

Jair Donadelli

Introdução aos princípios da teoria de Ramsey

COPAM 2018, BELÉM-PA

12 – 14 de novembro

Prefácio

A teoria de Ramsey é uma coleção de resultados em combinatória que, grosso modo, garantem que em qualquer partição finita de alguma estrutura suficientemente grande haverá certas configurações ou subestruturas em alguma das partes. Um resultado protótipo da teoria é o princípio das gavetas, que afirma que se um conjunto com $km + 1$ elementos é particionado em m partes, então, independentemente de como a partição é realizada, deve haver uma parte com $k + 1$ (ou mais) elementos.

O nome “teoria de Ramsey” é uma homenagem a Frank Plumpton Ramsey, um matemático, filósofo e economista, que publicou o teorema de Ramsey em 1928 como uma ferramenta para seus estudos em Lógica, embora os primeiros resultados do tipo Ramsey são devidos, em ordem cronológica, a Hilbert (1892), Schur (1916) e Van der Waerden (1927). Atualmente é uma das áreas de estudo mais ativas da combinatória inclusive com muitas aplicações interessantes em outras áreas que incluem resultados em teoria dos números, álgebra, geometria, análise funcional, topologia, teoria dos conjuntos, lógica, teoria ergódica, teoria da informação e teoria da computação. Algumas dessas aplicações são tão profundas que deram origem a sua própria subdisciplina como a teoria ergódica de Ramsey.

Este texto foi preparado a partir de [1, 2] para um minicurso no Congresso Pan-Amazônico de Matemática de 2018 e apresenta uma introdução aos princípios da teoria de Ramsey. As fotos, citações e narrativas históricas são em grande parte de [6, 7].

Notação:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$$

Sejam V um conjunto não vazio e k um natural; um k -**subconjunto** é um subconjunto de V de cardinalidade k .

O conjunto dos k -subconjuntos de V é denotado

$$\binom{V}{k} = \{U \subset V : |U| = k\} \text{ e}$$

$$2^V = \bigcup_{k=0}^{|V|} \binom{V}{k}$$

é o conjunto das partes de V .

Se $A, B \subset \mathbb{Z}$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Sumário

1	Uma breve linha do tempo	1
2	Princípio das gavetas de Dirichlet	3
2.1	O número cromático do plano	8
2.1.1	Compacidade	10
2.2	E o Dirichlet?	13
3	O Teorema de Ramsey	15
3.1	Teorema de Ramsey	20
3.1.1	O teorema do final feliz	22
3.2	Teorema de Ramsey infinitário	24
3.2.1	Um ponto de vista unificado e compacidade	26
3.2.2	Infinitos ... mais infinitos	27
4	O Teorema de Schur	31
4.1	Último teorema de Fermat mod p	34
4.2	Teorema de Rado	36
5	O Teorema de Van der Waerden	39
5.1	Preparação para a demonstração	42
5.1.1	Partição do intervalo $[W]$ e $\mathcal{W}(3, 2)$	43
5.1.2	Partição de partição e $\mathcal{W}(3, 3)$	44
5.1.3	Indução e $\mathcal{W}(4, 2)$	47
5.2	Demonstração do teorema de Van der Waerden	49
5.3	Demonstração via sistemas dinâmicos	53
5.3.1	Demonstração do teorema de Van der Waerden	54
5.4	O lema do cubo de Hilbert	55
6	Densidade \times Partição	59
6.1	Teoremas de densidade	61
6.2	Provas do teorema de Roth	63

VIII Sumário

6.2.1	Demonstração combinatória	64
6.2.2	Demonstração usando grafos	68
Referências		75
Índice Remissivo		77

Uma breve linha do tempo

1892 **David Hilbert**, em conexão com as investigações sobre a irredutibilidade das funções racionais, provou um resultado do tipo Ramsey conhecido hoje como o lema do cubo de Hilbert.

“Parece que o lema do cubo de David Hilbert foi o primeiro exemplo da matemática Ramseyniana. Aparentemente ninguém — incluindo Hilbert — apreciou muito o lema. Hilbert não continuou a pesquisa na direção que o lema mostrava. A área não aprendeu sobre o lema de Hilbert até muito mais tarde. O lema foi adicionado como a primeira instância de pensamento Ramseyniano não devido à sua influência, que foi inexistente, mas devido ao seu respeitável ano de nascimento de 1892” [7]

1916 Cerca de 25 anos depois de Hilbert, **Issai Schur**, numa prova de um teorema de Dickson sobre uma versão modular da conjectura de Fermat, provou que se os números inteiros positivos são finitamente coloridos, então uma classe de cor contém uma solução de $x + y = z$.

“Na verdade, a nova matemática Ramseyniana, descoberta por Issai Schur em seu artigo de 1916, permaneceu em seu coração por muitos anos. Embora na época ninguém estivesse interessado na nova direção que o teorema de Schur de 1916 mostrou, o próprio Issai Schur estava” [7].

1927 Uma conjectura sobre a distribuição de resíduos quadráticos levou Schur a uma questão sobre progressões aritméticas. Esse problema foi resolvido em 1927 por **Bartel Leendert van der Waerden** e o teorema correspondente ficou famoso como o teorema de van der Waerden sobre progressões aritméticas. O teorema de Van der Waerden implica e fortalece o lema do cubo de Hilbert. Van der Waerden não contribuiu com mais nada para a teoria de Ramsey.

1930 O matemático, economista e filósofo inglês **Frank Plumpton Ramsey** estudava um problema de decisão na lógica proposicional quando provou o teorema de Ramsey como um resultado auxiliar. Curiosamente, seu re-

sultado principal, em lógica, ficou esquecido enquanto que seu resultado auxiliar tornou-se pilar de um novo ramo da matemática.

“ É incrível para mim a rapidez com que as notícias do princípio de Ramsey viajaram no época que dificilmente pode ser chamada de Era da Informação. O artigo de Ramsey apareceu em 1930. Já em 1933 o grande lógico norueguês Thoralf Albert Skolem (1887–1963) publicou sua própria prova [Sko] do princípio de Ramsey (com uma referência à publicação de Ramsey em 1930!). Em 1935, mais uma prova (para a teoria dos grafos) apareceu no artigo [ES] pelos dois jovens húngaros, Paul Erdős e Gjörgy (George) Szekeres.” [7].

- 1935 **Richard Rado**, na sua tese de doutoramento *Studien zur Kombinatorik*, escrita sob orientação de Schur e em vários trabalhos subsequentes, unificou e estendeu os resultados de Hilbert, Schur e Van der Waerden. De modo independente houve um desenvolvimento profundo baseado no teorema de Ramsey redescoberto por **Paul Erdős** e **George Szekeres** quando tentavam resolver um problema de geometria.
- 1960 **Alfred W. Hales** e **Robert I. Jewett** revelaram o núcleo combinatório do teorema de Van der Waerden sobre progressões aritméticas.
- 1971 **Ronald L. Graham** e **Bruce L. Rothschild** ampliaram o resultado de Hales–Jewett de maneira notável.
- 1977 **Jeff Paris** e **Leo Harrington** mostraram um Teorema do tipo Ramsey que foi o primeiro exemplo “natural” do Teorema da Incompletude de Gödel, isto é, um teorema que não é demonstrável na aritmética de Peano, mas que é facilmente demonstrável na teoria dos conjuntos.
- 1998 **William Timothy Gowers** recebeu a medalha Fields por seus resultados em análise funcional obtidos por métodos da teoria da Ramsey.

Princípio das gavetas de Dirichlet

“In science, Dirichlet has two features which constitute his speciality. He alone, not myself, not Cauchy, not Gauß knows what a perfectly rigorous mathematical proof is. When Gauß says he has proved something, it is highly probable to me, when Cauchy says it, one may bet as much pro as con, when Dirichlet says it, it is certain; I prefer not at all to go into such subtleties.” Jacobi



Figura 2.1. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

O princípio da casa das gavetas (PG) de Dirichlet¹ diz que se em r gavetas distribuirmos $n > r$ objetos, então alguma gaveta conterá mais de um objeto. Podemos enunciar o PG como: *Sejam \mathcal{O} e G conjuntos finitos e não vazios. Se $|\mathcal{O}| > |G|$ então não existe função $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow G$ injetiva.* A prova é fácil, se φ é injetiva então $|\mathcal{O}| = |\text{Im}(\varphi)|$, mas $|\text{Im}(\varphi)| \leq |G|$ pois $\text{Im}(\varphi) \subset G$, logo $|\mathcal{O}| \leq |G|$.

Exemplo 2.1. Dado $m \in \mathbb{N}$, existem números inteiros positivos a e b , com um $a \neq b$, tal que $m^a - m^b$ é divisível por 10. Considere os seguintes 11 números

$$m^1, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, m^7, m^8, m^9, m^{10}, m^{11}$$

como há 10 possibilidades para o algarismo da unidade, dois desses números, digamos m^a e m^b com $a \neq b$, termina com o mesmo algarismo de modo que $m^a - m^b$ é divisível por 10.

¹ Também conhecido como princípio da casa dos pombos.

Exemplo 2.2. Seja n um natural. Em qualquer escolha de mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ haverá dois números dentre os escolhidos tais que um é múltiplo do outro. Pelo teorema fundamental da aritmética, todo $r \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ é de forma $r = 2^a t$ com únicos $a, t \in \mathbb{N}$ e t ímpar. Se t é ímpar, então $t \in \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1\}$ (n possíveis valores para t). Então, em mais do que n números dois deles terão o mesmo divisor ímpar, digamos $r = 2^a t$ e $s = 2^b t$. O maior deles é múltiplo do menor.

Coloração

Antes de irmos adiante, introduziremos uma nomenclatura usual em vários ramos da combinatória. A função $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow G$ define uma partição de \mathcal{O} indexada pelos elementos $x \in G$ e com partes $\varphi^{-1}(x)$ (eventualmente, consideramos só as não vazias). Escrevemos a união disjunta

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in G} \varphi^{-1}(x)$$

e chamamos partição de coloração e partes de cores.

Definição 2.3 (r -coloração, cor, monocromático). *Sejam \mathcal{O} e G conjuntos não vazios. Uma r -coloração de \mathcal{O} é uma função $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow G$ com $|G| = r$. Para todo $e \in \mathcal{O}$ dizemos que $\varphi(e)$ é a **cor de e** . Quando o conjunto de cores G não está especificado consideramos*

$$\varphi: \mathcal{O} \rightarrow [r].$$

*Em uma coloração φ de \mathcal{O} dizemos que $A \subseteq \mathcal{O}$ é **monocromático** se φ restrita a $A \subseteq \mathcal{O}$, denotada $\varphi|_A$, é função constante.*

Há uma equivalência entre colorações de conjuntos de mesma cardinalidade: se $|A| = |B|$ então há uma bijeção $f: A \rightarrow B$ e uma coloração $\varphi: B \rightarrow [r]$ de B define uma coloração equivalente $\varphi \circ f: A \rightarrow [r]$ de A . Tendo em vista que, nesse contexto, mais importante do que “o que” são os objetos é “quantos” são os objetos, e usando a linguagem dada acima o (PG) fica

(PG) *Em qualquer r -coloração de $n > r$ objetos existem pelo menos 2 objetos da mesma cor.*

Enunciamos no teorema abaixo uma generalização do PG: se r -colorirmos n objetos, então alguma gaveta conterà, de fato, pelo menos

$$\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-1}{r} \right\rfloor + 1$$

objetos.

Variantes do PG

Teorema 2.4 (Princípio das Gavetas generalizado (PGg)). *Para quaisquer naturais r e t_1, t_2, \dots, t_r vale o seguinte. Em toda r -coloração de $(t_1 - 1) + (t_2 - 1) + \dots + (t_r - 1) + 1$ objetos, há pelo menos t_i objetos monocromáticos da cor i , para algum $i \in [r]$.*

Demonstração. Por contradição. Seja φ uma r -coloração de um conjunto \mathcal{O} com $|\mathcal{O}| = (t_1 - 1) + (t_2 - 1) + \dots + (t_r - 1) + 1$. Se para todo i , $|\varphi^{-1}(i)| \leq t_i - 1$ então

$$|\mathcal{O}| = \sum_{i=1}^r |\varphi^{-1}(i)| \leq \sum_{i=1}^r (t_i - 1) < |\mathcal{O}|. \quad \square$$

Corolário 2.5. *Em toda r -coloração de n objetos há $\lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor + 1$ objetos da mesma cor.*

Demonstração. Dados n e r , para todo $i \in [r]$ faça $t_i = \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor + 1$. \square

Corolário 2.6. *Em toda r -coloração de $r(t - 1) + 1$ objetos há t objetos da mesma cor.*

Demonstração. Tome $t_i = t$ para todo $i \in [r]$ no teorema. \square

Teorema 2.7 (Princípio das gavetas ordenado). *Toda sequência de $mn + 1$ números reais possui uma subsequência crescente de $m + 1$ termos ou uma subsequência decrescente $n + 1$ termos.*

Demonstração. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ uma sequência numérica. Para cada a_i , seja C_i o número de termos da maior subsequência crescente começando em a_i . Se $C_i > m + 1$, para algum i , então temos uma subsequência crescente de tamanho $m + 1$. Senão, suponha $C_i \leq m$ para todo i e defina a m -coloração

$$\begin{aligned} \varphi: \{a_1, \dots, a_{mn+1}\} &\rightarrow [m] \\ a_i &\mapsto C_i. \end{aligned}$$

Pelo PG, corolário 2.6, em toda m -coloração de $mn + 1$ objetos existem $n + 1$ monocromáticos, digamos

$$A = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}\}$$

monocromático da cor s , s.p.g., $j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1}$.

Se, para algum k , vale $a_{j_k} < a_{j_{k+1}}$, então teríamos uma sequência crescente de comprimento s começando em $a_{j_{k+1}}$ e, conseqüentemente, uma sequência crescente de tamanho $s + 1$ começando em a_{j_k} , o que dá uma contradição pois a cor de a_{j_k} é s .

Desse modo, concluímos que $a_{j_1} \geq a_{j_2} \geq \dots \geq a_{j_{n+1}}$, i.e., é uma subsequência decrescente com $n + 1$ termos. \square

Teorema 2.8 (Princípio das gavetas infinitário). *Em toda r -coloração de \mathbb{N} existe um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito e monocromático.*

Demonstração. Se $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow [r]$ é uma coloração de \mathbb{N} tal que existe $m \in \mathbb{N}$ com $|\varphi^{-1}(i)| \leq m$ (é finito) para todo i então $|\mathbb{N}| = |\bigcup_i \varphi^{-1}(i)| \leq mr$, uma contradição. \square

Agora, considere que n objetos são coloridos aleatoriamente, de modo uniforme e independente, com r cores. Isso pode ser entendido de duas maneiras essencialmente equivalentes do ponto de vista probabilístico: (1) para cada objeto em \mathcal{O} sorteamos com probabilidade $1/r$ uma das cores para colori-lo e (2) sorteamos uma das r^n funções $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow [r]$, com cada função tendo a mesma probabilidade de ser sorteada.

Denote por C a quantidade de pares de objetos pintados da mesma cor. Note que isso é mais interessante se $n \leq r$. Nesse caso, há $r(r-1)(r-2) \cdots (r-n+1)$ modos diferentes de colorir n objetos sem repetir cor.

Se $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n))$ é uma escolha aleatória em $[r]^{\mathcal{O}}$ então nessa escolha

$$\mathbb{P}[C = 0] = \frac{r(r-1)(r-2) \cdots (r-n+1)}{r^n} = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{r}\right)$$

agora, usamos que $1 - x < \exp(-x)$ e obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[C = 0] &< \exp\left(-\frac{1}{r}\right) \exp\left(-\frac{2}{r}\right) \cdots \exp\left(-\frac{n-1}{r}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2r}\right). \end{aligned}$$

Teorema 2.9 (Princípio das gavetas probabilístico). *Numa r -coloração ao acaso de $n \leq r$ objetos a probabilidade com que exista pelo menos dois objetos da mesma cor é maior que*

$$1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2r}\right).$$

O conhecido *paradoxo dos aniversários* é o caso $n = 23$ e $r = 365$ na equação acima: $\mathbb{P}[C > 0] > 0,5$, ou seja, apenas 23 pessoas são suficientes para que duas delas façam aniversário no mesmo dia com probabilidade maior que $1/2$, supondo que os nascimentos ocorram uniformemente ao longo do ano. Para 75 ou mais pessoas, a probabilidade é maior do que 99,9%.

O paradoxo do aniversário é contra-intuitivo e só é chamado de “paradoxo” por causa do estranhamento causado pelo fato de que “apenas” 23 pessoas são necessárias para se obter 50% de probabilidade para duas pessoas nascerem no mesmo dia.

Exercício 2.10. Demonstre usando o princípio das gavetas.

1. Em qualquer escolha de mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ haverão dois deles primos entre si.
2. Se escolhermos 13 pontos no interior de um retângulo 3×4 , então existem dois pontos tais que sua distância é menor ou igual a $\sqrt{2}$.
3. $(a-b)(a-c)(b-c)$ é par, para quaisquer a, b e c inteiros.
4. Chico e sua esposa foram a uma festa com três outros casais. No encontro deles houveram vários apertos de mão. Ninguém apertou a própria mão ou a mão da(o) esposa(o), e ninguém apertou a mão da mesma pessoa mais que uma vez. Após os cumprimentos Chico perguntou para todos, inclusive para a esposa, quantas mãos cada um apertou e recebeu de cada pessoa uma resposta diferente. Quantas mãos Chico apertou?
5. Os pontos de uma reta são coloridos com 12 cores. Prove que existem dois pontos com a mesma cor tal que a distância entre eles é um número inteiro.
6. Suponha que o conjunto $[2n]$ foi dividido em dois subconjuntos com n elementos cada. Os elementos do primeiro conjunto foram ordenados em ordem crescente, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, e os do segundo conjunto ordenados em ordem decrescente, $b_1 > b_2 > \dots > b_n$. Prove que $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = n^2$ (*dica*: para cada i , de a_i e b_i , um pertence a $[n]$ o outro não).

PG prova o PIF

O princípio de indução finita (PIF) afirma que se P é uma propriedade dos números naturais tal que $P(1)$, isto é o 1 tem a propriedade, e tal que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo n , então a propriedade vale para todos os números naturais. Agora, para explorar o força do PG, vejamos que o PIF é uma consequência do PG. Seja P um predicado dos números naturais e assumamos

- (i) $P(1)$ e
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \Rightarrow P(n+1))$.

Vamos demonstrar que $P(n)$ para todo n por contradição.

Suponha que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que não- $P(m)$. De (i) temos $m > 1$ e assim podemos definir uma função $\varphi: [m] \rightarrow [m-1]$ por

$$\varphi(i) = \begin{cases} i & \text{se } P(i) \\ i-1 & \text{se não-}P(i). \end{cases}$$

Tal função está bem definida pois $\varphi(1) = 1$ (e não é 0) e $\varphi(m) = m-1$ (e não é m). Pelo PG existem $i \neq j$ no domínio de φ tais que $\varphi(i) = \varphi(j)$, pois $\varphi: [m] \rightarrow [m-1]$ não pode ser injetora.

De $i \neq j$, $\varphi(i) = \varphi(j)$ e da definição de φ temos que

$$\varphi(i) = i = j - 1 = \varphi(j) \quad \text{ou} \quad \varphi(i) = i - 1 = j = \varphi(j).$$

No primeiro caso, $j = i + 1$, vale $P(i)$ mas não vale $P(j) = P(i + 1)$ contrariando a hipótese $P(i) \Rightarrow P(i + 1)$. No segundo caso a dedução é análoga, valem $P(j)$ e não- $P(i) = \text{não-}P(j + 1)$, contrariando $P(j) \Rightarrow P(j + 1)$. Com isso, a hipótese assumida de haver $m \in \mathbb{N}$ tal que não- $P(m)$ não pode ser verdadeira, ou seja, $P(n)$ vale para todo natural n . \square

2.1 O número cromático do plano

“O geômetra americano Victor Klee da Universidade de Washington compartilhou comigo em 1991 uma história divertida. Em 1980 ele deu uma palestra em Zurique, Suíça, onde o famoso algebrista Bartel L. van der Waerden, com 77 anos, estava presente. Quando Vic apresentou este problema, Van der Waerden ficou tão interessado que ele parou de ouvir a palestra e começou a trabalhar no problema. Ele tentou provar que $\chi = 7$ ” Soifer [6].

Exercício 2.11. Prove que se o plano euclidiano é pintado usando duas cores, então existem dois pontos de mesma cor que distam 1.

Solução. Fixe uma 2-coloração do plano e tome um triângulo equilátero de lado 1 qualquer (figura 2.2).

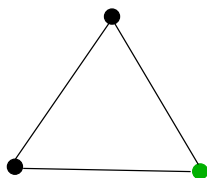


Figura 2.2. triângulo equilátero de lado 1 e 2-colorido

Dos 3 vértices, 2 devem ter a mesma cor pelo PG. \square

Exercício 2.12. Prove que se o plano euclidiano é pintado usando três cores, então existem dois pontos de mesma cor que distam 1.

Solução. Tome uma circunferência Γ de centro C e raio $\sqrt{3}$. Se $\Gamma \cup \{C\}$ é monocromático então há uma corda de comprimento 1 cujas extremidades têm a mesma cor. Senão em Γ há um ponto D de cor diferente da cor de C .

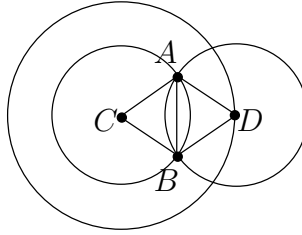


Figura 2.3. dentre os 4 pontos equidistantes A, B, C, D há 2 de mesma cor

Construa as circunferências de raio 1 centradas em C e em D (figura 2.3). O encontro delas em A e B define dois triângulos equiláteros ABC e ABD . Dentre os 4 vértices equidistantes haverá 2 da mesma cor pelo PG. \square

A solução do exercício 2.11 envolveu descobrir um grafo que pode ser realizado no plano de modo que seus vértices adjacentes são equidistantes. Uma solução com esse paradigma para o exercício 2.12 foi dada em 1961.

Outra solução. Fixe uma 3-coloração do plano e tome uma realização do grafo de Moser, cujo diagrama está mostrado na figura 2.4, no plano e com todas arestas de comprimento 1. No grafo de Moser qualquer 3-coloração dos vértices implica em dois vértices adjacentes monocromáticos (verifique).

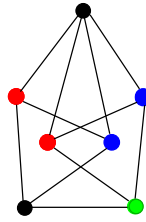


Figura 2.4. grafo de Moser com vértices adjacentes equidistantes e 4-coloridos

A 3-coloração do plano induz uma 3-coloração nos vértices grafo de Moser e dois deles, adjacentes, devem receber a mesma cor. Tais vértices distam 1 e são monocromáticos. \square

Problema 2.13 (Problema de Hadwiger–Nelson, 1950). Qual é o menor número $\chi(\mathbb{R}^2) \in \mathbb{N}$ de cores necessárias para colorir o plano euclidiano de modo que não existam dois pontos da mesma cor que distam 1?

O exercício 2.12, acima, prova que $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$. As duas soluções datam de 1961. A primeira é Hadwiger e a segunda dos irmãos canadenses Leo e William Moser. Em abril de 2018, Aubrey de Grey, um matemático amador,

usou uma estratégia similar à dos Moser para provar que não é possível colorir o plano com quatro cores. Agora o grafo tem um mais que 1500 vértices, a construção e a verificação foram auxiliadas por computador.

Para uma cota superior consideramos um ladrilhamento do plano com hexágonos regulares. Essa solução é atribuída a John R. Isbell [6]. As regiões

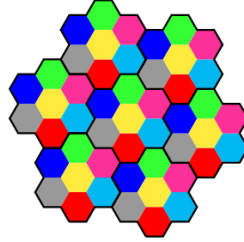


Figura 2.5. ladrilhamento 7-colorido do plano

hexagonais são 7-coloridas de modo que os seis vizinho de um hexágono têm seis cores diferentes e diferente do hexágono central (figura 2.5). Uma escolha adequada do diâmetro (veja o exercício a seguir) garante que não há pares de pontos monocromáticos que distam 1 quando colorimos as bordas com qualquer uma das duas cores às quais ela é adjacente. Assim

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

Exercício 2.14. Verifique que um hexágono regular de lado 0,45 tem diâmetro 0,9. Verifique que no ladrilhamento não há pontos da mesma cor que distam menos que 1,19.

2.1.1 Compacidade*

O problema acima pode ser formulado usando a teoria dos grafos.

Definição 2.15 (grafo). Um **grafo** sobre V é definido por uma família E de 2-subconjuntos de V . Cada elemento de V é chamado de **vértice** e cada elemento de E é chamado de **aresta**. Vértices que pertencem a mesma aresta são ditos **adjacentes**.

Um grafo sobre V com arestas E é **subgrafo** do grafo sobre W com conjunto de arestas F se $V \subseteq W$ e $E \subseteq F$.

Considere o grafo \mathbb{E}^2 cujo conjunto de vértices é o \mathbb{R}^2 e dois pontos do plano formam uma aresta se distam 1. O problema de Hadwiger–Nelson pergunta pelo *número cromático* desse grafo.

*Uma parte dessa seção depende de conhecimento de alguns conceitos e resultados de topologia de espaços compactos.

Definição 2.16 (número cromático de um grafo). *A menor cardinalidade de um conjunto de cores com as quais conseguimos colorir os vértices de um grafo G de modo que não ocorra vértices adjacentes da mesma cor é chamada **número cromático** do grafo e denotada $\chi(G)$. Se tal número não existe convencionamos que $\chi(G) = \infty$.*

Em 1951, Nicolaas Govert de Bruijn e Paul Erdős publicaram uma teorema que, como disse Paul Erdős, se resume a “o problema de encontrar o número cromático do plano é um problema sobre conjuntos finitos no plano”

$$\chi(\mathbb{E}^2) = \max\{\chi(G) : G \text{ subgrafo finito de } \mathbb{E}^2\}.$$

Ademais, esse resultado fornece uma técnica útil em várias situações na teoria de Ramsey.

Teorema 2.17 (Teorema de compacidade Erdős–De Bruijn). *Um grafo G tem número cromático no máximo r se, e somente se, todo subgrafo finito de G tem número cromático no máximo r .*

Se G pode ser colorido com r cores de modo que não ocorra vértices adjacentes da mesma cor, então todo subgrafo finito pode ser colorido com r cores de modo que não ocorra vértices adjacentes da mesma cor. A recíproca é a parte difícil do teorema.

Se G tem um número finito de vértices o enunciado é trivial. Se for infinito e enumerável então a seguinte estratégia pode ser transformada numa demonstração do teorema. Suponha, sem perda de generalidade, que o conjunto de vértices é \mathbb{N} e denote por E o conjunto de arestas de G .

Suponha que para todo $V \subset \mathbb{N}$ finito o subgrafo $(V, E \cap \binom{V}{2})$ pode ser colorido com r cores de modo que não ocorra vértices adjacentes da mesma cor. Em particular, para todo natural n existe $\varphi_n: [n] \rightarrow [r]$ com a propriedade de que não há aresta de G com ambos os vértices em $[n]$ e monocromática por φ_n .

Definimos $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow [r]$ indutivamente. $\varphi(1)$ é alguma das cores que ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_1(1), \varphi_2(1), \dots\}$, a qual existe pela versão infinitária do PG, o teorema 2.8. Para definir $\varphi(2)$ consideramos

$$I_2 = \{n \geq 2: \varphi_n(1) = \varphi(1)\};$$

nessas colorações as cores dos vértices 1 e 2 são compatíveis (não resulta em aresta monocromática no caso de adjacência). Como $|I_2| = |\mathbb{N}|$ alguma cor c para o vértice 2 ocorre infinitas vezes em $\{\varphi_n(2): n \in I_2\}$ (novamente, teo. 2.8), de modo que definimos $\varphi(2) = c$. Para definir $\varphi(3)$ consideramos

$$I_3 = \{n \geq 3: \varphi_n(1) = \varphi(1), \varphi_n(2) = \varphi(2)\}$$

nessas colorações as cores dos vértices 1, 2 e 3 são compatíveis. Como $|I_3| = |\mathbb{N}|$ alguma cor d para o vértice 3 aparece infinitas vezes em $\{\varphi_n(3): n \in I_3\}$ (novamente, teo. 2.8), de modo que definimos $\varphi(3) = d$.

E assim por diante, ou seja, supondo definidos $\varphi(1), \dots, \varphi(j)$ podemos definir $\varphi(j+1)$ (faça como exercício). Pelo PIF a função φ fica definida para todo vértice $j \in \mathbb{N}$. Se existirem $j < k$ tais que $\{j, k\}$ é aresta de G e $\varphi(j) = \varphi(k)$ então para algum $n \geq k$ temos $\varphi_n(i) = \varphi(i)$ para todo $i \in [k]$, em particular $\varphi_n(j) = \varphi(j)$ e $\varphi_n(k) = \varphi(k)$, isto é, $\varphi_n(j) = \varphi_n(k)$, uma contradição.

O caso geral será demonstrado agora.

Demonstração do teorema de Erdős–De Bruijn. Seja V o conjunto de vértices de G e $[r]^V$ o conjunto de todas as r -colorações de V . Em $[r]$ assumimos a topologia discreta e em $[r]^V$ a topologia produto. Assim, para cada U finito e cada $\phi: U \rightarrow [r]$ o conjunto

$$F_{\phi, U} = \left\{ f \in [r]^V : f|_U = \phi \right\}$$

é um aberto básico da topologia produto.

O conjunto das colorações que colorem adequadamente os vértices de U com respeito às arestas de G , isto é, não colorem arestas $e \subset U$ monocromaticamente,

$$F_U = \left\{ f \in [r]^V : f|_U(u) \neq f|_U(v) \text{ para todos } u, v \in U \text{ aresta do grafo} \right\}.$$

é fechado e não vazio para todo U finito.

$F_U \neq \emptyset$ pois, por hipótese, existe $\varphi: U \rightarrow [r]$ que colore os vértices sem permitir que haja arestas do grafo contidas em U e monocromáticas.

$F_U = [r]^V \setminus \bigcup_{\phi} F_{\phi, U}$ onde a união é sobre toda $\phi: U \rightarrow [r]$ que induz aresta monocromática contida em U . Como a união é de abertos, ela é um aberto e, portanto, F_U é fechado.

A família

$$\{ F_U : U \text{ finito} \}$$

tem a propriedade da intersecção finita²: se $U_1, U_2, \dots, U_n \subset V$ são finitos então

$$F_{U_1} \cap F_{U_2} \cap \dots \cap F_{U_n} \supset F_{U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n} \neq \emptyset$$

pois $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ é finito e se $U \subset W$ então $F_W \subset F_U$. Pelo teorema de Tychonoff o espaço topológico $[r]^V$ é compacto, portanto,

$$\bigcap_{U \text{ finito}} F_U \neq \emptyset.$$

Uma função $\varphi \in \bigcap_{U \text{ finito}} F_U$ não colore os vértices de uma aresta de G com a mesma cor. \square

² a intersecção de qualquer quantidade finita de elementos da família resulta em um conjunto não vazio.

2.2 E o Dirichlet?

E onde entra Dirichlet nessa história? Em 1842 ele demonstrou um teorema fundamental sobre aproximações diofantinas e que é um dos melhores exemplos para ilustrar a força do princípio das gavetas.

No que segue, se x é um irracional, $\{x\}$ denota a parte fracionária de x , ou seja, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Teorema 2.18 (Dirichlet, 1842). *Seja α um número irracional, então existem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$ para a desigualdade*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Demonstração. Dado $Q \in \mathbb{N}$ considere os $Q + 1$ números

$$(2.1) \quad 0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{Q\alpha\} \in [0, 1)$$

e os Q intervalos

$$I_k = \left[\frac{k-1}{Q}, \frac{k}{Q} \right) \quad (\forall k \in [Q])$$

que particionam $[0, 1)$. Pelo PG dois dos $Q + 1$ números em (2.1), digamos $\{j\alpha\}$ e $\{i\alpha\}$ com $j < i$, pertencem a um mesmo intervalo I_k . Então

$$|\{i\alpha\} - \{j\alpha\}| < \frac{1}{Q}$$

onde deduzimos que

$$|i\alpha - j\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor + \lfloor j\alpha \rfloor| < \frac{1}{Q}$$

e tomando os inteiros $q = i - j > 0$ e $p = \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$, segue que $|q\alpha - p| < \frac{1}{Q}$; dividindo por q

$$(2.2) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}$$

pois $q = i - j < Q$. Portanto, existe solução racional.

Suponha que há finitas soluções $p_1/q_1, \dots, p_m/q_m$ e tome

$$(2.3) \quad a = \min_{k \in [m]} \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|$$

que é não nulo por α ser irracional. Tome $Q' \in \mathbb{N}$ tal que $1/Q' < a$. Repetindo o argumento acima chegamos a um racional $\frac{p'}{q'}$ tal que, como em (2.2),

$$\left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right| \leq \frac{1}{q'Q'} \leq \frac{1}{q'^2}$$

que é uma solução diferente das anteriores pois $\left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right| < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|$ pela escolha de Q' , uma contradição à (2.3). \square

Notas

O teorema de Erdős–Szekeres sobre subsequências monótonas, o princípio das gavetas ordenadas, apareceu em

Erdős P, Szekeres G (1935) A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica*, 2, 463–470

um dos artigos percursores da Teoria de Ramsey. A demonstração apresentada aqui é de

Seidenberg, A (1959) A simple proof of a theorem of Erdős and Szekeres. *Journal of the London Math. Soc.*, 34:3, 352

De acordo com Jensen e Toft (*Graph Coloring Problems*, Wiley, pp. 150–152, 1995), o problema do número cromático do plano foi formulado pela primeira vez por E. Nelson em 1950 e publicado pela primeira vez por Gardner em 1960. Hadwiger em 1945 publicou um resultado relacionado. A cota inferior 5 para o número cromático do plano foi dada em

Aubrey DNJ de Grey (2018) The chromatic number of the plane is at least 5. Disponível em <https://arxiv.org/abs/1804.02385>.

O problema do número cromático do plano surgiu para Edward Nelson quando esse investigava o problema das 4 cores para grafos planares [6]. O problema estende-se para o \mathbb{R}^n (o número mínimo de cores que precisamos usar para colorir os pontos do \mathbb{R}^n se não queremos ter dois pontos à distância 1 da mesma cor) e sabe-se que o número cromático cresce exponencialmente com n , mais precisamente, $(1,2 + \varepsilon)^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + \varepsilon)^n$ para todo $\varepsilon > 0$ se n é suficientemente grande.

Um bom resumo histórico desse problema, suas generalizações e outros problemas relacionados pode ser lido em *Chromatic Number of the Plane & Its Relatives, History, Problems and Results: An Essay in 11 Parts*, por Alexander Soifer, em [7].

O teorema de De Bruijn–Erdős foi provado usando indução transfinita em

de Bruijn NG, Erdős P (1951) A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Indagationes Math.* 13, 369–373

Os problemas do exercício 2.10 são de

Steffenon R, Guarnieri F (2016) Belos problemas de matemática, indução e contagem. IV Colóquio de Matemática da Região Sul

onde há muito mais exercícios e é possível ver as respostas. O texto está disponível em https://www.sbm.org.br/coloquio-sul-4/wp-content/uploads/sites/4/2016/04/Minicurso_Belos_Problemas.pdf

Para mais sobre Dirichlet, inclusive a citação atribuída a Jacobi no início deste capítulo consulte

Elstrodt J (2007) The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859). *Clay Mathematics Proceedings*, Volume 7

O Teorema de Ramsey

"I don't feel the least humble before the vastness of the heavens. The stars may be large, but they cannot think or love; and these are qualities which impress me far more than size does. My picture of the world is drawn in perspective, and not like a model to scale. The foreground is occupied by human beings and the stars are all as small as threepenny bits."

F.P. Ramsey



Figura 3.1. Frank Plumpton Ramsey (1903–1930) em 1921

Exercício 3.1. Mostre que para quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.

Solução. Digamos que há 6 pessoas, a saber, A, B, C, D, E, F . Considere a pessoa A ; das outras cinco pessoas deve haver 3 com as quais A é amigo ou 3 desconhecidos de A , pelo PGg. Sem perda de generalidade, podemos supor que A é amigo de B, E e F . Agora, se no grupo B, E, F há dois amigos então esses dois com A formam um grupo de 3 amigos. Caso contrário, no grupo B, C, D são todos desconhecidos entre si. \square

Observamos que o enunciado não vale para um grupo com 5 pessoas, as quais denominamos A, B, C, D, E , como mostra a seguinte configuração (veja também a figura 3.2)

pessoa	amigos	desconhecidos
A	B, C	D, E
B	A, D	C, E
C	A, E	B, D
D	B, E	A, C
E	C, D	A, B

Um grafo é um modelo natural para o exercício anterior, as pessoas são representadas por vértices e as relações “amigo” e “desconhecido” definem uma 2-coloração das arestas. O exercício mostra que para qualquer 2-coloração das arestas de um grafo completo com 6 ou mais vértices existe um subgrafo completo com 3 vértices e todas as suas arestas da mesma cor. Além disso, 6 é o menor natural com tal propriedade (figura 3.2).

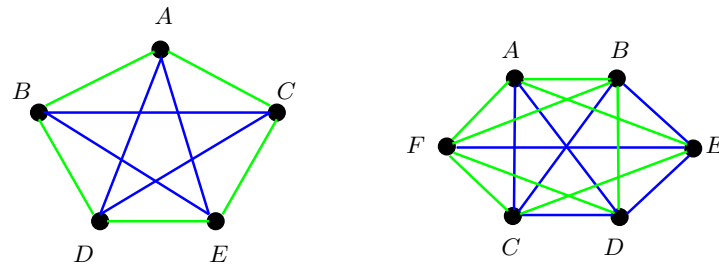


Figura 3.2. com 5 pessoas é possível que não haja 3 mutuamente amigos (arestas verdes) nem 3 mutuamente desconhecidos (arestas azuis). Com 6 pessoas essa configuração é impossível, sempre haverá 3 mutuamente amigos ou 3 mutuamente desconhecidos

O teorema de Ramsey para grafos garante que para todo t e para qualquer 2-coloração das arestas de um grafo completo de ordem suficientemente grande haverá um subgrafo completo com t vértices e todas as arestas da mesma cor. A teoria de Ramsey não é uma teoria “dentro” da teoria dos grafos, porém a linguagem da teoria dos grafos ajuda a intuir, descrever (o que usaremos nas demonstrações a seguir) e até unificar (veja seção 3.2.1) os vários resultados da teoria de Ramsey.

Teorema 3.2 (Teorema de Ramsey para grafos 2-coloridos). *Dados naturais $t_1, t_2 \geq 2$, existe um natural n tal que para todo conjunto V de cardinalidade $|V| \geq n$ vale o seguinte.*

Para qualquer 2-coloração de $\binom{V}{2}$ existem $i \in [r]$ e um t_i -subconjunto $X \subseteq V$ com $\binom{X}{2}$ monocromático da cor i .

Definição 3.3 (número de Ramsey $R(t_1, t_2)$). *O menor valor de n para o qual o enunciado do teorema vale é o **número de Ramsey** $R(t_1, t_2)$. O teorema afirma que esse número está bem definido.*

Demonstração. A prova é uma indução dupla, em t_1 e t_2 . É fácil deduzir (verifique) as seguintes propriedades para o número $R(t_1, t_2)$

1. $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$ para todos $t_1, t_2 \geq 2$;
2. $R(2, t_2) = t_2$ para todo $t_2 \geq 2$.

Vamos assumir $t_1, t_2 \geq 3$ e que $R(t_1 - 1, t_2)$, $R(t_1, t_2 - 1)$ estão definidos e provar que $R(t_1, t_2) \leq n$ para

$$(3.1) \quad \begin{aligned} n &= 2 + (R(t_1, t_2 - 1) - 1) + (R(t_1 - 1, t_2) - 1) \\ &= R(t_1 - 1, t_2) + R(t_1, t_2 - 1) \end{aligned}$$

Considere uma 2-coloração qualquer $\varphi: \binom{V}{2} \rightarrow [2]$ de todas as arestas formadas pelos vértices de um conjunto V de cardinalidade n .

Fixado um vértice $v \in V$, sejam U o subconjunto dos vértices adjacentes a v por uma aresta de cor 1 e D o conjunto dos vértices adjacentes a v por uma aresta de cor 2. Note que U e D são disjuntos e totalizam

$$n - 1 = (R(t_1, t_2 - 1) - 1) + (R(t_1 - 1, t_2) - 1) + 1$$

vértices. Considerando a 2-coloração ψ induzida em $V \setminus \{v\}$ por φ , i.e., $\psi(w) = 1$ se $w \in U$, senão $\psi(w) = 2$, então pelo PGg, teorema 2.4, $|U| \geq R(t_1 - 1, t_2)$ ou $|D| \geq R(t_1, t_2 - 1)$.

Se $|U| \geq R(t_1 - 1, t_2)$ então a 2-coloração φ nas arestas com vértices em U definem ou um $(t_1 - 1)$ -subconjunto X tal que $\binom{X}{2}$ é monocromático da cor 1, ou um t_2 -subconjunto X tal que $\binom{X}{2}$ é monocromático da cor 2. No primeiro caso, $X \cup \{v\}$ tem t_1 vértices e $\binom{X \cup \{v\}}{2}$ é monocromático da cor 1. Portanto, a afirmação do teorema fica satisfeita. Analogamente, se $|D| \geq R(t_1, t_2 - 1)$ então a afirmação do teorema fica satisfeita. \square

Mais que duas cores

Exercício 3.4. Mostre que em grupo com 17 (ou mais) pessoas, podemos encontrar três pessoas que se amam entre si, três que se odeiam entre si ou três que são indiferentes entre si.

Solução. Consideremos 17 pessoas representadas pelos vértices de um grafo completo com 17 vértices e as relações entre pessoas como uma 3-coloração das arestas desse grafo com as cores a , o e i . Tome um vértice qualquer, digamos J ; nele incidem 16 arestas, portanto, alguma cor contribui com pelo menos seis arestas pelo PGg (corolário 2.5). Suponha, s.p.g., que em J incidem 6 arestas da cor a . Sejam A, B, C, D, E, F os outros extremos dessas seis arestas. Se entre eles tem uma aresta da cor a então obtemos 3 pessoas que se amam, caso contrário, as arestas que incidem nos vértices A, B, C, D, E, F são 2-coloridas e pelo exercício 3.1 deve ocorrer 3 pessoas que se odeiam ou 3 pessoas que são indiferentes entre si. \square

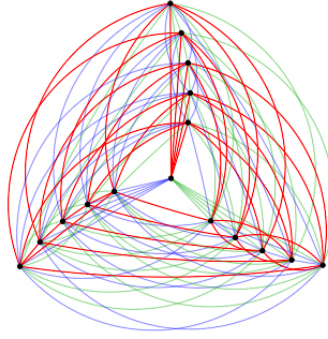


Figura 3.3. grafo completo sobre 16 vértices, 3-colorido, sem triângulo monocromático

Para 16 pessoas a afirmação acima não vale (figura 3.3).

Teorema 3.5 (Teorema de Ramsey para grafos r -coloridos). *Dados números naturais r e $t_1, \dots, t_r \geq 2$, existe o menor natural $R(t_1, \dots, t_r)$ tal que para todo conjunto V de cardinalidade pelo menos $R(t_1, \dots, t_r)$ vale o seguinte.*

Para toda r -coloração de $\binom{V}{2}$ existem $i \in [r]$ e um t_i -subconjunto $X \subseteq V$ com $\binom{X}{2}$ monocromático da cor $i \in [r]$.

A demonstração é análoga ao caso de 2 cores, segue de

1. $R(t_1, t_2, \dots, t_r) = R(t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}, \dots, t_{\pi(r)})$ para qualquer permutação π dos índices $[r]$;
2. $R(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}, 2) = R(t_1, t_2, \dots, t_{r-1})$;
3. $R(t_1, t_2, \dots, t_r) \leq 2 + \sum_{i=1}^r R(t_1, t_2, \dots, t_i - 1, \dots, t_r) - 1$.

Números de Ramsey

“Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5, 5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6, 6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens.” Joel Spencer.

No exercício 3.1 mostramos que $R(3, 3) = 6$. Os números de Ramsey conhecidos são poucos: $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$, $R(3, 6) = 18$, $R(3, 7) = 23$, $R(3, 8) = 28$, $R(3, 9) = 36$, $R(4, 4) = 18$ e $R(4, 5) = 25$.

No exercício 3.4 mostramos que $R(3, 3, 3) \leq 17$; de fato $R(3, 3, 3) = 17$ (fig. 3.3) e esse é o único número de Ramsey conhecido para 3 cores.

Também, várias limitações são conhecidas, por exemplo, é sabido que $43 \leq R(5, 5) \leq 49$ e $102 \leq R(6, 6) \leq 165$. Determinar os números de Ramsey $R(s, t)$ é muito difícil mesmo para naturais s e t não muito grandes.

Usando que $R(t_1, 2) = t_1$, $R(2, t_2) = t_2$, a desigualdade $R(t_1, t_2) \leq R(t_1 - 1, t_2) + R(t_1, t_2 - 1)$ de (3.1) e a identidade de Pascal¹ é fácil demonstrar que

$$(3.2) \quad R(t_1, t_2) \leq \binom{t_1 + t_2 - 2}{t_1 - 1}$$

e, em particular²

$$R(t, t) < \frac{4^t}{\sqrt{t}}.$$

Usando probabilidade e um argumento simples mas engenhoso podemos mostrar um limitante inferior

$$R(t, t) > 2^{t/2}.$$

Fixe $n = \lfloor 2^{t/2} \rfloor$ e considere uma 2-coloração aleatória de $\binom{[n]}{2}$ fazendo cada aresta de cor 1 ou 2 com probabilidade $1/2$. A probabilidade com que $\binom{X}{2}$ seja monocromático, para um t -subconjunto X , é $2^{1-\binom{t}{2}}$. São $\binom{n}{t}$ t -subconjuntos, logo, a probabilidade de haver pelo menos um t -subconjunto monocromático é

$$(3.3) \quad \binom{n}{t} \frac{2}{2^{\binom{t}{2}}} < \frac{2n^t}{t! 2^{\binom{t}{2}}} \leq \frac{2^{1+t/2}}{t!} < 1$$

para todo $t \geq 3$, portanto, com probabilidade maior que 0 não há t -subconjunto monocromático. Ou seja, deve existir um grafo com $\lfloor 2^{t/2} \rfloor$ vértices e uma 2-coloração que não satisfaz a conclusão de Ramsey.

Uma característica interessante dessa prova, que foi dada por Erdős, é que ela simplesmente conclui que escolher uma coloração ao acaso quase sempre funciona sem nunca apresentar uma coloração específica. Esta foi uma das primeiras aparições do método probabilístico na literatura de combinatória. O método probabilístico tornou-se, desde então, uma das ferramentas mais sofisticadas da combinatória com um sucesso fenomenal.

Uma análise mais fina mostra que o lado esquerdo da equação (3.3) é menor que 1 para

$$n \geq (1 - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2e}} \sqrt{2}^t$$

para todo $\varepsilon > 0$ e t suficientemente grande, que é conhecido desde 1947 sem nenhuma melhoria significativa até o momento. De fato, sabe-se, desde 1947, que

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} R(t, t)^{1/t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} R(t, t)^{1/t} \leq 4.$$

Conjectura 3.6. O limite de $R(t, t)^{1/t}$ quando $t \rightarrow \infty$, existe.

¹ também conhecida com relação de Stifel: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n}{k+1}$.

² $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ e usando a aproximação de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$, $\binom{2n}{n} < 4^n / \sqrt{n}$.

A melhor estimativa para a ordem de grandeza de $R(s, t)$ que se conhece atualmente é

$$c_s \frac{t^{(s+1)/2}}{(\log t)^{(s+1)/2-1/(s-2)}} \leq R(s, t) \leq c'_s \frac{t^{s-1}}{(\log t)^{s-2}}$$

para s fixo e t suficientemente grande. O limitante inferior é de 2010 e o superior de 1980.

Exercício 3.7. Demonstre o teorema 3.5.

Exercício 3.8. Mostre que $R(4, 4) = 18$ (*dica*: considere o grafo sobre os vértices $[17]$ e a cor da aresta $\{i, j\}$ é 1 se, e só se, $i - j$ é uma quadrado (mod 17)).

Exercício 3.9. Dê uma prova para a equação (3.2).

3.1 Teorema de Ramsey

Teorema 3.10 (Teorema de Ramsey, 1930). *Dados números naturais r, k e $t_1, \dots, t_r \geq k$, existe o menor natural $R^{(k)}(t_1, \dots, t_r)$ tal que para todo conjunto V de cardinalidade pelo menos $R^{(k)}(t_1, \dots, t_r)$ vale o seguinte.*

Para toda r -coloração de $\binom{V}{k}$ existem $i \in [r]$ e um t_i -subconjunto $X \subseteq V$ com $\binom{X}{k}$ monocromático da cor i .

Demonstração para duas cores, i.e., $r = 2$. A prova é por indução em k , e segue como no caso de grafos. Sabemos, do que já foi dito, que $R^{(1)}(t_1, t_2)$ está definido (teorema 2.4) e $R^{(2)}(t_1, t_2) = R(t_1, t_2)$ (teorema 3.2) está definido. Ademais $R^{(k)}(t_1, k) = t_1$ e $R^{(k)}(k, t_2) = t_2$ (por quê?).

Fixados k, t_1, t_2 , assumamos que estão definidos $R^{(k)}(t_1 - 1, t_2)$, $R^{(k)}(t_1, t_2 - 1)$ e $R^{(k-1)}(s, t)$, para todos s, t , e tome V de cardinalidade

$$n = 1 + R^{(k-1)}(R^{(k)}(t_1 - 1, t_2), R^{(k)}(t_1, t_2 - 1)).$$

Denote por φ uma 2-coloração qualquer $\varphi: \binom{V}{k} \rightarrow [2]$ dos k -subconjuntos de V . Escolha $v \in V$ e defina $L(v) = \binom{V \setminus \{v\}}{k-1}$ sobre os

$$(3.4) \quad n - 1 = R^{(k-1)}(R^{(k)}(t_1 - 1, t_2), R^{(k)}(t_1, t_2 - 1))$$

elementos restantes. Defina a seguinte coloração “induzida” em $L(v)$: a cor do $(k-1)$ -subconjunto e de $V \setminus \{v\}$ é a cor do k -subconjunto $e \cup \{v\}$ de V .

Pela equação (3.4), na 2-coloração induzida em $L(v)$

1. ou ocorre um $R^{(k)}(t_1 - 1, t_2)$ -subconjunto $U \subseteq V \setminus \{v\}$ com $\binom{U}{k-1}$ monocromático da cor 1,
2. ou ocorre um $R^{(k)}(t_1, t_2 - 1)$ -subconjunto $D \subseteq V \setminus \{v\}$ com $\binom{D}{k-1}$ monocromático da cor 2.

No primeiro caso temos um $R^{(k)}(t_1 - 1, t_2)$ -subconjunto $U \subseteq V \setminus \{v\}$ com $\binom{U}{k-1}$ monocromático da cor 1. Em qualquer 2-coloração de $\binom{U}{k}$ ocorre ou um $(t_1 - 1)$ -subconjunto U' com $\binom{U'}{k}$ monocromático da cor 1 ou um t_2 -subconjunto D' com $\binom{D'}{k}$ monocromático da cor 2. Assim, pela coloração φ ou temos U' como acima, de modo que $U = U' \cup \{v\}$ é um t_1 -subconjunto que satisfaz o enunciado do teorema, ou temos D' como acima, que é um t_2 -subconjunto que satisfaz o enunciado do teorema.

No segundo caso temos um $R^{(k)}(t_1, t_2 - 1)$ -subconjunto $D \subseteq V$ com $\binom{D}{k-1}$ monocromático da cor 2, uma dedução análoga ao parágrafo acima leva à conclusão que o enunciado do teorema vale. \square

Na prova do caso geral, com mais cores, mostramos com argumento análogo que

$$R^{(k)}(t_1, \dots, t_r) \leq 1 + R^{(k-1)}(R_1, \dots, R_r)$$

onde $R_i = R^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_i - 1, \dots, t_r)$.

A notação "flecha" de Erdős–Rado

A conclusão do teorema de Ramsey

“para qualquer r -coloração de $\binom{[n]}{k}$ existem i e um t_i -subconjunto $X \subseteq [n]$ com $\binom{X}{k}$ monocromático da cor i ”

é representa por

$$n \longrightarrow (t_1, \dots, t_r)_r^k$$

e quando $t_i = t \in \mathbb{N}$ para todo i

$$n \longrightarrow (t)_r^k.$$

Nos casos para grafos ($k = 2$) a notação $n \longrightarrow (t_1, t_2)_2^2$ simboliza “em toda 2-coloração de um grafo completo com n vértices há ou um subgrafo completo com t_1 vértices e arestas da cor 1 ou um subgrafo completo com t_2 vértices e arestas da cor 2”.

Por exemplo, no exercício 3.1 mostramos que $6 \longrightarrow (3, 3)_2^2$ ou, simplesmente $6 \longrightarrow (3)_2^2$, e que $5 \not\longrightarrow (3, 3)_2^2$. No exercício 3.4 mostramos que $17 \longrightarrow (3)_3^2$ e que $16 \not\longrightarrow (3)_3^2$.

Nos casos de coloração de conjuntos ($k = 1$) a notação

$$n \longrightarrow (t_1, \dots, t_r)_r^1$$

representa o fato que “em toda r -coloração de n objetos há t_i objetos monocromáticos da cor i , para algum i ”, ou seja, o princípio das gavetas. O teorema 2.4 demonstra que

$$1 + \sum_{i=1}^r (t_i - 1) \longrightarrow (t_1, \dots, t_r)_r^1.$$

Exercício 3.11. Assuma que $n \rightarrow (t_1, \dots, t_r)_r^k$. Prove que

1. $m \rightarrow (t_1, \dots, t_r)_r^k$ para todo $m \geq n$.
2. $n \rightarrow (\ell_1, \dots, \ell_r)_r^k$ para $\ell_i \leq t_i$ para todo i .
3. $n \rightarrow (t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(r)})_r^k$ para toda permutação π dos índices.
4. $n \rightarrow (t_1, \dots, t_r, k)_{r+1}^k$.

3.1.1 O teorema do final feliz

“For me the fact that it came from Epszi (Paul’s nickname for Esther, short for ϵ) added a strong incentive to be the first with a solution and after a few weeks I was able to confront Paul with a triumphant “E. P., open up your wise mind.” What I really found was Ramsey’s theorem...” George Szekeres

Por volta de 1932 a húngara Esther Klein observou que de qualquer conjunto de cinco pontos no plano, dos quais não há três colineares, é sempre possível selecionar quatro pontos que são vértices de um polígono convexo.

Exercício 3.12. Prove que em quaisquer cinco pontos no plano, dos quais não há três colineares, é sempre possível selecionar quatro pontos que são vértices de um polígono convexo.

Solução. Se o polígono formado pelo fecho convexo dos cinco pontos é um quadrilátero ou um pentágono o enunciado é trivial. Portanto, suponha que o polígono seja um triângulo ABC . Então os dois pontos restantes D e E estão no interior de ABC . Dois dos vértices, digamos A e C , devem estar no mesmo semiplano definido pela reta que passa D e E . Então $AEDC$ é um quadrilátero convexo. \square

Quando Esther Klein compartilhou essa notícia com um círculo de seus amigos em Budapeste surgiu a seguinte generalização: *Para todo natural $n \geq 3$, existe um natural $ES(n)$ tal que de qualquer conjunto de $N(n)$ pontos no plano dos quais não há três colineares seja possível selecionar n pontos que são vértices de um polígono convexo?*

George Szekeres provou a existência de $N(n)$ para todo n . Logo em seguida, Paul Erdős deu uma prova diferente com limitantes menores para $ES(n)$, provou que *em qualquer conjunto de $\binom{2n-4}{n-2} + 1$ pontos no plano dos quais não existem três colineares, é sempre possível selecionar n pontos que são vértices de um polígono convexo.* Em dezembro de 1934, Erdős e Szekeres publicaram um manuscrito contendo as duas provas. Esther Klein e George Szekeres se casaram em 1937 e Paul Erdős cunhou o resultado que eles obtiveram com “teorema do final feliz”.

Exercício 3.13. Prove que se N pontos no plano são tais que quaisquer 4 deles formam um quadrilátero convexo então os N pontos são vértices de um polígono convexo.

Solução. Tome o fecho convexo dos N pontos e suponha que o resultado seja um polígono com $\ell < N$ vértices. Sejam v_1, v_2, \dots, v_ℓ os vértices do polígono. Pela hipótese assumida deve haver pelo menos um dos N pontos, digamos p , dentro do polígono. Considere as diagonais $v_1 v_j$, para $j = 3, 4, \dots, \ell - 1$. O ponto dentro do polígono convexo deve estar localizado em um dos triângulos $\triangle v_1 v_j v_{j+1}$ para $j = 3, 4, \dots, \ell - 1$. Claramente, os três vértices do triângulo com p , juntos, não formam um quadrilátero convexo. \square

Teorema 3.14 (Erdős–Szekeres, 1935). *Para todo $n \geq 4$, existe um menor natural $ES(n)$ tal que para quaisquer $ES(n)$ pontos no plano, dos quais não há 3 colineares, existem n pontos que formam um polígono convexo.*

Demonstração. Dado n , considere qualquer conjunto P de $R^{(4)}(5, n)$ pontos no plano dentre os quais não há três colineares.

Tomamos a seguinte 2-coloração de $\binom{P}{4}$: uma quádrupla $\{u, v, x, y\}$ de pontos recebe cor 1 se, e só se, eles não são vértices de uma quadrilátero convexo.

Do teorema de Ramsey, P deve conter ou um 5-subconjunto U de vértices tal que $\binom{U}{4}$ é monocromático da cor 1 ou deve conter um n -subconjunto D tal que $\binom{D}{4}$ é monocromático da cor 2.

No entanto, U como acima significa 5 pontos do plano, dos quais não há 3 colineares, sem quaisquer 4 deles formarem um quadrilátero convexo, contrariando o fato provado pela Esther Klein (exercício 3.12). Portanto, deve haver n -subconjunto D tal que $\binom{D}{4}$ é monocromático da cor 2, isto é, todas os 4-subconjuntos de K formam um quadrilátero convexo e o teorema segue do exercício 3.13. \square

Conjectura 3.15 (Conjectura de Erdős–Szekeres). O menor número de pontos no plano para o teorema do final feliz valer é $ES(n) = 2^{n-2} + 1$.



Figura 3.4. Erdős, Szekeres e Klein

3.2 Teorema de Ramsey infinitário

Agora, \aleph_0 denota a cardinalidade \mathbb{N} e $\binom{\mathbb{N}}{\aleph_0}$ o conjunto dos subconjuntos infinitos de \mathbb{N} , isto é, todos os \aleph_0 -subconjuntos.

Teorema 3.16 (Teorema de Ramsey, 1930). *Dados números naturais r e k , para qualquer r -coloração de $\binom{\mathbb{N}}{k}$ existem $i \in [r]$ e um subconjunto infinito $X \subseteq \mathbb{N}$ com $\binom{X}{k}$ monocromático da cor i .*

Demonstração para grafos ($k = 2$). Assuma que $\varphi: \binom{\mathbb{N}}{2} \rightarrow [r]$ é uma r -coloração das arestas do grafo completo sobre \mathbb{N} . Vamos definir uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vértices (i.e., números naturais) e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de subconjuntos de vértices, i.e., com $A_{n+1} \subseteq A_n$. Começamos com $A_1 = \mathbb{N}$ e $a_1 = \min A_1$.

Assuma A_n definido e infinito e defina $a_n = \min A_n$. No conjunto $\{ \{a_n, b\} : b \in A_n \} \subset \binom{\mathbb{N}}{2}$ das arestas que incidem nesse vértice a_n existem uma cor $i \in [r]$ e um subconjunto infinito X monocromático da cor i , pois as arestas estão coloridas com um número finito de cores (PG infinitário, teorema 2.8). Defina o conjunto A_{n+1} como os extremos dessas arestas diferentes de a_n , i.e., $A_{n+1} = \{ b \in A_n : \{a_n, b\} \in X \}$.

Ainda nesse processo, definimos uma r -coloração ν dos vértices escolhidos $\{a_1, a_2, \dots\}$ pondo $\nu(a_n) = i$ (a cor que definiu A_{n+1}), portanto, existe $Y \subseteq \{a_1, a_2, \dots\}$ infinito e monocromático por ν (PG infinitário novamente, teorema 2.8).

Agora, resta observar que $\binom{Y}{2}$ é monocromático por φ (verifique). \square

Corolário 3.17. *Toda sequência de números reais admite subsequência monótona.*

Demonstração. Do teorema de Ramsey, teorema 3.16, para qualquer sequência numérica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se 2-colorimos o par $n < m$ azul se, e somente se, $x_n < x_m$ então obtemos um subconjunto infinito de pares monocromáticos. Se for da cor azul então há uma subsequência crescente e se for vermelho, uma subsequência decrescente, i.e., toda sequência de números reais tem uma subsequência monótona. \square

Do corolário segue o **Teorema de Bolzano–Weierstrass** na reta: *Toda sequência limitada de números reais admite subsequência convergente.*

Demonstração do Teorema de Bolzano–Weierstrass. Tome $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma subsequência crescente e limitada de números reais. Seja s o supremo e $\varepsilon > 0$ qualquer. Então $s - \varepsilon$ não é limitante superior, i.e., para algum n vale $y_n > s - \varepsilon$, mas como a sequência é monótona, $y_m > s - \varepsilon$ para todo $m \geq n$, porém $y_m < s + \varepsilon$, logo $|y_m - s| < \varepsilon$ para todo $m \geq n$. Portanto $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge. O caso $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ decrescente e limitada é análogo. \square

Exercício 3.18. Verifique a validade do teorema de Ramsey 3.16 para $k \geq 3$ cores.

Dicas. Assuma que o teorema vale para toda r -coloração de $\binom{\mathbb{N}}{k}$ e prove-o para toda r -coloração de $\binom{\mathbb{N}}{k+1}$.

Fixe uma r -coloração φ de $\binom{\mathbb{N}}{k+1}$. Defina $A_1 = \mathbb{N}$. Se A_n está definido e é infinito tome $a_n = \min A_n$.

Defina uma r -coloração φ' (induzida por φ) de $\binom{A_n \setminus \{a_n\}}{k}$: $\varphi'(X) = \varphi(X \cup \{a_n\})$. Por hipótese, existe $X \subseteq \binom{A_n \setminus \{a_n\}}{k}$ infinito e monocromático; a cor constante em X define uma coloração ν em $\{a_1, a_2, \dots\}$. Para qualquer $(k+1)$ -subconjunto F de $\{a_1, a_2, \dots\}$ vale $\varphi(F) = \nu(a_j)$ onde $j = \min\{i : a_i \in F\}$.

Conclua a demonstração. \square

Exercício 3.19. Prove que toda sequência numérica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência ou estritamente crescente, ou estritamente decrescente, ou constante.

Exercício 3.20. Defina a cor de $\{a_1, a_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ sendo 1 se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge, caso contrário a cor é 2. Nessa 2-coloração ocorre $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito e monocromático?

Quando as arestas são infinitas

Afirmamos acima que $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_r^k$ e o próximo resultado conclui que $\aleph_0 \not\rightarrow (\aleph_0)_r^{\aleph_0}$.

Proposição 3.21. Existe uma 2-coloração de $\binom{\mathbb{N}}{\aleph_0}$ sem X infinito e $\binom{X}{\aleph_0}$ monocromático.

Demonstração. Construiremos uma 2-coloração dos subconjunto infinitos de números naturais, $\varphi: \binom{\mathbb{N}}{\aleph_0} \rightarrow [2]$, tal que para todo A infinito e todo $x \in A$ vale que $\varphi(A \setminus \{x\}) \neq \varphi(A)$. Feito isso, é imediato a conclusão que para φ não há conjunto infinito X com $\binom{X}{\aleph_0}$ monocromático.

Defina uma relação de equivalência \sim sobre $\binom{\mathbb{N}}{\aleph_0}$ pondo

$$A \sim B \text{ se, e só se, } A \triangle B \text{ é finito,}$$

em que \triangle denota a diferença simétrica de conjuntos.

Escolha um representante para cada classe de equivalência e para cada $A \in \binom{\mathbb{N}}{\aleph_0}$ defina a cor $\varphi(A) = 1$ se, e só se, a diferença simétrica de A com o representante de sua classe de equivalência for ímpar. Claramente, como queríamos, vale $\varphi(A \setminus \{x\}) \neq \varphi(A)$. \square

3.2.1 Um ponto de vista unificado e compacidade

Com o argumento de compacidade de seção 2.1.1 podemos deduzir a versão finita do teorema de Ramsey da versão infinita. Para tal, primeiro escrevemos os teoremas de Ramsey em linguagem da teoria dos (hiper)grafos e em seguida estendemos o teorema de compacidade para hipergrafos. Vejamos, formalmente, a definição de hipergrafo.

Definição 3.22 (hipergrafo). Um *hipergrafo* sobre V é definido por uma família E de subconjuntos não vazios de V . Cada elemento de V é chamado de *vértice* e cada elemento de E é chamado de *aresta*. Vértices que pertencem a mesma aresta são ditos *adjacentes*. Caso $E \subseteq \binom{V}{k}$, ou seja, toda aresta tem cardinalidade k , chamamos o de *hipergrafo k -uniforme*, ou simplesmente *k -hipergrafo*. O (hiper)grafo k -uniforme é *completo* se $E = \binom{V}{k}$. Claramente, um grafo é um 2-hipergrafo.

Agora, modelamos os teoremas de Ramsey em teoria dos grafos da seguinte maneira:

- (H) V , o conjunto de vértices do hipergrafo, é o conjunto que será particionado e E , o conjunto das arestas do hipergrafo, são as configurações que são afirmadas ocorrer em pelo menos uma das partes da partição.

Recordando a definição de número cromático para grafo, definição 2.16, para qualquer hipergrafo H , o número $\chi(H)$ é a menor cardinalidade de um conjunto de cores para o qual existe uma coloração de $V(H)$ sem que haja aresta monocromática. Essa definição serve, literalmente, para hipergrafo.

Exemplo 3.23. No contexto do teorema de Ramsey infinitário o conjunto de vértices é $V = \binom{\mathbb{N}}{k}$ e para cada subconjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito a família $e_X = \binom{X}{k}$ é uma aresta do hipergrafo. O teorema de Ramsey afirma que para qualquer r -coloração do conjunto V de vértices do hipergrafo H há uma aresta e_X monocromática, i.e., $\chi(H) > r$.

Exemplo 3.24. Dados naturais k e t seja H o hipergrafo sobre $V = \binom{\mathbb{N}}{k}$ com arestas $e_X \in E$ dadas por cada t -subconjunto $X \subseteq V$ como a família $e_X = \binom{X}{k}$ dos k -subconjuntos de X . Dado $r \in \mathbb{N}$, de $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_r^k$ temos $\aleph_0 \rightarrow (t)_r^k$ para todo $t \in \mathbb{N}$, portanto, $\chi(H) > r$.

Um teorema é do *tipo Ramsey* se seu enunciado pode ser reformulado da seguinte forma.

- (TR) *dados naturais t e r existe n tal que se $|V| \geq n$ então para um hipergrafo H como descrito em (H) acima vale que $\chi(H) > r$.*

Adaptando a demonstração do teorema de compacidade Erdős–De Bruijn, teorema 2.17 na seção 2.1.1, para hipergrafos temos o seguinte resultado (claramente, vale a recíproca).

Teorema 3.25 (Teorema de compacidade Erdős–De Bruijn). *Sejam r um natural e $H = (V, E)$ um hipergrafo tal que cada aresta $e \in E$ é finita. Se para todo $W \subseteq V$ finito $\chi((W, E \cap 2^W)) \leq r$ então $\chi(H) \leq r$.*

Assuma $\aleph_0 \rightarrow (t)_r^k$. Pelo teorema de compacidade, por (TR) com H construído no exemplo 3.24, temos $\chi(H) > r$, portanto, existe $W \subset \binom{\mathbb{N}}{k}$ finito tal que $\chi((W, E \cap 2^W)) > r$, ou seja, há um subconjunto finito de vértices W que se r -colorido implicará numa aresta de $\{e_X : X \in \binom{W}{t}\}$ monocromática, portanto $n \rightarrow (t)_r^k$ para todo $n \geq |W|$.

Exercício 3.26. Prove o seguinte resultado. Sejam $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ um conjunto infinito e enumerável e \mathcal{A} uma família de subconjuntos finitos de V . Se para toda r -coloração de V existe um elemento de \mathcal{A} monocromático, então existe um natural n tal que para toda r -coloração de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ algum subconjunto de \mathcal{A} é um subconjunto monocromático de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Um teorema “improvável”

Do teorema da incompletude de Gödel aprendemos que existem afirmações verdadeiras sobre números naturais que não podem ser demonstradas na aritmética de Peano. Em 1977, Paris e Harrington deram um exemplo de uma variação do Teorema de Ramsey que não pode ser demonstrada em aritmética de Peano apesar de ser facilmente demonstrável na Teoria de Conjuntos usual. Denote por $[t, n]$ o intervalo de inteiros entre t e n , inclusive.

Teorema 3.27. *Dados $k, r, t \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que vale o seguinte. Para toda r -coloração de $\binom{[t, n]}{k}$ existe um subconjunto $X \subset [t, n]$ com $|X| \geq t$ e $|X| > \min X$ e com $\binom{X}{k}$ monocromático.*

Demonstração. Deixamos como exercício. Segue via compacidade a partir da versão infinitária do teorema de Ramsey. \square

Este é geralmente considerado o primeiro exemplo natural de uma sentença indecidível.

Teorema de Paris–Harrington. *O teorema 3.27 acima não tem demonstração em Aritmética de Peano.*

3.2.2 Infinitos ... mais infinitos

Dados os cardinais (não nulos) $\kappa \geq \lambda \geq \mu$ e ν escreveremos

$$\kappa \longrightarrow (\lambda)_\nu^\mu$$

se para toda coloração $\varphi: \binom{\kappa}{\mu} \rightarrow \nu$, existe um conjunto monocromático $X \subseteq \kappa$ de cardinalidade λ . Relembrando o que vimos até agora

- $5 \not\rightarrow (3)_2^2$,
- $6 \rightarrow (3)_2^2$,
- $17 \rightarrow (3)_3^2$,
- Para todos r, t e k naturais, existe n natural tal que $n \rightarrow (t)_r^k$
- Para todos os naturais r, k vale $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_r^k$,
- Para todo $\kappa \geq \aleph_0$ vale $\kappa \not\rightarrow (\aleph_0)_2^{\aleph_0}$,

Os resultados para cardinais maiores depende de technicalidades da teoria dos conjuntos que não daremos aqui. Um exemplo de resultado que cabe mostrar aqui é o seguinte teorema de Sierpiński:

$$2^{\aleph_0} \not\rightarrow (\aleph_1)_2^2.$$

Observe que $\aleph_1 \preccurlyeq 2^{\aleph_0}$ e a igualdade é a afirmação da Hipótese do Contínuo. Vamos exibir uma 2-coloração de $\binom{\mathbb{R}}{2}$ não constante nos conjuntos de cardinalidade \aleph_1 .

Seja $<$ a ordem usual em \mathbb{R} e $<^*$ uma boa-ordem em \mathbb{R} , cuja existência é garantida pelo axioma da escolha. Defina $\varphi: \binom{\mathbb{R}}{2} \rightarrow [2]$ por

$$\varphi(\{x, y\}) = \begin{cases} 1 & \text{caso } x < y \Leftrightarrow x <^* y \\ 2 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que para $A \subseteq \mathbb{R}$ a coloração $\varphi \upharpoonright \binom{A}{2} = 1$. Então $<$ é uma boa-ordem em \mathbb{R} . Defina $f: A \rightarrow \mathbb{Q}$ por $f(a)$ é um racional entre a e o sucessor de a sob $<$; a função f é injetiva, logo

$$|A| \preccurlyeq |\mathbb{Q}| = \aleph_0 \prec \aleph_1.$$

Se $\varphi \upharpoonright \binom{A}{2} = 2$ então o inverso de $<$ é uma boa-ordem em \mathbb{R} , e o argumento segue analogamente.

Exercício 3.28. Seja κ um cardinal infinito. Mostre que $2^\kappa \not\rightarrow (3)_\kappa^2$ (dica: 2^κ é a cardinalidade do conjunto de todas as funções $\kappa \rightarrow [2]$. Defina $\varphi(\{f, g\}) = \min\{\alpha : f(\alpha) \neq g(\alpha)\}$).

Notas

Um *survey* dinâmico iniciado em 1994 mostra o estado da arte para os números de Ramsey

Radziszowski SP (1994) Small Ramsey Numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Survey #DS1: Mar 3

Há muitas aplicações interessantes da teoria de Ramsey, algumas das aplicações, principalmente em ciência da computação teórica, podem ser encontradas em

Rosta V (2004) Ramsey Theory Applications. The Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Survey #DS13: Dec 7

O teorema provado por Ramsey, as versões finita e infinita, apareceram em

Ramsey FP (1930) On a problem in formal logic. Proc. London Math. Soc. 30:2, 264–286

a versão finita foi provada por Skolem e por Erdős e Szekeres, o teorema do final feliz, que apareceu em

Erdős P, Szekeres G (1935) A combinatorial problem in geometry. Compositio Mathematica, 2, 463–470

onde Erdős e Szekeres mostraram que o teorema do final feliz segue da versão finita do teorema de Ramsey e deram uma prova da versão finita.

O argumento probabilístico para o limitante inferior para números de Ramsey na diagonal é de Erdős, de 1947. Em

Spencer J (1975) Ramsey theorem — a new lower bound. Journal of Combinatorial Theory Ser. A, 18, 108–115

foi dado a melhor cota inferior $(1 - o(1)) \frac{\sqrt{2t}}{e} \sqrt{2}^t$ conhecida até hoje, também obtido pelo método probabilístico. O melhor limitante superior atual para a diagonal dos números de Ramsey é de

Conlon D (2009) A new upper bound for diagonal Ramsey numbers. Annals of Mathematics, 170, 941–960

que prova $R(k+1, k+1) \leq k^{-C \log k / \log \log k} \binom{2k}{k}$. O limitante superior para $R(s, t)$ dado no texto é de

Ajtai M, Komlós J, Szemerédi E (1980) A note on Ramsey numbers. Journal Combin. Theory Ser. A, 29, 354–360

O limitante inferior é de

Bohman T, Keevash P (2010) The early evolution of the H-free process. Invent. Math., 181, 291–336

Um excelente *survey* recente sobre a teoria de Ramsey em grafos nas várias generalizações que se pode fazer é

Conlon D, Fox J, Sudakov B (2015) Recent developments in graph Ramsey theory. In A. Czumaj, A. Georgakopoulos, D. Král, V. Lozin, O. Pikhurko (Eds.). Surveys in Combinatorics 2015, pp. 49–118. Cambridge University Press

A notação “flecha” foi introduzida por Erdős e Rado em seus artigos sobre combinatória infinitária. Interessados nesse assunto podem consultar

Erdős P, Rado R (1956) A partition calculus in set theory. Bull. Amer. Math. Soc., 62:5, 427–489

disponível *online* em https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183520996 ou consultar [5]. Para um tratamento mais atual e com aplicações mais recentes veja www.math.uni-hamburg.de/home/geschke/teaching/InfiniteRamseyNotes.pdf. Uma aplicação do teorema de Erdős e Rado

$$2^{\kappa^+} \longrightarrow (\kappa^+)_\kappa^2 \quad (\forall \kappa \geq \aleph_0)$$

para uma limitação na cardinalidade de espaços topológicos pode ser vista em <http://professor.ufabc.edu.br/~jair.donadelli/manuscritos/semi-topo.pdf>.

O teorema de Paris–Harrington pode ser lido em

Paris J, Harrington L (1977) A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic. In Handbook for Mathematical Logic (Ed. J. Barwise). Amsterdam, Netherlands: North-Holland.

ou em [2].

O Teorema de Schur

“Nobody then asked questions of the kind Issai Schur posed and solved in this 1916 paper. Consequently, nobody appreciated this result much when it was published. Even Van der Waerden himself learned about the Schur theorem from me in 1995!”. Soifer [7].



Figura 4.1. Issai Schur (1875–1941)

Os primeiros resultados do tipo Ramsey versam sobre partições dos inteiros que preservam, em alguma parte, uma certa estrutura aritmética. O teorema de Schur, de 1916, afirma que um segmento inicial dos naturais suficientemente grande não pode ser particionado em conjuntos livres de soma, isto é, um conjunto que contém x , y e $x + y$.

Definição 4.1 (conjunto livre de soma). *Um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ é livre de soma se $(A + A) \cap A = \emptyset$.*

Por exemplo, a 2-coloração **1, 2, 3, 4** de $[4]$ é livre de soma, isto é, não tem uma solução monocromática da equação $x + y = z$. Também, a 3-coloração de $[13]$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

não tem uma solução monocromática da equação $x + y = z$. No entanto, pode ser verificado por força bruta que qualquer 2-coloração de $[5]$ tem uma solução monocromática e qualquer 3-coloração de $[14]$ tem uma solução monocromática da equação $x + y = z$. O caso da 2-coloração de $[5]$ é simples:

s.p.g., podemos assumir que 1 é vermelho e se 2 for vermelho então $1 + 1 = 2$ é monocromático, portanto considere o caso que 2 é azul. Como $2 + 2 = 4$ considere o caso em que 4 é vermelho e como $1 + 4 = 5$ considere que a cor do 5 é azul. Resta determinar a cor do 3. Se 3 é vermelho, então $1 + 3 = 4$ é monocromático e se 3 é azul então $2 + 3 = 5$ é monocromático.

Esse exemplo ilustra casos particulares de um resultado pioneiro nessa linha que precede historicamente o teorema de Ramsey. Issai Schur, enquanto estudava o último teorema de Fermat, deu uma prova para um teorema de Leonard Dickson (teorema 4.11 abaixo) que usava “um lema muito simples, que pertence mais a combinatória que à teoria dos números”, segundo o próprio Schur.

Teorema 4.2 (Teorema de Schur, 1916). *Dado $r \geq 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que em qualquer r -coloração de $[n]$ existe solução monocromática de $x + y = z$.*

Demonstração. Dado r , tome $n = R(3, 3, \dots, 3)$ (r parâmetros) de modo que, por definição, em qualquer r -coloração φ de $\binom{[n]}{2}$ deve existir um triângulo $\binom{\{a, b, c\}}{2}$ monocromático. Seja $\eta : [n] \rightarrow [r]$ uma coloração qualquer.

Defina a cor da aresta $\{i, j\}$ como $\varphi(\{i, j\}) = \eta(|j - i|)$ e sejam, s.p.g., $a < b < c$ os elementos que determinam um triângulo monocromático. Tomando $x = b - a$, $y = c - b$ e $z = c - a$ temos $x + y = z$. \square

O menor n para o qual o teorema vale é chamado de **número Schur**, denotado por $s(r)$. São conhecidos, apenas, $s(1) = 2$, $s(2) = 5$, $s(3) = 14$ e $s(4) = 45$.

O seguinte limitante superior é uma consequência da demonstração original, dada por Schur, o limitante inferior também foi dada por Schur

$$\frac{3^r + 1}{2} \leq s(r) \leq e \cdot r!$$

A demonstração de Schur

Assuma que temos uma r coloração φ de $[n]$ sem uma solução monocromática para

$$(4.1) \quad x + y = z$$

Sejam C_1 a cor mais usada nessa coloração e $x_1 < x_2 < \dots < x_{n_1}$ os números que são coloridos com tal cor.

Note que $n \leq n_1 r$ as $n_1 - 1$ diferenças

$$(4.2) \quad x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_{n_1} - x_1$$

pertencem a $[n]$. Se alguma delas recebe a cor C_1 , digamos $x_i - x_1$, então $x_1, x_i, x_i - x_1$ é uma solução de (4.1), portanto, por hipótese nenhuma dessas diferenças recebe a cor C_1 .

Portanto, em (4.2) temos uma $(r-1)$ -coloração. Sejam C_2 a cor mais usada em (4.2) e $y_1 < y_2 < \dots < y_{n_2}$ os números (diferenças, $y_i = x_j - x_1$) que são coloridos com tal cor. Então $n_1 - 1 \leq n_2(r-1)$ e as $n_2 - 1$ diferenças

$$y_2 - y_1, y_3 - y_1, \dots, y_{n_2-1} - y_1$$

pertencem a $[n]$ pois $y_i - y_1 = x_i - x_1$. Nenhuma dessas diferenças tem cor C_1 : se $y_i - y_1 = x_i - x_1$ tem cor C_1 , então $x_1, x_i, x_i - x_1$ é uma solução de (4.1). Nenhuma dessas diferenças tem cor C_2 : se $y_i - y_1$ tem cor C_2 , então $y_1, y_i, y_i - y_1$ é uma solução de (4.1).

Portanto, em (4.2) temos uma $(r-2)$ -coloração. Se C_3 é a cor mais frequente e ocorre em n_3 desses números

$$n_2 - 1 \leq n_3(r-2)$$

continuando dessa maneira

$$n_i - 1 \leq n_{i+1}(r-i)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, t$ onde t é tal que $n_t = 1$, rearranjando e dividindo por $(r-i)!$

$$\frac{n_i}{(r-i)!} \leq \frac{1}{(r-i)!} + \frac{n_{i+1}}{(r-i-1)!}$$

portanto

$$\frac{n_1}{(r-1)!} \leq \frac{1}{(r-1)!} + \frac{1}{(r-2)!} + \dots + \frac{1}{(r-n_t)!} < e$$

e como $n \leq n_1 r$ segue que $n \leq e \cdot r!$. Portanto se $n > e \cdot r!$, em qualquer r -coloração de $[n]$ ocorre uma solução monocromática de (4.1).

Uma versão mais forte

É possível provar que existe um natural $s^*(r)$ para o qual qualquer r -coloração de $[s^*(r)]$ dá uma solução monocromática da equação $x + y = z$ com inteiros distintos, $x \neq y$. Dada uma r -coloração qualquer φ dos naturais com cores c_1, \dots, c_r acrescentamos outras r cores diferentes, digamos, d_1, \dots, d_r e consideramos a $2r$ -coloração ν de $\binom{[s(2r)]}{2}$ dada por

$$\nu(\{i, j\}) = \begin{cases} c_p & \text{se } \lfloor \frac{i}{|i-j|} \rfloor \text{ é par,} \\ d_p & \text{se } \lfloor \frac{i}{|i-j|} \rfloor \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad c_p = \varphi(|i-j|).$$

Seja, s.p.g., $i > j > k$ os elementos que definem um triângulo monocromático pela coloração ν .

Tome $a = i - j$, $b = j - k$ e $c = i - k$. Primeiro, note que como as arestas desse triângulo têm a mesma cor por ν , temos $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c)$. Ademais, $a + b = c$. Resta verificar que a, b, c são números distintos.

Assuma que $a = b$ e seja c_p a cor de $a = b = i - j = j - k$, então

$$\left\lfloor \frac{i}{i-j} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{j}{i-j} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{j}{i-j} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{j}{j-k} \right\rfloor$$

logo $\lfloor \frac{i}{i-j} \rfloor$ e $\lfloor \frac{j}{j-k} \rfloor$ têm paridades diferentes, que implica que as arestas $\{i, j\}$ e $\{j, k\}$ devem ter cores diferentes, uma contradição. \square

Exercício 4.3. Prove que $s(2) = 5$.

Exercício 4.4. Prove que para todos r, k existe n tal que em qualquer r -coloração de $[n]$ existe solução monocromática de $x_1 + \dots + x_{k-1} = x_k$ (*dica*: tome $n = R(t, t, \dots, t)$ (r parâmetros) e use o teorema de Ramsey).

Exercício 4.5. Dados $r, k \geq 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que em qualquer r -coloração de $[n]$ existe um subconjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_1 + x_2 + \dots + x_k\}$ monocromático.

Exercício 4.6. Mostre que o teorema de Schur é do “tipo Ramsey” modelando-o em linguagem de teoria dos grafos (H) e reescrevendo como (TR).

Exercício 4.7. Prove que em qualquer coloração de \mathbb{N} com um número finito de cores há solução monocromática de $x + y = z$. Prove que há infinitas soluções monocromáticas. Deduza o teorema de Schur usando compacidade.

Exercício 4.8. Use o teorema de Schur para provar que se \mathbb{N} é r -colorido e $k \geq 1$ então existem infinitamente muitos $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_1 + x_2 + \dots + x_k\}$ monocromáticos.

Exercício 4.9. Prove que se \mathbb{N} é r -colorido e $k \geq 1$ então existem infinitamente muitos $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k\}$ monocromáticos.

Até o momento não sabemos resolver o seguinte problema.

Conjectura 4.10 (Conjectura de Hindman). Para n suficientemente grande, se $[n]$ for colorido com um número finito de cores, haverá $\{x, y, x + y, xy\}$ monocromático com x e y não ambos iguais a 1?

4.1 Último teorema de Fermat mod p

Como dito acima, o teorema de Schur foi provado com um resultado auxiliar para demonstrar um teorema relacionado ao último teorema de Fermat. Em 1637, Fermat escreveu na margem de sua cópia do texto *Aritmética*, de Diofante, que é impossível que um cubo seja a soma de dois cubos, uma quarta potência seja a soma de duas quarta potências, ou, em geral, que $x^m + y^m = z^m$ tenha solução inteira positiva para $m \geq 3$.

Essa proposição se tornou uma das mais famosas conjecturas da matemática e que foi resolvida somente em 1995. Antes disso, depois de muitas tentativas sem sucesso, os matemáticos decidiram considerar versões restritas do último teorema de Fermat. No caso de Schur, o interesse era em soluções num corpo finito. Mais precisamente, o teorema de Dickson é a seguinte afirmação.

Teorema 4.11. *Para todo $m \geq 1$ e todo primo p suficientemente grande, a equação $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$ tem solução não trivial.*

Uma solução é não trivial se $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$. Note que se houver inteiros satisfazendo $x^m + y^m = z^m$ então para cada primo p , então eles satisfazem $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$ e se p for grande o suficiente então p não divide xyz .

Vamos demonstrar o teorema mostrando um solução monocromática de $x + y = z$ no corpo finito $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ com soma e produto módulo p . O grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$ com multiplicação módulo p é cíclico de modo que existe um gerador $g \in \mathbb{Z}_p^*$ tal que $\mathbb{Z}_p^* = \{g^1, g^2, \dots, g^{p-1}\}$.

Demonstração do teorema 4.11. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $p > s(m)$ primo e g um gerador de \mathbb{Z}_p^* .

Defina a m -coloração φ de $x \in [p-1]$ por: se $x = g^k$ então $\varphi(x) = r$ em que $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ é o resto da divisão de k por m , i.e.,

$$\varphi(g^k) = k \bmod m.$$

Como $p-1 \geq s(m)$, pelo teorema de Schur para essa m -coloração de $[p-1]$, há uma solução monocromática de $x + y = z$. Escrevendo essa solução em função de g , existem naturais a, b, c

$$g^{am+r} + g^{bm+r} = g^{cm+r}$$

multiplicando tudo por g^{-r} , temos $g^{am} + g^{bm} = g^{cm}$ em \mathbb{Z}_p , isto é, tomando $x = g^a$, $y = g^b$ e $z = g^c$, temos $x^m + y^m = z^m$ em \mathbb{Z}_p . \square

Exercício 4.12. Prove que para todo primo p existe um natural m tal que $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$ tem solução não trivial.

Exercício 4.13. Prove que para todo n e todo primo p suficientemente grande a equação $x^n + y^n + z^n \equiv w^n \pmod{p}$ tem solução com $x, y, z, w \not\equiv 0 \pmod{p}$

Exercício 4.14. Seja G um grupo com pelo menos seis elementos. Prove que para toda 2-coloração de G existem $x, y, z \in G$, distintos do elemento neutro, da mesma cor e com $xy = z$.

4.2 Teorema de Rado

Uma equação linear homogênea

$$(4.3) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

com coeficientes inteiros não-nulos é chamada ***r*-regular** se admite uma solução monocromática em toda *r*-coloração de \mathbb{N} . A equação (4.3) é chamada **regular** se for *r*-regular para todo $r \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, em toda 3-coloração de [45] há uma solução monocromática de $x + 2y = 5z$, portanto, tal equação é 3-regular. Entretanto, essa equação não é 4-regular; se colorimos cada número da forma $m5^k$, com $5 \nmid m$, de acordo com o resto da divisão $m \bmod 5$, então não ocorre solução monocromática.

Na tese de doutoramento de Rado, *Studien zur Kombinatorik*, foi caracterizado as equações lineares regulares.

Teorema 4.15 (Teorema de Rado, 1933). *A equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ é regular se, e somente se, algum subconjunto dos coeficientes tem soma 0.*

Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema linear (finito) de equações onde todas as entradas da matriz A e do vetor \mathbf{b} são inteiros. O sistema é ***r*-regular** se em toda *r*-coloração de \mathbb{N} existe uma solução monocromática dos sistema linear; o sistema é **regular** se for *r*-regular para todo $r \in \mathbb{N}$. Por exemplo, do teorema de Schur

$$(1 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$$

é regular.

O teorema de Rado classifica completamente quais sistemas finitos de equações lineares são regulares. Sejam A uma matriz $m \times n$ com entradas inteiras e \mathbf{c}_i o vetor *i*-ésima coluna de A . Diz-se que a matriz A satisfaz a **condição de colunas** se existe uma partição $[n] = S_1 \cup \cdots \cup S_u$ tal que $\sum_{i \in S_1} \mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ e para cada $t \in \{2, 3, \dots, u\}$ temos $\sum_{i \in S_t} \mathbf{c}_i$ é uma combinação linear racional de $\{\mathbf{c}_i : i \in \bigcup_{k=1}^{t-1} S_k\}$. Ou seja, uma matriz A satisfaz a condição de colunas se houver uma ordenação de seus vetores coluna e uma partição de A em blocos de colunas consecutivas tal que a soma das colunas em qualquer bloco seja uma combinação linear das colunas nos blocos anteriores.

O teorema de Rado para sistemas lineares finitos e homogêneos afirma que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é regular se e somente se A satisfaz a condição de colunas.

Em particular, uma equação linear homogênea (4.3) com coeficientes diferentes de zero é regular se e somente se um subconjunto não vazio dos coeficientes soma zero.

Rado conjecturou em sua tese a respeito do que mais diferencia os sistemas de equações lineares que são regulares daqueles que não são regulares. Esta conjectura permanece aberta para todos os casos não triviais.

Conjectura 4.16 (Conjectura do limitante, Rado 1933). Para todos os inteiros positivos m e n , existe um inteiro positivo $k(m, n)$ tal que se um sistema de m equações lineares em n variáveis for $k(m, n)$ -regular, então o sistema é regular.

Rado provou que a conjectura é verdadeira se for verdadeira no caso em que $m = 1$, isto é, para equações lineares.

Em 2006, Jacob Fox e Daniel Kleitman reduziram ainda mais a conjectura de Rado para o caso da equação linear homogênea:

A conjectura do limitante de Rado é verdadeira se para todo $n \in \mathbb{N}$ existir $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que toda equação linear homogênea em n variáveis que é $k(n)$ -regular é regular.

No mesmo artigo, provaram o caso $n = 3$:

Se $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ e para toda 24-coloração de \mathbb{N} existe uma solução monocromática para $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, então para cada coloração finita de \mathbb{N} existe uma solução monocromática para $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.

Notas

O teorema de Schur foi publicado em

Schur, I. (1916) Über die Kongruenz $xm + ym \equiv z^m \pmod{p}$. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 25, 114–117.

cuja primeira tradução para o inglês apareceu em 1965; veja

William LeVeque (2002) Topics In Number Theory, Volumes I, II. Dover Publications, Inc., Mineola, NY. Reimpressão da versão de original de 1965.

O teorema de Dickson é de 1908

Dickson, LE (1908) On the Last Theorem of Fermat. Quart. J. Pure Appl. Math. 40, 27–45.

O exemplo da equação $x + 2y = 5z$, no início da seção 4.2, é de

Guy RK (2004) Unsolved problems in number theory. Third edition. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York.

Os resultados de Fox e Kleitman para regularidade de partição são de

Fox J, Kleitman DJ (2006) On Rado's Boundedness Conjecture. Journal of Combinatorial Theory Series A, 113(1), 84–100.

O Teorema de Van der Waerden

“It is like picking apples from a tree. If one has got an apple and another is hanging a little higher, it may happen that one knows: with a little more effort one can get that one too.” Van der Waerden



Figura 5.1. Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) em 1931

Seja n um natural suficientemente grande a ser determinado. Assuma que temos uma r -coloração φ de $[n]$ *sem* uma solução monocromática trivial para

$$(5.1) \quad x + y = 2z.$$

Vamos adaptar a estratégia de Schur, demonstração na página 32, a esse caso. Antes, porém, observe que de (5.1) e supondo, s.p.g., que $x < y$ deduz-se que uma solução de (5.1) satisfaz

$$y - z = z - x = \frac{y - x}{2}$$

de modo que x, z, y é uma progressão aritmética de três termos de razão $\frac{y-x}{2}$.

Sejam C_1 a cor mais usada nessa coloração e $x_1 < x_2 < \dots < x_{n_1}$ os números que são coloridos com tal cor. Nas diferenças $x_j - x_i \in [n]$ para x_i, x_j de color C_1 com $x_j > x_i$, considere d_1 como a metade da mais frequente.

Pelo PGg, $n_1 \geq n/r$. Também, pelo menos $1/3$ das diferenças são pares (justifique) assim $2d_1 = x_j - x_i$ para pelo menos¹

$$\frac{\frac{1}{3}\binom{n_1}{2}}{\frac{1}{2}n} \geq \frac{\frac{1}{3}\binom{n/r}{2}}{\frac{1}{2}n} \geq \frac{2}{3} \frac{n}{4r^2} \geq \frac{n}{6r^2}$$

pares (x_i, x_j) com $x_i < x_j$.

De $2d_1 = x_j - x_i$ deduzimos que $x_i + x_j = 2(x_i + d_1)$ logo se o “ponto médio” $x_i + d_1 (= x_j - d_1)$ tem cor C_1 então temos uma solução monocromática para 5.1.

Defina

$$S_1 = \{z \in [n] : z - d_1, z + d_1 \in C_1\}$$

de modo que $|S_1| \geq n/(6r^2)$ e $S_1 \cap C_1 = \emptyset$ pois, caso contrário $(x, y, z) = (z - d_1, z + d_1, z)$ é solução monocromática de (5.1).

Sejam C_2 a cor mais usada em S_1 e $y_1 < y_2 < \dots < y_{n_2}$ os números que são coloridos com tal cor. Então $n_2 \geq |S_1|/r \geq n/(6r^3)$ e considere as diferenças $y_j - y_i \in [n]$ para $y_i, y_j \in C_2$ com $y_j > y_i$, também considere d_2 como a metade da diferença mais frequente. Como acima $2d_2 = y_j - y_i$ para pelo menos

$$\frac{\frac{1}{3}\binom{n_2}{2}}{\frac{1}{2}n_1} \geq \frac{\frac{1}{3}\binom{n/(6r^3)}{2}}{\frac{1}{2}n} \geq \frac{2}{3} \frac{n}{6^2 4r^6} \geq \frac{n}{6^3 r^6}$$

pares i, j . Defina

$$S_2 = \{z \in S_1 : z - d_2, z + d_2 \in C_2\}$$

de modo que $|S_2| \geq n/(6^3 r^6)$ e $S_2 \cap C_2 = \emptyset$ pois como acima, no caso contrário ocorre solução monocromática de (5.1). Também $S_2 \cap C_1 = \emptyset$ pois, caso contrário $(x, y, z) = (z - d_2 - d_1, z + d_2 + d_1, z)$ é solução monocromática de (5.1).

Continuando dessa maneira,

$$1 > |S_r| \geq \frac{n}{6^{2^k-1} r^{2(2^k-1)}}$$

portanto, $n \leq 6^{2^k-1} r^{2(2^k-1)}$. Pondo de outro modo, se $n > 6^{2^k-1} r^{2(2^k-1)}$ então qualquer r -coloração de $[n]$ resulta em uma *progressão aritmética de 3 termos* monocromática.

Definição 5.1 (k -PA, k -PA monocromática). Uma progressão aritmética em \mathbb{N} de comprimento k , que abreviamos por k -PA, é uma sequência de números naturais da forma

$$a, a + \delta, a + 2\delta, \dots, a + (k-1)\delta$$

¹ $\binom{a}{b} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b$

para algum $a \in \mathbb{N}$ e algum $\delta \in \mathbb{N}$.

Dada uma coloração φ de \mathbb{N} , chamamos uma k -PA de **monocromática** se todos os elementos são da mesma cor, isto é, φ é constante nos elementos da PA

$$\varphi(a) = \varphi(a + \delta) = \varphi(a + 2\delta) = \cdots = \varphi(a + (k-1)\delta)$$

Demonstraremos o famoso teorema de Van der Waerden para progressões aritméticas, que pode ser enunciado como a seguinte sentença.

Teorema 5.2 (Teorema de Van der Waerden, 1927). *Dados $k, r \in \mathbb{N}$, existe $W \in \mathbb{N}$, tal que em toda r -coloração de $[W]$ existe uma k -PA monocromática.*

Exercício 5.3. Mostre que o teorema de Van der Waerden é do “tipo Ramsey” modelando-o em linguagem de teoria dos grafos (H) e reescrevendo como (TR).

Definição 5.4 (número de Van der Waerden). *Se o teorema 5.2 vale para $W \in \mathbb{N}$, então também vale para qualquer $W' \geq W$ de modo que fica definido o número $\mathcal{W}(k, r)$ dado pelo menor natural W para qual o teorema vale. Esse número é chamado de **número de Van der Waerden**.*

Imediatamente, valem

- $\mathcal{W}(k, 1) = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$;
- $\mathcal{W}(1, r) = 1$ para todo $r \in \mathbb{N}$;
- $\mathcal{W}(2, r) = r + 1$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Assim como os números de Ramsey, a determinação ou mesmo uma boa estimativa para esses números é um problema muito difícil. Alguns resultados conhecidos são

k	2 cores	3 cores	4 cores	5 cores	6 cores
3	9	27	76	>170	>223
4	35	293	>1.048	>2.254	>9.778
5	178	>2.173	>17.705	>98.740	>98.748
6	1.132	>11.191	>91.331	>540.025	>816.981
7	>3.703	>48.811	>420.217	>1.381.687	>7.465.909
8	>11.495	>238.400	>2.388.317	>10.743.258	>57.445.718
9	>41.265	>932.745	>10.898.729	>79.706.009	>458.062.329
10	>103.474	>4.173.724	>76.049.218	>542.694.970	>2.615.305.384
11	>193.941	>18.603.731	>305.513.57	>2.967.283.511	>3.004.668.671

Tabela 5.1. números de Van der Waerden

A melhor cota superior conhecida para o caso geral é de 2001, dada por Gowers, e a melhor cota inferior é de Kozik e Shabanov, de 2016

$$a \cdot r^{k-1} \leq \mathcal{W}(k, r) \leq 2^{2^{r \cdot 2^{k+9}}}$$

para alguma constante $a > 0$.

5.1 Preparação para a demonstração

Abaixo demonstraremos o teorema 5.2 exibindo um natural W grande o suficiente para o argumento ser válido, sem tentar achar o menor valor de W possível para o qual o argumento vale.

Partição de intervalos em intervalos

Sejam n um natural e m um natural múltiplo de n . Uma partição

$$\{I_1, I_2, \dots, I_t\}$$

de um intervalo $I = \{a+1, a+2, \dots, a+m\}$ em $t = \frac{m}{n}$ intervalos é sempre considerada de tal forma que as partes sejam intervalos consecutivos e de cardinalidade n . Assim, $I_1 = \{a+1, a+2, \dots, a+n\}$, $I_2 = \{a+n+1, a+n+2, \dots, a+2n\}$, e assim por diante.

Definição 5.5 (distância entre intervalos, k -PA de intervalos). Para dois intervalos I_i e I_j de uma partição $\{I_1, I_2, \dots, I_t\}$ de um intervalo, a **distância** entre eles é

$$D = D(i, j) = |i - j|.$$

Uma sequência de k intervalos equidistantes da forma

$$I_i, I_{i+D}, \dots, I_{i+(k-1)D},$$

para $i, k, D \in \mathbb{N}$, é dita **k -PA de intervalos**.

Se I_i é um intervalo que começa no número a e se I_j é um intervalo que começa no número b , partes de uma partição como acima, e que distam D então os elementos correspondentes no intervalo, digamos $a+k$ e $b+k$, para algum $k < n$ positivo, distam

$$(5.2) \quad \Delta = |b - a| = Dn$$

onde n é a cardinalidade dos intervalos.

Coloração de intervalos

Uma r -coloração de $[m]$, digamos $\varphi: [m] \rightarrow [r]$, induz uma r^n -coloração da partição $\{I_1, I_2, \dots, I_t\}$ de um intervalo, denotada $\bar{\varphi}: \{I_1, I_2, \dots, I_t\} \rightarrow [r]^n$ e dada por

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \mapsto \bar{\varphi}(I) = (\varphi(i_1), \varphi(i_2), \dots, \varphi(i_n))$$

Exemplo 5.6. Para uma coloração $\varphi: [25] \rightarrow \{\text{azul}, \text{vermelho}, \text{verde}\}$ e uma partição de $[25]$ em 5 intervalos

$$\{\text{1}, \text{2}, \text{3}, \text{4}, \text{5}\}, \{\text{6}, \text{7}, \text{8}, \text{9}, \text{10}\}, \{\text{11}, \text{12}, \text{13}, \text{14}, \text{15}\}, \{\text{16}, \text{17}, \text{18}, \text{19}, \text{20}\}, \{\text{21}, \text{22}, \text{23}, \text{24}, \text{25}\}$$

temos que I_1, I_3 e I_5 formam uma 3-PA monocromática de intervalos.

Indução em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com a ordem lexicográfica \preceq :

$$(x, y) \preceq (a, b) \text{ se } \begin{cases} x < a & \text{ou} \\ x = a & \text{e } y \leq b \end{cases}$$

é uma boa-ordem

$$(1, 1) \prec (1, 2) \prec \dots \prec (2, 1) \prec (2, 2) \prec \dots \prec (3, 1) \prec (3, 2) \prec \dots$$

de modo que podemos usar um princípio de indução que ela define. Se

1. $\mathcal{W}(1, 1)$ está definido e
2. para todo $(k, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vale que
se $\mathcal{W}(j, s)$ está definido para todo $(j, s) \prec (k, r)$,
então $\mathcal{W}(k, r)$ fica definido

então $\mathcal{W}(k, r)$ está definido para todo k e todo r .

5.1.1 Partição do intervalo $[W]$ e $\mathcal{W}(3, 2)$

Sejam W um natural múltiplo de 5 a ser determinado e φ uma 2-coloração de $[W]$ que, por hipótese, não apresenta 3-PA monocromática. Considere uma partição de $[W]$ em intervalos de cardinalidade 5. Em um intervalo 2-colorido com 5 elementos sempre vale, pelo PG, que dentre os três primeiros há um cor repetida; ademais se tais números da mesma cor distam δ então temos

$$(5.3) \quad a, a + \delta, a + 2\delta \in I \quad \text{e} \quad \varphi(a) = \varphi(a + \delta) \neq \varphi(a + 2\delta).$$

Considere a 2^5 coloração induzida nos intervalos que particionam o intervalo $[5(2^5 + 1)]$. Pelo PG ocorrem dois intervalos da mesma cor. Tais intervalos distam $\leq 2^5$. Se tomamos mais 2^5 intervalos, ou

$$W = 5((2^5 + 1) + 2^5),$$

então temos uma 3-PA de intervalos em $[W]$, isto é, existem naturais i e D

$$I_i, I_{i+D}, I_{i+2D} \subset [W] \quad \text{e} \quad \bar{\varphi}(I_i) = \bar{\varphi}(I_{i+D}) \neq \bar{\varphi}(I_{i+2D}).$$

Em I_i temos uma 3-PA definida por a e δ como na equação (5.3) que é replicada em I_{i+D} , com as mesmas cores, e em I_{i+2D} , possivelmente com cores diferentes, de modo que para $\Delta = 5D$ (veja equação (5.2)) temos, s.p.g. (i.e., a menos dos nomes das cores)

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi(a + \delta) = \varphi(a + \Delta) = \varphi(a + \delta + \Delta) = \text{vermelho} \\ \varphi(a + 2\delta) &= \varphi(a + 2\delta + \Delta) = \text{azul} \\ \varphi(a + 2\delta + 2\Delta) &\in \{ \text{vermelho}, \text{azul} \} \end{aligned}$$

(veja esquema na figura 5.2). Agora, se $\varphi(a + 2\delta + 2\Delta) = \text{vermelho}$ então

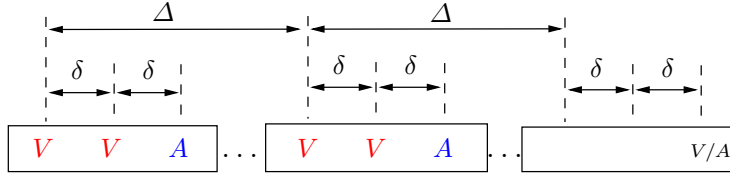


Figura 5.2. 3-PA de intervalos com os dois primeiros da mesma cor

$a, a + \delta + \Delta, a + 2\delta + 2\Delta$ é uma 3-PA monocromática e se $\varphi(a + 2\delta + 2\Delta) = \text{azul}$, então $a + 2\delta, a + 2\delta + \Delta, a + 2\delta + 2\Delta$ é uma 3-PA monocromática, em ambos os casos obtemos uma contradição. Portanto, em qualquer 2-coloração de $[5(2^5 + 1) + 5 \cdot 2^5]$ deve ocorrer uma 3-PA monocromática. Assim provamos o seguinte resultado.

Teorema 5.7. $\mathcal{W}(3, 2) \leq 5 \cdot (2 \cdot 2^5 + 1)$. □

Exercício 5.8. Prove o teorema 5.7 usando partição em intervalos de cardinalidade 3.

5.1.2 Partição de partição e $\mathcal{W}(3, 3)$

Seja W um natural múltiplo de 7 a ser determinado, φ uma 2-coloração de $[W]$ e assumamos por hipótese que não ocorre 3-PA monocromática. Considere uma partição de $[W]$ em intervalos de cardinalidade 7. Em um intervalo I com 7 elementos e 3-colorido sempre vale que dentre os quatro primeiros há um cor repetida, pelo PG, ademais se tais números da mesma cor distam δ então temos

$$(5.4) \quad a, a + \delta, a + 2\delta \in I \quad \text{e} \quad \varphi(a) = \varphi(a + \delta) \neq \varphi(a + 2\delta).$$

Considerando $\varphi : [W] \rightarrow \{\text{vermelho}, \text{azul}, \text{laranja}\}$ e usando o mesmo argumento da seção anterior temos que se $[7((3^7 + 1) + 3^7)]$ for particionado em intervalos de 7 elementos e 3-colorido então existem naturais a, δ, i de modo que ocorre (5.4) em I_i e existe um natural D de modo que

$$a, a + \delta, a + 2\delta \in I_i \quad \text{e} \quad I_i, I_{i+D}, I_{i+2D} \subset [7((3^7 + 1) + 3^7)]$$

e para $\Delta = 7D$, s.p.g., temos

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi(a + \delta) = \varphi(a + \Delta) = \varphi(a + \delta + \Delta) = \text{vermelho} \\ \varphi(a + 2\delta) &= \varphi(a + 2\delta + \Delta) = \text{azul} \\ \varphi(a + 2\delta + 2\Delta) &\in \{\text{vermelho}, \text{azul}, \text{laranja}\} \end{aligned}$$

só que agora podemos ter $\varphi(a + 2\delta + 2\Delta) = \text{laranja}$ sem gerar uma contradição. No entanto, nessa situação, temos duas 3-PA quase monocromáticas, a saber, (i) $a, a + \delta + \Delta, a + \delta + 2\Delta$ que é **vermelho, vermelho, laranja**; (ii) $a + 2\delta, a + 2\delta + \Delta, a + 2\delta + 2\Delta$ que é **azul, azul, laranja**.

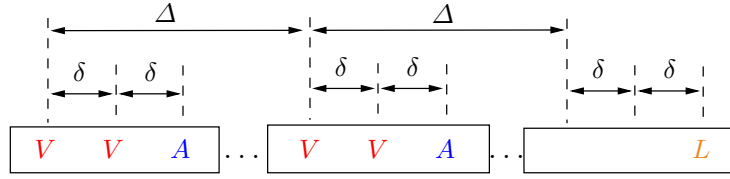


Figura 5.3. duas 3-PA com último elemento em comum

Com isso provamos o seguinte resultado.

Lema 5.9. *Para toda 3-coloração de $[7((3^7 + 1) + 3^7)]$ ou ocorre uma 3-PA monocromática, ou existem duas 3-PAs, digamos a, b, f e x, y, f , tais que, s.p.g.,*

- a e b têm a mesma cor, digamos **vermelho**;
- x e y têm a mesma cor, diferente da cor de a e b , digamos **azul**;
- f é comum às PAs e tem cor **laranja**.

□

Agora vamos determinar W que seja grande o suficiente para que essa configuração representada pela figura 5.3 ocorra dentro de um intervalo que é parte de uma (nova) partição de $[W]$ e para que tal partição contenha uma 3-PA de intervalos com os dois primeiros monocromáticos. Uma representação gráfica desse quadro que será formalizado a seguir está dada na figura 5.4.

Definimos $W_0 = 7((3^7 + 1) + 3^7)$ e escolhemos

$$W = W_0((3^{W_0} + 1) + 3^{W_0}),$$

consideramos uma 3-coloração φ e supomos que não ocorra 3-PA monocromática, particionamos $[W]$ em $(3^{W_0} + 1) + 3^{W_0}$ intervalos de cardinalidade W_0 e consideramos a 3^{W_0} -coloração $\bar{\varphi}$ induzida nos intervalos. Nos $3^{W_0} + 1$ primeiros intervalos da partição ocorre uma cor de intervalo repetida e nos 3^{W_0} intervalos restantes há espaço para que ocorra um terceiro intervalo que define uma 3-PA de intervalos. i.e., existem naturais i, D tais que

$$I_i, I_{i+D}, I_{i+2D} \subset [W] \quad \text{e} \quad \bar{\varphi}(I_i) = \bar{\varphi}(I_{i+D}) \neq \bar{\varphi}(I_{i+2D}).$$

Como, por hipótese, não há 3-PA monocromática em I_i resta o segundo caso do lema 5.9, ou seja, existem naturais $a, b \in I_i$ e existem naturais δ e δ' tais que para $\Delta = W_0 D$ e $f = a + 2\delta = b + 2\delta' \in I_i$, s.p.g., temos

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi(a + \delta) = \varphi(a + \Delta) = \varphi(a + \Delta + \delta) = \text{vermelho} \\ \varphi(b) &= \varphi(b + \delta') = \varphi(b + \Delta) = \varphi(b + \Delta + \delta') = \text{azul} \\ \varphi(f) &= \varphi(f + \Delta) = \text{laranja} \end{aligned}$$

e $f + 2\Delta = a + 2\delta + 2\Delta = b + 2\delta' + 2\Delta$ tem uma das três cores, porém

- se for **vermelho** então temos contradição pois

$$a, a + \delta + \Delta, a + 2\delta + 2\Delta$$

é 3-PA monocromática.

- se for **azul** então temos contradição pois

$$b, b + \delta' + \Delta, b + 2\delta' + 2\Delta$$

é 3-PA monocromática.

- se for **laranja** então temos contradição pois

$$f, f + \Delta, f + 2\Delta$$

é 3-PA monocromática.

Portanto, não pode haver 3-coloração de $[W]$ sem 3-PA monocromática.

Assim, provamos o seguinte teorema.

Teorema 5.10. $\mathcal{W}(3, 3) \leq 7(2 \cdot 3^7 + 1)(2 \cdot 3^{7(2 \cdot 3^7 + 1)} + 1)$. □

Exercício 5.11. Use o argumento dado acima para demonstrar que $\mathcal{W}(3, r)$ está definido para todo natural c (*dica*: primeiro faça com $r = 4$).

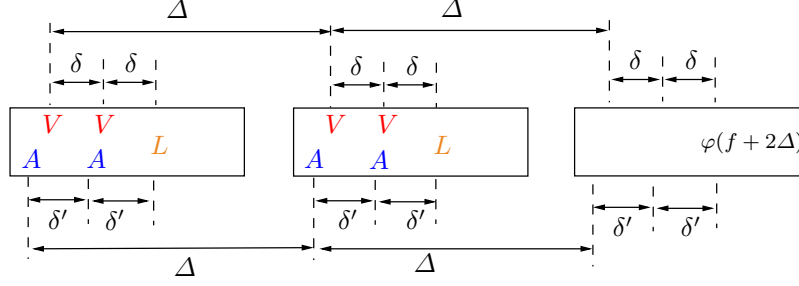


Figura 5.4. 3-PA de intervalos de cardinalidade W_0 . Os dois primeiros intervalos correspondem à configuração representada pela figura 5.3

5.1.3 Indução e $\mathcal{W}(4, 2)$

Vamos assumir que $\mathcal{W}(3, r)$ está definido para todo r e provar que $\mathcal{W}(4, 2)$ está definido.

Num intervalo de cardinalidade $\mathcal{W}(3, 2)$ (esse número está definido por hipótese) qualquer 2-coloração determina uma 3-PA, se dobramos a cardinalidade garantimos uma 4-PA quase monocromática, isto é, para toda $\varphi: [2\mathcal{W}(3, 2)] \rightarrow [2]$ existem $a, \delta \in \mathbb{N}$ tais que

$$a, a + \delta, a + 2\delta, a + 3\delta \in [2\mathcal{W}(3, r)] \quad \text{e} \quad \varphi(a) = \varphi(a + \delta) = \varphi(a + 2\delta)$$

Vamos escolher W grande o suficiente para que uma partição tenha muitos intervalos de cardinalidade

$$W_0 = 2 \cdot \mathcal{W}(3, 2)$$

onde grande suficiente significa que, dada uma 2-coloração de $[W]$, podemos encontrar uma 4-PA de intervalos com os três primeiros da mesma cor.

Defina

$$W = W_0 \cdot 2 \cdot \mathcal{W}(3, 2^{W_0})$$

e considere uma partição de $[W]$ em $2\mathcal{W}(3, 2^{W_0})$ intervalos de cardinalidade W_0 , fixe uma 2-coloração φ de $[W]$ e assumamos, por hipótese, que não há 4-PA monocromática.

A 2-coloração φ de $[W]$ induz a 2^{W_0} -coloração $\bar{\varphi}$ nos intervalos da partição de modo que nos $\mathcal{W}(3, 2^{W_0})$ primeiros intervalos da partição há uma 3-PA monocromática de intervalos, pela definição de $\mathcal{W}(3, 2^{W_0})$.

Pela escolha de W há um quarto intervalo, pertencente à partição, que forma uma 4-PA com os três intervalos da 3-PA monocromática, isto é, existem $i, D \in \mathbb{N}$ tais que

$$I_i, I_{i+D}, I_{i+2D}, I_{i+3D} \subset [W] \quad \text{e} \quad \bar{\varphi}(I_i) = \bar{\varphi}(I_{i+D}) = \bar{\varphi}(I_{i+2D}) \neq \bar{\varphi}(I_{i+3D})$$

Vamos assumir, s.p.g., que $\varphi: [W] \rightarrow \{\text{vermelho}, \text{azul}\}$ e do exposto acima temos que existem naturais $a \in I_i$, δ tais que para $\Delta = W_0 D$ ocorre o seguinte (veja a figura 5.5)

- $\varphi(a) = \varphi(a + \delta) = \varphi(a + 2\delta) = \text{vermelho}$;
- $\varphi(a + \Delta) = \varphi(a + \Delta + \delta) = \varphi(a + \Delta + 2\delta) = \text{vermelho}$;
- $\varphi(a + 2\Delta) = \varphi(a + 2\Delta + \delta) = \varphi(a + 2\Delta + 2\delta) = \text{vermelho}$;
- $\varphi(a + 3\delta) = \varphi(a + \Delta + 3\delta) = \varphi(a + 2\Delta + 3\delta) = \text{azul}$;
- e $a + 3\Delta + 3\delta \in [W]$.

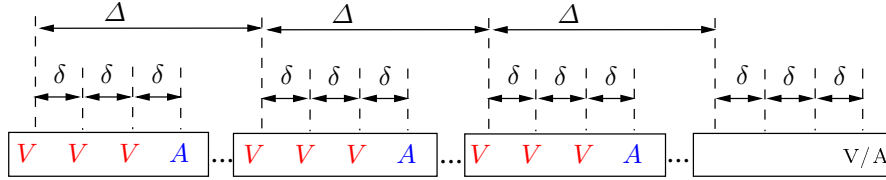


Figura 5.5. 4-PA de intervalos com três primeiros intervalos da mesma cor

Se $\varphi(a + 3\Delta + 3\delta) = \text{vermelho}$, então

$$a, a + \Delta + \delta, a + 2\Delta + 2\delta, a + 3\Delta + 3\delta$$

é uma 4-PA monocromática da cor **vermelho**, uma contradição; se $\varphi(a + 3\Delta + 3\delta) = \text{azul}$, então

$$a + 3\delta, a + \Delta + 3\delta, a + 2\Delta + 3\delta, a + 3\Delta + 3\delta$$

é uma 4-PA monocromática da cor **azul**, que também é uma contradição. Logo em qualquer 2-coloração de $[W]$ ocorre uma 4-PA monocromática.

Teorema 5.12. $\mathcal{W}(4, 2) \leq 2 \cdot \mathcal{W}(3, 2) \cdot 2 \cdot \mathcal{W}(3, 2^{2 \cdot \mathcal{W}(3, 2)})$. \square

Exercício 5.13. Para um natural k fixo assuma que $\mathcal{W}(k, r)$ está definido. Prove que $\mathcal{W}(k + 1, 2) \leq 2 \cdot \mathcal{W}(k, 2) \cdot 2 \cdot \mathcal{W}(k, 2^{2 \cdot \mathcal{W}(k, 2)})$.

Exercício 5.14. Sejam a, b, k, r naturais. Use o teorema de Van der Waerden para provar que toda r -coloração da seguinte $\mathcal{W}(k, r)$ -PA

$$\{a, a + b, a + 2b, \dots, a + (\mathcal{W}(k, r) - 1)b\}$$

admite uma k -PA monocromática.

Exercício 5.15. Seja $k \geq 2$. Prove que se $\mathcal{W}(k, 2)$ está definido então $\mathcal{W}(k, r)$ está definido para todo $r \geq 2$. (dica: tome $W = \mathcal{W}(\mathcal{W}(k, r - 1), 2)$ e use o exercício anterior)

5.2 Demonstração do teorema de Van der Waerden

Definição 5.16 (família c -policromática de k -PAS focada). *Dados uma r -coloração e $c \leq r$ cores, uma família de k -PA*

$$\begin{aligned} & a_1, a_1 + \delta_1, \dots, a_1 + (k-1)\delta_1 \\ & a_2, a_2 + \delta_2, \dots, a_2 + (k-1)\delta_2 \\ & \vdots \\ & a_c, a_c + \delta_c, \dots, a_c + (k-1)\delta_c \end{aligned}$$

*é dita c -policromática se cada k -PA, individualmente, é monocromática mas não há duas PAS da mesma cor. Uma família c -policromática de k -PA é **focada** em $f \in \mathbb{N}$ se*

$$f = a_\ell + k\delta_\ell \quad (\forall \ell \in [c]).$$

Exemplo 5.17. Abaixo exibimos uma família 3-policromática (azul, vermelho e verde) com três 3-PA numa 4-coloração (preto, azul, vermelho e verde) e focada em 16

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$$

Lema 5.18. *Sejam $r, k, c \in \mathbb{N}$, com $k \geq 3$ e $r \geq c$. Assuma que para todo c' , $\mathcal{W}(k-1, c')$ está definido. Então, dados k, r , para todo c , existe um $U(c) = U(r, k, c)$, tal que para toda coloração $\varphi : [U(c)] \rightarrow [r]$, vale uma, e só uma, das seguintes afirmações.*

- [Afirmação 1] *Existe uma k -PA monocromática.*
- [Afirmação 2] *Existe $f \in \mathbb{N}$ e uma família c -policromática de $(k-1)$ -PAS focada em f .*

Note que o lema acima diz, implicitamente, que a cor do foco f na afirmação 2 deve ser diferente das c cores que ocorrem na família c -policromática.

Demonstração. A prova será por indução em c . Vamos assumir que $U(c)$ é o menor número que satisfaz o lema e limitaremos $U(c)$ superiormente.

Para $c = 1$, temos $U(1) \leq W_0 = 2\mathcal{W}(k-1, r)$. De fato, seja $\varphi : [W_0] \rightarrow [r]$ uma coloração qualquer. Em $[\mathcal{W}(k-1, r)] \subset [W_0]$ temos uma $(k-1)$ -PA monocromática com termo inicial a e razão δ e, pela escolha de W_0 , $f = a + k\delta \in [W_0]$. Se $\varphi(f) = \varphi(a)$ então vale a afirmação 1, senão vale a afirmação 2. Para $c = 1$ o lema vale.

Agora, para o passo indutivo, suponha que $U(c)$ está definido. Provaremos $U(c+1) \leq W_0$ para $W_0 = 2U(c)\mathcal{W}(k-1, r^{U(c)})$.

Seja $\varphi : [W_0] \rightarrow [r]$ uma coloração arbitrária.

Em $[W_0/2] = [U(c)\mathcal{W}(k-1, r^{U(c)})]$ tomamos uma partição em $t = \mathcal{W}(k-1, r^{U(c)})$ intervalos de cardinalidade $U(c)$, denotados I_1, \dots, I_t . Considere a $r^{U(c)}$ -coloração induzida nas partes $\overline{\varphi} : \{I_1, \dots, I_t\} \rightarrow [r]^{U(c)}$.

Por definição de $t = \mathcal{W}(k-1, r^{U(c)})$, temos uma $(k-1)$ -PA monocromática de intervalos da partição, isto é, existem $i, D \in \mathbb{N}$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} I_i, I_{i+D}, \dots, I_{i+(k-2)D} &\subset [W_0/2] \\ \overline{\varphi}(I_i) &= \overline{\varphi}(I_{i+D}) = \dots = \overline{\varphi}(I_{i+(k-2)D}) \end{aligned}$$

O intervalo I_i está colorido com uma das $r^{U(c)}$ cores por $\overline{\varphi}$ e tem cardinalidade $U(c)$ que, por hipótese de indução, satisfaz a afirmação 1 ou a afirmação 2 do lema 5.18. Se vale a afirmação 1 temos uma k -PA monocromática em I_i , portanto em $[W_0]$, e a afirmação 1 do lema vale para $c+1$.

Se vale a afirmação 2 então temos, em I_i , uma família c -policromática de $(k-1)$ -PA focadas, isto é, para todo $j \in [c]$ existem $a_j \in \mathbb{N}$, $\delta_j \in \mathbb{N}$ e cor C_j e

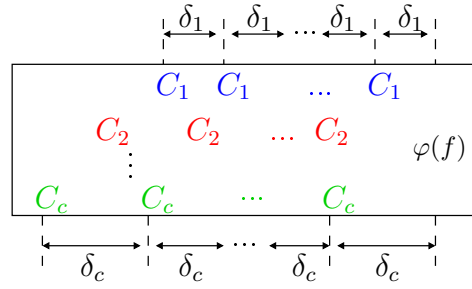


Figura 5.6. família policromática em I_i

existe f tais que

- para todo $j \in [c]$

$$(5.6) \quad a_j, a_j + \delta_j, \dots, a_j + (k-2)\delta_j$$

é uma $(k-1)$ -PA monocromática da cor C_j em I_i ;

- $C_i \neq C_j$ quando $i \neq j$;
- $f = a_j + (k-1)\delta_j$, para todo j , e, por hipótese, $\varphi(f) \neq C_i$ para todo $i \in [c]$.

A distância entre dois intervalos consecutivos de (5.5) é D e cada um desses intervalos tem $U(c)$ elementos, portanto, a distância Δ entre dois elementos correspondentes (equação (5.2)) de intervalos consecutivos é $\Delta = D \cdot U(c)$. A partir daí podemos escrever todas as PAS c -policromáticas dentro de cada intervalo de (5.5) em função de (5.6) e Δ como: para todo $\ell \in \{0, 1, \dots, k-2\}$, em $I_{i+\ell D}$ ocorrem

$$a_j + \ell\Delta, a_j + \delta_j + \ell\Delta, \dots, a_j + (k-2)\delta_j + \ell\Delta \quad (\forall j \in [c])$$

ademais essas PA são focadas em $f + \ell\Delta \in I_{i+\ell D}$.

As progressões que nos interessam agora são as seguintes progressões aritméticas monocromáticas transversais a $I_i, I_{i+D}, \dots, I_{i+(k-2)D}$ (veja a fig. 5.7)

- $a_1, a_1 + (\delta_1 + \Delta), \dots, a_1 + (k-2)(\delta_1 + \Delta)$ de cor C_1 ;
- $a_2, a_2 + (\delta_2 + \Delta), \dots, a_2 + (k-2)(\delta_2 + \Delta)$ de cor C_2 ;
- \vdots
- $a_c, a_c + (\delta_c + \Delta), \dots, a_c + (k-2)(\delta_c + \Delta)$ de cor C_c ;
- $f, f + \Delta, \dots, f + (k-2)\Delta$ monocromática de cor diferente das acima.

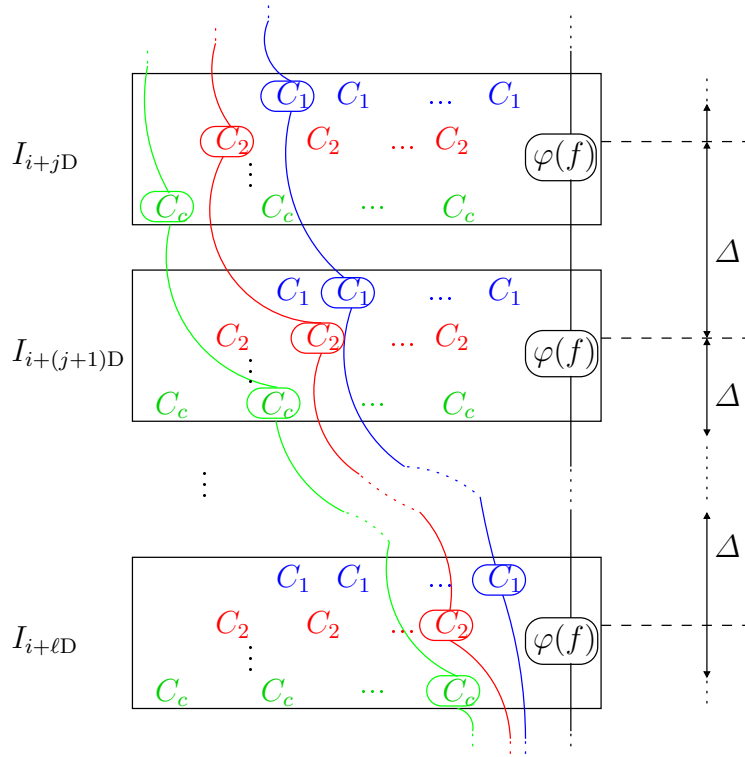


Figura 5.7. quatro $(k-1)$ -PA monocromáticas transversais a $I_i, I_{i+D}, \dots, I_{i+(k-2)D}$

Resta provar que tais progressões $(c+1)$ -policromáticas são focada. Precisamos determinar $F \in [W_0]$ que satisfaça

$$F = a_j + (k-1)(\delta_j + \Delta) = f + (k-1)\Delta$$

para todo $j \in [c]$.

De $f = a_j + (k-1)\delta_j$, para todo $j \in [c]$ temos que vale $f + (k-1)\Delta = a_j + (k-1)(\delta_j + \Delta)$ para todo $j \in [c]$, portanto, precisamos verificar que $f + (k-1)\Delta \in [W_0]$

$$\begin{aligned} f + (k-1)\Delta &= f + (k-2)\Delta + \Delta \\ &\leq W_0/2 + \Delta \\ &\leq W_0/2 + W_0/2 = W_0 \end{aligned}$$

portanto F dado por $f + (k-1)\Delta$ é foco. Com isso provamos que se $U(c)$ está definido então $U(c+1)$ está definido. Pelo princípio da indução finita, o lema vale para todo $c \leq r$. \square

Demonstração

“After lunch we went into Artin’s office in the Mathematics Department of the University of Hamburg, and tried to find a proof. We drew some diagrams on the blackboard. We had what the Germans call “Einfälle”: sudden ideas that flash into one’s mind. Several times such new ideas gave the discussion a new turn, and one of the ideas finally led to the solution.” Van der Waerden

A prova é por indução em k . Caso $k = 1$, conforme já vimos, temos que $\mathcal{W}(1, r) = 1$ e além disso sabemos que $\mathcal{W}(2, r) = r + 1$, para qualquer r . Assuma $k \geq 3$ e suponha que para todo c , $\mathcal{W}(k-1, c)$ está definido. Vamos mostrar que $\mathcal{W}(k, r)$ está definido.

Pelo lema 5.18, existe um $U(r)$ tal que para qualquer que seja a coloração $\varphi : [U(r)] \rightarrow [r]$, têm-se uma k -PA monocromática ou uma família r -policromática de $(k-1)$ -PA focada em f cuja cor difere de todas as r cores. Como há r cores isso não ocorre, portanto, vale o caso 1 do lema. Logo $\mathcal{W}(k, r) \leq U(r)$. \square

Exercício 5.19. Dados $k, r \in \mathbb{N}$, existe $W \in \mathbb{N}$, tal que toda r -coloração de qualquer W -PA contém propriamente uma k -PA monocromática.

Exercício 5.20. Prove usando o teorema de Van der Waerden que em toda r -coloração de \mathbb{N} há um cor que contém propriamente uma PA arbitrariamente longa. Deduza o teorema de Van der Waerden dessa afirmação.

Exercício 5.21. Use o teorema de Van der Waerden para provar que, dados k, r , se n suficientemente grande então toda r -coloração de $[n]$ contém pelo menos cn^2 k -PA monocromáticas, para alguma constante $c = c(r, k)$.

Exercício 5.22 (Kakeya–Morimoto, 1930). Se $A = (a_1, a_2, \dots)$ é uma sequência crescente de inteiros com $a_{k+1} - a_k$ limitado para todo k , então A contém progressões aritméticas arbitrariamente longas.

5.3 Demonstração via sistemas dinâmicos*

Chamamos de **sistema dinâmico** um conjunto X munido de uma transformação $T : X \rightarrow X$ e denotamos-o (X, T) . Para nós, X é um espaço métrico compacto e T contínua.

Dado um sistema dinâmico, o objetivo é, geralmente, entender as órbitas

$$x, T(x), T(T(x)), T(T(T(x))), \dots$$

Para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$T^n(x) = \begin{cases} x, & \text{se } n = 0 \\ T(T^{n-1}(x)), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A **órbita** de x é o conjunto $\mathcal{O}(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(x) = x$ então x é um **ponto periódico**. Um ponto $x \in X$ é dito **ponto recorrente** por T se existir uma sequência $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de números naturais tais que $T^{n_i}(x) \rightarrow x$ quando $n_i \rightarrow \infty$, ou seja, a órbita de x contém uma subsequência que converge para x .

O conjunto X munido de uma σ -álgebra \mathcal{A} (de Borel, para nós) e uma medida de probabilidade μ chama-se **espaço de probabilidade**. Num espaço de probabilidade (X, \mathcal{A}, μ) a transformação $T : X \rightarrow X$ **preserva medida** se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Teoremas de recorrência

A ideia de recorrência é central em sistemas dinâmicos. Ingenuamente, tais resultados estabelecem que sob algumas hipóteses as órbitas “passam” arbitrariamente próximas do ponto de partida. O primeiro resultado nesse sentido foi enunciado por Poincaré em 1890: *se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação que preserva medida definida num espaço de probabilidade (X, \mathcal{A}, μ) e se A é um conjunto mensurável, então para quase-todo-ponto² $x \in A$ existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \in A$.*

Outro resultado dentre os pioneiros, mais fraco que o de Poincaré, foi dado por Birkhoff em 1927: *se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação contínua definida em num espaço topológico compacto, então X tem um ponto recorrente.*

Em 1978, Furstenberg e Weiss apresentaram uma nova demonstração do teorema de Van der Waerden usando tais ferramentas da dinâmica topológica. Abaixo enunciamos um teorema de recorrência demonstrado por Furstenberg que será usado na prova do teorema de Van der Waerden.

*Essa seção depende de conhecimento de alguns conceitos e resultados simples de topologia e teoria da medida.

² Significa para todo ponto a menos de um subconjunto de medida 0.

Teorema de recorrências múltiplas

Dizemos que as transformações T_1, T_2, \dots, T_m em X **comutam entre si** se $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$ para todos $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

A seguinte versão do teorema de Birkhoff foi dada por Furstenberg.

Teorema de recorrência múltipla. *Sejam X um espaço métrico compacto e T_1, T_2, \dots, T_k transformações contínuas em X que comutam entre si. Então, para algum $x \in X$ existe uma sequência de números naturais $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $n_i \rightarrow \infty$, quando $i \rightarrow \infty$, e nesse caso $T_j^{n_i}(x) \rightarrow x$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$.*

O teorema de recorrência múltipla é usado na demonstração do teorema de Van der Waerden na seguinte forma.

Proposição 5.23. *Sejam (X, d) um espaço métrico compacto munido de uma transformação contínua $T : X \rightarrow X$ e $x_0 \in X$. Então, para todo natural k e todo $\varepsilon > 0$ existem um natural n e $y \in \mathcal{O}(x_0)$ tais que os pontos $y, T^n(y), T^{2n}(y), T^{3n}(y), \dots, T^{kn}(y)$ distam menos de ε uns dos outros.*

Ideia da demonstração. Seja Y o fecho da órbita de x_0 e sejam $T_1 = T, T_2 = T^2, \dots, T_k = T^k$. Então temos um espaço métrico e compacto e uma família de transformações nesse espaço que comutam entre si. Pelo teorema da recorrência múltipla existe um ponto $x \in Y$ e existe uma sequência de números naturais $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $n_i \rightarrow \infty$, quando $i \rightarrow \infty$, e $T_1^{n_i}(x) \rightarrow x, T_2^{n_i}(x) \rightarrow x, \dots, T_k^{n_i}(x) \rightarrow x$, donde concluímos que há um n e uma bola aberta B centrada em x de raio pequeno em função de ε que contém os pontos $x, T_1^n(x), \dots, T_k^n(x)$. Como a bola é aberta, cada ponto $T_i^n(x)$ tem uma vizinhança³ $B_i \subset B$. Porém as T_i^n 's são contínuas, logo existem vizinhanças B'_i de x tais que se $z \in B'_i$ então $T_i^n(z) \in B_i \subset B$.

Seja V a vizinhança de x tal que $V \subset B'_i$ para todo i e temos que se $z \in V$ então $T_i^n(z) \in B$.

Como $x \in Y$, existe $y = T^m(x_0) \in \mathcal{O}(x_0)$ tal que $y \in V \subset B$. Então, $T_i^n(y) \in B$ ($\forall i$) o que implica que $T_i^n(y)$ e $T_j^n(y)$ distam $< \varepsilon$. \square

Exercício 5.24. Determine o raio e o centro das bolas/vizinhanças na ideia acima de modo que a proposição fique demonstrada.

5.3.1 Demonstração do teorema de Van der Waerden

Seja $r \in \mathbb{N}$. Toda sequência $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $[r]^\mathbb{N}$ determina uma r -coloração φ de \mathbb{N} , e vice-versa

$$\varphi(n) = i \text{ se, e só se, } x_n = i.$$

Tome $X = [r]^\mathbb{N}$. Como no argumento de compacidade, consideramos $[r]$ com a topologia discreta, de modo que X é compacto. Ademais, adotamos a métrica

³ Uso vizinhança como sinônimo de bola aberta.

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \text{ senão} \\ \frac{1}{2^{k-1}}, & k = \min\{i : x_i \neq y_i\}. \end{cases}$$

Note que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 1$ se, e só se, as sequências \mathbf{x} e \mathbf{y} começam com o mesmo número.

Ainda, tomamos $T : X \rightarrow X$ dada por

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{z} \text{ onde } z_i = x_{i+1} \ (\forall i \in \mathbb{N}).$$

Vamos provar que tal transformação é contínua. Dado $\varepsilon > 0$ seja N um natural tal que $\varepsilon > 1/2^N$ e tome $\delta \in (0, 1/2^N)$.

Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ tais que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, então $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 1/2^N$, então $x_i = y_i$ para todo $i \in [N+1]$, logo, para $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$ e $\mathbf{w} = T(\mathbf{y})$ tem-se $z_i = w_i$ para todo $i \in [N]$, ou seja, $d(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq 1/2^N < \varepsilon$.

Dessa forma T é contínua no espaço métrico e compacto X .

Agora seja φ uma r -coloração de \mathbb{N} ou, equivalentemente, seja $\mathbf{x}_0 \in X$. Pela proposição 5.23, para todo natural $k-1$ e todo $0 < \varepsilon < 1$ existem um natural n e $\mathbf{y} \in \mathcal{O}(\mathbf{x}_0)$ tais que os pontos $\mathbf{y}, T^n(\mathbf{y}), T^{2n}(\mathbf{y}), \dots, T^{(k-1)n}(\mathbf{y})$ distam menos de ε uns dos outros, isto é, são sequências de naturais que coincidem no primeiro elemento.

Em outras palavras, os primeiros elementos dessas sequências são naturais que recebem a mesma cor. Ademais, a primeiro elemento da sequência $T^{2n}(\mathbf{y})$ é o n -ésimo de $T^n(\mathbf{y})$ e o $2n$ -ésimo de \mathbf{y} , portanto, os k primeiros elementos de $\mathbf{y}, T^n(\mathbf{y}), T^{2n}(\mathbf{y}), \dots, T^{(k-1)n}(\mathbf{y})$ nos dão uma k -PA monocromática. \square

Essa técnica de prova dinâmica do teorema de Van der Waerden pode ser adaptada para provar muitos resultados similares sobre a existência de padrões monocromáticos, alguns desses resultados não têm outro método de prova.

5.4 O lema do cubo de Hilbert

Como dissemos no primeiro capítulo, o lema do cubo de Hilbert é, até onde se sabe, o primeiro registro de um teorema do tipo Ramsey. Esse resultado pode ser provado usando o teorema de Van der Waerden.

Dados $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{N}$, não necessariamente distintos, o m -cubo gerado por esses números é o conjunto

$$\mathcal{C}(x_0, x_1, \dots, x_m) = \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i : \varepsilon_i \in \{0, 1\} \text{ para todo } i \right\}.$$

Teorema 5.25 (Lema do cubo de Hilbert, 1892). *Dados $m, r \in \mathbb{N}$, existe $H(m, r)$ tal que, para todo $n \geq H(m, r)$, em toda r -coloração de $[n]$ ocorre um m -cubo de Hilbert monocromático.*

Demonstração. Dados r e m , tome $H(m, r) = \mathcal{W}(m+1, r)$ e $n \geq H(m, r)$. Em qualquer r -coloração de $[n]$ ocorre uma $(m+1)$ -PA $x_0, x_0 + d, \dots, x_0 + md$ monocromática. Resta notar que uma $(m+1)$ -PA é um m -cubo de Hilbert, gerado por x_0 e $x_1 = x_2 = \dots = x_m = x_0 + d$. \square

Uma prova direta por indução e usando uma ideia explorada na prova combinatória do teorema de Van der Waerden não é difícil

Ideia de uma prova por indução em m . Assuma que $H = H(m-1, r)$ existe. Considere uma r -coloração qualquer de $[r^H + H]$ e os intervalos de inteiros $I_i = [i, i + H - 1]$ para cada $i \in [r^H + 1]$.

Há r^H modos distintos de colorir cada intervalo I_i com r cores, portanto, pelo PG, há dois intervalos com a mesma coloração, digamos que I_i e I_j , s.p.g. $j > i$.

Pela definição de H há um $(m-1)$ -cubo de Hilbert em I_i com geradores x_0, \dots, x_{m-1} , digamos. A translação por $j - i$ desse cubo é um $(m-1)$ -cubo monocromático, da mesma cor, em I_j .

Tomando $x_m = j - i$ temos que x_0, \dots, x_{m-1}, x_m são geradores de um m -cubo monocromático. \square

Notas

O teorema de Van der Waerden foi conjecturado por Issai Schur ao tentar provar suas conjecturas sobre resíduos quadráticos. Independentemente, o matemático holandês de 20 e poucos anos, Pierre Joseph Henry Baudet formulou a mesma conjectura e foi dele que Van der Waerden ouviu o problema. Bartel Leendert van der Waerden, aos 23 anos, publicou a prova da conjectura

van der Waerden, BL (1927) Beweis einer Baudetschen Vermutung. Nieuw Arch. Wisk. 15, 212-216, 1927.

em uma obscura revista holandesa e Van der Waerden não contribuiu com mais nada para a teoria de Ramsey.

O resultado do exercício 5.21 é de

Varnavides, P (1959) On certain sets of positive density, J. London Math. Soc. 39, 358-360.

e do exercício 5.22 é de

Takeya S, Morimoto S (1930) On a theorem of M. Baudet[sic] and van der Waerden, Japan. J. Math. 7, 163-165.

A interação entre a teoria ergódica e a teoria de números e a combinatória teve seu início com a demonstração de Furstenberg em 1977 do Teorema de Szemerédi,

Furstenberg H (1977) Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions, J. D'Analyse Math., 31: 204-256.

essa demonstração ergódica do teorema de Szemerédi pode ser lida também em

Furstenberg H, Katznelson Y, Ornstein D (1982) The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 7, 527–552

disponível em

<https://www.ams.org/journals/bull/1982-07-03/S0273-0979-1982-15052-2/>.

Uma introdução a tal interação, onde também se encontra uma demonstração para o teorema da recorrência múltipla é

Furstenberg H (1981) Poincaré recurrence and number theory, Bull. Amer. Math. Soc. 5, 211–234

disponível em

<http://www.ams.org/journals/bull/1981-05-03/S0273-0979-1981-14932-6/>.

A demonstração “dinâmica” do teorema de Van der Waerden é de Furstenberg e Weiss de 1978

Furstenberg H, Weiss B (1978) Topological dynamics and combinatorial number theory, Journal d'Analyse Mathématique, v. 34, p. 61–85.

Um texto para dois resultados modernos nessa linha é

Arbieto A, Matheus C, Moreira CG (2009) The remarkable effectiveness of ergodic theory in number theory, Ensaios Matemáticos, vol. 17, Sociedade Brasileira de Matemática.

também disponível *online*.

O lema do cubo de Hilbert foi publicado em

Hilbert D (1892) Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten, Journal für die reine und angewandte Mathematik 110, 104–129.

Densidade \times Partição



Figura 6.1. Klaus Friedrich Roth (1925 – 2015) e Endre Szemerédi em 1940

Exercício 6.1. Qual é a cardinalidade máxima de um conjunto $A \subset [n]$ livre de soma?

Solução. Sejam $a = \max A$ e $B = \{a - x : x \in A \text{ e } x \neq a\}$, logo $|B| = |A| - 1$. Se $y \in A \cap B$, então $y \in A$ e $y = a - x$ para algum $x \in A$, logo $x + y = a$. Segue desse argumento que se A é livre de soma então A e B são disjuntos: se $y \in A \cap B$ então $y \in A$ e $y = a - x$ para algum $x \in A$, portanto, $x + y = a$ com $x, y, a \in A$. Disso $|A| + |B| \leq n$, logo $|A| \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. \square

O conjunto dos números ímpares em $[n]$ atingem essa cardinalidade, assim como $\{ \lceil (n+1)/2 \rceil, \dots, n \}$. A versão desse exercício para progressões aritméticas é consideravelmente mais difícil.

Exercício 6.2. Qual é a cardinalidade máxima de um conjunto $A \subset [n]$ livre de 3-PA?

Uma solução foi dada por Klaus Roth em 1953 que provou o seguinte resultado usando métodos da teoria analítica de números.

Teorema 6.3 (Teorema de Roth). *Para todo real $0 < \delta < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale se $A \subseteq [n]$ com $|A| \geq \delta n$ então A contém uma 3-PA.*

Esse resultado responde parcialmente uma conjectura proposta por volta de 1936 pelos matemáticos húngaros Paul Erdős e Paul Turán. Eles formularam um resultado mais forte que o Teorema de Van der Waerden: *para todo $\delta > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $A \subseteq [n]$ com $|A| \geq \delta n$ contém uma k -PA.* Erdős e Turán investigaram a grandeza do maior subconjunto de $[n]$ que não contém uma k -PA, a qual denotamos por $r_k(n)$, esperando melhorar a cota superior para o número de Van der Waerden $\mathcal{W}(k, c)$. De fato, $r_k(n) < n/2$ implicaria que $\mathcal{W}(k, 2) < n$. Mais ainda, se $r_k(n) < \pi(n)$, onde $\pi(n) = (1 + o(1))n/\log n$ é a quantidade de números primos menores ou iguais a n , então teríamos uma progressão aritmética de primos arbitrariamente longa, resolvendo assim o que na época era um velho problema da teoria dos números. Nessa investigação eles notaram que deve ser possível descobrir progressões aritméticas de k termos em qualquer subconjunto de inteiros suficientemente denso.

Em 1969, Endre Szemerédi provou a conjectura para $k = 4$ e, finalmente, em 1975 ele provou a conjectura para todo k .

Teorema de Szemerédi. *Para todo inteiro $k > 2$ e todo real $0 < \delta < 1$ existe um inteiro $n_0 = n_0(\delta, k) > 0$ tal que, para todo inteiro $n \geq n_0$, se $A \subseteq [n]$ e $|A| > \delta n$, então A deve conter uma progressão aritmética de k termos.*

A extraordinária demonstração de Szemerédi é combinatória, uma obra-prima da argumentação combinatória segundo Erdős, e usa o teorema de Van der Waerden. Essa linha de ataque ao problema não contribuiu efetivamente para determinação de uma boa cota para o número $\mathcal{W}(k, c)$.

Em 1977 Furstenberg deu uma demonstração usando técnicas da teoria ergódica. Em 2001 Timothy Gowers deu uma nova demonstração usando métodos da análise de Fourier.

O problema das progressões aritméticas longas de primos foi resolvido em 2004 por Ben Green e Terence Tao. Eles provaram, usando dentre outras ferramentas sofisticadas o teorema de Szemerédi, que a sequência dos números primos contém k -PA's para todo $k \in \mathbb{N}$. Tal teorema ainda segue de um problema sobre progressões aritméticas longas que era considerado por Erdős como um de seus favoritos.

Conjectura 6.4 (Conjectura de Erdős sobre progressões aritméticas). Se $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \infty$ então A contém progressões aritméticas arbitrariamente longas.

Exercício 6.5. Prove que $r_k(m + n) \leq r_k(m) + r_k(n)$.

Observação 6.6. Do exercício acima existe o limite de $r_k(n)/n$ quando n cresce arbitrariamente. Fixe um natural $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente e temos que para todo

$m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande podemos escrever $m = qn + \ell$ com $0 \leq \ell < n$, portanto,

$$\frac{r_k(m)}{m} = \frac{r_k(qn + \ell)}{m} \leq \frac{1}{m} (r_k(qn) + r_k(\ell)) \leq \frac{1}{m} (qr_k(n) + r_k(\ell)).$$

Assim, para $M = \max\{r_k(0), r_k(1), \dots, r_k(n-1)\}$

$$\frac{r_k(m)}{m} \leq \frac{qn}{m} \frac{r_k(n)}{n} + \frac{M}{m}$$

e como $\lim_{m \rightarrow \infty} qn/m = 1$ (verifique) temos

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{r_k(m)}{m} \leq \frac{r_k(n)}{n}.$$

Como a escolha de n foi arbitrária vale que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{r_k(m)}{m} \leq \inf_{n \geq 1} \frac{r_k(n)}{n}.$$

Como $\inf_{n \geq 1} r_k(n)/n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} r_k(n)/n$, concluímos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{r_k(n)}{n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{r_k(n)}{n}$$

logo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{r_k(n)}{n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{r_k(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_k(n)}{n}.$$

6.1 Teoremas de densidade

Exercício 6.7. Vimos no exercício 3.1 que $6 \rightarrow (3, 3)$, i.e., em qualquer 2-coloração do grafo completo com 6 vértices, denotado K^6 , ocorre um subgrafo completo K^3 com todas as arestas da mesma cor (veja a figura 3.2).

Qual é o maior número de arestas do K^6 que podemos pintar com a mesma cor sem que elas formem um K^3 monocromático?

Nesse caso é fácil constatar que se particionamos os vértices em duas partes de três vértices cada e escolhemos só as arestas que ligam vértices em classes distintas, então não temos triângulos, ou seja, é possível escolher 9 arestas do K^6 sem que elas definam um triângulo. Um pouco mais difícil é provar que com quaisquer 10 arestas do K^6 sempre ocorre um triângulo. Esse é um caso particular de um teorema publicado em 1907 por W. Mantel: *um grafo com n vértices e sem triângulos tem no máximo $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$ arestas*. Uma prova é por indução em n : considere um grafo sobre n vértices e sem triângulos, tome dois vértices adjacentes u, v . Como não há triângulos em u ou v incidem no máximo $n-1$ arestas, portanto, por hipótese de indução, no grafo obtido

de G com u e v removidos (assim como as arestas que incidem neles) há no máximo $(\lfloor n/2 \rfloor - 1)(\lceil n/2 \rceil - 1)$ arestas donde segue o teorema de Mantel.

O teorema de Mantel é um caso particular do teorema extremal de Turán. Em 1941, Turán provou que um grafo extremal com relação a conter K^t (i.e., com maior número de arestas dentre os grafos com n vértices e livre de K^t) é um grafo $(t-1)$ -partido e completo onde o tamanho das partes diferem de no máximo um vértice. Esse grafo é denotado por $T^{t-1}(n)$. Mais que isso, esse grafo é único com essa propriedade.

Exercício 6.8. Prove que se $n = (t-1)q + r$, com $0 \leq r < t-1$, então

$$|E(T^{t-1}(n))| = \frac{1}{2} \left(\frac{t-2}{t-1} \right) (n^2 - t^2) + \binom{r}{2}.$$

Teorema de Turán. Para todos $n, t > 1$ vale que se G é um grafo com n vértices e livre de K^t então G tem no máximo $|E(T^{t-1}(n))|$ arestas. Além disso, G tem $|E(T^{t-1}(n))|$ arestas se, e só se, $G = T^{t-1}(n)$. Em particular

$$|E(G)| \leq \left(1 - \frac{1}{t-1} \right) \binom{n}{2}.$$

Definição 6.9 (número de Turán). Seja $H = (V, E)$ um hipergrafo. O **número de Turán** $T(H)$ é o menor inteiro tal que para todo $U \subseteq V$, se $|U| \geq T(H)$ então existe $e \in E$ com $e \subset U$.

Exemplo 6.10. Dados $n, t > 1$ considere H o hipergrafo dado por $V(H) = \binom{[n]}{2}$ e por

$$\begin{aligned} E(H) &= \left\{ \{e_1, e_2, \dots, e_{\binom{t}{2}}\} \subset V(H) : \bigcup_i e_i \in \binom{[n]}{k} \right\} \\ &= \left\{ \binom{C}{2} \subset V(H) : C \in \binom{[n]}{k} \right\} \end{aligned}$$

alternativamente. Então $T(H)$ é o menor número de arestas sobre n vértices que garante um grafo completo em t vértices, ou seja, $T(H) = |E(T^{t-1}(n))| + 1$ pelo teorema de Turán.

Exemplo 6.11. Dados um real $\delta > 0$ e um natural n suficientemente grande em função de δ , considere H o hipergrafo dado por $V(H) = [n]$ e por

$$E(H) = \{ \{x, y, z\} \subset V(H) : x + y = 2z \}$$

Então $T(H)$ é o menor número de pontos de n que garante uma 3-PA, ou seja, $T(H) = \lceil \delta n \rceil$ pelo teorema de Roth.

Exercício 6.12. Defina o hipergrafo H que corresponde ao teorema de Szemerédi.

Na seção 3.2.1 modelamos teoremas do tipo Ramsey (TR) usando um hipergrafo ((H): $V(H)$ é o conjunto que será particionado e $E(H)$ as configurações que são afirmadas ocorrer em pelo menos uma das partes da partição) que têm número cromático maior que um dado r , em símbolos $\chi(H) > r$, o que significa que em qualquer partição em r (ou menos) partes de $V(H)$ contém uma aresta.

Agora, descrevemos os *teoremas de densidade*; definimos

$$\delta(H) = \frac{T(H)}{|V(H)|}.$$

Disso, para $\delta = \delta(H)$, qualquer $U \subseteq V(H)$ com $|U| > \delta|V(H)|$ vértices deve conter uma aresta, isto é, qualquer subconjunto suficientemente denso de vértices deve conter uma aresta. Se $\delta(H) \leq 1/r$ então *qualquer subconjunto de vértices suficientemente grande, com uma fração $\frac{1}{r}$ dos vértices, contém uma aresta de H* . Os teoremas de Roth, Szemerédi e Turán são teoremas de densidade.

Exercício 6.13. Prove que se $\delta(H) \leq r^{-1}$ então $\chi(H) > r$.

Exercício 6.14. Para uma sequência H_n de hipergrafos, quando $n \rightarrow \infty$, se $\delta(H_n) \rightarrow 0$ então $\chi(H_n) \rightarrow \infty$.

Exercício 6.15. Deduza o teorema de Van der Waerden do teorema de Szemerédi (*dica*: use o exercício anterior).

Um teorema de densidade implica sua versão de partição, mas a recíproca não vale. Dado $t \in \mathbb{N}$ seja H_n o hipergrafo do exemplo 6.10. Do teorema de Ramsey $n \rightarrow (t, \dots, t)_r^2$ para todo n suficientemente grande, ou seja, $\chi(H_n) > r$. Por outro lado, $\delta(H_n) \leq \frac{t-2}{t-1}$.

6.2 Provas do teorema de Roth

A prova original do teorema de Roth usa uma técnica da teoria analítica dos números conhecida como *método de círculo de Hardy–Littlewood*. Em seguida, cerca de 15 anos depois, Szemerédi deu duas provas, uma puramente combinatória e outra usando grafos. Um prova via teoria ergódica foi dada por Furstenberg, Katznelson e Ornstein e uma via análise de Fourier foi dada por Gowers.

A prova de Roth garante que $r_3(n) \ll n(\log \log n)^{-1}$ e o melhor que se sabe até o momento é que $r_3(n) \ll n(\log \log n)^4(\log n)^{-1}$, provado em 2016, e que $r_3(n) \gg n2^{-c\sqrt{\log n}}$, de 1946.

6.2.1 Demonstração combinatória

Uma prova combinatória foi dada por Szemerédi em 1969, que usou um teorema de densidade para cubos de Hilbert.

Teorema 6.16 (Szemerédi, 1969). *Todo $A \subset [n]$ com $|A| \geq 4n^{1-1/2^m}$ contém um m -cubo de Hilbert.*

Na demonstração do teorema usaremos o seguinte procedimento. Para todo $A \subset [n]$ com pelo menos 2 elementos faça

$$A_i = \{ t \in A : t + i \in A \}$$

e como todo par de elementos de A ocorre e um, e só um, A_i vale

$$\sum_{i=1}^n |A_i| = \binom{|A|}{2}$$

logo existe i tal que

$$|A_i| \geq \frac{\binom{|A|}{2}}{n} \geq \frac{|A|^2}{4n}.$$

Agora, usando a hipótese sobre a cardinalidade de A dada no enunciado do teorema

$$|A_i| \geq \frac{(4n^{1-1/2^m})^2}{4n} \geq \frac{((4n)^{1-1/2^m})^2}{4n} \geq (4n)^{1-1/2^{m-1}}.$$

Demonstração do teorema 6.16. Dado A como enunciado, seja i_1 o natural que a construção acima afirma existir, $|A_{i_1}| \geq (4n)^{1-1/2^{m-1}}$.

Repetindo o procedimento acima a partir de A_{i_1} , obtemos i_2 tal que $|A_{i_2}| \geq (4n)^{1-1/2^{m-2}}$ e, em seguida, obtemos i_3 tal que $|A_{i_3}| \geq (4n)^{1-1/2^{m-3}}$, e assim por diante, até i_m tal que

$$|A_{i_m}| \geq (4n)^{1-1/2^{m-m}} = 1.$$

Escolha $i_0 \in A_{i_m}$ arbitrariamente. Por definição $i_0, i_0 + i_m \in A_{i_{m-1}}$. De $i_0 \in A_{i_{m-1}}$ temos $i_0, i_0 + i_{m-1} \in A_{i_{m-2}}$. De $i_0 + i_m \in A_{i_{m-1}}$ temos $i_0 + i_m, i_0 + i_m + i_{m-1} \in A_{i_{m-2}}$, ou seja, $i_0, i_0 + i_m, i_0 + i_{m-1}, i_0 + i_m + i_{m-1} \in A_{i_{m-2}}$, e assim por diante, até que

$$i_0 + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j i_j \in A$$

portanto, i_0, i_1, \dots, i_m são geradores de um m -cubo Hilbert em A . \square

Corolário 6.17. *Se $n \geq (4/\delta)^{2^m}$ então todo $A \subset [n]$ com $|A| \geq \delta n$ contém um m -cubo de Hilbert.*

Demonstração. Basta notar que de $n \geq (4/\delta)^{2^m}$ temos $\delta \geq 4n^{-1/2^m}$. \square

Corolário 6.18. *Se $n \geq 2^{(\log_2 4/\delta)^2}$ então todo $A \subset [n]$ com $|A| \geq \delta n$ contém um m -cubo de Hilbert para $m \geq \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n$.*

Demonstração. Dado n que satisfaz a condição na hipótese do enunciado, considere o maior $k \in \mathbb{N}$ tal que $(4/\delta)^{2^k} \leq n$, i.e., $k = \lfloor \log_2 \log_2 n - \log_2 \log_2(4/\delta) \rfloor$.

Basta notar que de $n \geq 2^{(\log_2 4/\delta)^2}$ temos $\frac{1}{2} \log_2 \log_2 n \geq \log_2 \log_2(4/\delta)$, logo $k \geq \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n$. \square

Incremento de densidade

Uma ideia chave na demonstração é chamada de *incremento de densidade*: Se em num conjunto denso A não ocorre uma 3-PA, então há uma progressão aritmética longa $P \subset [n]$ tal que a densidade de A em P é maior que a densidade de A por um fator constante. Se n é grande essa estratégia pode ser iterada até que a densidade seja maior que 1, o que é um absurdo.

Sejam $A, B \subseteq [n]$. A *densidade de A em B* é

$$\delta(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

logo $\delta(A) = \delta(A|[n]) = |A|/n$. Ainda, se $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$, uma união disjunta, então (verifique)

$$(6.1) \quad \delta(A|B) = \delta(A|B_1) \frac{|B_1|}{|B|} + \delta(A|B_2) \frac{|B_2|}{|B|} + \dots + \delta(A|B_k) \frac{|B_k|}{|B|}.$$

Exercício 6.19. Verifique que, com as definições acima, $\max_i \delta(A|B_i) \geq \delta(A|B)$.

Note que se $A \subset B$, $\delta(A) \geq \delta$ e $\delta(B) \leq (1 - \delta/8)$ então

$$(6.2) \quad \delta(A|B) \geq \delta + \frac{\delta^2}{8}$$

pois $\delta(A|B) = |A|/|B| \geq \delta/(1 - \delta/8) \geq \delta + \delta^2/8$.

Na implementação dessa ideia de incremento de densidade os B_i 's são progressões aritméticas. O seguinte resultado encerra essa estratégia.

Proposição 6.20. *Sejam $M \in [n-1]$, $k \leq n/M$ e $0 < \delta < 1$. Se $A \subset [n]$ tem densidade δ e os conjuntos $B_1, \dots, B_k \subset [n]$ são dois-a-dois disjuntos cuja união contém A e tem densidade $\leq 1 - \delta/8$ então para algum i*

$$\delta(A|B_i) \geq \delta + \frac{\delta^2}{16} \quad e \quad |B_i| \geq \frac{\delta^3}{16} M.$$

Demonstração. Usando (6.1) e pondo $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ escrevemos

$$\delta(A|B) = \sum_{\substack{i \in [k] \\ |B_i| < (\delta^3/20)M}} \delta(A|B_i) \frac{|B_i|}{|B|} + \sum_{\substack{i \in [k] \\ |B_i| \geq (\delta^3/20)M}} \delta(A|B_i) \frac{|B_i|}{|B|}.$$

A primeira soma é limitada por

$$k \frac{\delta^3}{16} M \frac{1}{\delta n} \leq \frac{\delta^2}{16}$$

e por (6.2) a segunda soma é limitada por

$$\geq \delta + \frac{\delta^2}{8} - \frac{\delta^2}{16} \geq \delta + \frac{\delta^2}{16}$$

em particular $\max_i \delta(A|B_i) \geq \delta + \delta^2/16$. \square

Demonstração do teorema de Roth

Seja $A \subset [n]$ tal que $|A| \geq \delta n$ e $n > 2^{2(\log_2(8/\delta))^2}$. Vamos provar que vale uma das afirmações

1. A contém uma 3-PA, ou
2. existe uma PA P com $|P| \geq (\delta^3/100) \log_2 \log_2 n$ e $\delta(A|P) \geq \delta + \delta^2/16$.

Assuma, s.p.g., que $n = 4N$. Suponha que A não contém uma 3-PA. Considere a partição

$$[n] = [1, N] \cup [N+1, 2N] \cup [2N+1, 3N] \cup [3N+1, 4N].$$

Se para algum $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ vale que $|A \cap [jN, (j+1)N]| \leq \frac{\delta}{2}N$ então temos

$$4\delta N \leq |A| = \sum_{i=0}^3 |A \cap [iN, (i+1)N]| \leq \frac{\delta}{2}N + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^3 |A \cap [iN, (i+1)N]|$$

portanto, existe k tal que

$$|A \cap [kN, (k+1)N]| \geq \frac{1}{3} \left(4\delta - \frac{\delta}{2} \right) N = \frac{7}{6} \delta N > \left(\delta + \frac{\delta^2}{16} \right) N$$

e como $[kN, (k+1)N]$ é uma PA longa e $\delta(A|[kN, (k+1)N]) > \delta + \frac{\delta^2}{16}$ vale o item 2 acima.

Suponha que $|A \cap [jN, (j+1)N]| \geq \frac{\delta}{2}N$ para todo j .

Para encontrar o conjunto P do item 2, biparticionamos $[n] = X \cup Y$ com $A \cap Y = \emptyset$. O conjunto X particionamos em progressões aritméticas P_1, P_2, \dots, P_ℓ . Então A tem densidade maior em X , o que implica que tem

maior densidade em uma das progressões. Para encontrar essa partição usamos um cubo de Hilbert.

Decomponha o intervalo $[N + 1, 2N]$ em subintervalos disjuntos

$$[N + 1, 2N] = I_1 \cup \cdots \cup I_r$$

de modo que para todo j

$$\frac{n}{2 \log_2 \log_2 n} \leq |I_j| \leq \frac{n}{\log_2 \log_2 n}.$$

Para algum desses intervalos, digamos I_j , vale que $\delta(A|I_j) \geq \delta/2$. De

$$|I_j| \geq \frac{n}{2 \log_2 \log_2 n} > \sqrt{n} \geq 2^{(\log_2(8/\delta))^2} = 2^{(\log_2(4/(\delta/2)))^2}$$

e como $\delta(A|I_j) \geq \delta/2$ temos, pelo corolário 6.18, um cubo de Hilbert $C \subset A \cap I_j$ de dimensão

$$m \geq \frac{1}{2} \log_2 \log_2 |I_j| \geq \frac{1}{4} \log_2 \log_2 n$$

e geradores x_0, x_1, \dots, x_m .

Note que se $2c - a \in 2C - A$, então $a, c, 2c - a$ é uma 3-PA de razão $c - a$. Se A não contém 3-PA então $2C - A$ é disjunto de A .

Defina, para cada $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ o cubo C_i gerado por x_0, x_1, \dots, x_i e os conjuntos

$$Q_i = 2C_i - (A \cap [1, N]) = \{2c - b : c \in C_i \text{ e } b \in A \cap [1, N]\}$$

e temos que $Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_m \subset [n]$ e os conjuntos $Q_{i+1} \setminus Q_i$ são disjuntos de modo que, para algum j

$$|Q_{j+1} \setminus Q_j| \leq \frac{n}{m} \leq \frac{4n}{\log_2 \log_2 n}.$$

Ademais, pelo parágrafo anterior,

$$(6.3) \quad Q_i \cap A = \emptyset \quad (\forall i)$$

pois $Q_i \subset C$. Tomamos

$$Y = Q_j.$$

De $Y \cup (Y + 2x_{j+1}) \subset Q_{j+1}$

$$|(Y + 2x_{j+1}) \setminus Y| \leq \frac{n}{m} \leq \frac{4n}{\log_2 \log_2 n}$$

tomamos $d = 2x_{j+1} \leq 2n / \log_2 \log_2 n$.

Até aqui, fomos capaz de escolher Y e d de modo que d e $(Y + d) \setminus Y$ sejam pequenos. Isso permitirá particionar X em progressões aritméticas, digamos

$$X = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_\ell.$$

Particionamos X começando com d progressões aritméticas cobrindo $[n]$ e, então, removendo Y , cada progressão “quebrada” dá origem a uma nova progressão que começa em cada $b + d \notin Y$ para cada $b \in Y$. O número de progressões é

$$\ell = d + |(Y + d) \setminus Y| \leq \frac{6n}{\log_2 \log_2 n}.$$

Agora $A \subset X$ (por (6.3)) e $|X| = n - |Y| = n - |Q_j| \leq (1 - \delta/8)n$ pois

$$|Q_j| \geq |Q_0| = |A \cap [1, N]| \geq \frac{\delta}{2}N = \frac{\delta}{8}n.$$

Pela proposição 6.20, para alguma progressão P_i vale que $\delta(A|P_i) \geq \delta + \delta^2/16$ e

$$|P_i| \geq \frac{\delta^3}{16} \frac{n}{\ell} \geq \frac{\delta^3}{16} \frac{n}{6n/\log_2 \log_2 n} \geq \frac{\delta^3}{96} \log_2 \log_2 n \geq \frac{\delta^3}{100} \log_2 \log_2 n$$

o que prova o item 2.

Para encerrar a prova do teorema 6.3 repetimos o argumento dado acima para $A \cap P_i$ como um subconjunto de P_i . Ou $A \cap P_i$ contém 3-PA ou há em P_i um progressão aritmética longa na qual $A \cap P_i$ tem densidade maior do que a densidade em P_i . Depois de repetir no máximo $16/\delta^2$ vezes obteríamos uma densidade maior que 1, um absurdo que implica que devemos encontrar uma progressão aritmética de 3 termos.

Aqui n deve ser suficientemente grande de modo que iterar a função $f(x) = (\delta^2 \log_2 \log_2 x)/100$ até $16/\delta^2$ vezes, começando com n , obteremos um valor maior que $2^{2(\log_2(4/\delta))^2}$ de modo que o corolário 6.18 possa ser aplicado, ou seja, n_0 é uma torre exponencial cuja altura depende polinomialmente em δ^{-1} .

6.2.2 Demonstração usando grafos

Na demonstração do teorema por Szemerédi um passo importante ficou conhecido como Lema de Regularidade de Szemerédi, ou simplesmente *Lema de Szemerédi*. Esse é um resultado da teoria dos grafos que, ingenuamente, diz que o conjunto dos vértices de todo grafo pode ser particionado em um pequeno número de subconjuntos basicamente da mesma cardinalidade, de forma que muitos dos subgrafos bipartidos induzidos por essas partes têm suas arestas distribuídas de maneira quase-uniforme, num sentido de aleatoriedade. Esses subgrafos *pseudoaleatórios* satisfazem várias propriedades locais de grafos bipartidos aleatórios como, por exemplo, quase todo vértice tem grau próximo ao grau médio. Esse lema ajuda a transferir esses resultados em grafos aleatórios para grafos densos.

O lema de regularidade de Szemerédi

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $A, B \subset V$, subconjuntos disjuntos de vértices. Denotamos por $e_G(A, B)$ o número de arestas de G com um extremo em A e outro em B , definimos

$$d_G(A, B) = \frac{e_G(A, B)}{|A||B|},$$

chamado de *densidade do par* (A, B) no grafo G . Escrevemos $e(A, B)$ e $d(A, B)$ quando G estiver subentendido.

Na sua primeira versão, aquela usada na prova do teorema de Szemerédi, o lema de regularidade foi provado para grafos bipartidos. Posteriormente, Szemerédi provou uma versão plena do lema de regularidade a qual é dada abaixo, mas primeiro introduzimos mais algumas definições.

Definição 6.21 (par ε -regular). *Dados um grafo $G = (V, E)$, um real $\varepsilon \leq 1$ positivo e $A, B \subseteq V$ disjuntos, dizemos que o par (A, B) é (ε, G) -**regular**, ou simplesmente **ε -regular** quando G está subentendido, se para quaisquer $X \subset A$ e $Y \subset B$ com $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$ temos*

$$|d_G(A, B) - d_G(X, Y)| < \varepsilon.$$

Observe que quanto menor for ε , mais uniforme é a distribuição das arestas no grafo.

Exemplo 6.22. Seja B_M um grafo bipartido escolhido aleatória e uniformemente dentre todos os grafos bipartidos sobre o conjunto de vértices $V = [n] \times [n]$ e com $M = n^2/2$ arestas. Para todo ε , quase certamente o grafo B é ε -regular.

Exemplo 6.23. Se $d(A, B) \leq \varepsilon^3$, então A e B formam um par ε -regular, ou seja, pares muito esparsos são necessariamente regulares. De fato, se $X \subseteq A$ com $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $Y \subseteq B$ com $|Y| \geq \varepsilon|B|$, então

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} \leq \frac{e(A, B)}{|X||Y|} \leq \frac{\varepsilon^3|A||B|}{|X||Y|} \leq \frac{\varepsilon^3|A||B|}{\varepsilon|A|\varepsilon|B|} \leq \varepsilon.$$

Agora, se A e B formam um par ε -regular em G , então eles também formam um par ε -regular no complemento de G , logo, podemos concluir que pares densos, com densidade maior que $1 - \varepsilon^3$, também são regulares.

Proposição 6.24. *Se (A, B) é um par ε -regular com densidade $d = d(A, B)$, então para qualquer $Y \subseteq B$ com $|Y| \geq \varepsilon|B|$,*

$$|\{x \in A: |e(\{x\}, Y)| \leq (d - \varepsilon)|Y|\}| < \varepsilon|A|.$$

Demonstração. Seja X o conjunto dos vértices $x \in A$ tais que $|e(\{x\}, Y)| \leq (d - \varepsilon)|Y|$. Então, $e(X, Y) \leq |X|(d - \varepsilon)|Y|$, portanto, $d(X, Y) \leq d - \varepsilon$ e pela ε -regularidade do par, concluímos que $|X| < \varepsilon|A|$, provando a afirmação. \square

Definição 6.25 ((ε, k) -equipartição; partição ε -regular). *Seja \mathcal{P} uma $(k+1)$ -partição, digamos $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$, do conjunto de vértices V . Dizemos que \mathcal{P} é uma (ε, k) -**equipartição** se $|V_i| = |V_j|$ para todos $1 \leq i < j \leq k$ e $|V_0| \leq \varepsilon|V|$. O conjunto V_0 é chamado conjunto excepcional e pode ser vazio.*

*Dizemos que a partição \mathcal{P} é uma **equipartição** se for uma (ε, k) -equipartição para algum ε e algum k .*

*Dizemos que a (ε, k) -equipartição \mathcal{P} é (ε, k, G) -**regular** se é uma (ε, k) -equipartição onde o número de pares (V_i, V_j) com $1 \leq i < j \leq k$, que não são (ε, G) -regulares é no máximo $\varepsilon \binom{k}{2}$.*

A versão plena do Lema de Regularidade de Szemerédi é o seguinte resultado.

Teorema 6.26 (Lema de Regularidade de Szemerédi). *Dados um real $0 < \varepsilon < 1$ e um inteiro $k_0 \geq 1$, existem inteiros positivos $n_0 = n_0(\varepsilon, k_0)$ e $K_0 = K_0(\varepsilon, k_0) \geq k_0$ tais que se $G = (V, E)$ é um grafo com pelo menos n_0 vértices, então existe uma partição (ε, k, G) -regular de V com $k_0 \leq k \leq K_0$.*

O conjunto excepcional é uma conveniência técnica para garantir que as outras classes tenham exatamente a mesma cardinalidade.

Como aplicar o lema?

Suponha dados $\varepsilon \leq 1$ real positivo e $k_0 \geq 1$ inteiro. A aplicação do lema de regularidade sobre um grafo G com n vértices, para n suficientemente grande, nos dá uma partição $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ tal que

$$(6.4) \quad (1 - \varepsilon) \frac{n}{k} \leq |V_i| \leq \frac{n}{k},$$

para todo $i \in [k]$. Ainda, dado um real positivo $\rho < 1$, considere os pares (V_i, V_j) , para $1 \leq i < j \leq k$, que são (ε, G) -regulares de densidade pelo menos ρ . Então, pondo $|V_i| = m$ para todo $i \in [k]$,

- (i) V_0 contém no máximo $1/2(\varepsilon n)^2$ arestas e existem no máximo $|V_0|mk \leq \varepsilon nmk$ arestas que ligam vértices de V_0 aos vértices das outras classes;
- (ii) cada um dos no máximo $\varepsilon \binom{k}{2}$ pares irregulares contém no máximo m^2 arestas;
- (iii) entre os pares ε -regulares de densidade $< \rho$ há $< \rho m^2$ arestas;
- (iv) cada V_i , para $i \in [k]$, contém no máximo $\binom{m}{2}$ arestas.

Seja $G'' = G''(\mathcal{P}, \rho, \varepsilon)$ o grafo obtido de G removendo as arestas descritas nos itens (i)–(iv). Então,

$$e_G < \frac{1}{2}(\varepsilon n)^2 + \varepsilon nmk + \frac{\varepsilon}{2}m^2k^2 + \frac{k^2}{2}\rho m^2 + \frac{1}{2}m^2k + e_{G''},$$

portanto, usando o limitante superior dado em (6.4) para $|V_i| = m$ ($\forall i \in [k]$), temos que

$$(6.5) \quad e_{G''} > e_G - \frac{n^2}{2} \left(\rho + 4\varepsilon + \frac{1}{k_0} \right).$$

Esse grafo G'' obtido é muito útil em várias aplicações.

Demonstração do teorema de Roth

Começaremos definindo um grafo onde aplicaremos o Lema de Regularidade. Sejam X , Y e Z cópias disjuntas de $[3n]$ e seja $A \subseteq [n]$ um subconjunto qualquer. Definimos o seguinte conjunto $S = S(A)$

$$S = \left\{ (x, y, z) \in X \times Y \times Z : y - x = z - y = \frac{z - x}{2} \in A \right\}.$$

Seja $G = (V, E)$ o grafo tripartido com $9n$ vértices obtido tomando-se a união disjunta $V = X \cup Y \cup Z$, e as arestas são os pares de V em partes distintas e contidos em alguma tripla de S .

O número de arestas em G é

$$e_G \geq 3|A|n$$

pois cada elemento de $|A|$ gera pelo menos n triplas em S e cada tripla contribui com 3 arestas. O conjunto das arestas de G pode ser decomposto em

$$t = \frac{e_G}{3} \geq |A|n$$

triângulos disjuntos nas arestas, chamados *triângulos não-espontâneos*.

Observe que se G contém um triângulo que é espontâneo, então A contém uma 3-PA. De fato, se x', y', z' formam um tal triângulo, então devemos ter $y' - x' \neq z' - y'$ e tomando $a = y' - x'$ e $b = z' - y'$ temos $a, b \in A$ por definição, e também $\frac{a+b}{2} = \frac{z' - x'}{2} \in A$. Logo $a, b, \frac{a+b}{2}$ é uma 3-PA em A .

Agora, vamos supor que $|A| = \delta n$, para alguma constante $\delta > 0$, e vamos provar que A deve conter uma progressão aritmética. Claramente, é suficiente mostrar que o grafo G que acabamos de construir deve conter um triângulo espontâneo.

Escreva $N = 9n$ para o número de vértices. Temos $e_G \geq 3|A|n = 3\delta n^2$, então podemos escrever $e_G = \beta \binom{N}{2}$, onde β é uma constante fixa e independente de n .

Aplicamos o lema de regularidade em G para os parâmetros $\varepsilon = \frac{\beta}{60}$ e $k_0 = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$. O número de arestas que pertencem a pares da partição (ε, k_0, G) -regular e têm densidade pelo menos $\rho = \beta/6$ é, pela equação (6.5), maior que

$$\beta \binom{N}{2} - \frac{N^2}{2} (\rho + 5\varepsilon) > \binom{N}{2} (\beta - 2(\rho + 5\varepsilon)) > \frac{\beta}{2} \binom{N}{2}.$$

pois $\rho + 5\varepsilon = \beta/4$. Logo o grafo G'' ainda contém um triângulo T , pois existiam $t = (\beta/3) \binom{N}{2}$ triângulos não-espontâneos (disjuntos nas arestas) em G .

Ainda, as três arestas do triângulo T estão contidas em pares ε -regulares com densidade pelo menos $\beta/6$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que esses pares são os dados por V_1 , V_2 e V_3 .

Agora, usamos o fato que muitos vértices em pares regulares têm graus próximos, proposição 6.24.

Se (V_1, V_3) e (V_2, V_3) são ε -regulares, então existem pelo menos $(1 - 2\varepsilon)|V_3|$ vértices em V_3 , cada um ligado a pelo menos $(\beta/6 - \varepsilon)|V_i|$ vértices de V_i , para $i = 1, 2$. Fixe um deles, digamos x , e ponha $N_i(x)$ para o conjunto dos vizinhos de x em V_i .

De $\beta/6 - \varepsilon = 9\beta/60 > \varepsilon$ temos, pela ε -regularidade, que existem pelo menos $(\beta/6 - \varepsilon)|N_1||N_2| > (9\beta/60)^3|V_1||V_2|$ arestas ligando vértices de $N_1(x)$ com vértices de $N_2(x)$. Cada aresta corresponde a um triângulo contendo x . Desde que, dois triângulos não-espontâneos não têm dois vértices comum, então existem no máximo $|V_1| = |V_2|$ triângulos não-espontâneos contendo o vértice x . Portanto, o grafo G contém um triângulo espontâneo, ou seja, A contém uma 3-PA. \square

Exercício 6.27 (Lema de remoção de triângulos). Para todo $\delta > 0$ existe uma constante $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$ tal que se G é um grafo de n vértices com no máximo ϵn^3 triângulos, então é possível fazer G livre de triângulos removendo no máximo δn^2 arestas.

Exercício 6.28 (Lema dos cantos). Para todo $\delta > 0$ existe um natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, qualquer $A \subset [n]^2$ com $|A| \geq \delta n^2$ contém um canto $\{(s, t), (s + d, t), (s, t + d)\}$ com $d \neq 0$.

Notas

Klaus Roth foi um matemático britânico que pesquisou em teoria dos números sendo conhecido por seus resultados em aproximações diofantinas e teoria da discrepância. Recebeu a medalha Fields em 1958. O teorema de Roth foi publicado em

Roth K (1953) On certain sets of integers, Journal of the London Mathematical Society 28, 104–109.

A prova combinatória de Szemerédi para progressões de 4 termos, donde deriva a prova combinatória para 3-PA é de

Szemerédi E (1969) On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 20, 89–104.

A prova do caso geral

Szemerédi, E (1975) On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Arithmetica 27:199–245.

Uma prova do teorema de Szemerédi usando análise de Fourier, a mesma ferramenta de Roth, só foi dada em 2001 por Timothy Gowers

Gowers T (2001) A new proof of Szemerédi's theorem, *Geometric and Functional Analysis* 11, 465–588.

Dentre as outras provas do teorema de Szemerédi, destaca-se a prova ergódica dada por Furstenberg em 1977. Essa prova foi simplificada por Katznelson e Ornstein e pode ser lida em

Furstenberg H, Katznelson Y, Ornstein DS (1982) The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem. *Bulletin of the American Mathematical Society* 7 (3):527–552.

Os teoremas de Mantel, de Turán e o lema de regularidade de Szemerédi são encontrados nos livros mais modernos de Teoria dos Grafos, dentre eles destacamos

Diestel R (1997) *Graph theory*. Springer-Verlag, New York.

Bollobás, B (1998) *Modern Graph Theory*. Springer-Verlag, New York.

Esses livros dedicam um capítulo ao lema de Szemerédi que, atualmente, é ferramenta importante para vários resultados em Teoria dos Grafos e aplicações, como é bem mostrado no *survey*

Komlós J, Simonovits M (1996) Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory. In *Combinatorics, Paul Erdős is eighty*, Vol. 2 (Keszthely, 1993), pages 295–352. János Bolyai Math. Soc., Budapest.

A versão apresentada aqui é de

Szemerédi E (1978) Regular partitions of graphs. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)*, pages 399–401. CNRS, Paris.

Os limitantes superior e inferior para $r_3(n)$ são, respectivamente, de

Bloom T (2016) A quantitative improvement for Roth's theorem on arithmetic progressions, *Journal of the London Mathematical Society* 93, 643–663.

Behrend F (1946) On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression, *Proceedings of the National Academy of the Sciences* 32, 331–332.

O lema de remoção de triângulos é de Ruzsa e Szemerédi

Ruzsa I, Szemerédi E (1978) Triple systems with no six points carrying three triangles, *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976)*, Vol. II, NorthHolland, Amsterdam, pp. 939–945

revelou-se, em suas várias versões, um princípio importante em várias aplicações na combinatória aditiva. Uma extensão que evita o lema de regularidade e, assim, dá melhores limitantes numéricos é

Fox J (2011) new proof of the graph removal lemma, *Annals of Mathematics* 174, 561–579.

O lema dos cantos (*corners theorem*) é um resultado de Ajtai e Szemerédi

Ajtai M, Szemerédi E (1974) Sets of lattice points that form no squares, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 9, 9–11.

Uma prova mais simples baseada no lema de remoção de triângulos é de Solymosi de 1993

Solymosi J (2003) Note on a generalization of Roth's theorem. In Aro-nov, Boris; Basu, Saugata; Pach, János; et al. *Discrete and computational geometry. Algorithms and Combinatorics*. 25. Berlin: Springer-Verlag. pp. 825–827.

O lema dos cantos implica o teorema de Roth.

Referências

1. Landman BM, Robertson A (2014) Ramsey Theory on the Integers: Second Edition. Volume 73 de Student Mathematical Library, American Mathematical Society
Livro com foco nos resultados da teoria de Ramsey no conjunto dos números inteiros. Aborda amplamente o teorema de Van der Waerden além dos teoremas de Schur e Rado. Com muitos exercícios e problemas em aberto.
2. Graham R, Rothschild B, Spencer J (1990) Ramsey Theory, 2nd Edition. John Wiley, New York
Possivelmente, a principal referência para o assunto. Cobre todos os principais conceitos, incluindo teoria de Ramsey em grafos e teoria de Ramsey euclidiana, relaciona a teoria de Ramsey com outras áreas em matemática discreta e apresenta os resultados de “indemonstrabilidade” de Paris e Harrington e os métodos ergódicos pioneiros de Furstenberg.
3. Prömel HJ (2013) Ramsey Theory for Discrete Structures. Springer, Berlin Heidelberg New York
Apresenta uma discussão detalhada das raízes da teoria de Ramsey e uma discussão completa sobre o papel dos “conjuntos de parâmetros”. Apresenta vários exemplos de estruturas que podem ser interpretadas em termos de conjuntos de parâmetros e apresenta os resultados mais fundamentais do tipo Ramsey para conjuntos de parâmetros. Apresenta os resultados clássicos, progressos recentes nos números de Ramsey, comportamento assintótico das funções clássicas, prova combinatória da incompletude da aritmética de Peano e examina extensões do teorema de Ramsey a cardinais infinitos, e uma prova combinatória do teorema da densidade de Hales-Jewett.
4. McCutcheon R (1999) Elementary Methods in Ergodic Ramsey Theory. Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin Heidelberg New York
Este livro apresenta as técnicas devidas a Furstenberg e outros para atacar problemas na teoria de Ramsey via recorrência na dinâmica topológica e teoria ergódica. São provados os teoremas clássicos de van der Waerden, Hindman e Szemerédi.

5. Erdős P, Máté A, Hajnal A, Rado P (1984) Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 106. North-Holland

Apresenta as técnicas combinatórias da cálculo de partições para cardinais sem assumir hipótese do contínuo generalizada e inclui uma seção com aplicações em topologia com o famoso resultado de Arhangel'skii que um espaço compacto e Hausdorff com o primeiro axioma de enumerabilidade tem cardinalidade, no máximo, contínuo.

6. Soifer A (2008) The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators. Springer, New York

Um livro que levou 18 anos para ser escrito, exibe vários resultados de combinatória centralizados no tema coloração. Descreve os resultados e também as histórias das pessoas por trás dessas ideias. Alexander Soifer dedicou 12 anos à pesquisa sobre Van der Waerden e o teorema das progressões aritméticas e usa aproximadamente 30 páginas abordando a questão de quem primeiro conjecturou o teorema. É um livro com histórias, fotos dos principais personagens e cartas trocas entre os envolvidos.

7. Soifer A (Editor, 2011) Ramsey Theory Yesterday, Today, and Tomorrow. Birkhäuser, Progress in Mathematics, Volume 285

Coleção de artigos expositivos que explora a história da teoria, desenvolvimentos recentes e algumas direções futuras promissoras e escritos por pesquisadores proeminentes. Apresenta uma lista muito extensa de problemas em aberto. O livro é sem dúvida muito divertido. Como se espera de um livro sobre a teoria de Ramsey, está cheio de problemas que são muito fáceis de formular, mas terrivelmente difíceis de resolver.

Índice Remissivo

- (ε, G) -regular, 69
- (ε, k) -equipartição, 70
- $T(H)$, 62
- $[t, n]$, 27
- $\delta(H)$, 62, 63
- $\mathcal{W}(k, c)$, 41
- $ES(n)$, 22
- $R(t_1, \dots, t_r)$, 18
- $R(t_1, t_2)$, 16
- $R^{(k)}(t_1, \dots, t_r)$, 20
- $\varphi \upharpoonright_A$, 4
- $d(A, B)$, 69
- $e(A, B)$, 69
- k -subconjunto, VI
- $n \longrightarrow (t_1, \dots, t_r)_r^k$, 21
- r -coloração, 4
- $r_k(n)$, 60
- $s(r)$, 32
- k -PA, 40
 - monocromática, 40
- PG, 4
- PIF, 7
- aresta, 10, 26
- coloração, 4
- compacidade, 25
 - argumento de, 10
- conjectura
 - de Erdős sobre progressões, 60
 - de Erdős–Szekeres, 23
 - de Erdős, 19
 - de Hindman, 34
 - do limitante de Rado, 36
- conjunto excepcional, 70
- cor, 4
- cubo de Hilbert, 55
- densidade
 - do par (A, B) , 69
- equipartição, 70
- grafo, 10
 - de Moser, 9
- hipergrafo, 26
 - k -uniforme, 26
 - completo, 26
- incremento de densidade, 65
- lema
 - de regularidade, 70
- número
 - cromático de um grafo, 10
 - cromático do plano, 8
 - de Ramsey, 18
 - de Schur, 32
 - de Turán, 62
 - de Van der Waerden, 41
- paradoxo
 - dos aniversários, 6
- partição ε -regular, 70
- princípio
 - da compacidade, 11, 26

- das gavetas, 3–5
 - generalizado, 5
 - infinitário, 6
 - ordenado, 5
 - probabilístico, 6
- de indução, 7
- problema
 - de Hadwiger–Nelson, 9
- subconjunto
 - livre de soma, 31
 - monocromático, 4
- subgrafo, 10
- teorema
 - da subsequência monótona, 24
 - de Bolzano–Weierstrass, 24
 - de compacidade, 26
 - de Erdős–De Bruijn, 11
 - de Erdős–Szekeres, 22, 23
 - de fermat mod p , 34
 - de Paris–Harrington, 27
 - de Rado, 36
 - de Ramsey
 - finitista, 20
 - infinitário, 24
 - para grafos r -coloridos, 18
 - para grafos 2-coloridos, 16
 - de recorrência múltipla, 54
 - de Roth, 59
 - de Szemerédi, 60
 - de Turán, 62
 - de Van der Waerden, 41, 52
 - do cubo de Hilbert, 55
 - densidade, 64
 - do final feliz, 22
 - tipo densidade, 63
 - tipo Ramsey, 26
- vértice, 10, 26