Chapitre 5

Fonction exponentielle

I. La fonction exponentielle

1) Existence et unicité

Théorème :
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'=f \text{ et } f(0)=1$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée **exp**.
Ainsi pour tout réel x :

$$\exp'(x)=\exp(x) \text{ et } \exp(0)=1$$

Remarque :
On admet l'existence de cette fonction.
On peut conjecturer son existence grâce à la construction approchée de sa courbe.
On utilise la méthode d'Euler.
Il s'agit de construire une suite de points $(x_n ; y_n)$ telle que y_n soit proche de $f(x_n)$.
Ainsi le nuage de points $(x_n ; y_n)$ formera une approximation de la courbe représentative de la fonction f.
On approche la courbe par sa tangente.
On a donc :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y_0 = f(0) = 1 \\ y_{n+1} = (1+h)y_n \end{cases} \text{ où } h \text{ est le pas.}$$

Justification :

$$f'(x_n)=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h} \text{ donc } f'(x_n)=f(x_n)=\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h}$$

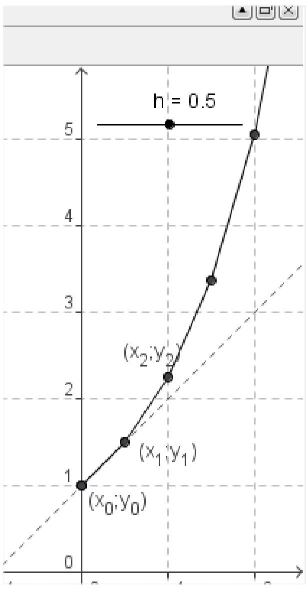
soit $y_{n+1}=(1+h)y_n$ (où $y_n \simeq f(x_n)$)

Tableur

	A	B
1	0	1
2	0.5	1.5
3	Nombre A2: A1 + h	
4	1.5	3.38

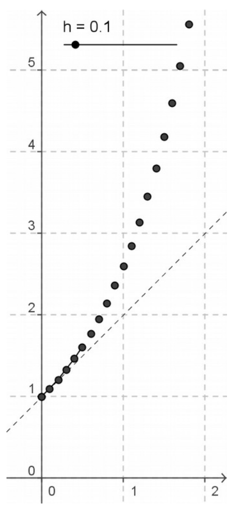
Tableur

	A	B
1	0	1
2	0.5	1.5
3	Nombre B2: (1 + h) B1	
4	1.5	3.38
5	2	5.06



Tableur

	A	B
1	0	1
2	0.5	1.5
3	1	2.25
4	1.5	3.38
5	2	5.06
6	2.5	7.59
7	3	11.39
8	3.5	17.09
9	4	25.63
10	4.5	38.44
11	5	57.67
12	5.5	86.5
13	6	129.75
14	6.5	194.62



Plus on réduit le pas h, plus l'approximation sera bonne.

Propriété :
Si une fonction f dérivable sur ℝ vérifie $f'=f$ et $f(0)=1$, alors, pour tout réel *x*, on a :
$$f(x)f(-x)=1 \text{ et donc } f(x)\neq 0 .$$
Par conséquent :
$$\text{pour tout réel } x,\ \exp(x)\neq 0 .$$

Démonstration :
Soit f une fonction dérivable sur ℝ telle que : $f'=f$ et $f(0)=1$.
On pose pour tout réel *x*, $\phi(x)=f(x)f(-x)$; φ est dérivable sur ℝ comme produit de deux fonctions dérivables et, pour tout réel *x* :
$\phi'(x)=f'(x)f(-x)+f(x)\times(-f'(-x))=f(x)f(-x)-f(x)f(-x)=0$.
La fonction φ est donc constante sur ℝ et, comme $\phi(0)=1$, on obtient pour tout réel *x*, $f(x)f(-x)=1$ et donc $f(x)\neq 0$.

Remarque :
On utilise ici une propriété fondamentale : si une fonction admet une dérivée nulle sur un intervalle, alors cette fonction est constante sur cet intervalle.

Démonstration de l'unicité de la fonction :
On suppose l'existence d'une fonction dérivable g vérifiant $g'=g$ et $g(0)=1$.
La fonction exp ne s'annulant pas, on peut définir $h=\frac{g}{\exp}$ sur ℝ.
$$h'(x)=\frac{g'(x)\exp(x)-g(x)\exp'(x)}{(\exp(x))^2}=\frac{g(x)\exp(x)-g(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2}=0 .$$
h est donc constante sur ℝ et $h(0)=\frac{g(0)}{\exp(0)}=1$. Ainsi, pour tout réel *x*, on a $h(x)=1$.
On en déduit que, pour tout réel *x* : $g(x)=\exp(x)$.

2) Propriétés algébriques

Propriété :
Pour tout réel *x*, pour tout réel *y* :
$$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$$

Démonstration :
Comme $\exp(x)\neq 0$ pour tout réel *x*, on peut considérer la fonction f définie sur ℝ par :
$$f(x)=\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} .$$
où *y* est un nombre réel quelconque fixé.
La fonction f est dérivable sur ℝ et on a, pour tout *x* réel :
$$f'(x)=\frac{\exp(x+y)\exp(x)-\exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2}=0 .$$
Donc f est une fonction constante.
Comme $\exp(0)=1$, on a $f(0)=f(x)=\exp(y)$, c'est-à-dire :
$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}=\exp(y) .$$

Remarque :
On dit que exp transforme les sommes en produit.

Propriétés :
Pour tout réel x, pour tout réel y et pour tout entier relatif n :
- $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx)=(\exp(x))^n$

Démonstrations :
- D'après la propriété précédente :
  $\exp(x)\exp(-x)=\exp(x-x)=\exp(0)=1$.
- Pour tout réel x, comme $\exp(x)\neq 0$, $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.
  $\exp(x-y)=\exp(x+(-y))=\exp(x)\exp(-y)=\exp(x)\dfrac{1}{\exp(y)}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- Démontrons, par récurrence, que $\exp(nx)=(\exp(x))^n$ pour tout n entier naturel.
  - Initialisation :
    Pour $n=0$, $\exp(nx)=(\exp(x))^n$ est vraie, car $\exp(0)=1$ et $(\exp(x))^0=1$.
  - Hérédité :
    Si on suppose que $\exp(nx)=(\exp(x))^n$ est vraie pour n fixé, alors :
    $\exp((n+1)x)=\exp(nx+x)=\exp(nx)\exp(x)=(\exp(x))^n\exp(x)=(\exp(x))^{n+1}$
  - Conclusion :
    Pour tout entier naturel n, on a : $\exp(nx)=(\exp(x))^n$.

  Soit maintenant un entier négatif p. Alors $p=-n$ où n est un entier naturel.
  Donc $\exp(px)=\exp(-nx)=\dfrac{1}{\exp(nx)}$.
  Comme n est un entier naturel, on sait par ce qui précède que $\exp(nx)=(\exp(x))^n$.
  Donc $\exp(px)=\dfrac{1}{(\exp(x))^n}=(\exp(x))^{-n}=(\exp(x))^p$.

Définition :
On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle. Ainsi $\exp(1)=\mathrm{e}$.

Le nombre exp(1) noté **e** est un nombre irrationnel et admet 2,71828 pour valeur approchée à 10^{-5} .
Pour tout entier n, on a $\exp(n)=\exp(1\times n)=(\exp(1))^n=\mathrm{e}^n$.

Par **convention**, on décide de noter pour tout réel x : $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.

Avec cette nouvelle notation on a donc :
Pour tout réel x, pour tout réel y et pour tout entier relatif n :

$$\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^y \quad ; \quad \mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x} \quad ; \quad \mathrm{e}^{x-y}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \quad ; \quad \mathrm{e}^{nx}=(\mathrm{e}^x)^n$$

II. Étude de la fonction exponentielle

1) *Signe et variations*

Propriété :
La fonction exponentielle est dérivable donc **continue** sur ℝ.

Propriété :
La fonction exponentielle est **strictement positive** sur ℝ.
On peut écrire :

pour tout réel x, $e^x > 0$.

Démonstration :
On sait que, pour tout réel x, $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$, donc pour tout réel x, on a : $e^x > 0$.

Propriété :
La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur ℝ.

Démonstration :
On sait que $\exp' = \exp$ et, d'après le théorème précédent, la fonction $\exp$ est strictement positive sur ℝ.
Ainsi, la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.

Remarque :
La fonction exponentielle est de croissance très rapide.
D'où l'expression de « croissance exponentielle ».

Propriétés :
Pour tout x et y :
$x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$; $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$

Exemples :
- Résoudre $e^{-2x} = e^2$ dans ℝ : $e^{-2x} = e^2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1 \Leftrightarrow$ S={-1}
- Résoudre $e^{-2x} < 1$ dans ℝ : $e^{-2x} < 1 \Leftrightarrow e^{-2x} < e^0 \Leftrightarrow -2x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow S =]0;+\infty[$

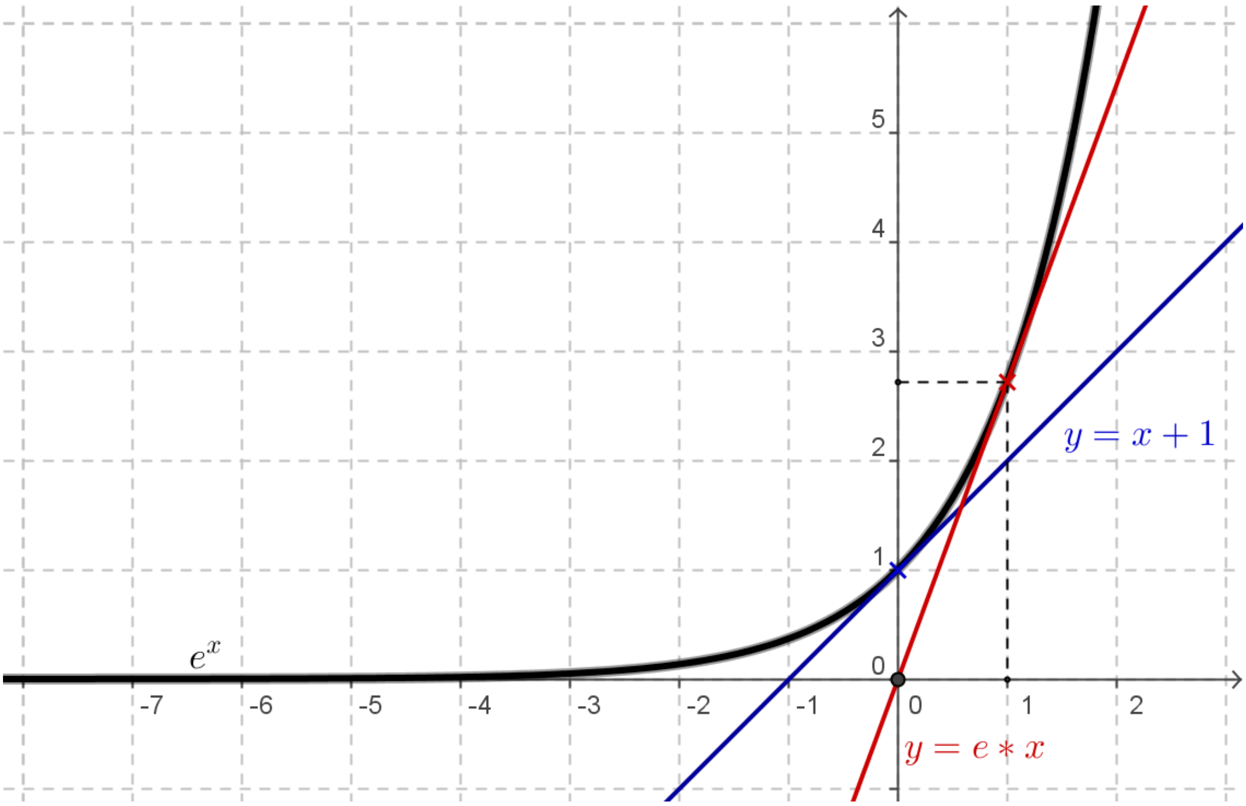
Propriété (admise) :
Pour tout réel a>0, l'équation $e^x = a$ a une **unique solution**. On la note $\ln a$.

Exemple :
$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

2) Représentation graphique



3) Étude au voisinage de 0

Propriété :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration :

La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ, donc en particulier en 0.

$$\exp'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} .$$

Or $\exp'(0) = \exp(0) = 1$, donc $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Remarque :

La courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente en $A(0;1)$:

$$y = x + 1$$

III. Fonction $x \longmapsto \exp(u(x))$

Propriété :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, de fonction dérivée u'.
La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Démonstration :
On a vu que la dérivée de la fonction $g \circ f$, lorsqu'elle existe, est la fonction $f' \times (g' \circ f)$

Exemple :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-kx}$ avec k nombre réel quelconque.
La fonction u définie par $u(x)=-kx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u'(x)=-k$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $f'(x)=-ke^{-kx}$.

Remarque :
Les fonctions e^u et u ont le même sens de variation : leurs fonctions dérivées $u'e^u$ et u' sont de même signe.

IV. Équation fonctionnelle

Propriété :
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x et y :
$f(x+y)=f(x)\times f(y)$ et $f(1)=\mathrm{e}$, alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x$.

Démonstration :
Soit y un réel.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x+y)$.

- La fonction $x \longmapsto x+y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction affine.
  f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ (par hypothèse) donc, par composition, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
  $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ g'(x)=1\times f'(x+y)=f'(x+y).$$
- D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x)=f(x)\times f(y)$ donc $g'(x)=f'(x)\times f(y)$.

Ainsi, on a $f'(x+y)=f'(x)\times f(y)$.
En particulier si $x=0$ cette relation donne $f'(y)=f'(0)\times f(y)$.
On pose $a=f'(0)$ donc la relation précédente devient $f'(y)=af(y)$.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=f(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
h est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$h'(x)=f'(x)\times\mathrm{e}^{-ax}+f(x)\times(-a)\mathrm{e}^{-ax}=(f'(x)-af(x))\mathrm{e}^{-ax}=0$ car $f'(x)=af(x)$.
Donc h est une fonction constante d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$h(x)=h(0) \Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{-ax}=f(0)\mathrm{e}^0$.

Calculons $f(0)$: on a $f(0+0)=f(0)\times f(0)$ soit $f(0)=f(0)^2$
donc $f(0)-f(0)^2=0$ d'où $f(0)(1-f(0))=0$
ainsi $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

Si $f(0)=0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+0)=f(x)\times f(0)$ donc $f(x)=0$.
Or $f(1)=\mathrm{e}$ donc l'hypothèse $f(0)=0$ est fausse et on en déduit que $f(0)=1$.
Ainsi $f(x)\mathrm{e}^{-ax}=1$ soit $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$ or $f(1)=\mathrm{e}$ donc $\mathrm{e}=\mathrm{e}^a$ ce qui prouve que $a=1$.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x$.

Annexe 1 : Équation différentielle

La mécanique, la dynamique, l'électricité, la biologie, la démographie, les probabilités … fourmillent de situations dont l'étude conduit à une **équation différentielle**, que l'on peut présenter sommairement comme une relation entre une fonction et ses dérivées successives, et qui est réalisée sur un intervalle.
Dans une équation différentielle, l'**inconnue est la fonction**.

Exemples :

- Si, dans une culture, le nombre de bactéries passe de 400 à 1000 en 3 heures, et si, à tout instant le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries présentes, le nombre de bactéries présentes après *t* heures est une fonction *f* de *t* qui vérifie :
  $$f'(t)=af(t) \text{ pour tout } t\geqslant 0 \ ; \ f(0)=400 \text{ et } f(3)=1000 .$$
  On note généralement $y=f$, et on dit que la fonction y vérifie l'équation différentielle $y'=ay$, avec $y(0)=400$ et $y(3)=1000$.
  Cette équation est dite du **premier ordre** (seule la dérivée première intervient), **linéaire**, à **coefficients constants**.
- En physique, le mouvement d'un oscillateur libre non amorti (élastique, électrique, …) est régi par une équation différentielle du **second ordre**, du type :
  $$y''=w^2 y \text{ où } w \text{ est la pulsation de l'oscillateur.}$$
  C'est le cas du ressort, du pendule (si on néglige l'amortissement), d'un circuit (*L*, *C*), ou des systèmes entretenus : mouvement des marées, montres, trampolines ,...

Une **fonction solution** sur un intervalle *I* de l'équation différentielle $y'=ay$ est une fonction f , dérivable sur *I* telle que $f'(x)=af(x)$ pour tout *x* de *I*. (Sans précision, on considère que $I=\mathbb{R}$).
Résoudre l'équation différentielle $y'=ay$, c'est trouver toutes les solutions.

Équation $y'=ay$

Propriété :
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ (a étant donné) sont les fonctions :
$$x\longmapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax} \text{ (C est une constante réelle quelconque)}$$

Démonstration :

- Posons $y(x)=\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$, alors $y'(x)=a\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$ et il est clair que la fonction y est solution.
- Soit, à présent une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y'=ay$.
  On considère la fonction auxiliaire $z : x\longmapsto \mathrm{e}^{-ax}y(x)$.
  z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
  $$z'(x)=-a\,\mathrm{e}^{-ax}y(x)+\mathrm{e}^{-ax}y'(x)$$
  Soit encore :
  $$z'(x)=\mathrm{e}^{-ax}[y'(x)-ay(x)]=0 \text{ , puisque } y'=ay$$
  Il en résulte que z est une fonction constante sur $\mathbb{R}$: il existe C tel que $z(x)=\mathrm{C}$.
  Comme $y(x)=\mathrm{e}^{ax}z(x)$, il en résulte sur $y(x)=\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$, d'où le résultat annoncé.

Propriété :

Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y'=ay$ vérifiant la **condition initiale** : $y(x_0)=y_0$ (où x_0 et y_0 sont des réels donnés).
Il s'agit de la fonction :

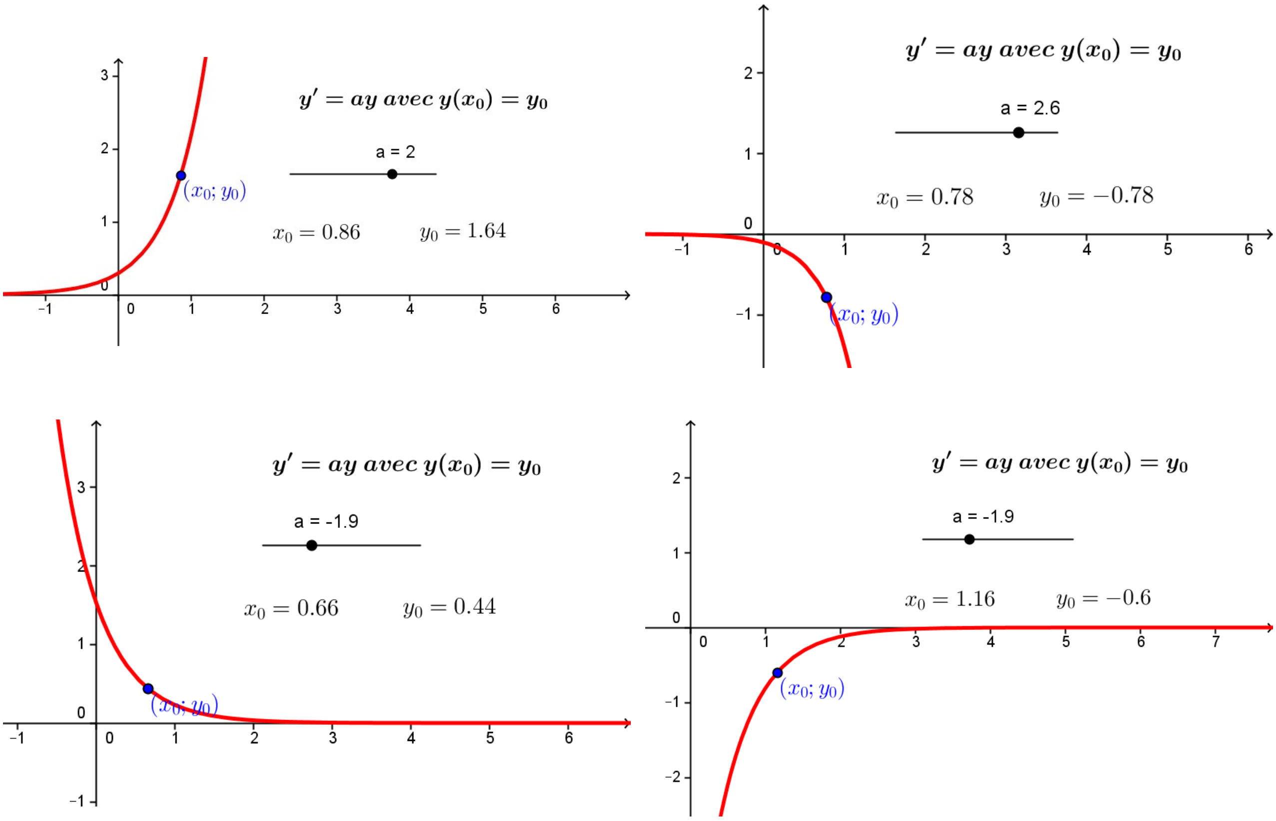
$$x \longmapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$$

Exemple :

En reprenant l'exemple de la culture bactérienne.
Le nombre de bactéries après *t* heures est du type $y(t)=C e^{at}$.
La condition initiale $y(0)=400$ permet le calcul de C : $C=400$.
L'autre condition, $y(3)=1000$, nous livre la valeur de *a* :
$400 e^{3a}=1000$, d'où $a=\frac{1}{3}\ln 2,5$. Ainsi :

$$y(t)=400 e^{\frac{t}{3}\ln 2,5}$$

Interprétation graphique :



Annexe 2 : Irrationalité de e

Définition :
Les deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Propriété :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes (où (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante).
Les deux suites sont convergentes et ont la même limite l.
De plus, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant l \leqslant v_n$$

Remarque :
Dans le cadre des séries entières, il est possible de définir, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction suivante :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Cette fonction est dérivable et on a donc $f'(x)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right)'$ soit (au moins pour cette fonction) :

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)'=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)'=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\,x^{k-1}}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^j}{j!}=f(x)$$

Ainsi la fonction définie ci-dessus vérifie $f'(x)=f(x)$ et également $f(0)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{0^k}{k!}=1$.

C'est ainsi que l'on obtient $\exp(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$.

On s'intéresse ici, en particulier à $\exp(1)=e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$

Approximation de e

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n=u_n+\frac{1}{n\times n!}\ .$$

On démontre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et leur limite est donc e .

```
PROGRAM:EXP
:Prompt E
:2→U
:1→N
:While 1/(N*N!)≥
E
:N+1→N
:U+1/N!→U
:End
:Disp U
```

```
prgmEXP
E=?0.001
     2.718055556
            Done
```

```
prgmEXP
E=?10^(-8)
     2.718281826
            Done
```

```
prgmEXP
E=?10^(-10)
     2.718281828
            Done
e
     2.718281828
```

L'étude de ses suites et leurs convergences vers e permet également de démontrer que le nombre e est **irrationnel**.

Démonstration :

On suppose que $e=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

Comme $u_n< e <v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$(car (u_n) et (v_n) sont strictement monotones), on a, en particulier : $u_q< e <v_q=u_q+\frac{1}{q\times q!}$.

On a donc $u_q<\frac{p}{q}<u_q+\frac{1}{q\times q!}$ et ainsi $u_q\times q\times q!<p\times q!<u_q\times q\times q!+1$.

Or $u_q=\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}$ donc $u_q\times q\times q!$ est un entier car somme d'entiers puisque $k!$ divise $q\times q!$ pour tout $k\in\{0;1;2\ ;...;q\}$.

Donc il existe $m\in\mathbb{N}$, tel que $u_q\times q\times q!=m$, d'où $m<p\times q!<m+1$ ce qui revient à dire que $p\times q!$ n'est pas entier, ce qui est absurde.

Conclusion : en ne peut pas trouver d'entiers p et q tel que $e=\frac{p}{q}$. e est donc irrationnel.

Annexe 3 : Datation au carbone 14

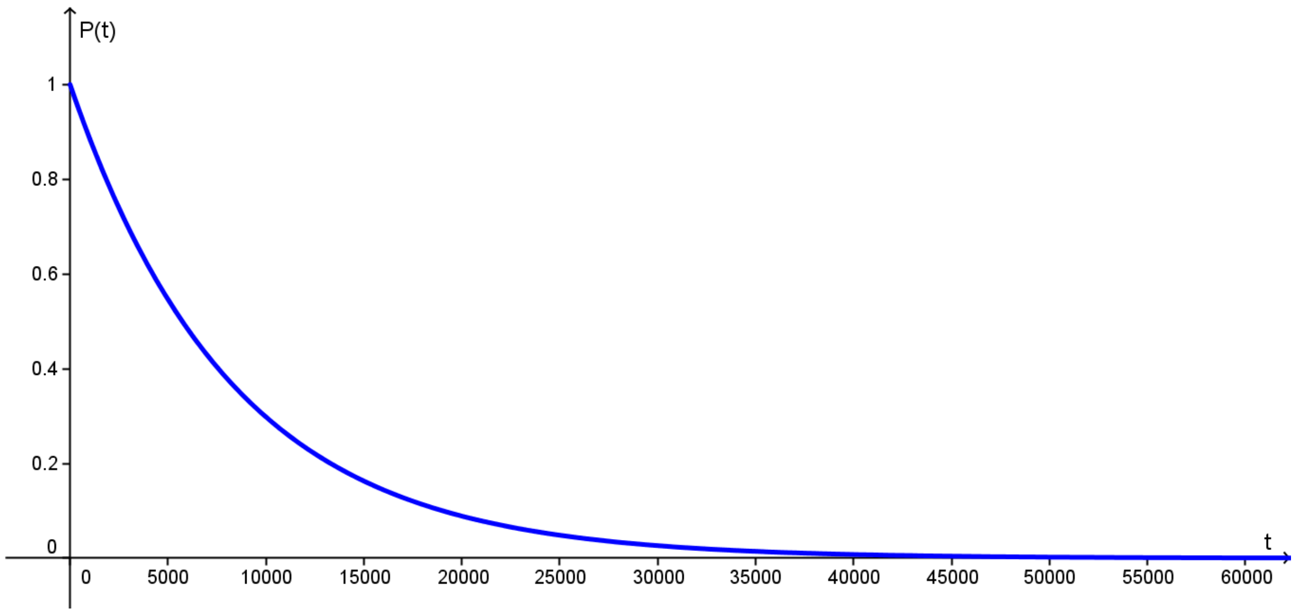
Le carbone 14 (noté ^{14}C) est un isotope radioactif du carbone présent dans la matière organique, par exemple dans les os des organismes vivants. La proportion de ^{14}C par rapport au carbone total contenu dans la matière organique peut-être assimilée à une constante de l'ordre de 10^{-12}.

Lorsqu'un organisme meurt, les échanges avec l'extérieur cessent, et la proportion $\frac{^{14}C}{C_{total}}$ diminue selon la formule :

$$P(t)=e^{-\lambda t}$$

avec :

- t, le temps écoulé depuis la mort de l'organisme (en années)
- $P(t)$, la proportion de ^{14}C présente après un temps t
- λ, une constante qui dépend de la nature de l'élément radioactif.
  Pour le ^{14}C, $\lambda=0{,}000121\,\textit{années}^{-1}$



Par exemple, dans un os datant du Gravettien (entre -29000 et -22000 avant J.C.), on a :
$22000\leqslant t\leqslant 29000 \iff 0{,}03\leqslant e^{-0{,}000121t}\leqslant 0{,}07$ donc $0{,}03\leqslant P(t)\leqslant 0{,}07$.

Remarques :

- La proportion de ^{14}C est difficile à établir lorsqu'elle est inférieure à 1,5 %.
  On cherche donc T, tel que :
  $P(T)\geqslant 0{,}015 \iff e^{-0{,}000121T}\geqslant 0{,}015 \iff -0{,}000121T\geqslant \ln 0{,}015 \iff T\leqslant\frac{\ln 0{,}015}{-0{,}000121}$ avec $T\simeq 34708$.
  Donc la plage de datation optimale pour la méthode du ^{14}C est entre 0 et 34700 ans.
- Depuis la révolution industrielle, la quantité de rejets de ^{12}C dans l'atmosphère a augmenté, et la proportion $\frac{^{14}C}{C_{total}}$ n'est plus parfaitement constante. C'est pourquoi il existe désormais des tables pour déterminer l'âge réel à partir de l'âge théorique calculé.