Chapitre 2
Lois de probabilités discrètes

I. Probabilités conditionnelles

1) Définition et propriétés

Définition :

Soit p une probabilité sur un univers Ω et A un événement tel que $p(A) \neq 0$.

Pour tout événement B, on appelle **probabilité de *B* sachant *A*** le réel :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Propriété :

$p_A(B)$ est une **probabilité** et vérifie donc :

- $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$
- $p_A(B) + p_A(\overline{B}) = 1$.

Exemples :

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si A est l'événement « le résultat est pair », on a :

$$p_A(\{2\}) = \frac{p(A \cap \{2\})}{p(A)} = \frac{p(\{2\})}{p(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p_A(\{5\}) = \frac{p(A \cap \{5\})}{p(A)} = \frac{p(\varnothing)}{p(A)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

- Si B désigne l'événement « le résultat est un multiple de 3 », on a :

  B={3 ; 6} et $p_A(B) = \frac{p(\{6\})}{p(A)} = \frac{1}{3}$.

Propriétés :

Soient A un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque dans l'univers Ω, on a :

- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
- $p_A(A) = 1$
- Si A et B sont incompatibles, $p_A(B) = 0$
- $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$

Remarque :

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)=p(B)\times p_B(A)$$

Exemple :

On tire un objet au hasard dans le stock d'une usine constitué de claviers et de souris en deux versions, *familiale* et *gamer*.

30 % du stock est constitué de souris et, de plus, 40 % des souris sont des souris *gamer*.

Par ailleurs, 63 % du stock est constitué de claviers *familiaux*.

On considère les événements :

- C : « L'objet est un clavier »
- S : « L'objet est une souris »
- F : « L'objet est en version *famille* »
- G : « L'objet est en version *gamer* »

D'après l'énoncé, $p(S) = 0,3$ et $p_S(G) = 0,4$ donc $p(S \cap G) = p(S) \times p_S(G) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.

C'est-à-dire que l'objet soit une souris gamer est 0,12.

D'après l'énoncé, $p(C) = p(\overline{S}) = 1 - 0,3 = 0,7$ et $p(C \cap F) = 0,63$.

La probabilité de tirer un objet familial au hasard sachant que c'est un clavier est donc $p_C(F)=\dfrac{p(C\cap F)}{p(C)}=\dfrac{0,63}{0,7}=0,9$.

2) Événements indépendants

Définition :

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.

Remarques :

- L'indépendance de deux événements traduit l'idée suivante :

  « la réalisation (ou non) de l'un n'influence pas la réalisation (ou non) de l'autre »
- Ne pas confondre « A et B indépendants » et « A et B incompatibles ».

Exemple :

Pour le lancer d'un dé équilibré à six faces, les événements A « le résultat est pair » et B « le résultat est 2 » ne sont pas indépendants.

En effet, $p(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$ et $p(A)\times p(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}$

Si C est l'événement « le résultat est supérieur ou égal à 5 », alors les événements A et C sont indépendants.

Propriété :

Si $p(A) \neq 0$, on a :

A et B indépendants si, et seulement si, $p_A(B) = p(B)$

II. Formule des probabilités totales

1) Partition de l'univers

Définition :

Les événements B_1, … , B_n, pour $n \geqslant 2$, forment une **partition** de l'univers Ω lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées.

- Chacun de ces événements est **non vide** :

  pour tout entier i avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $B_i \neq \varnothing$.

- Ces événements sont deux à deux **disjoints** (ou incompatibles) :

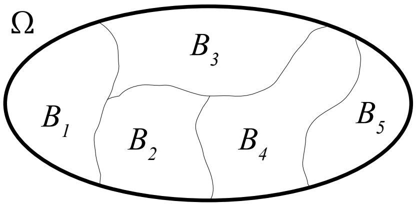
  pour tous entiers i et j, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$: $B_i \cap B_j \neq \varnothing$

- Leur réunion est égale à Ω :

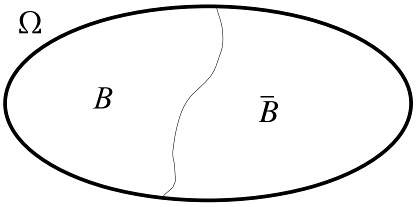
  $$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

Illustrations :

$N = 5$



Cas particulier, $N = 2$



2) Formule des probabilités totales

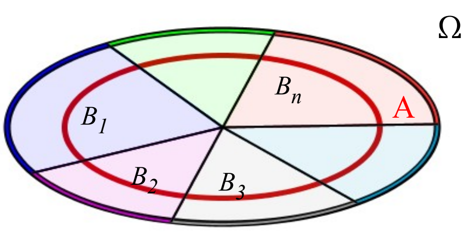
Propriété :

Si B_1, …, B_n sont des événements de probabilités non nulles et forment une partition de Ω, alors :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + \ldots + p(A \cap B_n)$$

ou

$$p(A) = p(B_1) \times p_{B_1}(A) + \ldots + p(B_n) \times p_{B_n}(A)$$



Propriété :

Si B est un événement de probabilité non nulle, alors pour tout événement A de l'univers Ω :

$$p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\bar{B})$$

ou

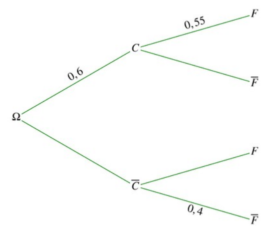
$$p(A)=p_B(A)\times p(B)+p_{\bar{B}}(A)\times p(\bar{B})$$

Exemple :

Dans un lycée, 60 % des élèves sont inscrits dans un club de sport. Parmi eux, on compte 55 % de filles. Parmi ceux qui ne sont pas inscrits dans un club de sport, 40 % sont des garçons.

On choisit un élève au hasard.

- C est l'événement : « être inscrit dans un club de sport »
- F est l'événement : « être une fille »



Les événements C et $\bar{C}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille est :

$p(F) = p(C \cap F) + p(\bar{C}\cap F) = p(C) \times p_C(F) + p(\bar{C})\times p_{\bar{C}}(F) = 0{,}6 \times 0{,}55 + 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}57$

III. Variables aléatoires

1) Variable aléatoire

Rappels

Définitions :

- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- Un **événement** de cette expérience est un sous-ensemble de son univers.
- Un **événement élémentaire** de cette expérience est un événement contenant une seule issue.

Exemple :

On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.

L'univers de l'expérience est l'ensemble Ω={1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

L'événement A « obtenir un résultat pair » est l'ensemble A={2 ; 4 ; 6}.

L'événement élémentaire B « obtenir un 6 » est l'ensemble B={6}.

Variable aléatoire

Définition :

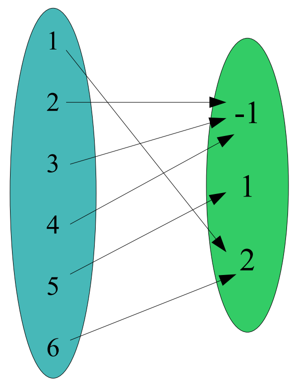
Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω.

Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans ℝ. On la note *X*.

Exemple :

À partir de l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, considérons le jeu suivant :

- « Si le résultat obtenu est 1 ou 6, je gagne 2 jetons. »
- « Si le résultat obtenu est 5, je gagne 1 jeton. »
- « Sinon, je perds 1 jeton. »



On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu.

X est donc la fonction définie sur Ω={1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} par :

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

avec $X(1)=2$, $X(2)=-1$, $X(3)=-1$, $X(4)=-1$, $X(5)=1$, $X(6)=2$.

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition :

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

Notons E={ x_1 , x_2 ,..., x_n } l'ensemble des valeurs prises par *X*.

La **loi de probabilité** de X est la fonction qui à chaque x_i de E lui associe sa probabilité notée $p(X=x_i)$.

On peut la représenter sous forme d'un tableau de valeurs :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	$p(X=x_2)$		$p(X=x_n)$

Remarque :

- On note « $X=x_i$ » l'événement « X prend la valeur x_i ».

  Il s'agit de l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i.
- On s'intéresse dans ce chapitre à des variables aléatoires **discrètes**, car elle prend un nombre fini de valeurs.

  En mathématique, discret désigne un ensemble dont on pourrait énumérer les éléments.

Exemple :

Dans le jeu de l'exemple, chaque issue du lancer de dé est équiprobable, de probabilité $\frac{1}{6}$.

Le gain est de deux jetons si le résultat obtenu est 1 ou 6.

La probabilité correspondante est $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$, d'où $p(X=2)=\frac{1}{3}$. On a de même $p(X=1)=\frac{1}{6}$ et $p(X=-1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

La loi de probabilité est résumée dans le tableau suivant :

x_i	-1	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Remarque :

La somme des probabilités $p_i=p(X=x_i)$, pour *i* allant de 1 jusqu'à *n*, est égale à 1.

On écrit $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$ ou encore $\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i)=1$.

IV. Paramètres d'une loi de probabilité

Définitions :

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

Notons E ={ x_1 , x_2 , …, x_n } l'ensemble des valeurs prises par X.

La loi de probabilité de *X* associe à chaque x_i de E sa probabilité $p_i=p(X=x_i)$.

- L'**espérance mathématique** de la loi de probabilité de X est la moyenne de la série des x_i pondérés par p_i. On la note $E(X)$:

$$E(X)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n \text{ ou } E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

- La **variance** de la loi de probabilité de X est la variance de la série des x_i pondérés par p_i. On la note $V(X)$:

$$V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+\ldots+p_n(x_n-E(X))^2$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2$$

- L'**écart-type** de la loi de probabilité de *X* est l'écart-type de la série des x_i pondérés par p_i. On la note σ(X) :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Remarques :

- Le calcul de l'espérance est un calcul de moyenne :

$$E(X)=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$

  car la somme des probabilités $p_1+p_2+\ldots+p_n$ vaut 1.

  Donc l'espérance est bien la moyenne de la série des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.

- $E(X)$ et $\sigma(X)$ ont la même unité que celle des valeurs des x_i

Exemple :

Reprenons le jeu de l'exemple précédent.

On a :

$$E(X)=\frac{1}{2}\times(-1)+\frac{1}{6}\times1+\frac{1}{3}\times2=-\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$V(X)=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{16}{9}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{25}{9}=\frac{17}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{17}{9}}=\frac{\sqrt{17}}{3}\simeq1{,}37$$

Remarque :

La **loi des grands nombres** nous permet d'interpréter l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

En répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique.

- La moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance de la loi de probabilité de X. L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.
- De même pour l'écart-type, qui est un paramètre de dispersion pour une série statistique, il peut être interprété comme un paramètre de dispersion « espérée » ou « crainte » pour la loi de probabilité de X.

Pour le jeu proposé en exemple, l'espérance de $\frac{1}{3}$ signifie que l'on peut espérer gagner en moyenne $\frac{1}{3}$ de jeton par partie (ou 1 jeton toutes les 3 parties). Mais avec une moyenne proche de 0,33, l'écart-type d'environ 1,37 exprime le fait que le risque d'obtenir un gain négatif (une perte) est important.

Remarque :

Lorsque les valeurs prises par X représentent les gains (ou les pertes) à un jeu, alors $E(X)$ représente le gain moyen par partie.

- Si $E(X)>0$ alors le jeu est **favorable** au joueur.
- Si $E(X)<0$ alors le jeu est **défavorable** au joueur.
- Si $E(X)=0$ alors le jeu est **équitable**.

V. Loi uniforme discrète

1) Définition

Définition :

Soit n un entier naturel, non nul.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; ... ; n\}$, lorsque X prend toutes les valeurs entières de 1 à n avec la probabilité $\frac{1}{n}$.

Pour tout k entier entre 1 et n, $p(X=k)=\frac{1}{n}$

Exemple :

On lance un dé équilibré à six faces et on définit la variable aléatoire égale au numéro de la face obtenue. Cette variable aléatoire suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

2) Espérance

Propriété :

Soit n un entier naturel, non nul.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; ... ; n\}$.

L'espérance de X est $E(X)=\frac{n+1}{2}$

Démonstration :

$E(X)=\frac{1}{n}\times 1+\frac{1}{n}\times 2+...+\frac{1}{n}\times n=\frac{1}{n}\times(1+2+...+n)$

Or $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, donc $E(X)=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$

VI. Loi binomiale

1) Schéma de Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Définition :

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues appelées « Succès » et « Échec ».

On dit qu'une épreuve de Bernoulli est de paramètre p si la probabilité de l'issue « Succès » est p.

Exemple :

On lance un dé équilibré à six faces et on considère comme un succès d'obtenir un 1.

Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Remarque :

On utilisera communément la lettre q pour désigner la probabilité d'un échec.

« Succès » et « Échec » étant des événements contraires, on a donc $q=1-p$.

Dans l'exemple précédent, un échec a la probabilité $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Schéma de Bernoulli

Définition :

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Un **schéma de Bernoulli** est une expérience consistant à répéter n fois, de manière **indépendante**, la même épreuve de Bernoulli.

Un schéma de Bernoulli a deux paramètres : n le nombre de répétitions de l'épreuve et p le paramètre de l'épreuve répétée.

Propriété :

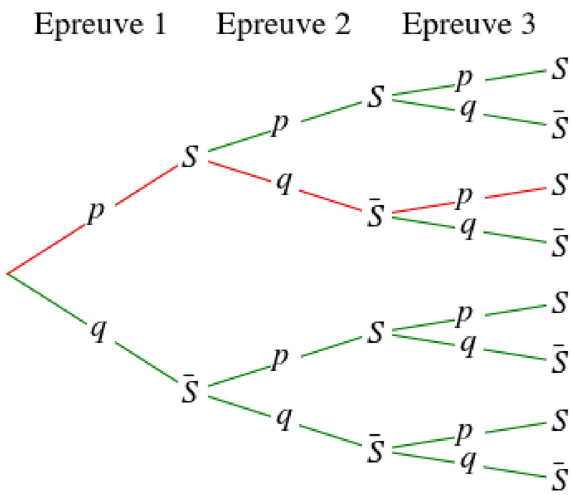
On peut représenter un schéma de Bernoulli de paramètre n et p par un **arbre de probabilité** à 2^n branches.

Les issues sont des n-uplets dont les n termes sont S pour « Succès » ou $\overline{S}$ pour « Échec ».

Exemple :

Ci-contre un schéma de Bernoulli pour $n=3$.

L'issue correspondant au chemin rouge peut être notée $(S, \overline{S}, S)$.



Propriété :

La probabilité d'une issue d'un schéma de Bernoulli s'obtient en faisant le produit des probabilités des issues obtenues à chaque épreuve de Bernoulli.

Exemple :

Si un schéma de Bernoulli a pour paramètre $n=4$ et $p=0{,}3$, alors l'issue $(S, \overline{S}, \overline{S}, S)$ a pour probabilité $0{,}3\times0{,}7\times0{,}7\times0{,}3=0{,}0441$.

2) Coefficients binomiaux

Définition :

Une expérience suit un schéma de Bernoulli de paramètre n et p.

k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

On appelle **coefficient binomial**, ou combinaison de k parmi n, le nombre de chemins conduisant à k succès sur l'arbre représentant l'expérience.

Ce nombre se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

Remarque :

Une issue de l'expérience ayant k succès étant un n-uplet de la forme $(S, S, \overline{S}, \dots, \overline{S}, S)$, elle contient k termes S et $n-k$ termes $\overline{S}$. Compter les issues ayant k succès revient à dénombrer les façons de choisir les places des succès S dans la liste des n termes.

D'où le terme « **combinaison** » car on cherche à dénombrer toutes les combinaisons possibles de S et $\overline{S}$.

Propriétés :

Une expérience suit un schéma de Bernoulli de paramètre n et p.

k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

On a les résultats suivants :

$$\binom{n}{0}=1 \quad ; \quad \binom{n}{n}=1 \quad ; \quad \binom{n}{1}=n \quad ; \quad \binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$$

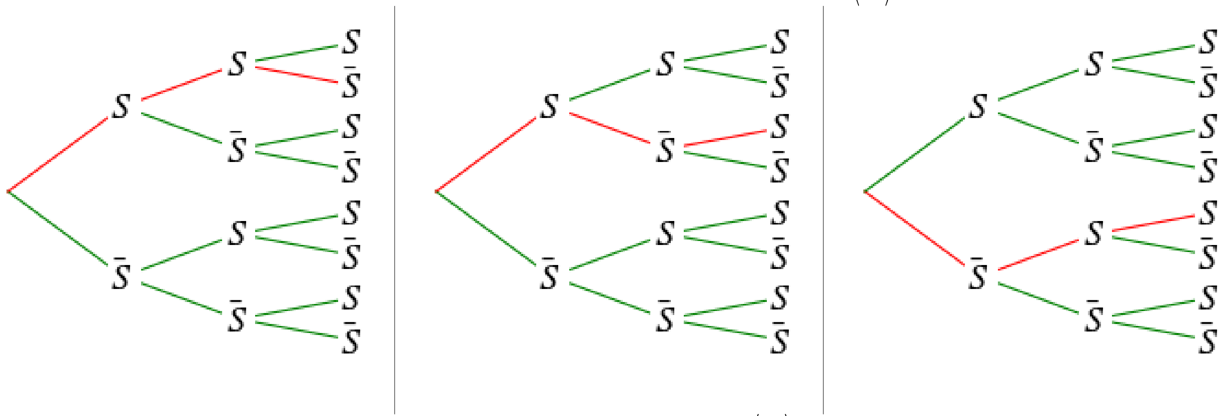
Démonstrations :

- $\binom{n}{0}=1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant 0 succès : celui ne comportant que des échecs.
- $\binom{n}{n}=1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant n succès : celui ne comportant que des succès.
- $\binom{n}{1}=n$ car il y a n chemins réalisant 1 succès.
  En effet, les n-uplets réalisant un seul succès ne diffèrent que par la place qu'occupe l'unique succès dans la liste des issues. Il y a n choix possibles pour placer S.
- $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ car lorsqu'il y a $n-k$ succès, il y a k échecs.
  Compter les chemins menant à $n-k$ succès revient à compter ceux menant à k échecs.
  Dénombrer les façons de placer k échecs parmi n termes revient à calculer la combinaison $\binom{n}{k}$.

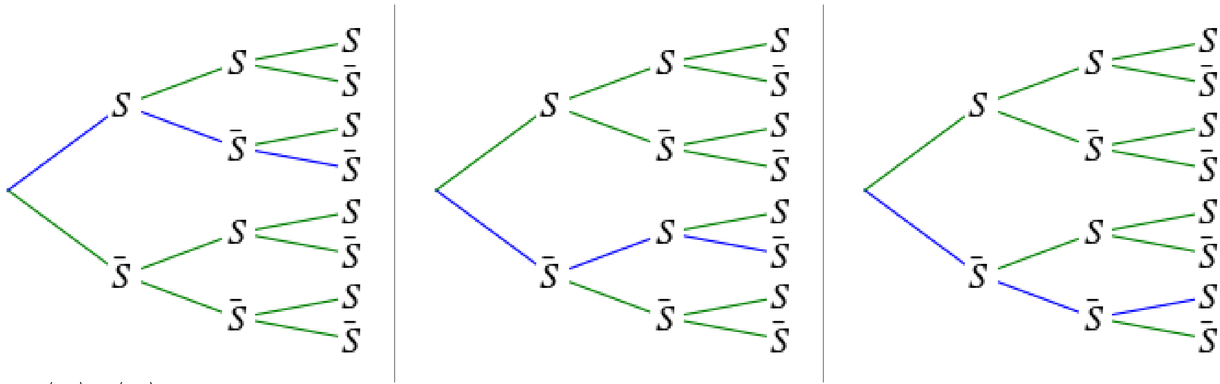
Exemple :

On considère un schéma de Bernoulli pour $n=3$.

On peut noter en rouge les chemins correspondant à la combinaison $\binom{3}{2}$.



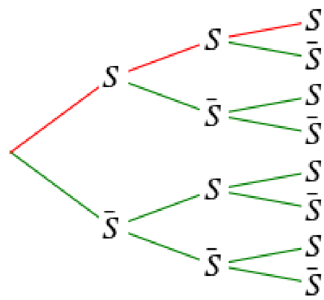
On peut noter en bleu, ceux correspondant à la combinaison $\binom{3}{1}$.



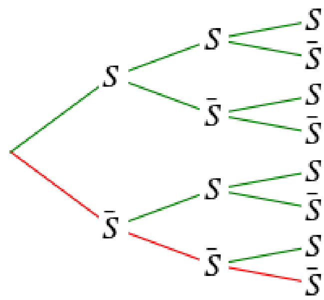
On a $\binom{3}{2}=\binom{3}{1}=3$.

On retrouve aussi les résultats suivants :

- $\binom{3}{3}=1$ en suivant le chemin (S, S, S) .



- $\binom{3}{0}=1$ en suivant le chemin $(\overline{S}, \overline{S}, \overline{S})$.



Théorème :

Une expérience suit un schéma de Bernoulli de paramètre n et p.

k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

On a la relation suivante :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration :

Les chemins comportant $k+1$ succès après $n+1$ répétitions de l'épreuve de Bernoulli sont de deux types : ceux pour lesquels la dernière épreuve $(n+1)^{ième}$ donne un succès et ceux pour lesquels la dernière épreuve donne un échec.

- Si la $(n+1)^{ième}$ épreuve donne un succès, alors pour avoir un total de $k+1$ succès, il faut que les n épreuves précédentes aient données k succès. Il y a donc $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles.
- Si la $(n+1)^{ième}$ épreuve donne un échec, alors pour avoir un total de $k+1$ succès, il faut que les n épreuves précédentes aient déjà donné $k+1$ succès. Il y a donc $\binom{n}{k+1}$ combinaisons possibles.

Les ensembles de ces deux types de chemins sont disjoints, on en déduit donc que :

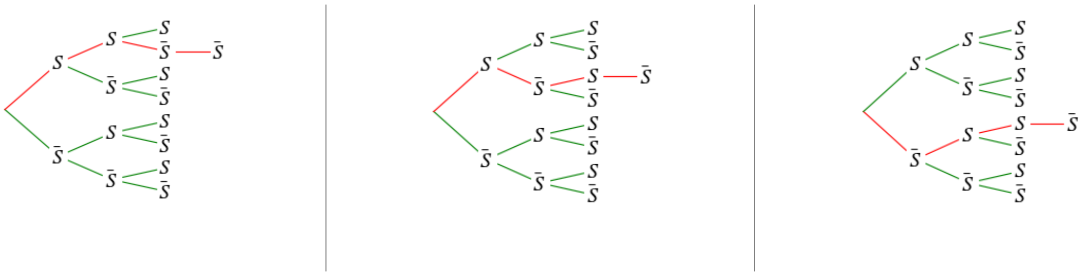
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Exemple :

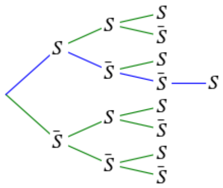
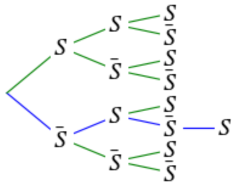
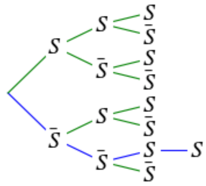
Pour calculer $\binom{4}{2}$, on utilise le schéma de Bernoulli avec $n=3$.

Les chemins comportant 2 succès parmi 4 proviennent :

- des chemins en rouge comportant 2 succès parmi les 3 premières épreuves ; la quatrième épreuve sera alors un échec. Il y en a $\binom{3}{2}$.



- des chemins en bleu comportant 1succès parmi les 3 premières épreuves ; la quatrième épreuve sera alors un succès. Il y en a $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

On obtient :

$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3+3=6$$

Théorème :

Une expérience suit un schéma de Bernoulli de paramètre n et p.

k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant n$.

On peut déterminer de proche en proche toutes les combinaisons à l'aide de la relation $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n\\k+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\k+1\end{pmatrix}$, en construisant le **triangle de Pascal** partiellement représenté ci-contre.

n \ k	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Démonstration :

Si l'on connaît tous les coefficients binomiaux pour une répétition de n épreuves de Bernoulli, on peut calculer tous ceux correspondant à $n+1$ répétitions de l'épreuve grâce à la relation $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n\\k+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\k+1\end{pmatrix}$. On peut donc calculer n'importe quel coefficient binomial en itérant le processus de 1 à n. On peut initier le processus car on sait que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1$.

Exemple :

En prolongeant le tableau précédent, on peut calculer toutes les combinaisons correspondant à $n=6$.

On a par exemple :

$$\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}=10+5=15$$

3) Loi binomiale

Définition :

Une expérience suit un schéma de Bernoulli de paramètre n et p.

k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

On associe à l'expérience la variable aléatoire X qui donne le nombre total de succès.

La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètre n et p.

On la note $\mathscr{B}$ (n, p).

Propriété :

Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}$ (n, p), alors pour tout entier k compris entre 0 et n, la probabilité que X soit égal à k est :

$$p(X=k)=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration :

On sait que tous les chemins comportant k succès sont équiprobables car, en faisant le produit des probabilités des n issues de chaque épreuve de Bernoulli, on obtient k facteurs p (pour k succès) et $n-k$ facteurs $(1-p)$ (pour $n-k$ échecs). Leur probabilité est donc $p^k(1-p)^{n-k}$.

Il suffit ensuite de compter les chemins menant à k succès : il y en a $\binom{n}{k}$.

On obtient donc : $p(X=k)=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Exemple :

On lance 3 fois un dé équilibré à six faces et on considère comme un succès d'obtenir un 6.

En nommant X la variable aléatoire donnant le nombre de succès, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}$ (n, p).

On peut calculer $p(X=1)=\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{Nombre de chemins avec un seul succès}}\times\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^1}_{\text{Probabilité d'un succès}}\times\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^2}_{\text{Probabilité de deux échecs}}=3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36}=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$.

La probabilité d'obtenir exactement un 6 en trois lancers est $\frac{25}{72}$.

On peut de même déterminer la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Propriétés :

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$

$E(X)=n\times p$; $V(X)=n\times p\times q$ où $q=1-p$

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, on peut calculer l'espérance grâce à la loi de probabilité de X.

$E(X)=0\times\frac{125}{216}+1\times\frac{75}{216}+2\times\frac{15}{216}+3\times\frac{1}{216}=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$. On vérifie que $n\times p=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

Remarque :

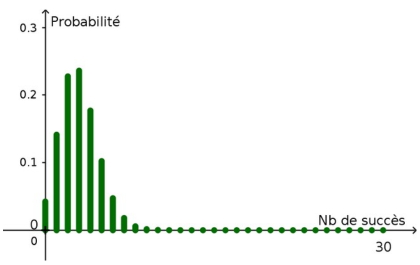
On peut remarquer que la formule de l'espérance peut s'expliquer sans calcul.

En effet, chaque épreuve de Bernoulli a pour espérance de succès p donc, en la répétant n fois, on peut espérer obtenir en moyenne $n\times p$ succès.

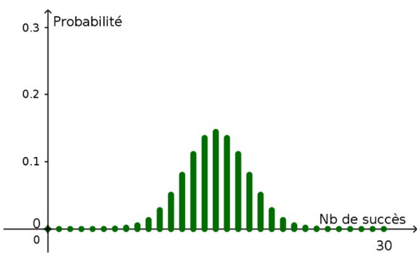
Dans l'exemple précédent, le 6 sort avec la probabilité $\frac{1}{6}$, donc on peut espérer tripler ce résultat en triplant l'expérience, car ce sont des expériences successives et indépendantes et $E(X)=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

4) Représentation graphique

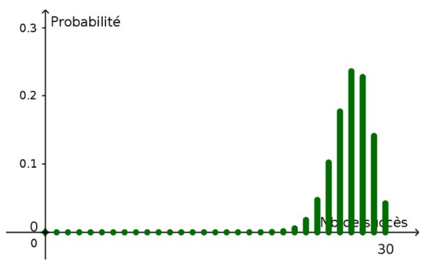
Quelques exemples de représentation de la loi binomiale pour n = 30.



p = 0,1



p = 0,5



p = 0,9

VII. Loi géométrique

1) Définition et caractéristiques

Définition :

On considère une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est p et on répète cette épreuve de Bernoulli de manière indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.

La variable aléatoire X donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir ce succès suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$.

Exemple :

On lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 jusqu'à l'obtention d'un 2.

La variable aléatoire D donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un 2 suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}25$.

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $p(X=k)=(1-p)^{k-1}\times p$
- $p(X>k)=(1-p)^k$

Exemple :

Dans l'exemple précédent, D suit la loi $\mathcal{G}(0{,}25)$ donc la probabilité qu'il faille cinq essais pour obtenir un 2 est $p(D=2)=(1-0{,}25)^{5-1}\times 0{,}25=0{,}75^4\times 0{,}25\approx 0{,}08$.

Propriété (loi sans mémoire) :

- Pour X suivant une loi géométrique, on a :

$$p_{X>s}(X>s+t)=p(X>t)\text{ , pour tout } s \in\mathbb{N}^* \text{ et } t \in\mathbb{N}^*.$$

- Réciproquement, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

pour tout $s \in\mathbb{N}^*$ et $t \in\mathbb{N}^*$, on ait $p_{X>s}(X>s+t)=p(X>t)$ alors X suit une loi géométrique.

Exemple :

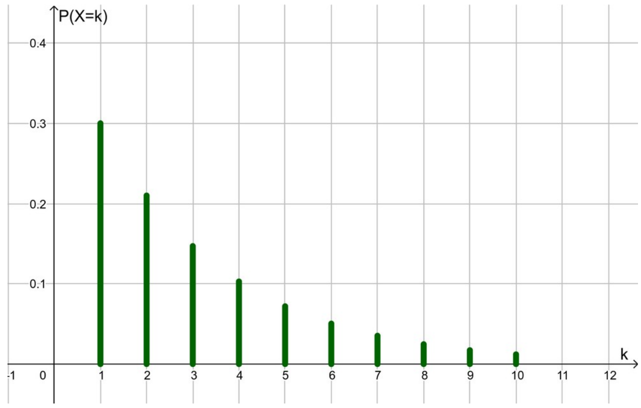
Dans l'exemple précédent, la probabilité qu'il faille plus de 10 essais pour obtenir un 2 sachant qu'après sept essais, on n'en a pas encore obtenu est :

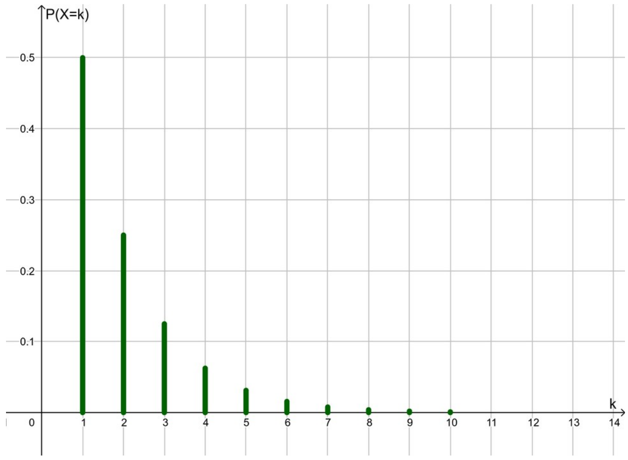
$$p_{D>7}(D>10)=p_{D>7}(D>7+3)=p(D>3)=(1-0{,}25)^3=0{,}75^3\approx 0{,}42$$

On a bien utilisé le fait que la probabilité de réussir, en plus de dix essais sachant qu'on en a raté sept, c'est-à-dire, en plus de trois essais supplémentaires, est la même probabilité de réussir en plus de trois essais au départ : les sept premiers essais ont été « oubliés ».

2) Représentation graphique

$\mathcal{G}(0,3)$ $\mathcal{G}(0,5)$





3) Espérance et variance

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $E(X)=\dfrac{1}{p}$
- $V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

Exemple :

Dans l'exemple précédent, l'espérance de D est $E(D)=\dfrac{1}{0,25}=4$.

Concrètement, cela veut dire que si l'on recommence un grand nombre de fois cette succession d'épreuves alors le nombre moyen d'essais à réaliser afin d'obtenir un 2 est proche de 4.

VIII. Échantillonnage

1) Échantillon

Définition :

Un échantillon de taille n est obtenu en prélevant au hasard, **successivement** et **avec remise**, n éléments d'une population.

Remarques :

- Après prélèvement d'un échantillon, on s'intéresse à la valeur d'un caractère des éléments de la population. Nous nous restreignons ici à des populations dont le caractère étudié n'a que **deux valeurs possibles**.
- **Exemples de situations correspondants à un prélèvement d'échantillon** :
  - Prélever des pièces dans une production de manière identique et indépendante, noter à chaque fois si la pièce présente un défaut ou non et la remettre dans la production.
  - Lancer plusieurs fois un dé et noter à chaque fois si la face supérieure est un 6 ou non.
  - Lancer plusieurs fois de manière indépendante une pièce de monnaie et noter si elle affiche « pile » ou « face ».
  - Sortir au hasard de manière indépendante une boule dans une urne qui ne contient que des boules rouges et des boules d'autres couleurs et noter à chaque fois si elle est rouge ou non.
- Souvent, il n'y a pas de remise lors du prélèvement. Mais lorsque l'effectif total est très grand par rapport au nombre d'objets prélevés, on considère néanmoins que l'échantillon est constitué, au sens de la définition donnée, avec remise.

  Exemples de situations assimilées à un prélèvement d'échantillon :
  - Lors d'un prélèvement de pièces dans une production, après avoir constaté qu'une pièce a un défaut, il n'est pas envisageable de la remettre parmi l'ensemble des pièces produites.
  - Lors d'un sondage « sortie des urnes », on ne peut pas attendre que tout le monde ait voté et réunir toutes les personnes avant de choisir au hasard des individus pour obtenir un échantillon.

2) Intervalle de fluctuation

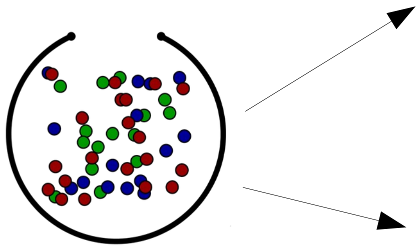
On souhaite donner les caractéristiques d'un échantillon à partir de celles connues de la population dans laquelle il a été prélevé.

C'est ce qu'on nomme l'**échantillonnage**.

Exemple :

Urne avec 40 % de boules rouges.

Le caractère « rouge » a, dans la population, une proportion de $p=0{,}4$.



Premier échantillon de taille $n=15$.

Nombres de boules ayant le caractère « rouge » : $k=6$.

Fréquence observée : $f=\frac{6}{15}=0{,}4$.

Deuxième échantillon de taille $n=15$.

Nombres de boules ayant le caractère « rouge » : $k=4$.

Fréquence observée : $f=\frac{4}{15}\simeq 0{,}27$.

Propriété :

Soit une population dont une proportion ***p*** des éléments admet un caractère donné.

Dans un **échantillon de** taille ***n*** prélevé dans cette population, l'**effectif** des éléments qui présentent ce **caractère** est une variable aléatoire qui suit la **loi binomiale** de paramètres ***n*** et ***p***.

Démonstration :

- Le prélèvement d'un échantillon de taille *n* peut être assimilé à un tirage successif avec remise dès lors que l'effectif de la population est assez grand par rapport à *n*.

  On peut donc considérer que l'expérience est une répétition de *n* tirages identiques à deux issues : avoir ou ne pas avoir le caractère choisi.
- La variable aléatoire *X* donnant le nombre d'éléments qui ont le caractère choisi suit alors une loi binomiale de paramètre *n* (nombre de répétition d'un tirage) et *p* (probabilité de prélever un élément ayant le caractère choisi).

Remarque :

Pour cette loi binomiale de paramètre *n* et *p*, la somme des probabilités

$\sum_{k=0}^{n} p(X=k)=p(X=0)+p(X=1)+\ldots+p(X=n)$ vaut 1.

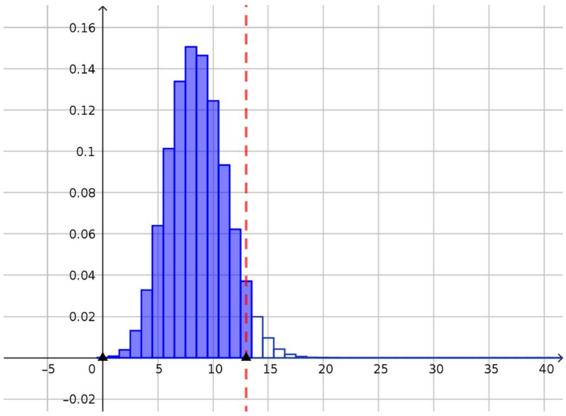
<u>Définition :</u>

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0\ ;\ 1[$ et a et b réels.

Un intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1 - \alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil de $1 - \alpha$ (ou au risque α) associé à X.

<u>Exemple :</u>

Pour X suivant la loi $\mathscr{B}(43\ ;\ 0{,}2)$ et $\alpha = 0{,}05$.



On a $p(X \leqslant 13) \approx 0{,}964$, donc $p(X \leqslant 13) \geqslant 0{,}95$.

Ainsi $[0\ ;\ 13]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1 - \alpha = 0{,}95$ associé à X.

On est sûr, à au moins 95 %, qu'il n'y aura pas plus de 13 succès sur les 43 répétitions.

<u>Remarque :</u>

Lorsque l'on cherche à trouver un intervalle de fluctuation associé à une loi binomiale de paramètres n et p, suivant le contexte, on peut être amené à chercher des intervalles de la forme $[0\ ;\ b]$, $[a\ ;\ n]$ ou $[a\ ;\ b]$ « centré », de préférence les moins grands possibles.

Intervalle de fluctuation centré

<u>Propriété :</u>

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0\ ;\ 1[$ et a et b réels.

L'intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que a et b soient les plus petits entiers vérifiant respectivement :

$p(X \leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$ et $p(X \leqslant b) \geqslant 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ est un **intervalle de fluctuation centré** (ou **bilatéral**) au seuil de $1 - \alpha$ associé à X.

Remarque :

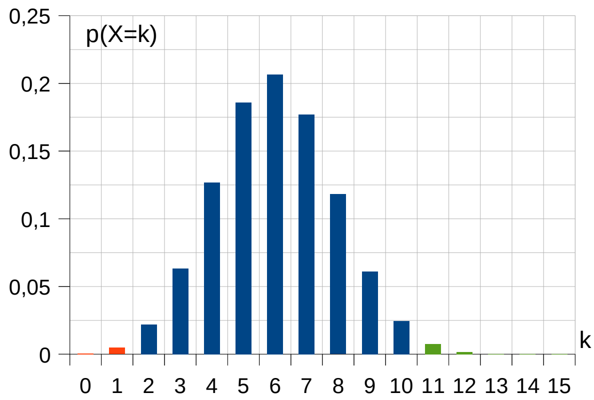
Pour un seuil de 0,95 :

Sur la représentation graphique ci-contre :

- La somme des probabilités des parties vertes est inférieure à 0,025.
- La somme des probabilités des parties rouges est inférieure à 0,025.

Pour que **la somme des probabilités des parties bleues soit supérieure où égale à 0,95 tout en étant la plus petite possible**, on détermine :

- a le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) >$ 0,025 .
- b le plus petit entier tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.



Loi binomiale de paramètre $n=15$ et $p=0{,}4$

Exemple :

Dans une urne contenant 40 % de boules rouges, on prélève un échantillon de taille $n=15$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges dans l'échantillon prélevé.

Les valeurs possibles de X sont les entiers compris entre 0 et 15.

La loi de probabilité de X est donnée par :

			Intervalle de fluctuation													
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(X=k)$	0,000	0,005	0,022	0,063	0,127	0,186	0,207	0,177	0,118	0,061	0,025	0,007	0,002	0,000	0,000	0,000
	0,027															
	0,991															

- $a=2$ car $p(X \leqslant 1) \simeq 0{,}005$ et $p(X \leqslant 2) \simeq 0{,}027$.
- $b=10$ car $p(X \leqslant 9) \simeq 0{,}966$ et $p(X \leqslant 10) \simeq 0{,}991$.

L'intervalle $[0{,}13\,;0{,}67]$ est un intervalle de fluctuation au seuil 0,95 associé à X.