

Chapitre 2

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Probabilités conditionnelles

1) Définition et propriétés

Définition :

Soit p une probabilité sur un univers Ω et A un événement tel que $p(A) \neq 0$.

Pour tout événement B , on appelle **probabilité de B sachant A** le réel :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Exemple :

On donne ci-dessous la répartition des spectacles sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif.

	Plein tarif	Demi-tarif	Total
Séance du matin	103	91	194
Séance du soir	280	26	306
Total	383	117	500

On choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :

- M : « La personne a assisté à la séance du matin. »
- D : « La personne a payé demi-tarif. »

La probabilité que la personne ait assisté à la séance du matin sachant qu'elle a payé demi-tarif est

$$p_D(M) = \frac{91}{117} \text{ car parmi les 117 personnes ayant payé demi-tarif, 91 sont venues le matin.}$$

De même, $p_M(D)$, la probabilité que la personne ait payé demi-tarif sachant qu'elle a assisté à la séance du matin est $p_M(D) = \frac{91}{194}$.

Remarques :

- Un **univers**, souvent noté Ω , est l'ensemble de tous les résultats possibles (événements) qui peuvent être obtenus au cours d'une expérience aléatoire. On se limite ici à un univers fini.

- Une **probabilité** p est une application qui, à un événement B quelconque associe un nombre réel.

$$p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$B \mapsto p(B)$$

Une probabilité doit satisfaire trois axiomes :

- $0 \leq p(B) \leq 1$
- $p(\Omega) = 1$
- $\sum_{B_i \subset \Omega} p(B_i) = 1$ (où les B_i sont les événements élémentaires)

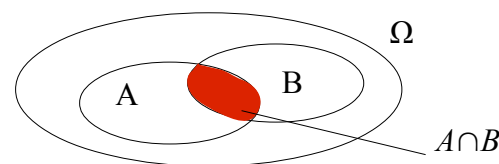
Propriété :

$p_A(B)$ est une **probabilité** et vérifie :

- $0 \leq p_A(B) \leq 1$
- $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$.

Démonstrations :

- p_A associe, à tout événement, un réel positif.
- Pour tout $B \in \Omega$, $(A \cap B) \subset A$ donc $0 \leq p(A \cap B) \leq p(A)$.
Ainsi $0 \leq \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \leq 1$ et $0 \leq p_A(B) \leq 1$



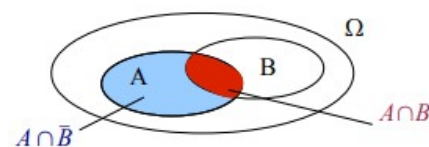
- Pour tous événements A et B , $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$.

$$\text{Donc } (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset.$$

$$\text{Donc } p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = p(A).$$

$$\text{et puisque } p(A) \neq 0, \quad \frac{p(A \cap B)}{p(A)} + \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(A)} = 1.$$

$$\text{Soit } p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1.$$



Exemples :

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si A est l'événement « le résultat est pair », on a :

$$p_A(\{2\}) = \frac{p(A \cap \{2\})}{p(A)} = \frac{p(\{2\})}{p(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad p_A(\{5\}) = \frac{p(A \cap \{5\})}{p(A)} = \frac{p(\emptyset)}{p(A)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

- Si B désigne l'événement « le résultat est un multiple de 3 », on a :

$$B = \{3 ; 6\} \text{ et } p_A(B) = \frac{p(\{6\})}{p(A)} = \frac{1}{3}.$$

Propriétés :

Soient A un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque dans l'univers Ω , on a :

- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
- $p_A(A) = 1$
- Si A et B sont incompatibles, $p_A(B) = 0$
- $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$

Remarque :

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$

Exemple :

On tire un objet au hasard dans le stock d'une usine constitué de claviers et de souris en deux versions, *familiale* et *gamer*.

30 % du stock est constitué de souris et, de plus, 40 % des souris sont des souris *gamer*.

Par ailleurs, 63 % du stock est constitué de claviers *familiaux*.

On considère les événements :

- C : « L'objet est un clavier »
- S : « L'objet est une souris »
- F : « L'objet est en version *famille* »
- G : « L'objet est en version *gamer* »

D'après l'énoncé, $p(S) = 0,3$ et $p_S(G) = 0,4$ donc $p(S \cap G) = p(S) \times p_S(G) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$. C'est-à-dire que l'objet soit une souris *gamer* est 0,12.

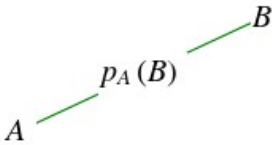
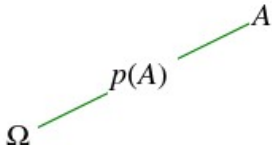
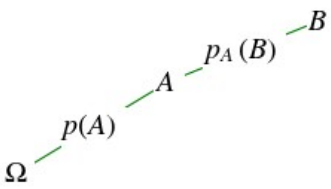
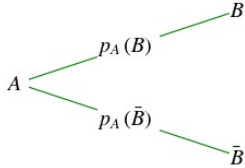
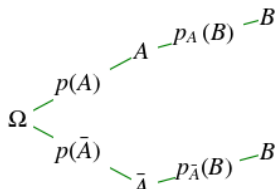
D'après l'énoncé, $p(C) = p(\bar{S}) = 1 - 0,3 = 0,7$ et $p(C \cap F) = 0,63$.

La probabilité de tirer un objet familial au hasard sachant que c'est un clavier est donc

$$p_C(F) = \frac{p(C \cap F)}{p(C)} = \frac{0,63}{0,7} = 0,9.$$

II. Arbres de probabilité

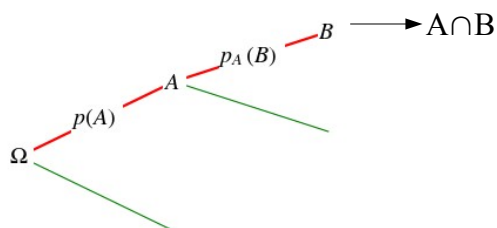
Pour modéliser une situation de probabilités conditionnelles, on utilise souvent un « arbre pondéré », dans lequel s'applique certaines règles traduisant les propriétés du cours.

Règles	Illustrations
À l'origine d'un arbre, on place l'événement certain, c'est-à-dire l'univers Ω sur lequel on définit une probabilité p .	Ω
Une branche représente un lien probabiliste entre deux événements, par exemple A et B . La probabilité de cette branche est la probabilité de B sachant A .	
Pour les branches issues de Ω , on remarque que, quel que soit A : $p_{\Omega}(A) = \frac{p(A \cap \Omega)}{p(\Omega)} = \frac{p(A)}{1} = p(A)$	
Une succession de plusieurs branches est appelé un chemin . Ce chemin représente l'intersection des événements rencontrés aux extrémités de ses branches et sa probabilité est égale au produit des probabilités notées sur ses branches. $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$	
Sur un arbre, la somme des probabilités des branches issues d'un même événement est toujours égale à 1 . Lorsque B_1, \dots, B_n forment une partition de Ω , on a : $p_A(B_1) + \dots + p_A(B_n) = 1$	
La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à celui-ci. $p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$	

Interprétation :

Sur un arbre pondéré :

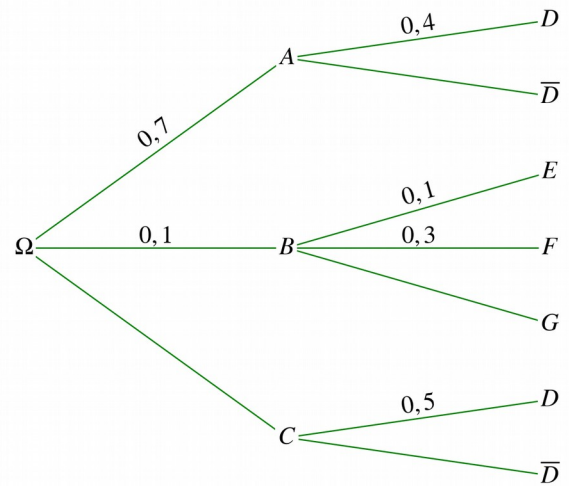
le chemin rouge représente l'événement $A \cap B$
et $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.



Exemple :

On considère l'arbre pondéré ci-contre.

- $0,7 + 0,1 + p(C) = 1$.
D'où $p(C) = 0,2$.
- $p_A(D) + p_A(\bar{D}) = 0,4 + p_A(\bar{D}) = 1$
D'où $p_A(\bar{D}) = 0,6$.
- De même, $p(G) = 1 - 0,1 - 0,3 = 0,6$.
- $p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$.



III. Formule des probabilités totales

1) Partition de l'univers

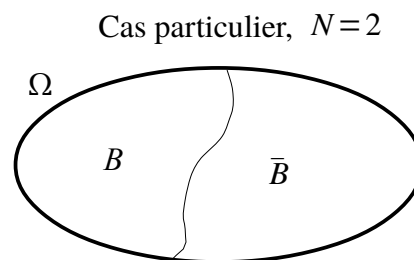
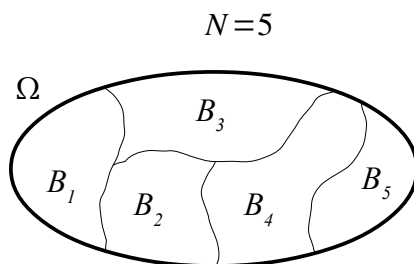
Définition :

Les événements B_1, \dots, B_n , pour $n \geq 2$, forment une **partition** de l'univers Ω lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées.

- Chacun de ces événements est **non vide** :
pour tout entier i avec $1 \leq i \leq n$, $B_i \neq \emptyset$.
- Ces événements sont deux à deux **disjoints** (ou incompatibles) :
pour tous entiers i et j , avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$: $B_i \cap B_j = \emptyset$
- Leur réunion est égale à Ω :

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$$

Illustrations :



2) Formule des probabilités totales

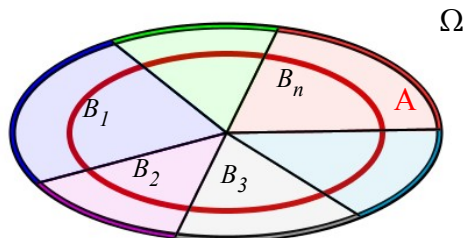
Propriété :

Si B_1, \dots, B_n sont des événements de probabilités non nulles et forment une partition de Ω , alors :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + \dots + p(A \cap B_n)$$

ou

$$p(A) = p(B_1) \times p_{B_1}(A) + \dots + p(B_n) \times p_{B_n}(A)$$



Propriété :

Si B est un événement de probabilité non nulle, alors pour tout événement A de l'univers Ω :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

ou

$$p(A) = p_B(A) \times p(B) + p_{\bar{B}}(A) \times p(\bar{B})$$

Démonstration :

Comme $B \neq \emptyset$, B et \bar{B} forment une partition de l'univers Ω .

On a alors, pour tout événement A de Ω , $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$, donc :

$$p(A) = p((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B))$$

De plus, $(A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ sont incompatibles alors $p(A) = p((A \cap \bar{B})) + p((A \cap B))$.

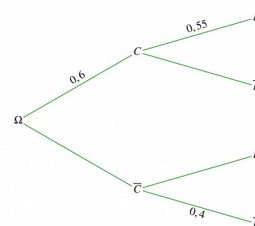
Exemple :

Dans un lycée, 60 % des élèves sont inscrits dans un club de sport. Parmi eux, on compte 55 % de filles. Parmi ceux qui ne sont pas inscrits dans un club de sport, 40 % sont des garçons.

On choisit un élève au hasard.

- C est l'événement : « être inscrit dans un club de sport »
- F est l'événement : « être une fille »

Les événements C et \bar{C} forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales, la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille est :



$$p(F) = p(C \cap F) + p(\bar{C} \cap F) = p(C) \times p_C(F) + p(\bar{C}) \times p_{\bar{C}}(F) = 0,6 \times 0,55 + 0,4 \times 0,6 = 0,57$$

IV. Indépendance

1) Événements indépendants

Définition :

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Remarques :

- L'indépendance de deux événements traduit l'idée suivante :
« la réalisation (ou non) de l'un n'influence pas la réalisation (ou non) de l'autre »
- Ne pas confondre « A et B indépendants » et « A et B incompatibles ».

Exemple :

Pour le lancer d'un dé équilibré à six faces, les événements A « le résultat est pair » et B « le résultat est 2 » ne sont pas indépendants.

En effet, $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $p(A) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$

Si C est l'événement « le résultat est supérieur ou égal à 5 », alors les événements A et C sont indépendants.

Propriété :

Si $p(A) \neq 0$, on a :

A et B indépendants si, et seulement si, $p_A(B) = p(B)$

Démonstration :

On suppose $p(A) \neq 0$. On a alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.

Ainsi, A et B sont indépendants si, et seulement si :

$$p(A) \times p_A(B) = p(A) \times p(B)$$

c'est-à-dire $p_A(B) = p(B)$, en simplifiant par $p(A) \neq 0$.

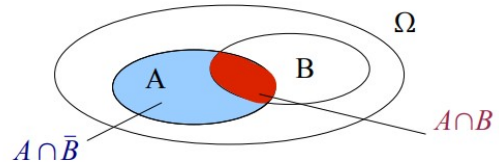
Propriété :

Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et \bar{B} sont indépendants.

Démonstration :

L'événement A est la réunion des deux événements incompatibles $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$, donc :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}).$$



On en déduit $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$.

A et B étant indépendants, on a $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

d'où $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A) \times p(B)$

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times (1 - p(B)) \quad p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times (p(\bar{B}))$$

Ainsi, par définition A et \bar{B} sont indépendants.

Remarque :

Supposons que $p(A) \neq 0$. Il découle de la propriété précédente que, si A et B sont indépendants alors $p_A(B) = p_{\bar{A}}(B)$.

Ce qui signifie que la réalisation ou non de l'événement A n'influe pas sur la réalisation de l'événement B.

Exemple :

Matthieu, élève de Seconde, possède son téléphone portable depuis qu'il est entré au collège. Il hésite à en changer. En se rendant chez son opérateur, il apprend que :

- La probabilité que « le téléphone tombe en panne à cause d'un défaut de composants » appelé événement C, est de 0,2.
- La probabilité que « le téléphone tombe en panne à cause de la carte SIM » appelé événement S, est de 0,4.

Ces deux événements sont supposés indépendants.

Matthieu évalue alors la probabilité « qu'au moins une des deux pannes se produise », c'est-à-dire l'événement $C \cup S$.

$$p(C \cup S) = p(C) + p(S) - p(C \cap S)$$

$$p(C \cup S) = p(C) + p(S) - p(C) \times p(S) \quad (C \text{ et } S \text{ sont supposés indépendants})$$

$$p(C \cup S) = 0,2 + 0,4 - 0,2 \times 0,4 = 0,52$$

Cette probabilité étant élevée, Matthieu décide de changer de téléphone.

Dans cet exemple, l'événement contraire de « au moins une des deux pannes se produit » est l'événement « aucune panne ne se produit », noté $\bar{C} \cap \bar{S}$. Il en découle que.

$$p(C \cup S) = 1 - p(\bar{C} \cap \bar{S})$$

$$p(C \cup S) = 1 - p(\bar{C}) \times p(\bar{S}) \quad (\bar{C} \text{ et } \bar{S} \text{ sont supposés indépendants})$$

$$p(C \cup S) = 1 - 0,8 \times 0,6 = 0,52$$

On retrouve bien le même résultat.

2) Épreuves indépendantes

Définition :

On appelle **succession de deux épreuves indépendantes** la répétition à l'identique d'une expérience aléatoire deux fois ; les résultats de la première épreuve n'influençant pas ceux de la seconde.

Remarques :

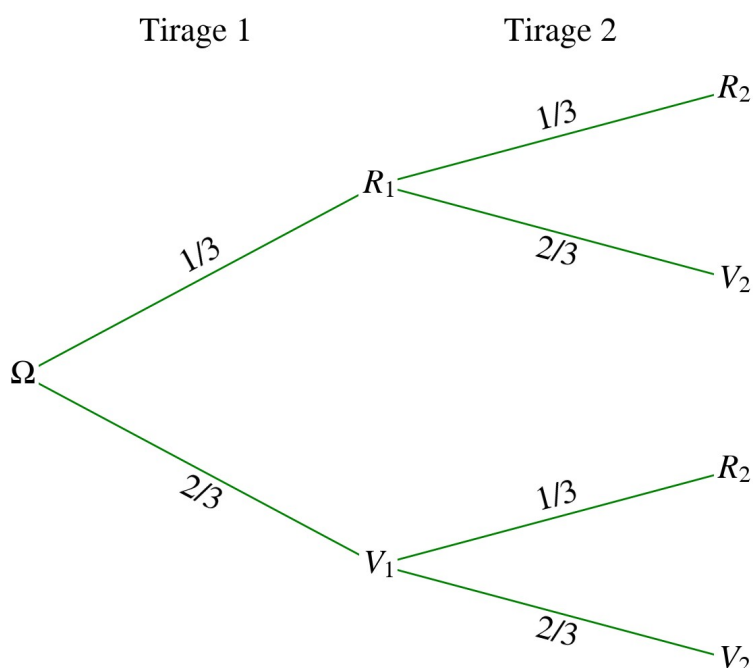
- Lors de la succession de deux épreuves indépendantes, les probabilités de chaque issue ne changent pas.
- On peut assimiler une succession de deux épreuves indépendantes à deux tirages successifs avec remise.

Exemple :

Une urne contient deux boules vertes et une boule rouge.

On tire successivement et avec remise deux boules.

- Le résultat du second tirage n'est pas influencé par celui du premier tirage ; c'est une succession de deux épreuves indépendantes.
- On peut utiliser un arbre pondéré pour représenter les deux tirages indépendants. Les probabilités sont alors identiques dans les deux niveaux.



Propriété :

La **probabilité** d'un événement constitué d'une **succession** d'épreuves indépendantes est le **produit** de chacun de ces résultats.

Exemple :

Le lancer de deux dés équilibrés à six faces est assimilable à deux tirages au hasard d'une boule dans une urne contenant six boules numérotées de 1 à 6, avec remise, c'est-à-dire à deux épreuves identiques et indépendantes.

Ainsi, par exemple, la probabilité d'obtenir la suite de résultats : 1 puis 4 est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.