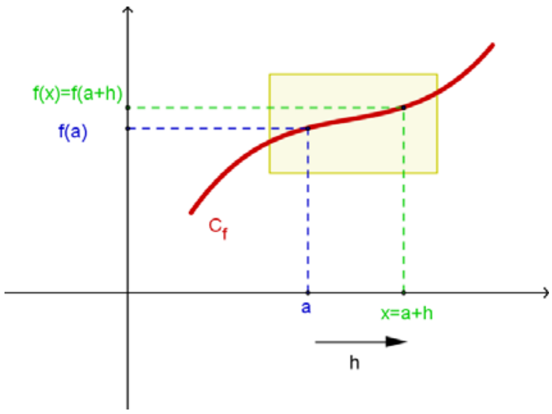
# Chapitre 6
# Dérivation

## I. Taux de variation

*f* est une fonction définie (au moins) sur un intervalle *I*,

*a* et $x = a+h$ sont deux points distincts de *I* ($h \neq 0$).




### 1) Formule

**Définition :**
*a* et *b* étant deux réels distincts de l'intervalle *I*, le **taux de variation** de la fonction *f* entre *a* et *b* est le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Avec $x=a+h$ , ce quotient s'écrit aussi :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

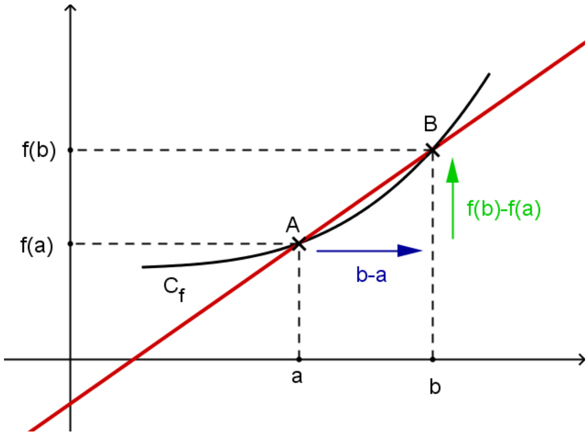
**Remarque :**
On parle également d'**accroissement moyen**.

**Exemple :**
Pour la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^2$ , le taux de variation entre *a* et *a*+*h* est :

$$\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=2a+h$$

## 2) *Interprétation graphique*

Soient *A* et *B* deux points de $C_f$ tels que :
$A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$.




Le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
est le **coefficient directeur** de la sécante (*AB*) à la courbe $C_f$ représentant la fonction *f*.

**Remarque :**

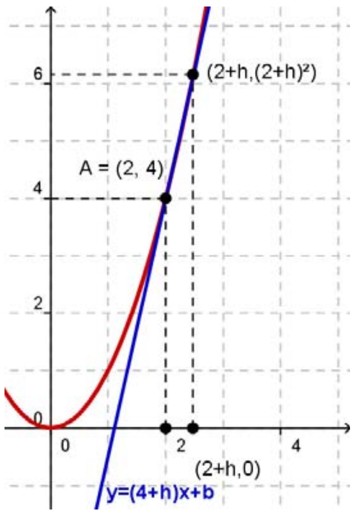
- On utilise la notation :
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{accroissement\ des\ ordonnées}{accroissement\ des\ abscisses}$$
- En posant $b=a+h$, avec $h \neq 0$, le taux de variation de *f* entre *a* et *a*+*h* s'écrit :
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- Le taux de variation de *f* entre *a* et *a*+*h* est donc égale au coefficient directeur de la sécante (*AB*) avec $A(a;f(a))$ et $B(a+h;f(a+h))$

**Exemple :**

Pour la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^2$ et $a=2$,

le taux de variation entre 2 et 2+*h* est :

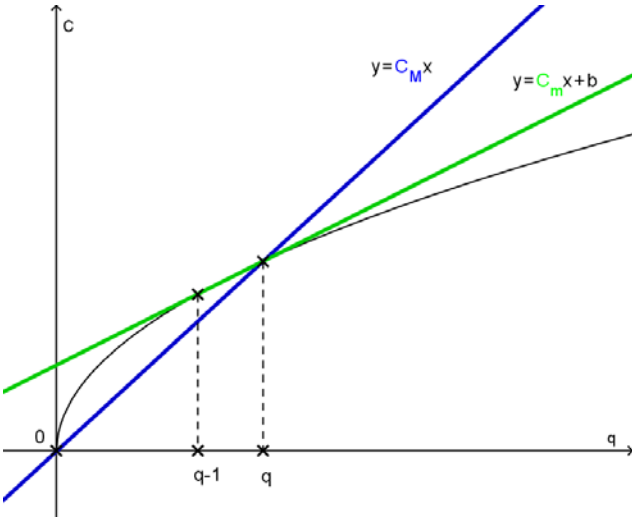
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\frac{4h+h^2}{h}=4+h$$



**Cas particulier :** coût marginal d'une unité produite
Soit *C(q)* le coût total lorsque l'on a fabriqué *q* unités.

- Le coût de production par unité produite est appelé **coût moyen de production :**

$$C_M(q)=\frac{C(q)}{q}$$




- Le **coût marginal** de la *q*-ième unité produite est l'accroissement de coût dû à cette dernière unité produite, soit :

$$C_m(q)=C(q)-C(q-1)$$

# II. Nombre dérivé en a

*f* est une fonction définie (au moins) sur un intervalle *I*, *a* et $x = a+h$ sont deux points distincts de *I* ($h\neq0$).

## 1) Limite en 0

**Principe :**
Si *f* est une fonction définie sur un intervalle *I* contenant 0, on admet que chercher la **limite de *f* en 0** revient à calculer l'image de 0 par *f :*

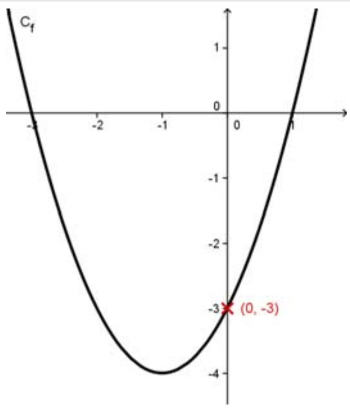
$$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$$

**Exemple :**

Soit $f(x)=(x+3)(x-1)$, la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ ;

*f*(0) existe,
donc si $x\to0$, alors $f(x)\to f(0)=(0+3)(0-1)=-3$.

Ainsi $\lim_{x\to0}(x+3)(x-1)=-3$.



## 2) Nombre dérivé en a

**Définition :**

Si le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre lorsque *h* tend vers 0, alors la fonction *f* est dérivable en *a*.

La limite de ce taux de variation est le **nombre dérivé de *f* en *a***.

On le note $f'(a)$.

On a donc :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

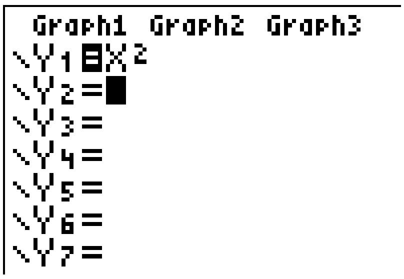
**Exemple :**

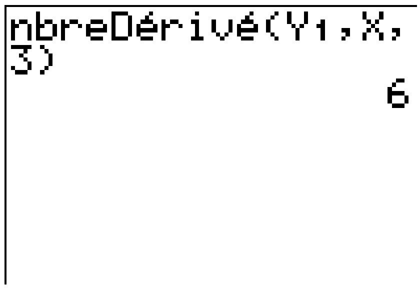
Pour la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^2$ et $a=3$,

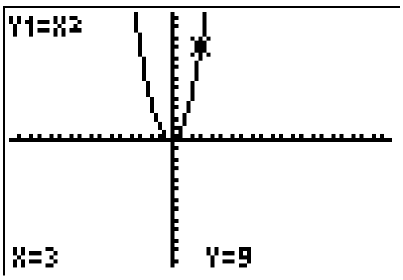
$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\frac{9+6h+h^2-9}{h}=6+h$$

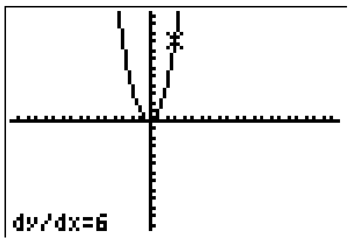
Ainsi $\lim_{h\to 0} 6+h=6$ donc $f'(3)=6$.

**Calculatrice :**



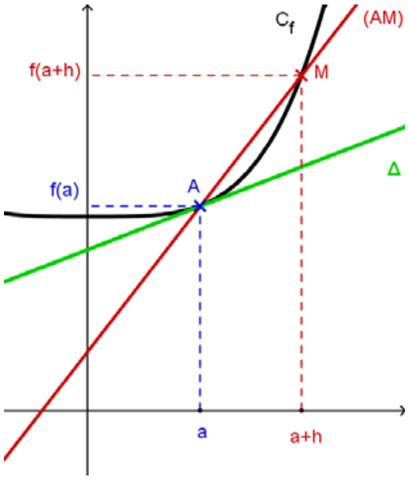
### 3) ***Interprétation graphique***

Soit $f$ une fonction dérivable en $a$ et $C_f$ sa courbe représentative.

$A$ le point de $C_f$ d'abscisse $a$ et $M$ un point mobile de $C_f$ d'abscisse $a+h$, avec $h$ proche de 0.

Lorsque $h$ tend vers 0 alors l'abscisse de $M$ tend vers l'abscisse de $A$ et donc le point $M$ se rapproche du point $A$.

Le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers le nombre $f'(a)$ donc la sécante $(AM)$ se rapproche de la droite Δ.




## Tangente

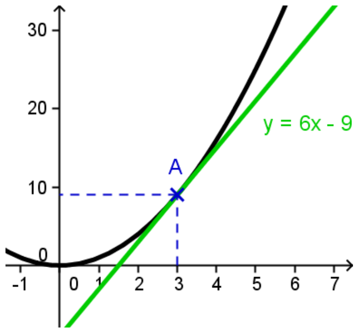
**Définition :**
La **tangente** à la courbe $C_f$ au point $A$ d'abscisse $a$ est **la droite** passant par $A$ dont le **coefficient directeur** est le nombre **dérivé** de $f$ en $a$.
Son équation réduite est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

**Exemple :**
Pour la fonction $f$ définie sur ℝ par $f(x)=x^2$ ,
la tangente au point $A$ d'abscisse 3 a pour équation réduite :

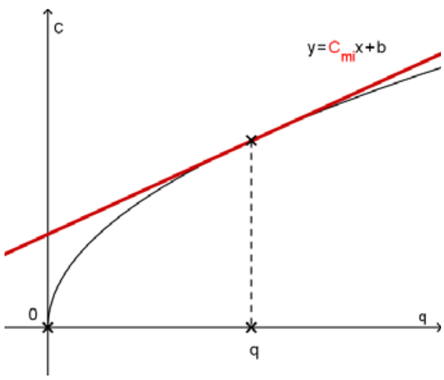
$$y=f'(3)\times(x-3)+f(3)=6(x-3)+9=6x-18+9$$

donc $y=6x-9$




**Cas particulier :** coût marginal instantané
Soit $C(q)$ le coût total pour des grandes quantités d'objets, ou des quantités divisibles (en t, en kg, en L, …)
On admet que le **coût marginal instantané** au niveau $q$ est assimilable au nombre dérivé du coût total en $q$ :

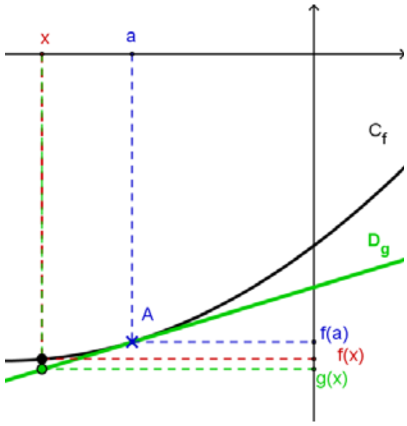
$$C_{mi}(q)=C'(q)$$



## Approximation affine

**Théorème :**
La tangente en $A$ à la courbe $C_f$ est la représentation d'une fonction affine $g$.
On admet que la fonction $g$ est la **meilleure approximation** affine de $f$ en $a$.
Pour un réel $x$ proche de $a$, l'image $f(x)$ est proche de $g(x)$ :

$$f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)$$




# III. Fonction dérivée

## 1) *Définition*

**Définition**

Une **fonction** $f$ est **dérivable** sur un intervalle $I$ lorsque, pour tout réel $x$ de l'intervalle, le nombre dérivé de $f$ en $x$ existe.
Alors la fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$ est appelé fonction dérivée de $f$ sur $I$.

**Exemples :**

- Pour la fonction $f$ définie sur ℝ par $f(x)=k$, ($k$ fixé)

pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{k-k}{h}=0$

Ainsi : $(k)' : x \longmapsto f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

- Pour la fonction $f$ définie sur ℝ par $f(x)=x$,

pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\dfrac{(x+h)-x}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Ainsi : $(x)' : x \longmapsto f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=1$

- Pour la fonction $f$ définie sur ℝ par $f(x)=x^2$,

pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\dfrac{x^2+2xh+{}^2h-x^2}{h}=2x+h$

Ainsi : $(x^2)' : x \longmapsto f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x$

- Pour la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$,

pour tout $x \in \; ]0;+\infty[$ : $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

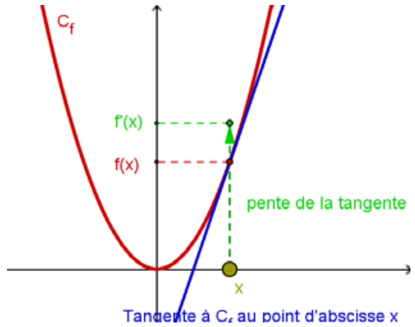
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{(x+h)}+\sqrt{(x)}}$ de plus $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{x+h}=\sqrt{x}$

Ainsi, pour $x \in \; ]0;+\infty[$ : $(\sqrt{x})' : x \longmapsto f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

## 2) Interprétation graphique

Dire que *f* est dérivable sur *I* signifie que, pour tout réel *x* de *I*, la courbe $C_f$, représentant la fonction *f*, admet une seule tangente, de coefficient directeur :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



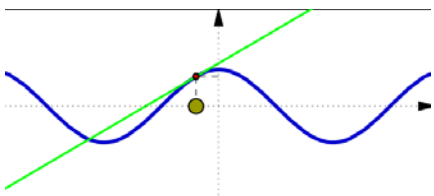

## 3) Sens de variation

**Théorème :**
Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I*.

- Si la dérivée est **positive** sur *I*, alors la fonction *f* est **croissante** sur *I*.
- Si la dérivée est **négative** sur *I*, alors la fonction *f* est **décroissante** sur *I*.
- Si la dérivée est **nulle** en toute valeur de *I*, alors la fonction *f* est **constante** sur *I*.

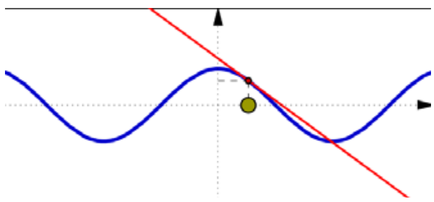
*Démonstration :*
On considère un réel $h>0$ et tel que $x+h \in I$.
Pour tout réel *x* de *I*, $x+h>x$ :

- Si *f* est croissante sur *I*, alors $f(x+h)\geqslant f(x)$ ;
  donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est positif et alors la dérivée sera positive.



*De même, si $h<0$, on démontrerait que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ reste positif.*

- Si *f* est décroissante sur *I*, alors $f(x+h)\leqslant f(x)$ ; donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est positif et alors la dérivée sera négative.



*De même, si $h<0$, on démontrerait que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ reste négatif.*

**Remarque :**
L'étude du signe de la dérivée permet donc de donner le sens de variation d'une fonction.

Exemple :
Pour la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^2$, nous avons vu que $f'(x)=2x$, on a donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)=2x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)=x^2$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

### 4) Extremum

**Théorème :**
Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$.
Si la dérivée s'annule en **changeant de signe**, la fonction admet un extremum sur $[a;b]$.

| *x* | a | c | b |
|---|---|---|---|
| *f '(x)* | – | 0 | + |
| *f(x)* | ↘ | minimum | ↗ |

| *x* | a | c | b |
|---|---|---|---|
| *f '(x)* | + | 0 | – |
| *f(x)* | ↗ | maximum | ↘ |

# IV. Calcul de dérivées

### 1) Calcul de dérivées

## Dérivée d'une somme de fonctions

**Théorème :**
La somme $u+v$ de deux fonctions dérivables sur un intervalle *I* est une fonction dérivable sur *I* et :

$$(u+v)'=u'+v'$$

*Démonstration :*
Soit $f(x)=(u+v)(x)=u(x)+v(x)$ avec *u* et *v* dérivables sur *I*.
Pour tout $x \in I$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}=\frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}$
Donc : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$
Et *u* et *v* étant dérivables sur *I* :
$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$ et $\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)$
ainsi $(u+v)'(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=u'(x)+v'(x)$

**Exemple :**
La fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^2+x$ est la somme de deux fonctions *u* et *v* définies par $u(x)=x^2$ et $v(x)=x$
Or *u* et *v* sont dérivables sur ℝ et $u'(x)=2x$ et $v'(x)=1$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=2x+1$

## Dérivée d'un produit de fonctions

**Théorème :**
Le produit *uv* de deux fonctions dérivables sur un intervalle *I* est une fonction dérivable sur *I* et :
$$(uv)'=u'v+uv'$$

*Démonstration :*
Soit $f(x)=(uv)(x)=u(x)\times v(x)$ avec *u* et *v* dérivables sur *I*.
Pour tout *x* ∈ *I*, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}=\dfrac{[u(x+h)\times v(x+h)]-[u(x)\times v(x)]}{h}$
Donc : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{u(x+h)\times v(x+h)-u(x)\times v(x+h)+u(x)\times v(x+h)-u(x)\times v(x)}{h}$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h)+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\times u(x)$$
Et *u* et *v* étant dérivables sur *I* :
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)$ de plus $\lim\limits_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$ ainsi
$$(uv)'(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$$

**Exemple :**
La fonction *f* définie sur [0;+∞[ par $f(x)=x\sqrt{x}$ est le produit des deux fonctions *u* et *v* définies par : $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.
Or *u* et *v* sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et on a vu que : $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Donc, pour tout $x>0$, $f'(x)=\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

**Cas particulier :**
Soit *u* une fonction dérivable sur un intervalle *I* et *k* un nombre réel.
La dérivée de *ku* est *k* fois la dérivée de *u*.
Si *k* est une constante : $(ku)'(x)=k\times u'(x)$

**Exemple :** dérivée d'une fonction polynôme
La fonction trinôme définie par : $f(x)=2x^2+8x+3$
En utilisant les règles de calculs des dérivées on obtient :
$f'(x)=2\times 2x+8\times 1+0=4x+8$

## Dérivée d'un quotient de fonctions

**Théorème :**
*u* et *v* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle *I*.
De plus, pour tout *x* de *I*, $v(x)\neq 0$
Le quotient $\dfrac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur *I*, et :
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

*Démonstration :*

Soit $f(x)=\frac{u}{v}(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec *u* et *v* dérivables sur *I* et $v(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(\frac{u}{v})(x+h)-(\frac{u}{v})(x)}{h}=\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}=\frac{\frac{u(x+h)\times v(x)-u(x)\times v(x+h)}{v(x+h)\times v(x)}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{u(x+h)\times v(x)-u(x)\times v(x)+u(x)\times v(x)-u(x)\times v(x+h)}{v(x+h)\times v(x)}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x)-\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\times u(x)\right]\times\frac{1}{v(x+h)\times v(x)}$$

Et u et v étant dérivables sur I :

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x)$ de plus $\lim\limits_{h\to 0}v(x+h)=v(x)$ ainsi puisque $v(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

**<u>Exemple :</u>**

La fonction *f* définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{x-1}$ est le quotient des fonctions *u* et *v* définies par : $u(x)=x$ et $v(x)=x-1$

*v* ne s'annule pas sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ et *u* et *v* sont dérivables sur ces intervalles : $u'(x)=1$ et $v'(x)=1$ .

Donc *f* est dérivable sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{-1\times(x-1)-x\times 1}{(x-1)^2}$

Ainsi pour tout $x\in\ ]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ , $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$

**<u>Cas particulier :</u>**

*v* est une fonction dérivable sur un intervalle *I* telle que, pour tout $x\in I$ , $v(x)\neq 0$ .

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur *I* et : $\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$ .

**<u>Exemple :</u>**

La fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ est l'inverse de la fonction *v* définie par $v(x)=x^2+1$ ( $v(x)\neq 0$ pour tout réel *x*).

Or pour tout réel *x*, $v'(x)=2x$ . Donc $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

## 2) Conséquences

### Dérivées usuelles

A partir des règles de calcul sur les fonctions dérivées établies on peut dresser un tableau des dérivées usuelles à connaître.

| fonction *f* | fonction dérivée $f'$ | validité |
|---|---|---|
| $f(x)=k$<br>$f(x)=x$<br>$f(x)=x^2$<br>$f(x)=x^n$ | $f'(x)=0$<br>$f'(x)=1$<br>$f'(x)=2x$<br>$f'(x)=n\times x^{n-1}$ | *k* nombre réel ; $x\in\mathbb{R}$<br>$x\in\mathbb{R}$<br>$x\in\mathbb{R}$<br>$x\in\mathbb{R}$ ; $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 2$ |
| $f(x)=\frac{1}{x}$<br>$f(x)=\frac{1}{x^2}$<br>$f(x)=\frac{1}{x^n}$ | $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$<br>$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$<br>$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$ | $x\in]0;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;0[$<br>$x\in]0;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;0[$<br>*n* entier non nul $x\in]0;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;0[$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | |

### Approximation de *n* hausses successives

Soit *n* un entier naturel et *t* un taux d'augmentation faible (de l'ordre de 1 %).
Une valeur subit *n* hausses successives de *t* %, alors cette valeur a augmenté approximativement de *nt* %.

- Pour $n=2$

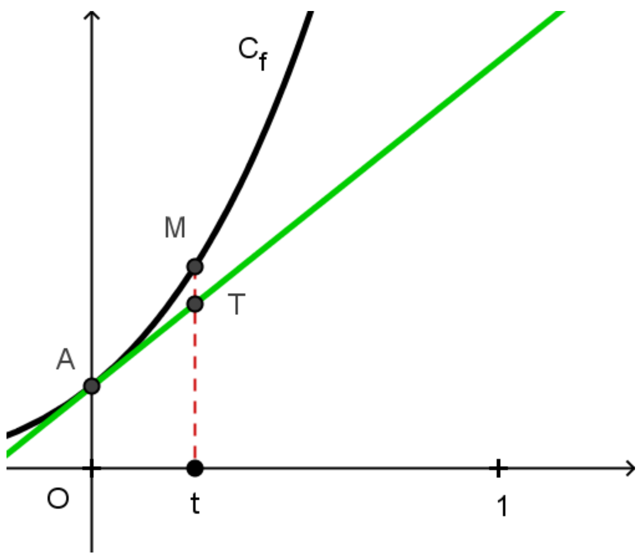
La fonction $f(t)=(1+t)^2$ représente la hausse globale due aux 2 hausses successives.

Pour un réel *t* proche de 0, l'image *f(t)* est proche de *g(t)* (équation de la tangente à $C_f$ en 0) :

$$f(t)\approx f'(0)(t-0)+f(0)$$

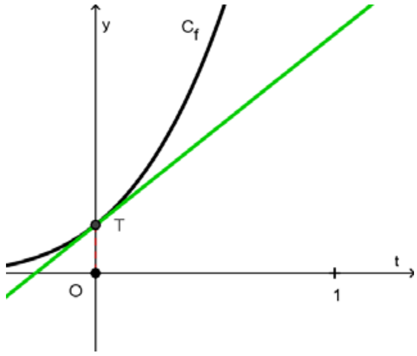
or $f'(t)=1\times(1+t)+(1+t)\times 1=2+2t$
donc on a $f'(0)=2$ et $f(0)=1$
Ainsi : $f(t)\approx 2t+1$
Et donc :

$$(1+t)^2\approx 1+2t$$



- On généralise la propriété en démontrant que pour *t* proche de 0 : $(1+t)^n \approx 1+nt$

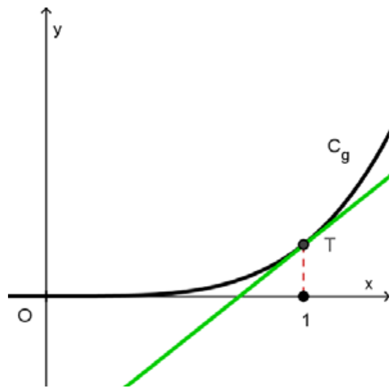
*Démonstration :*




On souhaite déterminer la tangente à $C_f$ (avec $f(t)=(1+t)^n$ ) au point d'abscisse $t=0$ .

On ne connaît pas $f'(t)$
*(il faudrait ici une formule sur la dérivée d'une fonction composée).*

On va donc « translater » le problème.




On effectue le changement de variables : $x=1+t$

On cherche alors à déterminer la tangente à $C_g$ (avec $g(x)=x^n$ ) au point d'abscisse $x=1$ .

On obtient alors :
$y=g'(1)(x-1)+g(1)$
avec $g(1)=1^n=1$
et $g'(x)=nx^{n-1}$ donc $g'(1)=n$ .
Ainsi $y=n(x-1)+1$

On conclut alors (avec $x-1=t$ )que l'équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $t=0$ .
$y=nt+1$ .

**<u>Exemple :</u>**
On place 1000 € au taux mensuel de 0,25 %.
Au bout d'un an ce capital a augmenté de, approximativement 3 %, car $12\times 0{,}25=3$ .
Nous savons que, en réalité, le coefficient multiplicateur mensuel est 1,0025. Donc le coefficient multiplicateur global sur un an est :

$$CM_{global}=1{,}0025^{12}\approx 1{,}0304$$

pour 1000 €, l'écart n'est que de 0,42 €.