2 Teoria intuitiva de conjuntos

2.1.1 Abordagem intuitiva da teoria dos conjuntos

A elegante teoria dos conjuntos desenvolvida por Ernest Zermelo (1871–1953) e Abraham Fraenkel (1891–1965) e que teve importantes contribuições de outros outros, conquistou a matemática moderna que fez dela um dos seus pilares fundamentais. A ideia por trás dessa fundamentação é considerar que todos os objetos é estruturas ma temáticas são definíveis como conjuntos, números, conjuntos, elementos dos conjuntos, tudo é conjunto. A teoria foi batizada como sistema ZFC em homenagem a Zermelo e Fraenkel, a letra C vem do inglês *choice* em referência ao axioma da escolha, que levanta polêmica entre alguns matemáticos.

Conjunto é informalmente entendido como uma *coleção* de entidades, ou objetos, chamados de **elementos** do conjunto e eles mesmos podem ser conjuntos. Um elemento x **pertence** ao conjunto A se x é um elemento de A o que é denotado por

$$x \in A$$

e escrevemos a negação como $x \notin A$.

Essa sentença não define conjunto, ela é circular pois usa o termo *coleção* que é sinônimo de conjunto e não esclarece o que são objetos. Não definimos conjunto e assumimos que todos têm alguma noção, mesmo que possivelmente errada, da concepção de conjuntos.

Axiomas e termos indefinidos são inevitáveis em um tratamento rigoroso da matemática. A abordagem moderna em matemática aceita a existência de termos indefinidos, desde que sejam usados adequadamente. Em última análise, objetos indefinidos não nos incomodam, porque tais objetos não existem em si mesmos, pois são determinados pelas propriedades axiomáticas hipotetizadas para eles, e são essas propriedades que usamos nas provas.

Convencionamos usar letras maiúsculas para conjuntos e minúsculas para elementos. Entretanto, um conjunto pode ser elemento de outro conjunto assim, um conjunto representado por uma letra minúscula deve ser entendido como um elemento de algum outro conjunto.

Igualdade de conjuntos *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos.* Ou seja, a única propriedade distintiva de um conjunto é sua lista de membros.

Conjunto vazio *Há um (único) conjunto sem elementos, denotado por $\varnothing$ e chamado de conjunto vazio.*

Especificação de conjuntos Da igualdade de conjuntos podemos inferir que especificar todos os elementos de um conjunto é suficiente para defini-lo, podemos fazer isso de diversas formas.

Se um conjunto tem poucos elementos, podemos listá-los entre chaves "$\{\}$" separados por vírgulas. Por exemplo, o conjunto dos algarismos primos é formado pelos números inteiros 2, 3, 5 e 7 e escrevemos $\{2,3,5,7\}$. O conjunto dos algarismos indo-arábicos é $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Quando os conjuntos têm muitos elementos não é viável escrever todos seus elementos e uma solução comum, mas que só usamos quando o contexto não dá margem a ambiguidade sobre seu significado, é o uso de reticências $(\dots)$. Por exemplo, o conjunto dos naturais menores que 2.017 é descrito por $\{0,1,\dots,2.016\}$; o conjunto das letras do alfabeto $\{a,b,c,\dots,z\}$; o conjunto dos naturais pares $\{0,2,4,6,\dots\}$. No geral é preciso muito cuidado e a recomendação é que essa solução deve ser evitada pois, por exemplo, o que é o conjunto $\{3,5,7,\dots\}$?

Exercício 14. Encontre duas respostas factíveis para a pergunta acima.

Além de listar os elementos de um conjunto explicitamente, também podemos definir conjunto por *especificação* (também chamado de *compreensão*), onde damos uma regra de como gerar todos os seus elementos. Podemos especificar um conjunto através de uma ou mais propriedade de seus elementos e, nesse caso, usamos a notação como

$$A = \{x \in D \colon P(x)\}$$

em que P é um predicado (sentença aberta). Assim, $a \in A$ é verdadeiro se, e só se, a é um elemento do domínio D para o qual $P(a)$ é verdadeiro. Por exemplo, $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 \le 2\}$ corresponde ao intervalo fechado da reta real composto pelo números cujo quadrado é no máximo 2, ou ainda,o intervalo $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$; o conjunto dos números naturais primos é o conjunto dos números naturais maiores que 1 que não têm divisores além do 1 e do próprio número. Essa sentença pode ser escrita como "se $x = yz$ então $y = 1$ ou $z = 1$ de modo que o conjunto dos números primos é especificado por

$$\big\{x \in \mathbb{N} \colon x > 1 \text{ e para todo } y \text{ e todo } z \text{ naturais, se } yz = x \text{ então } y = 1 \text{ ou } z = 1)\big\}.$$

ou, em símbolos, $\big\{x \in \mathbb{N} \colon \text{ e } x > 1 \text{ e } \forall y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}(yz = x \to y = 1 \text{ ou } z = 1)\big\}$.

Há ainda um esquema de substituição, uma descrição parametrizada usada para os elementos de um conjunto. Nesse caso, se f é uma função com um domínio que inclui o conjunto D então formamos o conjunto dos $f(x)$ tal que $x \in D$. Por exemplo, o conjunto dos inteiros ímpares é dado por

$$\{2k+1\colon\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Observamos que $\{2,3,5,7\}$ pode ser especificado. Observamos também que os elementos de um conjunto podem, eles mesmos, serem conjuntos

$$X = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}.$$

Observamos, ainda, que conjuntos não contêm elementos repetidos e não existe ordem na descrição dos elementos.

$$\begin{aligned}
\{1,1,1\} &= \{1\}\\
\{1,2,1,1\} &= \{1,2\}\\
\{1,2,3\} &= \{1,3,2\} = \{2,3,1\} = \{2,1,3\} = \dots
\end{aligned}$$

Paradoxo de Russell A definição de um conjunto pode usar outros conjuntos e, nesse caso, deve-se tomar cuidado para evitar definições autorreferentes, ou circulares, que podem não ter sentido. Um exemplo clássico: *o que é o conjunto $S = \{x : x \notin x\}$?, $S \in S$?* Conhecido pelo nome Paradoxo de Russell, teve um papel muito importante no desenvolvimento da teoria de conjuntos.

Inclusão e conjunto das partes

Definição 15. O conjunto A é **subconjunto** de um conjunto B, fato denotado por $A \subset B$ se, e só se, é verdadeira a sentença "todo elemento de A é elemento de B", ou seja, para todo x

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Usamos $A \subseteq B$ para expressar $A \subset B$ e usamos $A \subsetneq B$ para expressar $A \subset B$ e $A \neq B$, nesse caso dizemos que é **subconjunto próprio** de B. A negação de $A \subset B$, *A não é subconjunto* de B, é escrita como $A \not\subset B$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
A \not\subset B \quad &\Leftrightarrow \quad \text{não}\big(\text{ para todo } x\,(x \in A \to x \in B)\big)\\
&\Leftrightarrow \quad \text{existe } x,\ \text{não}(x \in A \to x \in B)\\
&\Leftrightarrow \quad \text{existe } x\,(x \in A \text{ e } x \notin B),
\end{aligned}$$

ou seja, $A \not\subset B$ se e somente se há um elemento de A que não pertence a B. Também, é verdade que $A = B$ e e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$ e, assim, $A \neq B$ se e somente se $A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$.

O nosso primeiro resultado sobre conjuntos é o seguinte.

TEOREMA 16 *Para qualquer conjunto A, $\varnothing \subset A$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja A um conjunto qualquer. A condicional

$$\text{se } x \in \varnothing \text{ então } x \in A$$

é verdadeira para todo x pois $x \in \varnothing$ é falso. Como A é arbitrário, $\varnothing \subset A$ para todo A. □

Exercício 17. Verifique se é verdadeiro ou não: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$, para quaisquer conjuntos A, B e C.

Definição 18. O **conjunto das partes de** A, isto é, conjunto formado por todos os subconjuntos de A. Algumas referências usam $\wp(A)$ (ou $\mathscr{P}(A)$) para denotá-lo. Aqui usaremos, preferencialmente, 2^A.

Exercício 19. Descreva o conjunto das partes do conjunto vazio. Descreva o conjunto das partes do conjunto $\{a\}$.

Operações sobre conjuntos

As operações sobre conjuntos definem novos conjuntos. A seguir descrevemos as quatro operações mais usuais e suas propriedades.

União $A \cup B$ denota a união dos conjuntos A e B que é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B

$$A \cup B = \{x\colon\ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Intersecção $A \cap B$ denota a intersecção dos conjuntos A e B que é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Diferença $A \setminus B$ denota o conjunto dos elementos pertencem a A e não a B

$$A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Diferença simétrica $A \triangle B$ denota o conjunto dos elementos que pertencem exclusivamente a A ou a B mas não a ambos

$$A \triangle B = \{x \colon x \in A \cup B \text{ e } x \notin A \cap B\}.$$

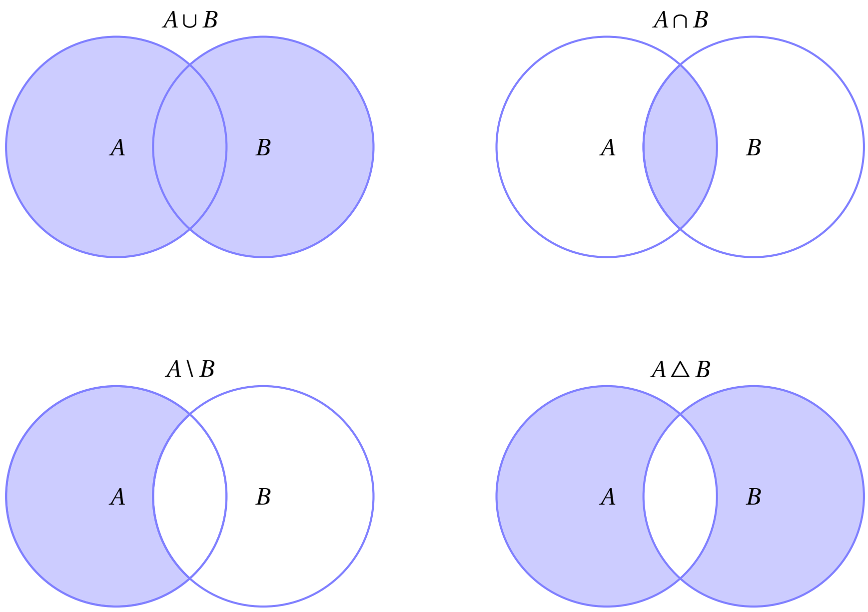

Figura 2.1: Diagrama de Venn das operações sobre conjuntos.

Fica como exercício a verificação das propriedades descritas na tabela 2.5 abaixo. Algumas delas seguem das equivalências lógicas notáveis, exercício 7, página 14 (as outras seguem de alguma equivalência lógica que você deve provar).

Identidade	$A \cap (C \setminus A) = \varnothing$ $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Idempotência	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Comutativa	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Associativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Absorção	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
De Morgan	$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

Tabela 2.5: Propriedades das operações.

Exercício 20. Verifique que para quaisquer conjuntos A e B as duas inclusões abaixo são verdadeiras

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B.$$

Exercício 21. Seja R um conjunto cujos elementos são conjuntos. Denote por $\bigcup R$ a união dos elementos de R, por exemplo, se $A = \{a, b, c\}$, então $\bigcup A = a \cup b \cup c$. Tome $R = \{\{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{1, 3\}\}, \{\{2\}, \{2, 3\}\}\}$ e descreva os conjuntos $\bigcup R$ e $\bigcup\bigcup R$.

Partição de um conjunto

Dizemos que A e B são conjuntos **disjuntos** se $A \cap B = \varnothing$.

Definição 22. Se X é um conjunto, então dizemos que o conjunto P é uma **partição** de X se:

1. para todo $a \in P$, $a \in 2^X \setminus \{\varnothing\}$; em outras palavras, todo elemento de P é um subconjunto não vazio de P.
2. Para todo $a \in P$ e todo $b \in P$, se $a \neq b$ então $a \cap b = \varnothing$; em outras palavras, quaisquer dois elementos distintos de P são disjuntos.
3. $\bigcup P = X$; em outras palavras, a união dos elementos de P é exatamente X.

Exercício 23. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Para cada $i \in \{0, 1, 2\}$ denote por R_i o subconjunto dos números inteiros que deixam resto i quando divididos por 3. Prove que $\{R_0, R_1, R_2\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

2.1.2 Abordagem axiomática da teoria dos conjuntos

A teoria axiomática dos conjuntos utilizada na matemática é formalizada a partir de uma coleção de axiomas que nos permitem construir, essencialmente a partir do zero, um universo grande o suficiente para manter toda a matemática sem contradições aparentes, evitando os paradoxos que podem surgir na teoria intuitiva dos conjuntos. Vamos descrever os dez axiomas usuais da teoria ZFC abaixo, esses axiomas garantem a existência de conjuntos específicos ou permite construir conjuntos a partir de outros conjuntos.

Os axiomas da ZF são adequadamente formulados na linguagem da lógica clássica de primeira ordem, mas aqui os axiomas são descritos informalmente. Lembremos que na teoria axiomática (formal) tudo é conjunto, a ideia é que podemos representar qualquer entidade matemática como conjunto.

Axioma do vazio Existe um conjunto que não tem elementos. Na linguagem formal[3]

$$\exists a \forall x (x \notin a).$$

Esse conjunto sem elementos é o conjunto vazio.

Axioma da extensionalidade Quaisquer dois conjuntos com os mesmos elementos são iguais.

$$\forall a \forall b ((a = b) \leftrightarrow (\forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)).$$

Por esse axioma o conjunto vazio é único. Se existissem x e y conjuntos vazios diferentes, então pelo axioma da extensão existiria um elemento de x que não pertenceria a y ou um elemento de y não em x. Em ambos os casos há contradição ao fato de x e y serem vazios. Como o vazio é único podemos atribuir-lhe uma representação, que é o clássico $\varnothing$.

Axioma do par Dados conjuntos y e z, existe um conjunto a tal que se $x \in a$ então $x = y$ ou $x = z$. Pelo axioma anterior esse conjunto é único, é o conjunto $\{y, z\}$.

$$\forall y \forall z \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow x = y \text{ ou } x = z).$$

Axioma da união Para qualquer conjunto z existe um conjunto $\bigcup z$ tal que $y \in \bigcup z$ se, e só se, $y \in w$ para algum $w \in z$. De modo bem informal, se $z = \{a, b, c, \dots\}$ então $a \cup b \cup c \cup \cdots$ é um conjunto.

$$\forall z \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow \exists y (x \in y \text{ e } y \in z)).$$

Assim, dados os conjuntos x e y temos o conjunto $\{x, y\}$, como vimos acima, e agora temos $\bigcup\{x, y\}$, ou seja, $x \cup y$.

[3] Na linguagem formal as variáveis intencionam representar conjuntos, por isso nessa parte do texto, e só nela, conjuntos aparecem representados por letras minúsculas.

Axioma das partes Para qualquer conjunto y, existe o conjunto a tal que $x \in a$ se, e só se, $x \subset y$.

$$\forall y \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow \forall z (x \in x \to z \in y)).$$

O conjunto a é único e é o conjunto das partes de y.

Axioma da especificação De um conjunto y e um predicado P onde a não ocorre livre, formamos o conjunto $a = \{x \in y \colon P(x)\}$

$$\forall y \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in y \text{ e } P(x)).$$

Esse axioma também é chamado de compreensão, separação ou seleção pois estamos "selecionando" do conjunto y os elementos que satisfazem P. Em $P(x)$ a variável x aparece livre e a não, para evitar auto referência que levaria ao paradoxo de Russel, por exemplo.

Exercício 24. Qual é a consequência de tomarmos por P a fórmula $x \neq x$? E se P for a fórmula $x \notin a$, assumindo que a pode ocorrer livre em P (faça $y = \{\varnothing\}$ e $x = \varnothing$)?

Notemos a definição de união como foi dada ingenuamente, $\{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}$, não se enquadra nesses axiomas. Por outro lado, podemos formar $\{x \in A \colon x \in B\}$ que é $A \cap B$, a especificação permite escrever a intersecção. Ainda, se x é não vazio então $\bigcap x$, a intersecção dos elementos de x é

$$\left\{ y \in \bigcup x \colon \forall z \in x, y \in z \right\}.$$

De fato, especificação não é um axioma, mas um esquema de axiomas, um para cada predicado que pode ser escrito na linguagem formal da teoria dos conjuntos.

Por fim, como já dissemos, note-se a forma diferente com que se escreve um conjunto por especificação, com respeito a teoria intuitiva. Agora não temos mais o paradoxo de Russell pois se

$$S = \{x \in A \colon x \not\in x\}$$

então $S \in S$ se e só se $S \in A$ e $S \not\in S$ o que não é contraditório, a conclusão é que $S \not\in A$. Como subproduto temos o fato já mencionado de que em teoria dos conjuntos *não há conjunto universo.*

$$\neg \exists y \forall x (x \in y).$$

De fato, se existisse então tomaríamos-o por A no argumento acima o que daria uma contradição pois $S \not\in A$.

Axioma da infinidade Assegura a existência de um conjunto infinito: existe um conjunto que tem $\varnothing$ como elemento e, se x é elemento, também é $x \cup \{x\}$

$$\exists a (\varnothing \in a \text{ e } \forall x (x \in a \to x \cup \{x\} \in a))$$

Um conjunto I que tem $\varnothing$ como elemento e também $x \cup \{x\}$ sempre que $x \in I$ é chamado de **conjunto indutivo**. Essa construção nos dá uma codificação dos números naturais na teoria dos conjuntos: $\varnothing$ representa 0 e $x \cup \{x\}$ representa $x+1$. Efetivamente, estabelece cada número natural como o conjunto de todos números menores, e.g., $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, essa definição de números naturais é atribuída ao matemático John von Neumann.

Axioma da fundação (ou da regularidade) Cada conjunto não vazio a tem um elemento b com $a \cap b = \varnothing$.

$$\forall a (a \neq \varnothing \to \exists b (b \in a \text{ e } a \cap b = \varnothing)).$$

Esse axioma evita construções "estranhas" como $x \in x$ e sequências infinitas da forma $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \cdots$, ou seja, garante que todo conjunto não-vazio possui um elemento $\in$-minimal. Isso significa que o axioma garante que a pertinência "é bem fundada" (em analogia à definição 142, na página 63).

Se x e y são conjuntos, então também é $z = \{x, y\}$ e, ainda, $z \neq \varnothing$. Então ou $x \cap z = \varnothing$ ou $y \cap z = \varnothing$, portanto, $y \notin x$ ou $x \notin y$. Disso concluímos que não existem conjuntos x e y tais que $x \in y$ e $y \in x$ e, feito $x = y$ concluímos que não existe x tal que $x \in x$.

O próximo axioma é controverso para alguns matemáticos (e.g., os matemáticos construtivistas[4]) e até hoje quando usado é explicitamente mencionado. Ainda mais, a bibliografia faz referência aos sistemas ZFC e ZF para a teoria dos conjuntos, dependendo de se o axioma da esclha ("C", de *choice*) é considerado ou não.

Embora seu enunciado pareça coerente há alguns enunciados equivalentes, ou decorrentes dele, que não são intuitivos como, por exemplo, o paradoxo de Banach–Tarski[5]. Por outro lado, a quantidade de resultados importantes na matemática,

[4]Objetos matemáticos cuja existência depende do axioma da escolha não podem ser construídos explicitamente.

[5]Diz que, informalmente, existe uma forma de particionar uma esfera em uma quantidade finita de partes e remontar essas partes para formar duas esferas disjuntas, idênticas à primeira.

como o Teorema de Hahn–Banach e a existência de base para espaços vetoriais, que usam o axioma da escolha o tornam imprescindível; alguns deles são, de fato, equivalentes ao axioma da escolha, como o princípio da boa-ordem: *todo conjunto admite uma boa ordem* (veremos mais sobre isso a partir da página página 59) . Em particular, segue daí a afirmação de que os números reais podem ser ordenado de modo que qualquer subconjunto não vazio contenha um menor elemento.

Axioma da escolha Para todo conjunto x de conjuntos não vazios e dois-a-dois disjuntos existe um conjunto z que tem exatamente um elemento em comum com cada conjunto de x.

O conjunto z "escolhe" um elemento de cada y em x. Esse axioma tem um enunciado equivalente que usa uma função (conceito que ainda precisa ser definido na teoria) chamada de *função escolha. Para qualquer conjunto x formado de conjuntos não-vazios, existe uma função $f\colon x \to \bigcup x$ que atribui para cada $y \in x$ uma imagem $f(y) \in y$.*

Uma observação importante é que, embora f "escolha" um elemento de cada elemento de x, o axioma nada diz respeito de como se faz isso, sobre a existência de um procedimento efetivo para realizar uma escolha.

Para concluir, o último axioma da teoria diz que qualquer coisa razoável que fizermos com os elementos de um conjunto resulta num conjunto, é um axioma importante para a definição de ordinais.

Axioma da substituição Dado um conjunto x e um predicado $R(s,t)$ com a propriedade $\forall s \exists! t R(s,t)$, existe o conjunto z tal que $y \in z$ se, e só se, existe $w \in x$ para o qual $R(w,y)$ é verdadeiro.

2.1.3 Par ordenado e Produto cartesiano

Nesta seção definimos o produto cartesiano de dois conjuntos dados a partir dos axiomas.

Dados dois conjuntos não vazios A e B, tomemos um elemento qualquer de cada um, digamos $a \in A$ e $b \in B$. Pelo axioma do par $\{a,b\}$ é conjunto e por extensionalidade $\{a,b\} = \{b,a\}$.

Por **par ordenado** entendemos um par de elementos de modo que a ordem em que tais elementos se apresentam importa e, usualmente, denotamos-o por (a,b), de modo que $(a,b) \neq (b,a)$ exceto, possivelmente, quando $a = b$.

Denotamos por $A \times B$ o conjunto de todos os tais pares (a,b) com $a \in A$ e $b \in B$, isto é, intuitivamente

$$A \times B = \{(a,b) \colon a \in A \text{ e } b \in B\}$$

chamado de **produto cartesiano** de A com B. A seguir vamos definir o produto cartesiano (informalmente) dentro da teoria axiomática.

A definição mais simples de par ordenado em termos de conjunto foi dada pelo matemático polonês Kazimierz Kuratowski (1896–1980).

Definição 25. O par ordenado (a,b) é dado pelo conjunto $\{\{a\},\{a,b\}\}$

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Agora, demonstramos que a definição acima faz o prometido, cumpre papel de definir par ordenado.

TEOREMA 26 *Se $(a,b) = (x,y)$ então $a = x$ e $b = y$.*

COROLÁRIO 27 *Se $a \neq b$ então $(a,b) \neq (b,a)$.*

Para provar o teorema usaremos o seguinte resultado auxiliar.

LEMA 28 *Se $\{a,x\} = \{a,y\}$ então $x = y$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $x = a$ então $y = a$, portanto $x = y$. Se $x \neq a$ e $\{a,x\} = \{a,y\}$, então $x \in \{a,y\}$, logo $x = a$ ou $x = y$. Portanto, $x = y$. □

Demonstração do teorema. A prova do teorema é por casos: em dois casos (1) $a = b$ e (2) $a \neq b$. Suponhamos que $(a,b) = (x,y)$, isto é, $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\}$.

Caso 1. Se $a = b$ então $(a,b) = \{\{a\}\}$ e temos as seguintes identidades[6]

$$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\}\}$$

de modo que $\{x\} = \{x,y\} = \{a\}$. Portanto $x = y$ e $x = a$, ou seja, $x = y = a = b$.

Caso 2. Se $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\}$ então $\{x\} \in \{\{a\},\{a,b\}\}$. Se $\{x\} \in \{\{a\},\{a,b\}\}$ então $\{x\} = \{a\}$ ou $\{x\} = \{a,b\}$. Se $a \neq b$ então $\{x\} = \{a\}$. Agora, se $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\}$ e $\{x\} = \{a\}$ então $\{x,y\} = \{a,b\}$, pelo lema acima. Se $\{x\} = \{a\}$ então $x = a$. Se $\{x,y\} = \{a,b\}$ e $x = a$, então $y = b$, pelo lema acima. Portanto $x = a$ e $y = b$. □

[6] Escrevemos $r = s = t$ com o significado de $r = s$ e $s = t$.

O corolário segue imediatamente do teorema.

Notemos que se $a \in A$ e $b \in B$ então $\{a\}$ e $\{a, b\}$ são conjuntos pelo axioma do par, o qual também nos dá que $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ é conjunto. Ainda, $\{a\} \in \wp(A \cup B)$ e $\{a, b\} \in \wp(A \cup B)$, portanto $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \wp(A \cup B)$, ou seja, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = (a, b) \in \wp(\wp(A \cup B))$, portanto, existe o conjunto cujos elementos são todos os pares (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$, é o conjunto dada pela especificação

$$\left\{z \in \wp(\wp(A \cup B)) : \text{existem } x, y \text{ tais que } x \in A \text{ e } y \in B \text{ e } z = (x, y)\right\}$$

sempre que A e B são ambos não vazio.

Como no produto cartesiano os pares são ordenados, temos que $A \times B \neq B \times A$ (exceto quando $A = B$ ou $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$).

2.1.4 Relações e Funções

Nesta seção definimos essas estruturas matemáticas importantes através de conjuntos. Um estudo mais específico de certos tipos de relações será apresentado mais adiante e em funções não nos aprofundaremos, contamos com algum conhecimento prévio do leitor.

Definição 29. Se A e B são conjuntos, uma **relação** com **domínio** A e **contradomínio** B é um subconjunto de um produto cartesiano $A \times B$. Se $A = B$ escrevemos A^2 para $A \times B$ e dizemos que $R \subset A^2$ é uma relação sobre A, ou em A. Se $R \subset A \times B$ e $(a, b) \in R$ escrevemos $a\, R\, b$.

Por exemplo, $<$ é uma relação sobre $\mathbb{N}$ e ao invés de escrevermos $(x, y) \in <$ escrevemos $x < y$, como em $3 < 4$ ao invés de $(3, 4) \in <$.

Exemplo 30. Tomemos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e consideremos

$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,3), (3,2), (3,1), (4,4), (4,3), (4,2), (4,1)\} \subset A \times A.$$

O conjunto R é uma relação em A por definição. Desde que $(1, 1) \in R$, temos $1\, R\, 1$. Da mesma forma $2\, R\, 1$ e $2\, R\, 2$ e assim por diante. No entanto, por exemplo, $(3, 4) \notin R$, então $3 \not R\, 4$. Agora, consideremos o seguinte conjunto:

$$S = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\} \subset A \times A.$$

Aqui temos $1\, S\, 1$, $1\, S\, 3$, $4\, S\, 2$, $3 \not S\, 4$ e $2 \not S\, 1$. Notemos que s pode ser entendido como significando “tem a mesma paridade que” no domínio da relação. Ademais

$$R \cap S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,1), (4,4), (4,2)\} \subset A \times A$$

é uma relação em A. A expressão $x\, (R \cap S)\, y$ pode ser entendida com “$x \geq y$ e têm a mesma paridade"no domínio da relação.

Para uma relação genérica, usamos símbolos como $\sim$, $\equiv$, $\simeq$, $\approx$ em vez de R, S ou qualquer letra do alfabeto.

Uma relação binária $\sim$ sobre um conjunto A pode ou não ter uma (ou mais) das seguintes propriedades

reflexiva para todo $a \in A$, $a \sim a$;

irreflexiva para todo $a \in A$, $a \not\sim a$;

simétrica para todo $a \in A$, para todo $b \in A$, se $a \sim b$ então $b \sim a$;

antissimétrica para todo $a \in A$, para todo $b \in A$, se $a \sim b$ e $b \sim a$ então $b = a$;

transitiva para todo $a \in A$, para todo $b \in A$, para todo $c \in A$, se $a \sim b$ e $b \sim c$ então $a \sim c$.

Exemplo 31. Em $\mathbb{R}$ a relação $x \sim y$ se, e só se, $|x - y| < 1$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Uma relação pode ser simétrica e antissimétrica ao mesmo tempo, ou pode não ser nem simétrica nem antissimétrica. Uma relação pode ser nem reflexiva e nem irreflexiva porém, se o conjunto A não é vazio, uma relação não pode ser ao mesmo tempo reflexiva e irreflexiva sobre A.

Por exemplo, as relações sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$

1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,4)\}$ é reflexiva.

2. $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ é simétrica.

3. $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (1,4), (4,4)\}$ é reflexiva e simétrica.

4. $R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$ é irreflexiva, antissimétrica e transitiva.

5. $R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

6. $R_6 = \{(3,4)\}$ é irreflexiva, antissimétrica e transitiva.

Exercício 32. A seguir, considere $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3\}$ e classifique, quanto as propriedades acima, as relações

1. $R_1 = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$.

2. $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

3. $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$.

4. $R_4 = \{(1,1),(2,3),(3,3)\}$.

5. $R_5 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$.

Funções

Definição 33. Uma relação $R \subset A \times B$ é uma **função** se para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x,y) \in R$, nesse caso escrevemos $R : A \to B$, o único y tal que $(x,y) \in R$ é denotado por $R(x)$ é dito *o valor que a função assume em x*. O conjunto de todas as função de A em B é um subconjunto de $\wp(A \times B)$ denotado por $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$.

Por exemplo, a função f que o axioma da escolha afirma existir é um subconjunto de $x \times \bigcup x$, ou seja, $f : x \to \bigcup x$, com a propriedade de que $f(y) \in y$, para todo $y \in x$.

Uma função $f : A \to B$ pode ou não ter uma (ou mais) das seguintes propriedades

injetividade se, e só se, é verdade que para todos $x, x' \in A$

$$\text{se } x \neq x' \text{ então } f(x) \neq f(x').$$

sobrejetividade se, e só se, é verdade que para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que

$$f(x) = y.$$

bijetividade se, e só se, for injetiva e bijetiva, isto é, é vale a sentença

$$\forall y \in B \, \exists! x \in A, \; f(x) = y.$$

Composição e inversa de relações

As relações e funções podem ser *compostas.*

Definição 34. Dadas as relações $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$ definimos a **relação composta**

$$(S \circ R) \subset A \times C$$

pela regra $(x,z) \in (S \circ R)$ se, e somente se, existe $y \in B$ tal que $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in S$. Em notação usual

$$x \,(S \circ R)\, z \Leftrightarrow \exists y (x \, R \, y \wedge y \, S \, z)$$

Não é difícil ver que a composição ordinária de funções é um caso especial de composição de relação. Por exemplo, considere as relações

$$\begin{aligned} R &= \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\} \\ S &= \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\} \end{aligned}$$

A composição delas é

$$S \circ R = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$$

Definição 35. Dada uma relação $R \subset A \times B$, a **relação inversa** é a relação R^{-1} em $B \times A$ definida a partir da equivalência

$$x \, R^{-1} \, y \text{ se e somente se } y \, R \, x.$$

Toda relação tem uma inversa, no entanto a inversa de uma função pode não ser função. Por exemplo, tome $A = \{1,2,3\}$ e

$$R = \{(1,2),(2,3),(3,3)\}$$

A relação inversa é

$$R^{-1} = \{(2,1),(3,2),(3,3)\}.$$

Ademais

$$\begin{aligned} R^{-1} \circ R &= \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\} \\ R \circ R^{-1} &= \{(2,2),(3,3),(3,3)\} \end{aligned}$$

Exercício 36. Qual é a inversa da relação $<$ sobre $\mathbb{N}$?

2.1.5 Conjuntos numéricos

Não é difícil definir o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais como conjunto na teoria axiomática dos conjuntos usando o axioma do infinito. Uma construção conhecida é devida ao matemático John von Neumann[7]. A partir da construção, definimos as operações aritméticas, a relação de ordem e tudo o mais da aritmética pode ser deduzido formalmente dentro da teoria dos conjuntos. A partir dos naturais podemos construir os inteiros usando produto cartesiano e um tipo especial de relação chamada de *relação de equivalência* (veja a definição 214, página 91). Também, podemos construir os números racionais e até os reais com, por exemplo, os cortes de Dedekind.

Neste texto não adotamos tal abordagem, a aritmética elementar dos naturais e dos inteiros e suas propriedades são assumidas, como axiomas, e a definição dos conjuntos em si é a intuitiva. Esse será o ponto de partida para estudarmos algumas técnicas de demonstração no próximo capítulo.

Números naturais e suas propriedades aritméticas e de ordem

O conjunto dos números naturais é o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$$

que munido da adição[8], da multiplicação[9] e da relação[10] $\leqslant$ usuais nos números naturais, satisfazem as seguintes propriedades: para quaisquer a,b,c,m,n,p números naturais

1. (associativa) $(a+b)+c = a+(b+c)$ e $(m\cdot n)\cdot p = m\cdot(n\cdot p)$;
2. (comutativa) $a+b = b+a$ e $m\cdot n = n\cdot m$;
3. (elemento neutro) 0 é o único natural tal que $a+0 = 0+a = a$ e 1 é único tal que $m\cdot 1 = 1\cdot m = m$ e 1;
4. (cancelamento) se $a+c = b+c$ então $a = b$ e, para a multiplicação, se $mp = np$ e $p \neq 0$ então $m = n$;
5. (distributiva) $(a+b)\cdot m = a\cdot m + b\cdot m$;
6. se $a+b = 0$ então $a = b = 0$, se $m\cdot n = 1$ então $m = n = 1$.
7. se $m\cdot n = 0$ então $m = 0$ ou $n = 0$;
8. (reflexiva) $a \leqslant a$;
9. (antisimétrica) se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$ então $b = a$;
10. (transitiva) se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$ então $a \leqslant c$;
11. (comparabilidade) $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$;
12. (tricotomia) vale uma e só uma das relações
$$a = b,\ a < b,\ b < a;$$

[7] Também foi um precursor do computador digital, os computadores pessoais têm uma arquitetura (um esquema de interligar memória, cpu, dispositivos de entrada e saída) chamada *arquitetura de von Neumann*.

[8] $+$ é uma operação binária $+\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ e escrevemos $a+b$ para denotar $+(a,b)$.

[9] $\cdot$ é uma operação binária $\cdot\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ e escrevemos $a\cdot b$ para denotar $\cdot(a,b)$.

[10] Escrevemos $a \leqslant b$ se existe um natural m tal que $a+m = b$. Escrevemos $a < b$ caso $m \neq 0$. Ainda $a \geqslant b$ denota $b \leqslant a$ e $a > b$ denota $b < a$.

13. (compatibilidade) se $a \leqslant b$ então $a + c \leqslant b + c$; se $a \leqslant b$ então $a \cdot c \leqslant b \cdot c$.

Uma propriedade muito importante da estrutura $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leqslant)$ é que a relação de ordem nos dá uma **boa-ordem**.

Definição 37. Dizemos que $a \in \mathbb{N}$ é o **menor elemento** de $A \subset \mathbb{N}$ se, e só se,

$$a \in A \quad \text{e} \quad \text{para todo } x \in A,\ a \leqslant x.$$

Denotamos o menor elemento de A por $\min(A)$.

Princípio da Boa Ordem (PBO) *Para todo $A \subset \mathbb{N}$, se A é não-vazio então A tem um* ***menor elemento****.*

Números inteiros e suas propriedades aritméticas e de ordem

O conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

é o conjunto dos números inteiros que munidos das funções (operações) soma e produto $+, \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e da relação de ordem $\leqslant$ satisfazem as propriedades listadas a seguir.

Com relação a soma Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$

1. (associativa) $a + (b + c) = (a + b) + c$;
2. (comutativa) $a + b = b + a$;
3. (elemento neutro) $a + 0 = a$ e 0 é o único inteiro que satisfaz essa sentença;
4. (elemento simétrico) $a + (-a) = 0$ e $-a$ é o único inteiro que satisfaz essa sentença;
5. (cancelativa) se $a + b = a + c$ então $b = c$;
6. (troca de sinal) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$.

Com relação ao produto Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$

7. (associativa) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
8. (comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$;
9. (elemento neutro) $a \cdot 1 = a$ e 1 é o único inteiro que satisfaz essa sentença;
10. (distributiva) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
11. (cancelativa)

$$b = c \Longrightarrow a \cdot b = a \cdot c$$

$$a \neq 0 \text{ e } a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c;$$

12. (anulamento) se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.
13. se $a \cdot b = 1$ então $a = 1$ e $b = 1$ ou $a = -1$ e $b = -1$.

Com relação à ordem Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$

13. (reflexiva) $a \leqslant a$;
14. (antissimétrica) se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$ então $b = a$;
15. (transitiva) se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$ então $a \leqslant c$;
16. (comparabilidade) $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$;
17. (tricotomia) vale uma e só uma das relações
$$a = b,\ a < b,\ b < a;$$
18. (compatibilidade)
$$a \leqslant b \iff a + c \leqslant b + c$$
$$c \in \mathbb{N} \text{ e } a \leqslant b \iff a \cdot c \leqslant b \cdot c.$$
19. $a < b$ e $b \leqslant c \Rightarrow a < c$.
20. $a \leqslant b$ e $b < c \Rightarrow a < c$.
21. $a \leqslant b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
22. $a < b \Leftrightarrow -a > -b$.
23. Regras de sinal
    (a) $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab > 0$
    (b) $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow ab > 0$
    (c) $a < 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab < 0$
24. $a \leqslant b$ e $c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$.
25. $a \leqslant b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
26. $a^2 \geq 0$.
27. $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
28. $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
29. $ac \leqslant bc$ e $c < 0 \Rightarrow a \geq b$

Definição 38. Definimos, para todo $a \in \mathbb{Z}$, o **valor absoluto** ou **módulo** de a por
$$|a| := \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O valor absoluto satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer inteiros a, b

30. $|a| \geq 0$, ademais $|a| = 0$ se e só se $a = 0$.
31. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.
32. $|-a| = |a|$.
33. $|ab| = |a||b|$.
34. $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$.
35. $||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$.
36. $|a| - |b| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|$.

Definição 39. O subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{Z}$ é **limitado inferiormente** se existe $m \in \mathbb{Z}$ (chamado **cota inferior**) tal que
$$\text{para todo } a \in A,\ m \leqslant a.$$
Se $m \in A$, então m é **menor elemento** ou **mínimo** de A, denotado por $\min(A)$.

37. Todo $A \subset \mathbb{Z}$ não vazio e limitado inferiormente tem um elemento mínimo.
38. (**propriedade arquimediana**) Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot b > a$.

Exercícios

1. Tome $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras?

   (a) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$;
   (b) $\varnothing \subset \varnothing$;
   (c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
   (d) $\varnothing = \{\varnothing\}$;
   (e) $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;
   (f) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;
   (g) $\{\varnothing\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;
   (h) $1 \in A$;
   (i) $\{1\} \in A$;
   (j) $\{2\} \in A$;
   (k) $\{1\} \subset A$;
   (l) $\{2\} \subset A$;
   (m) $\{\{1\}\} \subset A$;
   (n) $\{\{2\}\} \subset A$;
   (o) $\{2\} \subsetneq A$;

2. Verifique cada uma das propriedades das operações de conjunto listas na tabela 2.5 usando equivalências lógicas.

3. Enuncie as leis de De Morgan no caso de união e interseção com mais de dois conjuntos.

4. Escreva o conjunto das partes de

   (a) $\{\varnothing\}$.
   (b) $\{1, 2, 3\}$;
   (c) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.
   (d) $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

5. Tome $R = \{\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}, \{\{\varnothing, \{1\}, \{1, 3\}\}\}, \{\{\{\varnothing\}, \{2\}, \{2, 3\}\}\}\}$ e escreva os conjuntos $\bigcup R$ e $\bigcup \bigcup R$.

6. Construa os seguintes conjuntos a partir dos axiomas da teoria ZFC. Dados os conjuntos A e B,

   (a) $A \cup B$;
   (b) todas as relações de A em B;
   (c) todas as funções de A em B.

7. Se $f \subset X \times Y$ é uma função e $B \subset Y$ então definimos

   $$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

   Verifique que

   (a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
   (b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
   (c) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

8. Considere as seguintes relações sobre $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

   $$\begin{aligned} R &= \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\} \\ S &= \{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)\} \end{aligned}$$

   Determine $S \circ R$, $R \circ S$, $S \circ S$ e $R \circ R$.

9. Determine a relação inversa de $R = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3\}$. Determine também $R^{-1} \circ R$ e $R \circ R^{-1}$.

10. Considere o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com a relação $\trianglelefteq \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ definida por

    $$(x, y) \trianglelefteq (a, b) \text{ se } \begin{cases} x < a & \text{ou} \\ x = a & \text{e } y \leq b. \end{cases}$$

    Ordene os seguintes elementos de acordo com a relação $\trianglelefteq$: $(1,2), (2,1), (3,1), (1,1), (2,2), (3,3), (1,4), (3,5), (2,4), (4,4), (4,1)$. É verdade que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tem um menor elemento com respeito a tal ordem?

11. Prove que se $f : A \to B$ é injetiva e $g : B \to C$ é injetiva, então $g \circ f : A \to C$ é injetiva.

12. Prove que a composição de duas funções bijetivas é uma função bijetiva.