Chapitre 3

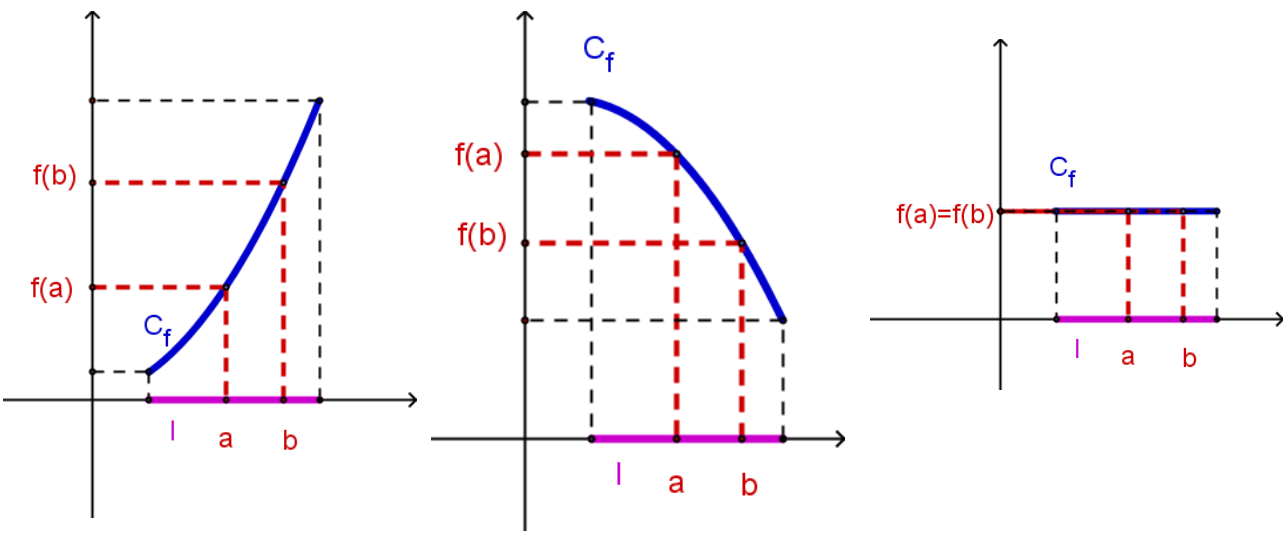
Étude de fonctions

I. Fonctions de référence

1) Variations d'une fonction

Définitions :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

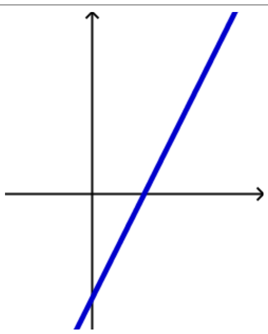
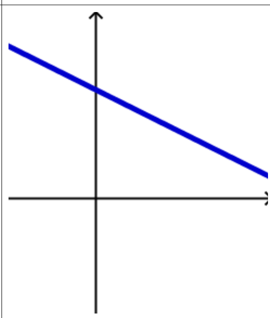
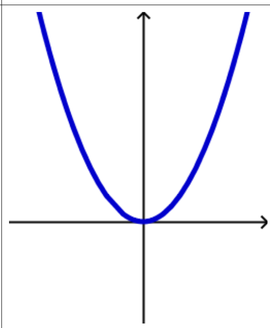
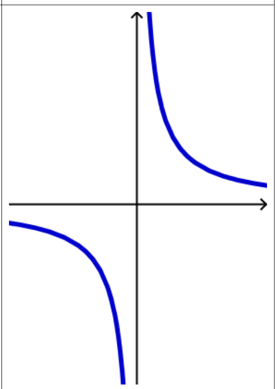
- *f* est **croissante** (respectivement **strictement croissante**) sur I si pour tous réels *a* et *b* de I :
  si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$).
- *f* est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I si pour tous réels *a* et *b* de I :
  si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$).
- *f* est **constante** sur I si pour tous réels *a* et *b* de I, $f(a) = f(b)$



f est croissante sur I | *f* est décroissante sur I | *f* est constante sur I

Définition :
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.
f est **monotone** sur I si *f* est croissante sur I ou décroissante sur I.

2) Rappels

	Fonction affine		Fonction carrée	Fonction inverse
définition	Une fonction affine *f* est une fonction définie sur ℝ par : $f(x)=ax+b$ où *a* et *b* sont deux réels fixés.		La fonction carré est la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x)=x^2$	La fonction inverse est la fonction *f* définie sur ℝ\{0} par : $f(x)=\frac{1}{x}$
propriétés	Si $a>0$ alors *f* est croissante sur I	Si $a<0$ alors *f* est décroissante sur I	*f* est décroissante sur]–∞ ;0] et croissante sur [0 ;+∞[	*f* est décroissante sur]–∞ ;0[et]0 ;+∞[
Tableau de variations	x : –∞ … +∞ $f(x)$: –∞ ↗ +∞	x : -∞ … +∞ $f(x)$: +∞ ↘ -∞	x : -∞ … 0 … +∞ $f(x)$: +∞ ↘ 0 ↗ +∞	x : -∞ … 0 … +∞ $f(x)$: +∞ ↘ -∞ ‖ +∞ ↘ -∞
Représentation graphique				
	La courbe est une **droite**		La courbe est une **parabole**	La courbe est une **hyperbole**

3) Fonction racine carrée

Définition :
La **fonction racine carrée** est la fonction *f* définie sur [0 ;+∞[par $f(x)=\sqrt{(x)}$.

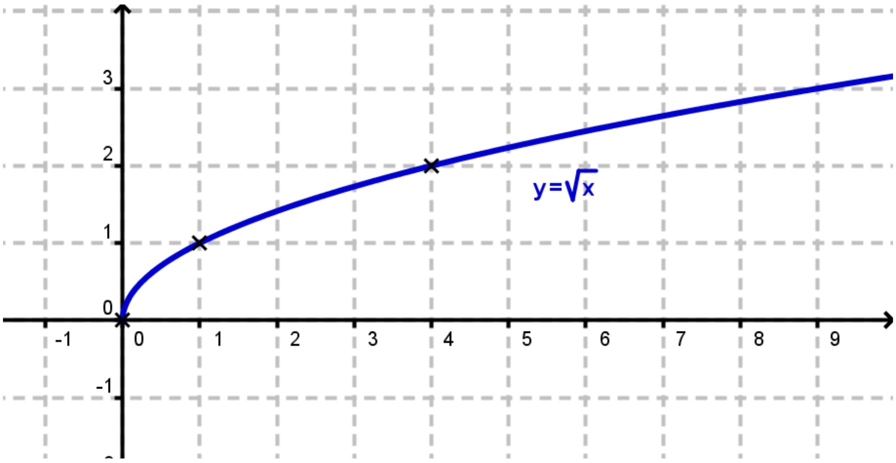
Propriété :
La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur [0 ;+∞[.

Démonstration :
Soit *a* et *b* deux réels tels que $0\leqslant a<b$.
Or $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ de plus $a-b<0$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$.
On a donc $\sqrt{a}-\sqrt{b}<0$ et ainsi $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

<u>Tableau de variations</u>

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Représentation graphique :</u>
Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction racine carrée est une **demi-parabole** de sommet O.



4) Fonction valeur absolue

Valeur absolue et distance

<u>Définition :</u>
La **valeur absolue** d'un réel x est le nombre, noté $|x|$, qui est égal au nombre x si x est positif, et au nombre $-x$ si x est négatif.

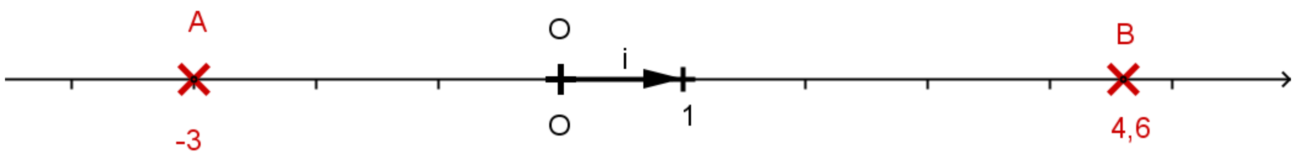
Donc, $|x| = \begin{cases} x \ si \ x \geqslant 0 \\ -x \ si \ x \leqslant 0 \end{cases}$

<u>Exemples :</u>
- $|5|=5$ car $5>0$
- $|3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3$ car $3-\pi<0$
- $|2-t|=\begin{cases} 2-t \ si \ 2-t \geqslant 0 \ soit \ t \leqslant 2 \\ t-2 \ si \ 2-t \leqslant 0 \ soit \ t \geqslant 2 \end{cases}$

<u>Remarques :</u>
- Une valeur absolue est toujours positive : pour tout réel x, $|x| \geqslant 0$.
- Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : pour tout réel x, $|x|=|-x|$.
- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2}=|x|$.

Définition :
La distance entre deux réels x et y est la distance entre les points d'abscisses x et y sur la droite réelle munie d'un repère $(O; \vec{i})$.
On la note $d(x;y)$.

Exemple :
La distance entre les réels -3 et 4,6 est $d(-3;4{,}6)=AB=4{,}6-(-3)=4{,}6+3=7{,}6$.



La distance entre les réels 4,6 et 0 est $d(4{,}6;0)=OB=4{,}6$.
La distance entre les réels -3 et 0 est $d(-3;0)=OA=3$.

Remarques :

- La distance d'un réel x à 0 est égale à x si $x\geqslant 0$ et à $-x$ si $x\leqslant 0$.
- La distance entre les réels x et y est obtenue en calculant la différence entre le plus grand et le plus petit de ces deux nombres ; le résultat est alors positif.

  On a : $d(x;y)=\begin{cases} x-y \text{ si } x\geqslant y \\ y-x \text{ si } x\leqslant y \end{cases}$

Propriétés :
$d(x;0)=|x|$; $d(x;y)=|x-y|=|y-x|$

Propriétés :

- $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$
- $|x|=|y| \Leftrightarrow x=y$ **ou** $x=-y$
- Pour tous réels x et y, on a :
  - $|xy|=|x|\times|y|$
  - si $y\neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$
  - $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ **(inégalité triangulaire)**

Fonction valeur absolue

Définition :
La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=|x|$.

Propriété :
La fonction valeur absolue est **strictement décroissante** sur $]-\infty;0]$ et **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$.

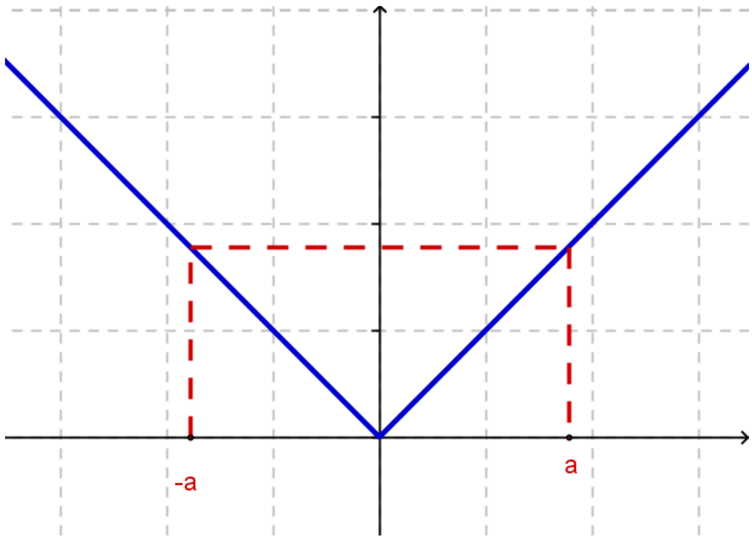
Démonstration :
Pour tout réel x positif, $f(x)=x$ donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Pour tout réel x négatif, $f(x)=-x$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Propriétés :

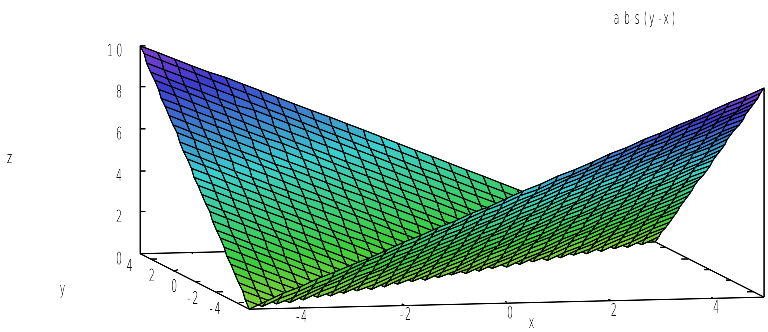
- La représentation graphique de la fonction valeur absolue est la **réunion** de **deux droites**.
- Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.



Démonstration :
Soit *f* la fonction valeur absolue.
Pour tout réel *a*, on a $f(-a)=|-a|=|a|=f(a)$.
Les deux points de coordonnées $(a; f(a))$ et $(-a; f(-a))$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque :

$d(x;y)$ est une fonction d : $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto z=d(x;y)$



L'ensemble des points $M(x, y, d(x, y))$ de l'espace est une **surface**.

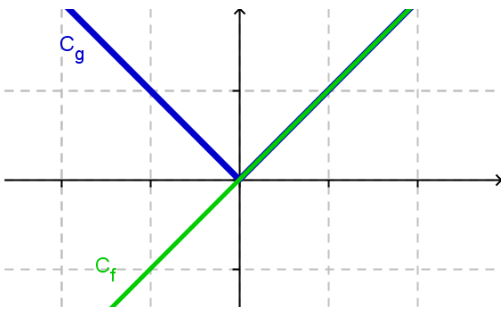
II. Positions relatives de courbes

1) Position relative de deux courbes

Définitions :
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère du plan.

- On dit que f est **supérieure** à g (et on note $f \geqslant g$) sur I lorsque, pour tout réel x de I $f(x) \geqslant g(x)$.
  La courbe $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.
- On dit que f est **inférieure** à g (et on note $f \leqslant g$) sur I lorsque, pour tout réel x de I $f(x) \leqslant g(x)$.
  La courbe $\mathscr{C}_f$ est **au-dessous** de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.
- On dit que f est **égale** à g (et on note $f = g$) sur I lorsque, pour tout réel x de I $f(x) = g(x)$.
  La courbe $\mathscr{C}_f$ est **confondue** avec la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.

Exemple :
Sur $]-\infty;0]$, $f : x \longmapsto x$ est inférieure à $g : x \longmapsto |x|$.
Sur $[0;+\infty[$, $f : x \longmapsto x$ est égale à $g : x \longmapsto |x|$.



2) Croissances comparées

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
$\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont les courbes associées aux fonctions $f : x \longmapsto x^2$, $g : x \longmapsto x$ et $h : x \longmapsto \sqrt{x}$.
f, g et h sont définies (et croissantes) sur $[0;+\infty[$.

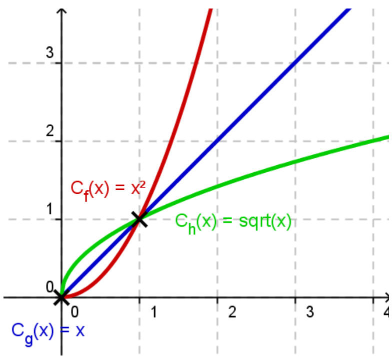
Propriétés :

- Les points de coordonnées $(0;0)$ et $(1;1)$ sont communs aux trois courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.
- Sur l'intervalle $]0;1[$, la courbe $\mathscr{C}_f$, est **au-dessous** de la courbe $\mathscr{C}_g$ elle-même **au-dessous** de la courbe $\mathscr{C}_h$.
- Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$, est **au-dessus** de la courbe $\mathscr{C}_g$ elle-même **au-dessus** de la courbe $\mathscr{C}_h$.

Exemple :

$\forall x \in [0;1]$, $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$.
Donc pour $x \in [0;1]$, x^2 est inférieure à x qui est inférieure à $\sqrt{x}$.

$\forall x \in [1;+\infty[$, $x^2 \geqslant x \geqslant \sqrt{x}$.
Donc pour $x \in [1;+\infty[$, x^2 est supérieure à x qui est supérieure à $\sqrt{x}$.



Démonstration :
Pour les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on compare $f(x)$ et $g(x)$.

$f(x)-g(x)=x^2-x=x(x-1)$.
Or on a le tableau de signe suivant :

x	0		1		$+\infty$
x		+		+	
$x-1$		–		+	
$x(x-1)$	0	–	0	+	

On a donc bien :
- pour $x=0$, $x^2=x$
- $\forall x\in]0;1[$, $x^2<x$
- pour $x=1$, $x^2=x$
- $\forall x\in]1;+\infty[$, $x^2>x$

III. Fonctions associées

1) Fonction u+k

Définition :
Soit u une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et k un réel.
La fonction notée ***u+k*** est la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par :

$$(u+k)(x)=u(x)+k$$

Exemple :
Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+1$.
Pour tout réel x, $(u+3)(x)=u(x)+3=x^2+1+3=x^2+4$.

Propriété :
Soit u une fonction **monotone** sur un intervalle I et k un réel.
La fonction $u+k$ a **même sens de variation** que u sur I.

Démonstration :(on procède par disjonction des cas)
- Supposons que u est croissante sur I.

Pour tous réels a et b de I, si $a\leqslant b$ alors $u(a)\leqslant u(b)$.
Donc $u(a)+k\leqslant u(b)+k$, soit $(u+k)(a)\leqslant(u+k)(b)$
Ainsi, $u+k$ est croissante sur I.
- Supposons que u est décroissante sur I.

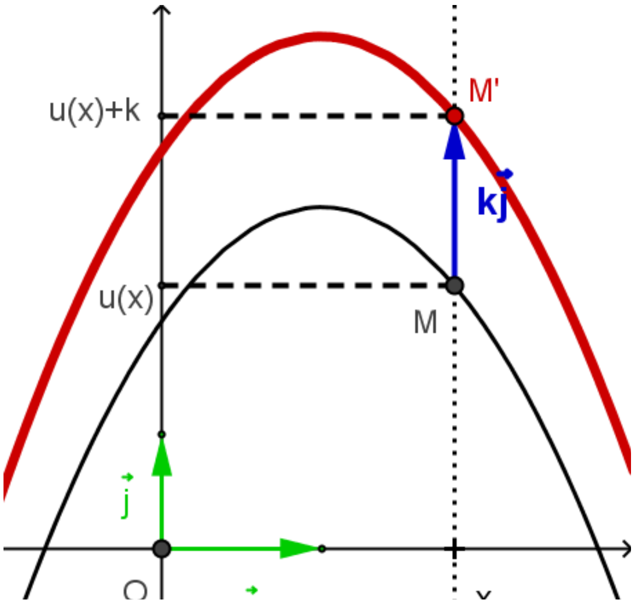
Pour tous réels a et b de I, si $a\leqslant b$ alors $u(a)\geqslant u(b)$.
Donc $u(a)+k\geqslant u(b)+k$, soit $(u+k)(a)\geqslant(u+k)(b)$
Ainsi, $u+k$ est décroissante sur I.

Propriété :
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit *u* une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de ℝ et *k* un réel.
La courbe représentative de la fonction *u*+*k* est l'image de la courbe représentative de *u* par la **translation** de vecteur $k\vec{j}$.

Démonstration :
Soit $\mathscr{C}$ la courbe de *u* et a courbe de *u*+*k*.
On considère un point $M(x;u(x))$ de la courbe $\mathscr{C}$ et le point $M'(x;u(x)+k)$ qui appartient à la courbe $\mathscr{C}$'.
Alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées . Le $(0;k)$ point M' est donc l'image du point M par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

Ce raisonnement est valable pour tout point M de la courbe $\mathscr{C}$.

Donc on obtient la courbe $\mathscr{C}$' à partir de la courbe $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $k\vec{j}$.



2) Fonction ku

Définition :
Soit *u* une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de ℝ et *k* un réel.
La fonction notée ***ku*** est la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par :

$$(ku)(x)=k\times u(x)$$

Exemple :
Soit *u* la fonction définie sur ℝ par $u(x)=x^2+1$.
Pour tout réel *x*, $(2u)(x)=2\times u(x)=2(x^2+1)=2x^2+2$.

Propriété :
Soit *u* une fonction **monotone** sur un intervalle I et *k* un réel.

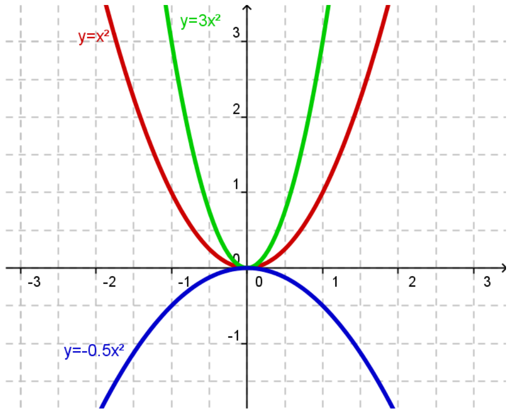
- Si $k>0$, la fonction *ku* a **même sens de variation** que *u* sur I.
- Si $k<0$, la fonction *ku* a **le sens de variation contraire** à celui de *u* sur I.

Démonstration :
Supposons que *u* est croissante sur I et $k>0$.
Pour tous réels *a* et *b* de I, si $a\leqslant b$ alors $u(a)\leqslant u(b)$.
Donc $ku(a)\leqslant ku(b)$, soit $(ku)(a)\leqslant(ku)(b)$
Ainsi, *ku* est croissante sur I.
On procède de la même manière pour les autres cas.

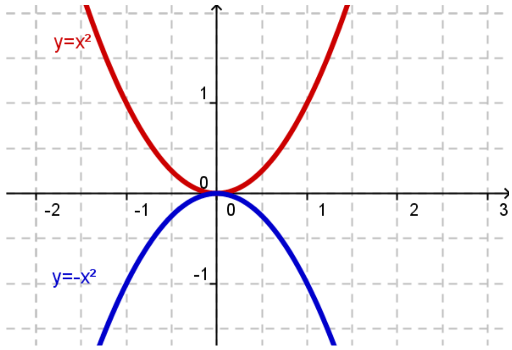
Propriété :
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit u une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et k un réel.
La courbe représentative de la fonction ku s'obtient en **multipliant par *k*** l'ordonnée y de chaque point de la courbe de u.

Exemples :

- Les fonctions u, v et w sont définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2$, $v(x)=3x^2$ et $w(x)=-\frac{1}{2}x^2$.



- **Cas particulier :** lorsque $k=-1$, les courbes représentatives de u et $-u$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



3) Fonction $\sqrt{u}$

Définition :
Soit u une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x de $\mathcal{D}$, $u(x)\geqslant 0$.
La **fonction racine carrée de *u*** notée $\sqrt{u}$, est la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par :
$$(\sqrt{u})(x)=\sqrt{u(x)}$$

Exemple :
Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+1$. Alors pour tout réel x, $u(x)>0$
La fonction $\sqrt{u}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(\sqrt{u})(x)=\sqrt{u(x)}=\sqrt{x^2+1}$.

Propriété :
Soit u une fonction **monotone** et à **valeurs positives** sur un intervalle I.
La fonction $\sqrt{u}$ a même sens de variation que u sur I.

Démonstration :
Supposons que u est croissante sur I et à valeurs positives.
Pour tous réels a et b de I, si $a\leqslant b$ alors $0\leqslant u(a)\leqslant u(b)$.
La fonction racine carrée étant croissante sur $[0;+\infty[$, on obtient $\sqrt{u(a)}\leqslant\sqrt{u(b)}$, soit $(\sqrt{u})(a)\leqslant(\sqrt{u})(b)$
Ainsi, $\sqrt{u}$ est croissante sur I.

4) Fonction $\frac{1}{u}$

Définition :
Soit u une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x de $\mathscr{D}$, $u(x)\neq 0$.
La **fonction inverse de *u*** notée $\frac{1}{u}$, est la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par :

$$\left(\frac{1}{u}\right)(x)=\frac{1}{u(x)}$$

Exemple :
Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+1$. Alors pour tout réel x, $u(x)>0$
La fonction $\frac{1}{u}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{u}\right)(x)=\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{x^2+1}$.

Propriétés :

- Soit u une **fonction monotone** et à valeurs strictement **positives** sur un intervalle I.

La fonction $\frac{1}{u}$ a le **sens de variation contraire** à celui de u sur I.

- Soit u une **fonction monotone** et à valeurs strictement **négatives** sur un intervalle I.

La fonction $\frac{1}{u}$ a le **sens de variation contraire** à celui de u sur I.

Démonstration :
Supposons que u est croissante sur I et à valeurs strictement positives.
Pour tous réels a et b de I, si $a\leqslant b$ alors $0\leqslant u(a)\leqslant u(b)$.
La fonction inverse étant décroissante sur $[0;+\infty[$, on obtient $\frac{1}{u(a)}\geqslant\frac{1}{u(b)}$, soit
$\left(\frac{1}{u}\right)(a)\geqslant\left(\frac{1}{u}\right)(b)$
Ainsi, $\frac{1}{u}$ est décroissante sur I.

5) Somme et produit de fonctions

Définitions :
Soit u et v deux fonctions définies sur partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$.

- La **fonction somme** de u et v notée $u+v$, est la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par :
$$(u+v)(x)=u(x)+v(x)$$
- La **fonction produit** de u et v notée $u\times v$, est la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par :
$$(u\times v)(x)=u(x)\times v(x)$$

Exemple :
Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+1$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=3x+1$.
La fonction $u+v$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$(u+v)(x)=u(x)+v(x)=x^2+1+3x+1=x^2+3x+2$$
La fonction $u\times v$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$(u\times v)(x)=u(x)\times v(x)=(x^2+1)\times(3x+1)=3x^3+3x+x^2+1=3x^3+x^2+3x+1$$

Remarque :
La fonction ku est un cas particulier de fonction produit (k est une fonction constante).

Propriétés :
- Soit u et v deux fonctions **croissantes** sur un intervalle I.
  La fonction $u+v$ est **croissante** sur l'intervalle I.
- Soit u et v deux fonctions **décroissantes** sur un intervalle I.
  La fonction $u+v$ est **décroissante** sur l'intervalle I.

Démonstration :
Supposons que u et v sont croissantes sur I.
Pour tous réels a et b de I, si $a \leqslant b$ alors $u(a) \leqslant u(b)$ et $v(a) \leqslant v(b)$.
Donc $u(a)+v(a) \leqslant u(b)+v(a) \leqslant u(b)+v(b)$, soit $(u+v)(a) \leqslant (u+v)(b)$
Ainsi, $u+v$ est croissante sur I.
On procède de la même manière pour l'autre cas.

Remarque :
Si u et v n'ont pas le même sens de variation sur l'intervalle I, alors on ne peut rien dire à priori sur le sens de variation de la fonction $u+v$.