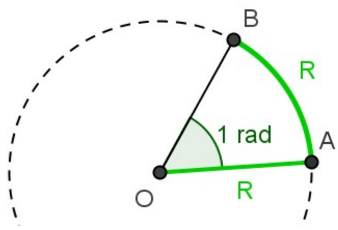
Chapitre 4

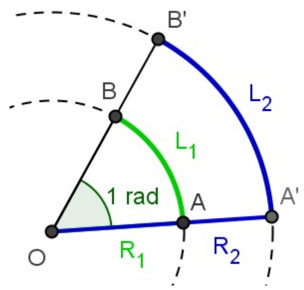
Trigonométrie

I. Radian et cercle trigonométrique

1) Le radian

Définition :
On appelle **radian** (symbole : rad) la mesure d'un angle qui intercepte un arc dont la longueur est égale à son rayon R.





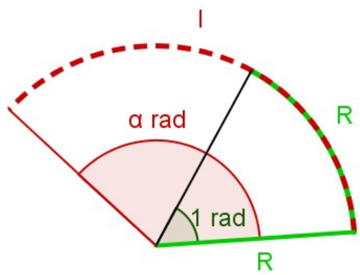
Remarque :
Cette définition ne dépend pas du rayon R de l'arc.
Le rapport de la longueur de l'arc par le rayon correspondant est constant : $\frac{L_1}{R_1}=\frac{L_2}{R_2}$

Propriétés :

- La longueur l d'un arc de cercle intercepté par un angle α, exprimé en radians, est donné par : $l=R\alpha$
- La mesure en radians d'un angle plein (tour complet) est de 2π radians.

Démonstrations :

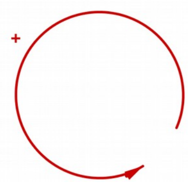
- L'angle de mesure α radians intercepte l'arc de longueur l.
  L'angle de mesure 1 radian intercepte l'arc de longueur R.
  Donc par proportionnalité, on obtient :
  $$\frac{\alpha}{1}=\frac{l}{R}$$
  Donc : $l=R\alpha$
- Ainsi pour $l=2\pi R$, on a $\alpha=2\pi$



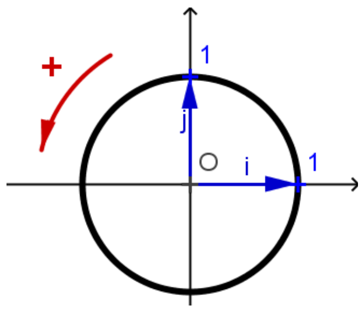
2) Cercle trigonométrique

Définition :
Le plan est dit **orienté** lorsque l'on a choisi un sens positif de rotation.

Remarque :
Dans le plan, par convention, on définit le sens positif comme l'inverse de celui des aiguille d'une montre. Il est appelé **sens trigonométrique**.



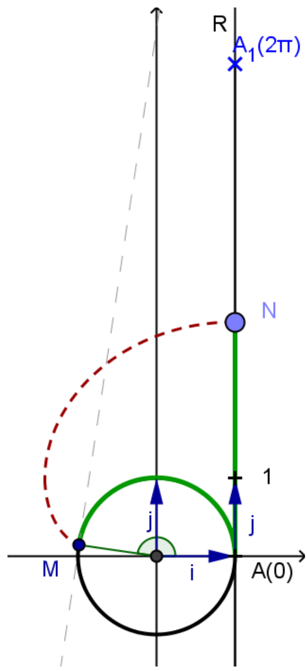
Définition :
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et orienté, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.



3) Repérage sur le cercle trigonométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ et d la droite orientée, perpendiculaire à l'axe perpendiculaire à l'axe des abscisses, qui passe par A, munie du repère $(A;\vec{j})$.

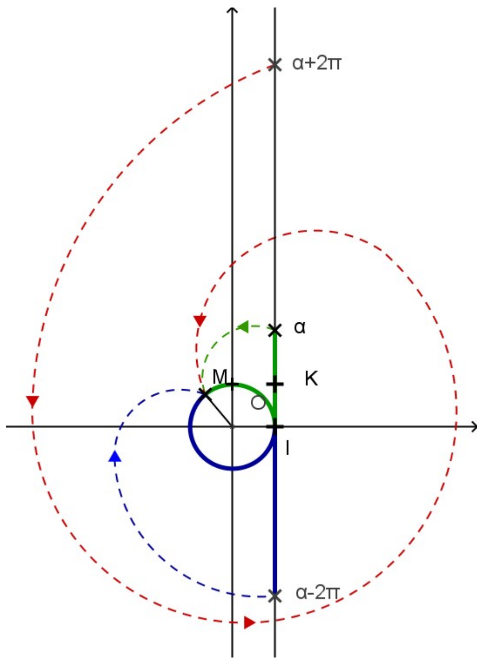
En « enroulant » cette droite d autour du cercle $\mathscr{C}$, on obtient une correspondance entre un point N de la droite d et un unique point M du cercle $\mathscr{C}$.



Remarque :
Le point A_1 de d d'abscisse 2π das le repère $(A;\vec{j})$ se retrouve ainsi en A.

Exemple :
Sur la figure ci-contre, le point N d'abscisse 3 sur la droite orientée d, se retrouve, après « enroulement » de d sur $\mathscr{C}$, en M tel que la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est égale à la longueur AN.

Propriété :
Tout point de $\mathscr{C}$ est l'image d'une infinité de réels.
Si t est l'un d'eux, les autres sont réels $t+k\times 2\pi$, où k est un entier relatif ($k \in \mathbb{Z}$).



Démonstration :
Comme le cercle trigonométrique est de rayon 1, son périmètre est de longueur 2π. Le point de d d'abscisse $t+2\pi$ se retrouve donc, après enroulement, au même endroit que le point de d d'abscisse t.
Il en est de même si on ajoute à t un multiple de 2π.

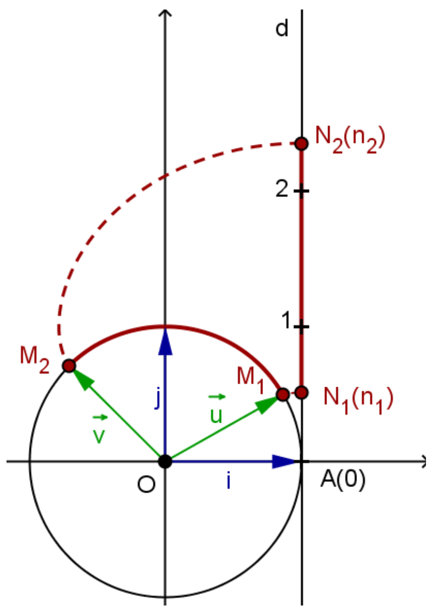
II. Mesure d'un angle orienté et mesure principale

1) Angle orienté de vecteurs unitaires

Définition :
Soit $\vec{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.
On appelle **norme** de $\vec{u}$ le réel positif ou nul, noté $\|\vec{u}\|$, défini par $\|\vec{u}\|=AB$.

Définition :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de norme 1 (**vecteurs unitaires**).

Dans le plan orienté, muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère :
- les points M_1 et M_2 tels que $\overrightarrow{OM}_1=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}_2=\vec{v}$,
- le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$
- le point A tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$
- d la droite orientée, perpendiculaire à l'axe des abscisses, qui passe par A, muni du repère $(A;\vec{j})$.



Soit N_1 et N_2 deux points de la droite d qui, par enroulement de cette droite autour du cercle $\mathscr{C}$, se retrouvent respectivement en M_1 et M_2.
Dans le repère $(A;\vec{j})$, notons n_1 l'abscisse de N_1 et n_2 l'abscisse de N_2.

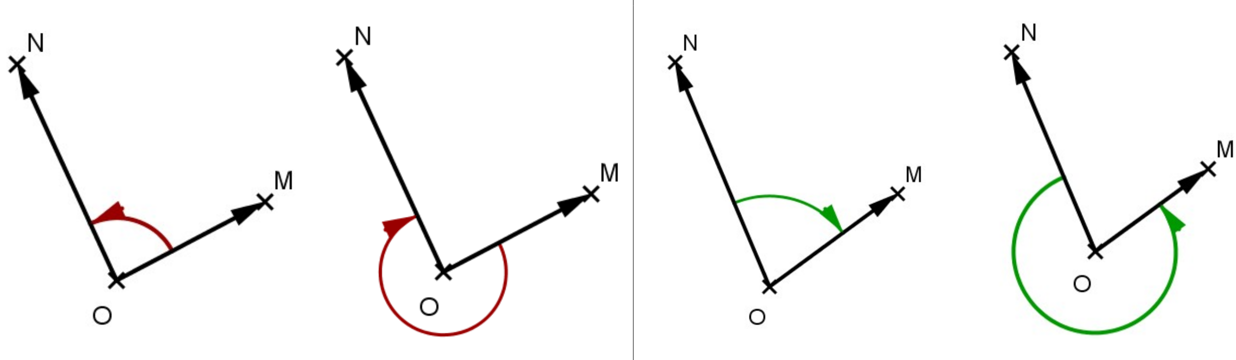
Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ est la différence n_2-n_1.

Exemple :
Sur la figure ci dessus, on a :

$$(\vec{i};\vec{u})=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6} \quad ; \quad (\vec{i};\vec{v})=\frac{3\pi}{4}-0=\frac{3\pi}{4} \quad ; \quad (\vec{u};\vec{v})=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}$$

Conventions :
- La notation $(\vec{u};\vec{v})$ désignera l'angle orienté ou une mesure de l'angle orienté.
- Codage

$(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$ $\qquad$ $(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OM})$



Propriété :
Si α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$, les autres mesures de $(\vec{u};\vec{v})$ sont égales à $\alpha+2k\pi$ avec *k* un entier relatif quelconque.

Démonstration :
Soit N_1 et N_1' deux points différents de la droite *d* qui se retrouvent après enroulement en M_1, et N_2 et N_2' deux points différents de la droite *d* qui se retrouvent après enroulement en M_2'.
n_2-n_1 et $n_2'-n_1'$ sont donc deux mesures de $(\vec{u};\vec{v})$.
On a donc vu que $n_1'=n_1+2k_1\pi$ avec k_1 entier relatif et $n_2'=n_2+2k_2\pi$ avec k_2 entier relatif.
D'où $n_2'-n_1'=n_2-n_1+2(k_2-k_1)\pi$.
Comme k_2-k_1 est un entier relatif, les mesures $n_2'-n_1'$ et n_2-n_1 diffèrent de $2k\pi$ avec *k* entier relatif.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, on a :
$(\vec{i};\vec{u})=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$ et donc également $(\vec{i};\vec{u})=\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{7\pi}{6}$ ou encore $(\vec{i};\vec{u})=\frac{\pi}{6}-2\pi=\frac{-5\pi}{6}$

2) Angle orienté de vecteurs quelconques

Définition :
Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ deux vecteurs non nuls.
Les deux vecteurs $\vec{u}=\frac{1}{\|\vec{u}_1\|}\times\vec{u}_1$ et $\vec{v}=\frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\times\vec{v}_1$ sont de norme 1.
Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ est égale à une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}_1;\vec{v}_1)$.

Remarque :
La notion d'angle des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'est définie que lorsque ces vecteurs sont non nuls.

3) Mesure principale d'un angle orienté

Définition :
Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, celle qui se situe dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est appelée **la mesure principale**.

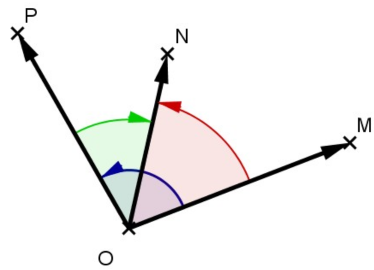
Exemple :
On considère l'angle orienté $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$ et une mesure de l'angle est $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})=3\pi$.
On sait que π, -π, 5π sont également des mesures de $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$.
La mesure principale de $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$ est π.

4) Relation de Chasles

Propriété (admise) :
Soit O, M, N et P quatre points du plan tels que $O \neq M$, $O \neq N$ et $O \neq P$.
On a la relation suivante :

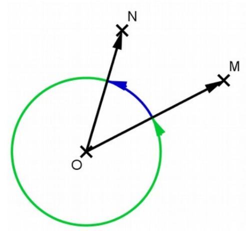
$$(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OP}\,;\overrightarrow{ON})=(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON})+2k\pi$$

où k est un entier relatif quelconque.
Cette propriété est la **relation de Chasles**.

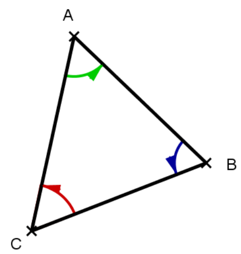


Remarques :

- La relation de Chasles permet :
  - de décomposer un angle de vecteurs.
  - de simplifier une somme de vecteurs.
- Soit O, M et N trois points deux à deux distincts.
  La relation de Chasles permet d'écrire :
  $$(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON})+(\overrightarrow{ON}\,;\overrightarrow{OM})=2k\pi$$
  D'où, en parlant de mesure principale :
  $$(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON})=-(\overrightarrow{ON}\,;\overrightarrow{OM})$$



Exemple :
Soit A, B et C trois points quelconques distincts deux à deux.
Calculer la somme des mesures des trois angles orientés codés sur la figure.

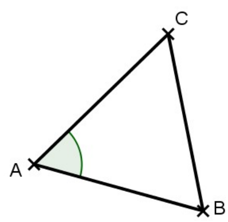


$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})+2k_1\pi+(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA})+2k_2\pi$$
$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+\pi+(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})+\pi+(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA})+2k_3\pi$$
$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA})+2k_4\pi$$
$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA})+2k\pi$$
$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CA})+2k\pi$$
$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=\pi+2k\pi$$

5) Angle orienté et angle géométrique

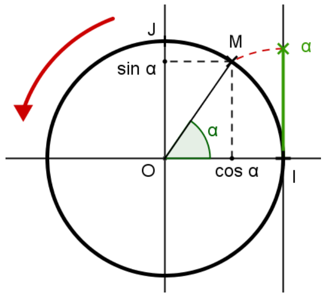
Un angle de vecteurs $(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON})$ correspond à l'angle « géométrique » $\widehat{MON}$, auquel on ajoute l'information supplémentaire de son orientation par rapport au sens positif défini dans le plan.
Si α est la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON})$ alors $|\alpha|$ est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{MON}$.

Exemple :
Dans le triangle équilatéral BAC, l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ vaut $\frac{\pi}{3}$.
La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ vaut $\frac{\pi}{3}$.
La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB})$ vaut $-\frac{\pi}{3}$.



III. Cosinus et sinus d'un angle

1) Cosinus et sinus d'un angle orienté



Définitions :
Soit M l'image d'un réel α sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
- Le **cosinus** de α, noté $\cos\alpha$, est l'abscisse de M.
- Le **sinus** de α, noté $\sin\alpha$, est l'ordonnée de M.

Remarque :
Les coordonnées du point M, situé sur le cercle trigonométrique, sont $(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$.

Propriétés :
Pour tout réel α et pour tout entier relatif k :
- $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$
- $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant1$
- $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1$
- $\cos(\alpha+k\times2\pi)=\cos\alpha$
- $\sin(\alpha+k\times2\pi)=\sin\alpha$

Valeurs particulières

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

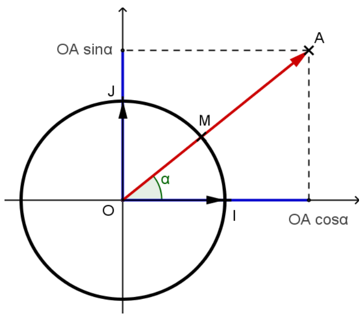
Démonstrations :
- Soit K le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O\,;\vec{j})$. Le théorème de Pythagore donne $OK^2+KM^2=OM^2$ soit $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
- Le cercle trigonométrique est de rayon 1 ; on a donc $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant1$ et $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1$.

Définitions :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls** et α une mesure quelconque de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$.
- Le **cosinus de l'angle orienté** $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est le cosinus d'une de ses mesures et se note $\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.
- Le **sinus de l'angle orienté** $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est le sinus d'une de ses mesures et se note $\sin(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Remarque :
On notera $\cos\alpha$ pour $\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$ et $\sin\alpha$ pour $\sin(\vec{u}\,;\vec{v})$ où α est une mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Propriétés :
Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, A est un point distinct de O, tel qu'une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{OA})$ soit égale à α.
Les coordonnées de A sont $(OA\cos\alpha\,;OA\sin\alpha)$.

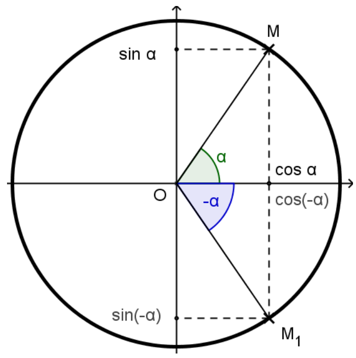
Démonstration :
Soit M le point d'intersection de la demi-droite $[OA)$ et du cercle trigonométrique.
Les coordonnées de M sont $(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont donc $(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$
Or $\overrightarrow{OA}=OA\times\overrightarrow{OM}$ donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sont $(OA\cos\alpha\,;OA\sin\alpha)$, qui sont également les coordonnées du point A.



2) Cosinus et sinus d'angles associés

Propriétés :
Pour tout nombre réel α,

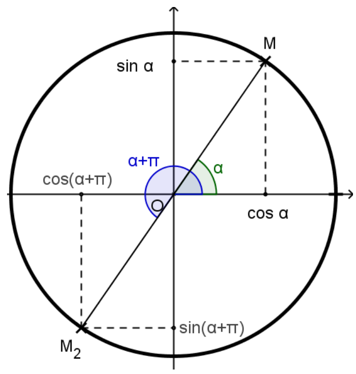
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
et
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$



Démonstration :
Les angles de mesure α et -α sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriétés :
Pour tout nombre réel α,

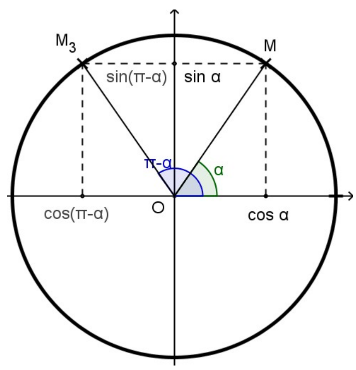
$$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$$
et
$$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$$



Démonstration :
Les angles de mesure α et α+π sont symétriques par rapport à l'origine.

Propriétés :
Pour tout nombre réel α,

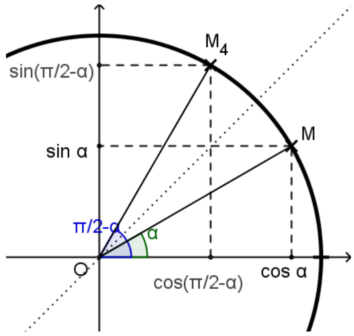
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
et
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$



Démonstration :
Les angles de mesure α et π-α sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriétés :
Pour tout nombre réel α,

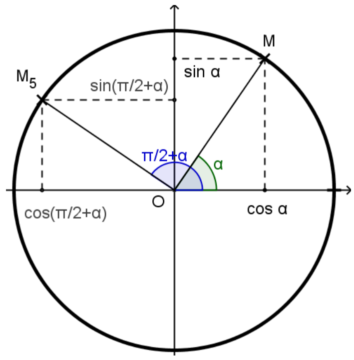
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
et
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$



Démonstration :
Les angles de mesure α et $\frac{\pi}{2}-\alpha$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Propriétés :
Pour tout nombre réel α,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$
et
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$



Démonstration :
Les angles de mesure $\frac{\pi}{2}+\alpha$ et $\frac{\pi}{2}-\alpha$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, on a $\frac{\pi}{2}+\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.
Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$
et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

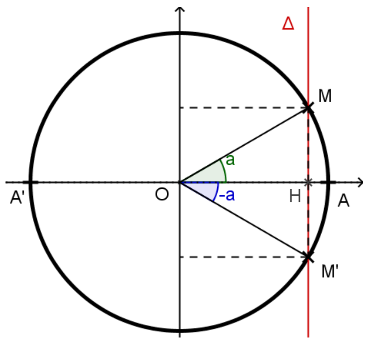
IV. Équation trigonométrique

1) *Équations* $\cos x = \cos a$

Propriété :
Soit a un nombre réel et l'équation d'inconnue x, $\cos x = \cos a$.

- Si $\cos a$ est différent de 1 ou de -1, les solutions de l'équation $\cos x = \cos a$ sont les nombres $a + 2k\pi$ et $-a + 2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs quelconques.
- Si $\cos a = 1$, l'équation est $\cos x = 1$ et ses solutions sont les nombres $2k\pi$ où k est un entier relatif quelconque.
- Si $\cos a = -1$, l'équation est $\cos x = -1$ et ses solutions sont les nombres $\pi + 2k\pi$ où k est un entier relatif quelconque.

Démonstration :



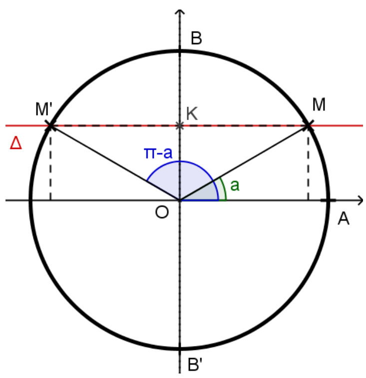
- Si $|\cos a| < 1$:
  Soit H le point de $[AA']$ d'abscisse $\cos a$. La perpendiculaire en H à la droite (AA') coupe le cercle trigonométrique en M et M' associés aux réels a et $-a$.
  Les solutions sont donc les réels $a + 2k\pi$ et $-a + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\cos a = 1$, alors H est en A.
  Les solutions sont donc les réels $0 + 2k\pi = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\cos a = -1$, alors H est en A'.
  Les solutions sont donc les réels $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2) *Équations* $\sin x = \sin a$

Propriété :
Soit a un nombre réel et l'équation d'inconnue x, $\sin x = \sin a$.

- Si $\sin a$ est différent de 1 ou de -1, les solutions de l'équation $\sin x = \sin a$ sont les nombres $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs quelconques.
- Si $\sin a = 1$, l'équation est $\sin x = 1$ et ses solutions sont les nombres $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où k est un entier relatif quelconque.
- Si $\sin a = -1$, l'équation est $\sin x = -1$ et ses solutions sont les nombres $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où k est un entier relatif quelconque.

Démonstration :



- Si $|\sin a| < 1$:
  Soit K le point de $[BB']$ d'ordonnée $\sin a$. La perpendiculaire en K à la droite (BB') coupe le cercle trigonométrique en M et M' associés aux réels a et $\pi - a$.
  Les solutions sont donc les réels $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\sin a = 1$, alors K est en B.
  Les solutions sont donc les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\sin a = -1$, alors K est en B'.
  Les solutions sont donc les réels $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.