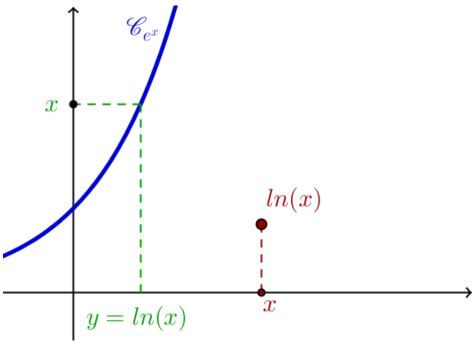
Chapitre 9
Logarithme népérien

I. La fonction logarithme népérien

1) Liens avec la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc d'après la généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, il existe un unique nombre réel y tel que $e^y = x$.



Définition :

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout nombre réel $x > 0$, associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y.

On note $y = \ln x$.

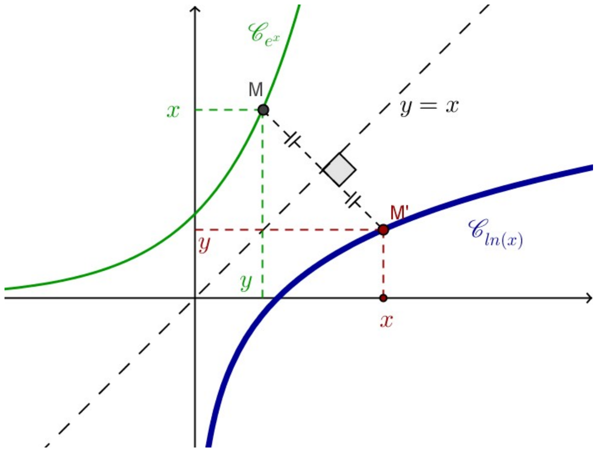
Conséquences :

Elles découlent directement de la définition précédente.

- Pour tout nombre réel $x > 0$ et tout nombre réel y, $x = e^y$ équivaut à $y = \ln x$.
- Pour tout nombre réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$.
- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) ; $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$) ; $\ln \frac{1}{e} = -1$ (car $e^{-1} = \frac{1}{e}$)

Propriété :

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



Démonstration :

On note respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions exp et ln.

Pour tous nombres réels x et $y>0$, dire que $M'(x;y)$ appartient à $\mathscr{C}'$ équivaut à $y=\ln x$ c'est-à-dire $x=e^y$ ce qui équivaut à dire que $M(y;x)$ appartient à $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Remarque :

On dit que les fonctions exp et ln sont **réciproques** l'une de l'autre.

2) Sens de variation de la fonction ln

Propriété :

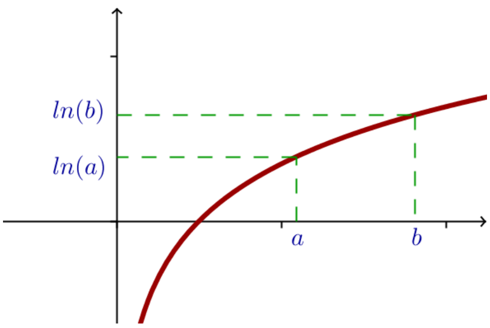
La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

Démonstration :

a et b sont deux nombres réels tels que $0<a<b$, c'est-à-dire tels que $e^{\ln a}<e^{\ln b}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\ln a<\ln b$$



Conséquences :

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$.

- $\ln a=\ln b$ équivaut à $a=b$
- $\ln a<\ln b$ équivaut à $a<b$
- $\ln a>0$ équivaut à $a>1$ et $\ln a<0$ équivaut à $0<a<1$.

II. Propriétés algébriques

1) Relation fonctionnelle

Propriété :

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$,

$$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$$

Démonstration :

a et *b* sont deux réels strictement positifs. On note $A=\ln(ab)$ et $B=\ln(a)+\ln(b)$.

Alors $e^A=ab$ et $e^B=e^{\ln(a)+\ln(b)}=e^{\ln(a)}\times e^{\ln(b)}=ab$. Donc $e^A=e^B$ d'où $A=B$.

Remarques :

- On dit que la fonction $\ln$ transforme les produits en somme.
- Pour tous nombres strictement positifs a_1 , a_2 , …, a_n :
  $\ln(a_1\times a_2\times\ldots\times a_n)=\ln(a_1)+\ln(a_2)+\ldots+\ln(a_n)$

2) Logarithme d’un inverse, d’un quotient

Propriétés :

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$.

- $\ln\frac{1}{b}=-\ln b$
- $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

Démonstrations :

- Pour $b>0$, $b\times\frac{1}{b}=1$; donc $\ln\left(b\times\frac{1}{b}\right)=0$, c’est-à-dire $\ln b+\ln\frac{1}{b}=0$,d'où $\ln\frac{1}{b}=-\ln b$.
- Pour $a>0$ et $b>0$, $\ln\frac{a}{b}=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\frac{1}{b}=\ln a-\ln b$.

3) Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Propriété :

Pour tout nombre réel $a > 0$ et pour tout nombre entier relatif n :

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration :

- Cas où n est un nombre entier naturel : on utilise un raisonnement par récurrence.
  - Initialisation : pour $n = 0$, $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$.
  - Hérédité : on considère un nombre entier naturel k tel que $\ln(a^k) = k \ln a$.

    Alors $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln a = k \ln a + \ln a = (k+1) \ln a$.
  - Conclusion : pour tout nombre entier naturel n, $\ln(a^n) = n \ln a$.
- Cas où n est un nombre entier strictement négatif

  $\ln(a^n) = \ln\left(\dfrac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n) \ln a = n \ln a$ car $-n > 0$.

Exemple :

Pour tout nombre réel $x > 0$, $\ln(x^2) = 2 \ln x$.

Propriété :

Pour tout nombre réel $a > 0$:

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Démonstration :

Pour $a > 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$, donc $\ln(\sqrt{a})^2 = \ln a$ soit $2 \ln \sqrt{a} = \ln a$, d'où $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

Exemple :

$\ln \sqrt{2} - \dfrac{1}{3} \ln 4 = \dfrac{1}{2} \ln 2 - \dfrac{1}{3} \ln(2^2) = \dfrac{1}{2} \ln 2 - \dfrac{2}{3} \ln 2 = -\dfrac{1}{6} \ln 2$.

III. Étude de la fonction ln

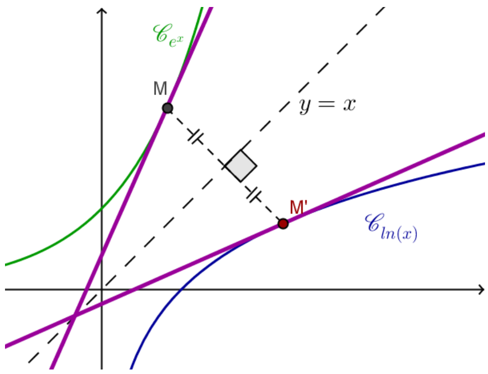
1) Dérivabilité et continuité de ln

Propriétés :

La fonction $\ln$ est **dérivable** sur $]0;+\infty[$ et pour tout nombre réel $x>0$.

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$

Démonstrations :



- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$. Or, les symétries axiales conservent le contact, donc une tangente à la courbe représentative de $\exp$ a pour symétrique une tangente à la courbe représentative de $\ln$. De plus, aucune tangente à la courbe de $\exp$ n'est parallèle à l'axe des abscisses, donc aucune tangente à la courbe de $\ln$ n'est parallèle à l'axe des ordonnées.

  Ainsi, la fonction $\exp$ étant dérivable sur ℝ, sa réciproque $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

- f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=e^{\ln(x)}=x$.

  $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$.

  $f'(x)=\exp'(\ln x)\times\ln'(x)=\exp(\ln x)\times\ln'(x)=x\ln'(x)$.

  Or $f(x)=x$, donc $f'(x)=1$. Par conséquent, pour tout $x>0$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

Propriété :

La fonction $\ln$ est **continue** sur $]0;+\infty[$.

En effet, toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Propriété :

La fonction $\ln$ est **concave** sur $]0;+\infty[$.

Démonstration :

Soit f la fonction définie, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $f''(x)=\frac{-1}{x^2}$.

Or, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\frac{-1}{x^2}<0$. Ainsi, $f''(x)<0$ et, par conséquent, f est concave sur $]0;+\infty[$.

2) Limite de ln en 0 et en +∞

Propriétés :

- $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$

Démonstrations :

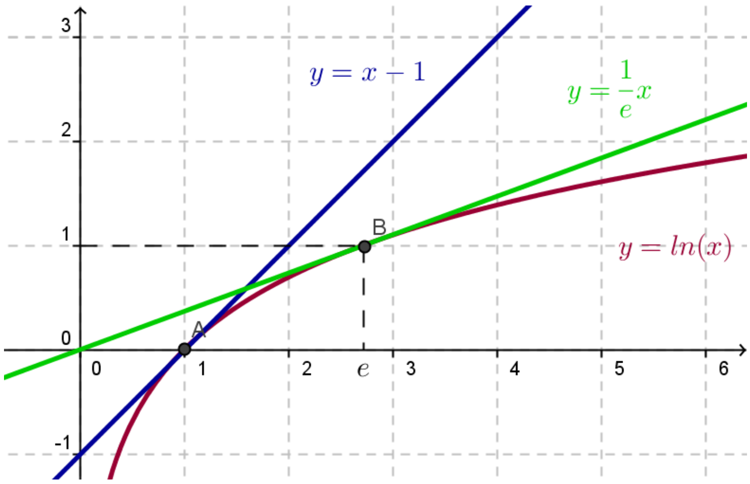
- Pour tout nombre réel A, $\ln x > A \Leftrightarrow x > e^A$. Donc $\ln x > A$ pour tout nombre réel $x > e^A$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
- On a, pour $x > 0$, $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$. Donc $\lim_{x\to 0} \ln x = \lim_{x\to 0} -\ln \frac{1}{x}$.

  Or $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} (-\ln X) = -\infty$.

  D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

3) Tableau de variation et courbe

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln'$	$+$
$\ln$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de $\ln$.

IV. Compléments sur la fonction ln

1) Limites

Propriété :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration :

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc en 1.

Cela signifie que $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \ln'(1)$.

Or $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, donc $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Remarque :

On en déduit que pour *h* proche de 0 : $\ln(1+h) \approx h$.

Croissances comparées

Propriétés :

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$

Démonstrations :

- On pose $Y = \ln x$, alors $e^Y = x$ et $\frac{\ln x}{x} = \frac{Y}{e^Y}$. Or $\lim_{x \to +\infty} \ln x = \lim_{x \to +\infty} Y = +\infty$ et $\lim_{Y \to +\infty} \frac{Y}{e^Y} = 0$.

  Donc d'après le théorème de la limite d'une fonction composée, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- Avec le même changement de variable, $x \ln x = Y e^Y$.

  Or $\lim_{x \to 0} \ln x = \lim_{x \to 0} Y = -\infty$ et $\lim_{Y \to -\infty} Y \times e^Y = 0$.

  Donc d'après le théorème de la limite d'une fonction composée, $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$

Généralisation :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- $\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

2) Fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

Notation :

u désigne une fonction strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ définie sur I est notée $\ln u$.

$x \mapsto u(x) \mapsto \ln(u(x))$

Propriété :

u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln u$ est **dérivable** sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Démonstration :

On utilise la propriété $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

En particulier, avec la fonction $f = u$, dérivable et strictement positive sur l'intervalle I et $g = \ln$, on obtient, pour tout réel x appartenant à I, la dérivée de $\ln(u(x))$:

$$\ln'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Propriété :

Les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation sur I.

Démonstration :

$(\ln u)'$ a le même signe que u' car $u > 0$.

Exemple :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+1)$.

$f = \ln u$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2+1$.

Or, u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

3) La fonction logarithme décimal

Définition :

La fonction logarithme décimal, notée $\log$, est définie pour tout réel x de $]0;+\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Propriété :

La fonction logarithme décimal vérifie les mêmes propriétés algébriques que la fonction $\ln$.

Exemples :

$\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\log 0{,}1 = -1$; $\log 100 = 2$; $\log 0{,}01 = -2$

Remarques :

- Pour tout réel x strictement positif et tout entier relatif n, on a :
  $10^n \leqslant x < 10^{n+1} \Leftrightarrow n \leqslant \log x < n+1$.
- Les fonctions $x \mapsto 10^x$ et $x \mapsto \log x$ sont réciproques l'une de l'autre.