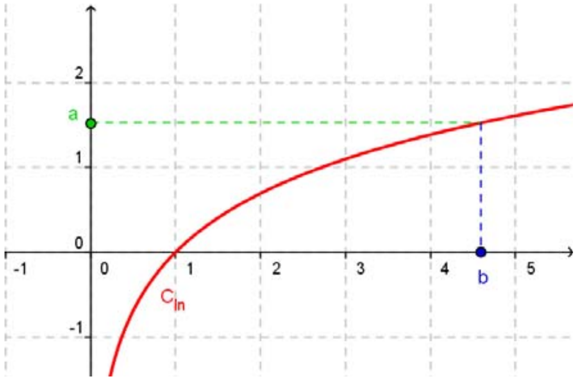
Chapitre 8
Fonction exponentielle

I. Définition et propriétés de $x \longmapsto e^x$

1) Définition



Pour tout réel a de $]-\infty;+\infty[$, il existe un unique réel b de $]0;+\infty[$ tel que $\ln(b)=a$.

Cette propriété permet de définir une nouvelle fonction dite « réciproque » de la fonction logarithme népérien.

Définition :
La fonction **exponentielle**, notée **exp**, est définie sur l'ensemble des réels.
On admet que cette fonction **exp** est continue.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on associe le réel y de $]0;+\infty[$ tel que :

$$y=\exp(x) \Leftrightarrow x=\ln(y)$$

Notations :
On rappelle que le nombre e est tel que $\ln e=1$.
Pour tout entier relatif m, on a $\ln(e^m)=m$, ce qui signifie $e^m=\exp(m)$; on convient d'étendre cette écriture à tout réel x.
Ainsi, on écrit $\exp(x)=e^x$ « **exponentielle** de x est égale à **e** exposant x ».

2) Propriétés

Propriétés :

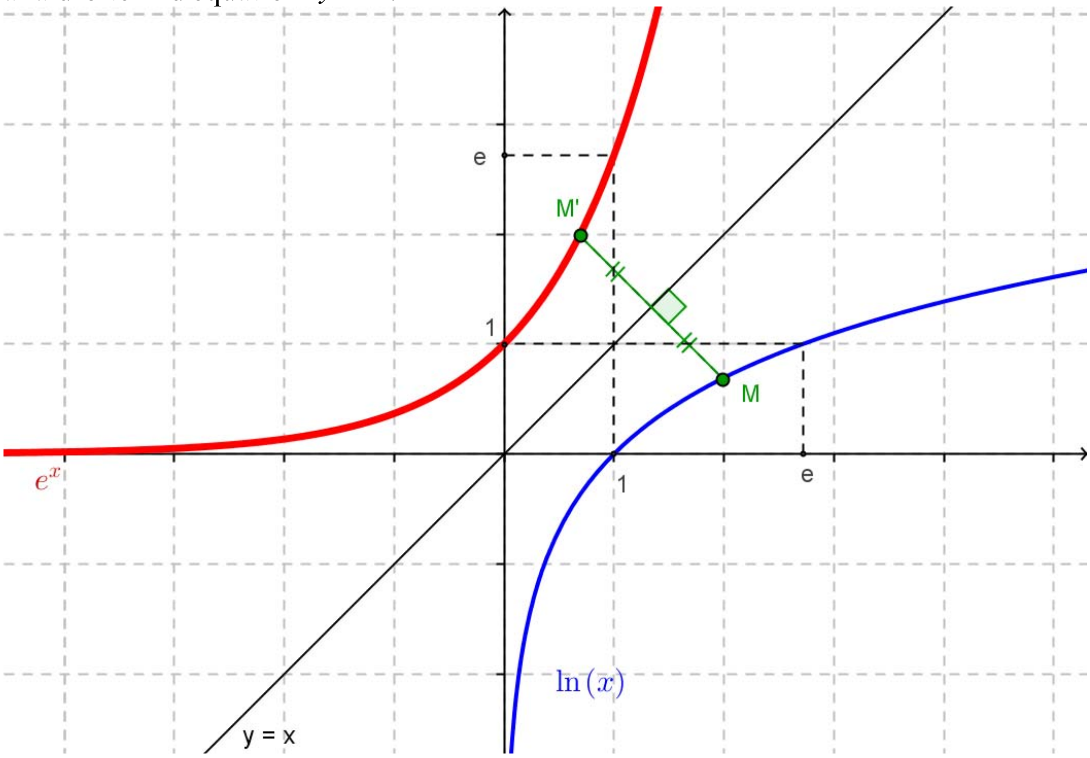
- Pour tout réel x et pour tout réel y strictement positif :
  $$y=e^x \Leftrightarrow \ln(y)=x \quad \text{et} \quad e^x\leqslant y \Leftrightarrow x\leqslant \ln(y)$$
  Par conséquent, $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$
- Pour tout réel x, $e^x>0$, c'est-à-dire « l'exponentielle est toujours strictement positive ».
- Pour tout réel x, $\ln(e^x)=x$.
- Pour tout réel **x strictement positif**, $e^{\ln x}=x$.

Exemples :

- $e^x=1 \Leftrightarrow x=\ln(1) \Leftrightarrow x=0$
- $\ln(e^{-5})=-5$ et $e^{\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
- $e^x=1{,}3 \Leftrightarrow x=\ln(1{,}3)$
- $e^x=-3$ n'a pas de solution
- Pour résoudre l'équation $e^{3x+1}=e^{2x-3}$, on résout $3x+1=2x-3$ soit $x=-4$.

3) Représentation graphique

Dans un repère orthonormal, les courbes représentant les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.



4) Règles de calcul

Propriétés :

Pour tous les réels a et b, et tout entier relatif n :

$$\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b \quad ; \quad \mathrm{e}^{-a}=\frac{1}{\mathrm{e}^a} \quad ; \quad \mathrm{e}^{a-b}=\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \quad ; \quad \mathrm{e}^{na}=(\mathrm{e}^a)^n$$

Démonstration :

D'une part $\ln(\mathrm{e}^{a+b})=a+b$. D'autre part $\ln(\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b)=\ln(\mathrm{e}^a)+\ln(\mathrm{e}^b)=a+b$.

Donc $\ln(\mathrm{e}^{a+b})=\ln(\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b)$. Et par conséquent, $\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b$.

Les autres règles de calcul se déduisent facilement de la première règle.

Remarque :

Pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{-x}=1 \quad ; \quad \mathrm{e}^{2x}=(\mathrm{e}^x)^2 \quad ; \quad \mathrm{e}^{3x}=(\mathrm{e}^x)^3$$

Exemples :

- $\mathrm{e}^{3+\ln 2}=\mathrm{e}^3\times\mathrm{e}^{\ln 2}=\mathrm{e}^3\times 2=2\,\mathrm{e}^3$
- $\mathrm{e}^{1-x}=\mathrm{e}\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{5+2x}=\mathrm{e}^5\times\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^5(\mathrm{e}^x)^2$
- $\mathrm{e}^{3a-5}=\dfrac{\mathrm{e}^{3a}}{\mathrm{e}^5}$

II. Fonction exp et limites

1) *Dérivée et sens de variation*

Théorème :
La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ et sa dérivée est elle-même :

$$\exp'(x)=\exp(x)$$

En conséquence, la fonction exp est strictement croissante sur ℝ.

Démonstration :
On admet que la fonction exp est dérivable sur ℝ.
La composée $f=\ln\circ\exp$ est donc dérivable sur ℝ.
Or $f(x)=(\ln\circ\exp)(x)=\ln(e^x)=x$ pour $x\in$ℝ. Donc $f'(x)=1$.
Mais par dérivée d'une fonction composée $f'(x)=\ln'(\exp(x))\times\exp'(x)=\dfrac{1}{\exp(x)}\times\exp'(x)$.
Ainsi $1=\dfrac{1}{\exp(x)}\times\exp'(x) \Leftrightarrow \exp'(x)=\exp(x)$

Remarques :
Pour tout réels a et b :

- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

Exemple :
Résolvons dans ℝ l'inéquation $e^{2x+1} < e^{3x-3}$.
$e^{2x+1} < e^{3x-3}$ équivaut à $2x+1 < 3x-3$ soit $x > 4$.
L'ensemble S des solutions de l'inéquation est donc : $S=]4;+\infty[$

2) *Limites*

Théorèmes :

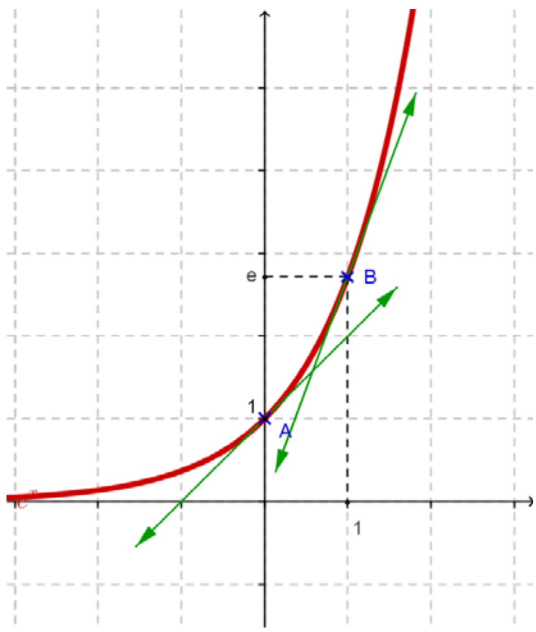
$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ de la fonction exponentielle en $-\infty$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+	
$f(x)$	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty} x\,e^x=0$$

A l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x.



Démonstrations :

- Soit $h(x)=e^x-x$ sur ℝ, de dérivée $h'(x)=e^x-1$; $h(x)$ est minimum en 0 et $h(0)=1$, positif.

Donc, pour tout réel x, $e^x-x>0 \Leftrightarrow e^x>x$.

Or, $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$, donc, **par comparaison**, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	1	↗

- Si $x \longmapsto -\infty$, alors $-x \longmapsto +\infty$. En posant $X=-x$, alors $\lim_{x\to+\infty} e^x=\lim_{X\to+\infty} e^{-X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}$.

  Or si $\lim_{X\to+\infty} e^X=+\infty$; donc, par inverse, $\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}=0$. Ainsi, $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$.

- Comme $\frac{e^x}{x}=\frac{e^x}{\ln(e^x)}=\frac{X}{\ln(X)}$ avec $X=e^x$, on utilise $\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X}=0$.

  Si $x \longmapsto +\infty$, alors $e^x \longmapsto +\infty$, donc, **par composée**, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$.

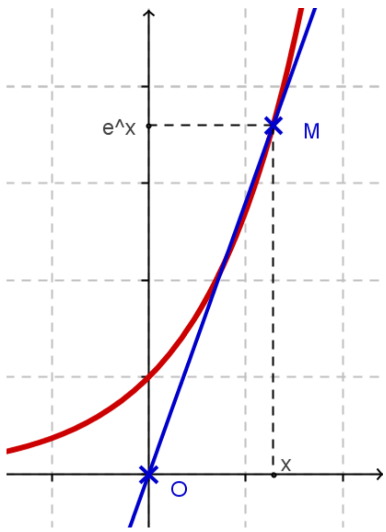
  Comme $e^x>0$ et $x>0$ lorsque $x \longmapsto +\infty$, par inverse, on obtient $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

- Si $x \longmapsto -\infty$ et en posant $X=-x$, on obtient $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x=0$.

Remarques :

- $\frac{e^x}{x}$ est le coefficient directeur de la droite (OM), lorsque M est le point d'abscisse x de la courbe représentant exp.

  Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$. Graphiquement, cela signifie donc que la droite (OM) « tend vers » l'axe des ordonnées lorsque x tend vers $+\infty$.



- $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

  En effet, on sait que $(\exp)'=\exp$, donc le nombre dérivé de la fonction exp en 0 est égal à $e^0=1$.

  D'où $\frac{e^x-e^0}{x-0}$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

III. Exponentielle d'une fonction : e^u

On considère une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I.
On désire étudier la composée $\exp \circ u$, notée e^u .

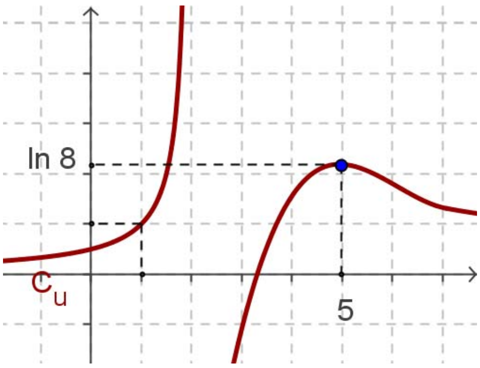
1) Sens de variation de e^u

Théorème :
Les fonctions u et e^u ont même sens de variation sur l'intervalle I.

Démonstration :
Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par composée :

- si la fonction u est croissante sur I, alors la fonction e^u est croissante sur I.
- si la fonction u est décroissante sur I, alors la fonction e^u est décroissante sur I.

Exemple :
Soit la fonction u connue par sa courbe $\mathscr{C}_u$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
Alors e^u est aussi définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et a même sens de variation que u.



x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$e^{u(x)}$	↗	‖ ↗	8	↘

Comme $u(5)=\ln 8$ alors $e^{u(5)}=e^{\ln 8}=8$

2) Limites de e^u

Théorème :
α désignant un réel ou +∞ ou –∞, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée :

- si la limite de u en α est +∞, alors la limite de e^u en α est +∞ ;
  si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} e^{u(x)}=+\infty$
- si la limite de u en α est -∞, alors la limite de e^u en α est 0 ;
  si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} e^{u(x)}=0$
- si la limite de u en α est un nombre l, alors la limite de e^u en α est e^l ;
  si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=l$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} e^{u(x)}=e^l$

Exemple :
On reprend la fonction u représentée ci-dessus.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{u(x)}=e^1=e$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{u(x)}=e^0=1$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} u(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 2^-} e^{u(x)}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} u(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 2^+} e^{u(x)}=0$

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$e^{u(x)}$	1 ↗	$+\infty$ ‖ 0 ↗	8	↘ e

3) Dérivée de e^u

Théorème :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est $(\mathrm{e}^u)'=\mathrm{e}^u\times u'$.

Démonstration :
La fonction u étant dérivable sur I, on peut appliquer le théorème de dérivation d'une fonction composée à la fonction composée $\exp\circ u$.
Ainsi, pour tout réel x de I, on obtient $(\exp\circ u)'(x)=\exp'(u(x))\times u'(x)=\mathrm{e}^{u(x)}\times u'(x)$.

4) Application au calcul de primitives

Théorème :
- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction exp est la fonction exp.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, une primitive sur I de la fonction $\mathrm{e}^u\times u'$ est la fonction e^u .

Exemples :
- Si $f(x)=\mathrm{e}^x-3x$, alors $f'(x)=\mathrm{e}^x-3$.
- Si $f(x)=\mathrm{e}^{-2x+1}+2$, alors $f'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x+1}$.
- Si $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}$, alors $f'(x)=2xe^{x^2+1}$
- Posons $f(x)=4\mathrm{e}^x-x$; une primitive de f est $x\longmapsto 4\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}$.
- Posons $f(x)=4\mathrm{e}^{4x-1}$; une primitive de f est $x\longmapsto \mathrm{e}^{4x-1}$.

IV. Exponentielle de base *a* : $x\longmapsto a^x$

1) Définition et sens de variation

Notation a^b

a étant un réel strictement positif et b un réel quelconque :

$$\mathrm{e}^{b\times\ln a} \text{ existe et } \mathrm{e}^{b\times\ln a}=(\mathrm{e}^{\ln a})^b=a^b .$$

Ainsi $a^b=\mathrm{e}^{b\times\ln a}$, avec $a>0$.
Les règles de calcul sur les puissances s'appliquent.

Propriétés :
Pour tous réels $a>0$ et $a'>0$, et tous réels b et b' :

$$1^b=1 \quad ; \quad (aa')^b=a^b\times a'^b \quad ; \quad a^b\times a^{b'}=a^{b+b'}$$

$$\frac{a^b}{a'^b}=\left(\frac{a}{a'}\right)^b \quad ; \quad \frac{a^b}{a^{b'}}=a^{b-b'} \quad ; \quad (a^b)^{b'}=a^{bb'}$$

Remarque :
$\ln a^b=b\ln a$
Cette formule, connue lorsque b est un entier, est également vraie lorsque b est un réel quelconque.
En effet, $\ln a^b=\ln\mathrm{e}^{b\ln a}=b\ln a$.

Exemples :

- $5^{\sqrt{2}} \times 5^{1-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})} = 5^1 = 5$
- $\dfrac{6^{0,6}}{2^{0,6}} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^{0,6} = 3^{0,6}$
- $\left(7^{\frac{4}{5}}\right)^{1,25} = 7^{\frac{4}{5}\times 1,25} = 7^1 = 7$

Fonction a^x

Définition :
Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
La fonction $x \longmapsto a^x$ est définie par $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

Conséquence :
Si $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$, alors $f'(x) = (\ln a) \times \mathrm{e}^{x \ln a} = (\ln a) \times a^x$.
Or, pour tout réel x, on a $a^x > 0$; donc la dérivée est du signe de $\ln a$.
On en déduit facilement les variations de a^x.

Théorème :

- Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$:
  la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  $$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$
- Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$:
  la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
  $$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

Exemples :

- Si $f(x)=3^x$, alors $f'(x)=3^x\ln 3$.
- La fonction $x \longmapsto 3^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $3>1$).
- La fonction $x \longmapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (car $\frac{1}{2}<1$).
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=+\infty$ (car $\frac{3}{2}>1$).
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=0$ (car $\frac{3}{5}<1$).

2) Lien avec les suites géométriques

Caractérisation :
Une suite est géométrique, de raison *a*, si et seulement si, la croissance relative entre deux termes consécutifs est constante et égale à $a-1$.

Remarques :

$u_{n+1}=a\times u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=\frac{a\times u_n-u_n}{u_n}=a-1$.

Comme $u_n=u_0\times a^n$, si $a>0$ et $u_0>0$, on peut écrire :
$u_n=\mathrm{e}^{\ln u_0}\times\mathrm{e}^{n\ln a}=\mathrm{e}^{n\ln a+\ln u_0}=\mathrm{e}^{An+B}$, avec $A=\ln a$ et $B=\ln u_0$.

Théorème et définition :
Pour tout réel $a>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
L'équation $x^n=a$, admet une unique solution **positive** $x=a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ appelée **racine *n*-ième** de *a*.

Démonstration :
On considère un réel $x>0$ tel que $x^n=a$.
On a donc : $(x^n)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}$, soit $x=a^{\frac{1}{n}}$.
Ainsi $a^{\frac{1}{n}}$ est l'unique réel strictement positif dont la puissance *n*-ième est égale à *a*.

Exemple :
$(16)^{\frac{1}{4}}$ est le nombre strictement positif dont la puissance quatrième est égale à 16.
Donc : $(16)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$ (car $2^4=16$)

Définition :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
La moyenne géométrique de *n* nombres positifs x_1, x_2,..., x_n est le nombre :

$$(x_1\times x_2\times\ldots\times x_n)^{\frac{1}{n}}$$

Exemple :
La moyenne géométrique des nombres 4, 2 et 1 est égale à 2 car :

$$(4\times 2\times 1)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2$$