7 Contagem

7.1 Princípios de contagem: bijeção e cardinalidade

Uma característica importante dos números naturais é que eles constituem o modelo matemático que torna possível o processo de contagem e respondem a pergunta *quantos elementos tem esse conjunto*? Contagem é, em última instância, o processo de criar uma bijeção entre um conjunto que queremos contar e algum conjunto cujo "tamanho" já sabemos. Esse "tamanho" de um conjunto é chamado de cardinalidade, e é intuitivamente clara no caso de conjuntos finitos: a cardinalidade de um conjunto finito é a quantidade de elementos no conjunto expressa por um número natural. Cardinalidade é um conceito que a teoria dos conjuntos estende para qualquer conjunto. Os números cardinais transfinitos descrevem os tamanhos de conjuntos infinitos e há uma sequência transfinita de números cardinais

$$0,1,2,3,\dots,n,\dots,\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\dots,\aleph_\omega,\aleph_{\omega+1},\dots,\aleph_{\omega+\omega},\dots,\aleph_{\omega^2},\dots,\aleph_{\omega^\omega},\dots,\aleph_\alpha,\dots.$$

Na verdade, a ideia de cardinalidade torna-se bastante sutil quando os conjuntos são infinitos.

Numa contagem, geralmente, não fornecemos uma bijeção explícita para calcular o tamanho de um conjunto, mas nos baseamos em princípios de contagem derivados dos processos de construção de conjuntos. O ramo da matemática que estuda,dentre outro temas, conjuntos construídos pela combinação de outros conjuntos é chamado de combinatória e a subárea que estuda os métodos de contagem é chamada de combinatória enumerativa. Também na teoria dos conjuntos estuda-se extensões das ideias e técnicas da combinatória para conjuntos infinitos, esse ramo da matemática é chamado de combinatória infinitária.

7.1.1 Bijeções

Para contar os elementos de um conjunto usamos a noção de correspondência biunívoca, ou bijeção, ou função bijetiva. Dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se, e somente se, há uma correspondência um-para-um (bijeção) entre os elementos dos dois conjuntos. Lembremos que uma função $f : X \to Y$ é bijetiva se, e só se, para todo $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Dois conjuntos A e B têm a **mesma cardinalidade** e, por abuso de notação[6], denotamos isso por

$$|A| = |B|$$

se, e somente se, existe uma bijeção $f : A \to B$. Lê-se $|A|$ como **cardinalidade** de A.

Como de uma função bijetiva $f\colon A \to B$ temos que a sua inversa $f^{-1}\colon B \to A$ também é bijetiva então dizer que dois conjuntos têm a "mesma cardinalidade" está bem definido. Ademais, $|A| = |A|$ pois a função identidade $\mathrm{id}\colon A \to A$, dada por $\mathrm{id}(x) = x$ para todo x, é bijetiva

Exercício 159. Prove que se $|A| = |B|$ e $|B| = |C|$ então $|A| = |C|$.

Exemplo 160. A função $f : (0,+\infty) \to (0,1)$ nos reais, dada por $f(x) = \frac{x}{x+1}$ é bijetiva. A função é injetiva pois

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow yx + y = yx + x \Rightarrow x = y$$

e é sobrejetiva pois para todo $y \in (0,1)$

$$f\left(\frac{y}{1-y}\right) = y.$$

Essa função f tem a seguinte interpretação gráfica (veja a figura 7.10) no plano cartesiano. Para cada $x \in (0,+\infty)$ o valor $f(x)$ é dado pela intersecção com o eixo y da reta que passa por $(x,0)$ e por $P = (-1,1)$. Usando semelhança de triângulos temos

$$\frac{1}{x+1} = \frac{f(x)}{x}$$

donde tiramos a expressão para $f(x)$. Segue desse exercício que

$$|(0,+\infty)| = |(0,1)|.$$

[6] $|A|$ não está definido, e $|A| = |B|$ não é uma igualdade, é uma abreviação para o significado que lhe foi dado.

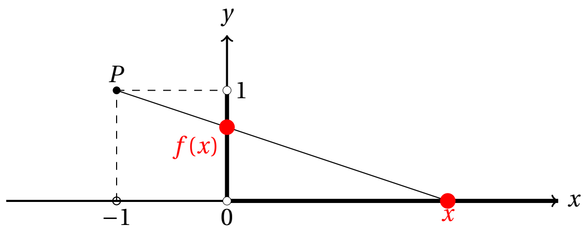

Figura 7.10: interpretação geométrica de $f(x) = x(x+1)^{-1}$

Notemos que os conjuntos acima têm a mesma cardinalidade e a diferença $(0,+\infty) \setminus (0,1)$ não é vazia, muito pelo contrário é $[1,+\infty)$ e tem a mesma cardinalidade dos outros dois (verifique).

A função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to (0,+\infty) \\ x &\mapsto 2^x \end{aligned} \tag{7.10}$$

é bijetiva, logo pelo exercício 159 $|(0,+\infty)| = |\mathbb{R}|$ e $f \circ g \colon \mathbb{R} \to (0,1)$ é uma bijeção que certifica tal fato, dada por

$$f \circ g(x) = \frac{2^x}{2^x+1}.$$

Definição 161. Abusando da notação, escrevemos

$$|A| \le |B|$$

para abreviar que existe $f : A \to B$ injetiva e escrevemos

$$|A| < |B|$$

para abreviar que existe $f : A \to B$ injetiva e não existe uma tal função bijetiva.

Nos casos em que $A \subseteq B$ temos uma função injetiva trivial de A para B, a função identidade, portanto vale o seguinte resultado.

Proposição 162 *Para todo $\emptyset \neq A \subseteq B$ vale $|A| \leqslant |B|$.*

Notemos que quando se trata de cardinalidade $\le$ *não deve ser confundido com a relação de ordem* $\leqslant$ que usamos nos conjuntos numéricos, por exemplo. Veremos mais pra frente (na página 84) que essa definição estende, num certo sentido, a relação de ordem porém, ressaltamos que $\le$ como definido aqui não é uma relação. Entretanto, temos que para quaisquer conjuntos não vazios A, B e C valem: (1) $|A| \le |A|$ pois a função identidade $\mathrm{id} \colon A \to A$ é injetiva; (2) se $f \colon A \to B$ é injetiva e $g \colon B \to C$ é injetiva, então $g \circ f \colon A \to C$ é injetiva (exercício 11, página 26), portanto, se $|A| \le |B|$ e $|B| \le |C|$ então $|A| \le |C|$.

Surpreendentemente, vale também a antissimetria, mas a prova não é tão simples. O seguinte resultado é bastante famoso na teoria dos conjuntos e não trivial no caso de conjuntos infinitos. A utilidade deste resultado vem do fato que, em geral, estabelecer uma bijeção que comprove $|A| = |B|$ pode ser muito difícil enquanto que estabelecer funções injetivas que comprovem $|A| \le |B|$ e $|B| \le |A|$ é mais fácil. Por exemplo, para provar que a cardinalidade do intervalo $[0,1)$ é a mesma do intervalo $(0,1)$ basta exibirmos uma $f \colon [0,1) \to (0,1)$ injetiva, pois pelo outro lado temos $\mathrm{id} \colon (0,1) \to [0,1)$, conforme proposição 162 acima. O leitor pode verificar que $f(x) = 1/4 + x/2$ é uma função que faz esse papel, portanto, $|[0,1)| \leqslant |(0,1)|$ e como $|(0,1)| \leqslant |[0,1)|$ o teorema 163 abaixo nos dá a equipotência.

Uma demonstração do seguinte teorema será dada adiante, no final desse capítulo.

Teorema 163 (Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein) *Se $|A| \le |B|$ e $|B| \le |A|$ então $|A| = |B|$.*

Alguns exemplos importantes

Vejamos algumas comparações entre a cardinalidade de alguns conjuntos conhecidos.

1. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$: uma ideia para estabelecermos uma bijeção entre esses conjuntos é olharmos para uma boa ordem de $\mathbb{Z}$ e tentar escrever $\mathbb{Z}$ como uma sequência dada pela ordenação. Na boa ordenação dos inteiros dada no exemplo 138, $0 \prec -1 \prec 1 \prec -2 \prec 2 \prec \cdots$

$$\begin{array}{lccccccc}
(\mathbb{Z},<): & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\
(\mathbb{N},<): & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots
\end{array}$$

para mostrar que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ definimos a função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{se } z \geqslant 0 \\ 2(-z)-1, & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

que leva os inteiros não negativos nos naturais pares e o negativos nos ímpares.

Dado $n \in \mathbb{N}$, se n é par então $n = 2z$ para algum $z \in \mathbb{N}$, portanto $f(z) = n$; senão n é ímpar, $n = 2z - 1$ para algum $z \in \mathbb{Z}^+$, portanto $f(-z) = 2(-(-z)) - 1 = n$. Assim f é sobrejetora. Agora, se $f(z_1) = f(z_2)$ então $2z_1 = 2z_2$ ou $2(-z_1)+1 = 2(-z_2)-1$ e em ambos os casos $z_1 = z_2$. Portanto a função é bijetora.

2. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$: pelo teorema fundamental da aritmética todo número natural pode ser escrito de modo único como $2^k \ell$ com ℓ ímpar, portanto da forma $2m+1$ para algum natural m. Defina a função $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $f(0,0) = 0$ e, nos outros casos $f(n,m) = 2^n(2m+1)$. Essa função é sobrejetiva pelo teorema fundamental da aritmética, como foi explicado acima. Se $2^x(2y+1) = 2^n(2m+1)$ então $2y+1 = 2^{n-x}(2m+1)$ e como o lado esquerdo é ímpar, $n = x$ e disso $m = y$. Portanto a função é injetiva.

3. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$: pela proposição 162 $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{Q}|$. Para mostrar que $|\mathbb{Q}| \le |\mathbb{N}|$ consideremos os racionais expressos na forma canônica reduzida, isto é, são as frações

$$\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \mathrm{mdc}(p,q) = 1$$

agora, definimos $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ por

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } p = 0 \\ 2^p 3^q, & \text{se } p > 0 \\ 5^{-p} 3^q, & \text{se } p < 0 \end{cases}$$

que é injetiva. É possível exibir um bijeção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ mas isso é mais trabalhoso para descrever.

4. $|R| = |(0,1)|$: do exemplo 160 e equação (7.10) temos as bijeções f e g cuja composição $f \circ g : \mathbb{R} \to (0,1)$ estabelece essa igualdade, como já observamos.

5. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$: neste exemplo temos a famosa demonstração de Cantor por diagonalização. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, temos $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{R}|$ logo precisamos mostrar que $|\mathbb{N}| \ne |\mathbb{R}|$. Para tal, mostraremos que $|\mathbb{N}| \ne |(0,1)|$. Suponha que exista $f: \mathbb{N} \to (0,1)$ bijetiva, de modo que podemos escrever uma sequência de todos os elementos do intervalo

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0{,}d_{0,0}d_{0,1}d_{0,2}d_{0,3}d_{0,4}\dots d_{0,n}\dots \\
f(1) &= 0{,}d_{1,0}d_{1,1}d_{1,2}d_{1,3}d_{1,4}\dots d_{1,n}\dots \\
f(2) &= 0{,}d_{2,0}d_{2,1}d_{2,2}d_{2,3}d_{2,4}\dots d_{2,n}\dots \\
&\ \vdots \\
f(n) &= 0{,}d_{n,0}d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3}d_{n,4}\dots d_{n,n}\dots \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

com $d_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Consideremos o número real

$$\alpha = 0{,}d_0 d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots \text{ com } d_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{0,9,d_{i,i}\}$$

para todo i. Esse número α pertence ao intervalo $(0,1)$ pois $d_i \ne 0$, logo α é diferente de $0 = 0{,}00000\dots$, e $d_i \ne 9$ logo α é diferente de $1 = 0{,}9999\dots$. Ademais, $\alpha \ne f(i)$ pois $d_i \ne d_{i,i}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma contradição. Portanto, não existe $f: \mathbb{N} \to (0,1)$ bijetiva, tampouco $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijetiva.

6. $\left|\mathbb{R}^2\right| = |R|$: ou seja, o plano cartesiano tem tantos pontos quantos um de seus eixos. Aqui é suficiente mostrarmos que $|(0,1) \times (0,1)| \le |(0,1)|$ pois temos $|(0,1)| \le |(0,1) \times (0,1)|$ por $f(x) = (x,x)$ para todo x, bijetiva. Um ponto no quadrado $(0,1) \times (0,1)$ é da forma (x,y) com $x = 0{,}a_1 a_2 a_3 \dots$ e $y = 0{,}b_1 b_2 b_3 \dots$ (se tiver mais de uma representação[7] tomamos a finita) e uma função injetiva sobre $(0,1)$ é dada quando mapeamos o ponto (x,y) em $0{,}a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$ de $(0,1)$.

[7] E.g., $0{,}5 = 0{,}49999\dots$; esse fenômeno não ocorre com irracionais. Todo real tem no máximo duas representações e uma delas é finita

7. $\left|2^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$: o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ tem tantos elementos quanto $\mathbb{R}$. Vamos assumir que $|\mathbb{R}| = |[0,1)|$. Que $\left|2^{\mathbb{N}}\right| \leq |[0,1)|$: um subconjunto $B \subseteq \mathbb{N}$ pode ser representado por uma sequência binária infinita $b_0b_1b_2\dots$ em que $b_i = 1$ se, e só se, $i \in B$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Essa sequência é mapeada na representação binária $0{,}b_0b_1b_2\dots$ de um número real do intervalo $[0,1)$; tal função é injetora. Agora, que $|[0,1)| \leq \left|2^{\mathbb{N}}\right|$: defina $f(0{,}d_1d_2d_3,\dots) = \{10d_1, 10^2d_2, 10^3d_3,\dots\}$ e verifique que f é injetiva (se $0{,}d_1d_2d_3\dots$ for um real com mais de uma representação tomamos a finita).

7.1.2 Conjuntos finitos

Intuitivamente, um conjunto é finito quando tem uma quantidade de elementos descrita por um número natural, ou seja, A finito significa que $|A| \in \mathbb{N}$.

Definição 164. Definimos

$$[n] = \{0,1,\dots,n-1\}$$

para todo natural n.

A **cardinalidade** de A é 0 se, e só se, A é vazio

$$|\varnothing| = 0.$$

Se $A \neq \varnothing$ então

$$|A| = n$$

se, e só se, existe uma bijeção $f\colon [n] \to A$.

Para um conjunto não vazio, a cardinalidade está bem definida, não é possível que um conjunto A esteja em correspondência biunívoca com $[n]$ e $[m]$ para dois números naturais diferentes m e n, isso implicaria numa bijeção entre $[m]$ e $[n]$ o que não é possível pelo princípio das gavetas: *se m objetos são distribuídos em $n < m$ gavetas, então alguma gaveta guarda mais que um objeto.*

Teorema 165 (Princípio das Gavetas (PG)) *Se $1 \leqslant n < m$ então não existe função $f\colon [m] \to [n]$ injetiva.*

Demonstração. A prova é por indução em n. Vamos demonstrar que vale a seguinte propriedade, que denotamos por $P(n)$, para todo $n \geqslant 1$:

Para todo natural $m \geqslant 1$, se $f\colon [m] \to [n]$ é injetiva, então $m \leqslant n$.

Podemos assumir $m > 1$, no caso $m = 1$ a sentença acima é verdadeira trivialmente.

A base é o caso $n = 1$. Nesse caso a função é constante $f\colon [m] \to \{0\}$, portanto, se $m > 1$ então há $x \neq y$ em $[m]$ tal que $f(x) = f(y) = 0$, logo f não é injetiva e a sentença vale por vacuidade.

Para provar o passo, seja $k \geqslant 1$ um natural arbitrário e vamos provar que $P(k)$ implica $P(k+1)$. Assumamos que

para todo natural $m \geqslant 1$, se $f\colon [m] \to [k]$ é injetiva, então $m \leqslant k$

é verdadeiro. Tomemos $m > 1$ e $f\colon [m] \to [k+1]$ arbitrários, respectivamente, um natural e uma função injetiva.

Se $k+1 \not\in \mathrm{Im}(f)$ então $g\colon [m] \to [k]$ dada por $g(x) = f(x)$ está bem definida e é injetiva. Pela hipótese de indução temos $m \leqslant k$ portanto $m < k+1$.

Agora, se $k+1 \in \mathrm{Im}(f)$, continuamos a demonstração em 2 casos: $f(m) = k+1$ ou $f(j) = k+1$ para algum j, com $1 \leqslant j < m$.

Caso 1: Definimos $g\colon [m-1] \to [k]$ por $g(x) = f(x)$. De f injetiva e $f(m) = k+1$ temos que g está bem definida e é injetiva. Pela hipótese de indução $m-1 \leqslant k$, portanto, $m \leqslant k+1$, ou seja, $P(k+1)$ é verdadeiro.

Caso 2: Nesse caso vamos construir uma $h\colon [m] \to [m]$ tal que $f \circ h\colon [m] \to [k+1]$ recaia no caso anterior. Seja $j \in [m]$ tal que $j < m$ e $f(j) = k+1$. Defina h por

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq j, m \\ m & \text{se } x = j \\ j & \text{se } x = m \end{cases}$$

e temos que $f \circ h(m) = f(j) = k+1$. Pelo caso 1 $P(k+1)$ é verdadeiro. Portanto, pelo PIF, $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \geqslant 1$. □

O princípio das gavetas também é conhecido como princípio da casa dos pombos.

Exercício 166. Deduza PIF do PG.

O seguinte corolário do PG estabelece que a cardinalidade de qualquer conjunto A está bem definida quando $|A| \in \mathbb{N}$.

Corolário 167 *Se $A \neq \varnothing$ é conjunto e $f\colon [n] \to A$ e $g\colon [m] \to A$ são bijeções então $m = n$.*

Definição 168. A é **finito** se, e só se, $|A| = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

A é **infinito** se, e só se, não é finito.

A relação $\le$ entre cardinais no caso finito concorda com a representação conjuntista de número natural, os números ordinais de von Neumann, que apresentamos na página 77: $0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$, $2 = \{0,1\}, \dots, n = \{0,1,\dots,n-1\}$,e assim por diante. Assim $3 \le 4$ pois existe $f : \{0,1,2\} \to \{0,1,2,3\}$ injetiva, a saber $f(n) = n$.

Definição 169. Se $A \neq \varnothing$ é finito então uma bijeção f que prova a finitude é chamada de **enumeração** ou **contagem** dos elementos de A. Desse modo,

$$A = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$$

e dizemos que A tem n elementos.

Princípios de contagem

As seguintes propriedades de conjuntos finitos definem dois princípios básicos de contagem.

Teorema 170 (princípio aditivo) *Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Demonstração. Sejam A e B conjuntos disjuntos com cardinalidade n e m, respectivamente. Se um deles for vazio então o teorema vale como pode ser verificado facilmente. Vamos supor $m, n > 0$ e vamos mostrar uma bijeção $h : [n+m] \to A \cup B$.

Se $f : [n] \to A$ e $g : [m] \to B$ são bijeções então definimos h por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant n \\ g(x-n) & \text{se } n+1 \leqslant x \leqslant n+m. \end{cases}$$

h é sobrejetora: se $y \in A \cup B$, então $y \in A$ ou $y \in B$, mas não em ambos já que são disjuntos. Se $y \in A$ então $f(x) = y$ para algum $x \in [n]$, portanto $h(x) = y$. Se $y \in B$ então $g(x) = y$ para algum $x \in [m]$, portanto, $h(x+n) = g(x)$. Ainda, h é injetora: como A e B são disjuntos, se $h(x) = h(y)$ então $f(x) = f(y)$ ou $g(x) = g(y)$, em ambos os casos $x = y$. □

Exercício 171. Prove usando indução em n que se $A_1, \dots, A_n$ são conjuntos dois-a-dois disjuntos então

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Teorema 172 (princípio multiplicativo (PM)) *Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.*

Demonstração. Seja $n = |A|$ e $A = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ para alguma enumeração f de A. Definimos os conjuntos dois-a-dois disjuntos

$$E_i = \{(f(i), b) \in A \times B : b \in B\}$$

de modo que $|E_i| = |B|$, para todo i, pela bijeção $g_i\big((f(i), b)\big) = b$.

Assim, $E_1, \dots, E_n$ satisfaz a hipótese do exercício anterior e $\bigcup_i E_i$ é $A \times B$ (verifique), logo

$$|A \times B| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} E_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |B| = |A||B|$$

onde a segunda igualdade segue do exercício 171. □

Exercício 173. Prove o teorema acima usando exibindo uma bijeção entre $\big[|A||B|\big]$ e $A \times B$.

Exercício 174. Prove por indução em n que para todo $n \geqslant 1$, $|\{0,1\}^n| = 2^n$.

Teorema 175 *Todo conjunto A de cardinalidade $n \in \mathbb{N}$ tem 2^n subconjuntos distintos, isto é,*

$$\left|2^A\right| = 2^{|A|}.$$

Demonstração. Seja A um conjunto de cardinalidade n. Se $n = 0$ então $A = \varnothing$ é o único subconjunto dele mesmo e $2^0 = 1$. Senão $n \geqslant 1$, então existe uma bijeção $f : [n] \to A$. Como $A = \{f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)\}$, cada subconjunto $B \subset A$ corresponde a uma, e só uma, sequência $\mathbf{b}(B) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{0,1\}^n$ dada por

$$b_i = 1 \text{ se, e só se } f(i) \in B$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{b} : 2^A &\to \{0,1\}^n \\ B &\mapsto \mathbf{b}(B) \end{aligned}$$

assim definida é bijetiva (verifique), de modo que $|2^A| = |\{0,1\}^n| = 2^n$. □

7.1.3 Conjuntos enumeráveis

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é finito. De fato, se houvesse uma bijeção $f:[n]\to\mathbb{N}$ então tomaríamos o número natural $m = f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ de modo que m pertenceria à imagem de f contradizendo que $m > f(i)$ para todo $i \in [n]$.

Na definição 169 colocamos que se $A \neq \varnothing$ é finito então seus elementos podem ser enumerados $f(1), f(2), \dots, f(n)$, o mesmo vale quando $|A| = |\mathbb{N}|$ pois a bijeção f que estabelece a igualdade define uma sequência $f_0, f_1, \dots$. Nesses dois casos dizemos que A é enumerável. Vimos que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis e que $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Definição 176. O conjunto A é dito **enumerável** se é finito ou se tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.

A cardinalidade de $\mathbb{N}$ e, portanto, do conjuntos enumeráveis infinitos, é denotada por $\aleph_0$ (álefe-zero) e é o menor cardinal não finito.

7.1.4 Conjuntos infinitos

Vimos acima que $|\mathbb{R}|$, cuja cardinalidade é denotada por $\mathfrak{c}$ e chamada de **cardinalidade do contínuo**, é maior que $\aleph_0$. No caso de conjuntos infinitos não se pode falar em quantidade de elementos e, além disso, dizer simplesmente que são infinitos elementos não diz muita coisa desde que Cantor nos mostrou a possibilidade de vários "tamanhos" de infinito, como veremos a seguir.

TEOREMA 177 (TEOREMA DE CANTOR) *Para todo conjunto A, $|A| < |2^A|$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se A é finito então $|A| < 2^{|A|}$. Seja A um conjunto infinito e vamos mostrar que $|A| \le |2^A|$ e que $|A| \neq |2^A|$. A função

$$\begin{aligned} f\colon A &\to 2^A \\ a &\mapsto \{a\} \end{aligned}$$

é injetiva, portanto $|A| \le |2^A|$.

Para mostrar que $|A| \neq |2^A|$ provaremos (por contradição) que não há sobrejeção $g : A \to 2^A$. Suponhamos que $g : A \to 2^A$ é sobrejetiva. Definimos

$$B = \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

$B \subset A$ e g sobrejetiva implica que $B = g(b)$ para algum b. Se $b \in B$ então $b \notin g(b) = B$, pela definição do conjunto B. Também, se $b \notin B$ então $b \in g(b) = B$, ou seja, $b \notin B \Leftrightarrow b \in B$, uma contradição. □

Em particular, temos

$$|\mathbb{N}| < \left|2^{\mathbb{N}}\right| < \left|2^{2^{\mathbb{N}}}\right| < \left|2^{2^{2^{\mathbb{N}}}}\right| < \cdots$$

Uma dúvida que pode ter surgido nesse capítulo é saber se vale a lei de tricotomia para cardinalidades, ou seja, para quaisquer A e B, ou $|A| < |B|$, ou $|A| = |B|$, ou $|B| < |A|$. De fato, vale tal lei se assumirmos que vale o axioma da escolha. Nesse caso, vale que para qualquer conjunto A

1. se $|A| < |\mathbb{N}|$ então A é finito e enumerável;
2. se $|A| = |\mathbb{N}|$ então A é infinito e enumerável;
3. se $|A| > |\mathbb{N}|$ então A é infinito e não enumerável.

A hipótese do contínuo

Cantor conjeturou que não há um cardinal entre $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$. Por quase um século após a descoberta de Cantor de que há diferentes infinitos muitos matemáticos atacaram o problema de descobrir se existe um conjunto A tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |2^{\mathbb{N}}|$. Suspeitava-se que tal conjunto não existiria e a sentença que *não existe tal A* é conhecida como **hipótese do contínuo**. Gödel, nos anos 1930, provou que a negação da hipótese do contínuo não pode ser provada a partir dos axiomas ZFC. Em 1964, Paul Cohen descobriu que nenhuma prova pode deduzir a hipótese do contínuo a partir dos axiomas de ZFC. Tomados em conjunto, os resultados de Gödel e Cohen significa que dos axiomas padrão da Teoria dos Conjuntos não se pode decidir se a hipótese do contínuo é verdadeira ou falsa; nenhum conflito lógico surge a partir da afirmação ou negação da hipótese do contínuo. Dizemos que a hipótese do contínuo é independente de ZFC. Assumindo a hipótese do contínuo temos $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ e $\aleph_1 = |2^{\aleph_0}| = \mathfrak{c}$. De modo geral, para α ordinal, $\aleph_{\alpha+1} = |2^{\aleph_\alpha}|$.

7.1.5 O princípio das gavetas revisitado

O princípio das gavetas (ou da casa dos pombos), teorema 165, é outro princípio muito útil em demostrações: *se* $m > 1$ *objetos são guardados em* $n < m$ *gavetas então alguma gaveta tem mais que um objeto.*

Vejamos uns exemplos de aplicação. Dado $m \in \mathbb{N}$, existem números inteiros positivos a e b, com um $a \neq b$, tal que $m^a - m^b$ é divisível por 10. Considere os seguintes 11 números

$$m^1,\ m^2,\ m^3,\ m^4,\ m^5,\ m^6,\ m^7,\ m^8,\ m^9,\ m^{10},\ m^{11}$$

como há 10 possibilidades para o algarismo da unidade, dois desses números, digamos m^a e m^b com $a \neq b$, termina com o mesmo algarismo de modo que $m^a - m^b$ é divisível por 10.

Agora, seja n um natural. Em qualquer escolha de mais do que n números do conjunto $\{1,2,\dots,2n\}$ haverá dois números dentre os escolhidos tais que um é múltiplo do outro. Pelo teorema fundamental da aritmética, todo $r \in \{1,2,\dots,2n\}$ é de forma $r = 2^a t$ com únicos $a, t \in \mathbb{N}$ e t ímpar. De $r \leqslant 2n$ temos $t \leqslant n$. Logo, em mais do que n números dois deles terão o mesmo divisor ímpar, digamos $r = 2^a t$ e $s = 2^b t$. O maior deles é múltiplo do menor.

Exercício 178. Prove que se os pontos do plano euclidiano são pintados usando duas cores, então existem dois pontos de mesma cor que distam 1.

Solução: Fixe uma coloração qualquer dos pontos do plano com duas cores e tome um triângulo equilátero de lado 1 qualquer (figura 7.11). Dos 3 vértices, 2 devem ter a mesma cor pelo PG. □

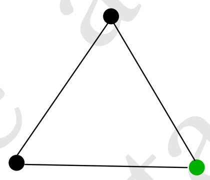

Figura 7.11: triângulo equilátero de lado 1

Exercício 179. Prove que se os pontos do plano euclideano são pintados usando três cores, então existem dois pontos de mesma cor que distam 1.

Solução. Tome uma circunferência Γ de centro C e raio $\sqrt{3}$. Se os pontos de $\Gamma \cup \{C\}$ recebem a mesma cor então há uma corda de comprimento 1 cujas extremidades têm a mesma cor. Senão em Γ há um ponto D de cor diferente da cor de C. Construa as

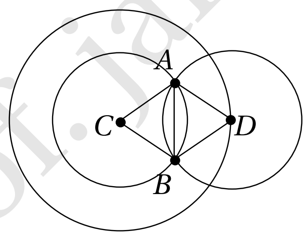

Figura 7.12: dentre os 4 pontos equidistantes A, B, C, D há 2 de mesma cor

circunferências de raio 1 centradas em C e em D (figura 7.12). O encontro delas em A e B define dois triângulos equiláteros ABC e ABD. Dentre os 4 vértices equidistantes haverá 2 da mesma cor pelo PG. □

TEOREMA 180 (PRINCÍPIO DAS GAVETAS GENERALIZADO) *Para quaisquer naturais* r *e* $t_1, t_2, \dots, t_r$ *vale o seguinte. Em toda distribuição de* $(t_1 - 1) + (t_2 - 1) + \cdots + (t_r - 1) + 1$ *objetos em* r *gavetas, existe um* $i \in \{1,2,\dots,r\}$ *tal que na* i*-ésima gaveta há pelo menos* t_i *objetos.*

DEMONSTRAÇÃO. A prova é por contradição, assuma que na gaveta i ficam no máximo $t_i - 1$ objetos, para todo i. Então o número total de objetos é $(t_1 - 1) + (t_2 - 1) + \cdots + (t_r - 1)$, que é uma contradição. □

Fazendo $t_i = t$ para todo i no teorema obtemos o seguinte resultado.

COROLÁRIO 181 *Em toda distribuição de $r(t-1)+1$ objetos em r gavetas há pelo menos t objetos numa mesma gaveta.*

Como aplicação desse resultado vejamos o seguinte, que é um teorema conhecido numa disciplina da combinatória conhecida como Teoria de Ramsey.

TEOREMA 182 (PRINCÍPIO DAS GAVETAS ORDENADO) *Toda sequência de $mn+1$ números reais possui uma subsequência crescente de $m+1$ termos ou uma subsequência decrescente $n+1$ termos.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ uma sequência numérica. Para cada a_i, seja C_i o número de termos da maior subsequência crescente começando em a_i. Se $C_i > m+1$, para algum i, então temos uma subsequência crescente de tamanho $m+1$. Senão, suponha $C_i \leqslant m$ para todo i e defina a função

$$\begin{aligned} \varphi\colon \{a_1, \dots, a_{mn+1}\} &\to \{1, 2, \dots, m\} \\ a_i &\mapsto C_i. \end{aligned}$$

Pelo corolário 181, em toda distribuição de $mn+1$ objetos em m gavetas haverá alguma gaveta com pelo menos $n+1$ objetos, digamos $G = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots a_{j_{n+1}}\}$ com, s.p.g., $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1}$.

Se, para algum k, vale $a_{j_k} < a_{j_{k+1}}$, então teríamos um sequência crescente de comprimento m começando em $a_{j_{k+1}}$ (por hipótese) e, consequentemente, uma sequência crescente de tamanho $s+1$ começando em a_{j_k}, o que dá uma contradição pois a cor de a_{j_k} é s.

Desse modo, concluímos que $a_{j_1} \geqslant a_{j_2} \geqslant \cdots \geqslant a_{j_{n+1}}$, i.e., é uma subsequência decrescente com $n+1$ termos. □

Agora, considere que n objetos são distribuídos aleatoriamente, de modo uniforme e independente, em r gavetas. Isso pode ser entendido de duas maneiras essencialmente equivalentes do ponto de vista probabilístico: (1) para cada objeto sorteamos com probabilidade $1/r$ uma das gavetas para guardá-lo ou (2) sorteamos uma das r^n funções φ do conjunto de objetos para o conjunto de gavetas com cada função tendo a mesma probabilidade de ser sorteada.

Denote por C a quantidade de pares de objetos que caem numa mesma gaveta. Note que isso é mais interessante se $n \leqslant r$, nesse caso, há $r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)$ modos diferentes de distribuir os n objetos sem repetir gaveta.

Se $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n))$ é uma escolha aleatória dentre as r^n funções então nessa escolha

$$\mathbb{P}[\,C=0\,] = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{r^n} = \prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{r}\right)$$

agora, usamos que $1-x < \exp(-x)$ e obtemos

$$\mathbb{P}[\,C=0\,] < \exp\left(-\frac{1}{r}\right)\exp\left(-\frac{2}{r}\right)\cdots\exp\left(-\frac{n-1}{r}\right) = \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2r}\right).$$

TEOREMA 183 (PRINCÍPIO DAS GAVETAS PROBABILÍSTICO) *Numa distribuição ao acaso, em r gavetas, de $n \leqslant r$ objetos a probabilidade com que exista pelo menos dois objetos numa mesma gaveta é maior que*

$$1-\exp\left(-\frac{n(n-1)}{2r}\right).$$

O conhecido *paradoxo dos aniversários* é o caso $n = 23$ e $r = 365$ na equação acima: $\mathbb{P}[\,C>0\,] > 0{,}5$, ou seja, apenas 23 pessoas são suficientes para que duas delas façam aniversário no mesmo dia com probabilidade maior que 1/2, supondo que os nascimentos ocorram uniformemente ao longo do ano. Para 75 ou mais pessoas, a probabilidade é maior do que 99,9%.

O paradoxo do aniversário é contra-intuitivo e só é chamado de "paradoxo" por causa do estranhamento causado pelo fato de que "apenas" 23 pessoas são necessárias para se obter 50% de probabilidade para duas pessoas nascerem no mesmo dia.

PG prova o PIF

Agora, para explorar o força do PG, vejamos que o PIF é uma consequência do PG na teoria dos conjuntos. Como provamos o PG do PIF, segue que tais princípio são logicamente equivalentes. Seja P um predicado dos números naturais e assuma

(i) $P(0)$ é verdadeiro e

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \to P(n+1))$ é verdadeiro.

Vamos demonstrar que $P(n)$ vale para todo n por contradição.

Suponha que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que não-$P(m)$. De (i) temos $m \geqslant 1$ e assim podemos definir uma função $\varphi\colon [m] \to [m-1]$ por

$$\varphi(i) = \begin{cases} i & \text{se } P(i) \\ i-1 & \text{se não-}P(i). \end{cases}$$

Tal função está bem definida. Pelo PG existem $i \neq j$ no domínio da φ tais que $\varphi(i) = \varphi(j)$, pois $\varphi\colon [m] \to [m-1]$ não pode ser injetiva.

De $i \neq j$, $\varphi(i) = \varphi(j)$ e da definição da φ temos que

$$\varphi(i) = i = j-1 = \varphi(j) \quad \text{ou} \quad \varphi(i) = i-1 = j = \varphi(j).$$

No primeiro caso, $j = i+1$, vale $P(i)$ mas não vale $P(j) = P(i+1)$ contrariando a hipótese de $P(i) \to P(i+1)$ verdadeiro. No segundo caso a dedução é análoga e contraria $P(j) \to P(j+1)$ verdadeiro. Com isso, a hipótese assumida de haver $m \in \mathbb{N}$ tal que não-$P(m)$ não pode ser verdadeira, ou seja, $P(n)$ vale para todo natural n. $\square$

Exercícios

1. Verifique que $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, dada por $g(x) = 2^x$ é bijetiva.

2. Verifique que $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ por
$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } p = 0 \\ 2^p 3^q, & \text{se } p > 0 \\ 5^{-p} 3^q, & \text{se } p < 0 \end{cases}$$
é bijetiva.

3. Seja A um conjunto de cardinalidade n e f uma enumeração de A. Dado $B \subseteq A$, defina $b_i \in \{0,1\}$ para todo $i \in [n]$, por $b_i = 1$ se, e só se, $f(i) \in B$. Verifique que a função
$$\begin{aligned} \mathbf{b}\colon 2^A &\to \{0,1\}^n \\ B &\mapsto (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{aligned}$$
é bijetiva.

4. A **função de pareamento de cantor** é uma função que atribui números naturais consecutivos a pontos ao longo das diagonais no plano (veja a figura 7.13). A função é $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por
$$f(u,v) = \frac{(u+v)(u+v+1)}{2} + u.$$
Prove que essa função é uma bijeção e determine a inversa.

5. Prove ou dê um contraexemplo para a seguinte sentença: A é infinito se, e somente se, $|A| \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos e não vazios. Prove usando indução que
$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

7. Seja $A \subset \mathscr{U}$ tal que $|2^A| = n$. Determine $|2^B|$ se
   (a) $B = A \cup \{x\}$ para algum $x \in \mathscr{U} \setminus A$;
   (b) $B = A \cup \{x, y\}$ para algum $x, y \in \mathscr{U} \setminus A$;
   (c) $B = A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ para $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathscr{U} \setminus A$.

8. Mostre que o conjunto dos inteiros ímpares (números da forma $2k+1$ com $k \in \mathbb{Z}$) tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$.

9. Verifique se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir. No caso de ser falsa, apresente um contra-exemplo.
   (a) se A e B são infinitos então $A \cap B$ é infinito;

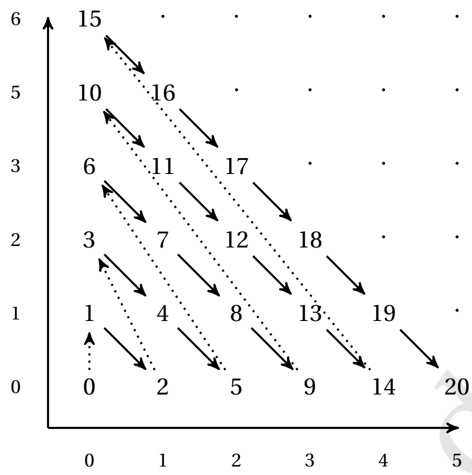

Figura 7.13: função de pareamento de Cantor

   (b) se B é infinito $A \subseteq B$ então A é infinito;
   (c) se B é finito $A \subseteq B$ então A é finito;
   (d) se A é finito $A \subseteq B$ então B é finito.

10. Use o argumento da diagonal de Cantor para mostrar quer $\wp(\mathbb{N})$ não é enumerável.
11. Prove que acrescentar um novo elemento a um conjunto finito resulta num conjunto finito.
12. Prove que remover um elemento de um conjunto infinito resulta num conjunto infinito
13. Prove que todo subconjunto de um conjunto finito também é finito.
14. Prove que todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável.
15. Prove que todo conjunto infinito contém um subconjunto próprio de mesma cardinalidade.
16. Prove ou refute: se A não é enumerável então $|A| = |\mathbb{R}|$.
17. Prove ou refute: Se $A \subseteq B \subseteq C$ e A e C infinitos e enumeráveis então B é infinito enumerável.
18. Prove ou refute : Todo conjunto infinito é subconjunto de um conjunto infinito enumerável.
19. Prove ou refute : Se $A \subseteq B$ e A é infinito e enumerável e B não enumerável, então $B \setminus A$ não é enumerável.
20. Prove que se A e B são enumeráveis então $A \cup B$ é enumerável e $A \times B$ é enumerável.
21. Use o PG para mostrar que para quaisquer seis (ou mais) usuários do *facebook*, há sempre três deles amigos entre si ou há três deles desconhecidos entre si.
22. Use o PG para mostrar que em grupo com 17 (ou mais) pessoas, podemos encontrar três pessoas que se amam entre si, três que se odeiam entre si ou três que são indiferentes entre si.
23. Prove que o PM é equivalente ao PIF, portanto ao princípio da descida infinita de Fermat, ao PBO e ao PG (*sugetão*: PM⇒PG e PIF⇒PM).
24. Enuncie formalmente e dê uma prova para o **princípio das gavetas infinitário**: *se todo número natural é guardado em alguma dentre r gavetas então alguma gaveta tem um quantidade infinita enumerável de números naturais.*
25. Demonstre usando o princípio da casa dos pombos as afirmações abaixo.
   (a) Em qualquer escolha de mais do que n números do conjunto $[2n]$ haverão dois deles primos entre si.
   (b) Se escolhemos 13 pontos no interior de um retângulo 3×4, então existem dois pontos tais que sua distância é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

(c) $(a-b)(a-c)(b-c)$ é par, para quaisquer a, b e c inteiros.

(d) Chico e sua esposa foram a uma festa com três outros casais. No encontro deles houveram vários apertos de mão. Ninguém apertou a própria mão ou a mão da(o) esposa(o), e ninguém apertou a mão da mesma pessoa mais que uma vez. Após os cumprimentos Chico perguntou para todos, inclusive para a esposa, quantas mãos cada um apertou e recebeu de cada pessoa uma resposta diferente. Quantas mãos Chico apertou?

(e) Os pontos de uma reta são coloridos com 12 cores. Prove que existem dois pontos com a mesma cor tal que a distância entre eles é um número inteiro.

(f) Suponha que o conjunto $[2n]$ foi dividido em dois subconjuntos com n elementos cada. Os elementos do primeiro conjunto foram ordenados em ordem crescente, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, e os do segundo conjunto ordenados em ordem decrescente, $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Prove que $\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2$ (*dica*: para cada i, de a_i e b_i, um pertence a $[n]$ o outro não).

26. Cada estrada na Bozolândia é de mão única e cada par de cidades é conectada por exatamente uma estrada. Prove que existe uma cidade que pode ser alcançada a partir de qualquer outra cidade ou diretamente ou indo através de no máximo uma outra cidade.

27. Num torneio de queda-de-braço no sistema de todos contra todos exatamente uma vez, cada jogo termina em uma vitória ou uma derrota. Prove que se são n competidores então podemos rotulá-los $P_1, P_2, \dots, P_n$ de tal forma que P_1 derrotou P_2, P_2 derrotou P_3, e assim por diante até, P_{n-1} derrotou P_n.

Demonstração do Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Antes de demonstrar o teorema vamos adotar a seguinte convenção notacional: $\overline{A}^{X} = X \setminus A$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam A e B conjuntos tais que $|A| \le |B|$ e $|B| \le |A|$ e vamos mostrar que $|A| = |B|$. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ funções injetivas, que existem por hipótese. Vamos mostrar que existe uma bijeção $h : A \to B$.

Definimos, para todo $X \subset A$

$$F(X) = A \setminus g(B \setminus f(X)) = A \setminus g\left(\overline{f(X)}^{B}\right) = \overline{g\left(\overline{f(X)}^{B}\right)}^{A}$$

onde $f(X)$ é o subconjunto de B formado pela imagem dos elementos de X. Vamos mostrar que existe $A_0 \subset A$ tal que $F(A_0) = A_0$. Primeiro, notemos que par uma sequência qualquer $(A_i : i \geqslant 1)$ de subconjuntos de A temos

$$\begin{aligned}
F\left(\bigcap_{i\geqslant 1} A_i\right) &= \overline{g\left(\overline{f(\bigcap_{i\geqslant 1} A_i)}^{B}\right)}^{A} && \text{por definição}\\
&= \overline{g\left(\overline{\bigcap_{i\geqslant 1} f(A_i)}^{B}\right)}^{A} && \text{pois f é injetiva}\\
&= \overline{g\left(\bigcup_{i\geqslant 1} \overline{f(A_i)}^{B}\right)}^{A} && \text{por De Morgan}\\
&= \overline{\bigcup_{i\geqslant 1} g\left(\overline{f(A_i)}^{B}\right)}^{A} && \text{pois g é injetiva}\\
&= \bigcap_{i\geqslant 1} \overline{g\left(\overline{f(A_i)}^{B}\right)}^{A} && \text{por De Morgan}\\
&= \bigcap_{i\geqslant 1} F(A_i) && \text{por definição de F.}
\end{aligned}$$

Tomemos

$$A_0 = A \cap F(A) \cap F^2(A) \cap F^3(A) \cap \cdots$$

onde $F^n(A) = F(F^{n-1}(A))$ donde temos

$$F(A_0) = F\Big(A \cap F(A) \cap F^2(A) \cap F^3(A) \cap \cdots\Big) = F(A) \cap F(F(A)) \cap F(F^2(A)) \cap F(F^3(A)) \cap \cdots$$

logo $F(A_0) = F(A) \cap F^2(A) \cap F^3(A) \cap F^4(A) \cap \cdots = A_0$ pois $A \supset F(A) \supset F^2(A) \supset \cdots$.

Desse modo $h : A \to B$ dado por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A_0 \\ g^{-1}(x), & \text{caso contrário, isto é } x \in g\Big(\overline{f(A_0)}^{B}\Big) \end{cases}$$

é uma bijeção. Que é sobrejetiva: seja $y \in B$. Se $y \in f(A_0)$, então $y = f(x)$ para $x \in A_0$, portanto $y = h(x)$; senão, $y \not\in f(A_0)$, ou seja $y \in \overline{f(A_0)}^B$, logo $g(y) \not\in A_0$ logo $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$, portanto h é sobrejetora. Que é injetiva: sejam $x, y \in A$ com $x \neq y$. A demonstração segue em três casos; (i) se $x, y \in A_0$ então $h(x) = f(x) \neq f(y) = h(y)$; (ii) se $x \in A_0$, então $h(x) = f(x) \in f(A_0)$, e se $y \not\in A_0$, ou seja $y \in g\Big(\overline{f(A_0)}^B\Big)$, então $h(y) = g^{-1}(y) \in g^{-1}\Big(g\Big(\overline{f(A_0)}^B\Big)\Big) = \overline{f(A_0)}^B$, portanto $h(x) \neq h(y)$; (iii) se $x, y \not\in A_0$ então $h(x) = g^{-1}(x) \neq g^{-1}(y) = h(y)$. Em todos os casos $h(x) \neq h(y)$, logo h é injetora. □

O problema de Hadwiger–Nelson (1950)

Qual é o menor número de cores necessárias para colorir os pontos do plano euclidiano de modo que não existam dois pontos da mesma cor que distam 1*, quatro, cinco ou seis?*

Pelo exercício 178 acima, são necessárias pelo menos 3 cores e pelo exercício 179, são necessárias pelo menos 4 cores. O exercício 179 pode ser resolvido por um método ao do exercício 178: fixe uma 3-coloração do plano e tome uma realização do grafo de Moser, cujo diagrama está mostrado na figura 7.14, no plano e com todas arestas de comprimento 1. No grafo de Moser qualquer 3-coloração dos vértices implica em dois vértices adjacentes monocromáticos (verifique). A 3-coloração do plano induz

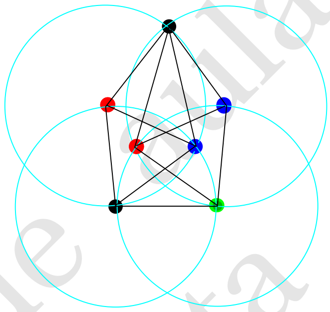

Figura 7.14: grafo de Moser com vértices adjacentes equidistantes e 4-coloridos

uma 3-coloração nos vértices grafo de Moser e dois deles, adjacentes, devem receber a mesma cor. Tais vértices distam 1 e são monocromáticos. Essa estratégia foi usada por Aubrey de Grey, um matemático amador, que em 2018 provou que não é possível colorir o plano com 4 cores. Agora, a construção é muito grande e a verificação foi feita por computador.

Um ladrilhamento do plano com hexágonos regulares prova que com sete cores nenhum par de pontos que distam 1 recebem a mesma cor. Essa solução é atribuída ao matemático John R. Isbell. As regiões hexagonais são 7-coloridas de modo que os seis

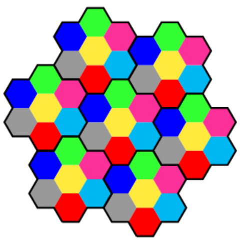

Figura 7.15: ladrilhamento 7-colorido do plano

vizinho de um hexágono têm seis cores diferentes e diferente do hexágono central (figura 7.15). Para hexágonos regulares de lado 0,45, o diâmetro é 0,9, e não há pontos da mesma cor que distam menos que 1,19.