

# Chapitre 13

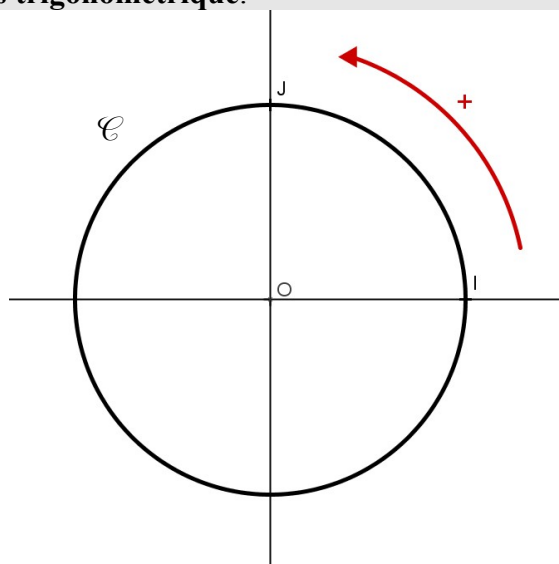
## Trigonométrie

### I. Enroulement de la droite numérique

#### 1) Cercle trigonométrique

##### Définition :

Dans un repère orthonormé  $(O ; I, J)$ , on appelle **cercle trigonométrique** le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon unité muni du **sens trigonométrique**.



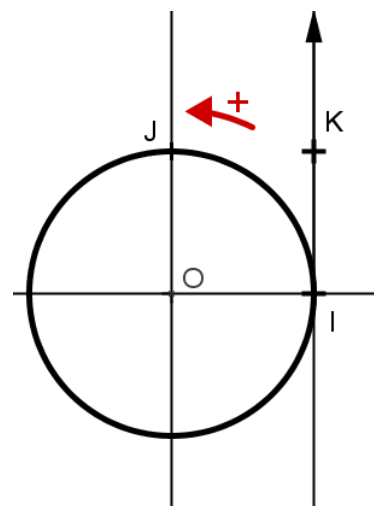
##### Remarques :

- Le sens trigonométrique est aussi appelé sens direct ou positif. C'est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- La longueur du cercle est  $2\pi$ .

#### 2) Correspondance entre $\mathcal{C}$ et $\mathbb{R}$

Dans le repère orthonormé direct  $(O ; I, J)$ , on trace la tangente en  $I$ . On place le point  $K(1 ; 1)$ .

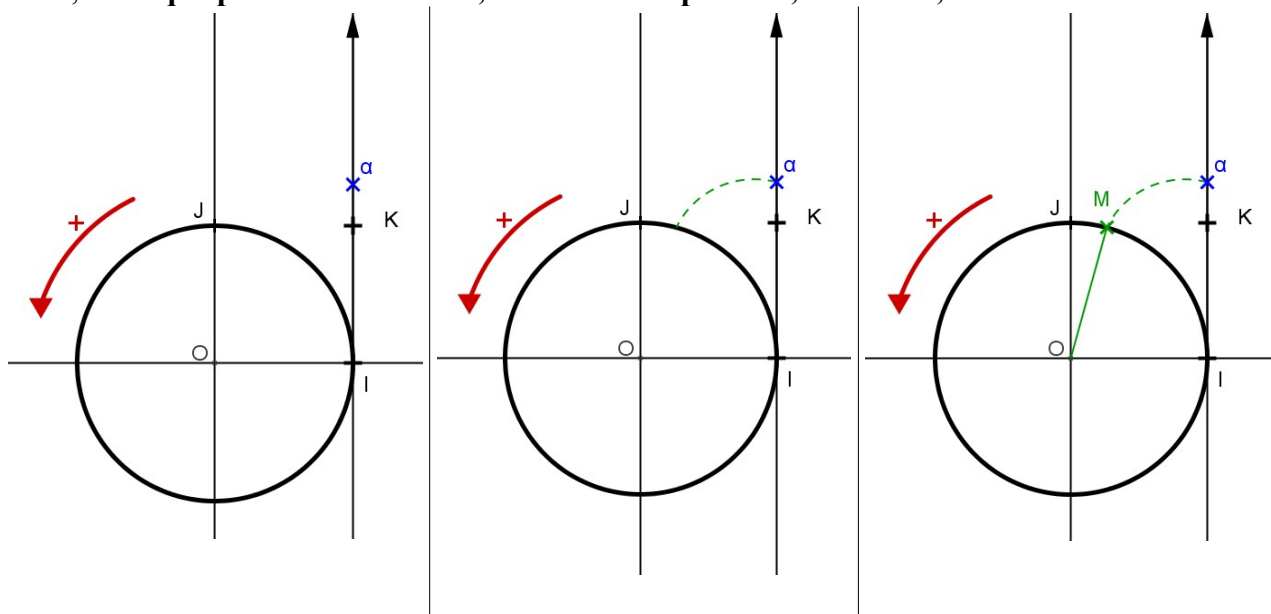
La droite graduée  $(IK)$  représente l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels : on l'appelle **droite numérique**.



On imagine alors que la droite  $(IK)$  « s'enroule » sur le cercle trigonométrique.

## De $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{C}$

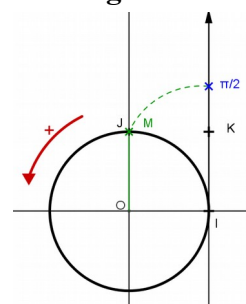
Ainsi, à chaque point A de la droite, on associe un point M, et un seul, du cercle.



Ainsi tout réel  $\alpha$  vient s'appliquer sur **un** point M de  $\mathcal{C}$  : on dit que M est le **point image** du réel  $\alpha$

### Exemples :

- J est le point image de  $\frac{\pi}{2}$ .



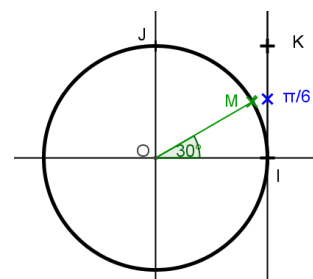
- Le point M du cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  associé à  $\frac{\pi}{6}$  correspond à l'extrémité d'un angle de  $30^\circ$ .

En effet, on utilise la proportionnalité entre la longueur de l'arc  $\widehat{IM}$  et l'angle  $\widehat{IOM}$ .

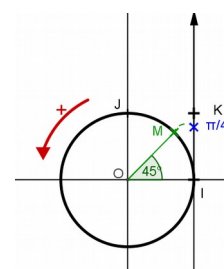
$\widehat{IOM}$	$180^\circ$	$\alpha^\circ$
Arc $\widehat{IM}$	$\pi$	$\frac{\pi}{6}$

Donc :

$$\alpha = \frac{180 \times \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30$$



- Le réel  $\frac{\pi}{4}$  vient s'appliquer sur le point M tel que la longueur de l'arc  $\widehat{IM}$  soit  $\frac{\pi}{4}$ , on a alors  $\widehat{IOM} = 45^\circ$ .



**Remarques :**

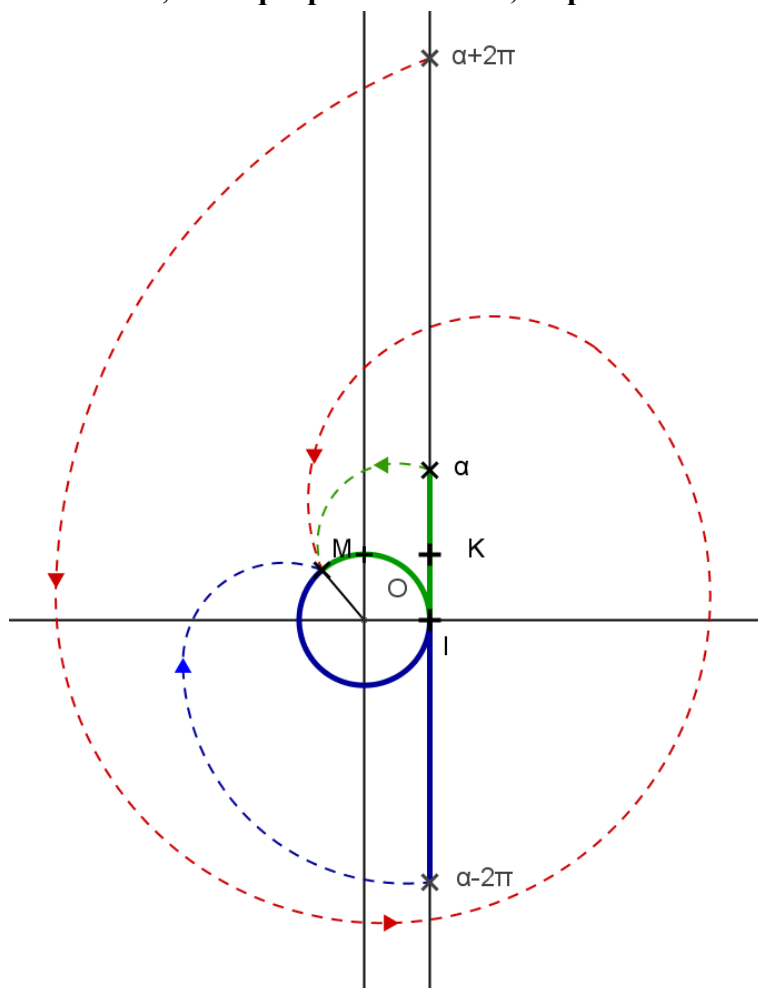
- Pour placer le point M, on calcule donc l'angle  $\widehat{IOM}$ .  
Si  $l$  est la longueur de l'arc  $\widehat{IM}$  et si  $l \leq \pi$  alors la mesure  $\alpha$  en degrés de l'angle  $\widehat{IOM}$  est :

$$\alpha = \frac{180 \times l}{\pi}.$$

- Lorsque  $\alpha \in [0; \pi]$  on dit que l'angle  $\widehat{IOM}$  a pour mesure  $\alpha$  en radians ( $\alpha$  est la longueur de l'arc  $\widehat{IM}$ ). Exemple :  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  radians.

**De  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{R}$** 

En revanche, à chaque point du cercle, on peut associer une infinité de points de la droite.



On peut enrouler (dans le sens direct ou indirect) la droite numérique qui représente l'ensemble des réels.

**Propriété :**

Si  $\alpha$  et  $\alpha'$  désignent des nombres réels tels que  $\alpha - \alpha' = k \times 2\pi$  où  $k$  est un entier relatif, alors  $\alpha$  et  $\alpha'$  viennent s'appliquer sur un même point du cercle trigonométrique.

*Démonstration :*

$2\pi$  est la longueur du cercle  $\mathbb{C}$  et  $\alpha - \alpha'$  est un multiple de  $2\pi$ .

**Propriété :**

Si M est le point du cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$ , image d'un nombre réel  $\alpha$ , alors M est aussi le point image des nombres réels :

$$\alpha + 2\pi ; \alpha + 2 \times 2\pi ; \dots$$

$$\alpha - 2\pi ; \alpha - 2 \times 2\pi ; \dots$$

et plus généralement de tous les nombres réels  $\alpha + k \times 2\pi$  où k est un entier relatif.

**Exemples :** quelques valeurs remarquables

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
Abscisse d'un point ayant M( $\alpha$ ) comme image	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
Abscisse d'un point ayant M( $\alpha$ ) comme image	$-2\pi$	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$
Abscisse d'un point ayant M( $\alpha$ ) comme image	$18\pi$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{4}$	...	...	...	...

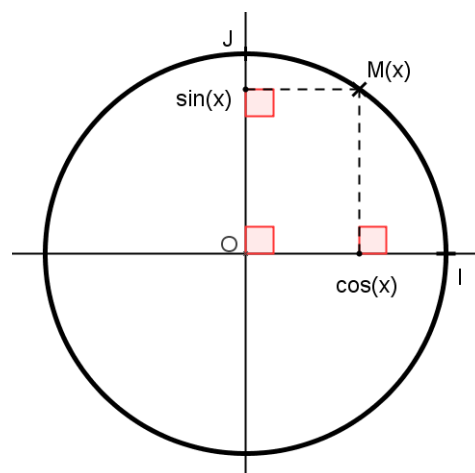
**II. Sinus et cosinus d'un angle****1) Définition****Définition :**

Soit (O ; I, J) un repère du plan et  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique de centre O.

M est un point de  $\mathcal{C}$  associé à un réel x.

Le **cosinus** de x (noté  $\cos x$ ) est l'**abscisse** du point M.

Le **sinus** de x (noté  $\sin x$ ) est l'**ordonnée** du point M.

**Exemples :**

- J est le point image de  $\frac{\pi}{2}$ , donc  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  et  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ .
- I est le point image de 0, donc  $\cos 0 = 1$  et  $\sin 0 = 0$ .

**2) Lien avec les formules dans un triangle rectangle**

Soit (O ; I, J) un repère du plan et  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique de centre O.

Lorsque M appartient à l'arc  $\widehat{IJ}$  parcouru dans le sens direct ses coordonnées sont positives.

Ainsi pour un angle  $\widehat{IOM}$  compris entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$  (ou pour une longueur d'arc  $\widehat{IM}$  comprises entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ), les grandeurs  $\cos x$  et  $\sin x$  peuvent être interprétées comme des longueurs.

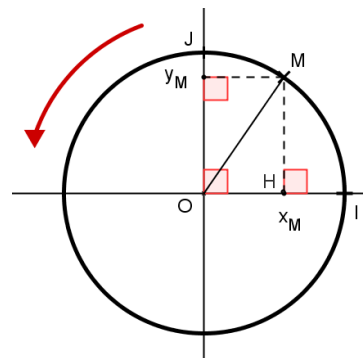
**Définitions :**

Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI).

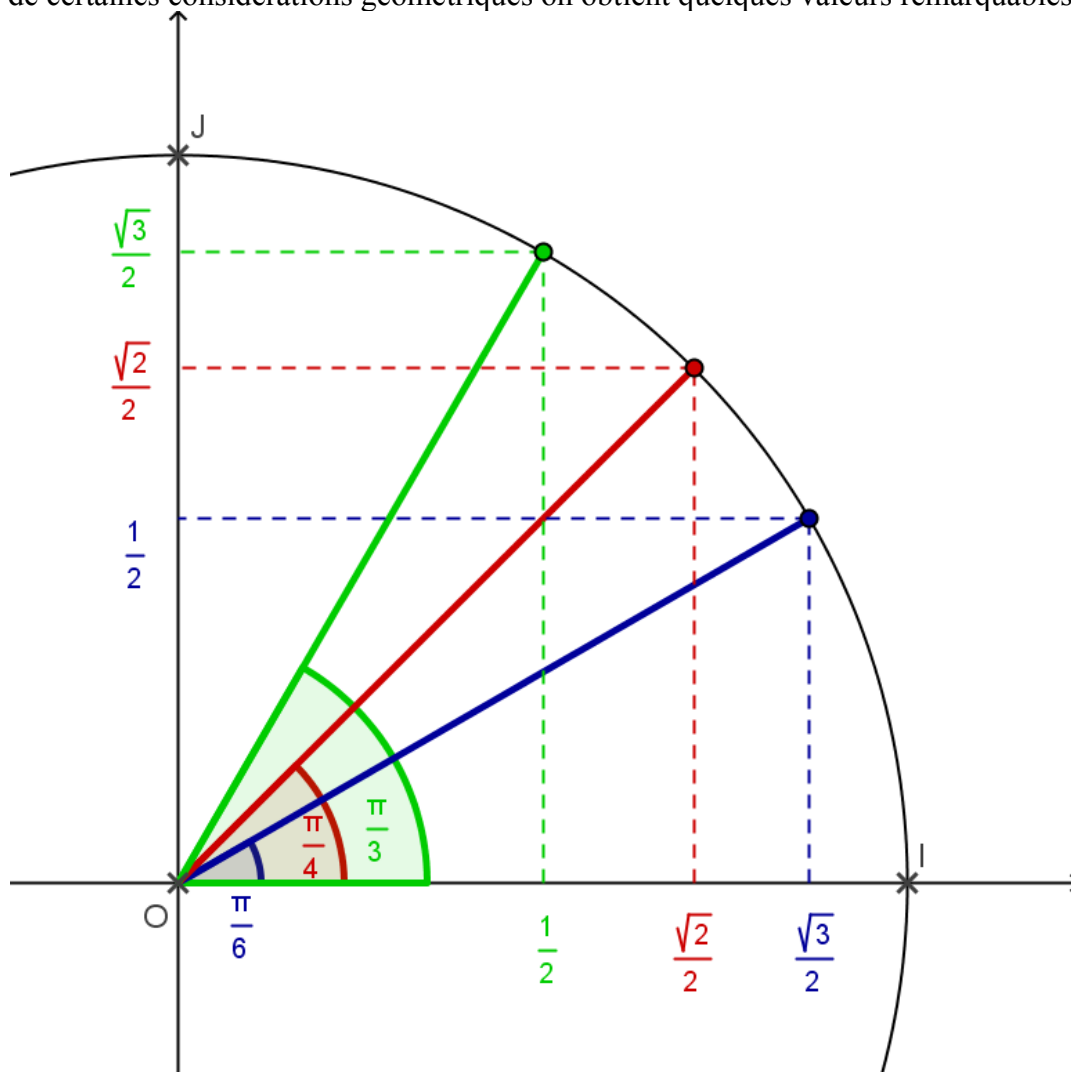
Le triangle OHM étant rectangle en H, on a :

$$\cos \widehat{HOM} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{OH}{OM} = \frac{x_M}{1} = \cos x$$

$$\sin \widehat{HOM} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{HM}{OM} = \frac{y_M}{1} = \sin x$$



A partir de certaines considérations géométriques on obtient quelques valeurs remarquables :



$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

### 3) Propriétés

#### Propriétés :

Pour tous nombres réels  $x$ ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad ; \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

*Démonstration :*

- L'abscisse et l'ordonnée de tout point du cercle  $\mathcal{C}$  sont comprises entre -1 et 1.
- Dans le repère orthonormé  $(O ; I, J)$ , M a pour coordonnées  $(\cos x ; \sin x)$ .  
Donc  $OM^2 = (x_M - 0)^2 + (y_M - 0)^2 = x_M^2 + y_M^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$ . De plus  $OM^2 = 1$ .  
Ainsi  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

#### Propriétés :

Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad ; \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

*Démonstration :*

Les points images de  $x$  et  $x + 2\pi$  sont confondus, ils ont donc mêmes coordonnées.

#### Propriétés :

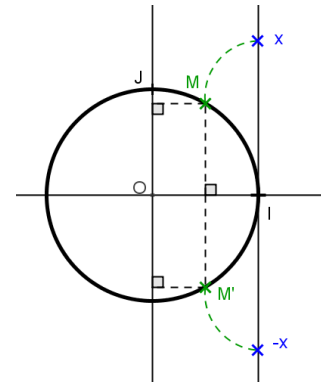
Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin x$$

*Démonstration :*

Les points images des nombres réels  $x$  et  $-x$  sur le cercle trigonométrique sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Ces points ont donc la même abscisse  $\cos(-x) = \cos x$  et des ordonnées opposées  $\sin(-x) = -\sin x$ .



#### Propriétés :

Pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad ; \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

*Démonstration :*

Les points images des nombres réels  $x$  et  $\pi - x$  sur le cercle trigonométrique sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Ces points ont donc la même ordonnée  $\sin(\pi - x) = \sin x$  et des abscisses opposées  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ .

