Teoria de Ramsey

Uma introdução aos seus princípios

Jair Donadelli

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
jair.donadelli@ufabc.edu.br

COPAM 2018

12-14/NOV

Material

- Esta apresentação `http://professor.ufabc.edu.br/~jair.donadelli/copam-slides.pdf`
- Notas de aula `http://professor.ufabc.edu.br/~jair.donadelli/copam-texto.pdf`

Sumário

Breve linha do tempo I

1892 **David Hilbert**, em conexão com as investigações sobre a irredutibilidade das funções racionais, provou um resultado do tipo Ramsey conhecido hoje como o lema do cubo de Hilbert.

1916 **Issai Schur**, numa prova para versão modular da conjectura de Fermat, provou que se os números inteiros positivos são finatamente coloridos, então uma classe de cor contém uma solução de $x + y = z$.

Breve linha do tempo II

1927 **Bartel Leendert van der Waerden** prova o teorema de van der Waerden sobre progressões aritméticas, o qual generaliza o lema do cubo de Hilbert. Van der Waerden não contribuiu mais para a teoria de Ramsey.

1930 **Frank Plumpton Ramsey** estudava um problema de decisão na lógica proposicional quando provou o teorema de Ramsey como um resultado auxiliar. Curiosamente, seu resultado principal ficou esquecido.

Breve linha do tempo III

1935 **Richard Rado**, na sua tese de doutoramento *Studien zur Kombinatorik*, escrita sob orientação de Schur e em vários trabalhos subsequentes, unificou e estendeu os resultados de Hilbert, Schur e Van der Waerden.

1935 **Paul Erdős** e **George Szekeres** redescobrem o teorema de Ramsey quando tentavam resolver um problema de geometria. **Erdős** foi o grande incentivador da teoria.

Breve linha do tempo IV

1960 **Alfred W. Hales** e **Robert I. Jewett** revelaram o núcleo combinatório do teorema de Van der Waerden sobre progressões aritméticas. É um dos teoremas mais importantes da teoria.

1971 **Ronald L. Graham** e **Bruce L. Rothschild** ampliaram o resultado de Hales–Jewett de maneira notável.

Breve linha do tempo V

1977 **Jeff Paris** e **Leo Harrington** mostraram um Teorema do tipo Ramsey que foi o primeiro exemplo "natural" do Teorema da Incompletude de Gödel, isto é, um teorema que não é demonstrável na aritmética de Peano, mas que é facilmente demonstrável na teoria dos conjuntos.

1998 **William T. Gowers** recebeu a medalha Fields por seus resultados em análise funcional e combinatória, em particular, alguns resultados de análise funcional foram obtidos por métodos da teoria da Ramsey.

Notação

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

$$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$$

r**-coloração** do conjunto não vazio $\mathcal{O}$

$$\varphi : \mathcal{O} \to [r]$$

Sumário

Princípio das gavetas

(PG) *Em qualquer r-coloração de $n > r$ objetos existem pelo menos 2 objetos da mesma cor.*

Exemplo 1

Se o plano é colorido com 2 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Exemplo 1

Se o plano é colorido com 2 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? *Sim*

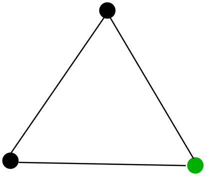


Figura: triângulo equilátero de lado 1

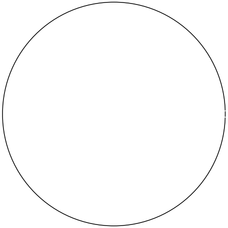
Uma 2-coloração dos 3 vértices implica 2 da mesma cor.

Exemplo 2

Se o plano é colorido com 3 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Exemplo 2

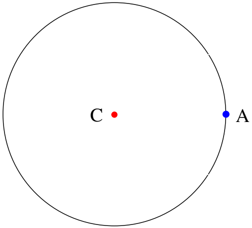
Se o plano é colorido com 3 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?



Circunferência de raio $\sqrt{3}$.

Exemplo 2

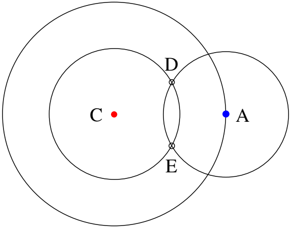
Se o plano é colorido com 3 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?



C (centro) e A com cores distintas, senão tem corda de comprimento 1

Exemplo 2

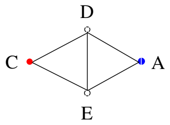
Se o plano é colorido com 3 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?



Circunferências de raio 1 em A e em C.

Exemplo 2

Se o plano é colorido com 3 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? *Sim*



Dos 4 pontos 3-coloridos, 2 que distam 1 devem ter a mesma cor. (por hipótese A e C têm cores distintas)

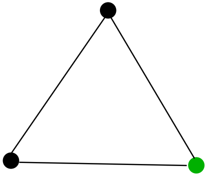
Uma pausa no PG pra falar de um problema legal.

Grafos e nº cromático

Se o plano é colorido com 2 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? *Sim*:

Grafos e nº cromático

Se o plano é colorido com 2 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? *Sim*:



O **grafo** completo com 3 vértices tem **número cromático** 3. Pode ser realizado no plano com arestas de comprimento 1.

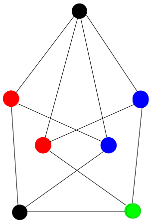
Grafos e nº cromático

Se o plano é colorido com 3 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? *Sim:*

Grafos e nº cromático

Se o plano é colorido com 3 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? *Sim:*

Alternativamente

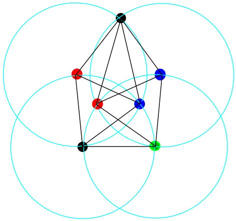


O **grafo** de Moser tem **número cromático** 4.

Grafos e nº cromático

Se o plano é colorido com 3 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? *Sim:*

Alternativamente



Pode ser realizado no plano com arestas de comprimento 1.

Problemas

Se o plano é colorido com 4 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Problemas

Se o plano é colorido com 4 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? **Sim.** Aubrey de Grey (abril 2018) mostrou um grafo com mais que 1500 vértices (usou computador).

Problemas

Se o plano é colorido com 4 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? **Sim.** Aubrey de Grey (abril 2018) mostrou um grafo com mais que 1500 vértices (usou computador).

Se o plano é colorido com 5 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Problemas

Se o plano é colorido com 4 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? **Sim.** Aubrey de Grey (abril 2018) mostrou um grafo com mais que 1500 vértices (usou computador).

Se o plano é colorido com 5 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Se o plano é colorido com 6 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Problemas

Se o plano é colorido com 4 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? **Sim.** Aubrey de Grey (abril 2018) mostrou um grafo com mais que 1500 vértices (usou computador).

Se o plano é colorido com 5 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Se o plano é colorido com 6 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Se o plano é colorido com 7 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Problemas

Se o plano é colorido com 4 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? **Sim.** Aubrey de Grey (abril 2018) mostrou um grafo com mais que 1500 vértices (usou computador).

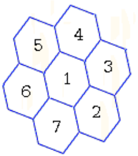
Se o plano é colorido com 5 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Se o plano é colorido com 6 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1?

Se o plano é colorido com 7 cores, existem 2 pontos de mesma cor que distam 1? **Nem sempre**!!

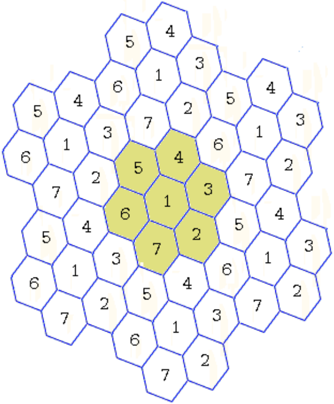
Ladrilhamento com 7 cores

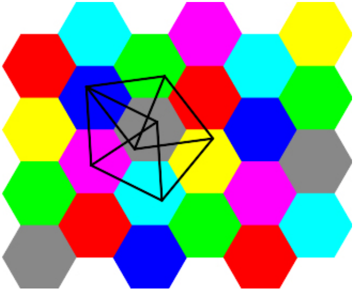
Existe uma 7-coloração do plano sem 2 pontos que distam 1 da mesma cor



Considere ladrilhamento com hexágonos regulares de diâmetro 0,9.

Ladrilhamento com 7 cores





Número cromático do plano

Problema de Hadwiger–Nelson, 1950

Qual é o menor número $\chi(\mathbb{R}^2)$ de cores necessárias para colorir o plano euclidiano de modo que não existam dois pontos da mesma cor que distam 1?

$$5 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7.$$

Fim da pausa, voltemos ao PG

Princípio das gavetas

Generalizado

Teorema (Princípio das Gavetas generalizado (PGg))

Para quaisquer naturais r e $t_1, t_2, \dots, t_r$ vale o seguinte. Em toda r-coloração de

$$\text{(PGg)} \qquad (t_1 - 1) + (t_2 - 1) + \cdots + (t_r - 1) + 1$$

(ou mais) objetos, há pelo menos t_i objetos monocromáticos da cor i, para algum $i \in [r]$.

Princípio das gavetas

Generalizado

Teorema (Princípio das Gavetas generalizado (PGg))

Para quaisquer naturais r e $t_1, t_2, \ldots, t_r$ vale o seguinte. Em toda r-coloração de

$$\text{(PGg)} \qquad (t_1 - 1) + (t_2 - 1) + \cdots + (t_r - 1) + 1$$

(ou mais) objetos, há pelo menos t_i objetos monocromáticos da cor i, para algum $i \in [r]$.

Corolário (Princípio das Gavetas generalizado (PGg))

Em toda r-coloração de n objetos há $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ objetos da mesma cor.

Princípio das gavetas

Infinitário

Teorema (Princípio das gavetas infinitário)

Em toda r-coloração de $\mathbb{N}$ existe um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito e monocromático.

Princípio das gavetas
Ordenado

Teorema (Princípio das gavetas ordenado)

Toda sequência de $mn+1$ números reais possui uma subsequência crescente de $m+1$ termos ou uma subsequência decrescente $n+1$ termos.

Princípio das gavetas

Probabilístico

Teorema (Princípio das gavetas probabilístico)

Numa r-coloração ao acaso de $n \leqslant r$ objetos a probabilidade com que exista pelo menos dois objetos da mesma cor é maior que

$$1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2r}\right).$$

Princípio das gavetas

Probabilístico

Teorema (Princípio das gavetas probabilístico)

Numa r-coloração ao acaso de $n \leqslant r$ objetos a probabilidade com que exista pelo menos dois objetos da mesma cor é maior que

$$1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2r}\right).$$

O conhecido *paradoxo dos aniversários* é o caso $n = 23$ e $r = 365$ na equação acima, a probabilidade é $> 0{,}5$.

Sumário

Notação

k-**subconjunto** é um subconjunto de cardinalidade k.

$$\binom{V}{k} = \{U \subset V : |U| = k\}$$

$$2^V = \bigcup_{k=0}^{|V|} \binom{V}{k}$$

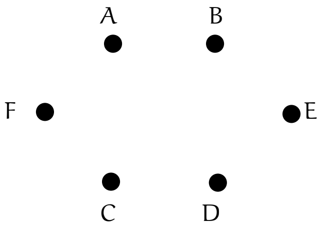
esse último é o conjunto das partes de V.

T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.

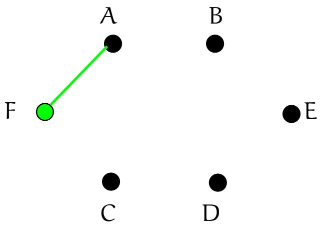
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



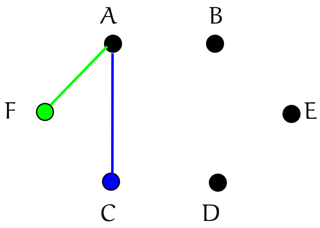
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



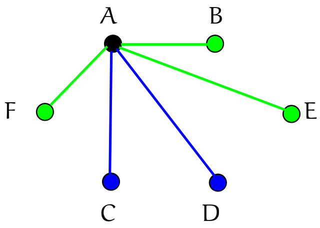
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



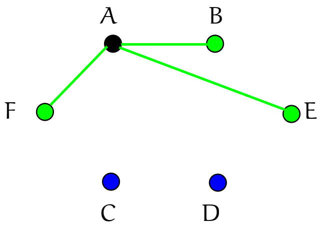
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



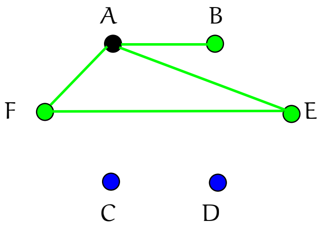
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



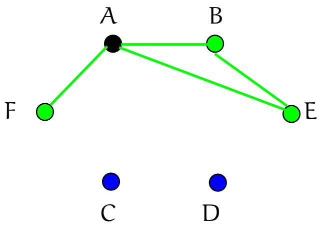
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



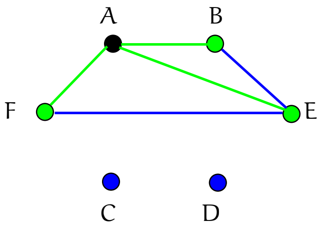
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



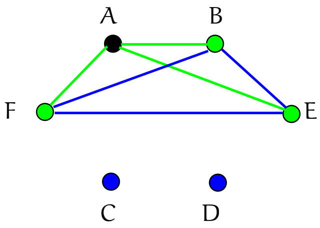
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



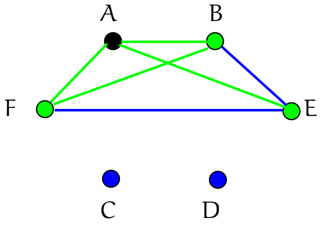
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



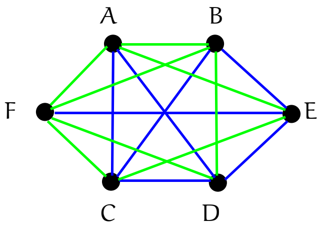
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



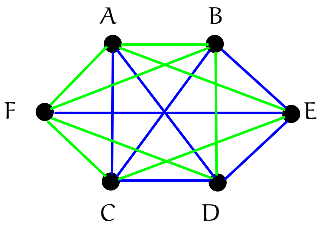
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



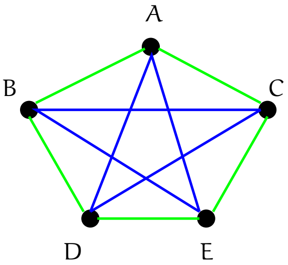
T. Ramsey para 2-conjuntos

Entre quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.



Com 5 usuários, não é verdade.

T. Ramsey para 2-conjuntos



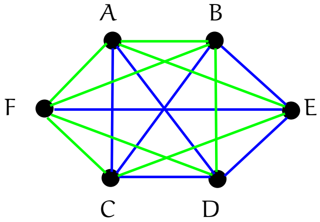


Figura: com 5 pessoas é possível que não haja 3 mutuamente amigos (arestas verdes) nem 3 mutuamente desconhecidos (arestas azuis). Com 6 pessoas essa configuração é impossível, sempre haverá 3 mutuamente amigos ou 3 mutuamente desconhecidos

T. R., 2-conjuntos 2-coloridos

Teorema

Dados naturais $t_1, t_2 \geqslant 2$, existe um natural n tal que para todo conjunto V de cardinalidade $|V| \geqslant n$ vale o seguinte.

Para qualquer 2-coloração de $\binom{V}{2}$ existem $i \in [r]$ e um t_i-subconjunto $X \subseteq V$ com $\binom{X}{2}$ monocromático da cor i.

T. R., 2-conjuntos 2-coloridos

Teorema

Dados naturais $t_1, t_2 \geqslant 2$, existe um natural n tal que para todo conjunto V de cardinalidade $|V| \geqslant n$ vale o seguinte.

Para qualquer 2-coloração de $\binom{V}{2}$ existem $i \in [r]$ e um t_i-subconjunto $X \subseteq V$ com $\binom{X}{2}$ monocromático da cor i.

O menor valor de n para o qual o enunciado do teorema vale é o **número de Ramsey** $R(t_1, t_2)$. O teorema afirma que esse número está bem definido.

T. R., 2-conjuntos 2-coloridos Demonstração

A demonstração é uma indução dupla em t_1 e t_2.

Note que $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$.

Note que $R(2, t_2) = t_2$.

Assuma $t_1, t_2 \geqslant 3$ e $R(t_1 - 1, t_2)$, $R(t_1, t_2 - 1)$.

T. R., 2-conjuntos 2-coloridos Demonstração

$R(t_1, t_2) \leqslant n$ onde

$$n - 1 = (R(t_1 - 1, t_2) - 1) + (R(t_1, t_2 - 1) - 1) + 1$$

T. R., 2-conjuntos 2-coloridos Demonstração

$R(t_1, t_2) \leqslant n$ onde

$$n - 1 = (R(t_1 - 1, t_2) - 1) + (R(t_1, t_2 - 1) - 1) + 1$$

Em $n-1$ vértices com ``cores'' azul ou verde

ou $R(t_1 - 1, t_2)$ são azuis ou $R(t_1, t_2 - 1)$ são verdes

T. R., 2-conjuntos 2-coloridos Demonstração

$R(t_1, t_2) \leqslant n$ onde

$$n - 1 = (R(t_1 - 1, t_2) - 1) + (R(t_1, t_2 - 1) - 1) + 1$$

Em $n-1$ vértices com ``cores'' azul ou verde

ou $R(t_1 - 1, t_2)$ são azuis ou $R(t_1, t_2 - 1)$ são verdes

Se $R(t_1 - 1, t_2)$ são azuis olhe para as cores nas arestas entre eles. Há $t_1 - 1$ com todas as arestas azuis ou t_2 com todas as arestas verdes

T. R., 2-conjuntos 2-coloridos Demonstração

$R(t_1, t_2) \leqslant n$ onde

$$n - 1 = (R(t_1 - 1, t_2) - 1) + (R(t_1, t_2 - 1) - 1) + 1$$

T. R., 2-conjuntos 2-coloridos Demonstração

$R(t_1, t_2) \leqslant n$ onde

$$n - 1 = (R(t_1 - 1, t_2) - 1) + (R(t_1, t_2 - 1) - 1) + 1$$

φ 2-coloração de $\binom{V}{2}$ onde $|V| = n$.

T. R., 2-conjuntos 2-coloridos Demonstração

$R(t_1, t_2) \leqslant n$ onde

$$n - 1 = (R(t_1 - 1, t_2) - 1) + (R(t_1, t_2 - 1) - 1) + 1$$

φ 2-coloração de $\binom{V}{2}$ onde $|V| = n$.

Escolhe um v, 2-colore $V \setminus \{v\}$ a partir da φ e usa PGg em $n - 1$ objetos.

Umas das parte ou tem t_i-subconjunto procurado ou tem $(t_{i\pm1} - 1)$-subconjunto que unido com $\{v\}$ dá o $t_{i\pm1}$-subconjunto procurado. $\square$

números de Ramsey $R(s, r)$

r \ s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
3			**6**	9	14	18	23	28	36	40–42
4				**18**	25[5]	36–41	49–61	59[10]–84	73–115	92–149
5					**43–48**	58–87	80–143	101–216	133–316	149[10]–442
6						**102–165**	115[10]–298	134[10]–495	183–780	204–1171
7							**205–540**	217–1031	252–1713	292–2826
8								**282–1870**	329–3583	343–6090
9									**565–6588**	581–12677
10										**798–23556**

números de Ramsey $R(t,t)$

Sabemos que

$$2^{t/2} < R(t,t) < \frac{4^t}{\sqrt{t}}$$

Erdős conjectura que

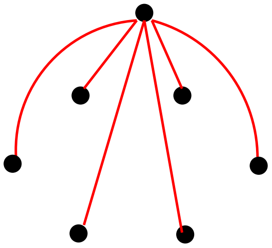
$$\lim_{t\to\infty} R(t,t)^{1/t}$$

existe.

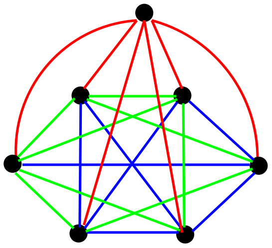
T. R., 2-conjuntos 3-coloridos

Em todo grupo com 17 (ou mais) pessoas, podemos encontrar três pessoas que se amam entre si, três que se odeiam entre si ou três que são indiferentes entre si.

T. R., 2-conjuntos 3-coloridos



T. R., 2-conjuntos 3-coloridos



T. R., 2-conjuntos r-coloridos

Teorema

Dados números naturais r e $t_1, \dots, t_r \geqslant 2$, existe o menor natural $R(t_1, \dots, t_r)$ tal que para todo conjunto V de cardinalidade pelo menos $R(t_1, \dots, t_r)$ vale o seguinte.

Para toda r-coloração de $\binom{V}{2}$ existem $i \in [r]$ e um t_i-subconjunto $X \subseteq V$ com $\binom{X}{2}$ monocromático da cor $i \in [r]$.

T. R., 2-conjuntos r-coloridos Demonstração

A demonstração é análoga.

Tome V de cardinalidade

$$n = (R(t_1 - 1, t_2, \dots, t_r) - 1) + (R(t_1, t_2 - 2, \dots, t_r) - 1) + \cdots$$

$$+(R(t_1, \dots, t_r - 2) - 1) + 2$$

Fixe $v \in V$, e use o PGg nos $n - 1$ outros vértices.

T. R., k-conjuntos r-coloridos

Teorema de Ramsey, 1930

Dados números naturais r, k *e* $t_1, \ldots, t_r \geqslant k$*, existe o menor natural* $R^{(k)}(t_1, \ldots, t_r)$ *tal que para todo conjunto* V *de cardinalidade pelo menos* $R^{(k)}(t_1, \ldots, t_r)$ *vale o seguinte.*

Para toda r*-coloração de* $\binom{V}{k}$ *existem* $i \in [r]$ *e um* t_i*-subconjunto* $X \subseteq V$ *com* $\binom{X}{k}$ *monocromático da cor* i*.*

Notação "flecha"

"*para qualquer* r*-coloração de* $\binom{[n]}{k}$ *existem* i *e um* t_i*-subconjunto* $X \subseteq [n]$ *com* $\binom{X}{k}$ *monocromático da cor* i"

$$n \to (t_1, \dots, t_r)_r^k$$

$$n \to (t)_r^k \quad \text{se } t_1 = t_2 = \cdots = t_r.$$

Notação flecha:

$$n \rightarrow (t_1, \ldots, t_r)^k_r$$

$n, r, k, t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{N}$ são cardinalidades

Notação flecha: $n \to (t_1, \dots, t_r)^k_r$

$n, r, k, t_1, \dots, t_r \in \mathbb{N}$ são cardinalidades

- alvos monocromáticos de cada cor i

$$n \longrightarrow \left(t_1, t_2, \dots, t_r \right)^{k}_{r}$$

Notação flecha: $n \to (t_1, \ldots, t_r)_r^k$

$n, r, k, t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{N}$ são cardinalidades

- alvos monocromáticos de cada cor i
- arestas

$$\boxed{n} \longrightarrow \left(\boxed{t_1, t_2, \ldots, t_r}\right)_{r}^{\boxed{k}}$$

Notação flecha: $n \to (t_1, \ldots, t_r)^k_r$

$n, r, k, t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{N}$ são cardinalidades

- alvos monocromáticos de cada cor i
- arestas

$$n \longrightarrow \left(t_1, t_2, \ldots, t_r \right)^k_r$$

- conjunto “universo”

Notação flecha: $n \rightarrow (t_1, \ldots, t_r)^k_r$

$n, r, k, t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{N}$ são cardinalidades

- alvos monocromáticos de cada cor i
- arestas

$$n \longrightarrow \left(t_1, t_2, \ldots, t_r \right)^{k}_{r}$$

- conjunto “universo”
- cores

Notação flecha: $n \rightarrow (t_1, \ldots, t_r)^k_r$

$n, r, k, t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{N}$ são cardinalidades

- alvos monocromáticos de cada cor i
- arestas

$$n \longrightarrow \big(t_1, t_2, \ldots, t_r\big)^{k}_{r}$$

- conjunto “universo”
- cores

Teorema de Ramsey infinitário

Teorema de Ramsey, 1930

Dados números naturais r *e* k, *para qualquer* r*-coloração de* $\binom{\mathbb{N}}{k}$ *existem* $i \in [r]$ *e um subconjunto infinito* $X \subseteq \mathbb{N}$ *tal que* $\binom{X}{k}$ *monocromático da cor* i.

Demonstração para $k = 2$

$\varphi : \binom{\mathbb{N}}{2} \to [r]$.

$A_1 = \mathbb{N}$ e $a_1 = \min A_1$.

Suponha A_n definido e infinito, defina $a_n = \min A_n$.

Alguma cor i incide em a_n infinitas vezes

- A_{n+1} são os outros extremos em A_n ($A_n \supset A_{n+1}$)
- pinte a_n com a cor i

Em $a_1, a_2, \ldots$ alguma cor j ocorre infinitas vezes, seja Y os elementos dessa sequência da cor j.

$\binom{Y}{2}$ monocromático por φ.

$\square$

Teorema de Ramsey infinitário

O caso geral, para k finito, sai por indução

$$\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^k_r$$

Infinitário $\Rightarrow$ finitista

Para todo t

$$\text{se } \aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^k_r \text{ então } \aleph_0 \longrightarrow (t)^k_r$$

Por compacidade (+ adiante), existe n

$$n \longrightarrow (t)^k_r$$

Sumário

Teorema do final feliz

Teorema (Erdős–Szekeres, 1935)

Para todo $n \geqslant 4$, *existe um menor natural* $\mathrm{ES}(n)$ *tal que para quaisquer* $\mathrm{ES}(n)$ *pontos em posição geral no plano, existem* n *pontos que formam um polígono convexo.*

Demonstração

Dado n, seja P pontos em posição geral t.q.

$$|P| \longrightarrow (5, n)_2^4$$

Demonstração

Dado n, seja P pontos em posição geral t.q.

$$|P| \longrightarrow (5, n)_2^4$$

$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 1$ se não são vértices de um quadrilátero convexo.
$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 2$ se são vértices de um quadrilátero convexo.

Demonstração

Dado n, seja P pontos em posição geral t.q.

$$|P| \longrightarrow (5, n)_2^4$$

$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 1$ se não são vértices de um quadrilátero convexo.
$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 2$ se são vértices de um quadrilátero convexo.

Do TR, (1) ou (2):

(1) 5-subconjunto U tal que $\binom{U}{4}$ é monocr. cor 1

Demonstração

Dado n, seja P pontos em posição geral t.q.

$$|P| \longrightarrow (5, n)_2^4$$

$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 1$ se não são vértices de um quadrilátero convexo.
$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 2$ se são vértices de um quadrilátero convexo.

Do TR, (1) ou (2):

(1) 5-subconjunto U tal que $\binom{U}{4}$ é monocr. cor 1

não, pois quaisquer 5 em posição geral implica 4 em quadrilátero convexo! (prova?)

Demonstração

Dado n, seja P pontos em posição geral t.q.

$$|P| \longrightarrow (5, n)^4_2$$

$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 1$ se não são vértices de um quadrilátero convexo.
$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 2$ se são vértices de um quadrilátero convexo.

Do TR, (1) ou (2):

(1) 5-subconjunto U tal que $\binom{U}{4}$ é monocr. cor 1

não, pois quaisquer 5 em posição geral implica 4 em quadrilátero convexo! (prova?)

(2) n-subconjunto D tal que $\binom{D}{4}$ é monocr. cor 2.

Demonstração

Dado n, seja P pontos em posição geral t.q.

$$|P| \longrightarrow (5, n)^4_2$$

$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 1$ se não são vértices de um quadrilátero convexo.
$\varphi(\{u, v, x, y\}) = 2$ se são vértices de um quadrilátero convexo.

Do TR, (1) ou (2):

(1) 5-subconjunto U tal que $\binom{U}{4}$ é monocr. cor 1

não, pois quaisquer 5 em posição geral implica 4 em quadrilátero convexo! (prova?)

(2) n-subconjunto D tal que $\binom{D}{4}$ é monocr. cor 2.

$\Longrightarrow$ n formam polígono convexo! (prova?)

$\square$

Conjectura de Erdős–Szekeres

Conjectura

O menor número de pontos no plano para o teorema do final feliz valer é $\mathrm{ES}(n) = 2^{n-2} + 1$.

Teorema de Schur (1916)

Teorema

Dado $r \geqslant 1$, existe um menor $s(r) \in \mathbb{N}$ tal que em qualquer r-coloração de $[s(r)]$ existe solução monocromática de $x + y = z$.

Demonstração

Dado r, tome n tal que

$$n \longrightarrow (3)_r^2$$

e η uma r-coloração de $[n]$.

Demonstração

Dado r, tome n tal que

$$n \longrightarrow (3)^2_r$$

e η uma r-coloração de $[n]$. Defina $\varphi : \binom{[n]}{2} \to [r]$

$$\varphi(\{i, j\}) = \eta(|j - i|)$$

Demonstração

Dado r, tome n tal que

$$n \longrightarrow (3)^2_r$$

e η uma r-coloração de $[n]$. Defina $\varphi : \binom{[n]}{2} \to [r]$

$$\varphi(\{i, j\}) = \eta(|j - i|)$$

Para toda 2-coloração φ existe $\binom{\{a, b, c\}}{2}$ monocromático.

Demonstração

Dado r, tome n tal que

$$n \longrightarrow (3)^2_r$$

e η uma r-coloração de $[n]$. Defina $\varphi : \binom{[n]}{2} \to [r]$

$$\varphi(\{\, i, j \,\}) = \eta(|j - i|)$$

Para toda 2-coloração φ existe $\binom{\{\, a, b, c \,\}}{2}$ monocromático.

S.p.g. $a < b < c$, logo

$$x = b - a, \; y = c - b, \; z = c - a$$

é solução de $x + y = z$. $\square$

Fermat $\pmod{p}$

Teorema

Para todo $m \geqslant 1$ *e todo primo* p *suficientemente grande, a equação* $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$ *tem solução não trivial.*

Demostração

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $p > s(m)$ primo e g um gerador de $\mathbb{Z}_p^*$.

$x \in \mathbb{Z}_p^*$ e $x = g^k$ então $\varphi(x) = k \bmod m$

$p - 1 \geqslant s(m)$, pelo teorema de Schur, há uma solução monocromática de $x + y = z$.

Ou seja, existem naturais a, b, c

$$g^{am+r} + g^{bm+r} = g^{cm+r}$$

$\times g^{-r}$ resulta $g^{am} + g^{bm} = g^{cm}$ em $\mathbb{Z}_p$.

De $x = g^a$, $y = g^b$ e $z = g^c$, temos $x^m + y^m = z^m$ em $\mathbb{Z}_p$.

Semigrupos

Um conjunto S munido de uma operação binária $*: S \times S \to S$ *associativa* é chamado **semigrupo**.

Semigrupos

Um conjunto S munido de uma operação binária $* : S \times S \to S$ *associativa* é chamado **semigrupo.**

Exemplos: $\mathbb{N}$ com a soma e $\mathbb{N}$ com o produto usuais são dois exemplos de semigrupos

Semigrupos

Um conjunto S munido de uma operação binária $*: S \times S \to S$ *associativa* é chamado **semigrupo.**

Exemplos: $\mathbb{N}$ com a soma e $\mathbb{N}$ com o produto usuais são dois exemplos de semigrupos

Exercício: Mostre que $\mathbb{N}$ com $\mathtt{mdc}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (o *maior divisor comum*) é um semigrupo.

Idempotente

$(S, *)$ um semigrupo. Um idempotente é $x \in S$ tal que

$$x * x = x$$

Idempotente

Teorema

Todo semigrupo $(S, *)$ com S finito tem idempotente.

Demonstração

Sejam $t \in \mathbb{N}$ t.q. $t \longrightarrow (3)^2_{|S|}$
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_t)$ uma t-upla qualquer com $x_i \in S$.

Demonstração

Sejam $t \in \mathbb{N}$ t.q. $t \longrightarrow (3)^2_{|S|}$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ uma t-upla qualquer com $x_i \in S$.

$\varphi : \binom{[n]}{2} \to S$ a $|S|$-coloração: $\forall i < j$

$$\varphi(\{x_i, x_j\}) = x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j \in S$$

Demonstração

Sejam $t \in \mathbb{N}$ t.q. $t \longrightarrow (3)^2_{|S|}$
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_t)$ uma t-upla qualquer com $x_i \in S$.

$\varphi : \binom{[n]}{2} \to S$ a $|S|$-coloração: $\forall i < j$

$$\varphi(\{x_i, x_j\}) = x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j \in S$$

se $\binom{\{i,j,k\}}{2}$ é monocromático $(i < j < k)$

$$x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j = x_{j+1} * x_{j+2} * \cdots * x_k = x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_k$$

Demonstração

Sejam $t \in \mathbb{N}$ t.q. $t \longrightarrow (3)^2_{|S|}$
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ uma t-upla qualquer com $x_i \in S$.

$\varphi : \binom{[n]}{2} \to S$ a $|S|$-coloração: $\forall i < j$

$$\varphi(\{x_i, x_j\}) = x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j \in S$$

se $\binom{\{i,j,k\}}{2}$ é monocromático $(i < j < k)$

$$\underbrace{x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j = x_{j+1} * x_{j+2} * \cdots * x_k}_{x_{i+1}*x_{i+2}*\cdots*x_j \,*\, x_{j+1}*x_{j+2}*\cdots*x_k} = x_{i+1}*x_{i+2}*\cdots*x_k$$

Demonstração

Sejam $t \in \mathbb{N}$ t.q. $t \longrightarrow (3)^2_{|S|}$
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_t)$ uma t-upla qualquer com $x_i \in S$.

$\varphi : \binom{[n]}{2} \to S$ a $|S|$-coloração: $\forall i < j$

$$\varphi(\{x_i, x_j\}) = x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j \in S$$

se $\binom{\{i,j,k\}}{2}$ é monocromático ($i < j < k$)

$$\underbrace{x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j = x_{j+1} * x_{j+2} * \cdots * x_k}_{x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j \,*\, x_{j+1} * x_{j+2} * \cdots * x_k} = x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_k$$

portanto $(x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j)^2 = x_{i+1} * x_{i+2} * \cdots * x_j$.

Teorema da sequência monótona

Teorema

Toda sequência de números reais admite subsequência monótona.

Demonstração

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de números reais.

2-colorimos o par $n < m$ cor 1 sse $x_n < x_m$

Do TR Infinitário existe Y infinito cujos pares são monocromáticos.

Se cor 1, Y são índices de subsequência (estritamente) crescente.

Se cor 2, Y são índices de subsequência decrescente.

$\square$

Sumário

Princípio de compacidade

Uma técnica útil em Teoria de Ramsey

O problema de determinar o número cromático do plano é o problema de determinar o número cromático do grafo

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$E = \left\{ \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = 1 \right\}$$

Princípio de compacidade

Uma técnica útil em Teoria de Ramsey

O problema de determinar o número cromático do plano é o problema de determinar o número cromático do grafo

$$V = \mathbb{R}^2$$
$$E = \Big\{ \{x, y\} \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = 1 \Big\}$$

Porém, é suficiente saber o número cromático do grafo dos subgrafos finitos (i.e., $|V|$ finito).

Princípio de compacidade

Teorema

Um grafo G tem número cromático no máximo r se, e somente se, todo subgrafo finito de G tem número cromático no máximo r.

Princípio de compacidade

Teorema

Um grafo G tem número cromático no máximo r se, e somente se, todo subgrafo finito de G tem número cromático no máximo r.

Demonstração.

1. G finito
2. G infinito enumerável (s.p.g. $V = \mathbb{N}$)
3. G infinito

O "somente se" é imediato. Basta provar o "se". O item 1 também é imediato. $\square$

Dem. para G infinito enumerável.

Suponha que todo subgrafo finito tem $\chi \leqslant r$, em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n : [n] \to [r] \qquad \text{(boa coloração)}$$

Dem. para G infinito enumerável.

Suponha que todo subgrafo finito tem $\chi \leqslant r$, em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n : [n] \to [r] \qquad \text{(boa coloração)}$$

- c_1 cor que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_1(1), \varphi_2(1), \dots\}$

$\square$

Dem. para G infinito enumerável.

Suponha que todo subgrafo finito tem $\chi \leqslant r$, em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n : [n] \to [r] \qquad \text{(boa coloração)}$$

- c_1 cor que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_1(1), \varphi_2(1), \ldots\}$
- $I_1 = \{n \geqslant 2 : \varphi_n(1) = c_1\}$

$\square$

Dem. para G infinito enumerável.

Suponha que todo subgrafo finito tem $\chi \leqslant r$, em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n : [n] \to [r] \qquad \text{(boa coloração)}$$

- c_1 cor que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_1(1), \varphi_2(1), \dots\}$
- $I_1 = \{n \geqslant 2 : \varphi_n(1) = c_1\}$
- Se c_j e I_j estão definidos

□

Dem. para G infinito enumerável.

Suponha que todo subgrafo finito tem $\chi \leqslant r$, em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n : [n] \to [r] \qquad \text{(boa coloração)}$$

- c_1 cor que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_1(1), \varphi_2(1), \ldots\}$
- $I_1 = \{n \geqslant 2 : \varphi_n(1) = c_1\}$
- Se c_j e I_j estão definidos
  - c_{j+1} cor que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_n(j+1) : n \in I_j\}$

$\square$

Dem. para G infinito enumerável.

Suponha que todo subgrafo finito tem $\chi \leqslant r$, em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n : [n] \to [r] \qquad \text{(boa coloração)}$$

- c_1 cor que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_1(1), \varphi_2(1), \ldots\}$
- $I_1 = \{n \geqslant 2 : \varphi_n(1) = c_1\}$
- Se c_j e I_j estão definidos
  - c_{j+1} cor que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_n(j+1) : n \in I_j\}$
  - $I_{j+1} = \{n \geqslant j+2 : \varphi_n(1) = c_1, \ldots, \varphi_n(j+1) = c_{j+1}\}$

$\square$

Dem. para G infinito enumerável.

Suponha que todo subgrafo finito tem $\chi \leqslant r$, em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n : [n] \to [r] \qquad \text{(boa coloração)}$$

- c_1 cor que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_1(1), \varphi_2(1), \ldots\}$
- $I_1 = \{n \geqslant 2 : \varphi_n(1) = c_1\}$
- Se c_j e I_j estão definidos
  - c_{j+1} cor que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_n(j+1) : n \in I_j\}$
  - $I_{j+1} = \{n \geqslant j+2 : \varphi_n(1) = c_1, \ldots, \varphi_n(j+1) = c_{j+1}\}$
- $\phi : \mathbb{N} \to [r]$ dada por $\phi(i) = c_i$

$\square$

Passos para dem. G infinito.

1. $[\mathrm{r}]$ com topologia discreta e $[\mathrm{r}]^{\mathrm{V}}$ com topologia produto é compacto

Passos para dem. G infinito.

1. $[r]$ com topologia discreta e $[r]^V$ com topologia produto é compacto
2. $U \subseteq V$ finito e $\phi : U \to [r]$

$$F_U^{\phi} = \left\{ f \in [r]^V : f|_U = \phi \right\} \quad \text{e} \quad F_U = \bigcup_{\phi \text{ boa}} F_U^{\phi}$$

Passos para dem. G infinito.

1. $[r]$ com topologia discreta e $[r]^V$ com topologia produto é compacto
2. $U \subseteq V$ finito e $\phi : U \to [r]$

$$F_U^\phi = \left\{ f \in [r]^V : f|_U = \phi \right\} \quad \text{e} \quad F_U = \bigcup_{\phi \text{ boa}} F_U^\phi$$

(a) F_U^ϕ é um aberto básico da topologia produto

Passos para dem. G infinito.

1. $[r]$ com topologia discreta e $[r]^V$ com topologia produto é compacto
2. $U \subseteq V$ finito e $\phi : U \to [r]$

$$F_U^\phi = \left\{ f \in [r]^V : f|_U = \phi \right\} \quad \text{e} \quad F_U = \bigcup_{\phi \text{ boa}} F_U^\phi$$

(a) F_U^ϕ é um aberto básico da topologia produto

(b) $F_U \neq \emptyset$

Passos para dem. G infinito.

1. $[r]$ com topologia discreta e $[r]^V$ com topologia produto é compacto
2. $U \subseteq V$ finito e $\phi : U \to [r]$

$$F_U^\phi = \left\{ f \in [r]^V : f|_U = \phi \right\} \quad \text{e} \quad F_U = \bigcup_{\phi \text{ boa}} F_U^\phi$$

(a) F_U^ϕ é um aberto básico da topologia produto

(b) $F_U \neq \emptyset$

(c) F_U é fechado

Passos para dem. G infinito.

1. $[r]$ com topologia discreta e $[r]^V$ com topologia produto é compacto
2. $U \subseteq V$ finito e $\phi : U \to [r]$

$$F_U^\phi = \left\{ f \in [r]^V : f|_U = \phi \right\} \quad \text{e} \quad F_U = \bigcup_{\phi \text{ boa}} F_U^\phi$$

(a) F_U^ϕ é um aberto básico da topologia produto
(b) $F_U \neq \emptyset$
(c) F_U é fechado
(d) se $U \subset W$ então $F_W \subset F_U$

Passos para dem. G infinito.

1. $[r]$ com topologia discreta e $[r]^V$ com topologia produto é compacto
2. $U \subseteq V$ finito e $\phi : U \to [r]$

$$F_U^\phi = \left\{ f \in [r]^V : f|_U = \phi \right\} \quad \text{e} \quad F_U = \bigcup_{\phi \text{ boa}} F_U^\phi$$

   (a) F_U^ϕ é um aberto básico da topologia produto
   (b) $F_U \neq \emptyset$
   (c) F_U é fechado
   (d) se $U \subset W$ então $F_W \subset F_U$
3. $F_{U_1} \cap F_{U_2} \cap \cdots \cap F_{U_n} \supset F_{U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n} \neq \emptyset$, portanto

$$\bigcap_{U \text{ finito}} F_U \neq \emptyset.$$

Passos para dem. G infinito.

1. $[r]$ com topologia discreta e $[r]^V$ com topologia produto é compacto
2. $U \subseteq V$ finito e $\phi : U \to [r]$

$$F_U^\phi = \left\{ f \in [r]^V : f|_U = \phi \right\} \quad \text{e} \quad F_U = \bigcup_{\phi \text{ boa}} F_U^\phi$$

   (a) F_U^ϕ é um aberto básico da topologia produto
   (b) $F_U \neq \emptyset$
   (c) F_U é fechado
   (d) se $U \subset W$ então $F_W \subset F_U$

3. $F_{U_1} \cap F_{U_2} \cap \cdots \cap F_{U_n} \supset F_{U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n} \neq \emptyset$, portanto

$$\bigcap_{U \text{ finito}} F_U \neq \emptyset.$$

4. $\phi \in \bigcap F_U$ é a coloração procurada.

Sumário

Referências

- Graham RL, Rothschild BL, Spencer JH (1980) *Ramsey theory*, John Wiley & Sons Inc.
- Landman BM, Robertson A (2004) *Ramsey theory on the integers*, Student mathematical library, American Mathematical Society.
- Prömel HJ (2013) *Ramsey theory for discrete structures*, Springer Publishing Company.