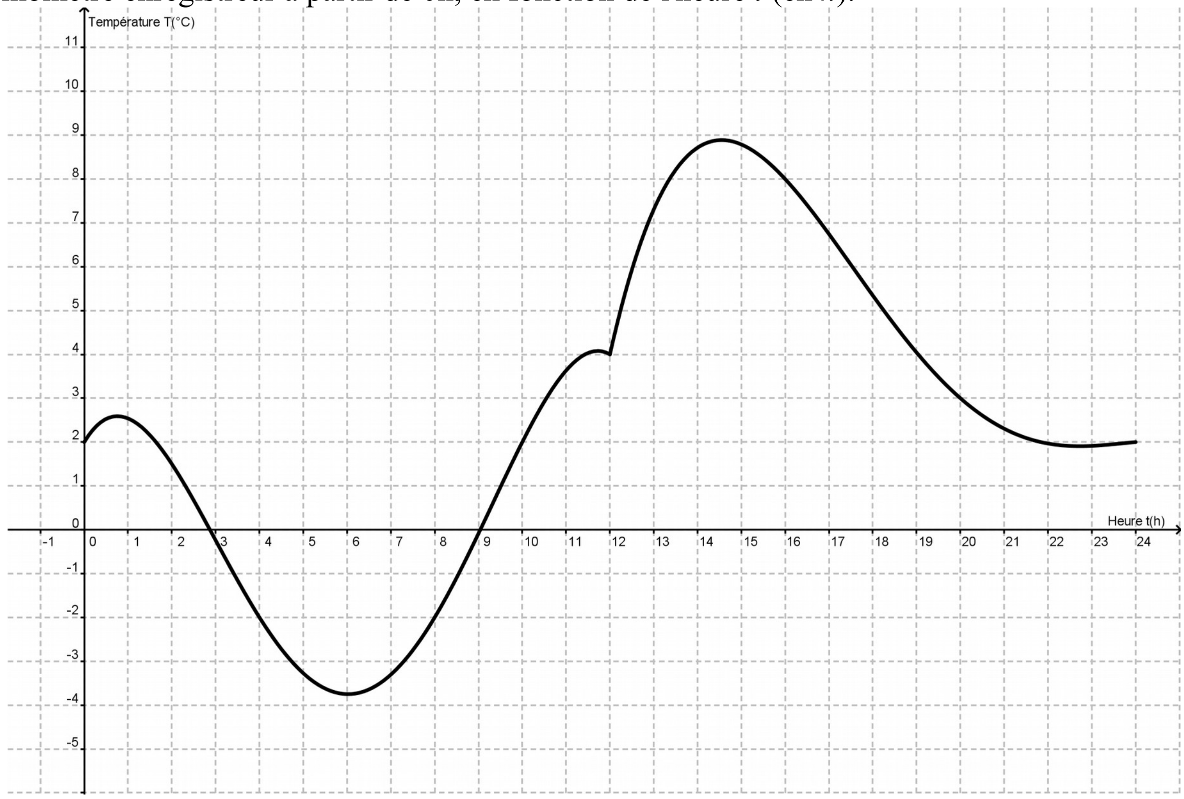
Exemple :
L'aire A du disque et le rayon R du disque sont liés par la formule $A=\pi R^2$
La fonction *A* associe, à un nombre réel positif *R*, le nombre $A(R)=\pi R^2$.

- L'ensemble de définition de *A* est [0 ; +∞[(aussi noté $\mathbb{R}^+$).
- L'image de 3 par *A* est 9π ou encore $A(3)=\pi\times3^2=9\pi$.
- 3 est un antécédent de 9π par *A*.

- **<u>Fonction décrite par une courbe</u>**

Lorsque deux réels x et y sont liés par l'appartenance du point (x ; y) à une courbe donnée, on peut dire que ***y* s'exprime en fonction de *x*** si, à chaque valeur de x prise sur l'axe des abscisses, on associe **une unique valeur de *y*** sur l'axe des ordonnées.
La courbe est alors la représentation graphique de la fonction $g : x \longmapsto y$ dont l'ensemble de définition est l'ensemble des abscisses de la courbe.

<u>Exemple :</u>
La courbe ci-dessous donne la température extérieure T (en °C), relevée sous abri par un thermomètre enregistreur à partir de 0h, en fonction de l'heure t (en h).



A toute valeur de la variable t, on peut associer la température T correspondante : on peut donc définir la fonction $g : t \longmapsto$ T par la courbe ci-dessus.
On a T=$g(t)$.

$g : 12 \longmapsto 4$ ou encore $g(12) = 4$

L'ensemble de définition de g est $D = [0 ; 24]$

- **<u>Fonction décrite par un tableau de valeurs</u>**

Lorsque l'on dispose d'une fonction h de domaine de définition D, et d'un tableau formé de quelques nombres x, appartenant à D, à chacun desquels on associe une unique valeur $h(x)$, alors ce tableau est un tableau de valeurs de la fonction $x \longmapsto h(x)$.
Si on note $y = h(x)$, alors on dit que ***y* s'exprime en fonction de la variable *x***.

<u>Exemple :</u>

Nombre x	-4	-1	0	2	3
Image $h(x)$	5	4	1	2	4

Le nombre 0 a une seule image 1
$h(-1) = 4$ et $h(3) = 4$ donc les antécédents de 4 par h sont -1 et 3.
L'ensemble de définition de h est $D = \{-4 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3\}$.

III. Courbes et résolutions graphiques

1) Courbe représentative d'une fonction

Définition :
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Dans un repère du plan, la **courbe représentative** (ou représentation graphique) de f est l'ensemble des points M (x ; y) dont :

- l'abscisse x décrit l'ensemble de définition D.
- l'ordonnée y est l'image de x par f : $y=f(x)$.

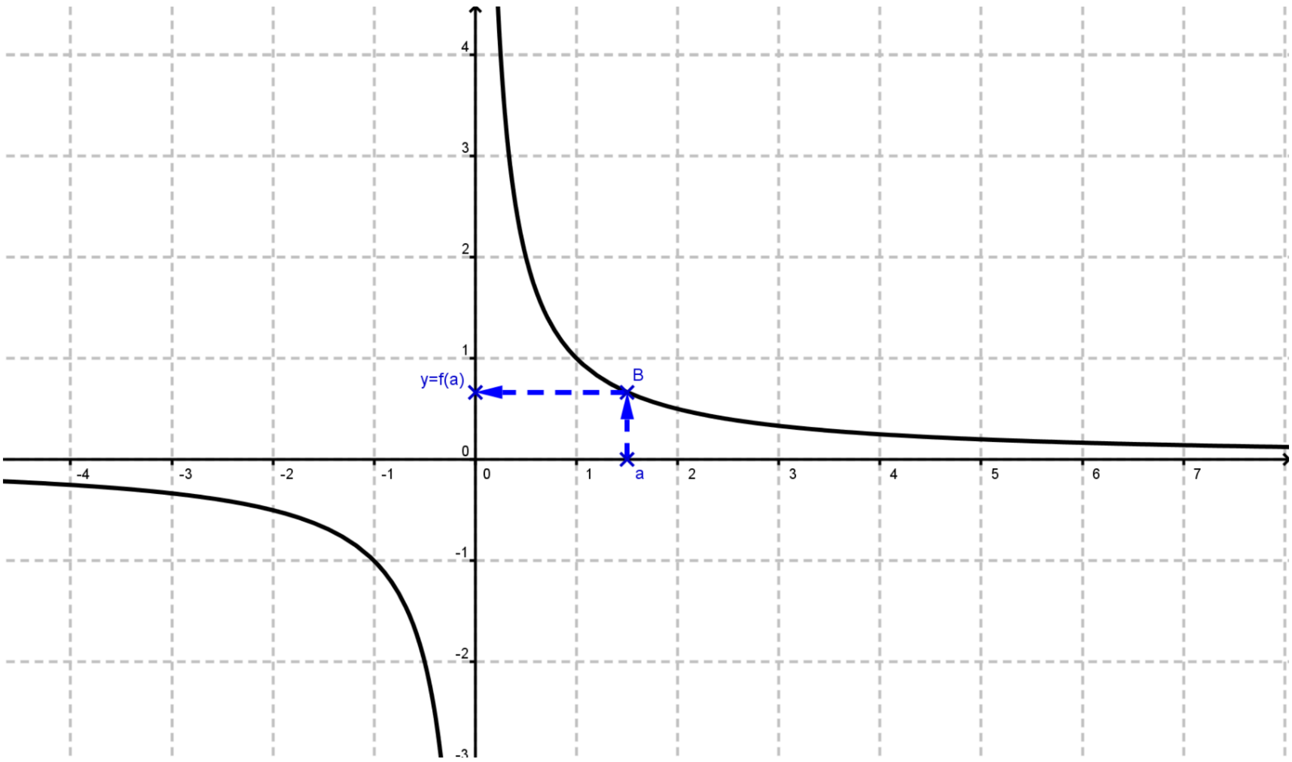
Remarques :

- La courbe C ou C_f a pour équation $y = f(x)$.
- M (x ; y) $\in C_f$ si et seulement si $x \in D$ et $y = f(x)$.

Exemples :

- Courbe représentative de la fonction *inverse* $\quad f :]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$

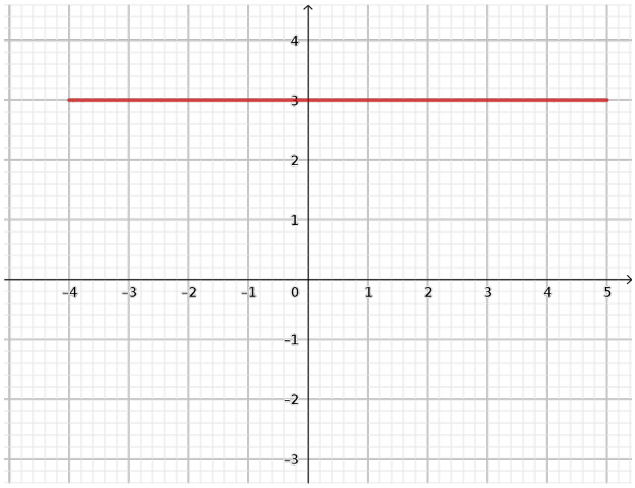
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$



Les flèches indiquent comment placer le point B, de la courbe, qui a pour abscisse a. B (a,$f(a)$).

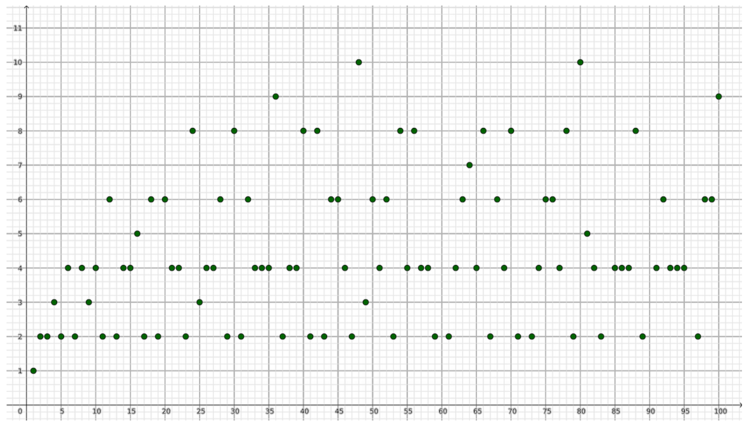
- Courbe représentative de la fonction

$$g :]-4\,;5[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 3$$



- Exemple d'une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}^*$

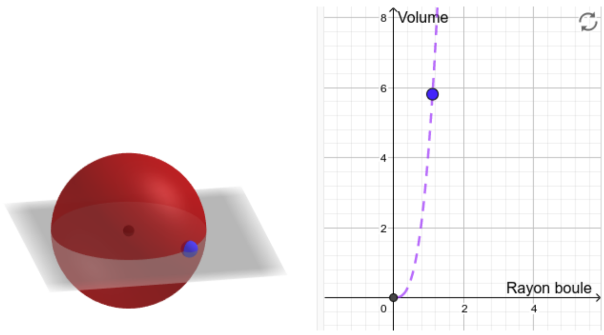
$$\phi : \quad \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$
$$n \longmapsto \text{nombre de diviseurs de } n$$



- Exemples issus de la géométrie :

Aire du carré en fonction de longueur du côté :
$A = f(c)$

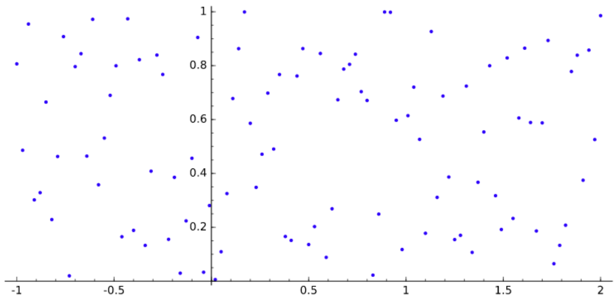
Volume de la boule en fonction du rayon :
$V = f(r)$



- D'autres exemples :

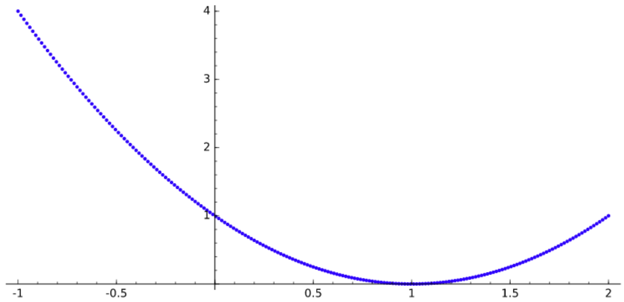
Tracé d'une fonction aléatoire

```
# entrees
a = -1
b = 2
n = 100
# traitement
pas = (b-a)/n
liste_points = []
for i in range(n+1):
    liste_points.append((a,random()))
    a += pas
# sortie
point(liste_points)
```

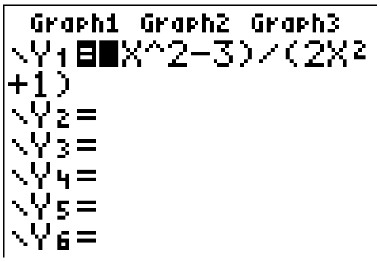


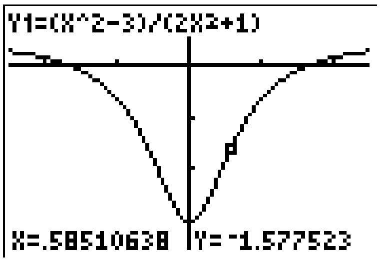
Tracé de $h(x)=2x^2+3x-2$

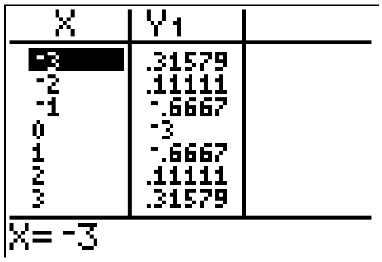
```
# entrees
expression = "x^2-2x+1"
a = -1
b = 2
n = 200
# traitement
f(x) = expression
pas = (b-a)/n
liste_points = []
for i in range(n+1):
    liste_points.append((a,f(a)))
    a += pas
# sortie
point(liste_points)
```

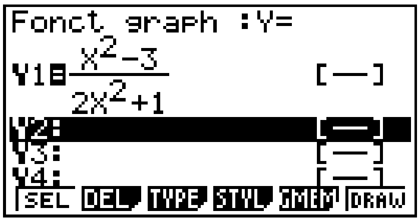


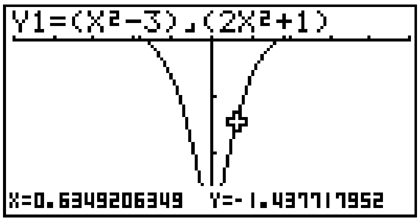
- On peut également utiliser la calculatrice :

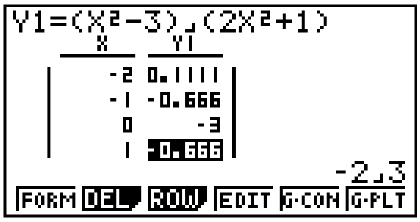






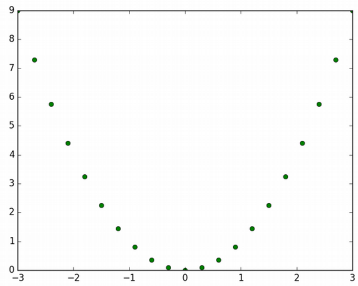






- Python :

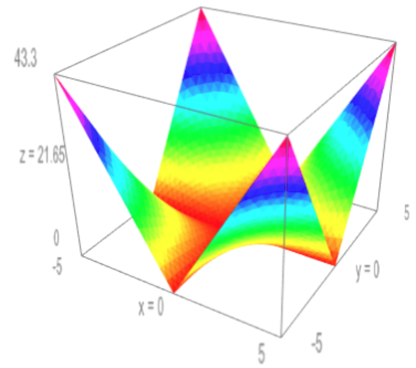
```
# on importe la bibliothèque nécessaire
import matplotlib.pyplot as plt

# Entrées
a = -3
b = 3
nbPoints = 20
# Traitement
pas = (b-a)/nbPoints
abscisses = []
ordonnees = []
for i in range(nbPoints+1):
    abscisses.append(a)
    ordonnees.append(a**2)
    a = a + pas
# Sortie
plt.plot(abscisses, ordonnees, 'go')
plt.show()
```



Remarque :
Dans l'espace, on parle de surface représentative de fonction.
A un point du plan, définie par des coordonnées (x ; y) on associe un unique point $z=f(x\ ;\ y)$

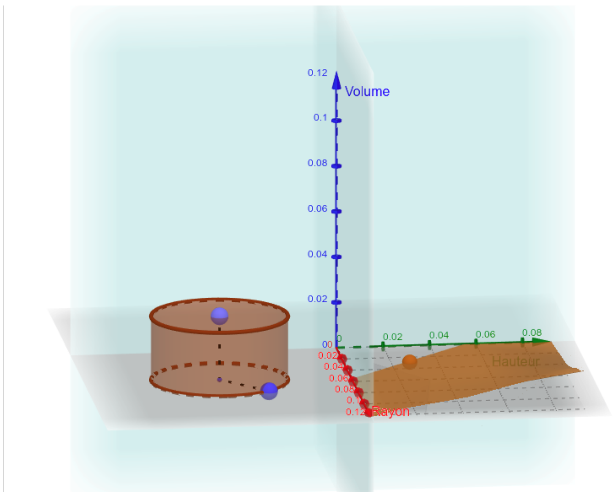
Ex : Voici la surface représentative de la fonction :

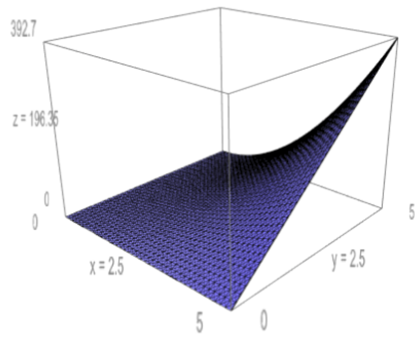
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x\ ;\ y) \longmapsto \sqrt{(x^2 \times 3 \times y^2)}$$



- Représentation graphique d'une fonction de deux variables :

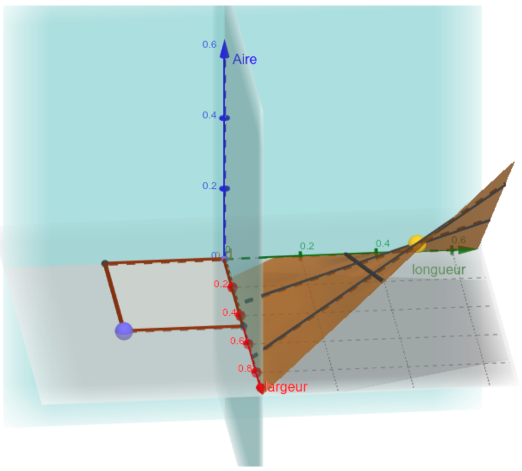
Volume du cylindre en fonction du rayon et de la hauteur.

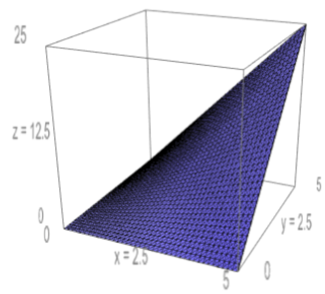




$$V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$(r,h) \longmapsto \pi \times r^2 \times h$$

Aire du rectangle





$$A : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$(l,L) \longmapsto l \times L$$

2) *Résolution graphique d'équations*

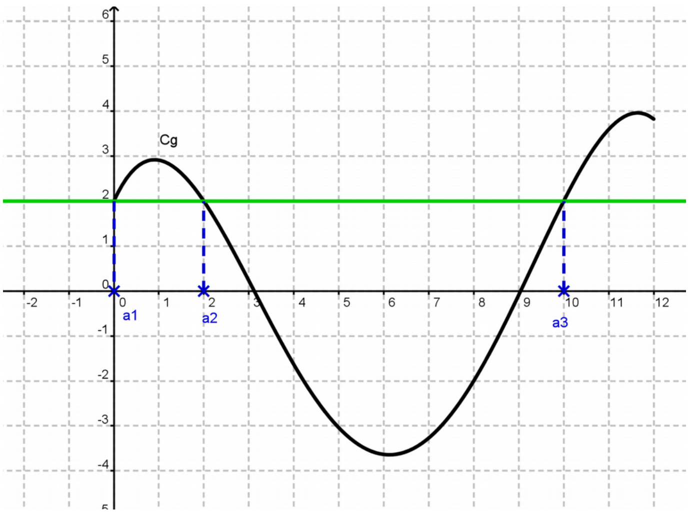
- **Equation de la forme *f(x)=k***

Soient k un nombre réel et f une fonction de domaine de définition D.
On appelle **solution** de l'équation $f(x)=k$ tout réel a de D vérifiant $f(a)=k$.
Résoudre l'équation $f(x)=k$ consiste à déterminer l'ensemble S de ses solutions.

Propriété :
Les solutions de l'équation $f(x)=k$ sont **les abscisses** des points d'intersection de la courbe C_f et de la droite d'équation $y = k$.

Exemples :

- Soit la fonction g définie sur [0 ; 12] et représentée par la courbe C_g ci-contre :

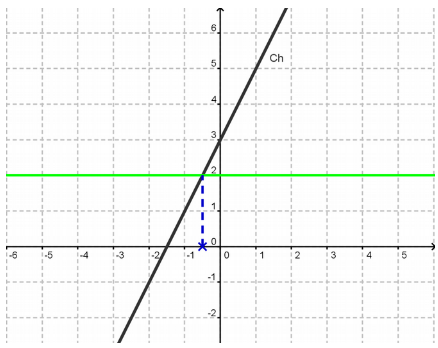


L'équation $g(x)=2$ a trois solutions
$S = \{0 ; 2 ; 10\}$

Remarques :
- L'équation $g(x)=-2$ a deux solutions
- L'équation $g(x)= 4$ a une solution
- L'équation $g(x)=-5$ n'a pas de solution

- Soit la fonction affine h définie sur ℝ par $h(x)=2x+3$

L'équation $h(x)=4$ admet une seule solution $a = 0,5$.



Remarque :
on peut également dans ce cas résoudre l'équation
$h(x) = 4$ soit $2x+3=4$

Donc $S=\{0,5\}$

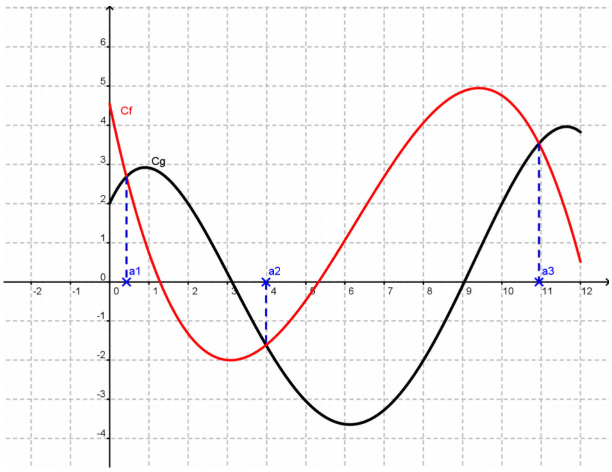
- **Généralisation : équation de la forme *f(x)=g(x)***

Soit f et g définies sur le même domaine D.
On appelle **solution** de l'équation $f(x)=g(x)$ tout réel a de D vérifiant $f(a)=g(a)$.
Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$ consiste à déterminer l'ensemble S de ses solutions.

Propriété :
Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont **les abscisses** des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

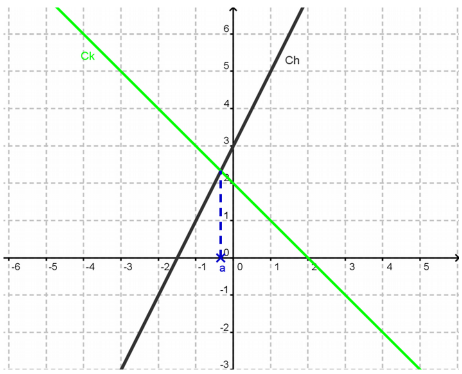
Exemples :

- Soit les fonctions g et f définie sur [0 ; 12] et représentées par les courbes C_g et C_f ci-contre :



L'équation $g(x)=f(x)$ a trois solutions
$S = \{0{,}4 ; 4 ; 11\}$

- Soit les fonctions affines h et k définies sur ℝ par $h(x)=2x+3$ et $k(x)=-x+2$



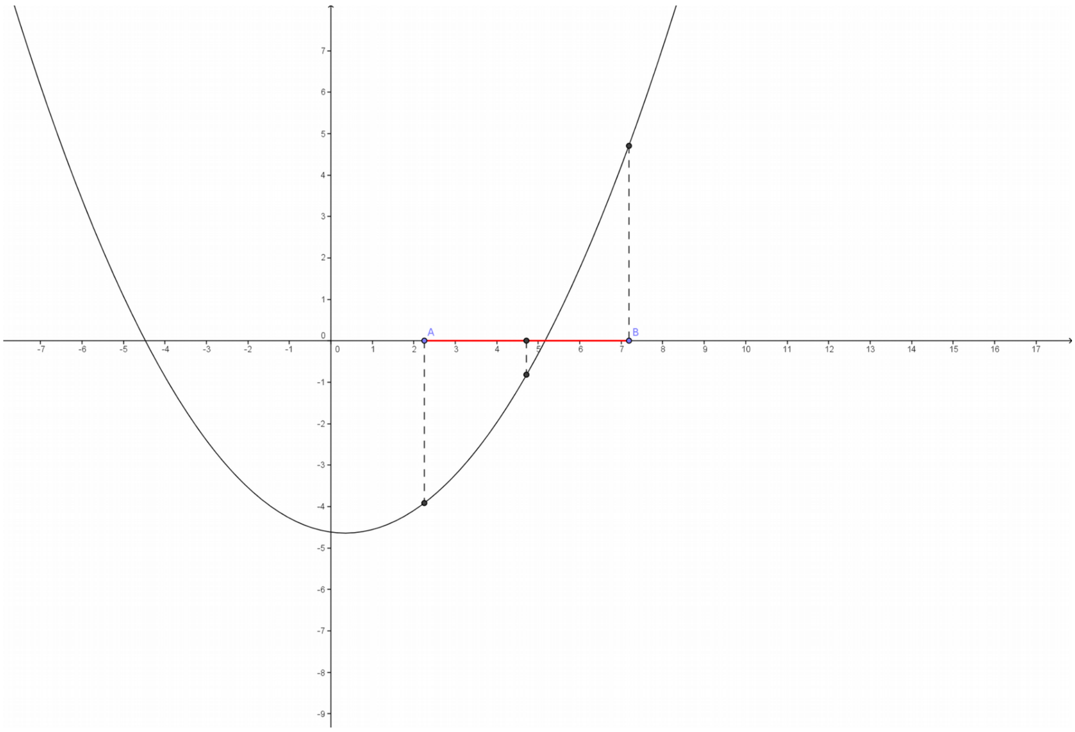
L'équation $h(x)=k(x)$ admet une seule solution $a = -0{,}3$.

Remarque :
on peut également dans ce cas résoudre l'équation
$h(x) = k(x)$ soit $2x+3=-x+2$

Remarque :
Dans de nombreux cas, la lecture graphique étant trop imprécise et ne disposant pas de méthode algébrique pour résoudre les équations, il faut utiliser des algorithmes permettant de trouver des valeurs approchées des solutions.

Méthode de dichotomie :

On choisit un intervalle sur lequel on sait qu'il existe une solution, puis on choisit un point de l'intervalle (en général le milieu) et on vérifie lequel des 2 intervalles créés contient la solution.



Utilisation de Python pour résoudre une équation du type $f(x)=0$

```
# Entrées
a = 1
b = 2
epsilon = 0.01
def f(x):              # On définit la fonction
    return x**2 - 2
# Traitement
while (b - a) > epsilon:
    m = (a + b) / 2
    if f(a) * f(m) > 0:
        a = m
    else:
        b = m
# Sortie
print("La solution appartient à l'intervalle ["+
      str(a)+";"+str(b)+"] avec une précision de", epsilon)
```

```
La solution appartient à l'intervalle [1.4140625;1.421875] avec une
précision de 0.01
>>>
```