Chapitre 2
Systèmes

I. Systèmes d'équations linéaires

1) Équation linéaire

Définition :
Une **équation linéaire** à deux inconnues x et y est une équation de la forme

$$ax+by=c$$

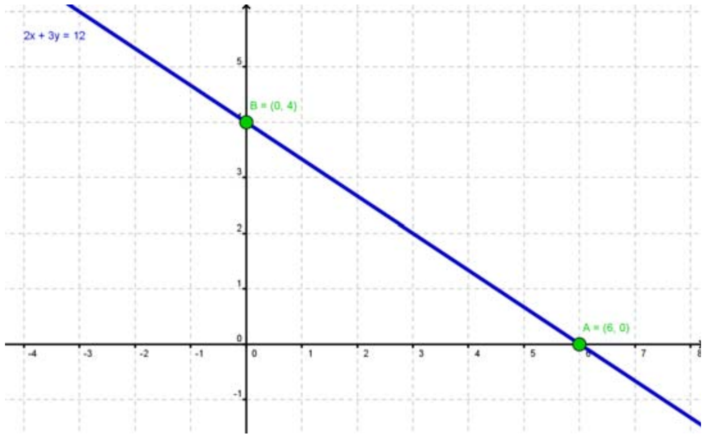
où a, b et c sont des nombres réels (fixés).

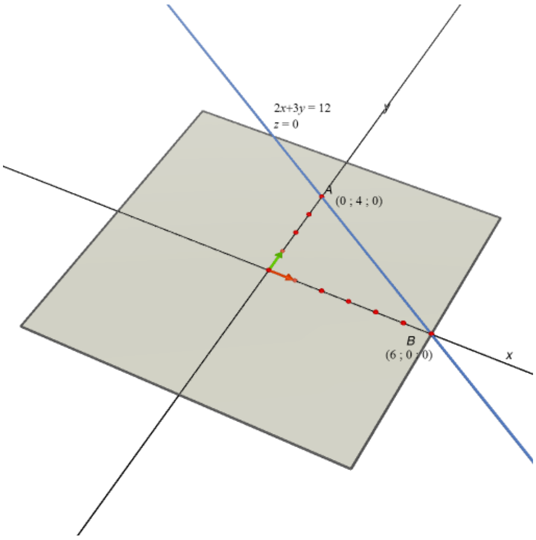
Interprétation graphique :
Lorsque a et b ne sont pas nuls en même temps, les couples $(x\ ;\ y)$ solutions de cette équation sont les **coordonnées des points** de la **droite** d'équation : $ax+by=c$.

Exemple :
Les couples solutions de l'équation $2x+3y=12$ sont les coordonnées des points de la droite d d'**équation réduite** : $y=-\frac{2}{3}x+4$.

Si $x = 0$ alors $y = 4$ et si $y = 0$ alors $x = 6$

On obtient ainsi deux solutions particulières $(0\ ;\ 4)$ et $(6\ ;\ 0)$, coordonnées des points d'intersection de la droite d avec les axes du repère.

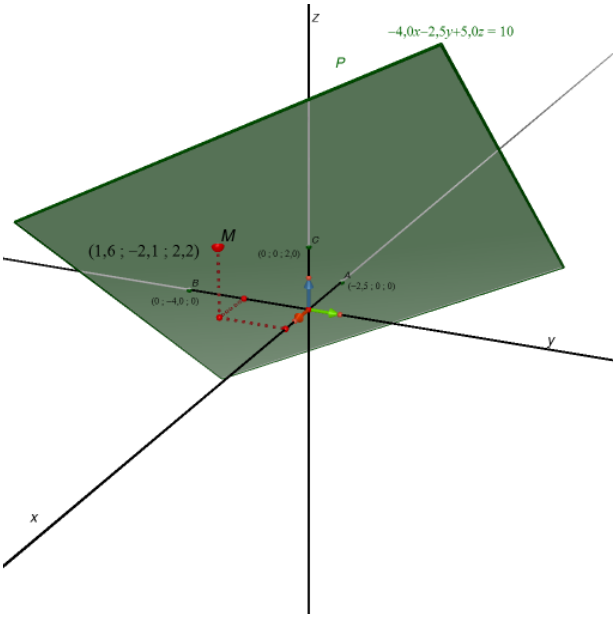




<u>Généralisation :</u>

Une équation de la forme $ax+by+cz=d$ est une équation linéaire à trois inconnues x, y et z.

Une solution de cette équation est un triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui correspond aux **coordonnées d'un point** appartenant à un **plan** de l'espace.



2) *<u>Système d'équations linéaires</u>*

- <u>Système de deux équations linéaires à deux inconnues</u>

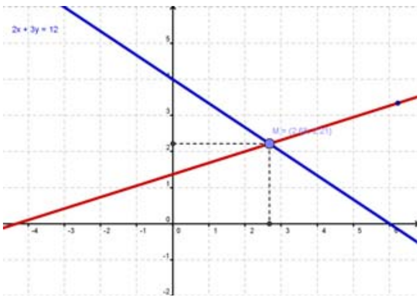
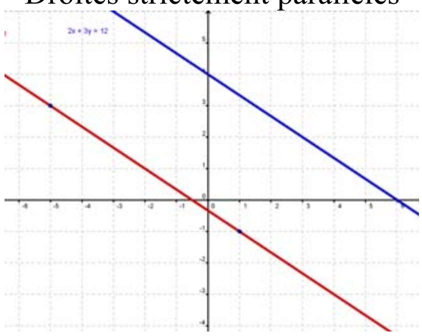
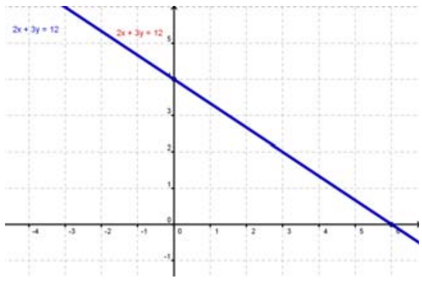
<u>Définition :</u>
Un **système de deux équations linéaires** à deux inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver **tous** les couples $(x\ ;\ y)$ vérifiant **simultanément** ces deux équations.

<u>Interprétation graphique :</u>
Lorsque $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ et $(a'\ ;\ b') \neq (0\ ;\ 0)$, chaque équation est l'équation d'une droite.
Résoudre ce système revient à déterminer l'intersection des deux droites d et d' dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Lorsque les coefficients a, b et a', b' sont proportionnels $\left(\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\right)$, les droites sont parallèles.

Droites d et d' sécantes	Droites strictement parallèles	Droites confondues
		
Une unique solution le couple $(x_M\ ;\ y_M)$	Aucune solution	Une infinité de solutions

Remarque :
Le nombre ***ab'–a'b*** joue ainsi un rôle important dans la résolution d'un système.
Il s'agit du **déterminant du système**.

- Si le **déterminant** du système est **non nul** on est ainsi assuré de l'**existence** d'une solution (on peut donc résoudre le système par **substitution** ou **combinaison**).
- Par contre si le **déterminant** est **nul**, il reste à déterminer si le système n'a **pas de solution où** bien s'il en possède une **infinité**.

Formules de Cramer :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$\begin{cases} a'ax + a'by = a'c \\ aa'x + ab'y = ac' \end{cases}$ $\begin{cases} a'ax + a'by = a'c \\ (ab'-a'b)y = (ac'-a'c) \end{cases}$			$\begin{cases} b'ax + b'by = b'c \\ ba'x + bb'y = bc' \end{cases}$ $\begin{cases} b'ax + b'by = b'c \\ (ba'-b'a)x = (bc'-b'c) \end{cases}$		
Si ab'-a'b≠0	Si ab'-a'b=0		Si ba'-b'a≠0	Si ba'-b'a=0	
$y=\frac{(ac'-a'c)}{(ab'-a'b)}$	Si ac'-a'c=0	Si ac'-a'c≠0	$x=\frac{(bc'-b'c)}{(ba'-b'a)}$	Si bc'-b'c=0	Si bc'-b'c≠0
	Il existe une infinité de solution	Pas de solution		Il existe une infinité de solution	Pas de solution

Utilisation de la calculatrice :

```
PROGRAM:SYSTEME
:Input "A1=",A
:Input "B1=",B
:Input "C1=",C
:Input "A2=",D
:Input "B2=",E
:Input "C2=",F
:(AE-BD)→G
:Disp "DET=",G▶F
rac
:If G=0
:Then
:If AF-DC=0
:Then
:Disp "INFINITE
DE SOL."
:Else
:Disp "PAS DE SO
L."
:End
:Else
:Disp "1 SOLUTIO
N"
:{(-(BF-EC)/G),(
(AF-DC)/G)}→L1
:Disp L1▶Frac
:End
```

```
prgmSYSTEME
A1=2
B1=3
C1=60
A2=1/3
B2=1/2
C2=10
```

```
A2=1/3
B2=1/2
C2=10
DET=
                0
INFINITE DE SOL.
             Fait
```

```
prgmSYSTEME
A1=-1
B1=1
C1=12
A2=1/4
B2=-1/4
C2=3
```

```
A2=1/4
B2=-1/4
C2=3
DET=
                0
PAS DE SOL.
             Fait
```

```
prgmSYSTEME
A1=1/3
B1=1/2
C1=1
A2=1
B2=1
C2=4
```

```
B2=1
C2=4
DET=
             -1/6
1 SOLUTION
           {6 -2}
             Fait
```

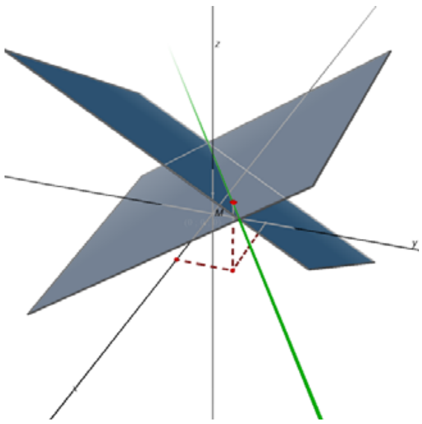
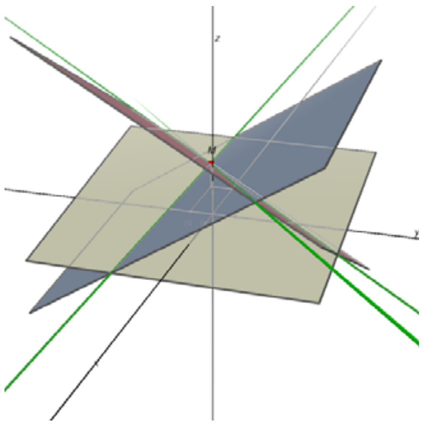
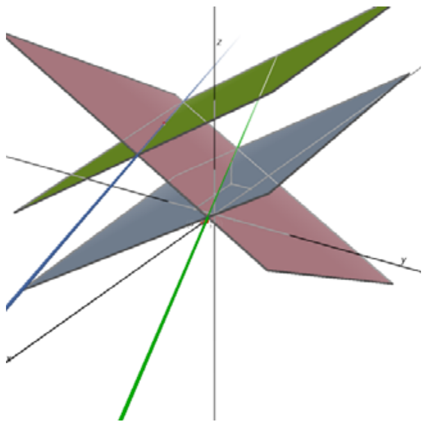
- <u>Système de trois équations linéaires à trois inconnues</u>

<u>Définition :</u>
Un **système de trois équations linéaires** à trois inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver **tous** les triplets *(x ; y ; z)* vérifiant **simultanément** ces trois équations.

Il existe de nombreux cas de figure :

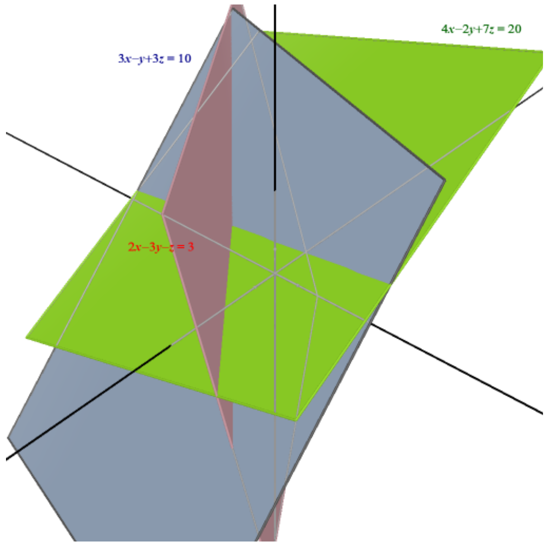
Système de deux équations à trois inconnues	Les trois plans se coupent en un seul point	Deux plans sont parallèles
		
une infinité de solution	une unique solution	pas de solution

Ne disposant pas de méthode pour connaître à priori le nombre de solutions, on résout donc ce système en choisissant l'une des deux méthodes connues : **substitution** ou **combinaison**.

Exemples :

- Résoudre le système S suivant :

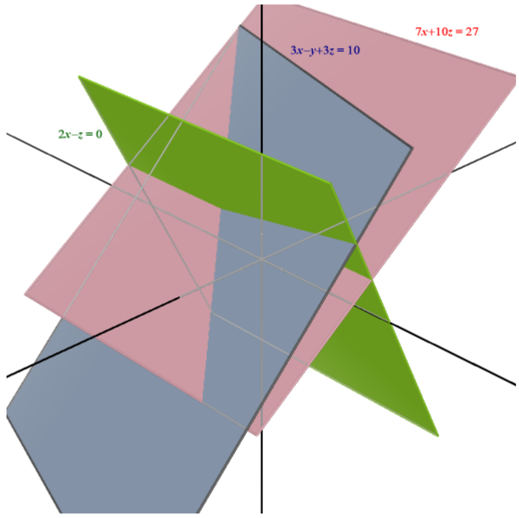
$$\begin{cases} 3x-y+3z=10 & [E1] \\ 4x-2y+7z=20 & [E2] \\ 2x-3y-z=3 & [E3] \end{cases}$$



On va utiliser la **méthode de substitution**.

$$\begin{cases} {\color{green} y=3x+3z-10} & {\color{green} [E1]} \\ 4x-2{\color{green} y}+7z=20 & [E2] \\ 2x-3{\color{green} y}-z=3 & [E3] \end{cases}$$

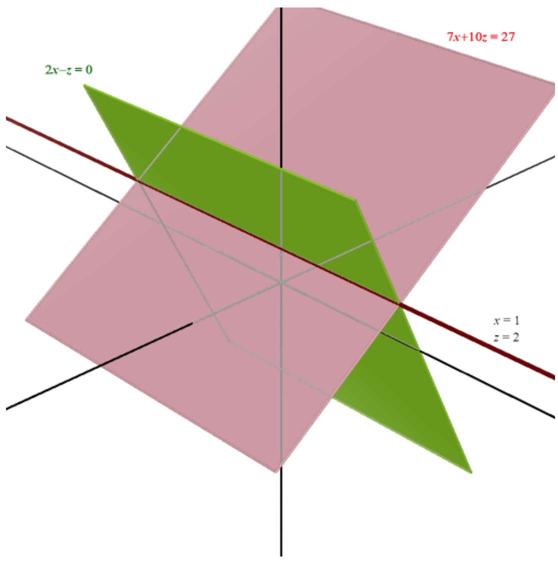
$$\begin{cases} y=3x+3z-10 & [E1] \\ 4x-2\times({\color{green} 3x+3z-10})+7z=20 & {\color{green} [E2']} \\ 2x-3\times({\color{green} 3x+3z-10})-z=3 & {\color{green} [E3']} \end{cases}$$



$$\begin{cases} y=3x+3z-10 & [E1] \\ -2x+z=0 & [E2'] \\ -7x-10z=-27 & [E3'] \end{cases}$$

On extrait alors un système S' de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} -2x+z=0 & [E2'] \\ -7x-10z=-27 & [E3'] \end{cases}$$

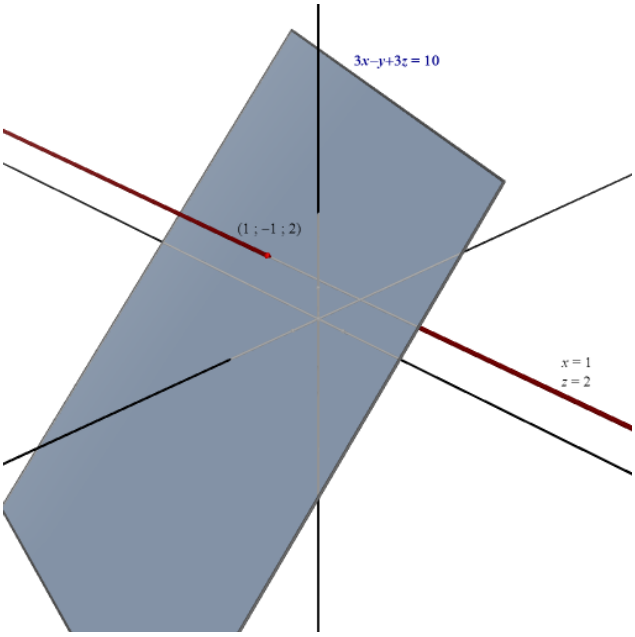


Le système S' admet une unique solution :

$x = 1$ et $z = 2$

Il ne reste plus qu'à déterminer y (on choisit une équation : la [$E1$] semble plus aisée)

$$y=3\times 1+3\times 2-10=-1\ [E1]$$



<u>Vérification :</u>

On vérifie que le triplet *(1 ; -1 ; 2)* est solution de S : $\begin{cases} 3\times 1-(-1)+3\times 2=10 \\ 4\times 1-2\times(-1)+7\times 2=20 \\ 2\times 1-3\times(-1)-2=3 \end{cases}$

<u>Conclusion :</u> S a une unique solution *(1 ; -1 ; 2).*

- Résoudre le système S suivant :

$$\begin{cases} 4x+2y+z=1 & [1] \\ 4x-2y+z=1 & [2] \\ x+y+z=0 & [3] \end{cases}$$

On va utiliser la **méthode de combinaison**.

$$\begin{cases} 4x+2y+z=1 & [1] \\ (4x+2y+z)+(4x-2y+z)=1+1 & [2']=[1]+[2] \\ 2\times(x+y+z)+(4x-2y+z)=2\times 0+1 & [3']=2\times[3]+[2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+2y+z=1 & [1] \\ 8x+2z=2 & [2'] \\ 6x+3z=1 & [3'] \end{cases}$$

On extrait alors un système S' de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} 8x+2z=2 & [2'] \\ 6x+3z=1 & [3'] \end{cases}$

Le système S' admet une unique solution $x=\frac{1}{3}$ et $z=-\frac{1}{3}$.

Il ne reste plus qu'à déterminer y (on choisit une équation : la [3] semble plus aisée)

$$y=-x-z=-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \quad [3]$$

Vérification :

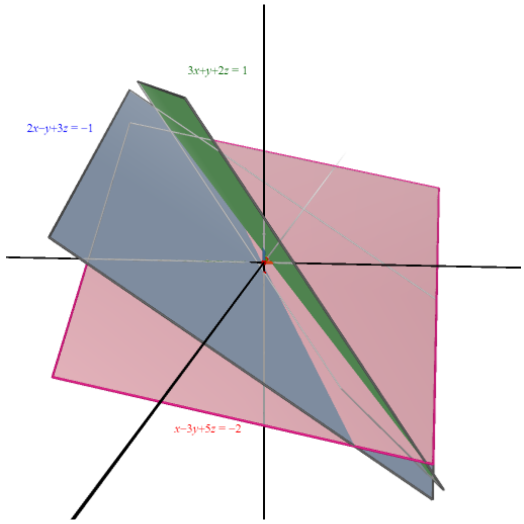
On vérifie que le triplet $\left(\frac{1}{3};0;-\frac{1}{3}\right)$ est solution de S : $\begin{cases} 4\times\left(\frac{1}{3}\right)+2\times 0+\left(-\frac{1}{3}\right)=1 \\ 4\times\left(\frac{1}{3}\right)-2\times 0+\left(-\frac{1}{3}\right)=1 \\ \frac{1}{3}+0+\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \end{cases}$.

Conclusion : S a une unique solution $\left(\frac{1}{3};0;-\frac{1}{3}\right)$.

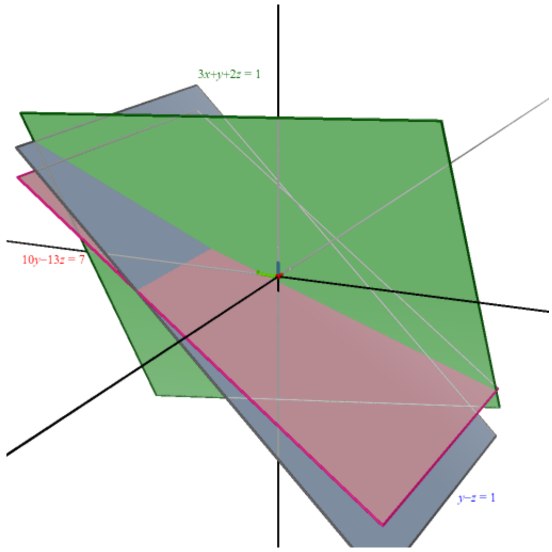
Méthode de Gauss :

Le but de la méthode de Gauss est de transformer, par des combinaisons linéaires appropriées, un système (S) donné en un système triangulaire (S') plus facile à résoudre.

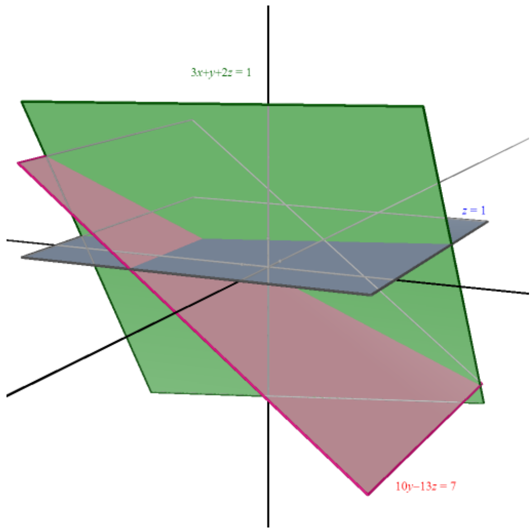
$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 & [1] \\ -x+3y-5z=2 & [2] \\ 2x-y+3z=-1 & [3] \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 & [1] \\ 10y-13z=7 & [2']=3[2]+[1] \\ -5y+5z=-5 & [3']=3[3]-2[1] \end{cases}$$

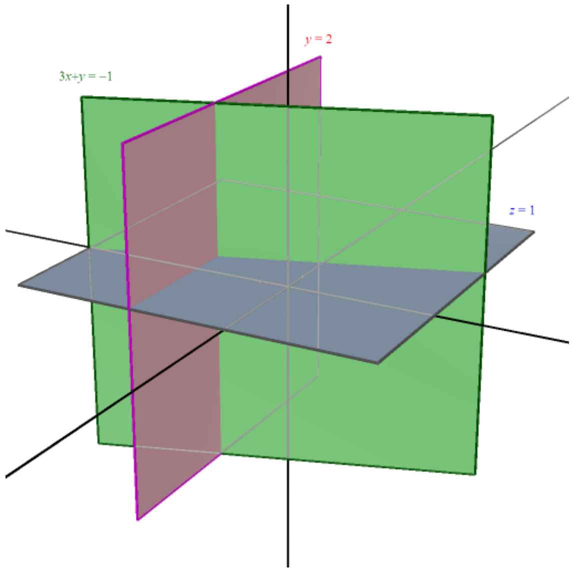


$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 & [1] \\ 10y-13z=7 & [2'] \\ -3z=-3 & [3'']=2[3']+[2'] \end{cases}$$



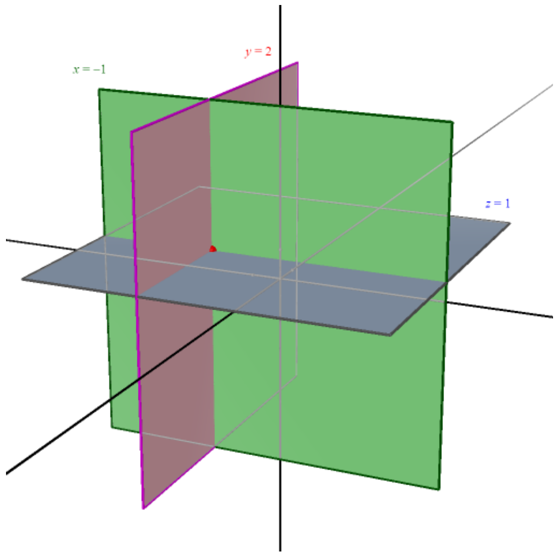
$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 & [1] \\ 10y-13z=7 & [2'] \\ z=1 & [3''] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y+2\times 1=1 & [1] \\ 10y-13\times 1=7 & [2'] \\ z=1 & [3''] \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x+y=-1 & [1] \\ y=2 & [2'] \\ z=1 & [3''] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+2=-1 & [1] \\ y=2 & [2'] \\ z=1 & [3''] \end{cases}$$

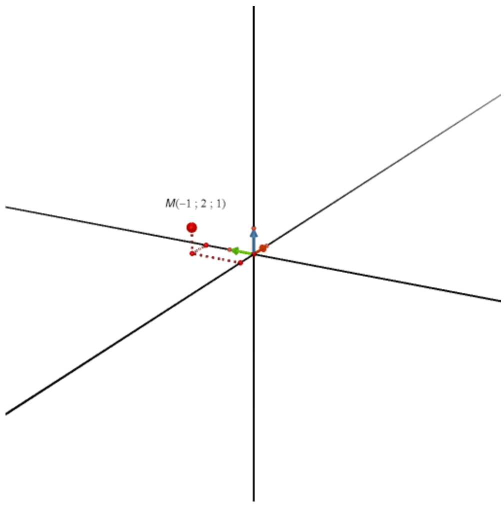


$$\begin{cases} x=-1 & [1] \\ y=2 & [2'] \\ z=1 & [3''] \end{cases}$$

<u>Vérification :</u>

On vérifie que le triplet *(-1 ; 2 ; 1)* est solution de *S* :

$$\begin{cases} 3\times(-1)+2+2\times 1=1 \\ -(-1)+3\times 2-5\times 1=2 \\ 2\times(-1)-2+3\times 1=-1 \end{cases}$$



<u>Conclusion :</u> *S* a une unique solution *(-1 ; 2 ; 1).*

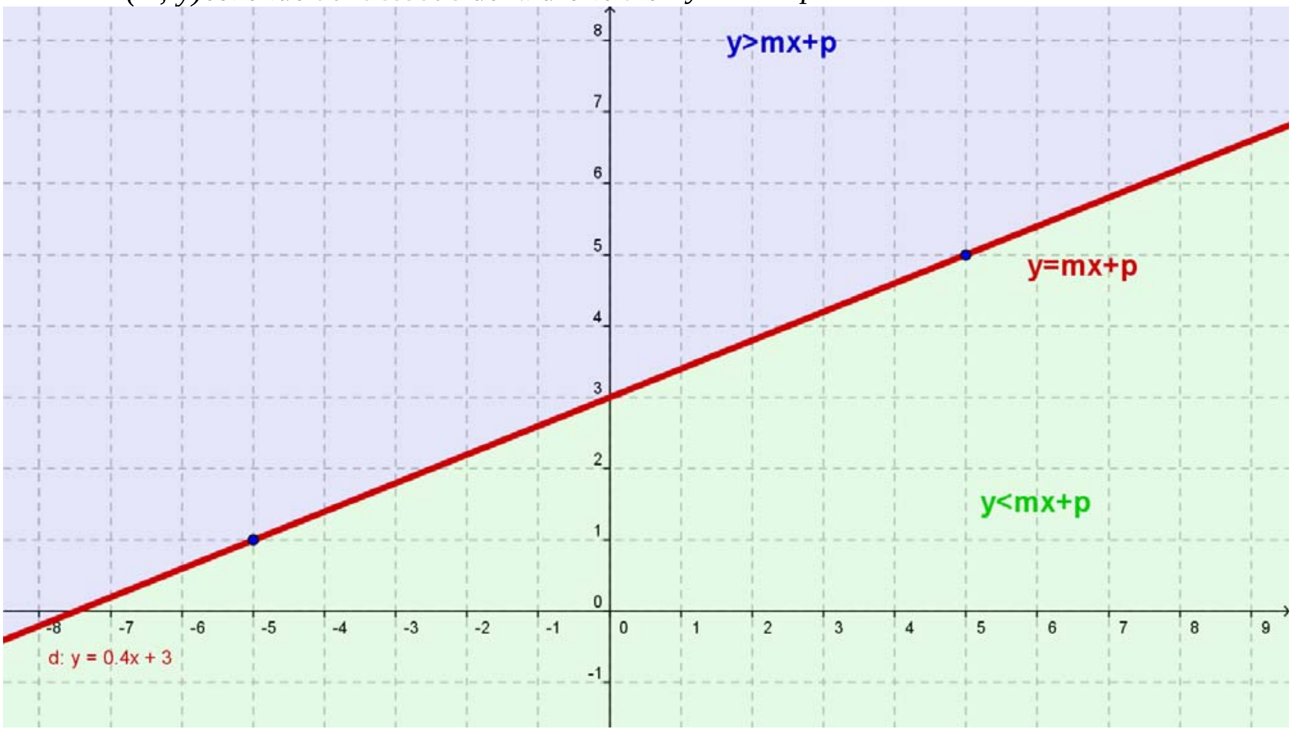
II. Inéquations linéaires

1) Pré-requis

Propriété du régionnement (admise) :
Toute droite du plan **partage** le plan en deux **demi-plans**.
La droite est la **frontière** des deux demi-plans.

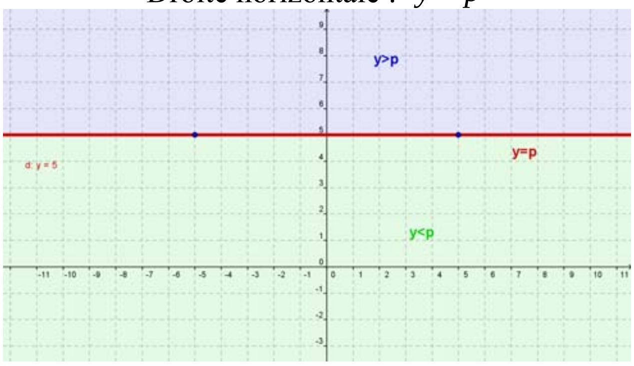
Droite d'équation (réduite) : $y = mx + p$

- $M(x\ ;\ y)$ est sur la droite d si $y = mx + p$
- $M(x\ ;\ y)$ est situé **au-dessus** de la droite d si $y > mx + p$
- $M(x\ ;\ y)$ est situé **au-dessous** de la droite d si $y < mx + p$

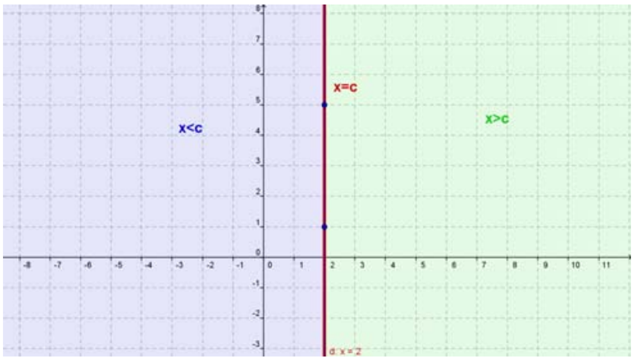


Cas particuliers :

Droite horizontale : $y = p$



Droite verticale : $x = c$



2) *Inéquation linéaire à deux inconnues*

Propriété :
a et *b* étant deux nombres (non simultanément nuls), dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, la droite d'équation : $ax+by=c$ partage le plan en deux demi-plans :

- l'un est l'ensemble des points *M(x ; y)* vérifiant $ax+by>c$
- l'autre est l'ensemble des points *M(x ; y)* vérifiant $ax+by<c$

Ainsi, on résout une inéquation linéaire uniquement par une **représentation graphique** de l'ensemble des solutions.

Pour la résoudre :

- On se ramène à une inéquation réduite en isolant *y* dans l'inéquation, ou *x* si *y* n'apparaît pas.
- On utilise la propriété du régionnement.

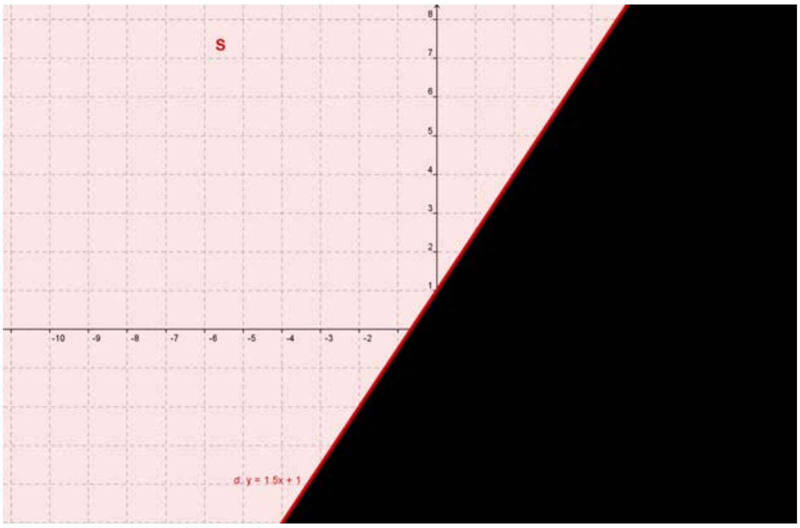
Exemple :
Représenter les couples solutions de l'inéquation : $3x-2y+2\leqslant 0$

$$3x-2y+2\leqslant 0$$

$$-2y\leqslant -3x-2$$

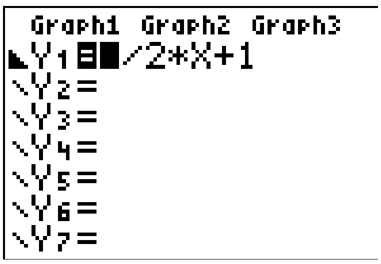
$$2y\geqslant 3x+2$$

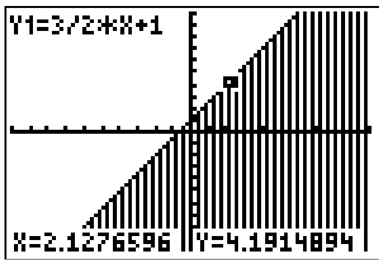
$$y\geqslant \frac{3}{2}x+1$$



Les solutions sont les coordonnées des points du demi-plan (frontière comprise) situés **au-dessus** de (ou **sur**) la droite *d* d'équation : $y=\frac{3}{2}x+1$.

Calculatrice :





3) ***Résolution d'un système d'inéquations linéaires***

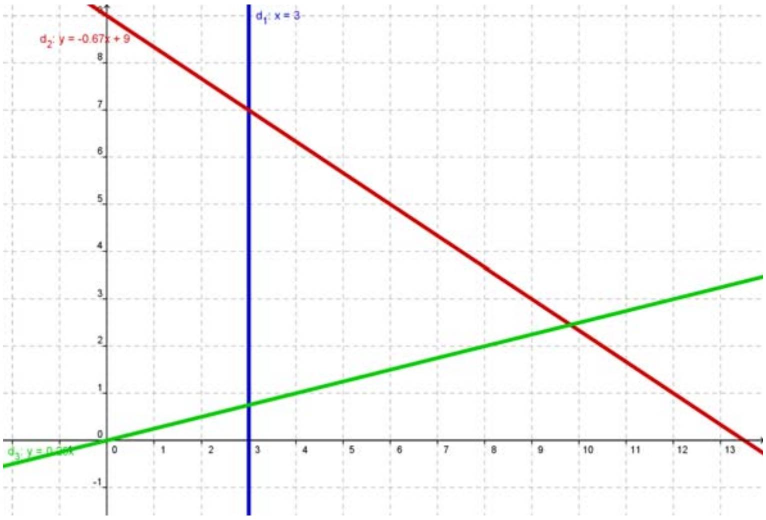
Résoudre le système : $\begin{cases} x-3>0 \\ 2x+3y\leqslant 27 \\ x-4y\leqslant 0 \end{cases}$

On réduit le système donné :

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 2x+3y\leqslant 27 \\ x-4y\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ y\leqslant -\dfrac{2}{3}x+9 \\ y\geqslant \dfrac{1}{4}x \end{cases}$$

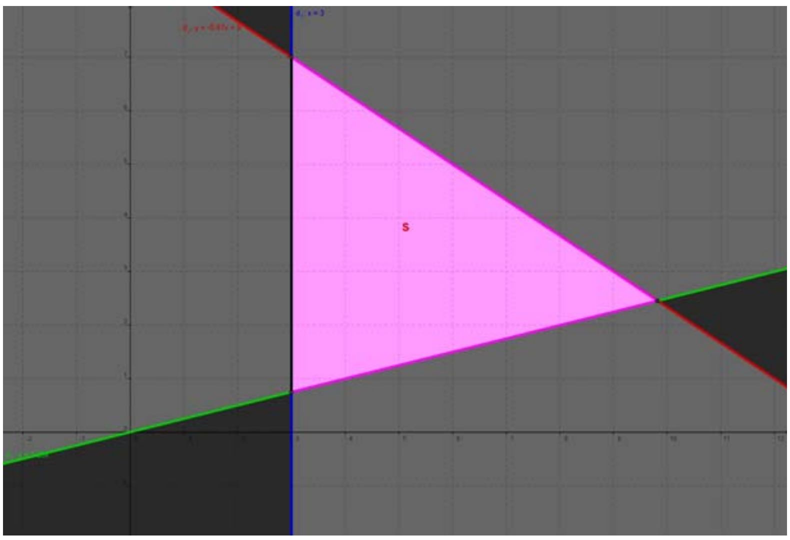
On trace les droites frontières :

- d_1, d'équation $x=3$
- d_2, d'équation $y=-\dfrac{2}{3}x+9$
- d_3, d'équation $y=\dfrac{1}{4}x$



L'ensemble solution est l'ensemble des coordonnées des points *M(x ; y)* situés :

$$\begin{cases} \text{à droite de } d_1 \\ \text{en dessous ou sur } d_2 \\ \text{au dessus ou sur } d_3 \end{cases}$$



Ces points sont ceux de la zone *S* en violet sur le plan.