Urnes d'Ehrenfest

Exemple pour $N = 4$ boules.

X_n est la <u>variable aléatoire</u> discrète égale au nombre de boules dans l'urne A à l'étape n

$X_n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

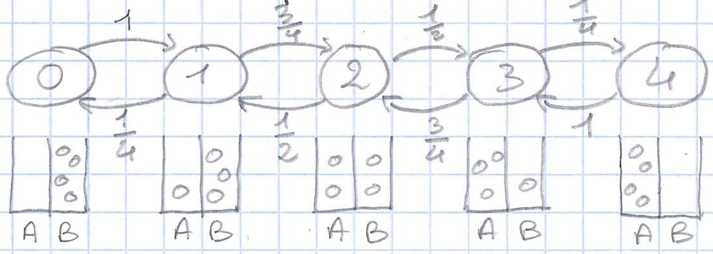
Etape n	$p(X_n=0)$	$p(X_n=1)$	$p(X_n=2)$	$p(X_n=3)$	$p(X_n=4)$	$L_n = (p(X_n=0) \dots p(X_n=4))$
0	$p(X_0=0)=1$	0	0	0	0	$L_0 = (1\,0\,0\,0\,0)$
1	0	$p(X_1=1)=1$	0	0	0	$L_1 = (0\,1\,0\,0\,0)$
2	$p(X_2=0)=\frac{1}{4}$	0	$p(X_2=2)=\frac{3}{4}$	0	0	$L_2 = \left(\frac{1}{4}\;0\;\frac{3}{4}\;0\;0\right)$
3	0	$p(X_3=1)=\frac{5}{8}$	0	$p(X_3=3)=\frac{3}{8}$	0	$L_3 = \left(0\;\frac{5}{8}\;0\;\frac{3}{8}\;0\right)$
4	$p(X_4=0)=\frac{5}{32}$	0	$p(X_4=2)=\frac{24}{32}$	0	$p(X_4=4)=\frac{3}{32}$	$L_4 = \left(\frac{5}{32}\;0\;\frac{24}{32}\;0\;\frac{3}{32}\right)$

<u>Remarque</u>: $p(X_4=2) = p((X_4=2)\cap(X_3=1)) + p((X_4=2)\cap(X_3=3))$

$= P_{(X_3=1)}(X_4=2) \times p(X_3=1) + P_{(X_3=3)}(X_4=2) \times p(X_3=3)$

$= \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{24}{32}$

<u>Expérience aléatoire</u> : on considère 2 urnes A et B et N boules numérotées de 1 à N on tire au hasard, de façon équiprobable un nombre entre 1 et N et on change d'urne la boule correspondante



Soit M la matrice de transition

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ donc $L_{n+1} = L_n \times M$

soit $L_n = L_0 \times M^n$

<u>Convergence</u>

* Si n est pair :

$L_n \xrightarrow[+\infty]{} \left(\frac{1}{8}\;0\;\frac{6}{8}\;0\;\frac{1}{8}\right)$ et $M^n \xrightarrow[+\infty]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{6}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{6}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{6}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

* Si n est impair

$L_n \xrightarrow[+\infty]{} \left(0\;\frac{1}{2}\;0\;\frac{1}{2}\;0\right)$ et $M^n \xrightarrow[+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{6}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{6}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Il n'y a donc pas convergence

<u>Remarque</u> : Il existe L tel que $L \times M = L$

$L = \left(\frac{1}{16}\;\frac{4}{16}\;\frac{6}{16}\;\frac{4}{16}\;\frac{1}{16}\right) = \left(\frac{\binom{4}{0}}{2^4}\;\frac{\binom{4}{1}}{2^4}\;\frac{\binom{4}{2}}{2^4}\;\frac{\binom{4}{3}}{2^4}\;\frac{\binom{4}{4}}{2^4}\right)$

mais L_n ne converge pas vers L