Chapitre 2

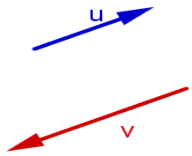
Géométrie plane

I. Colinéarité de deux vecteurs

1) Vecteurs colinéaires

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un réel non nul.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists\, k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

k est le **coefficient de colinéarité**

Remarques :

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils ont même direction.
- Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

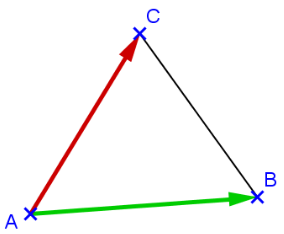
2) Décomposition de vecteurs

Définition :

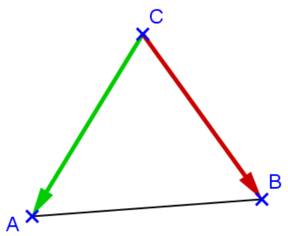
On appelle **base** du plan vectoriel tout couple de deux vecteurs **non colinéaires**.
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une base notée $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemple :

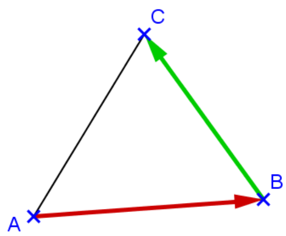
Les côtés d'un triangle ABC quelconque, non aplati, permettent de former des bases.



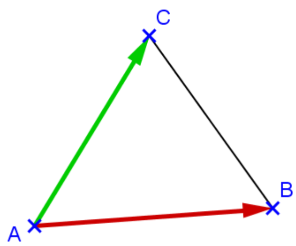
base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$



base $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$



base $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB})$



base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

Remarques :

- Soit A, B, C trois points non alignés du plan.
  On dit que $(A\,;\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
- $M(x\,;y)$ dans le repère $(A\,;\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ signifie que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.
- $M(x\,;y)$ dans le repère $(O\,;\, I, J)$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}$.

Théorème :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires** du plan.

Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un couple unique de réel $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tels que :

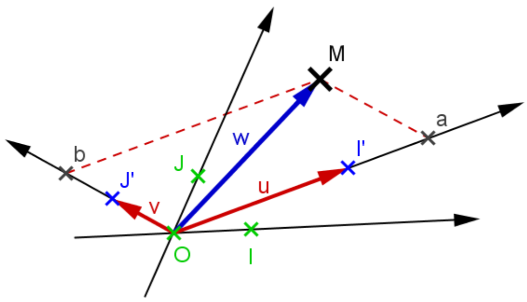
$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Le couple $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé couple des coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Démonstration :

- *Existence :*

Dans un repère $(O; I, J)$ du plan, soit les points I', J' et M tels que :
$\vec{u} = \overrightarrow{OI'}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OJ'}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$.
Les points O, I' et J' ne sont pas alignés, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Ainsi $(O; I', J')$ est un repère du plan.
Notons $(a; b)$ les coordonnées de M dans ce repère.
On a alors : $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OI'} + b\overrightarrow{OJ'}$.



- *Unicité :*

On suppose qu'il existe deux couples $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ tel que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$.

Alors $(a - a')\vec{u} = (b' - b)\vec{v}$.

Si $a - a' \neq 0$, on obtient : $\vec{u} = \dfrac{b' - b}{a - a'}\vec{v}$. C'est impossible, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On a donc : $a - a' = 0$, d'où $a = a'$.
Le même raisonnement conduit à l'égalité $b = b'$.

Par conséquent, on a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

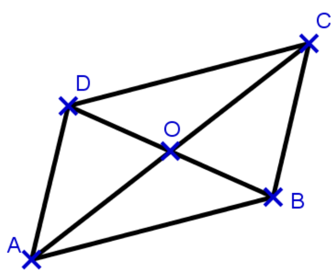
Remarque :

$\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ signifie que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base $(\vec{u}, \vec{v})$, tandis que les coordonnées d'un point dépendent du repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Exemple :
Soit ABCD le parallélogramme de centre O.
On veut exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AD}$.
On a : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AD}$.

Donc, **dans la base** $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD})$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



3) Caractérisation analytique de la colinéarité

Propriété :

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $xy'-x'y=0$.

Démonstration :

- Énoncé direct : *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $xy'-x'y=0$.*
  - Si l'un des vecteurs est nul alors la relation est immédiate.
  - Si les deux vecteurs sont non nuls :

    $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ⇒ $\vec{u}=k\vec{v}$ (avec $k\neq 0$) ⇒ $\begin{cases} x=kx' \\ y=ky' \end{cases}$ (avec $k\neq 0$).

    ⇒ $x\,y'-x'\,y=kx'\,y'-x'\,ky'=kx'\,y'-kx'\,y'=0$
- Réciproque : *si $xy'-x'y=0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires*
  - 1^er^ cas : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - 2^ème^ cas : l'un au moins des couples $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est non nul.

    On suppose $\vec{u}$ non nul et, en particulier, $x\neq 0$. On peut alors définir le réel $k=\dfrac{x'}{x}$.
    - 1^er^ cas : $k=0$ alors $x'=0$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ils ont même direction).
    - 2^ème^ cas : $k\neq 0$ et $xy'-x'y=0 \Rightarrow y'=\dfrac{x'}{x}y=k\,y$ (avec $k\neq 0$)⇒ $\begin{cases} y'=ky \\ x'=kx \end{cases}$ (avec $k\neq 0$)

    ⇒ $\vec{v}=k\vec{u}$ (avec $k\neq 0$) donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car $2\times(-2)-1\times 4\neq 0$

$\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires car $2\times\frac{3}{4}-1\times\frac{3}{2}=0$. Plus précisément on a : $\vec{w}=\frac{3}{4}\vec{u}$.

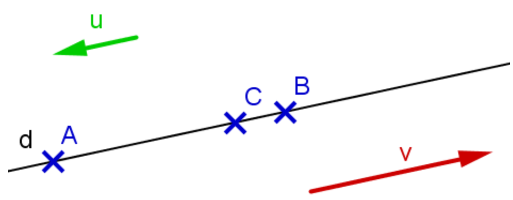
II. Caractérisation analytique d'une droite

1) Vecteur directeur d'une droite

Définition :
Soit d une droite du plan.
On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite d.

Remarques :

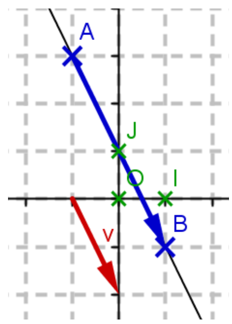
- Le choix de deux points distincts quelconques de d définit un vecteur directeur de d.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d alors tout vecteur (non nul) colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d.



$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de d.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de d.

- Le parallélisme de deux droites d et d' se traduit par le fait que tout vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre.

Exemple :
La droite d : $y=-2x+1$ passe par les points $A(-1;3)$ et $B(1;-1)$.
d admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ ou $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.



2) Équations cartésiennes d'une droite

Théorème :
Toute droite d du plan admet une équation de la forme :

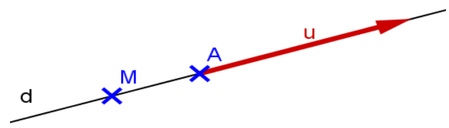
$$ax+by+c=0$$

où a, b et c sont des réels avec $(a;b)\neq(0;0)$.
Cette équation est une **équation cartésienne** de la droite d.

Démonstration :

Soit une droite d passant par un point $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur (non nul) $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

Pour tout point $M(x;y)$ du plan,
$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires.



$\Leftrightarrow \beta\times(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0 \Leftrightarrow \beta x-\alpha y+(-\beta x_A+\alpha y_A)=0$ et $(\beta;-\alpha)\neq(0;0)$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$.

Exemple :

Soit *d* la droite passant par $A(-2;3)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

$M(x;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow 5(x+2)-2(y-3)=0$

$\Leftrightarrow 5x-2y+16=0$

d admet pour équation cartésienne : $5x-2y+16=0$

Remarque :

Une droite *d* admet une infinité d'équations cartésiennes.

En effet, si $ax+by+c=0$ est une équation de *d*, alors pour tout réel *k* non nul, $kax+kby+kc=0$ est également une équation de *d*.

Propriété :

L'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation $ax+by+c=0$, avec $(a;b)\neq(0;0)$, est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Démonstration :

Soit $\mathscr{P}$ le plan muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et Γ l'ensemble des points $M(x;y)$ tel que $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$.

$(a;b)\neq(0;0)$ donc on peut supposer $a\neq0$.

$M\in\Gamma \Leftrightarrow ax+by+c=0 \Leftrightarrow ax-(-by)+a\left(\frac{c}{a}\right)=0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{c}{a}\right)-(-by)=0$

Considérons le point $A\left(-\frac{c}{a};0\right)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+\frac{c}{a}\\y\end{pmatrix}$ et on a donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ qui sont colinéaires.

Γ est donc la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exemple :

La droite *d* d'équation $3x+4y-10=0$ admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

Propriété :

Les droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

Démonstration :

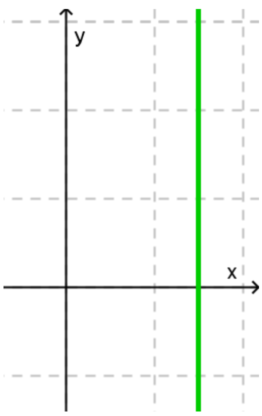
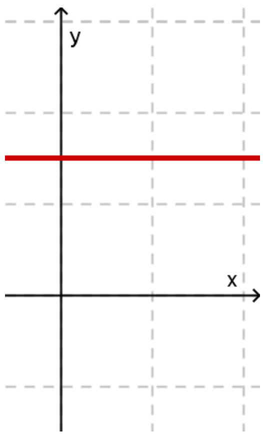
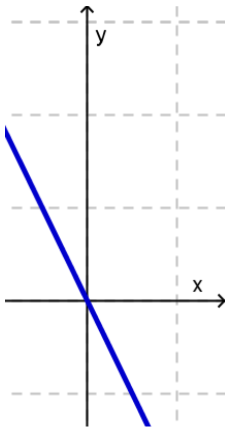
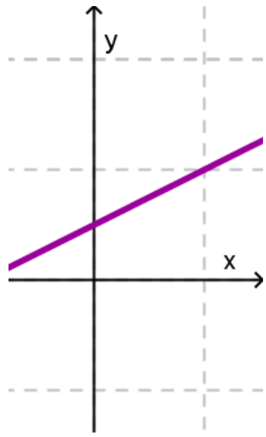
Soit *d* la droite d'équation $ax+by+c=0$ et *d'* la droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$.

Un vecteur directeur de *d* est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de *d'* est $\vec{u}'\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$.

d et *d'* sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow -ba'-a(-b')=0 \Leftrightarrow ab'-a'b=0$

Exemple :
Soit les droites $d:2x-y+3=0$; $d':-4x+2y+1=0$ et $d'':2x+3y+2=0$.
d et d' sont parallèles car $2\times2-(-4)\times(-1)=0$ ($\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ sont proportionnels).
d et d'' ne sont pas parallèles car $2\times3-2\times(-1)\neq0$.

3) Équations cartésiennes et équations réduites

<table>
<tr><th></th><th>Cas où
$b=0$ et $a\neq0$</th><th>Cas où
$a=0$ et $b\neq0$</th><th>Cas où
$a\neq0$; $b\neq0$; $c=0$</th><th>Cas où
$a\neq0$; $b\neq0$; $c\neq0$</th></tr>
<tr><td>Équation cartésienne</td><td>$ax+0+c=0$
donc $x=\frac{-c}{a}$</td><td>$0+by+c\neq0$
donc $y=\frac{-c}{b}$</td><td>$ax+by+0=0$
donc $y=\frac{-a}{b}x$</td><td>$ax+by+c=0$
donc
$y=\frac{-a}{b}x+\frac{-c}{b}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Équation réduite</td><td rowspan="2">$x=constante$</td><td rowspan="2">$y=constante$</td><td>$y=mx$</td><td>$y=mx+p$</td></tr>
<tr><td colspan="2">m est le coefficient directeur
p est l'ordonnée à l'origine</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Représentation graphique</td><td rowspan="2"></td><td colspan="3">Représentation graphique d'une fonction affine</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Remarque :
Si d a pour équation réduite $y=mx+p$, une équation cartésienne de d est $mx-1y+p=0$.
Un vecteur directeur de d est alors $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$, m est ainsi le coefficient directeur.