Chapitre 1

Généralités algébriques

I. Calcul algébrique

1) Développer et réduire

Définition :

Développer un produit c'est remplacer celui ci par une somme.

Propriétés :

On considère les nombres relatifs : k, a, b, c, d

- $k(a+b)=ka+kb$
- $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Remarque :

S'agissant de nombres relatifs, il faut respecter la règle des signes pour la multiplication.

Définition :

Réduire une expression littérale c'est écrire celle ci avec le moins de termes possibles.

Exemple : Développer (et réduire) :

$$A=(x+5)(4x-1)$$

$A=(x+5)(4x-1)$

$A=4x^2-x+20x-5$ (Développement)

$A=4x^2+19x-5$ (Réduction)

2) Les identités remarquables

Pour tous les nombres a et b :

Développement →

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

← Factorisation

3) Factoriser une expression

Définition :

Factoriser une somme (ou une différence) c'est remplacer celle ci par un produit.

En utilisant un facteur commun

- $A=8x^3-12x^2$
  $A=4x^2\times 2x-4x^2\times 3$ (identification du facteur commun)
  $A=4x^2(2x-3)$ (règle de distributivité)

- $B=(2x-3)(x-4)-(2x-3)(7-3x)$ (identification du facteur commun)
  $B=(2x-3)[(x-4)-(7-3x)]$ (règle de distributivité)
  $B=(2x-3)[x-4-7+3x]$ (simplification de l'expression entre crochet)
  $B=(2x-3)(4x-11)$ (réduction)

En utilisant une identité remarquable

- $A=9x^2-42x+49$
  $A=(3x)^2-2\times(3x)\times(7)+(7)^2$ (on reconnaît $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$)
  $A=(3x-7)^2$

- $B=36x^2-25$
  $B=(6x)^2-(5)^2$ (on reconnaît $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$)
  $B=(6x-5)(6x+5)$

II. Les racines carrées

1) Racine carrée d'un nombre positif

Définition :

Pour tout nombre **positif** a, la **racine carrée** de a est le nombre positif dont le carré est a.

Exemple :
La racine carrée de 64 est 8 parce que $8^2=64$ et $8\geqslant 0$.

Notation :
La racine carrée de a se note $\sqrt{a}$.

Conséquence :
Pour tout nombre **positif** a : $\sqrt{a^2}=a$ et $(\sqrt{a})^2=a$.

2) Résolution de l'équation $x^2 = a$

Propriétés :

- Si $a<0$, il n'existe aucun nombre x tel que $x^2=a$.
  L'équation n'a **pas de solution.**
- Si $a=0$, le seul nombre tel que $x^2=0$ est 0.
  La solution est 0.
- Si $a>0$, il existe deux nombres tels que $x^2=a$.
  L'équation a **deux solutions** $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration :

$x^2=a \quad \Leftrightarrow \quad x^2-a=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-(\sqrt{a})^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$

Donc $x-\sqrt{a}=0$ ou $x+\sqrt{a}=0$

En conclusion : $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

Exemple :
L'équation $x^2=13$ a pour solutions les nombres $\sqrt{13}$ et $-\sqrt{13}$.

3) Produit et quotient de deux racines carrées

Propriété :

Le **produit de deux racines** carrées est égal à la **racine carrée du produit**.

$$\textit{Pour } a\geqslant 0 \textit{ et } b\geqslant 0 :$$
$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

Exemples :

$\sqrt{9\times 2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{7}\times\sqrt{5}=\sqrt{7\times 5}=\sqrt{35}$

Propriété :

Le **quotient de deux racines** carrées est égal à la **racine carrée du quotient**.

$$\text{Pour } a \geqslant 0 \text{ et } b > 0 :$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemples :

$$\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$$

III. Équations

1) Définitions

Définition :

Une **égalité** dans laquelle un nombre inconnu est remplacé par une lettre s'appelle une **équation**.

Définition :

Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les **valeurs** numériques que l'on peut donner à cette **inconnue** pour que l'**égalité soit vraie**.

2) Résolution d'une équation

Pour **résoudre** une **équation**, on utilise les deux règles suivantes :

Propriété :

Une équation a les mêmes solutions que toutes les équations obtenues en **ajoutant** (ou en retranchant) un **même nombre** aux **deux membres** de l'équation.

Propriété :

Une équation a les mêmes solutions que toutes les équations obtenues en **multipliant** (ou en divisant) par un **même nombre**, non nul, les **deux membres** de l'équation.

3) Équation de la forme A x B = 0

Lorsqu'une équation se présente sous la forme d'un produit de facteurs égal à zéro, il ne faut surtout pas développer ce produit mais utiliser les règles suivantes.

Propriété :

Si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

Propriété :

Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors ce produit est nul.

Les solutions de l'équation $A \times B = 0$ seront les solutions des équations A=0 et B=0

Exemple :

Résoudre l'équation $(2-3x)(4x+8)=0$

Le produit $(2-3x)(4x+8)$ est nul lorsque :

$2-3x=0$ ou $4x+8=0$

On résout ces équations :

$$\begin{aligned} 2-3x &= 0 \\ 2-3x-2 &= 0-2 \\ -3x &= -2 \\ -\frac{1}{3}\times -3x &= -\frac{1}{3}\times -2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x+8 &= 0 \\ 4x+8-8 &= 0-8 \\ 4x &= -8 \\ \frac{1}{4}\times 4x &= \frac{1}{4}\times -8 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Vérifications :

pour $x=\frac{2}{3}$:

$$\left(2-3\times\frac{2}{3}\right)\left(4\times\frac{2}{3}+8\right)=0\times\left(\frac{8}{3}-8\right)=0$$

pour $x=-2$:

$$(2-3\times -2)(4\times -2+8)=(2+6)\times 0=0$$

<u>Conclusion :</u> $\frac{2}{3}$ et -2 sont les solutions de l'équation.

IV. Système de deux équations à deux inconnues

1) Équation du 1er degré à deux inconnues

Définition :

Une **équation** du **1er degré** à **deux inconnues** x et y est une équation qui peut se ramener à une équation de la forme $ax+by=c$ où a, b et c sont trois nombres donnés.

Exemple :
Soit l'équation $3x-5y=2$.
$3\times 4-5\times 2=12-10=2$, donc le couple (4 ;2) est **une** solution de cette équation ((14 ;8) également). $3x-5y=2$ a une **infinité** de solutions.

2) Système de deux équations à deux inconnues

Définitions :

Un **système** de **deux équations** du 1er degré à deux inconnues x et y est de la forme :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$ où a, b, c, a', b', c' sont des nombres donnés.

Résoudre un tel système, c'est trouver les couples (x ; y) qui vérifient **simultanément** les deux équations.

Exemple :

Le couple (2 ; 3) est solution du système $\begin{cases} 4x-2y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$.

En effet, on vérifie que $\begin{cases} 4\times 2-2\times 3=8-6=2 \\ 2+3=5 \end{cases}$

3) Résolution d'un système

○ Par substitution

$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ On exprime une inconnue en fonction de l'autre (ici x en fonction de y)

$\begin{cases} x=7-2y \\ 2\times(7-2y)+3y=11 \end{cases}$ On **substitue** une inconnue pour obtenir une équation du 1er degré à une inconnue

$\begin{cases} x=7-2y \\ 14-4y+3y=11 \end{cases}$

$\begin{cases} x=7-2y \\ -y=-3 \end{cases}$ On résout la 2ème équation et on obtient y

$\begin{cases} x=7-2\times 3=1 \\ y=3 \end{cases}$ On utilise la 1ère équation pour obtenir x

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

Vérifications :

$$\begin{cases} 1+2\times3=1+6=7 \\ 2\times1+3\times3=2+9=11 \end{cases}$$

La solution est le couple (1 ; 3).

- ***Par combinaison***

$\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$	On cherche à avoir les mêmes coefficients devant les *x* pour chaque équation.
$\begin{cases} 6x+8y=10 \\ 6x-9y=27 \end{cases}$	On multiplie la 1ère équation par **2** et la 2ème équation par **3**.
$\begin{cases} 6x+8y=10 \\ 17y=-17 \end{cases}$	On conserve la 1ère équation et on soustrait la 2ème équation à la 1ère **(combinaison)**
$\begin{cases} 6x+8\times(-1)=10 \\ y=-1 \end{cases}$	On résout la 2ème équation et on obtient *y*
$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$	On utilise la 1ère équation pour obtenir *x*

Vérifications :

$$\begin{cases} 3\times3+4\times-1=9-4=5 \\ 2\times3-3\times(-1)=6-(-1)=6+1=9 \end{cases}$$

La solution est le couple (3 ; -1)