$\boxed{\text{RASCUNHO SOLUÇÕES P2}}$

(*) $A\bar{x} = \bar{d}$
$\bar{x} \geq \bar{0}$

(**) $\min \ 1^T \bar{w}$
s.a. $(A \vdots Id)\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{w} \end{pmatrix}^T = \bar{d}$
$\bar{x}, \bar{w} \geq \bar{0}$

- $\bar{x}'$ sol. viável de (*) $\Rightarrow (\bar{x}' \ \bar{0})^T$ sol. viável de (**) com valor 0. Como $\bar{w} \geq \bar{0}$ essa solução é ótima

- (**) tem sol. ótima $\Rightarrow$ tem solução viável básica ótima digamos $\bar{z}^* = (\bar{x}' \ \bar{0})$
B dado pelos j tais que $z^*_j > 0$ define colunas l.i. de $(A \vdots Id)$, portanto de A, logo $\bar{x}'$ é básica.

- Pela contrapositiva: PPL não tem valor ótimo $> 0 \Rightarrow$ (*) tem solução viável

Da hipótese, $\underbrace{\text{não tem valor ótimo}}_{(A)}$ ou $\underbrace{\text{valor ótimo} = 0}_{(B)}$

CASO B: solução ótima $(\bar{x}^*, \bar{w}^*) = (\bar{x}^*, \bar{0})$ t.q. $A\bar{x}^* + \bar{0} = \bar{d}$
portanto $\bar{x}^*$ é viável de (*)

CASO A: Em $A\bar{x} = \bar{d}$ podemos considerar $\bar{d} \geq 0$ (simplesmente $\times(-1)$ as equações com $d_i < 0$)

De $A\bar{x} + \bar{w} = \bar{d}$ temos $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{d} \end{pmatrix}$ é uma solução viável, como a função objetivo é limitada (≥ 0) o PPL tem valor ótimo, logo o caso A não ocorre

(NOTAÇÃO SEGUE SLIDES)

$\max \bar{c}^T \bar{x}$; $A\bar{x} = \bar{d}$; $\bar{x} \geq 0$

$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ $N = \{l_1, \ldots, l_m\}$

Se define base então $\bar{x} = (\bar{x}_B \; \bar{x}_N)^T$ com $\bar{x}_B = \boxed{A_B^{-1}\bar{d} - A_B^{-1}A_N\bar{x}_N}$ (*)

Se $\bar{x}_N = \bar{0}$, $\bar{x}$ é viável básica logo $\bar{p} := A_B^{-1}\bar{d} \geq 0$

Se $\bar{x}_N \geq 0$ é tal que $\bar{x}_B \geq 0$, $\bar{x}$ é viável

Nas linhas de (*)

$$x_{b_i} = (A_B^{-1}\bar{d})_i - (A_B^{-1}A_N)_i \bar{x}_N$$

$$= p_i - \sum_j q_{ij} x_{l_j}$$

Fazendo

$x_{l_j} = 0 \quad \forall j \neq t$ e $x_{l_t} := \alpha \Rightarrow$

$$x_{b_i} = p_i + (-q_{it})\alpha$$

por hipótese $(-q_{it}) > 0$ portanto $x_{b_i} > 0$ e

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_{b_1} \\ \vdots \\ x_{b_n} \\ x_{l_1} \\ \vdots \\ x_{l_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -q_{i1}\alpha \\ \vdots \\ -q_{in}\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0, \text{ logo viável.}$$

$$\bar{c}^T\tilde{x} = \bar{c}_B\bar{p} + (\bar{c}_N^T - \bar{c}_B^T\bar{q})\tilde{x} = \bar{c}_B^T\bar{p} + (\bar{c}_N^T - \bar{c}_B^T\bar{q})\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \bar{c}_B\bar{p} + \left[(\bar{c}_N^T)_{l_t} - (\bar{c}_B^T\bar{q})_{l_t}\right]\cdot\alpha = \bar{c}_B^T\bar{p} + r_{l_t}\cdot\alpha$$

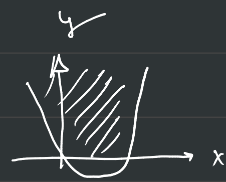
$\longrightarrow \infty$ quando $\alpha \to \infty$ pois $\alpha > 0$

Se $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa, $C=\{x : f(x)\le c\}$ convexo:

$\forall\, x,y\in C, \forall \lambda\in[0,1], \lambda x+(1-\lambda)y\in C$?

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \qquad [f \text{ convexa}]$$
$$\le \lambda c+(1-\lambda)c \qquad [\in C]$$
$$= c$$

portanto $\lambda x+(1-\lambda)y\in C$. ✱



$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y> ax^2+bx+c\}$

convexo ?

$(x,y), (z,w)\in C$, $\lambda\in[0,1]$

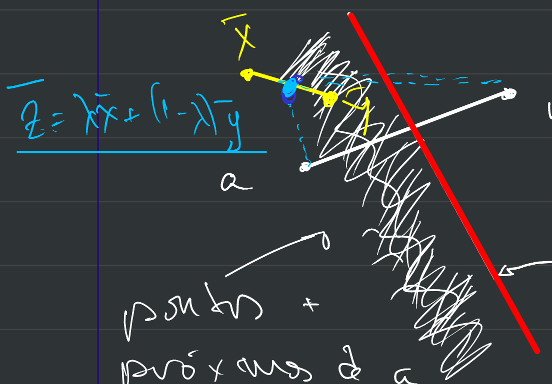
$$\lambda(x,y)+(1-\lambda)(z,w) = (\lambda x+(1-\lambda)z, \lambda y+(1-\lambda)w)$$

$$\lambda y+(1-\lambda)w > \lambda(ax^2+bx+c)+(1-\lambda)(az^2+bz+c)$$
$$= a(\lambda x^2+(1-\lambda)z^2)+b(\lambda u+(1-\lambda)w)+c$$
$$> a(\lambda x+(1-\lambda)z)^2+b(\lambda u+1-\lambda)w+c$$

$$\therefore \lambda(x,y)+(1-\lambda)(z,w)\in C$$

$C = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\bar{x}, \bar{a}) \leq d(\bar{x}, \bar{b}) \}$ $\quad$ d = distância

$\forall \, \bar{x}, \bar{y} \in C, \quad \lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{y} \in C$?



pontos + próximos de a

mediatriz = pontos que equidistam de a, b

é semiespaço, portanto convexo. Dem:

DESIGUALDADE TRIANGULAR: $\quad d(\bar{z}, \bar{a}) \leq d(\bar{a}, \bar{b}) + d(\bar{b}, \bar{z})$

portanto $\quad d(\bar{z}, a) \leq d(\bar{z}, b)$