1 A linguagem matemática

1.1 Noções de lógica

Uma parte do trabalho dos matemáticos, de um modo geral, é descobrir e comunicar "verdades matemáticas" e uma demonstração é um argumento cujo objetivo é convencer outras pessoas de que algo é verdade. As demonstrações que aparecem nos textos, desde livros didáticos até artigos publicados em periódicos de matemática, diferem enormemente quanto ao estilo porém encerram construções que estão em, ou formam, em certo sentido, um senso comum quanto aos seus significados. O estilo é em grande parte influenciado pelo público a que se destina o texto e considera, entre outras coisas, o conhecimento esperado da audiência a que se destina.

A linguagem usada nas demostrações é uma linguagem natural, como o português, o inglês e o francês, porém tais linguagens podem levar a ambiguidades e paradoxos. Um desses paradoxos é o famoso paradoxo de Russell, de 1901, que levou a uma contradição no sistema que formalizava a teoria dos conjuntos na época:

> "Seja U o conjunto formado pelos conjuntos que não pertencem a eles mesmos. O conjunto U pertence a ele mesmo?"

No início do século 20, esse e outros problemas culminaram no que ficou conhecido como a crise dos fundamentos da matemática. Para tentar evitar ambiguidades, na matemática usamos palavras como "ou", "se... então" e outras com um significado muito específico e que nem sempre é o significado coloquial. Além disso, há uma certa "gramática" subjacente, algumas construções baseadas em princípios lógicos estão presentes nas demonstrações. Enfim, se corretamente apresentada, uma demonstração não deixa dúvidas quanto a sua correção o que dá a linguagem matemática a propriedade notável da sua precisão.

O estudo formal das deduções logicamente válidas é um dos objetos de estudo da Lógica Matemática. Os lógicos constroem linguagens formais, rigorosas, livres de ambiguidades e de contexto e que são adequadas para lidar com a relação de dedução. Essas linguagens possuem uma dimensão *sintática*, que define os símbolos da linguagem e as regras de combinação às quais estão sujeitos para a construção dos termos e fórmulas, e uma dimensão *semântica* que define precisamente o significado delas. Além disso, um sistema formal especifica os axiomas e as regras de inferência que independem da semântica e são usados para deduzir os teoremas lógicos. As teorias (axiomáticas) são estudadas acrescentando ao sistema lógico seus símbolos e axiomas, desse último deduzimos os teoremas que compõem a teoria.

A teoria dos conjuntos é um sistema adequado para descrever e explicar as estruturas matemáticas. A linguagem da lógica de predicados juntamente com a linguagem da teoria de conjuntos compõem um sistema dedutivo formal capaz de expressar praticamente toda a matemática sem ambiguidades. Para conjuntos, uma teoria axiomática bem aceita foi apresentada por Ernest Zermelo e Abraham Fraenkel no início do século 20, a teoria de conjuntos de Zermelo–Fraenkel (ZF) é um dos vários sistemas axiomáticos propostos para formular uma teoria de conjuntos livre de paradoxos como o paradoxo de Russell por exemplo. Acrescentando aos axiomas de ZF o axioma da escolha, a teoria é conhecida pela sigla ZFC e é o tratamento axiomático mais comum da teoria dos conjuntos na matemática e amplamente aceita entre os matemáticos como o ponto de partida para fundamentar a matemática de maneira estritamente formal.

Nós não utilizamos essa linguagem formal no dia-a-dia em Matemática, isso deixaria tudo muito árido mas, como já dissemos, existe uma convenção linguística quase universal na escrita em linguagem natural nas proposições matemáticas que nos faz aceitar as formas como rigorosas e não ambíguas. Neste capítulo abordamos tal linguagem informal[1] da matemática. Adotaremos aqui uma abordagem intuitiva para a teoria dos conjunto e discutiremos brevemente e informalmente a abordagem axiomática Zermelo–Fraenkel.

1.1.1 Sentenças, conectivos e operadores lógicos

As afirmações matemáticas são sentenças que podem ser verdadeiras ou falsas, mas não ambas.

Uma **sentença**, é uma frase declarativa de um juízo com verbo no indicativo e que assume um, e só um, de dois valores: VERDADEIRO que passamos a denotar por **V** ou FALSO que passamos a denotar por **F**. O valor de uma sentença é chamado **valor-lógico** da sentença.

Por exemplo, são sentenças:

1. O time joga bem.
2. O céu está limpo.
3. A grama é verde.

[1] Em oposição ao formal das linguagens lógicas.

4. Os torcedores estão felizes.

Do ponto de vista da linguagem natural é bastante restritivo considerarmos apenas sentenças declarativas, porém estamos interessado nos enunciados matemáticos:

5. $1+1=2$.
6. $3>5$.
7. Uma sequência limitada de de números reias é convergente.
8. 27 é um quadrado perfeito.
9. O conjunto vazio é único.

Para tal efeito, essas sentaças são satisfatórias. Notemos que são sentenças enunciadas como

10. x^2 é positivo;
11. x é a soma de quatro quadrados perfeitos;
12. essa frase é falsa;

pois não podemos atribuir a elas um valor lógico.

Toda linguagem permite construir sentenças mais complexas a partir de outras sentenças.

Uma sentença é dita **atômica** se a ela corresponde, individualmente, um desses valores-verdade. **Sentenças compostas** são construídas com os conectivos "**não**", "**e**", "**ou**", "**se,... então**", "**se, e somente se,**" que chamamos **conectivos lógicos**.

São sentenças atômicas "O time ganhou o campeonato" assim como "O técnico é culpado", mas não é o caso de "O time ganhou o campeonato ou o técnico é o culpado", essa última é composta. Vejamos mais alguns exemplos:

1. Os torcedores estão felizes **e** o técnico foi demitido.
2. Samuel virá para a festa **e** Maximiliano não virá, **ou** Samuel não virá para a festa **e** Maximiliano vai se divertir.
3. **Se** o time joga bem, **então** o time ganha o campeonato.
4. **Se** o time **não** joga bem, **então** o técnico é o culpado.
5. 27 **não** é um quadrado perfeito.
6. O conjunto vazio **não** é único.

O valor lógico de uma sentença composta depende do valor lógico das sentenças atômicas que a compõem e da maneira como elas são combinadas usando os conectivos. A cada conectivo lógico corresponde um operador lógico que determina um valor lógico de acordo com as regras abaixo.

As letras A e B denotam sentenças. A **negação** de A é a sentença "não A" cujo valor lógico é $\neg A$ dado pela tabela 1.1.

A	$\neg A$
V	**F**
F	**V**

Tabela 1.1: operador negação.

A **disjunção** de A e B é a sentença "A ou B" cujo valor lógico é $A \vee B$ dado pela tabela 1.2. A **conjunção** é a sentença "A e B" cujo valor lógico é $A \wedge B$ também dado na tabela 1.2. A **condicional** é a sentença "se A então B" cujo valor lógico é $A \rightarrow B$ é dado na tabela 1.2. Finalmente, a **bicondicional** é a sentença "A se, e somente se B" cujo valor lógico é $A \leftrightarrow B$ dado na tabela 1.2.

Esse é o modo como interpretamos essas palavras chaves e essa interpretação as vezes entra em conflito com interpretações coloquiais. O "e", em geral, não causa confusão exceto, possivelmente, pelo estilo de escrita. As vezes pode ocorrer uma confusão por abreviações na escrita. Por exemplo, quando dizemos que "5 é um natural primo e ímpar" significa que 5 tem as duas propriedades, porém o conectivo "e" com sentido lógico conecta sentenças (não objetos ou propriedades deles) de modo que tal sentença expressa "5 é um natural primo e 5 é um natural ímpar". A sentença a "se 7 é primo e divide $28 \cdot 9$, então 7 divide 28 ou divide 9" fica melhor exprimida por "se 7 é primo e 7 divide $28 \cdot 9$, então 7 divide 28 ou 7 divide 9".

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Tabela 1.2: operadores conjunção, disjunção, condicional e bicondicional.

No caso do "ou" o equivoco comum é considerar o "ou exclusivo" no sentido de que a disjunção é verdadeira quando ou uma ou a outra sentença é verdadeira, não ambas.

O "não", por sua vez, é mal interpretado quando mudamos o significado na negação. Por exemplo, a rigor, a negação de "o natural 5 é par" é "o natural 5 não é par" que não pode, em princípio, ser tomada como "o natural 5 é ímpar", essa equivalência só vale como consequência do teorema da divisão que garante que se um natural não é da forma $2k$ (o que o caracteriza como par), então é da forma $2k+1$ (o que o caracteriza como ímpar). A negação de m é o maior elemento do conjunto (finito) de números A, não é dizer que m é o menor elemento de A, simplesmente diz que m não é o maior elemento de A.

Veremos que "o oconjunto A está contido no conjunto B" significa que "todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B" cuja negação não é "nenhum elemento de A é elemento de B"! A sentença negada é "o oconjunto A não está contido no oconjunto B" e significa que "nem todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B" ou "algum elemento do conjunto A não é elemento do conjunto B".

Esse último caso tem a ver com a negação de uma condicional. A condicional é, provavelmente, o conectivo com mais chance de confusão entre a interpretação coloquial e a intencionada na matemática.

O condicional

É no condicional que se dá a maior diferença entre os significados em matemática e na linguagem coloquial. Se os pais dizem ao seu filho

se não comer toda a refeição, então não ganha a sobremesa

a única situação em que os pais ficam desmoralizados é quando o filho não come toda a refeição e ganha a sobremesa. A confusão aqui normalmente se dá quando "se não comer toda a refeição, então não ganha a sobremesa" é interpretado também como "se comer toda a refeição, então ganha a sobremesa" o que a rigor, no sentido matemático, não está dito; tal sentença valeria se a sentença original fosse uma bicondicional.

Ocorre que não foi estabelecido o que acontece quando o filho come toda a refeição de modo que se ele ganha a sobremesa, está tudo correto, os pais estão sendo verdadeiros e se ele não ganha a sobremesa também está tudo correto. Certamente, se o filho não comer toda a refeição e não ganhar a sobremesa também os pais foram verdadeiros.

Outro problema que ocorre frequentemente é quando interpretamos a condicional como uma consequência, uma relação de causa-efeito entre as sentenças, que não é o caso.

Todos concordamos que é verdadeira a sentença[2]

para todo número natural n, se n primo então n é maior ou igual a dois.

pois decorre da definição de número primo. Dito isso, as particularizações de "se n primo então n é maior ou igual a dois" devem ser verdadeiras, ou seja,

se 1 primo então 1 é maior ou igual a dois

é verdadeira ("se **F**, então **F**" é verdadeiro), assim como

se 4 primo então 4 é maior ou igual a dois

é verdadeira ("se **F**, então **V**" é verdadeiro).

Exercício 1. Qual é a única sentença falsa dentre as quatro condicionais a seguir?

$$\begin{aligned}
&\text{se } \sqrt{2} \text{ é racional, então 2 é par.}\\
&\text{se } \sqrt{2} \text{ é racional, então 2 é ímpar.}\\
&\text{se } \sqrt{2} \text{ não é racional, então 2 é par.}\\
&\text{se } \sqrt{2} \text{ não é racional, então 2 é ímpar.}
\end{aligned}$$

[2] Augusto Oliveira, *Lógica& Aritmética*, Ed. Gradiva, 2010.

Em $A \to B$ chamamos A de **antecedente** e B de **consequente** da condicional. A **recíproca** de $A \to B$ é $B \to A$. Observe que que há casos em que $A \to B$ tem valor lógico diferente de $B \to A$. A **contrapositiva** de $A \to B$ é $(\neg B) \to (\neg A)$. Pode-se verificar que contrapositiva tem sempre o mesmo valor lógico que a sentença que a originou.

Em português a sentença "se A então B" pode ser expressa de muitas formas. Algumas delas estão descritos abaixo.

- B sempre que A.
- B se A.
- A é suficiente para B.
- B é necessário para A.

O "se e somente se" também pode ser expresso de várias maneiras, dentre elas

- A é condição necessária e suficiente para B.
- A e B são equivalentes.
- se A então B, e se B então A.

Neste texto usamos a abreviação "A **sse** B".

Tautologia e Contradição

Tautologia e contradição é como chamamos as sentenças compostas com valor-lógico constante.

Uma **tautologia** é uma sentença composta que é sempre verdadeira. Uma **contradição** é uma sentença composta que é sempre falsa.

Por exemplo $A \vee (\neg A)$ é uma tautologia e $(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$ é uma tautologia, enquanto que $A \wedge \neg A$ é uma contradição. Por abuso de notação representamos uma tautologia qualquer, genérica, por **V** e uma contradição qualquer, genérica, por **F**.

Variáveis

Usualmente, uma variável é um símbolo que funciona como um espaço reservado para um objeto matemático de algum universo (do discurso). Exceto quando tratamos de sintaxe linguagens formais, como a teoria (formal) de conjuntos, o que não é feito neste texto, as variáveis devem estar associadas a domínios. Em geral, o simbolo usado é uma letra. É possível que variáveis desempenhem papéis diferentes na mesma expressão. Por exemplo, como na forma geral de um polinômio de grau no máximo dois, $ax^2 + bx + c$, onde a, b, c são considerados números, são chamadas de parâmetros ou coeficientes (muitas vezes são chamadas, inapropriadamente, de constantes) e x é a incógnita, ou indeterminada.

Com funções, o termo variável se refere aos argumentos das funções, em $f(x)$ a letra f é uma função da variável x. Em algumas situações como essa x também é chamado de parâmetro, um objeto ou quantidade de um problema que permanece constante durante toda a solução, ou cálculo, desse problema. Por exemplo, em termodinâmica a pressão e a temperatura são parâmetros para o estudo de gases. Todas essas denominações de variáveis são de natureza semântica.

Em disciplinas como a matemática e a ciência da computação, uma **variável livre** é um símbolo que especifica posições em uma expressão onde uma substituição pode eventualmente ocorrer. Por exemplo, esse é o caso de x mas não é o caso de h em

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x. \tag{1.1}$$

Uma **variável muda**, as vezes chamada de variável ligada ou variável vinculada, é uma variável associada a um valor específico ou conjunto de valores, como é o h acima. A expressão (1.1) expressa alguma informação a respeito de x, mas não expressa nada a respeito de h, ela poderia ter sido escrita como $\lim_{t \to 0} ((x+t)^2 - x^2)/t$.

A sentença "$n = 2 \cdot k$ para natural k" expressa algo a respeito de n, a saber, que é um número par, porém não expressa nada a respeito de k, poderíamos ter escrito "$n = 2 \cdot j$ para natural j" que transmitiríamos a mesma informação. A variável livre nessa expressão se torna muda quando escrevemos "para todo natural n, $n = 2 \cdot k$ para natural k". Agora não se expressa mais um fato a respeito de n, pois se exprime que "todo número natural é par".

A expressão

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

afirma algo a respeito da variável n, essa variável é livre, A variável k, por seu lado, é muda. Ela está associada aos números inteiros de 1 a n pois o símbolo $\sum$ a esquerda da igualdade nos indica a soma de todos os valores que k assume nesse intervalo, desde quando $k = 1$ até $k = n$. Notemos que é indiferente usarmos k, ℓ ou i para esse fim. Em

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

x é livre e k é muda. Nesse caso, temos uma expressão aritmética cujo valor depende da variável x, mas não da variável k, de fato essa "soma infinita" é a função e^x se considerarmos $x \in \mathbb{R}$. Assim, $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ é uma expressão a cerca da variável (livre) x de modo que se dissermos "para todo $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$" então x agora é muda e essa sentença, que não apresenta variável livre, é verdadeira.

No exemplo,

$$\int_0^t x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

a variável x é muda, enquanto que t e n são livres, o valor dessa expressão também não depende de x, só de t e de n, de modo que podemos dizer que temos uma função f (com domínio e contradomínio que devem ser especificados) dada por $f(t,n) = \int_0^t x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ que, por sua vez é avaliada da mesma forma que $\int_0^t z^n \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z$.

Predicados

Uma **sentença aberta** é uma sentença parametrizada por uma ou mais variáveis, ela nos diz algo (um predicado) de uma ou mais variáveis. Uma sentença aberta não tem valor lógico, porém quando se atribui um elementos de um conjunto (o domínio) para as variáveis a sentença deixa de ser aberta e passa a ser um sentença com valor lógico. O processo de trocar as ocorrências de uma variável por um elemento de um domínio chamamos de **instanciação** da variável.

Entendemos por predicado uma declaração a respeito de uma ou mais variáveis. Por exemplo, "x é primo", "x é maior que 0", "x é menor ou igual a y", "x, y, z são vértices de um triângulo", "$x < 1$" são predicados. Observemos que "$x + 1$" não é predicado, essa expressão não diz algo a respeito de x.

Algumas poucas vezes, por conveniência, usamos a notação funcional para sentenças predicativas, letras minúsculas $x, y, z, \dots$ denotam variáveis e letras maiúsculas $P, Q, R, \dots$ os predicados, os quais são seguidas por uma lista de variáveis distintas entre parênteses, usados para denotar sentenças abertas que dependem dessas variáveis, por exemplo

$O(x)$**:** representa a sentença aberta $x \leqslant x^2$.

$P(x)$**:** representa a sentença aberta x é primo.

$Q(x,y)$**:** representa a sentença aberta $x \leqslant y^2$.

$S(n)$**:** representa a sentença aberta $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Nesse casos, uma instanciação de uma variável troca todo ocorrência daquela variável pela instância. Usando os exemplos acima temos: $O(1)$ é "$1 \leqslant 1^2$", $P(4)$ é "4 é primo" e $Q(1,2)$ e "$1 \leqslant 2^2$". A senteça $Q(1,y)$ é "$1 \leqslant y^2$", portanto aberta. Se instanciamos todas as variáveis de uma sentença aberta ela deixa de ser aberta e passa a ter valor lógico, por exemplo, $R(x,y)$ dada por $x > y$ é uma sentença verdadeira se os valores de x e y forem 7 e 4, ou seja $R(4,7)$ é verdadeiro. Mas tal sentença é falsa se os valores forem $x = 1$ e $y = 2$, ou seja, $R(1,2)$ é falso.

De um modo geral, dado um predicado $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, usamos a notação $P(v_1, v_2, \dots, v_n)$ para indicar a **substituição** de todas as ocorrências da variável x_i pelo valor v_i, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Podemos combinar predicados usando os conectivos lógicos para formar outros predicados.

Quantificadores

A substituição de variáveis por valores do domínio não é a única maneira de transformar uma sentença aberta em uma sentença. Outra maneira é a **quantificação** da variável. A quantificação permite expressar conceitos como "todos os elementos do domínio" ou "alguns elementos do domínio". O primeiro é chamado quantificação universal e segundo de quantificação existencial.

A **quantificação universal** de $P(x)$ é a sentença

$$\text{para todo } x \in D,\ P(x) \tag{1.2}$$

que é verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para toda instanciação de x com valores de um domínio $D \neq \varnothing$. Caso $P(x)$ seja falsa para um ou mais valores atribuídos a x então a sentença (1.2) é falsa. A sentença (1.2) é, simbolicamente, escrita como

$$\forall x \in D,\ P(x).$$

Um elemento de D para o qual P é falso um **contraexemplo** para (1.2)

Por exemplo, "para todo $x \in \mathbb{Z},\ x < x+1$" é verdadeira enquanto que "para todo $x \in \mathbb{N},\ x$ é primo" é falsa pois, por exemplo, $4 \in \mathbb{N}$ e 4 não é primo. Nesse caso, dizemos que 4 é um contraexemplo para "para todo $x \in \mathbb{N},\ x$ é primo".

A **quantificação existencial** da sentença aberta $P(x)$ é a sentença

$$\text{existe } x \in D,\ P(x) \tag{1.3}$$

que é verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para pelo menos uma instanciação de x com valores de $D \neq \varnothing$. Caso $P(x)$ seja falsa para todos os valores de D atribuídos a x então a sentença existe $x \in D,\ P(x)$ é falsa. Simbolicamente, usamos

$$\exists x \in D,\ P(x)$$

para expressar (1.3).

Por exemplo, "existe $x \in \mathbb{Z},\ x = x+1$" é falsa enquanto que "existe $x \in \mathbb{N},\ x$ é primo" é verdadeira.

Exemplo 2. São exemplos de sentenças quantificadas:

1. "Todo o número inteiro que não é ímpar é par". Essa sentença fica melhor, no sentido de explicitar seus componentes lógicos, se a escrevemos como"para todo $n \in \mathbb{Z}$, se n não é impar então n é par". Em símbolos poderíamos escrevê-la como $\forall n \in \mathbb{Z}(\neg\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1 \rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k)$.

2. "Para cada número real x, existe um número real y para o qual $y^3 = x$", ou em símbolos $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y^3 = x$.

3. "Dado qualquer dois números racionais a e b, segue-se que ab é racional", ou seja, "para todo $a \in \mathbb{Q}$, para todo $b \in \mathbb{Q}$, $a \cdot b \in \mathbb{Q}$".

Exemplo 3. As sentenças

1. para todo $x \in \mathbb{R}$, se $x \geq 0$ então $x^2 \geq 0$

2. existe $x \in \mathbb{R}$, se $x \geq 0$ então $x^2 \geq 0$

são verdadeiras. Agora,

- para todo $x \in \mathbb{R}$, se $x \geq 0$ então $x^2 > 3$

é falsa e para mostrar isso basta exibirmos um contraexemplo. Nesse caso, um contraexemplo é um valor a do domínio para o qual "se $a \geq 0$ então $a^2 > 3$" é falso, como o número 0.

Negação e domínio vazio Deve ficar claro que da exposição acima podemos concluir que a negação de "para todo $x \in D,\ P(x)$" é "existe $x \in D$, não $P(x)$".

Exercício 4. Qual é a negação de "existe $x \in D$, $P(x)$"?

No caso de domínio vazio, convencionamos que "para todo $x \in D$, $P(x)$" é verdadeiro. Isso corrobora o fato da negação dessa sentença ser falsa, isto é, "existe $x \in D$, não $P(x)$" é falso independentemente de P pois $D = \varnothing$. Analogamente, "existe $x \in D$, $P(x)$" é falso.

Omissão de quantificadores As vezes, infelizmente, ocorre em textos que lemos a omissão de quantificadores que deveriam estar presentes para que expressões tenham seu significado explicitado. Nesses casos, os quantificadores estão implícitos, como nos seguintes exemplos.

No domínio do reais a afirmação "*se x é inteiro, então x é racional*" é uma sentença implicitamente quantificada universalmente que, simbolicamente, pode ser escrita como

$$\text{para todo } x \in \mathbb{R},\ \text{se } \in \mathbb{Z},\ \text{então } x \in \mathbb{Q}$$

assim como a identidade trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ que é completamete expressa como

$$\text{para todo } x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Múltiplos quantificadores Se uma sentença aberta menciona mais de uma variável, é preciso um quantificador para cada variável distinta para transformá-la numa sentença fechada. Por exemplo, no domínio dos inteiros há oito maneiras de transformar a sentença aberta $x + y = y + x$ em uma sentença fechada:

1. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z}(x + y = y + x)$
2. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}(x + y = y + x)$
3. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z}(x + y = y + x)$
4. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}(x + y = y + x)$
5. $\forall y \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z}(x + y = y + x)$
6. $\forall y \in \mathbb{Z},\ \exists x \in \mathbb{Z}(x + y = y + x)$
7. $\exists y \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z}(x + y = y + x)$
8. $\exists y \in \mathbb{Z},\ \exists x \in \mathbb{Z}(x + y = y + x)$

Em sentenças com mais de uma variável *a ordem em que os quantificadores aparece é importante.* Por exemplo, se x e y são inteiros

$$\text{para todo } x \in \mathbb{Z}, \text{ existe } y \in \mathbb{Z},\ x + y = 0 \tag{1.4}$$

não é logicamente equivalente a

$$\text{existe } y \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{Z},\ x + y = 0 \tag{1.5}$$

pois (1.4) é verdadeiro enquanto que (1.5) é falso. Entretanto, em alguns casos vale a equivalência. Por exemplo,

$$\text{para todo } x \in \mathbb{N}, \text{ existe } y \in \mathbb{N},\ x \text{ divide } y$$

é verdadeira, assim como

$$\text{existe } y \in \mathbb{N}, \text{ para todo } x \in \mathbb{N},\ x \text{ divide } y$$

pois, no segundo caso todo $x \in \mathbb{N}$ divide o 0.

Ao escrever (e ler) demonstrações de teoremas nós devemos estar sempre atentos à estrutura lógica e ao significados das sentenças. Às vezes é útil escrevê-las em expressões que envolvem símbolos lógicos. Isso pode ser feito mentalmente ou em papel de rascunho, ou ocasionalmente, mesmo explicitamente dentro do corpo de uma prova. Entretanto, deve-se ter em mente que simbolizar uma sentença não a torna mais formal ou mais correta.

Exercício 5. Escreva a seguintes sentenças em português e diga se são verdadeiras ou falsas.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ xn \geqslant 0$
3. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ ax = x$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z},\ m + n = 5$.
5. $\exists m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z},\ m + n = 5$.

1.1.2 A implicação lógica

Quando lemos um teorema em um livro, como *se a função f é diferenciável em a então a função f é contínua em a* em um livro de análise real, por exemplo, entendemos que tal sentença é verdadeira e seguirá uma demonstração de tal fato.

Esse entendimento de que a sentença do teorema é verdadeira significa formularmos uma outra sentença que afirma que algo sobre a primeira sentença, a saber, formulamos que "a sentença *se a função f é diferenciável em a então a função f é contínua em a* é verdadeira". Dizemos que essa última é uma *metassentença*, uma sentença que diz algo respeito de sentenças.

Ademais, a demonstração de tal teorema estabelece uma relação entre a sentença *a função f é diferenciável em a* e a sentença *a função f é contínua em a*, a saber, que a segunda é verdadeira sempre que a primeira é verdadeira.

A ideia intuitiva de implicação lógica é que a sentença A implica na declaração B se *B é verdadeiro sempre que A é verdadeiro.* Em outras palavras, nunca pode ser o caso em que A é verdadeiro e B é falso.

O valor verdadeiro da condicional $A \to B$ não deve ser circunstancial, devido ao valor verdade das sentenças A e B. A implicação lógica não deve depender dos valores lógicos particulares das sentenças atômicas que a compõem pois elas estão de tal forma relacionadas nas fórmulas que resultado final é sempre uma condicional tautológica, como no seguinte exemplo trivial: $A \to A$, não importa o valor lógico de A, a condicional é sempre verdadeira. O mesmo ocorre com (A e $(A \to B)) \to B$, o segundo condicional é sempre verdadeiro, independentemente dos valores lógicos de a e B.

Dizemos que A **implica logicamente** B, ou simplesmente A **implica** B, se a sentença condicional "se A então B" (em símbolos $A \to B$) é uma tautologia.

Nós abreviamos a expressão "A implica B" por $A \Rightarrow B$. É importante notarmos a diferença entre as notações $A \to B$ e $A \Rightarrow B$. Na prática, do ponto de vista informal que adotamos, a distinção é simples

$A \to B$ é uma sentença composta construída a partir de A e B que lemos "se A então B".

$A \Rightarrow B$ é uma (meta)sentença que significa que $A \to B$ é uma tautologia, ou seja, verdadeiro independentemente dos valores lógicos de A e de B, e que lemos "'se A então B' é verdadeiro" ou "se A é verdadeiro então B é verdadeiro".

Veremos adiante que as implicações são extremamente úteis na construção de argumentos válidos.

Mais geralmente, sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ e B sentenças. Dizemos que essas sentenças $A_1, A_2, \dots, A_n$ **implicam logicamente** B se $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ é uma tautologia e escrevemos $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$.

Por exemplo, dado que $A \to B$ é verdadeira, temos que sua conclusão B pode ser verdadeira ou falsa, mas se nos é dado que a hipótese A também é verdadeiras, então a conclusão B deve ser, obrigatoriamente, verdadeira, isto é

$$A \wedge (A \to B) \Rightarrow B$$

Essa implicação lógica é conhecida por ***modus ponens***.

Exemplo 6. Considere as sentenças A dada por "Mané estuda"; B por "Mané joga futebol" e C dada por "Mané passa em discreta". Então $A \to C$, $(\neg B) \to A$, $(\neg C)$ têm como consequência lógica B.

A tabela 1.3 lista algumas consequências lógicas notáveis. As letras A, B, C denotam sentenças e A e B predicados.

Adição	$A \Rightarrow A \to B$
Simplificação	$A \wedge B \Rightarrow A$ $A \wedge B \Rightarrow B$
Modus ponens	$A \wedge (A \to B) \Rightarrow B$
Modus tollens	$(A \to B) \wedge (\neg B) \Rightarrow \neg A$
Silogismos	$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$ $(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$
Contradição	$A \to \mathbf{F} \Rightarrow \neg A$
Distributiva para quantificadores	$(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$ $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$

Tabela 1.3: Consequências lógicas notáveis.

Do exemplo 6 acima tiramos

1.	$A \to C$	premissa
2.	$\neg C$	premissa
3.	$\neg B \to A$	premissa
4.	$\neg C \to \neg A$	contrapositiva de 1
5.	$\neg A$	Modus ponens de 2 e 4
6.	$\neg A \to \neg(\neg B)$	contrapositiva de 3
7.	$\neg(\neg B)$	modus ponens de 5 e 6
8.	B	dupla negação

em que cada linha a partir da linha 4 é consequência lógica das linhas anteriores, portanto, B é consequência lógica das premissas.

Equivalência lógica

Há sentenças que são diferentes mas transmitem a mesma informação como "não é o caso de eu não perder o guarda-chuva" ser equivalente a "eu vou perder o guarda-chuva". O que nos interessa são declarações logicamente equivalentes, ou seja, sentenças diferentes como mesmo valor lógico como, por exemplo, P e $\neg\neg P$.

Duas sentenças A e B são **logicamente equivalentes** se assumem o mesmo valor lógico, isto é, $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia. A notação é $A \Leftrightarrow B$. As sentenças abertas $P(x)$ e $Q(x)$ são **logicamente equivalentes** se $P(a) \leftrightarrow Q(a)$ é tautologia para todo $a \in D$, e escrevemos $\forall x \in D(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$.

Por exemplo $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ e $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Observamos que $\leftrightarrow$ é um conectivo, ele "conecta" sentenças enquanto que $\Leftrightarrow$ é uma abreviação de uma metassentença.

As leis de equivalências dadas na tabela 1.4 são notórias e a seguir são usadas para deduzir outras.

Identidade	$A \wedge \mathbf{V} \Leftrightarrow A$ $A \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow A$
Idempotência	$A \vee A \Leftrightarrow A$ $A \wedge A \Leftrightarrow A$
Distributiva	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Comutativa	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
Associativa	$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
Absorção	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
De Morgan	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
Dominação	$A \vee \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{V}$ $A \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$
Inversas	$A \vee (\neg A) \Leftrightarrow \mathbf{V}$ $A \wedge (\neg A) \Leftrightarrow \mathbf{F}$
Dupla negação	$\neg(\neg(A)) \Leftrightarrow A$
Contrapositiva	$A \to B \Leftrightarrow (\neg B) \to (\neg A)$
Contradição	$A \to B \Leftrightarrow (A \wedge (\neg B)) \to \mathbf{F}$
Distributiva para quantificadores	$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$
Negação	$\neg(\forall x,\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x,\ \neg(P(x))$ $\neg(\exists x,\ P(x)) \Leftrightarrow \forall x,\ \neg(P(x))$

Tabela 1.4: Equivalências lógicas notáveis.

Exercício 7. Verifique usando as leis da tabela 1.4 que $(A \vee B) \wedge \neg(\neg(A) \wedge B)$ é logicamente equivalente a A.

Resolução.

$$
\begin{array}{cll}
 & (A \vee B) \wedge \neg(\neg(A) \wedge B) & \\
\Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (\neg\neg(A) \vee \neg(B)) & \text{por De Morgan} \\
\Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (A \vee \neg(B)) & \text{por dupla negação} \\
\Leftrightarrow & (A \vee (B \wedge \neg(B)) & \text{por distributiva} \\
\Leftrightarrow & (A \vee \mathbf{F}) & \text{por inversa} \\
\Leftrightarrow & A & \text{por identidade}
\end{array}
$$

□

Exercício 8. Verifique que $\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg(B)$.

Regras de Inferência e Argumentos válidos

Um **argumento** é uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de sentenças, ditas **premissas** que terminam com uma sentença dita **conclusão** B (o que indicamos pelo símbolo $\therefore$ lido como "portanto")

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore B \end{array}$$

O argumento é **válido** se, e só se, $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \Rightarrow B$, isto é, se a conclusão B é verdadeira sempre as premissas forem verdadeiras.

Regras de inferência são esquemas de argumentos válidos simples que usamos para para construir argumentos válidos mais complexos.

Por exemplo,

$$\begin{array}{l} \text{Se você tem uma senha, então você pode entrar no moodle.} \\ \text{Você tem uma senha.} \\ \hline \text{Portanto, você pode entrar no moodle.} \end{array}$$

é um argumento válido porque se encaixa na lei de *modus ponens* dada na tabela 1.3, o argumento

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \\ \hline \therefore B \end{array}$$

é uma regra de inferência chamada ***Modus Ponens***. Cada lei dada na tabela 1.3 nos dá uma regra de inferência:

1. **Regra da Adição** Se A é uma premissa, podemos deduzir $A \vee B$

$$\begin{array}{c} A \\ \hline \therefore A \vee B \end{array}$$

2. **Regra da Simplificação** Se $A \wedge B$ é uma premissa, podemos deduzir A

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

3. ***Modus ponens***

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \\ \hline \therefore B \end{array}$$

4. ***Modus tollens*** Se $A \rightarrow B$ e $\neg B$ são duas premissas, podemos usar o *modus tollens* para deduzir $\neg A$

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \neg B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$$

Por exemplo

$$\begin{array}{l} \text{Se você tem uma senha, então você pode entrar no moodle.} \\ \text{Você não pode entrar no moodle.} \\ \hline \text{Portanto, você não tem uma senha.} \end{array}$$

5. **Regra do silogismo hipotético** Se $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$ são duas premissas, podemos usar o silogismo hipotético para deduzir $A \rightarrow C$

$$\begin{array}{r} A \to B \\ B \to C \\ \hline \therefore A \to C \end{array}$$

6. **Regra do silogismo disjuntivo** Se $\neg A$ e $A \vee B$ são premissas, podemos usar o silogismo disjuntivo para deduzir B

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg A \\ \hline \therefore B \end{array}$$

7. **Regra da contradição** Se $\neg A \to \mathbf{F}$ é verdadeiro então A é verdadeiro

$$\begin{array}{c} \neg A \to \mathbf{F} \\ \hline \therefore A \end{array}$$

8. **Regra da conjunção** Se temos A e temos B então deduzimos $A \wedge B$

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A \wedge B \end{array}$$

Podemos usar essa regras para escrever outras regras, ou argumentos válidos. O seguinte é um argumento válido

$$\begin{array}{r} \neg A \to B \\ B \to S \\ A \to C \\ \hline \therefore \neg C \to S \end{array}$$

Resolução. Vejamos

passo	*proposição*	*justificativa*
1.	$\neg A \to B$	premissa
2.	$B \to S$	premissa
3.	$A \to C$	premissa
4.	$\neg C \to \neg A$	contrapositiva de 3
5.	$\neg C \to B$	Silogismo hipotético de 4 e 1
6.	$\neg C \to S$	Silogismo hipotético de 5 e 2

□

Exercício 9. Preste atenção nesse caso:

$$\begin{array}{l} \text{se } \sqrt{2} > 3/2 \text{ então } 2 > 9/4 \\ \sqrt{2} > 3/2 \\ \hline \therefore 2 > 9/4 \end{array}$$

o argumento é válido?

Exercício 10. Verifique a validade das seguintes regras de inferência:

9. **Resolução** $\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \vee C \\ \hline \therefore B \vee C \end{array}$

10. **Prova por casos** $\begin{array}{c} A \to B \\ C \to B \\ A \vee C \\ \hline \therefore B \end{array}$

Regras de inferência para quantificadores

11. **Instanciação universal** Se $\forall x \in D,\ P(x)$ é uma premissa, então deduzimos $P(c)$ para qualquer que seja c elemento do domínio D

$$\frac{\forall x \in D, P(x)}{\therefore P(c)}$$

12. **Generalização universal** Se $P(c)$ para um elemento c *arbitrário* do domínio D é premissa, então deduzimos $\forall x \in D,\ P(x)$

$$\frac{P(c) \text{ para } c \text{ arbitrário}}{\therefore \forall x \in D, P(x)}$$

Exemplo 11. Consideremos a sentença aberta $n^2 = n$. Usando a generalização universal para $c = 0$

$$\frac{0^2 = 0}{\therefore \forall n \in \mathbb{N},\ n^2 = n}$$

o que não é válido porque 0 não é um elemento *arbitrário*.

13. **Instanciação existencial** Se $\exists x \in D,\ P(x)$ é premissa, então deduzimos $P(c)$ para algum elemento c do domínio D

$$\frac{\exists x \in D, P(x)}{\therefore P(c)}$$

14. **Generalização existencial** Se $P(c)$ para algum c particular em D é premissa, então deduzimos $\exists x \in D,\ P(x)$

$$\frac{P(c) \text{ para algum } c \text{ particular}}{\therefore \exists x \in D,\ P(x)}.$$

Por exemplo, o seguinte argumento é válido

$$\begin{array}{c} \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \forall x(Q(x) \to R(x)) \\ \hline \therefore \forall x(P(x) \to R(x)) \end{array}$$

Vejamos

passo	*proposição*	*justificativa*
1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premissa
2.	$\forall x(Q(x) \to R(x))$	premissa
3.	$P(c) \to Q(c)$	instanciação universal de 1
4.	$Q(c) \to R(c)$	instanciação universal de 2
5.	$P(c) \to R(c)$	Silogismo hipotético de 3 e 4
6.	$\forall x(P(x) \to R(x))$	generalização universal.

Da regra da conjunção podemos mostrar que

$$\exists x \in D, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in D, P(x)) \wedge (\exists x \in D, Q(x)).$$

Vejamos

passo	*proposição*	*justificativa*
1.	$\exists x, (P(x) \wedge Q(x))$	premissa
2.	$P(c) \wedge Q(c)$	instanciação existencial de 1
3.	$P(c)$	simplificação de 2
4.	$Q(c)$	simplificação de 2
5.	$\exists x, P(x)$	generalização existencial de 3
6.	$\exists x, Q(x)$	generalização existencial de 4
7.	$(\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$	conjunção.

No próximo exercício suponha que há um domínio associado sem se preocupar com o que de fato é tal conjunto (pode ser o conjunto de todos os animais conhecidos, por exemplo).

Exercício 12 (Lewis Carrol). Verfique se o seguinte argumento é válido:

$$\begin{array}{l}
\text{Todos os leões são selvagens.} \\
\text{Alguns leões não bebem café.} \\
\hline
\text{Portanto, alguma criatura selvagem não bebe café.}
\end{array}$$

Solução. Consideremos Matata um elemento do domínio.

passo	*proposição*	*justificativa*
1.	$\forall x, (L(x) \to S(x))$	premissa
2.	$\exists x, (L(x) \wedge \neg C(x))$	premissa
3.	$L(\text{Matata}) \wedge \neg C(\text{Matata}))$	instanciação universal de 2
4.	$L(\text{Matata})$	simplificação de 3
5.	$\neg C(\text{Matata})$	simplificação de 3
6.	$(L(\text{Matata}) \to S(\text{Matata}))$	instanciação universal de 1
7.	$S(\text{Matata})$	Modus Ponens de 4 e 6
8.	$S(\text{Matata}) \wedge \neg C(\text{Matata})$	conjunção de 5 e 7
9.	$\exists x(S(x) \wedge \neg C(x))$	generalização existencial

□

Exercício 13 (*Modus ponens* universal). Verifique se o seguinte argumento que combina instanciação universal com *Modus Ponens* é válido:

$$\begin{array}{l}
\forall x(P(x) \to Q(x)) \\
P(a) \\
\hline
\therefore Q(a)
\end{array}$$

Exercícios

1. Sejam P e Q as sentenças "a eleição foi decidida" e "os votos foram contados", respectivamente. Expresse cada uma das sentenças simbólicas abaixo como uma sentença em português
   (a) $\neg P$
   (b) $\neg(P) \wedge Q$
   (c) $(\neg P) \to (\neg Q)$
   (d) $(\neg Q) \vee ((\neg P) \wedge Q)$
2. Considere que P, $\neg Q$ e R sejam sentenças verdadeiras. Verifique quais das afirmações são verdadeiras.
   (a) $P \to Q$
   (b) $Q \to P$
   (c) $P \to (Q \vee R)$
   (d) $P \leftrightarrow Q$
   (e) $P \leftrightarrow R$
   (f) $(P \vee Q) \to P$
3. Verifique que
   (a) há casos em que $P \to Q$ é verdadeira, mas sua *recíproca* $Q \to P$ é falsa; e vice-versa;
   (b) há casos em que $P \to Q$ é verdadeira, mas sua *inversa* $(\neg P) \to (\neg Q)$ é falsa;
   (c) a sentença $P \to Q$ e sua *contrapositiva* $(\neg Q) \to (\neg P)$ têm sempre o mesmo valor lógico.
4. A sentença $(A \to B) \wedge (A \to \neg B)$ é uma contradição?
5. Escreva as afirmações abaixo na forma simbólica, definindo e atribuindo símbolos aos predicados e definido os domínios dos quantificadores.

(a) Todos os estudantes gostam de lógica.
(b) Alguns estudantes não gostam de lógica.
(c) Cada pessoa tem uma mãe.
(d) Entre todos os inteiros exitem alguns que são primos.
(e) Um dia do próximo mês é domingo.
(f) Alguns inteiros são pares e divisíveis por 3.
(g) Alguns inteiros são pares ou divisíveis por 3.
(h) $x^2 - 14 = 0$ tem uma solução positiva.
(i) Toda solução de $x^2 - 14 = 0$ é positiva.
(j) Nenhuma solução de $x^2 - 14 = 0$ é positiva.
(k) Existe algum estudante de direito que não é brasileiro.
(l) Todo estudante de direito tem um celular.
(m) Ninguém é perfeito.
(n) Alguém é perfeito.
(o) Todos os nossos amigos são perfeitos.
(p) Algum de nossos amigos é perfeito.
(q) Todos são nossos amigos e são perfeitos.
(r) Ninguém é nosso amigo ou alguém não é perfeito.

6. Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, e suponha que $P(x)$ significa " x é par", $Q(x)$ significa "x e divisível por 3", $R(x)$ significa "x e divisível por 4" e $S(x, y)$ é "x + 2 > y". Escreva em português cada uma das sentenças a seguir, e determine seu valor lógico:

(a) $(\forall x \in \mathbb{N})P(x)$.
(b) $(\forall x \in \mathbb{N})(P(x) \vee Q(x))$.
(c) $(\forall x \in \mathbb{N})(P(x) \to Q(x))$.
(d) $(\forall x \in \mathbb{N})(P(x) \vee R(x))$.
(e) $(\forall x \in \mathbb{N})(P(x) \wedge R(x))$.
(f) $(\forall x \in \mathbb{N})(R(x) \to P(x))$.
(g) $(\forall x \in \mathbb{N})(P(x) \to \neg Q(x))$.
(h) $(\forall x \in \mathbb{N})(P(x) \to P(x+2))$.
(i) $(\forall x \in \mathbb{N})(R(x) \to R(x+4))$.
(j) $(\forall x \in \mathbb{N})(Q(x) \to Q(x+1))$.
(k) $(\exists x \in \mathbb{N})R(x)$
(l) $(\exists x \in \mathbb{N})(P(x) \vee Q(x))$.
(m) $(\exists x \in \mathbb{N})(P(x) \to Q(x))$.
(n) $(\exists x \in \mathbb{N})(Q(x) \to Q(x+1))$.
(o) $(\exists x \in \mathbb{N})(P(x) \to Q(x+1))$.
(p) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})S(x, y)$.
(q) $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})S(x, y)$.
(r) $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})S(x, y)$.

7. Verifique as equivalências e implicações lógicas notáveis, dadas nas tabelas 1.4 (página 9) e 1.3 (página 8).

8. Verifique as seguintes equivalência lógicas, para provas por contradição.

$$
\begin{aligned}
(P \to Q) &\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \to (R \wedge \neg R)) \\
(P \to Q) &\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \to \neg P) \\
(P \to Q) &\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \to Q)
\end{aligned}
$$

9. Para cada sentença determine o valor verdade e a negação. Na negação, expresse em símbolos a sentença usando as equivalências lógicas para a negação de quantificadores.

   (a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n^2 < m)$.
   (b) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(n < m^2)$.
   (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x = y^2)$.
   (d) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n + m = 0)$.
   (e) $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n^2 + m^2 = 25)$.
   (f) $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n + m = 4 \wedge n - m = 2)$.
   (g) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})(p = \frac{n+m}{2})$.
   (h) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy = 0)$
   (i) $(\forall x \in \mathbb{R})(x \neq 0) \to (\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1)$.
   (j) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \neq 0 \to (xy = 1))$.
   (k) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$.
   (l) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$.

10. Considere $G(x, y)$ como "x gosta de y". Expresse em símbolos as sentenças

   (a) todo mundo gosta de todo mundo
   (b) todo mundo gosta de alguém
   (c) alguém gosta de todo mundo
   (d) alguém gosta de alguém

11. A sentença $\forall x \in X,\ A(x)$ é falsa se e somente se $\exists x \in X,\ \neg A(x)$ é verdadeira, ou seja, a sentença $\forall x \in X,\ A(x)$ é falsa se e somente se podemos encontrar um $x_0 \in X$ tal que $A(x_0)$ é uma sentença falsa. Tal x_0 é chamado de contraexemplo para $\forall x \in X,\ A(x)$. Determine um contraexemplo para:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \neq 0$;
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$;
   (c) $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geqslant x$;
   (d) $\forall x \in \{3, 5, 7, 9\}, x + 3 \geqslant 7$;
   (e) $\forall x \in \{3, 5, 7, 9\}$, x é primo.

12. Verifique se cada argumento abaixo é um argumento válido.

   (a)
   $$\begin{array}{l} A \to B \\ A \to C \\ \hline \therefore A \to (B \wedge C) \end{array}$$

   (b)
   $$\begin{array}{l} \neg R(c) \\ \forall t \in D(P(t) \to Q(t)) \\ \forall t \in D(Q(t) \to R(t)) \\ \hline \therefore \neg P(c) \end{array}$$

13. Dê a justifcativa para cada passo dos argumentos abaixo para que seja válido.

   (a) $(P \wedge (P \to Q) \wedge (S \vee R) \wedge (R \to \neg Q)) \Rightarrow (S \vee T)$
   (b) $((P \to Q) \wedge (\neg R \vee S) \wedge (P \vee R)) \Rightarrow (\neg Q \to S)$
   (c)

passo	*justificativa*
1) P	
2) $P \to Q$	
3) Q	
4) $R \to \neg Q$	
5) $Q \to \neg R$	
6) $\neg R$	
7) $S \vee R$	
8) S	
9) $S \vee T$	

(d)

passo	*justificativa*
1) $\neg(\neg Q \to S)$	
2) $\neg Q \wedge \neg S$	
3) $\neg S$	
4) $\neg R \vee S$	
5) $\neg R$	
6) $P \to Q$	
7) $\neg Q$	
8) $\neg P$	
9) $P \vee R$	
10) R	
11) $\neg R \wedge R$	
12) $\neg Q \to S$	

14. Uma argumento não é válido se é possível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Mostre que os seguintes argumentos não são válidos exibindo valores-lógicos para as sentenças P, Q, R, S de modo que as premissas são verdadeiras mas a conclusão é falsa.

(a)
$$\begin{array}{ll} & P \leftrightarrow Q \\ & Q \to R \\ & R \vee \neg S \\ & \neg(S) \to Q \\ \hline \therefore & S \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} & P \\ & P \to R \\ & P \to (Q \vee \neg R) \\ & \neg(Q) \vee \neg(S) \\ \hline \therefore & S \end{array}$$

15. Verifique que valem as equivalências e consequências lógicas abaixo.

(a) $\forall x \in D(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in D, P(x)) \wedge (\forall x \in D, Q(x))$.

(b) $(\forall x \in D, P(x)) \vee (\forall x \in D, Q(x)) \Rightarrow \forall x \in D(P(x) \vee Q(x))$.

(c) $\exists x \in D, (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in D, P(x)) \vee (\exists x \in D, Q(x))$.

(d) $\exists x \in D, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in D, P(x)) \wedge (\exists x \in D, Q(x))$.

16. Escreva os seguinte argumentos na forma simbólica, estabeleça sua validade ou dê um contraexemplo para mostrar que é inválido.

(a) "Se Raquel consegue posto de supervisor e trabalha duro, ela ganhará um aumento. Se ela receber o aumento, então ela vai comprar um carro novo. Ela não comprou um carro novo. Portanto, ou Raquel não conseguiu o posto de supervisor ou ela não trabalhou duro."

(b) "Se Dominic for para a pista, Helen ficará louca. Se Ralph jogar cartas a noite toda, então Carmela ficará louca. Se Helen ou Carmela ficarem loucas, então Veronica (a advogada delas) será notificada. Verônica não teve notícias de nenhum desses dois clientes. Portanto, Dominic não chegou à pista e Ralph não jogou cartas a noite toda."

(c) "Se há uma possibilidade de chuva ou sua camisa vermelho está lavando, Luiz não cortará sua grama. Sempre que a temperatura é superior a 25ºC, não há chance de chuva. Hoje a temperatura é de 30ºC e Luiz está usando sua camisa vermelha. Portanto, hoje Luiz cortará a grama."