

Chapitre 13

Loi des grands nombres

I. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev

1) Inégalité de Markov

Définition :

Une variable aléatoire est dite **positive ou nulle** dans un univers Ω , lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des réels positifs ou nuls.

Remarque :

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$.

Exemple :

La variable aléatoire donnant le nombre de faces numérotées 1 sur 10 lancers d'un dé est positive ou nulle.

Propriété (inégalité de Markov) :

Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance $E(X)$ et a un nombre réel strictement positif. On a :

$$p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} .$$

Démonstration :

Notons $\mathcal{E} = X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ où les valeurs x_i positives sont rangées par ordre croissant.

Le nombre a étant positif, il existe un entier k tel que $x_{k-1} < a \leq x_k$.

L'espérance de X est alors :

$$E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + \dots + x_{k-1} \times p(X = x_{k-1}) + x_k \times p(X = x_k) + \dots + x_n \times p(X = x_n).$$

$$E(X) \geq x_k \times p(X = x_k) + \dots + x_n \times p(X = x_n).$$

$$E(X) \geq a \times p(X = x_k) + \dots + a \times p(X = x_n).$$

$$E(X) \geq a \times (p(X = x_k) + \dots + p(X = x_n)).$$

$$E(X) \geq a \times p(X \geq a).$$

$$\text{Ainsi puisque } a > 0, \text{ on a } p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} .$$

Remarques :

- Ce résultat signifie que la probabilité que X prennent des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grande.
- Si $a \leq E(X)$, l'inégalité de Markov n'a pas d'intérêt (on dit qu'elle est triviale).

En effet la borne $\frac{E(X)}{a}$ est alors supérieure à 1 et donc nécessairement, à la probabilité $p(X \geq a)$

- Cette inégalité permet de trouver un majorant mais pas forcément le plus petit possible.

Exemples :

- Soit X une variable aléatoire positive d'espérance 1.

D'après l'inégalité de Markov, on a $p(X \geq 100) \leq 0,01$.

Autrement dit, une variable aléatoire positive dont l'espérance vaut 1 a au plus une chance sur 100 de dépasser 100.

- En 2015, le salaire brut mensuel moyen en France était de 2442 €.

On choisit un salarié au hasard et on note X la variable aléatoire donnant son salaire. Les salaires étant positifs ou nuls, on sait que X est une variable aléatoire positive ou nulle.

On peut donc appliquer l'inégalité de Markov sur un exemple :

$$p(X \geq 7326) \leq \frac{2442}{7326} \text{ soit } p(X \geq 7326) \leq \frac{1}{3}$$

2) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété :

Soit X une variable aléatoire et soit a un nombre réel strictement positif. On a :

$$p(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} .$$

Démonstration :

Comme $a > 0$, les inégalités $|X - E(X)| \geq a$ et $[X - E(X)]^2 \geq a^2$ sont équivalentes.

De plus la variable $(X - E(X))^2$ est positive ou nulle.

On applique donc l'inégalité de Markov à la variable $[X - E(X)]^2$ et au réel a^2 .

Ainsi $p([X - E(X)]^2 \geq a^2) \leq \frac{E[X - E(X)]^2}{a^2}$. Or $E([X - E(X)]^2) = V(X)$ donc

$$p([X - E(X)]^2 \geq a^2) \leq \frac{V(X)}{a^2} \text{ et on a bien } p(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} .$$

Remarques :

- La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins a de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que a est grand.

- L'inégalité peut donc aussi s'écrire $p(X \notin]E(X) - a ; E(X) + a[) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

- $1 - p(|X - E(X)| \geq a) = p(E(X) - a < X < E(X) + a)$.

L'inégalité peut donc aussi s'écrire $p(|X - E(X)| < a) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}$.

- On dit que $[E(X) - a ; E(X) + a]$ est un intervalle de fluctuation de X.
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin d'être optimale.

En réalité il est possible que la probabilité soit bien inférieure au majorant obtenu.

Exemples :

- Dans une usine, la variable aléatoire L donnant la largeur, en millimètres, d'une puce électronique prise au hasard a pour espérance $E(L) = 12$ et pour variance $V(L) = 0,01$.

Si la largeur d'une puce n'appartient pas à $]11 ; 13[$, c'est-à-dire $|L - 12| \geq 1$, la puce n'est pas commercialisable.

La probabilité qu'une puce ne soit pas commercialisable est donc :

$$p(|L - 12| \geq 1) \text{ comme } V(L) = 0,01, \text{ on a } p(|L - 12| \geq 1) \leq \frac{0,01}{1^2} \text{ et donc :}$$

$$p(|L - 12| \geq 1) \leq 0,01$$

- Si $a = 2\sigma(X)$ où $\sigma(X)$ est l'écart-type de la variable X, alors :

$$p(|X - E(X)| \geq 2\sigma(X)) \leq \frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2} = \frac{1}{4}.$$

Autrement dit, la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance d'au moins le double de son écart-type est inférieure à $\frac{1}{4} = 0,25$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire et soit a un nombre réel strictement positif. On a :

$$p(|X - E(X)| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

Remarque :

On mesure la dispersion d'une variable aléatoire autour de son espérance en nombre d'écarts-type.

Exemples :

- Dans une usine, la variable aléatoire L donnant la largeur, en millimètres, d'une puce électronique prise au hasard a pour espérance $E(L) = 12$ et pour variance $V(L) = 0,01$.

$$\text{Donc } \sigma(L) = \sqrt{0,01} = 0,1.$$

Ainsi la probabilité que la largeur de la puce soit éloignée d'au moins $k = 5$ écarts-type, c'est-à-dire $5 \times 0,1 = 0,5$ de son espérance 12 est inférieure ou égale à $\frac{1}{5^2} = 0,04$.

Il y a, au maximum, 4 % de chance que la largeur d'une puce soit inférieure ou égale à $12 - 0,5 = 11,5$ mm ou supérieure ou égale à $12 + 0,5 = 12,5$ mm.

- Pour X qui suit la loi $\mathcal{B}(20 ; 0,45)$,

on a $E(X) = 20 \times 0,45 = 9$ et $\sigma(X) = \sqrt{20 \times 0,45 \times 0,55} \approx 2,22$.

Donc, d'après la propriété précédente, on a $p(|X - 9| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{2^2}$.

Donc $p(|X - 9| \geq 2\sigma) \leq 0,25$.

D'autre part $p(|X - 9| \geq 2\sigma) = p(X \leq 9 - 2\sigma) + p(X \geq 9 + 2\sigma) = p(X \leq 4) + p(X \geq 14)$ puisque X ne prend que des valeurs entières.

On peut vérifier que $p(X \leq 4) + p(X \geq 14)$ semble très inférieure à 0,25.

II. Loi des grands nombres

1) L'inégalité de concentration

Définition :

On considère n expériences aléatoires identiques et indépendantes.

On note X_1, X_2, \dots, X_n les variables aléatoires associées à ces expériences, toutes de même loi.

On note $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$.

M_n s'appelle la **moyenne empirique** des variables X_1, X_2, \dots, X_n .

Propriété (inégalité de concentration) :

On considère une expérience aléatoire et X la variable aléatoire associée à cette expérience, d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

On répète n fois cette expérience de manière indépendante.

On obtient un échantillon de taille n composé de n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n .

Les variables X_1, X_2, \dots, X_n ont la même loi (elles ont donc même espérance $E(X)$ et même variance $V(X)$).

Pour tout réel $a > 0$,

$$p(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}.$$

Démonstration :

D'après les propriétés sur l'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon, on a $E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n , on obtient :

$$p(|M_n - E(M_n)| \geq a) \leq \frac{V(M_n)}{a^2}, \text{ c'est-à-dire } p(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}.$$

Exemple :

On lance n fois un dé équilibré à 8 faces et on nomme X_i la variable aléatoire donnant le résultat du i -ème lancer. On admet que $E(X_i) = 4,5$ et $V(X_i) = 5,25$ pour tout entier i entre 1 et n .

Les lancers étant indépendants, (X_1, X_2, \dots, X_n) est un échantillon de variables aléatoires d'espérance $E(X) = 4,5$ et $V(X) = 5,25$ et de moyenne $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

D'après l'inégalité de concentration pour $n = 100$ et $a = 0,5$, on a :

$$p(|M_{100} - 4,5| \geq 0,5) \leq \frac{5,25}{100 \times 0,5^2} \text{ soit } p(|M_{100} - 4,5| \geq 0,5) \leq 0,21.$$

La probabilité que l'écart entre M_{100} (la moyenne des 100 premiers résultats) et 4,5 soit supérieure ou égale à 0,5 est inférieure ou égale à 0,21.

2) Loi faible des grands nombres

Propriété :

Soient $(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$ un échantillon de variables aléatoires suivant la même loi et ayant pour espérance $E(X)$ et $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel strictement positif a fixé,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$

Démonstration :

On applique l'inégalité de concentration à la variable aléatoire M_n .

$0 \leq p(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$ et puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(X)}{na^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} p(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$.

Remarque :

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple :

On lance n fois un dé équilibré à 8 faces et on nomme X_i la variable aléatoire donnant le résultat du i -ème lancer. On admet que $E(X_i) = 4,5$ et $V(X_i) = 5,25$ pour tout entier i entre 1 et n .

Les lancers étant indépendants, (X_1, X_2, \dots, X_n) est un échantillon de variables aléatoires d'espérance $E(X) = 4,5$ et $V(X) = 5,25$ et de moyenne $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

Pour $a = 0,1$, d'après la loi des grands nombres, $p(|M_n - 4,5| \geq 0,1)$, que l'on peut également écrire $p(M_n \notin]4,4 ; 4,6[)$, tend vers 0 lorsque la taille de l'échantillon tend vers $+\infty$.

On en déduit que $p(M_n \in]4,4 ; 4,6[)$ tend vers 1 lorsque la taille de l'échantillon tend vers $+\infty$. Autrement dit, si l'on fait un nombre suffisamment grand de lancers, on peut rendre l'événement « la moyenne de l'échantillon est dans $]4,4 ; 4,6[$ » aussi probable qu'on le souhaite en prenant n suffisamment grand.