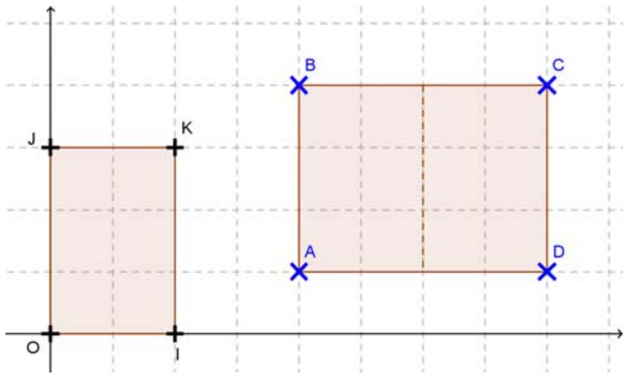
Chapitre 11
Calcul intégral

I. Aire sous la courbe

1) Unité d'aire

$(O;\vec{OI},\vec{OJ})$ est un repère orthogonal. K est le point de coordonnées $(1;1)$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ.

Exemple :
L'aire du rectangle ABCD ci-contre est de 2 unités d'aire.
OI=1 cm et OJ =1,5 cm, donc l'aire de ABCD est $2\times1\,cm\times1{,}5\,cm$ soit $3\,cm^2$ .1

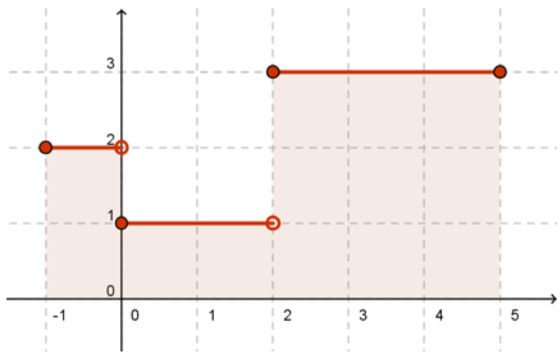


2) Cas d'une fonction en escalier

Exemple :
f est la fonction en escalier définie sur $[-1;5]$ et représentée ci-contre.

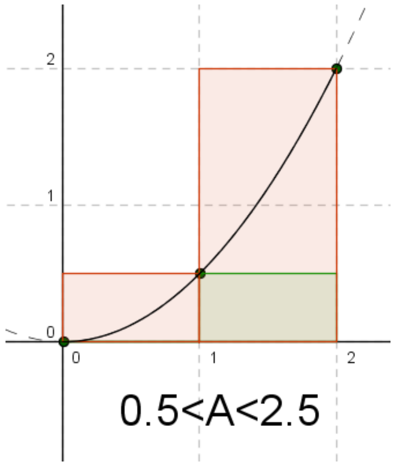
L'aire $\mathscr{A}$ sous cette courbe est la somme des aires des rectangles colorés.

En unités d'aire :
$\mathscr{A}=2\times(0-(-1))+1\times(2-0)+3(5-2)=13$

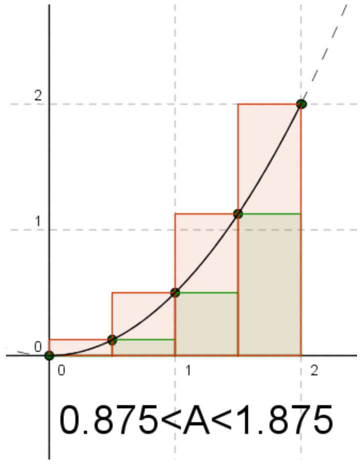


3) Cas d'une fonction positive

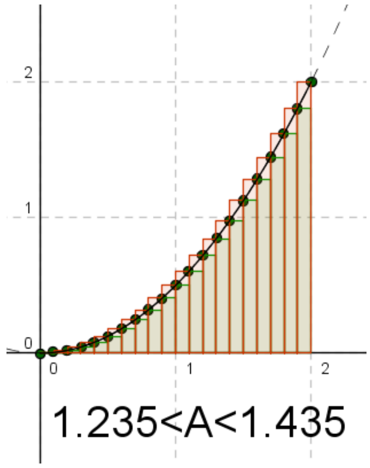
Exemple :
f est la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=0{,}5x^2$ et représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal (unité graphique : 1cm).
On se propose d'approcher l'aire, en cm^2 , sous la courbe $\mathscr{C}$. Dans chaque cas, l'aire $\mathscr{A}$ est comprise entre l'aire sous la courbe en escalier « verte » et l'aire sous la courbe en escalier « rouge ».



Le pas vaut 1



Le pas vaut 0,5



Le pas vaut 0,1

Propriété :
On admet que, si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une **fonction positive** sur $[a;b]$, alors l'**aire** sous la courbe $\mathscr{C}$ (en unité d'aire) peut être **approchée** d'aussi près que l'on veut par les aires sous deux courbes en escalier qui encadrent $\mathscr{C}$, en réduisant de plus en plus finement le pas.

II. Intégrale d'une fonction

1) Intégrale de f entre a et b

Définition :
Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$.
F étant une primitive de f sur $[a;b]$, alors l'**intégrale** de la fonction f **entre *a* et *b*** est le nombre $F(b)-F(a)$.

On note $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et on lit somme de *a* à *b* de $f(x)dx$.

Remarques :

- Si F est une primitive de f, alors toutes les primitives s'écrivent :
$$G(x)=F(x)+k \text{ avec } k\in\mathbb{R}.$$
Donc $G(b)-G(a)=F(b)+k-(F(a)+k)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Ainsi l'intégrale ne dépend pas de la primitive de f choisie.
- x est une variable muette, on peut écrire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- On dit que l'on intègre la fonction f sur $[a;b]$.

Exemple :

$$\int_2^1 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^1=\frac{1^3}{3}-\frac{2^3}{3}=-\frac{7}{3}$$

Propriétés :

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstrations :

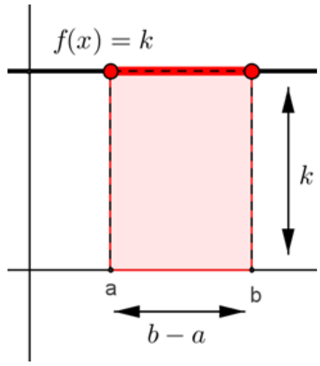
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=F(a)-F(a)=0$.
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=F(a)-F(b)=-(F(b)-F(a))=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Lien entre intégrale et aire

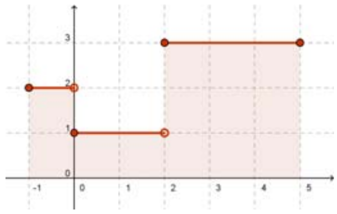
Soit $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ un repère orthogonal du plan, l'unité d'aire est donc $1\,u.a.=OI\times OJ$.

Idée :
Pour une fonction constante et positive $f(x)=k \quad (k\geqslant 0)$ avec $a<b$, on vérifie que :

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[kx]_a^b=k(b-a)$, donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire sous la courbe entre *a* et *b*.



On considère donc que pour toute fonction positive g en escalier, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire sous la courbe entre *a* et *b*.

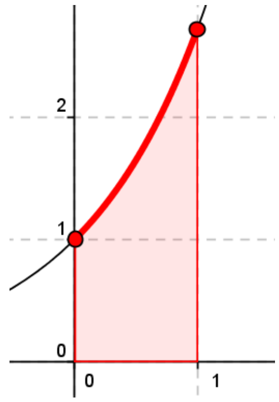


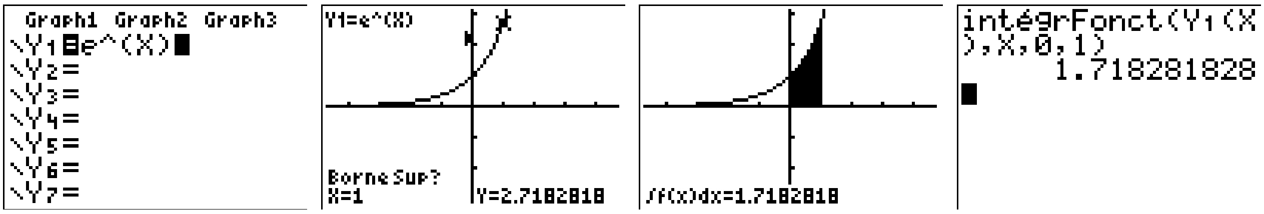
Théorème :
Soit f une **fonction continue** et **positive** sur un intervalle I.
L'**aire** du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à l'**intégrale** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, exprimée en unités d'aire :

$$\mathscr{A}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ en } u.a.$$

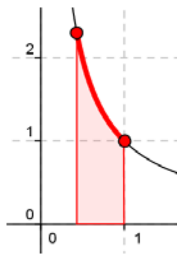
Exemples :

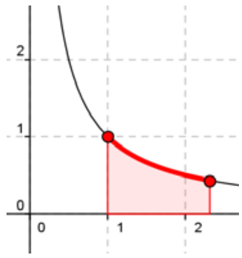
- $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ dans un repère orthogonal.
  f est continue et positive donc l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, sous la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $x \in [0;1]$ est égale à $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}\,x$,
  c'est-à-dire $\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0$.
  Donc $\mathscr{A} = \mathrm{e} - 1$ unités d'aire.





- $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ dans un repère orthogonal.
  g est continue et positive donc l'aire $\mathscr{A}(t)$, en unité d'aire, sous la courbe $\mathscr{C}_g$ entre 1 et t est égale à :
  - Si $t \geqslant 1$, $\mathscr{A}(t) = \int_1^t \frac{1}{x} \mathrm{d}\,x = \ln(t)$.
  - Si $0 < t \leqslant 1$, $\mathscr{A}(t) = \int_t^1 \frac{1}{x} \mathrm{d}\,x = -\ln(t)$.





3) *Valeur moyenne*

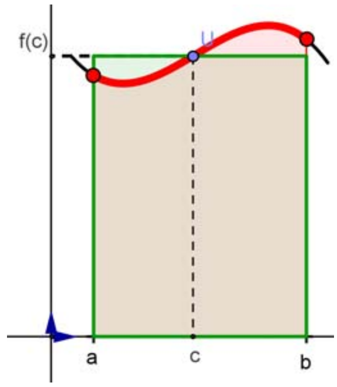
Définition :
f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$).
La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}\,x$.

Remarques :

- Nous admettrons que lorsque f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, il existe un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c)$ est égal à la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.
  On a alors :

$$(b-a) f(c) = \int_a^b f(x) \mathrm{d}\,x.$$

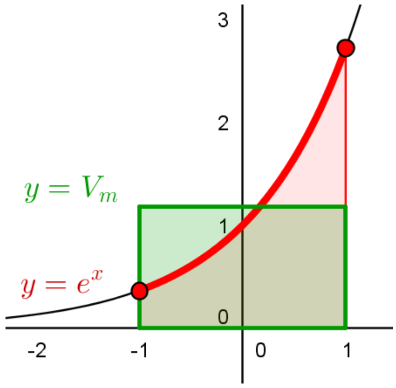
- Supposons que f soit positive sur $[a;b]$. L'égalité ci-dessus signifie que l'aire sous la courbe entre *a* et *b* est égale à l'aire du rectangle.



Exemple :
La valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sur $[-1;1]$ est :

$$V_m=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^x]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

$V_m \simeq 1{,}18$.
Cherchons un réel *c* tel que $\mathrm{e}^t=V_m$. Donc $c \simeq \ln 1{,}18$.



Remarque :

Si *x* et *y* sont deux grandeurs liées par une relation du type $y=f(x)$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une grandeur homogène au produit des grandeurs *x* et *y*.

Comme $(b-a)$ est homogène à *x*, la valeur moyenne $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est homogène à $\frac{1}{x}xy$, c'est-à-dire à la grandeur *y*.

Exemple :
Le débit en $m^3 \times h^{-1}$ d'une pompe d'arrosage qui fonctionne en été de 6 h à 20 h est modélisé par :

$f(x)=5\mathrm{e}^{0{,}002\,x}$, où *x* est un instant en h, avec $6 \leqslant x \leqslant 20$.

Le débit moyen de cette pompe entre 6 h et 20 h est :

$$d_m=\frac{1}{20-6}\int_6^{20}5\,\mathrm{e}^{0{,}002\,x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{14}\left[\frac{5}{0{,}002}\mathrm{e}^{0{,}002\,x}\right]_6^{20}.$$

Donc ce débit moyen est d'environ $5{,}13\,m^3 \times h^{-1}$.

$\int_6^{20} f(x)\,\mathrm{d}x=(20-6)d_m$ est donc exprimé en $(m^3 \times h^{-1}) \times h$, c'est-à-dire en m^3.

En fait, $\int_6^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$ est le volume total V d'eau débité par cette pompe entre 6 h et 20 h.

Ainsi :

$$V \simeq 14 \times 5{,}13\,m^3 \text{, c'est-à-dire } V \simeq 71{,}8\,m^3$$

III. Propriétés de l'intégrale

1) *Relation de Chasles*

Propriété (relation de Chasles) :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Pour tous réels *a*, *b* et *c* de I, on a la **relation de Chasles** :

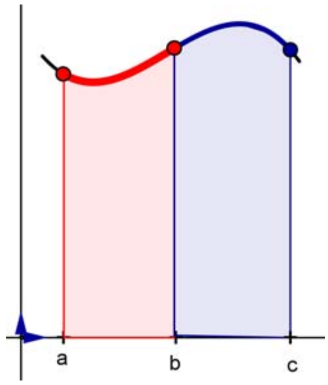
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :
Notons F une primitive de f sur I.

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=F(c)-F(a)$$

et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)+F(c)-F(b)=F(c)-F(a)$.
D'où le résultat.

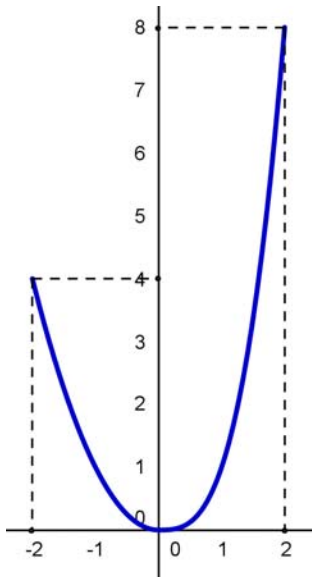
Remarque :
Lorsque f est positive et lorsque les réels *a*, *b*, *c* sont tels que $a\leqslant b\leqslant c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires : l'aire de la réunion de deux domaines adjacents est la somme des aires de chacun.



Exemple :
On se propose de calculer :

$$I=\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ avec } \begin{cases} f(x)=x^2 \text{ si } x<0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=x^3 \text{ si } x>0 \end{cases}$$

On peut constater que la fonction représentée ci-dessous est continue sur $[-2;2]$.



En utilisant la relation de Chasles :

$$I=\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} x^2\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2} x^3\,\mathrm{d}x$$

$$I=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}+\frac{16}{4}=\frac{20}{3}$$

2) Linéarité

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ est α un réel :

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstrations :

- Notons F une primitive de f sur I, alors αF est une primitive de αf sur I, donc :
$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha F(b)-\alpha F(a)=\alpha[F(b)-F(a)]=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
- Notons F et G des primitives respectivement de f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
Donc :
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x=(F+G)(b)-(F+G)(a)=F(b)+G(b)-F(a)-G(a)$$
Or
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=F(b)+G(b)-F(a)-G(a)$$
D'où le résultat.

Exemple :

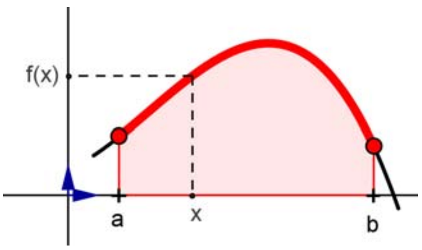
On se propose de calculer $I=\int_0^3 (2\mathrm{e}^x-3x)\,\mathrm{d}x$.

$$I=\int_0^3 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x-\int_0^3 3x\,\mathrm{d}x=2\int_0^3 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x-3\int_0^3 x\,\mathrm{d}x$$

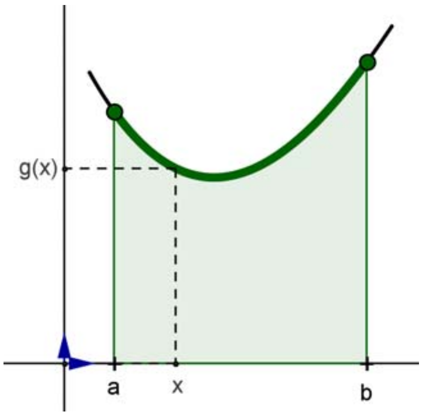
$$I=2[\mathrm{e}^x]_0^3-3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=2(\mathrm{e}^3-1)-3\left(\frac{9}{2}\right)=2\mathrm{e}^3-\frac{32}{2}\ .$$

Interprétation graphique :

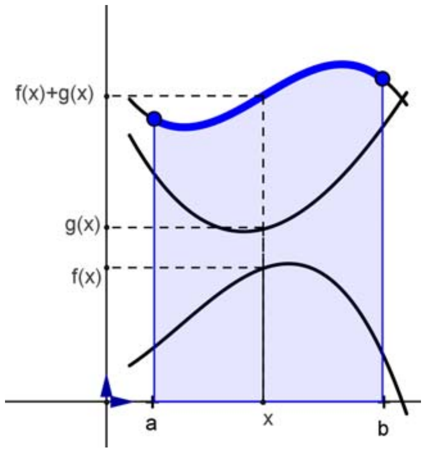
$$\mathscr{A}_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\mathscr{A}_2=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\mathscr{A}=\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$$



3) Ordre

Propriété :

Si f est **positive** sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre **positif**.

Démonstration :
Si f est positive sur $[a;b]$, alors F est croissante sur $[a;b]$, car sa dérivée est positive, donc :

$$F(b) \geqslant F(a) \Leftrightarrow F(b)-F(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Remarques :

- La réciproque n'est pas vraie.
- Cette propriété est parfois appelée propriété de **positivité** de l'intégrale.

Théorème :
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, avec $a \leqslant b$, telles que :
pour tout réel *x* de $[a;b]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.
Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :
Si, pour tout réel *x* de $[a;b]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $g(x)-f(x) > 0$ et l'intégrale $\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$ est positive.

Donc $\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
Ce théorème permet d'encadrer une intégrale lorsque la fonction f est connue par sa courbe $\mathscr{C}_f$.

Remarque :
Ainsi, si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a;b]$, alors l'aire sous la courbe de f entre *a* et *b* est inférieure à l'aire sous la courbe de g entre *a* et *b*.

Exemples :

- Si $a \leqslant b$, alors $\int_a^b \frac{d\,t}{1+t^2} \geqslant 0$. En effet, pour tout réel *t*, $\frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$.
- $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,\mathrm{d}x \leqslant 0$. En effet, $\frac{1}{2} \leqslant 1$ et pour tout réel *x* de $\left[\frac{1}{2};1\right]$, $\ln x \leqslant 0$.
- Sur l'intervalle [0;1], $t^3 \leqslant t^2$, donc $\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$.