Chapitre 5

Les suites

I. Suites numériques

1) Définition

Définition :

Une **suite numérique** est fonction u définie sur ℕ par : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n)$

pour tout entier naturel n, $u(n)$, noté aussi u_n, est le **terme** de **rang** n de la suite.

On note (u_n) l'ensemble des termes de la suite pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemples :

- Le tableau ci-dessous donne le nombre de bacheliers en France de 2000 à 2009.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Nombre de bacheliers	516550	499228	493755	502671	498372	506608	524057	521353	512815	530218

La suite (u_n) du nombre de bacheliers peut être définie en choisissant comme rang n le nombre d'années écoulées depuis l'an 2000.

On a alors : $u_0 = 516550$ le nombre de bacheliers de l'année 2000 ;

$u_5 = 506608$ le nombre de bacheliers de l'année 2005.

502671 est le terme de rang 3 de la suite (u_n).

- Soit (v_n) la suite des multiples de 7 avec $u_0 = 0$. On a alors $u_1 = 7$, $u_2 = 14$,…, $u_9 = 63$ …

Remarques :

- Le terme de rang n d'une suite u peut être noté $u(n)$ ou u_n.
- Certaines suites peuvent être définies seulement à partir d'un rang n_0 autre que 0.

  Par exemple, pour des questions pratiques, on aurait pu définir la suite de l'exemple précédent à partir du rang 2000, avec $u_{2000} = 516550$.

  Dans d'autres situations, la définition de la suite interdit l'existence de certains termes. Par exemple la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{1}{n}$ ne peut être définie que pour $n \geqslant 1$.

2) Mode de génération d'une suite

Définition :

Une suite peut être définie :

- au moyen d'une **fonction** *f* de la variable n : $u_n = f(n)$.
- au moyen d'une **relation de récurrence** : (u_n) est alors définie par son **premier terme** et une **relation de récurrence** permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.
- par un autre moyen, par exemple par un **algorithme**, par un **motif géométrique**, par certaines propriétés (la suite des décimales de π), ...

Suite explicite

Définition :

Soit a un réel f une fonction définie sur $[a;+\infty[$.

On peut définir une suite, par une **formule explicite**, (u_n) en posant pour tout entier $n \geqslant a$:

$$u_n = f(n).$$

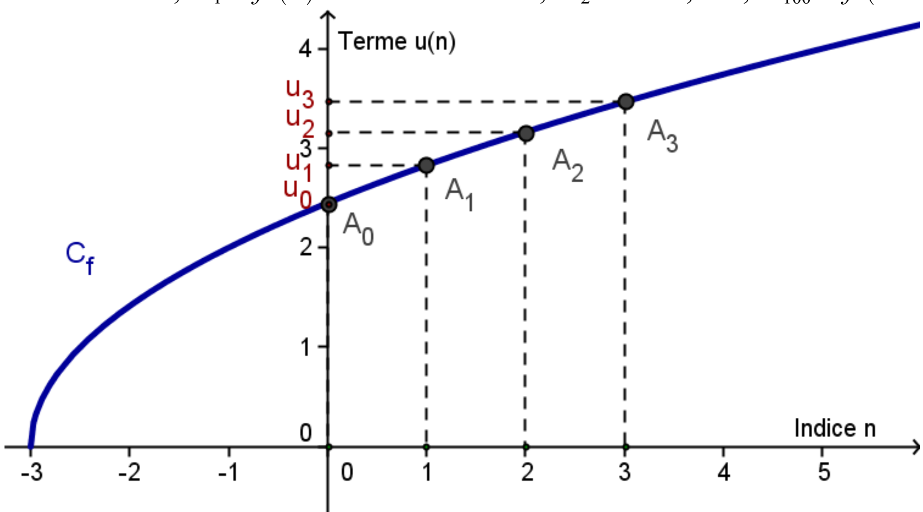
Exemple :

Soit la suite *u* définie sur ℕ par : $u_n = \sqrt{2n+6}$.

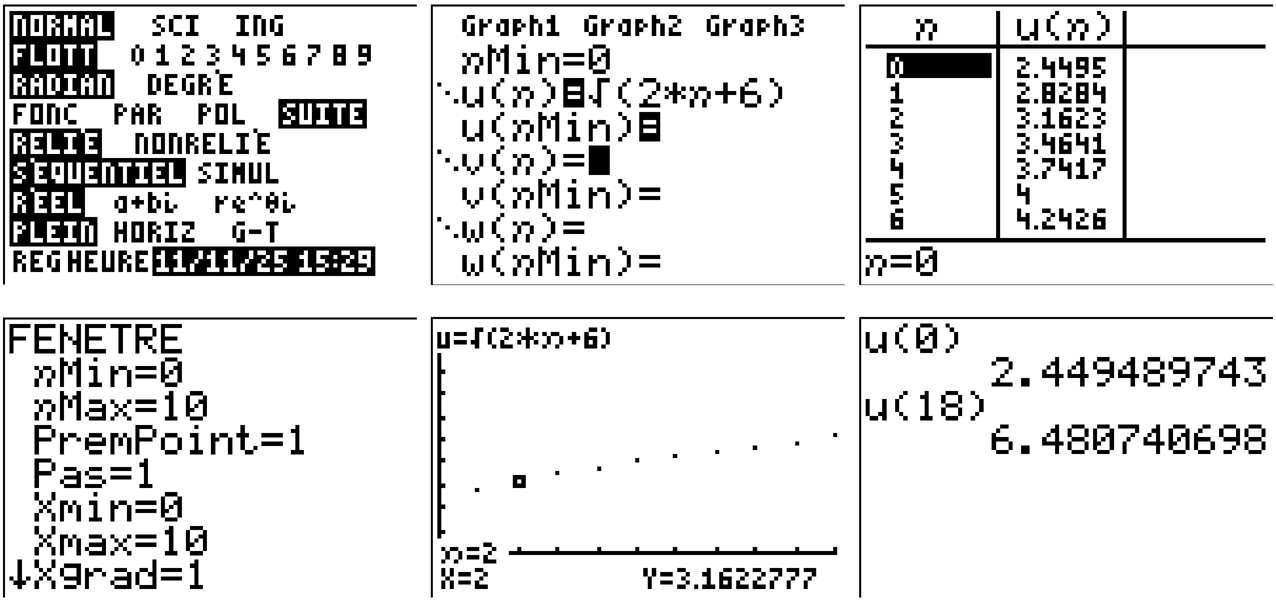
Ainsi pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = f(n)$ où f est définie sur $[-3;+\infty[$ par :

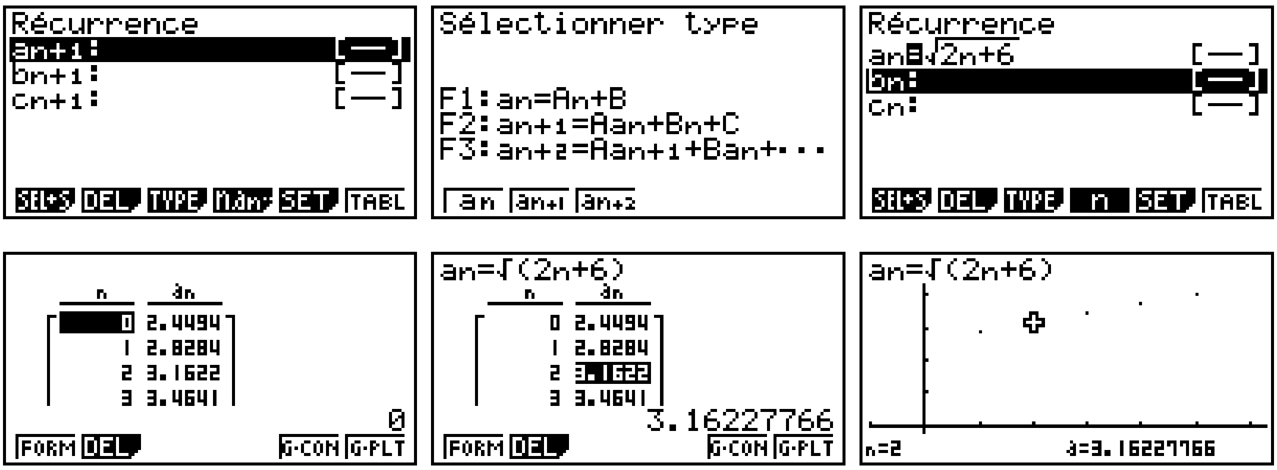
$$f(x) = \sqrt{2x+6}$$

$u_0 = f(0) = \sqrt{2\times 0+6} = \sqrt{6}$; $u_1 = f(1) = \sqrt{2\times 1+6} = \sqrt{8}$; $u_2 = \sqrt{10}$; … ; $u_{100} = f(100) = \sqrt{206}$



Graphiquement les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n;u_n)$ d'abscisses entières de la courbe $\mathscr{C}_f$.





Remarque :

On peut calculer **directement** chaque terme à partir de son rang (ou indice).

Suite récurrente

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble I.

On suppose que, si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.

Soit a un nombre réel de I et p un entier.

On peut définir une suite, **par récurrence**, (u_n) en posant :

$$\begin{cases} u_p = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier } n \geqslant p \end{cases}$$

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=-1$ et $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+6}$.

Ainsi, pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est définie sur $[-3;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{2x+6}$$

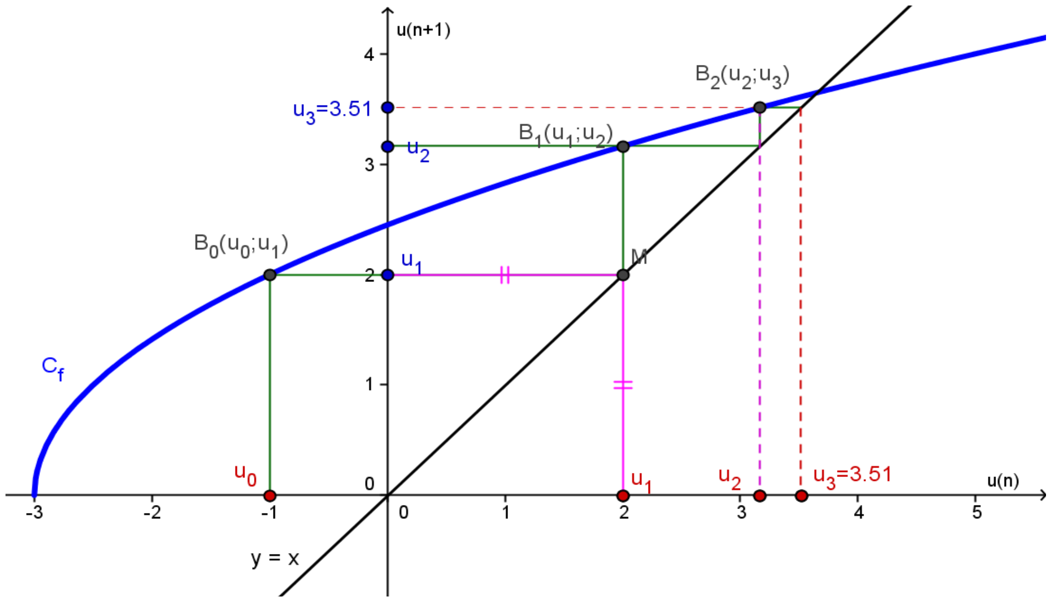
$u_0=-1$; $u_1=f(u_0)=\sqrt{2u_0+6}=\sqrt{2\times(-1)+6}=2$; $u_2=f(u_1)=\sqrt{2u_1+6}=\sqrt{2\times 2+6}=\sqrt{10}$; …

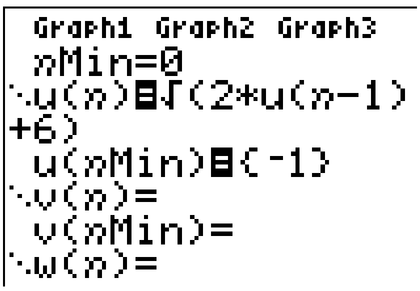
Graphiquement, $B_0(u_0;u_1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

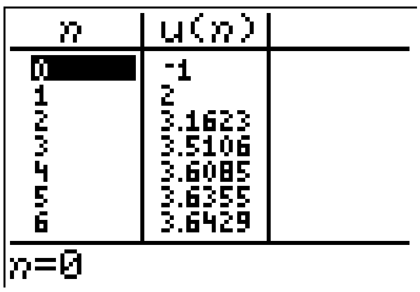
Pour déterminer $B_1(u_1;u_2)$, il faut placer u_1 , l'ordonnée de B_0 , en abscisse.

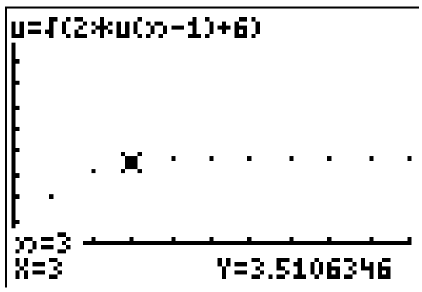
On « reporte » donc u_1 sur l'axe (Ox) en utilisant la droite $\Delta : y=x$.

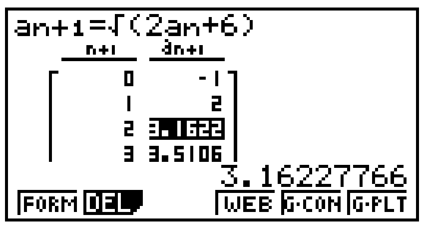
On poursuit de même pour construire $B_2(u_2;u_3)$, $B_3(u_3;u_4)$, …











Remarques :

- Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut pas calculer directement un terme à partir de son rang ; il faut procéder de « proche en proche » : pour calculer le dixième terme, on utilise la valeur du neuvième, obtenue elle-même grâce au huitième terme, …
- Le « **principe de récurrence** » est une propriété fondamentale dans la construction des nombres.

  On peut le résumer ainsi : « En partant de 0, et en ajoutant 1 à chaque étape, on construit l'ensemble des entiers naturels ».

Définition :

Soit p un entier, et (u_n) et (v_n) deux suites définies à partir du rang p.

Les suites (u_n) et (v_n) sont **égales** si pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n = v_n$.

Remarque :

Si les suites (u_n) et (v_n) ont le **même premier terme** et vérifient la **même relation de récurrence** alors elles sont **égales**.

3) Sens de variation d'une suite

Définitions :

Soit une suite (u_n) et un entier p.

- La suite numérique (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$:

$$u_{n+1} \geqslant u_n .$$

- La suite numérique (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$:

$$u_{n+1} \leqslant u_n .$$

- La suite numérique (u_n) est **constante** (ou **stationnaire**) à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$:

$$u_{n+1} = u_n .$$

Remarques :

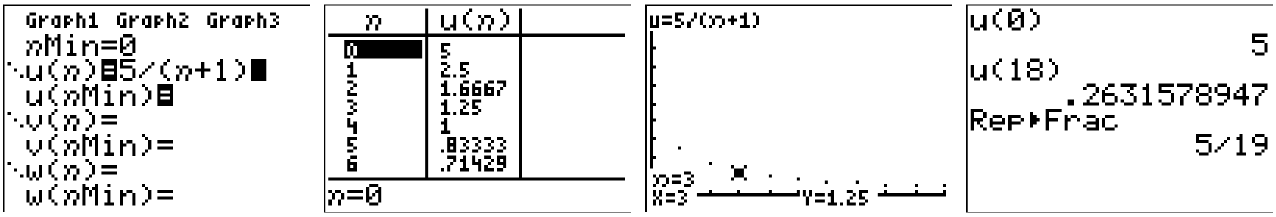
- La suite numérique (u_n) est monotone à partir du rang p si elle est soit croissante à partir du rang p, soit décroissante à partir du rang p.
- Lorsqu'on ne précise pas « à partir du rang p », cela signifie que la suite est croissante, décroissante, monotone, constante à partir de son premier terme.

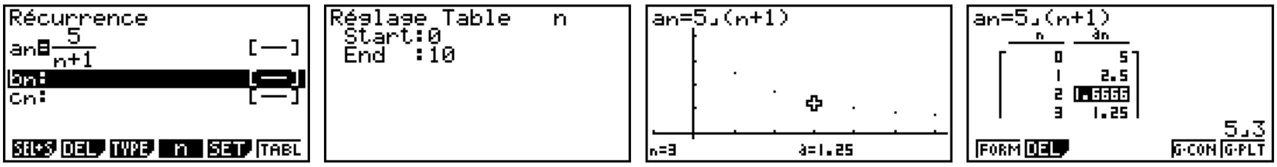
Exemples :

- La suite (u_n) de terme général $u_n=\dfrac{5}{n+1}$ est strictement décroissante.

  En effet, pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5}{(n+1)+1}-\dfrac{5}{n+1}=\dfrac{-5}{(n+1)(n+2)}$.

  Donc pour tout entier *n*, $u_{n+1}-u_n<0$, c'est-à-dire $u_{n+1}<u_n$.





- La suite (v_n) de terme général $v_n=5\times(-0{,}8)^n$ n'est pas monotone.

  En effet, chaque terme d'indice pair, qui est positif, est supérieur au terme précédent d'indice impair, qui est négatif, et supérieur au terme suivant également négatif.

- La suite *w* définie sur ℕ par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{1}{w_n} + 1 \end{cases}$ n'est pas monotone.

  En effet $w_0=1$, $w_1=\dfrac{1}{1}+1=2$ donc $w_0<w_1$. Et $w_2=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$, donc $w_1>w_2$.

Propriétés :

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a\,;+\infty[$.

Soit un entier $p\geqslant a$ et la suite *u* définie pour tout entier $n\geqslant p$ par $u_n=f(n)$.

- Si la **fonction** f est (strictement) **croissante** sur $[p\,;+\infty[$, alors la **suite** (u_n) est (strictement) **croissante** à partir du rang *p*.
- Si la **fonction** f est (strictement) **décroissante** sur $[p\,;+\infty[$, alors la **suite** (u_n) est (strictement) **décroissante** à partir du rang *p*.

Démonstration :

- Supposons f croissante sur l'intervalle $[k\,;+\infty[$.

  Alors pour tout réels *a* et *b* de l'intervalle $[k\,;+\infty[$, si $a<b$ alors $f(a)<f(b)$.

  Pour tout entier $n\geqslant k$, comme $n<n+1$, on aura $f(n)<f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n\leqslant u_{n+1}$.
  On en déduit que (u_n) est croissante pour $n\geqslant k$.

- On démontre de même que (u_n) est décroissante pour $n \geqslant k$ lorsque f est décroissante sur l'intervalle $[k ; +\infty[$.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{5}{x+1}$.

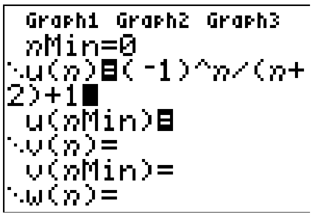
Or f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ donc la suite (u_n) est décroissante.

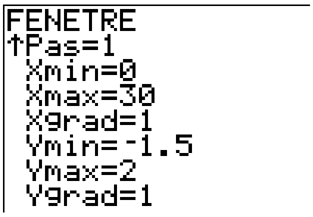
4) Comportement d'une suite à l'infini

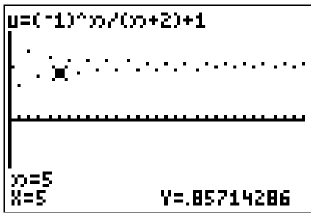
Soit les suites *u*, *v*, *w* et *t* définies sur $\mathbb{N}$ par :

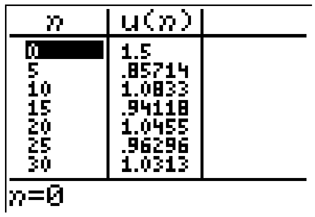
$u_n = n^2$; $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2} + 1$; $w_n = -2n^2 + 2$; $t_n = \cos n + 1$

- (v_n) peut être rendu aussi proche de 1 qu'on veut si *n* est choisi suffisamment grand.









Pour tout entier $n > 98$, on a $|v_n - 1| < 0{,}01$; pour tout $n > 10^6 - 2$, $|v_n - 1| < 10^{-6}$.

Plus généralement, pour tout écart $e > 0$, dès que $n > \dfrac{1}{e} - 2$, on a : $|v_n - 1| < e$, c'est-à-dire que la distance entre v_n et 1 est inférieure à e.

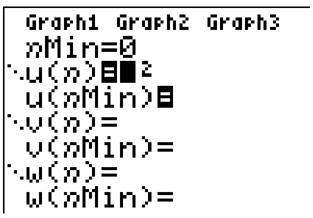
On dit que (v_n) **converge** vers 1 et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

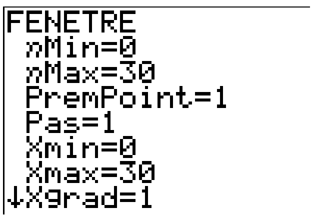
Définition :

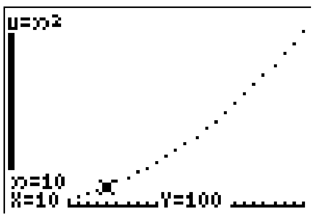
On dit qu'une suite numérique (u_n) admet une limite réelle ℓ si tous les termes de la suite (u_n) sont proches de ℓ à partir d'un certain rang.

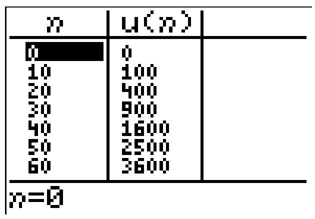
On dit alors que la suite est **convergente** vers ℓ.

- (u_n) peut être rendu aussi grand qu'on veut si *n* est choisi suffisamment grand.









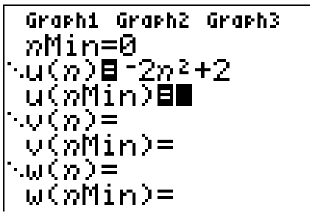
Pour tout entier $n \geqslant 1000$, on a $u_n > 10^6$; pour tout entier $n \geqslant 10^6$, $u_n \geqslant 10^{12}$.

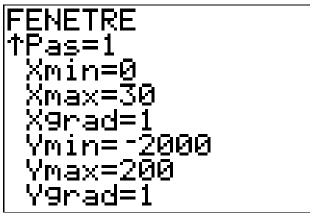
Plus généralement, pour tout réel $M \geqslant 0$, dès que $n \geqslant \sqrt{M}$, on a $u_n \geqslant M$.

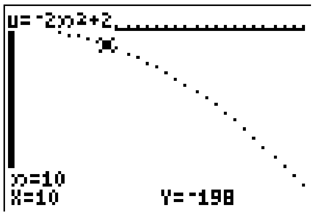
On dit que (u_n) **diverge vers** **+∞** ou qu'elle admet **+∞** comme limite et on note :

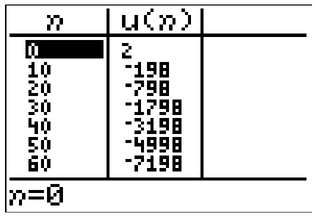
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty .$$

- (w_n) est négatif et peut être rendu aussi grand qu'on veut en valeur absolue si *n* est choisi suffisamment grand.









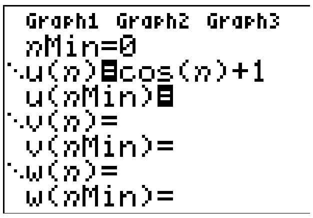
Pour tout entier $n \geqslant 108$, on a $w_n \leqslant -10^6$; pour tout entier $n \geqslant 707107$, $w_n \leqslant -10^{12}$.

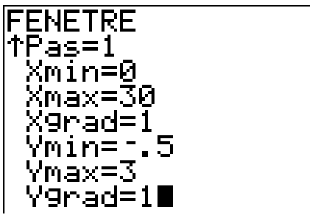
Plus généralement, pour tout réel $M \geqslant 0$, dès que $n \geqslant \sqrt{\frac{M}{2}+1}$, on a $w_n \leqslant -M$.

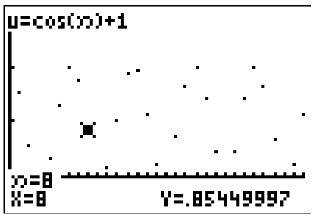
On dit que (w_n) diverge vers -∞ ou qu'elle admet -∞ comme limite et on note :

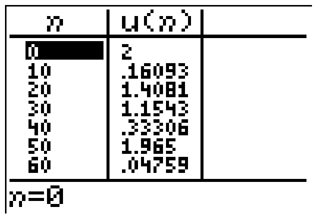
$$\lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty .$$

- (t_n) ne se stabilise autour d'aucune valeur réelle : on dit que (t_n) diverge et n'admet pas de limite.









Définition :

On dit qu'une suite numérique (u_n) est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque :

Les suites étant définies sur des entiers positifs, on s'intéresse exclusivement à leur **comportement en** +∞.

II. Suites arithmétiques

1) Généralités

Définition :

Une suite numérique (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre *r*, appelé **raison** de la suite, tel que pour tout nombre entier naturel *n*, on ait :

$$u_{n+1}=u_n+r$$

Exemple :

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison -5.

Remarque :

Une suite (u_n) est **arithmétique** si, et seulement si, la **variation absolue** entre deux termes consécutifs $u_{n+1}-u_n$ est **constante.**

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison *r*.

Pour tout entier naturel *n*, on a $u_n=u_0+nr$.

Démonstration :

Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant donc la relation $u_{n+1}=u_n+r$.

Calculons quelques termes de cette suite :

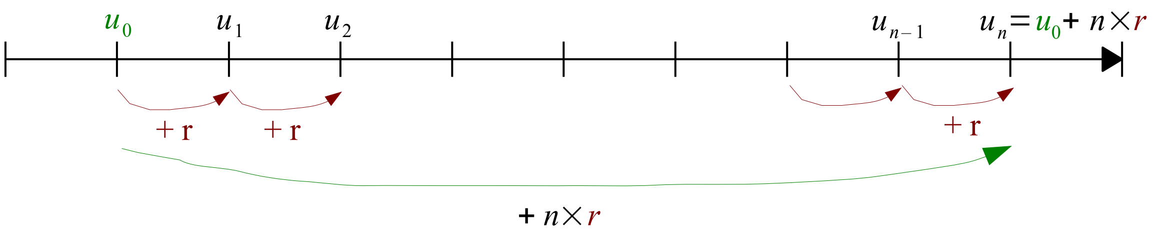
$u_0=u_0$; $u_1=u_0+r$; $u_2=u_1+r=(u_0+r)+r=u_0+2r$; …

En répétant *n* fois le procédé , on obtient :

$$u_n=u_{n-1}+r=(u_0+(n-1)r)+r=u_0+nr$$

Remarque :

Terme général en fonction de *n* : $u_n=u_0+n\times r$ *(formule explicite)*



Exemple :

Soit la suite arithmétique (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$.

Son premier terme est $u_0=3$ et sa raison est -5.

On a, pour tout entier naturel *n*, $u_n=u_0+nr=3+n\times(-5)=3-5n$.

Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le 8e terme : $u_7=3+7\times(-5)=-32$.

Remarque :

Pour une suite arithmétique (u_n) de raison *r* si *n* et *p* sont deux entiers naturels, on peut toujours déterminer l'un des termes u_n ou u_p en fonction de l'autre par la relation :

$$u_n=u_p+(n-p)r$$

Cette relation est utile lorsqu'une suite arithmétique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on cherche sa raison connaissant deux termes.

Exemple :

On s'intéresse à la suite (u_n) des nombres impairs et on définit u_n comme le $n^{\text{ième}}$ nombre impair.

On a donc $u_1=1$ et $r=2$.

Le terme général de la suite est donnée par $u_n=u_1+(n-1)r=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

On peut ainsi, par exemple, calculer le 100e nombre impair : $u_{100}=2\times 100-1=199$.

2) Variations

Propriétés :

(u_n) est une suite arithmétique de raison *r*.

- Si $r>0$, la suite (u_n) est **croissante** et $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

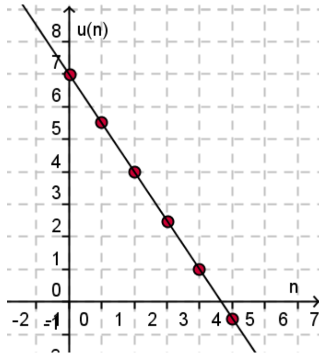
  (u_n) **diverge** vers +∞.
- Si $r<0$, la suite (u_n) est **décroissante** et $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

  (u_n) **diverge** vers -∞.
- Si $r=0$, la suite (u_n) est **constante** et $\lim_{n\to+\infty} u_n=u_0$.

  (u_n) **converge** vers u_0.

Exemple :

La suite arithmétique (u_n), de premier terme $u_0=7$ et de raison -1,5, a pour représentation graphique des points situés sur la droite d'équation $y=-1{,}5x+7$.



3) Somme

Propriété :

Soit (u_n) une **suite arithmétique**.

La formule suivante donne la **somme des termes consécutifs** :

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

$$\text{Somme des termes d'une suite arithmétique}=\text{nombre de termes}\times\frac{(\text{premier terme}+\text{dernier terme})}{2}$$

Démonstration :

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison *r*.

$$\begin{cases} S=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n \\ S=u_n+u_{n-1}+\ldots+u_1+u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S=u_0+(u_0+r)+\ldots+(u_n-r)+u_n \\ S=u_n+(u_n-r)+\ldots+(u_0+r)+u_0 \end{cases}$$

En additionnant membres à membres on obtient :

$$2S=u_0+u_n+(u_0+r)+(u_n-r)+\ldots+(u_n-r)+(u_0+r)+u_n+u_0$$

$$2S=(u_0+u_n)+(u_0+r+u_n-r)+\ldots+(u_n-r+u_0+r)+(u_n+u_0)$$

$$2S=(n+1)(u_0+u_n)$$

donc $S=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$.

Notation :

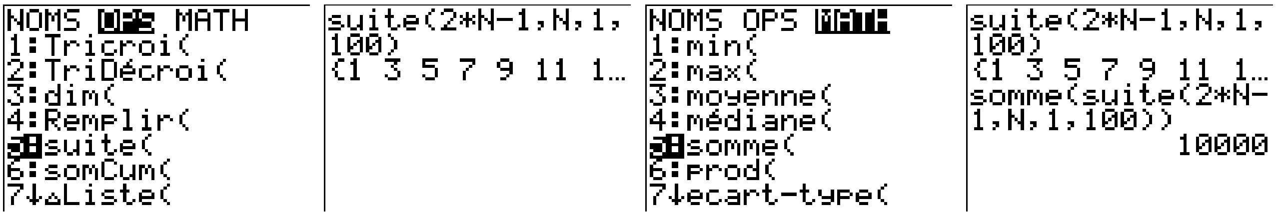
On utilise la notation suivante : $\sum_{k=0}^{n} u_k=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$.

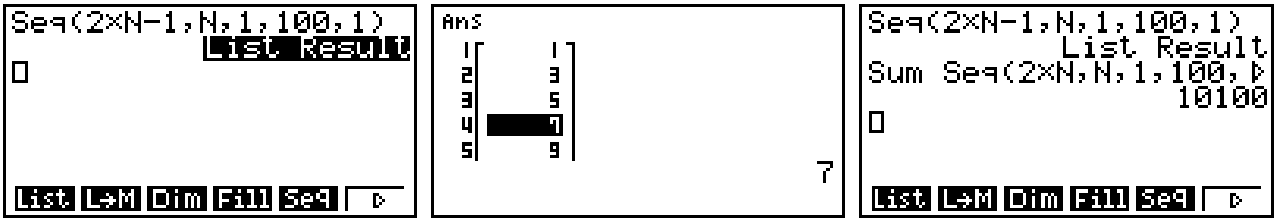
Exemple :

La suite des nombres impairs est arithmétique et l'on a déterminé dans un exemple précédent que le 100e nombre impair valait 199.

On peut donc calculer la somme des 100 premiers nombres impairs :

$$S_{100} = 1 + 3 + 5 + \ldots + 199 = 100 \times \frac{1+199}{2} = 100 \times 100 = 10000$$





Propriété :

Pour tout entier naturel n, non nul :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple :

La somme des 100 premiers entiers naturels non nuls est :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

III. Suites géométriques

1) Généralités

Définition :

Une suite numérique (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q, appelé **raison** de la suite, tel que, pour tout nombre entier naturel n, on ait :

$$u_{n+1}=q\times u_n$$

Exemples :

- La suite définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=3u_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 3.
- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an.

  Donc chaque année, sa population est multipliée par $1+5\%=1{,}05$.

  Elle suit une progression géométrique de raison 1,05.

Remarque :

Une suite (u_n) est **géométrique** si, et seulement si, le **coefficient multiplicateur** entre deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou la variation relative $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$) est **constant**.

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Pour tout entier naturel n, on a $u_n=u_0\times q^n$.

Démonstration :

Soit (u_n) une suite géométrique vérifiant donc la relation $u_{n+1}=q\times u_n$.

Calculons quelques termes de cette suite :

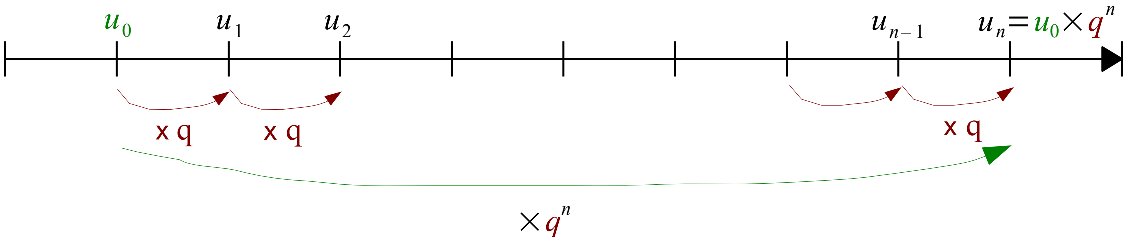
$u_0=u_0$; $u_1=q\times u_0$; $u_2=q\times u_1=q\times(q\times u_0)=q^2\times u_0$; …

En répétant n fois le procédé, on obtient :

$$u_n=q\times u_{n-1}=q\times(q^{n-1}\times u_0)=q^n\times u_0=u_0\times q^n$$

Remarque :

Terme général en fonction de *n* : $u_n = u_0 \times q^n$ *(formule explicite)*



Exemples :

- Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3.

  On a, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$.

  Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le terme de rang 5 : $u_4 = 3^4 = 81$.

- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an. Comme vu précédemment, cette population suit une progression géométrique de raison 1,05.

  En notant $u_0 = 800$ le terme initial de cette suite, on peut déterminer le terme général :

  $$u_n = u_0 \times q^n = 800 \times 1{,}05^n$$

  Après 6 années, la ville comptera $u_6 = 800 \times 1{,}05^6 \simeq 1072$ habitants.

Remarque :

Pour une suite géométrique (u_n) de raison q non nulle, si *n* et *p* sont deux entiers naturels, on peut toujours déterminer l'un des termes u_n ou u_p en fonction de l'autre par la relation $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Ceci est utile lorsqu'une suite géométrique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on recherche la raison d'une suite géométrique connaissant deux termes.

Exemple :

La suite (u_n) est géométrique telle que $u_5 = 7$ et $u_7 = 63$.

Pour déterminer sa raison *q*, on utilise la relation :

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5} = u_5 \times q^2$$

D'où *q* vérifie l'égalité $63 = 7 \times q^2$, soit $q^2 = 9$.

Il y a donc deux valeurs de *q* possibles : 3 et -3.

2) Variations

Propriétés :

(u_n) est une suite géométrique de premier terme non nul et de raison q.

- Si $q > 1$
  - Si $u_0 > 0$, alors la suite u_n est **croissante** et $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

    (u_n) **diverge** vers +∞.
  - Si $u_0 < 0$, alors la suite u_n est **décroissante** et $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

    (u_n) **diverge** vers -∞.
- Si $0 < q < 1$
  - Si $u_0 > 0$, alors la suite u_n est **décroissante** et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

    (u_n) **converge** vers 0.
  - Si $u_0 < 0$, alors la suite u_n est **croissante** et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

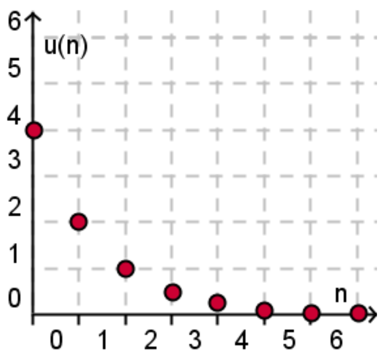
    (u_n) **converge** vers 0.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**.

  Donc (u_n) **converge** vers u_0 .
- Si $q = 0$, alors la suite (u_n) est **constante** et vaut 0 à partir du second terme.

  Donc (u_n) **converge** vers 0.
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) n'a pas de variations régulières.
  - Si $-1 < q < 0$ alors (u_n) **converge** vers 0.
  - Si $q \leqslant -1$ alors (u_n) **diverge** et n'admet pas de limite.

Exemple :

La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$ admet la représentation graphique ci-contre.



3) Somme

Propriété :

Soit (u_n) une **suite géométrique** de raison $q \neq 1$.

La formule suivante donne la **somme des termes consécutifs** :

$$\text{Somme des termes d'une suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison q. Donc $u_p = u_{p-1} \times q$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ qS = q(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ qS = qu_0 + qu_1 + \ldots + qu_{n-1} + qu_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ qS = \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

En soustrayant terme à terme, on obtient :

$$S - qS = u_0 - 0 + u_1 - u_1 + \ldots + u_n - u_n + 0 - u_{n+1}$$

Donc $S - qS = u_0 - u_{n+1} = u_0 - u_0 \times q^{n+1}$

Ainsi $(1-q)S = u_0(1-q^{n+1})$ et $S = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Notation :

On utilise la notation suivante : $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

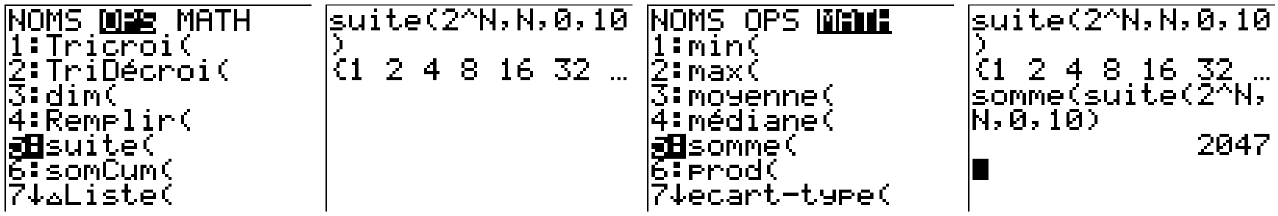
Exemple :

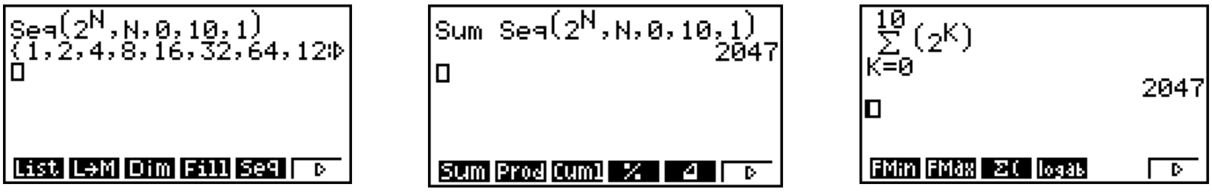
La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

On peut exprimer la somme des $n+1$ premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 3 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 3 \times \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 3 \times (2^{n+1} - 1)$$

Par exemple, pour $n = 10$, $S_{10} = 3 \times (1+2+4+8+16+32+\ldots+1024) = 3 \times (2^{11}-1) = 3 \times 2047 = 6141$.





Propriété :

Soit q un réel quelconque et n un entier naturel.

- Si $q \neq 1$, alors $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Si $q = 1$, alors $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$.

Exemple :

Soit (u_n), la suite des puissances de 2 : $u_n = 2^n$.

La somme des 20 premières puissances de 2 est :

$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{19} = \dfrac{1-2^{19+1}}{1-2} = 1\ 048\ 575$.