Programação Matemática

Jair Donadelli
jair.donadelli@ufabc.edu.br

CMCC-UFABC

2021

2021

Simplex: problemas para serem tratados

Exercícios

Simplex: o algoritmo

Critério de otimalidade

Critério de entrada

Critério de saída

Algoritmo

Complexidade algorítmica do simplex

Dualidade

Exercícios

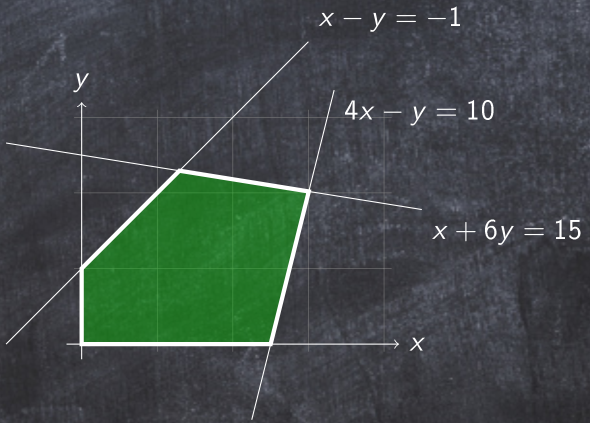
Teoremas fundamentais

Exercícios

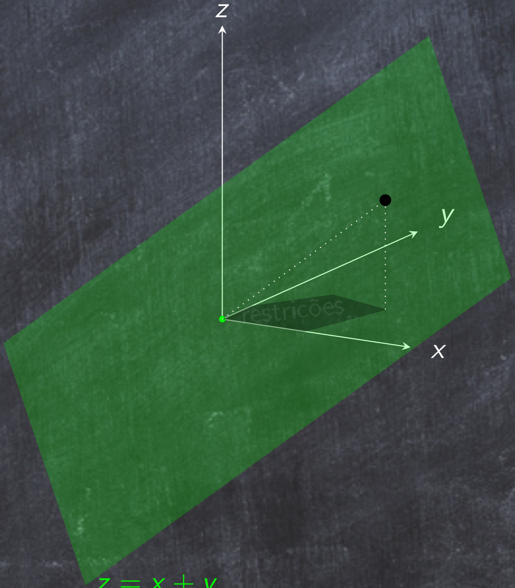
2021

Exemplo de um PPL

$$
\begin{aligned}
\underset{x,y}{\text{maximize}} \quad & x + y \\
\text{sujeito a} \quad & x \geqslant 0 \\
& y \geqslant 0 \\
& x - y \geqslant -1 \\
& x + 6y \leqslant 15 \\
& 4x - y \leqslant 10
\end{aligned}
$$



2021



$z = x + y$

2021

Usando PuLP do Python

```
# nome do modelo
PPL = LpProblem('Exemplo',LpMaximize)

# definição das variáveis
x1=LpVariable(name="x",lowBound=0)
x2=LpVariable(name="y",lowBound=0)

# função objetivo
PPL += x1 + x2

# restrições
PPL += x2 - x1 <=1
PPL += x1 + 6*x2 <= 15
PPL += 4*x1 - x2 <= 10

# resolução
PPL.solve()

for v in PPL.variables():
    print(v.name, "=", v.varValue)
print("Valor máximo = ", value(PPL.objective))
```

```
x = 3.0
y = 2.0
Valor máximo =  5.0
```

2021

Problema de programação matemática

Queremos $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ que otimize (max/min) o valor de uma função objetivo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entre todos os pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a restrição $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, para um dado $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$\begin{array}{ll} \text{otimize} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{X} \end{array}$$

2021

Problema de programação linear

Temos um PPL quando

1. a função objetivo é uma função linear nas variáveis de decisão $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i.e., existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tal que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

2. a restrição é dada por um sistema de (in)equações lineares

$$\begin{cases} a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leqslant d_i, & i = 1, 2, \ldots, k \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \geqslant d_i, & i = k, k+1, \ldots, \ell \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = d_i, & i = \ell, \ell+1, \ldots, m. \end{cases}$$

2021

Se $f(\boldsymbol{x})$ é uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ então

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} f(\boldsymbol{x}) = -\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} -f(\boldsymbol{x})$$

Então podemos modelar sempre como problema de maximização

Além disso,

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant d \text{ sse } -f(\boldsymbol{x}) \leqslant -d.$$

$$f(\boldsymbol{x}) = d \text{ sse } f(\boldsymbol{x}) \leqslant d \text{ e } -f(\boldsymbol{x}) \leqslant -d\ .$$

e podemos expressar as restrições sempre como inequações da forma $\leqslant$.

2021

$$\begin{cases} a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leqslant d_i, & i = 1, 2, \ldots, k \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \geqslant d_i, & i = k, k+1, \ldots, \ell \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = d_i, & i = \ell, \ell+1, \ldots, m. \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leqslant d_i, & i = 1, 2, \ldots, k \\ -a_{i,1}x_1 - a_{i,2}x_2 - \cdots - a_{i,n}x_n \leqslant -d_i, & i = k, k+1, \ldots, \ell \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leqslant d_i, & i = \ell, \ell+1, \ldots, m \\ -a_{i,1}x_1 - a_{i,2}x_2 - \cdots - a_{i,n}x_n \leqslant -d_i, & i = \ell, \ell+1, \ldots, m. \end{cases}$$

essa é a forma canônica do problema.

2021

Forma canônica

$$
\begin{aligned}
\underset{x_1,\dots,x_n}{\text{maximize}} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} \quad & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \leqslant d_1 \\
& a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \leqslant d_2 \\
& \qquad\qquad \vdots \\
& a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \leqslant d_m
\end{aligned}
$$

2021

Forma canônica matricial

Se representamos pontos do $\mathbb{R}^n$ por matriz-coluna

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

Forma canônica matricial:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d} \end{array}}$$

2021

No exemplo inicial

$$
\begin{aligned}
\underset{x,y}{\text{maximize}} \quad & x + y \\
\text{sujeito a} \quad & x \geqslant 0 \\
& y \geqslant 0 \\
& -x + y \leqslant 1 \\
& x + 6y \leqslant 15 \\
& 4x - y \leqslant 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{x,y}{\text{maximize}} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Soluções

Todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz as restrições de um PPL é chamado de solução viável.

Toda solução viável $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ que otimiza a função objetivo á chamada solução viável ótima.

Veremos que um PPL tem uma, infintas ou nenhuma solução ótima.

2021

Exercício 1

Modele usando um PPL e resolva usando PuLP

Uma empresa deseja produzir uma ração para aves a custo mínimo utilizando dois produtos: frutas secas e semente de girassol. Cada um dos produtos possuem custos: R$ 5,78 por Kg de frutas secas e R$ 4,85 por Kg de semente de girassol. Quanto às aves, sabe-se que elas necessitam de uma alimentação rica em vitaminas. Todas essas vitaminas estão presentes nos produtos, cujas quantidades mínimas (em unidades por semana) são:

Vitaminas	Composição (unid/semana)		Qtdade mínima/semana
	Frutas secas	Sementes de girassol	
A	5	25	50
B	25	10	100
C	10	10	60

2021

Construindo um modelo em PPL

Não há um algoritmo para se escrever um modelo matemático. É fundamental treinar para ser capaz de:

1. Descobrir o que deve ser determinado (variáveis do problema) e o que está disponível (dados do problema).
2. Identificar o(s) objetivo(s) do problema e as restrições do problema, isto é, aquilo que limita a região das soluções admissíveis.
3. Formalizar o problema como um problema de programação matemática: devemos estabelecer um critério de avaliação das soluções alternativas, o qual nos permite dizer que uma solução é "melhor" que outra. A busca de uma solução mais adequada (ótima) entre diversas soluções alternativas (viáveis) traz consigo elementos de um Problema de Otimização.

2021

Uma empresa deseja produzir uma ração para aves a custo mínimo utilizando 2 produtos: frutas secas e semente de girassol. Cada um dos produtos possuem custos: R$ 5,78 por Kg de frutas secas e R$ 4,85 por Kg de semente de girassol. Quanto às aves, sabe-se que elas necessitam de uma alimentação rica em vitaminas. Todas essas vitaminas estão presentes nos produtos, cujas quantidades mínimas (em unidades por semana) são:

Vitaminas	Composição (unid/semana)		Qtdade mínima/semana
	Frutas secas	Sementes de girassol	
A	5	25	50
B	25	10	100
C	10	10	60

2021

Roteiro

Passo 1: Determinar, no problema, aquilo que é fixo e não pode ser alterado (dados) e aquilo que se pode decidir (variáveis de decisão).

O que a empresa desconhece e pretende determinar, são as quantidades de cada produto a serem utilizados na ração.

x_F a quantidade de frutas secas na ração

x_S a quantidade de semente de girassol na ração

com custos fixos por Kg de, respectivamente, 5,78 e 4,85.

2021

Roteiro

Passo II: Identificar o(s) objetivo(s) do problema e representá-lo(s) como função linear das variáveis de decisão, que deve ser minimizada ou maximizada.

O objetivo do problema é minimizar o custo com a produção da ração. Como cada quilo de frutas secas tem custo de 5,78 reais e cada quilo de sementes de girassol tem custo de 4,85 reais, a função objetivo será: minimizar $5{,}78x_F + 4{,}85x_S$

2021

Roteiro

Passo III: Identificar as restrições do problema, isto é, aquilo que limita a região das soluções admissíveis, e representá-las como igualdades ou desigualdades, funções lineares das variáveis de decisão.

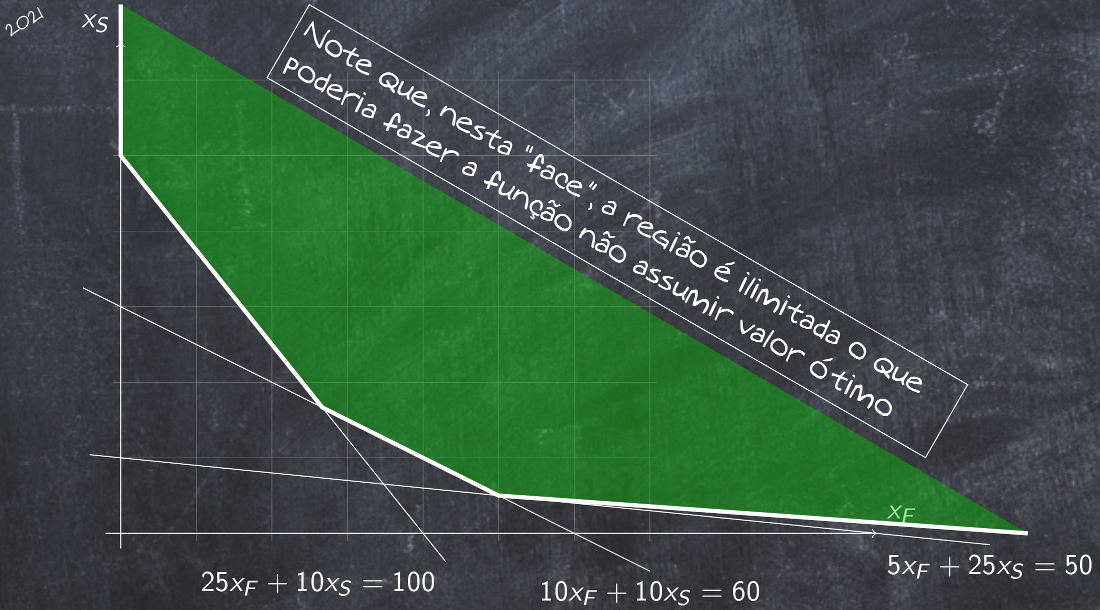
Quantidade de vitamina A (unidades por semana) $5x_F + 25x_S \geqslant 50$
Quantidade de vitamina B (unidades por semana) $25x_F + 10x_S \geqslant 100$
Quantidade de vitamina C (unidades por semana) $10x_F + 10x_S \geqslant 60$
Como não pode haver quantidade negativa de ração $x_F \geqslant 0$, $x_S \geqslant 0$.

2021

Roteiro

O PPL que modela o problema

$$\begin{aligned} \underset{x_F, x_S}{\text{minimize}} \quad & 5{,}78 x_F + 4{,}85 x_S \\ \text{sujeito a} \quad & 5x_F + 25x_S \geqslant 50 \\ & 25x_F + 10x_S \geqslant 100 \\ & 10x_F + 10x_S \geqslant 60 \\ & x_F \geqslant 0 \\ & x_S \geqslant 0 \end{aligned}$$


2021
x_S
Note que, nesta "face", a região é ilimitada o que poderia fazer a função não assumir valor ótimo
x_F
$25x_F + 10x_S = 100$
$10x_F + 10x_S = 60$
$5x_F + 25x_S = 50$

2021

Problema

Deseja-se produzir 4.000 kg de mistura a partir de 3 tipos de cafés em grão (Brasil, Colômbia e Peru) ao menor custo possível, que tivesse um aroma de, pelo menos, nível 78 e uma intensidade de, pelo menos, nível 16. A quantidade disponível de cada um dos tipos de grão é limitada e os custos por Kg são conhecidos. As características e informações dos grãos estão dados na tabela:

Grão	Aroma (nível)	Intensidade (nível)	Custo (R$/Kg)	Disponibilidade (Kg)
Brasil	75	15	0,5	1500
Colômbia	60	20	0,6	1200
Perú	85	18	0,7	2000

2021

O PPL que modela o problema

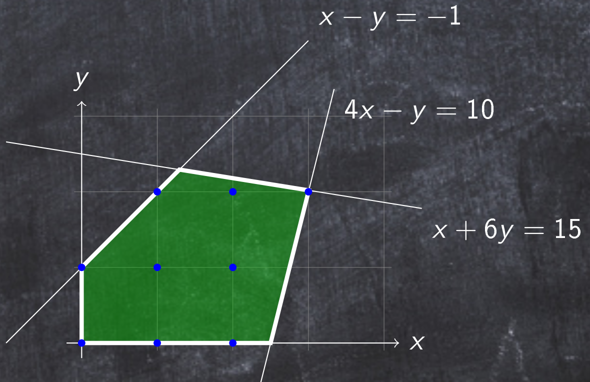
$$
\begin{aligned}
\underset{x_B, x_C, x_P}{\text{minimize}} \quad & 0,5x_B + 0,6x_C + 0,7x_P \\
\text{sujeito a} \quad & 75x_B + 60x_C + 85x_P \geqslant 78 \\
& 15x_B + 20x_C + 18x_P \geqslant 16 \\
& x_B + x_C + x_P = 4000 \\
& 0 \leqslant x_B \leqslant 1500 \\
& 0 \leqslant x_C \leqslant 1200 \\
& 0 \leqslant x_P \leqslant 2000
\end{aligned}
$$

2021

PLI - Problema de Programação Linear Inteira

Um modelo de otimização linear constitui um Problema de Programação Linear Inteira se toda variável fica condicionada a assumir valores inteiros. O requisito de que variáveis tenham de ser inteiras normalmente implica maior complexidade computacional (é NP-completo).

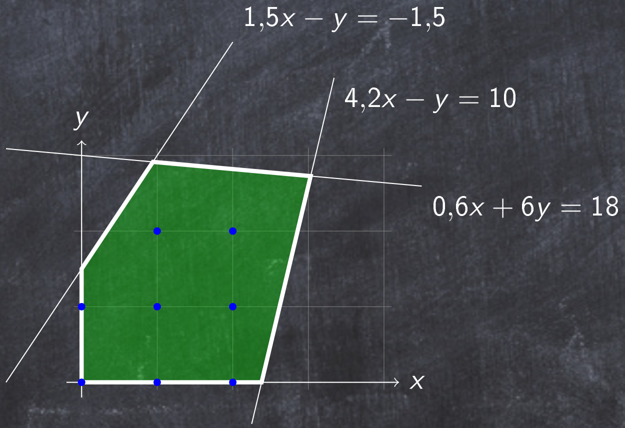
$$
\begin{aligned}
\underset{x,y}{\text{maximize}} \quad & x + y \\
\text{sujeito a} \quad & x \geqslant 0 \\
& y \geqslant 0 \\
& x - y \geqslant -1 \\
& x + 6y \leqslant 15 \\
& 4x - y \leqslant 10 \\
& x, y \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$



2021

PLI

Outras restrições, solução contínua $\neq$ solução inteira



Forma canônica de um PLI

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

com $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^m$.

2021

Um problema de escalonamento

Um hospital deseja fazer uma programação do turno noturno semanal (12h-8h) para suas enfermeiras. A demanda por enfermeiros para o turno noturno do dia j é um inteiro d_j, para $j = 1, \ldots, 7$. Cada enfermeira trabalha 5 dias seguidos no turno da noite. O problema é encontrar o número mínimo de enfermeiras do hospital precisa contratar.

Definimos x_j como o número de enfermeiras iniciando a semana no dia j. Por exemplo, uma enfermeira cuja semana começa no dia 5 funcionará nos dias 5, 6, 7, 1, 2. Temos então o seguinte formulação do problema:

2021

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant d_1 \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant d_2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geqslant d_3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geqslant d_4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant d_5 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqslant d_6 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant d_7 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

2021

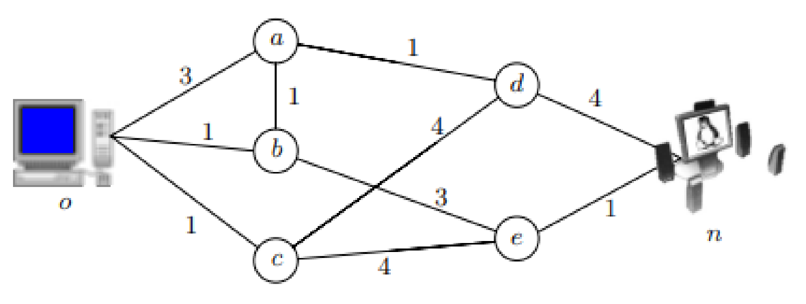
Tarefa

Estudar os exemplos do livro texto (págs. 29 a 78).

2021

Exercício 2 [MG]

Um administrador de uma rede de computadores convenceu seu empregador a comprar um novo computador com um sistema de som aprimorado. Ele quer transferir o seu coleção de músicas de um computador antigo para o novo, usando uma rede local. A rede é parecida com esta:

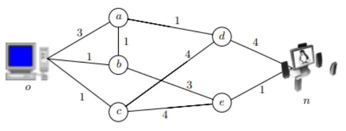


2021

Exercício 2, cont.

Qual é a taxa de transferência máxima do computador *o* (antigo) para o computador *n* (novo)?

Os números próximos a cada link de dados (aresta do grafo) especificam a taxa de transferência máxima desse link (em $\mathrm{Mb/s}$, digamos). Assumimos que cada link pode transferir dados em qualquer direção, mas não em ambas as direções simultaneamente.



Então, por exemplo, através do link *ab* pode-se enviar dados de *a* para *b* a qualquer taxa de 0 até $1\ \mathrm{Mb/s}$, ou envie dados de *b* para *a* qualquer taxa de 0 a $1\ \mathrm{Mb/s}$. Os nós *a*, *b*, *c*, *d*, *e* não são adequados para armazenar dados e, portanto, todos os dados inseridos neles devem ser enviados imediatamente.

2021

Exercício 3

Uma empresa de brinquedos está revendo seu planejamento de produção. O lucro líquido por unidade de carrinho e triciclo produzido é de R\$ $12{,}00$ e R\$ $60{,}00$, respectivamente. Cabe à empresa os processos de usinagem, pintura e montagem; matérias-primas e insumos necessários para a fabricação são terceirizados. O processo de usinagem requer 15min de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 30min por unidade de triciclo produzida. O processo de pintura requer 6min de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 45min por unidade de triciclo produzida. O processo de montagem necessita de 6min e 24min por unidade de carrinho e de triciclo produzida, respectivamente. O tempo disponível por semana é de 36, 22 e 15 horas para usinagem, pintura e montagem, respectivamente. A empresa quer determinar quanto produzir de cada produto por semana, respeitando as limitações de recursos, de forma a maximizar o lucro líquido semanal. Formular o problema de programação linear que maximiza o lucro líquido da empresa.

2021

Exercício 4

A empresa $\mathcal{N}$ do setor de laticínios fabrica os seguintes produtos: iogurte, queijo minas, queijo mussarela, queijo parmesão e queijo provolone. Agora, a empresa está redefinindo seu mix de produção. Para a fabricação de cada um dos cinco produtos, são necessários três tipos de matérias-primas: leite in natura, soro e gordura. A tabela

Produto	**Leite *in natura* (L)**	**Soro (L)**	**Gordura (kg)**
Iogurte	0,70	0,16	0,25
Queijo minas	0,40	0,22	0,33
Queijo mussarela	0,40	0,32	0,33
Queijo parmesão	0,60	0,19	0,40
Queijo provolone	0,60	0,23	0,47

apresenta as quantidades de matérias-primas necessárias para a fabricação de 1kg de cada produto. A quantidade de matéria-prima diária disponível é limitada (1.200litros de leite in natura, 460litros de soro e 650kg de gordura).

2021

Exercício 4, cont.

A disponibilidade diária de mão de obra especializada também é limitada ($170 \text{ horas} - \text{homem/dia}$). A empresa necessita de $0,05 \text{ hora} - \text{homem}$ para a fabricação de 1kg de iogurte, $0,12 \text{ hora} - \text{homem}$ para a fabricação de 1kg de queijo minas, $0,09 \text{ hora} - \text{homem}$ para queijo mussarela, $0,04 \text{ hora} - \text{homem}$ para queijo parmesão e $0,16 \text{ hora} - \text{homem}$ para queijo provolone. Devido a razões contratuais, a empresa necessita produzir uma quantidade mínima diária de 320kg de iogurte, 380kg de queijo minas, 450kg de queijo mussarela, 240kg de queijo parmesão e 180kg de queijo provolone.

2021

Exercício 4, cont.

A área comercial da empresa garante que existe mercado para absorver qualquer nível de produção, independentemente do produto. A Tabela

Produto	Preço de venda (R$/kg)	Custos variáveis totais (R$/kg)	Margem de contribuiçao (R$/kg)
Iogurte	3,20	2,40	0,80
Queijo minas	4,10	3,40	0,70
Queijo mussarela	6,30	5,15	1,15
Queijo parmesão	8,25	6,95	1,30
Queijo provolone	7,50	6,80	0,70

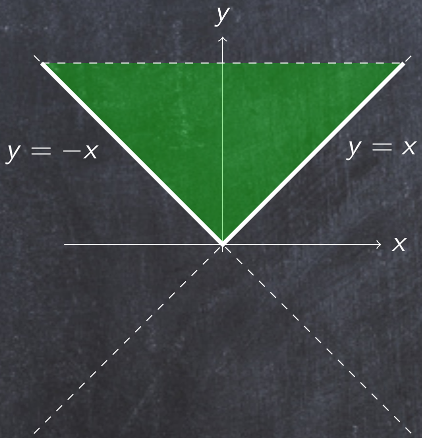
apresenta a margem de contribuição unitária por produto $(\mathrm{R\$/kg})$, que é calculada como a diferença entre o preço de venda e os custos variáveis totais. A empresa tem como objetivo determinar a quantidade de cada produto a ser fabricado de forma a maximizar seu resultado. Formule o problema de programação linear que maximiza o resultado esperado.

2021

Problemas envolvendo módulo

$$\text{minimize} \quad |x|$$

2021



$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y \\ \text{sujeito a} & y \geqslant -x \\ & y \leqslant x \end{array}$$

2021

PPL com módulo

$$
\begin{aligned}
\underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} \quad & |x_2 - x_1| \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 = 100 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

2021

PPL com módulo

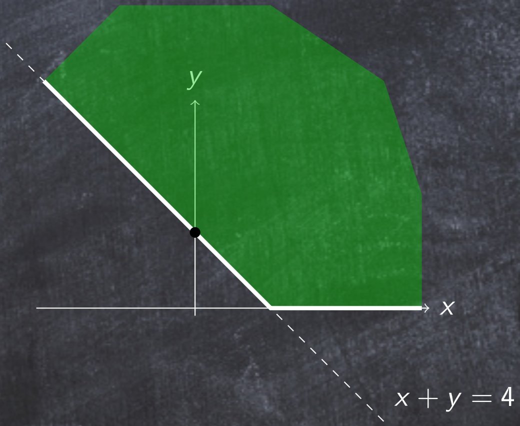
$$\begin{aligned} \underset{x,y}{\text{minimize}} \quad & 2|x| + y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \geqslant 4 \\ & y \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underset{z,y}{\text{minimize}} \quad & 2z + y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \geqslant 4 \\ & z \geqslant x \\ & z \geqslant -x \\ & y \geqslant 0 \end{aligned}$$

2021

PPL com módulo

$$\begin{aligned} \underset{x,y}{\text{minimize}} \quad & 2|x| + y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \geqslant 4 \\ & y \geqslant 0 \end{aligned}$$



2021

```
# nome do modelo
PPL = LpProblem('Valor_absoluto_2',LpMinimize)
# definição das variáveis
x=LpVariable(name="x")
y=LpVariable(name="y",lowBound=0)
z=LpVariable(name="z")
# função objetivo
PPL += 2*z + y
# restrições
PPL += z-x >=0
PPL += z+x >=0
PPL += y+x >=4
# resolução
PPL.solve()
print(LpStatus[PPL.status])  ## EXERCÍCIO: remova o lowBound da var. y e verifique
for v in PPL.variables():
    print(v.name, "=", v.varValue)
print("Valor ótimo = ", value(PPL.objective))
```

```
Optimal
x = 0.0
y = 4.0
z = 0.0
Valor ótimo =  4.0
```

2021

PPL com módulo

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^\top |\boldsymbol{x}| \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d} \end{array}$$

para $\boldsymbol{c} \geqslant 0$, é equivalente a

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{y} \geqslant -\boldsymbol{x} \end{array}$$

2021

Exercício 5

Formule um PPL equivalente

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} & 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ \text{sujeito a} & |x_1 + 2| + |x_2| \leqslant 5 \end{array}$$

2021

Exercício 6

Formule um PPL equivalente

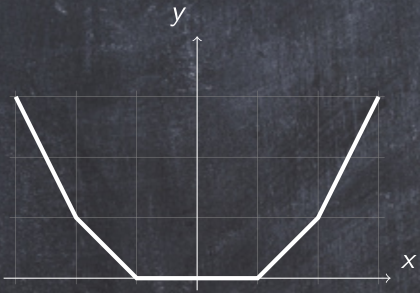
$$\text{minimize } f(x)$$

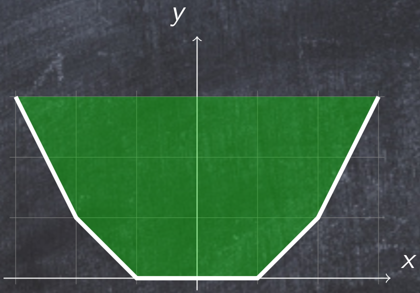
dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leqslant 1 \\ |x| - 1 & \text{se } 1 \leqslant |x| \leqslant 2 \\ 2|x| - 3 & \text{se } |x| \geqslant 2 \end{cases}$$

(Dica: gráfico.)

2021





2021

Uma aplicação: Otimização de uma carteira de ações
O problema

Decidir uma combinação apropriada de ativos para incluir em sua carteira de investimentos.

Dado um coleção de ações $A_1, \ldots, A_n$, uma carteira é determinada especificando-se qual fração $x_j \in [0, 1]$ de seu capital colocar no ativo j.

2021

Otimização de uma carteira de ações

Retorno × Risco

O retorno ao final de um período (minuto/hora/dia/mês/ano) é

$$\frac{\text{valor final} - \text{valor inicial}}{\text{valor inicial}}$$

As decisões referentes a alocação de recursos são encaradas num compromisso risco×retorno.

Riscos estão normalmente associados a "variabilidade" do retorno.

Premissa: investidor é avesso ao risco. Entre dois investimentos com mesma expectativa de retorno a escolha é o de menor risco.

2021

Otimização de uma carteira de ações
Retorno

$R_j(t)$ é o retorno de A_j no período $t = 1, 2, \ldots$; é uma variável aleatória.

O retorno da carteira é $R(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j R_j(t)$ e o retorno esperado da carteira

$$\mathbb{E}[\,R(t)\,] = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbb{E}[\,R_j(t)\,].$$

Não conhecemos a distribuição, aproximamos usando uma média amostral (histórica)

$$r_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} R_j(t)$$

Otimização de uma carteira de ações
Risco

Há vários modos de medir o risco, nenhuma universalmente aceita, e.g.: volatilidade ou a variabilidade com respeito a uma medida central (e.g., desvio padrão ou o desvio médio absoluto dos retornos), drawdown, downside risk, value at risk.

A volatilidade afeta o resultado:

2021

Ano	Ativo A	Ativo B	Ativo C
1	10,00%	9,00%	2,00%
2	10,00%	15,00%	−2,00%
3	10,00%	23,00%	18,00%
4	10,00%	10,00%	12,00%
5	10,00%	11,00%	15,00%
6	10,00%	8,00%	2,00%
7	10,00%	7,00%	7,00%
8	10,00%	6,00%	21,00%
9	10,00%	6,00%	8,00%
10	10,00%	5,00%	17,00%
Volatilidade	0,00%	5,44%	7,80%
retorno médio	10,00%	10,00%	10,00%
retorno composto anual	10,00%	9,88%	9,75%
Retorno composto	159,37%	156,66%	153,51%

2021

Cenário	Probabilidade	Ativo A	Ativo B	$\frac{1}{2}$ A $+\frac{1}{2}$ B
Expansão	0,1	6%	2,5%	4,25%
Normal	0,4	7,5%	−0,5%	3,5%
Recessão	0,3	2%	1%	1,5%
Depressão	0,2	−3%	13%	5%
Retorno esperado		3,6%	2,95%	3,275%
Volatilidade		4,02%	5,11%	1,29%

2021

Volatilidade

- desvio padrão

$$\mathrm{dp} = \sqrt{\mathbb{E}[\,(R - \mathbb{E}[\,R\,])^2\,]}$$

- desvio médio absoluto

$$\mathrm{dm} = \mathbb{E}\,|\,R - \mathbb{E}[\,R\,]\,|$$

estimado por (dados históricos)

$$= \frac{1}{T}\sum_t \left| \sum_j x_j R_j(t) - \frac{1}{T}\sum_i R_j(i) \right| = \frac{1}{T}\sum_t \left| \sum_j x_j (R_j(t) - r_j) \right|$$

2021

Modelo 1

Máximo retorno esperado sujeito a um nível mínimo de valor e a um dado risco

Modelo 2

Minimo risco, o desvio absoluto médio

2021

PPM para otimização de uma carteira de ações

$$\text{maximize} \quad \sum_j x_j r_j$$

sujeito a

$$\frac{1}{T}\sum_t \left| \sum_j x_j (R_j(t) - r_j) \right| \leqslant V_0$$

$$\sum_j x_j = 1$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (\forall j)$$

$$\text{minimize} \quad \frac{1}{T}\sum_t \left| \sum_j x_j (R_j(t) - r_j) \right|$$

sujeito a

$$\sum_j x_j r_j \geqslant R_0$$

$$\sum_j x_j = 1$$

$$x_j \geqslant 0 (\forall j)$$

2021

Um PPL para otimização de uma carteira de ações

dado um índice de aversão ao risco $\gamma \geqslant 0$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_j x_j r_j - \gamma \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_j x_j (R_j(t) - r_j) \right| \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_j x_j = 1 \\
& x_j \geqslant 0 \qquad (\forall j)
\end{aligned}
$$

2021

Um PPL para otimização de uma carteira de ações

PPL equivalente

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_j x_j r_j - \gamma \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_j x_j = 1 & \\
& \displaystyle\sum_j x_j (R_j(t) - r_j) \leqslant y_t & \\
& \displaystyle\sum_j x_j (R_j(t) - r_j) \geqslant -y_t & \\
& x_j \geqslant 0 & j = 1, 2, \ldots, n \\
& y_t \geqslant 0 & t = 1, 2, \ldots, T
\end{array}
$$

2021

Exercício 7

Um investidor tem uma carteira com n ações diferentes. Ele comprou s_i unidades da ação i ao preço p_i, para $i = 1, \ldots, n$. O preço atual da ação i é q_i e o investidor espera que o preço em um ano será T_i. Se ele vende ações, paga custos de transação à taxa de 1% do valor transacionado e, além disso, paga impostos à alíquota de 30% sobre os ganhos de capital. Por exemplo, se o investidor vende 1.000 ações a \$ 50 por ação que comprou a \$ 30 por ação, então recebe \$ 50.000, no entanto, ele deve $0{,}30(50.000 - 30.000) = 6.000$ em impostos de ganho de capital e $0{,}01(50.000) = 500$ em custos de transação. Assim, ao vender 1.000 ações, ele obtém $50.000 - 6.000 - 500 = 43.500$.
Formule o problema de selecionar quantas ações o investidor precisa vender para levantar uma quantia de dinheiro K, líquido de ganhos de capital e custos de transação, maximizando o valor esperado de sua carteira no próximo ano.

2021

PPL com só 2 variáveis

na forma canônica

$$\underset{x,y}{\text{maximize}} \quad ax + by \qquad (a, b \neq 0)$$

$$\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leqslant \boldsymbol{d} \quad (\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times 2}, \ \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{m})$$

Por exemplo

$$\underset{x,y}{\text{maximize}} \quad x + y$$

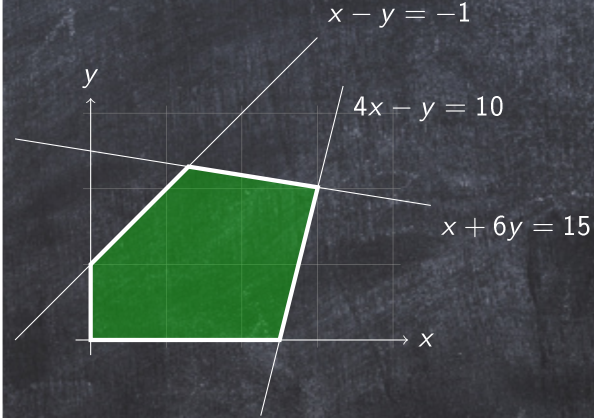
$$\text{sujeito a} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2021

Região viável

é a região dos pontos que satisfazem todas as restrições.

$$\begin{aligned} \underset{x,y\in\mathbb{R}}{\text{maximize}} \quad & x + y \\ \text{sujeito a} \quad & x \geqslant 0 \\ & y \geqslant 0 \\ & x - y \geqslant -1 \\ & x + 6y \leqslant 15 \\ & 4x - y \leqslant 10 \end{aligned}$$



Valor ótimo

é o valor

$$\boxed{ax^* + by^*}$$

tal que (x^*, y^*) está na região viável e para todo (x, y) na região viável,

$$ax + by \leqslant ax^* + by^*.$$

2021

Curvas de nível

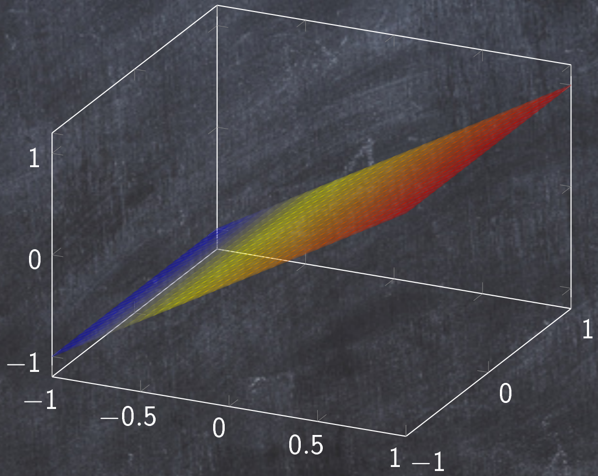
Dado $d \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = d$ é uma curva de nível da função objetivo $f(x, y)$.

A curvas de nível são retas paralelas no plano xy.

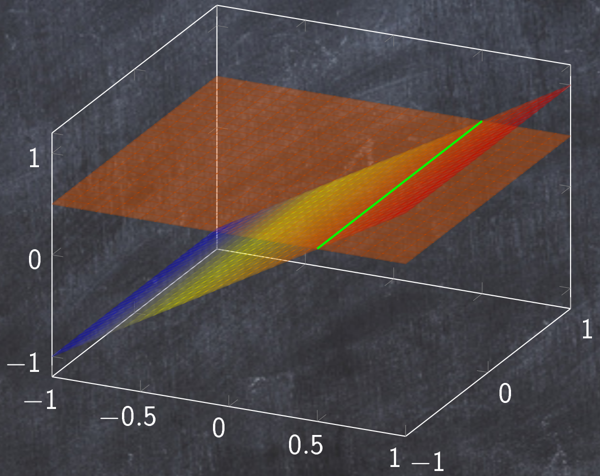
$f(x, y)$ é constante em todo (x, y) da região viável na na mesma curva de nível.

A maior taxa de variação de $f(x, y)$ ocorre na direção e sentido do vetor gradiente, $\nabla \boldsymbol{f}$ que é (a, b).

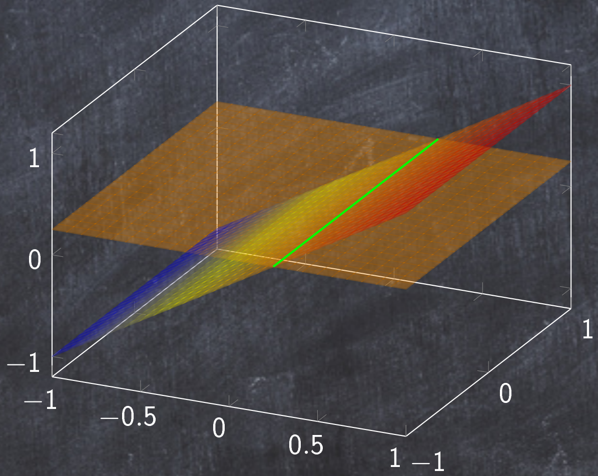
2021



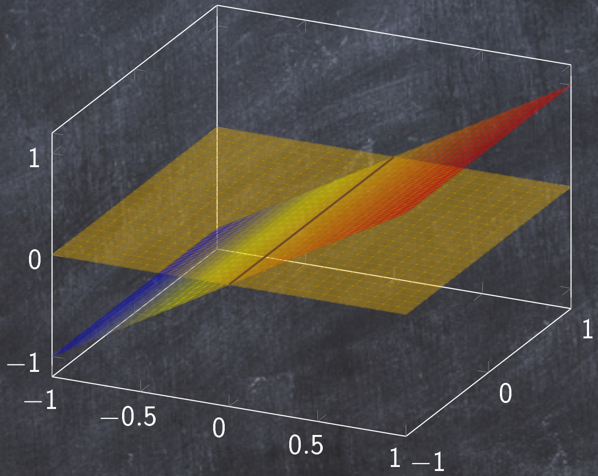
2021



2021

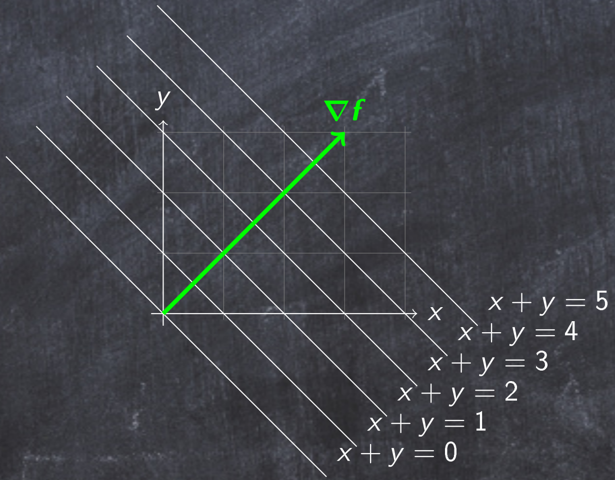


2021



2021

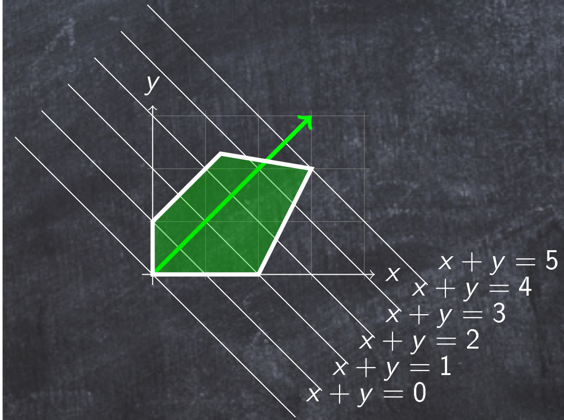
Exemplo $f(x, y) = x + y$



2021

Exemplo

$$\begin{aligned} \underset{x,y}{\text{maximize}} \quad & x + y \\ \text{sujeito a} \quad & x \geqslant 0 \\ & y \geqslant 0 \\ & x - y \geqslant -1 \\ & x + 6y \leqslant 15 \\ & 4x - y \leqslant 10 \end{aligned}$$



2021

Soluções viáveis em PPL canônico com 2 variáveis

$\mathcal{X} \neq \emptyset$, região viável de um PPL, é limitado se existem intervalos fechados $[x_1, x_2]$ e $[y_1, y_2]$ tais que

$$\mathcal{X} \subseteq [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$$

Nesse caso existe uma constante K real tal que $f(x, y) \leqslant K$ para todos $(x, y) \in \mathcal{X}$ e

tem solução ótima

(Prova?)

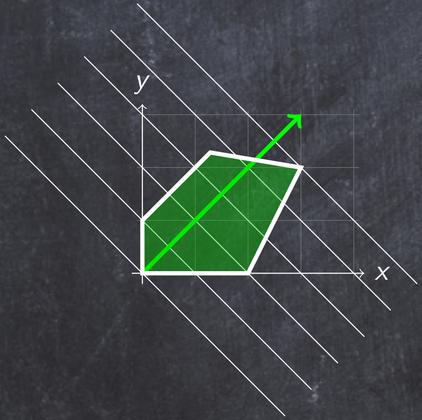
2021

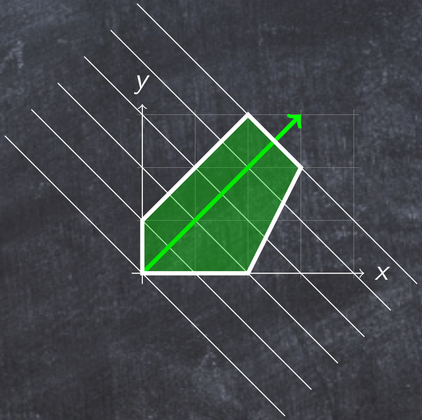
Dizemos que um PPL é

1. inviável quando não existe solução viável. Um PPL inviável não tem solução ótima.
2. viável e limitado, logo existe solução ótima.
3. viável e ilimitado, quando existe uma sequência $(\mathbf{x}_k)$ tal que $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$ e $f(x, y) \to \infty$ quando $k \to \infty$, isso indica que não há solução ótima. Ao resolver graficamente, podemos identificar um PPL ilimitado quando nos movemos paralelamente ao vetor gradiente na direção de aumentar a função objetivo e nunca deixamos inteiramente a região viável.

2021

Exemplos de PPL viáveis

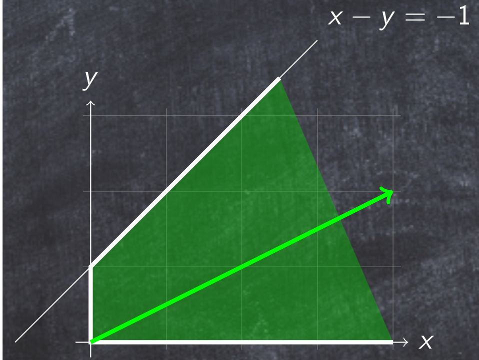




2021

Exemplo de PPL ilimitado

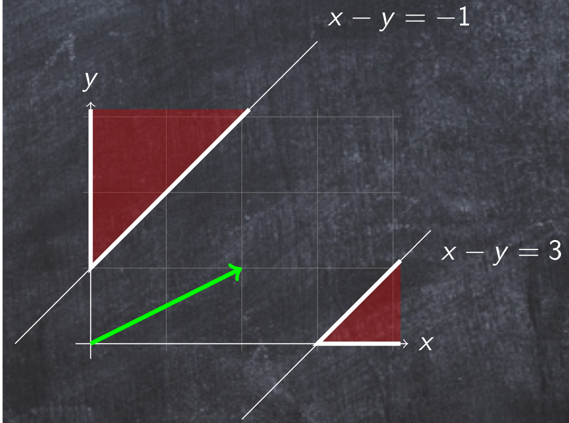
$$
\begin{array}{ll}
\underset{x,y}{\text{maximize}} & 2x + y \\
\text{sujeito a} & x \geqslant 0 \\
& y \geqslant 0 \\
& x - y \geqslant -1
\end{array}
$$



2021

Exemplo de PPL inviável

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x,y}{\text{maximize}} & x + 2y \\
\text{sujeito a} & x \geqslant 0 \\
& y \geqslant 0 \\
& x - y \leqslant -1 \\
& x - y \geqslant 3
\end{array}
$$



2021

Exercício 8

Resolva graficamente

1. $\max x_1 + x_2$ s.a $x_1 + x_2 \leqslant 4;\ x_1 - x_2 \geqslant 5;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$
2. $\max 4x_1 + x_2$ s.a $8x_1 + 2x_2 \leqslant 16;\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 12;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$
3. $\max -x_1 + 3x_2$ s.a $x_1 - x_2 \leqslant 4;\ x_1 + 2x_2 \geqslant 4;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$
4. $\max 3x_1 + x_2$ s.a $2x_1 + x2 \leqslant 6;\ x_1 + 3x_2 \leqslant 9;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$
5. $\min x_1 - x_2$ s.a $x_1 + x_2 \leqslant 6;\ x_1 - x_2 \geqslant 0;\ x_2 - x_1 \geqslant 3;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$
6. $\min 3x_1 + 5x_2$ s.a $3x_1 + 2x_2 \geqslant 36;\ 3x_1 + 5x_2 \geqslant 45;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$

2021

Exercício 9

Uma fundição tem de produzir 10 toneladas de um tipo de liga metálica e, para isso, tem disponível: lingotes de ferro, grafite e sucata. Dois componentes são relevantes para a liga: carbono e silício. A tabela abaixo fornece a fração desses elementos nos ingredientes disponíveis, seus custos unitários, suas disponibilidades em estoque, bem como a composição da liga (isto é, porcentagens mínimas e máximas de cada componente na liga).

	Ingredientes			Liga	
Composição (%)	*Lingotes*	*Grafite*	*Sucata*	*Composição mínima*	*Composição máxima*
Carbono	0,0050	0,90	0,090	0,00	0,095
Silício	0,14	-	0,27	0,19	0,20
Custos (R$/ton)	90	180	25		
Estoque (ton)	5	5	12		

Determinar as quantidades dos ingredientes para compor a liga metálica, de modo que as especificações técnicas sejam satisfeitas e o custo seja mínimo. Escreva um programa que calcule a solução ótima.

2021

Devido à grande permeabilidade, areias são usadas na constituição de filtros de Estações de Tratamento de Águas de abastecimento (ETA) como meio filtrante, por interceptar as impurezas existentes na água afluente. Essas areias são dispostas em camadas, que devem obedecer às composições granulométricas estabelecidas por norma técnica, por exemplo, nas quantidades dadas na Tabela:

Faixa granulométrica (mm)	*Volume de areia (m^3)*
0,42 – 0,59	16
0,59 – 0,71	16
0,71 – 0,84	16
0,84 – 1,00	64
1,00 – 1,19	40
1,19 – 1,41	8

2021

Para a construção das unidades de filtração de uma ETA, areias são exploradas de diferentes portos, com composições granulométricas distintas. Os custos totais de dragagem, transporte, seleção e preparo para a utilização da areia são conhecidos por unidade de volume (m^3) para cada porto:

	Volume de areia/m^3	
Faixa granulométrica (mm)	*porto – 1*	*porto – 2*
0,42 - 0,59	0,17	0,13
0,59 - 0,71	0,16	0,11
0,71 - 0,84	0,18	0,14
0,84 - 1,00	0,10	0,09
1,00 - 1,19	0,09	0,12
1,19 - 1,41	0,05	0,07
custo ($/$m^3$)	25,00	19,00

2021

Na tabela acima, as composições granulométricas de dois tipos de areia são fornecidas, além dos custos totais. Por exemplo, 17% da areia proveniente do porto I tem os diâmetros de seus grãos entre $0,42\mathrm{mm}$ e $0,59\mathrm{mm}$, 16% entre $0,59$ e $0,71$ etc. e custa $25,00$ por m^3. Assim, de $100\mathrm{m}^3$ da área do ponto I, pode-se extrair $0,17 \cdot 100 = 17\mathrm{m}^3$ de areia na faixa granulométrica $0,42$ a $0,59$, que é suficiente para a construção do filtro, que necessita $16\mathrm{m}^3$ desta faixa, mas essa quantidade é insuficiente para se obter a quantidade de areia necessária na faixa $0,84$ a $1,00$. Determinar a combinação das diferentes areias de modo a atender às especificações da norma, com o mínimo custo possível. Resolva o problema graficamente.

2021

Exercício 10

Pode haver PPL com região viável ilimitada e que admite solução ótima?

2021

Combinação convexa

Dados $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^n$, uma combinação linear convexa deles é

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{x}_p, \text{ com } \quad \alpha_i \geqslant 0 \, (\forall i), \quad \sum_i \alpha_i = 1.$$

No caso de 2 pontos

$$\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

2021

Conjuntos convexos

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo se para quaisquer dois pontos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega$

$$\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in \Omega, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

1. $\varnothing$ é um conjunto convexo;
2. $\{\, \boldsymbol{x} \,\}$, para qualquer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, é um conjunto convexo;
3. $\{\, \alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \,\}$, para quaisquer dois pontos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, é um conjunto convexo.

Exercício: Verifique o item 3.

2021

Hiperplanos e semiespaços

Dados $a_1, \dots, a_n, d \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = d$$

é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$, sempre que ao menos um $a_i \neq 0$.

Pontos são hiperplanos em $\mathbb{R}$. Retas são hiperplanos em $\mathbb{R}^2$. Planos são hiperplanos em $\mathbb{R}^3$.

2021

Hiperplanos e semiespaços

Um hiperplano $H = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = d \,\}$ divide o $\mathbb{R}^n$ em dois semiespaços

1. dos pontos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant d$

$$H^- := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \leqslant d \,\}$$

2. dos pontos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant d$

$$H^+ := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \geqslant d \,\}$$

Observe que $H = H^- \cap H^+$.

2021

Proposição 1

Um semiespaço do $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.

Esboço da demonstração.

Basta provar para um semiespaço Ω da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant d$.
Tome $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \Omega$.
Vamos provar que $\{\, \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \,\} \subset \Omega$.

$$\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} = (\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1, \ldots, \alpha x_n + (1-\alpha)y_n)$$

e

$$a_1(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1) + \cdots + a_n(\alpha x_n + (1-\alpha)y_n) =$$

$$\alpha(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) + (1-\alpha)(a_1y_1 + \cdots + a_ny_n) \leqslant \alpha d + (1-\alpha d) = d\,.$$

□

2021

Proposição 2

A interseção de conjuntos convexos no R^n é um convexo no $\mathbb{R}^n$.

Esboço da demonstração.

Sejam Ω_1 e Ω_2 dois convexos. Vamos provar que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ é convexo.
Tome $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

$$\{\, \alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \,\} \subset \Omega_1$$

$$\{\, \alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \,\} \subset \Omega_2$$

portanto

$$\{\, \alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \,\} \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$$

$\square$

2021

Corolário 3

A região viável de um PPL é convexo.

Demonstração.

Um conjunto viável é uma interseção finita de semiespaços.

Segue da Proposição 2, por indução, que a interseção de qualquer quantidade finita de convexos é convexo. □

Def.: Uma interseção finita de semiespaços é chamada de poliedro convexo.

2021

Teorema 4

O conjunto das soluções ótimas de um programa linear, quando existe, é um conjunto convexo.

Esboço da demonstração.

Dada função objetivo $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ e a região viável $\mathcal{X}$, seja z^* o valor ótimo e $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ o conjunto das soluções ótimas.

Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{O}$ então $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \sum_i c_i x_i = z^*$ e $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \sum_i c_i y_i = z^*$.

Para qualquer $\alpha \in [0,1]$, o valor da função objetivo na combinação linear convexa é

$$\mathbf{c}^\mathsf{T} \cdot (\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \sum_i c_i \cdot (\alpha x_i + (1-\alpha) y_i) = \sum_i c_i \alpha x_i + \sum_i c_i (1-\alpha) y_i$$

$= \alpha z^* + (1-\alpha) z^* = z^*$, portanto, $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in \mathcal{O}$. $\square$

Corolário 5

Se um PPL tem mais que uma solução ótima então tem infinitas (não-enumerável) soluções ótimas.

Demonstração.

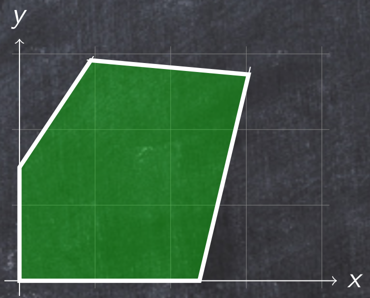
Basta considerar $x \neq y$ na demonstração do teorema anterior. $\square$

2021

Ponto extremo de conjunto convexo

$x \in \Omega$ é um ponto extremo do convexo Ω se não é combinação convexa de outros dois pontos distintos de Ω.

Exemplo com 5 pontos extremos:

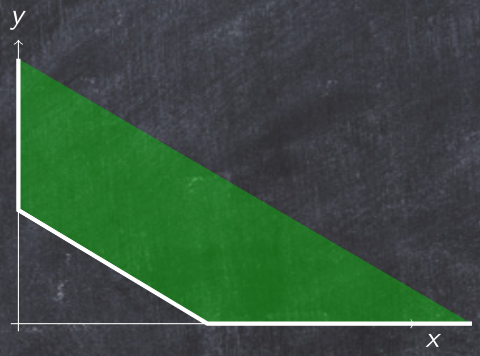


2021

Ponto extremo de conjunto convexo

$x \in \Omega$ é um ponto extremo do convexo Ω se não é combinação convexa de outros dois pontos distintos de Ω.

Exemplo com 2 pontos extremos:

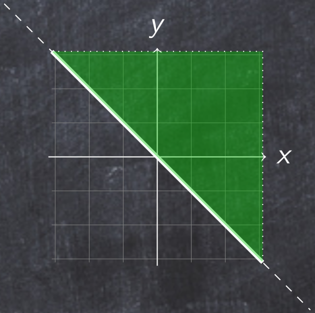


2021

Ponto extremo de conjunto convexo

$x \in \Omega$ é um ponto extremo do convexo Ω se não é combinação convexa de outros dois pontos distintos de Ω.

Exemplo sem ponto extremo:



2021

Exercícios

12. Demonstre que é equivalente à definição dada acima para conjunto convexo: $S \subset \mathbb{R}^n$ de pontos é convexo se e somente se para toda reta r, $S \cap r$ é um único segmento de reta (ou seja, conexo).

13. Prove que se S é convexo então $\alpha S := \{\, \alpha \mathbf{x} : \mathbf{x} \in S \,\}$ também é convexo.

14. Suponha que uma região viável de um PPL que tenha solução tenha um número finito de pontos extremos e que todo ponto dessa região possa ser escrito como combinação linear convexa desses pontos extremos. Mostre que o valor ótimo ocorre num ponto extremo.

2021

15. Dados números reais a, b, c, determine precisamente quando um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por uma inequação quadrática $\{(x, y) : y \leq ax^2 + bx + c\}$ é convexo.

16. Mostre que para quaisquer reais $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, com $a, \alpha > 0$, a interseção dos conjuntos $\{(x, y) : y < -ax^2 + bx + c\}$ e $\{(x, y) : y > \alpha x^2 + \beta x + \gamma\}$ em $\mathbb{R}^2$ é convexa.

17. O conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 - 8x + 15 \leq 0$ é um poliedro convexo? Justifique.

18. O fecho convexo dos pontos $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ no $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as combinações lineares convexas deles

$$\mathrm{Conv}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i : \ \alpha_i \geq 0 (\forall i), \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}$$

Prove que $\mathrm{Conv}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ é convexo.

Forma padrão

Vimos que um PPL

$$
\begin{array}{ll}
\text{otimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} & a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leqslant d_i, i = 1, 2, \ldots, k \\
& a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \geqslant d_i, i = k, k+1, \ldots, \ell \\
& a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = d_i, i = \ell, \ell+1, \ldots, m'.
\end{array}
$$

pode ser reescrito, na forma canônica, como

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & [\pm]\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} & a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leqslant d_i, i = \ell, \ell+1, \ldots, m.
\end{array}
$$

Na forma matricial

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & [\pm]\ \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}
\end{array}
$$

2021

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_4 \leqslant 2 \\
& 3x_2 - x_3 = 5 \\
& x_3 + x_4 \geqslant 3 \\
& x_1 \geqslant 0 \\
& x_3 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & -2x_1 + x_2 - 4x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_4 \leqslant 2 \\
& 3x_2 - x_3 \leqslant 5 \\
& -3x_2 + x_3 \leqslant -5 \\
& -x_3 - x_4 \leqslant 3 \\
& -x_1 \leqslant 0 \\
& x_3 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

2021

Para todo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leqslant d_i$$

sse existe $y_i \geqslant 0$ tal que

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n + y_i = d_i$$

No caso particular das restrições nas variáveis

- $x_i \leqslant 0$ é equivalente a $-x_i \geqslant 0$ e
- cada $x_i \in \mathbb{R}$ (sem restrição) pode ser escrito como $w_i - z_i$ com $w_i, z_i \geqslant 0$.

2021

Região viável na forma padrão

A região viável de um PPL pode ser expressa por restrições exclusivamentes da forma $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = d_i$ mais as restrições de não negatividade nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$.

Matematicamente, as restrições de não negatividade não diferem de outras condições, mas uma vez que as condições de não-negatividade desempenham um papel especial no desenvolvimento dos métodos computacionais para problemas de programação linear, recebem destaque na forma padrão.

2021

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\
\text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + x_4 \leqslant 2 \\
& 3x_2 - x_3 = 5 \\
& x_3 + x_4 \geqslant 3 \\
& x_1 \geqslant 0 \\
& x_3 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -2x_1 + x_2 - 4x_3 \\
\text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + x_4 \leqslant 2 \\
& 3x_2 - x_3 \leqslant 5 \\
& -3x_2 + x_3 \leqslant -5 \\
& -x_3 - x_4 \leqslant -3 \\
& -x_1 \leqslant 0 \\
& x_3 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

que pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -2x_1 + w_2 - z_2 + 4x_3' \\
\text{s. a} \quad & \\
& x_1 + w_2 - z_2 + x_4 + y_1 = 2 \\
& 3w_2 - 3z_2 + x_3' + y_2 = 5 \\
& -3w_2 + 3z_2 - x_3' + y_3 = -5 \\
& x_3' - x_4 + y_2 = -3 \\
& x_1, w_2, z_2, x_3', y_1, y_2, y_3, y_4 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

2021

Exemplo

alternativamente

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\
\text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + x_4 \leqslant 2 \\
& 3x_2 - x_3 = 5 \\
& x_3 + x_4 \geqslant 3 \\
& x_1 \geqslant 0 \\
& x_3 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

ou como

$$
\max \quad -2x_1 + w_2 - z_2 - 4x_3
$$

s. a

$$
\begin{aligned}
x_1 + w_2 - z_2 + x_4 + y_1 &= 2 \\
3w_2 - 3z_2 - x_3 &= 5 \\
x_3 + x_4 - y_4 &= 3 \\
x_1, w_2, z_2, -x_3, y_1, y_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

2021

Forma padrão

Qualquer PPL pode ser transformado em um problema equivalente na forma padrão.

Aqui, quando dizemos que os dois problemas são equivalentes, queremos dizer que dado uma solução viável para um problema, podemos construir uma solução viável para o outro.

Em particular, dada uma solução ótima para um problema, podemos construir uma solução ótima para o outro.

2021

Forma padrão

A transformação envolve duas etapas:

1. Eliminação de variáveis livres: toda variável x_j sem restrição de sinal é substituída por $w_j - z_j$, onde w_j e z_j são novas variáveis sobre as quais impomos as restrições de sinal $w_j \geqslant 0$ e $z_j \geqslant 0$;
2. Eliminação de inequações: para cada restrição $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leqslant d_i$ introduzimos uma nova variável y_i, chamada variável de folga, e as restrições

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n + y_i = d_i$$
$$y_i \geqslant 0$$

Para as restrições da forma $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \geqslant d_i$, transformamos em $\leqslant$ e depois eliminamos a desigualdade.

2021

Exemplo

Importante que as variáveis introduzidas sejam novas.

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_4 \leqslant 2 \\
& 3x_2 - x_3 = 5 \\
& x_3 + x_4 \geqslant 3 \\
& x_1 \geqslant 0 \\
& x_3 \leqslant 0
\end{array}
$$

pode ser reescrito como

$$
\begin{array}{ll}
\max & -2x_1 + x_5 - x_6 - 4x_3 \\
\text{s. a} & x_1 + x_5 - x_6 + x_4 + x_7 = 2 \\
& 3x_5 - 3x_6 - x_3 + x_8 = 5 \\
& -3x_5 + 3x_6 + x_3 + x_9 = -5 \\
& -x_3 - x_4 + x_{10} = 3 \\
& x_1, x_5, x_6, -x_3, x_7, x_8, x_9, x_{10} \geqslant 0
\end{array}
$$

2021

Forma padrão matricial

Todo PPL pode ser transformado em um problema equivalente que na forma padrão matricial é escrito como

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{c}^{\top}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{array}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Cuidado ...

... em diferenciar entre solução de

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

e solução viável de

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

2021

Solução viável básica

Fixamos as condições em $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ \ m < n, \ \ \mathrm{posto}(A) = m$$

Notação: Para qualquer $B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $\boldsymbol{A}_B$ é a matriz obtida de $\boldsymbol{A}$ tomando as colunas com índices em B.

Por exemplo,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } B = \{2, 4\} \text{ temos } \boldsymbol{A}_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2021

Solução viável básica

Uma solução viável básica de

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

é uma solução viável $\boldsymbol{x}$ para a qual existe B de cardinalidade m tal que

1. A_B é não-singular
2. $x_j = 0$ para $j \notin B$.

2021

Por exemplo, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma solução viável básica para

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } B = \{2, 4\}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Exercício 19: Quais são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que determinam vetores-coluna de $\boldsymbol{A}$ l.i.? Quais deles determinam soluções básicas?

Álgebra linear

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \text{ tem solução sse } \operatorname{posto}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{posto}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{d}).$$

Portanto a solubilidade de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ implica que

- ou $\operatorname{posto}(\boldsymbol{A})$ = número de linhas de $\boldsymbol{A}$, ou
- o sistema linear tem equações redundantes que podem ser omitidas de modo que o sistema resultante
  1. tem as mesmas soluções do sistema original e
  2. a matriz tem posto = número de linhas.

Notação

— Se $\boldsymbol{a}_i$ são as colunas de $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

e então o produto $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ é a combinação linear $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$

— Para qualquer subconjunto de índices $B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\boldsymbol{A}_B = (\boldsymbol{a}_i)_{i\in B}$$

é a matriz obtida de $\boldsymbol{A}$ tomando somente suas colunas com índices em B.

— Para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ usamos $\boldsymbol{x}_B = (x_i)_{i\in B}$ para o vetor de $\mathbb{R}^{|B|}$ cujas coordenadas pelas coordenadas de $\boldsymbol{x}$ tomando somente as coordenadas com índices em B.

Solução viável básica

Fixamos as condições:

PPL na forma padrão:

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{maximize}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{posto}(A) = m$, $m < n$ (o sistema linear tem muitas soluções).

2021

Solução viável básica

Uma solução viável básica do PPL é uma solução viável $\mathbf{x}$ para a qual existe B ($|B| = m$) tal que

1. $\mathbf{A}_B$ é não-singular (quadrada, invertível, linhas l.i., colunas l.i)
2. $x_j = 0$ para $j \notin B$.

Def. se $j \in B$ então $x_j \geqslant 0$, caso $x_j = 0$ dizemos solução viável básica degenerada.

Equivalentemente, $\mathbf{x}$ é uma solução viável básica do PPL sse as colunas de $\mathbf{A}_C$, para $C = \{j \in \{1, \ldots, n\} : x_j > 0\}$, são l.i.

2021

Exemplo

Para $B = \{2, 4\}$ e $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é uma solução viável básica

Observe que $\boldsymbol{x}_B$ é solução para $\boldsymbol{A}_B \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{d}$.

$\boxed{\text{Como } \boldsymbol{A}_B \text{ é não-singular, essa solução é única.}}$

2021

Proposição 6

O número de soluções viáveis básicas é finito.

Demonstração.

Uma solução básica viável é determinada exclusivamente pelo conjunto B:

1. escolha $B \subset \{1, \ldots, n\}$ de cardinalidade m;
2. teste se as colunas de $\boldsymbol{A}_B$ são l.i. Se sim, então determine a solução de $\boldsymbol{A}_B \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{d}$;
3. faça as $n - m$ variáveis x_i para $i \notin B$ iguais a 0, assim $\boldsymbol{x}$ resolve $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$;
4. se $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ a solução é viável; senão não há solução viável associada a B.

Portanto são no máximo $\binom{n}{m}$ delas.

$\square$

2021

Exemplo

De volta com $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, a solução viável $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ não é básica porque $\{\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_5\}$ é l.d.

$$\sum_{i=2}^{5} y_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0} \quad \text{para} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Porém, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{Ay} = 0$, logo, $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{A}\varepsilon\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d}$, qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Se escolhemos $\varepsilon = \min\{\, x_i/y_i : y_i > 0 \,\} = -1$ garantimos $\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y} \geqslant \mathbf{0}$, i.e, uma solução viável.

Nesse caso, $\boldsymbol{x} - \tilde{\varepsilon}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ que é viável e é básica como já vimos.

2021

Lema 7

Se um PPL (forma padrão) tem solução viável então tem uma solução viável básica.

Esboço da prova

Seja $\boldsymbol{x}$ uma solução viável, e suponha s.p.g, que $x_i = 0$ sse $i > k$, algum $1 \leqslant k \leqslant n$.

Agora, seguimos em 2 casos: (1) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ é l.i., ou (2) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ é l.d.

Caso (1): Se $k = m$ então $\boldsymbol{x}$ é uma solução viável básica, senão $k < m$ e então completamos $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ com $m - k$ outras colunas de $\boldsymbol{A}$ de modo que tenhamos m colunas l.i., isso pode ser feito pois $\operatorname{posto}(\boldsymbol{A}) = m$. Então $\boldsymbol{x}$ é uma solução viável básica (degenerada).

2021

Caso (2): $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ é l.d. Existem $y_1, \dots, y_k$ não todos nulos t.q. $\sum_i y_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}$.

Temos $\boldsymbol{y}^\mathsf{T} := (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$ e $\boldsymbol{x}^\mathsf{T} = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ tais que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \text{ e } \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = 0$$

de modo que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d}$, para todo ε.

$\tilde{\varepsilon} := \min\limits_{i\colon y_i>0} \dfrac{x_i}{y_i}$ com o mínimo atingido no índice $m \in \{1, \dots, k\}$.

$\boldsymbol{x} - \tilde{\varepsilon}\boldsymbol{y} \geqslant 0$ e $x_m - \tilde{\varepsilon}y_m = 0$, portanto $\boldsymbol{x} - \tilde{\varepsilon}\boldsymbol{y}$ é viável com mais entradas nulas que $\boldsymbol{x}$,

se as colunas correspondentes são l.i. temos solução viável básica, caso contrário repetimos o processo até termos solução viável com as colunas correspondentes l.i. $\square$

2021

Teorema 8

Se um PPL (forma padrão) tem solução viável ótima então admite uma solução viável básica ótima.

Esboço da prova

Seja $\boldsymbol{x}$ uma solução viável ótima com o menor número de coordenadas positivas dentre todas as soluções ótimas.
Procedemos como na demonstração anterior; se $\boldsymbol{x}$ é viável ótima e $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k : x_1, \dots, x_k > 0\}$ é l.i. então $\boldsymbol{x}$ é viável básica ótima. Agora, se $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ é l.d., para todo ε com $|\varepsilon|$ pequeno[1] de modo que $\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}$ é viável, temos

$$\boldsymbol{c}^\top(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{y}$$

logo $\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{y} = 0$, caso contário poderíamos escolher ε de modo que $\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{y} > \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$. □

[1] $\max_{y_i<0} \frac{x_i}{y_i} \leqslant \varepsilon \leqslant \min_{y_i>0} \frac{x_i}{y_i}$; $1 \leqslant i \leqslant k$

2021

Geometricamente

Solução viável básica $\Rightarrow$ ponto extremo

Seja $\mathbf{x}$ uma solução viável básica associada a $B \subset \{1, \ldots, n\}$ com m elementos.
Suponha que $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ são soluções viáveis distintas e diferentes de $\mathbf{x}$.

Suponha que para algum $0 < \alpha < 1$ vale $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{z}$.

Então $y_i = z_i = 0$ para $i \notin B$, portanto

$$A_B z_B = A_B y_B = \mathbf{d}$$

logo $A_B(z_B - y_B) = \mathbf{0}$ e como as colunas de $\mathbf{A}_B$ são l.i. $z_B = y_B$, ou seja, $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$. Contradição.

2021

Geometricamente

Ponto extremo $\Rightarrow$ solução viável básica

Seja $\boldsymbol{x}$ um ponto extremo e C o conjunto dos índices i tais que $x_i > 0$.

Suponha que as colunas de $\boldsymbol{A}_C$ são l.d. Então $\sum_{i \in C} y_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ com $y_i \neq 0$ algum(s) i.

Como antes $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d}$. Agora, se $\tilde{\varepsilon} = \min_{i : y_i \neq 0} \frac{x_i}{|y_i|}$ então para todo $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0} \text{ e } \boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{x})$. Contradição.

2021

Teorema

Seja $\mathcal{X}$ o poliedro convexo das soluções viáveis de um PPL. Se existe solução ótima para o PPL, o valor ótimo é (também) atingido num ponto extremo de $\mathcal{X}$.

É o teorema 8 reescrito levando em conta a equivalência das definições de ponto extremo e solução viável básica.

2021

Exercício 20

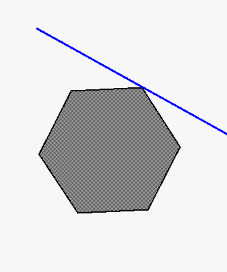
Def.: A região viável $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ de um PPL é limitada se existe um real positivo K tal que para todo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}$ vale que $|x_i| \leqslant K$ para todo i.

1. Prove que para qualquer função linear $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$ existe uma constante k tal que, restrita a $\mathcal{X}$ limitada, $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \leqslant k$.
2. Prove que para toda solução viável $\boldsymbol{x}_0$ existe uma solução viável básica $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}_0$ (dica: dem. do teo. 8).
3. Conclua que se $\mathcal{X}$ é limitada então o PPL tem solução ótima
4. Verifique que basta que a função objetivo seja limitada para que o PPL tenha solução ótima

2021

Exercício 21

Provamos que um ponto extremo de uma região viável é equivalente a uma solução básica viável do sistema linear. O primeiro é definido por conceitos geométricos e captura anoção de vértice, o segundo é definido por conceitos algébricos. Uma maneira mais intuitiva de definir um vértice de um poliedro P, geometricamente, é dizendo que $\mathbf{x}$ é vértice de P se existe um hiperplano que toca P apenas em $\mathbf{x}$ e P fica contido totalmente e um dos semiespaços definidos pelo hiperplano (veja a figura). Formalmente, $\mathbf{x}$ é vértice de P sse existe $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} < \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ para todo $\mathbf{y} \in P$. Prove que $\mathbf{x}$ é vértice P se e somente se $\mathbf{x}$ é ponto extremo de P.



2021

Exercício 22

Dado $P := \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ e que as linhas de $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ são l.i.

1. Prove que se duas "bases"diferentes levam a mesma solução viável básica, então essa solução é degenerada.

2. Suponha que todas as soluções básicas viáveis são não degeneradas. Seja $\boldsymbol{x}$ um elemento de P que tem exatamente m componentes positivas. (a) Mostre que $\boldsymbol{x}$ é uma solução básica viável. (b) Mostre que o resultado da parte (a) é falso se a suposição de não degeneração for removido.

2021

Exercício 23

Determine todas as soluções básicas viáveis do seguinte conjunto de restrições:

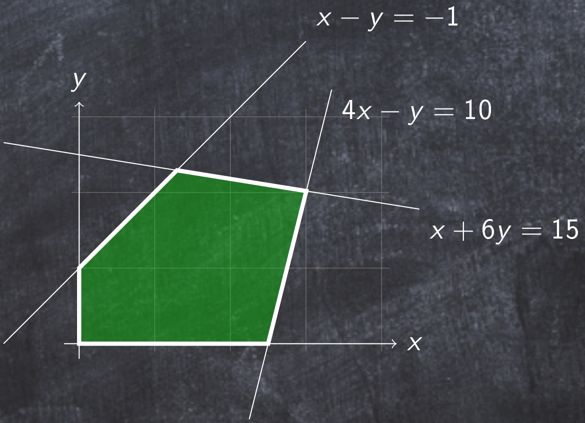
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 4 \\ +x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0$$

2021

Retomando o primeiro exemplo...

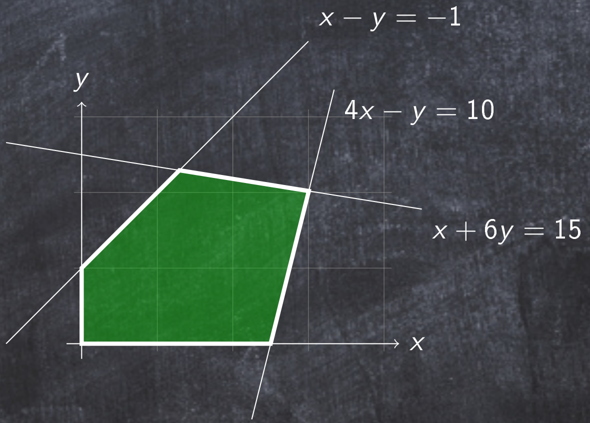
$$
\begin{array}{ll}
\underset{x,y}{\text{maximize}} & x + y \\
\text{sujeito a} & x - y \geqslant -1 \\
& x + 6y \leqslant 15 \\
& 4x - y \leqslant 10 \\
& x, y \geqslant 0
\end{array}
$$



2021

Retomando o primeiro exemplo...

$$
\begin{aligned}
\underset{x,y}{\text{maximize}} \quad & x + y \\
\text{sujeito a} \quad & -x + y + x_1 = 1 \\
& x + 6y + x_2 = 15 \\
& 4x - y + x_3 = 10 \\
& x, y, x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$



2021

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 - y + x \\
x_2 &= 15 - 6y - x \\
x_3 &= 10 + y - 4x \\
\hline
z &= y + x
\end{aligned}
$$

Fazendo $x = y = 0$ temos $x_1 = 1, x_2 = 15, x_3 = 10$, que definem solução viável básica com $z = 0$.

2021

$$
\begin{array}{rcl}
y &=& 1 - x_1 + x \\
x_2 &=& 9 + 6x_1 - 7x \\
x_3 &=& 11 - x_1 - 3x \\
\hline
z &=& 1 - x_1 + 2x
\end{array}
$$

Fazendo $x_1 = x = 0$ temos $y = 1, x_2 = 9, x_3 = 11$, que definem solução viável básica com $z = 1$.

2021

$$
\begin{aligned}
y &= 16/7 - x_1/7 - x_2/7 \\
x &= 9/7 + 6x_1/7 - x_2/7 \\
x_3 &= 50/7 - 25x_1/7 + 3x_2/7 \\
\hline
z &= 25/7 + 5x_1/7 - 2x_2/7
\end{aligned}
$$

Fazendo $x_1 = x_2 = 0$ temos $y = 16/7, x_2 = 9/7, x_3 = 50/7$, que definem solução viável básica com $z = 25/7$.

2021

$$
\begin{aligned}
y &= 2 - 4x_2/25 - 7x_3/7 \\
x &= 3 - x_2/25 - 6x_3/7 \\
x_1 &= 2 + 3x_2/25 - x_3 \\
\hline
z &= 5 - x_2/5 - 5x_3/7
\end{aligned}
$$

Fazendo $x_2 = x_3 = 0$ temos $y = 2, x = 3, x_1 = 2$, que definem solução viável básica ótima com $z = 5$.

2021

Os problemas

1. Problema ilimitado
2. Degeneração
3. Solução básica inicial

2021

Exercício 24

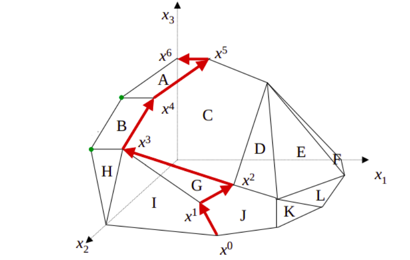
Resolva com a estratégia do simplex

1. $\max -x_1 + 3x_2$ s.a $x_1 - x_2 \leqslant 4;\ x_1 + 2x_2 \geqslant 4;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$
2. $\max 3x_1 + x_2$ s.a $2x_1 + x_2 \leqslant 6;\ x_1 + 3x_2 \leqslant 9;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$
3. $\min x_1 - x_2$ s.a $x_1 + x_2 \leqslant 6;\ x_1 - x_2 \geqslant 0;\ x_2 - x_1 \geqslant 3;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$
4. $\min 3x_1 + 5x_2$ s.a $3x_1 + 2x_2 \geqslant 36;\ 3x_1 + 5x_2 \geqslant 45;\ x_1, x_2 \geqslant 0.$

2021

Retomando

Vimos um exemplo de como é o funcionamento do Simplex: saindo de alguma solução viável básica (ponto extremo), o Simplex procura outra solução que possa ser obtida trocando uma única "coluna" da base, portanto algum ponto extremo adjacente ao atual, cujo valor objetivo seja melhor que o da solução atual. Prossegue assim até o momento em que não haja pontos extremos adjacentes com valor melhor que o atual, que portanto deve ser ótimo.



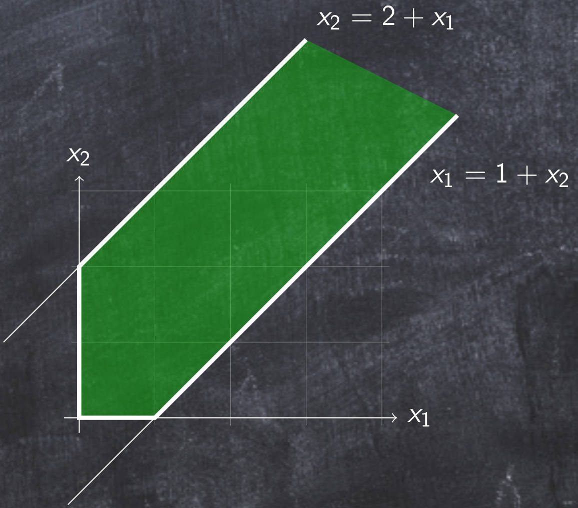
2021

Digressão sobre terminologia

1. As variáveis que aparecem no lado esquerdo de "=" nas tabelas, exceto a última, são básicas. Variáveis independentes são não básicas.
2. O conjunto de variáveis básicas e não básicas muda de iteração para iteração. Cada iteração é chamada de pivotamento.
3. A escolha da variável que entra na base é motivada pelo fato de que queremos aumentar o valor objetivo z, e escolhemos aquele que faz isso e aumenta o valor objetivo ao máximo possível.
4. A escolha da variável que sai da base é motivada pela necessidade de manter a viabilidade. Esse é feito identificando a variável básica que impõe o limite mais rigoroso para a variável que entra na base.

Um problema ilimitado

$$\begin{aligned} \underset{x_1}{\text{maximize}} \quad & x_1 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ & -x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$



2021

$$\begin{array}{l} x_3 = 1 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 2 + x_1 - x_2 \\ \hline z = x_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 + x_2 - x_3 \\ x_4 = 3 \qquad\ \ - x_3 \\ \hline z = 1 + x_2 - x_3 \end{array}$$

Podemos assim fazer x_2 arbitrariamente grande!

Definindo $x_2 = t, x_3 = 0, x_1 = 1 + t, x_4 = 3$, com $z = 1 + t$, temos que

$$\{ (1, 0, 0, 3) + t(1, 1, 0, 0) : t \geqslant 0 \}$$

é uma semirreta contida no conjunto de soluções viáveis.

Ela testemunha o caráter ilimitado do programa linear, pois a função objetivo atinge valores arbitrariamente grandes nela.

Um problema degenerado

$$
\begin{aligned}
\max_{x_2}\quad & x_2 \\
\text{sujeito a}\quad & -x_1 + x_2 \leqslant 0 \\
& x_1 \leqslant 2 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x_3 & = & \ \ x_1 - x_2 \\
x_4 & = & 2 - x_1 \\
\hline
z & = & \ x_2
\end{array}
$$

Não conseguimos progredir embora haja solução ótima (verifique geometricamente).

Partindo de

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & & & x_1 & - & x_3 \\ x_4 & = & 2 & - & x_1 & & \\ \hline z & = & & & x_1 & - & x_3 \end{array}$$

pivota para

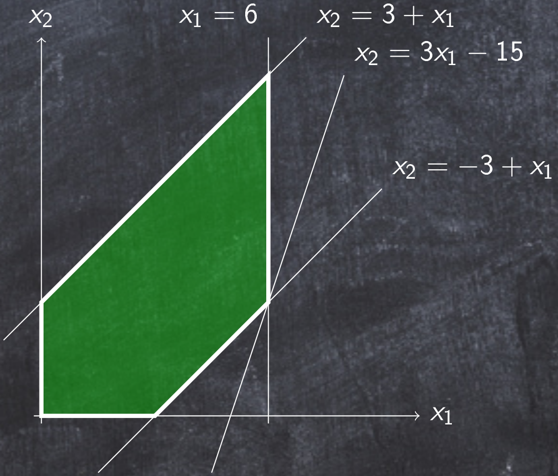
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 2 & & & - & x_4 \\ x_4 & = & 2 & - & x_3 & - & x_4 \\ \hline z & = & 2 & - & x_3 & - & x_4 \end{array}$$

com solução ótima $\boldsymbol{x} = (2, 2, 0, 0)$.

2021

Outro problema degenerado

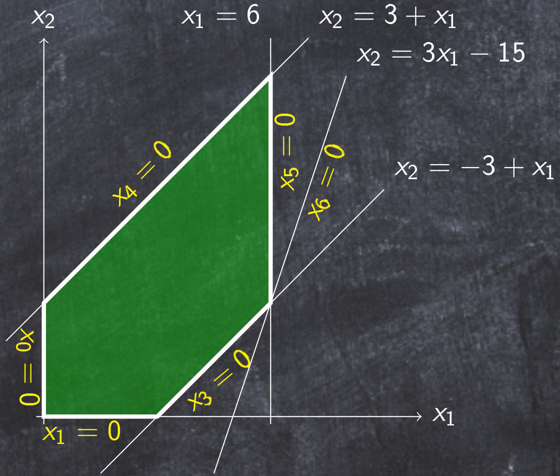
$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2}{\text{maximize}} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ & -x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ & x_1 \leqslant 6 \\ & 3x_1 - x_2 \leqslant 15 \\ & x_1 \geqslant 0 \\ & x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$



2021

Outro problema degenerado

$$
\begin{aligned}
\underset{x_1,x_2}{\text{maximize}} \quad & x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1 + x_5 = 6 \\
& 3x_1 - x_2 + x_6 = 15 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0
\end{aligned}
$$



2021

PPL degenerado

Ocorre apenas para um PPL em que várias bases viáveis correspondem a uma única solução básica viável solução.

Esses PPL são chamados de degenerados.

Para que uma única solução básica viável seja obtida a partir de várias bases, algumas das variáveis básicas têm que ser zero.

Pode acontecer que alguma tabela se repita em uma sequência de etapas degeneradas de pivotamento e assim o algoritmo pode passar por uma sequência infinita de tabelas sem qualquer progresso. Este fenômeno é chamado de ciclagem.

Um exemplo de PPL para o qual o simplex pode andar em círculo:

2021

$$\begin{array}{l}
x_5 = 0 - 0{,}5x_1 + 5{,}5x_2 + 2{,}5x_3 - 9x_4 \\
x_6 = 0 - 0{,}5x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - x_4 \\
x_7 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 0 + 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x_1 = 0 + 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5 \\
x_6 = 0 - 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 \\
x_7 = 1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 + 2x_5 \\
\hline
z = 0 + 53x_2 + 41x_3 - 20x_4 - 20x_5
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x_2 = 0 - 0{,}5x_3 + 2x_4 - 0{,}25x_5 - 0{,}25x_6 \\
x_1 = 0 - 0{,}5x_3 + 4x_4 + 0{,}75x_5 - 2{,}75x_6 \\
x_7 = 1 + 0{,}5x_3 - 4x_4 + 0{,}75x_5 - 13{,}25x_6 \\
\hline
z = 0 + 14{,}5x_3 - 98x_4 - 6{,}75x_5 - 13{,}25x_6
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x_3 = 0 + 8x_4 + 1{,}5x_5 - 5{,}5x_6 - 2x_1 \\
x_2 = 0 - 2x_4 - 0{,}5x_5 + 2{,}5x_6 + x_1 \\
x_7 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 0 + 18x_4 - 15x_5 - 93x_6 - 29x_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x_4 = 0 - 0{,}25x_5 + 1{,}25x_6 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 \\
x_3 = 0 - 0{,}5x_5 + 4{,}5x_6 + 2x_1 - 4x_2 \\
x_7 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 0 + 10{,}5x_5 - 70{,}5x_6 - 20x_1 - 9x_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x_5 = 0 + 9x_6 + 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 \\
x_4 = 0 - x_6 + 0{,}5x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \\
x_7 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 0 + 24x_6 - 22x_1 - 93x_2 - 21x_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x_6 = 0 - 0{,}5x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - x_4 \\
x_5 = 0 - 0{,}5x_1 + 5{,}5x_2 + 2{,}5x_3 - 9x_4 \\
x_7 = 1 - x_1 \\
\hline
z = 0 + 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4
\end{array}$$

Se o método simplex não entra num ciclo, necessariamente termina. Isso ocorre porque há apenas um número finito de possíveis tabelas para qualquer programa linear dado.

Como pode ser evitado? Este é um problema não trivial e será discutido adiante.

2021

O primeiro passo

Para que o método simplex possa ser iniciado, precisamos de uma solução viável básica.
Nos exemplos discutidos até agora, obtivemos uma base viável mais ou menos de graça, os índices das variáveis de folga introduzidos no a transformação para a forma equacional pode servir como uma base viável.
Se temos as restrições $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}$ e introduzimos as variáveis de folga $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ obtemos $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}$.

$$\left(\boldsymbol{A} \;\vdots\; \mathrm{Id}_m \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{A} & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{d}$$

de modo que $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ é solução viável básica desde que $\boldsymbol{d} \geqslant 0$.

2021 Considere

$$\begin{aligned}\underset{x_1,x_2,x_3}{\text{maximize}} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0\end{aligned}$$

Uma maneira de obter uma solução viável básica é criar variáveis artificiais (não de folga – são variáveis sem qualquer significado, cuja única razão de existir é permitir encontrar uma solução inicial), $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$, e resolver o problema

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{w}}{\text{minimize}} \quad & w_1 + w_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 4 \\ & 2x_2 + x_3 + w_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geqslant 0\end{aligned}$$

2021

Exercício 25

Se

(1) $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant 0$$

tem solução viável então

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{w}}{\text{minimize}} \quad & \sum_i w_i \\ \text{sujeito a} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \geqslant 0 \end{aligned}$$

tem solução ótima 0 com $\boldsymbol{w} = 0$. Por outro lado se (1) não tem solução viável então o PPL tem valor ótimo > 0.

No 1o. caso a solução ótima define uma solução viável básica do problema original, no 2o. caso o problema original não tem solução.

2021

No exemplo

PPL original

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{maximize}} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

PPL auxiliar

$$\begin{aligned} \underset{w_1,w_2}{\text{maximize}} \quad & -w_1 - w_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 4 \\ & 2x_2 + x_3 + w_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

As variáveis w_1 e w_2 definem uma base viável, com a solução básica viável $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) := (0, 0, 0, 4, 2)$. Expressamos a função objetivo usando as variáveis não básicas: $z = -6 + x_1 + 5x_2 + 2x_3$ e podemos iniciar o método simplex no programa auxiliar.

O programa linear é limitado, uma vez que a função objetivo não pode ser positiva. O Simplex, portanto, calcula uma solução básica viável.

2021

Se x_1 entra na base e depois x_3 entra na base, a tabela final é

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 - x_2 - w_1 + w_2 \\ x_3 & = & 2 - 2x_2 \quad\quad - w_2 \\ \hline z & = & \quad\quad\quad - w_1 - w_2 \end{array}$$

cuja solução ótima $(2, 0, 2, 0, 0)$ produz uma solução básica viável do programa linear original: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 2)$.
A tabela inicial para o problema original pode ser obtida da tabela final do problema auxiliar descartando as variáveis auxiliares e escrevendo a função objetivo em termos das variáveis não básicas:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 - x_2 \\ x_3 & = & 2 - 2x_2 \\ \hline z & = & 2 + x_2 \end{array}$$

2021

Resumindo ...

...3 tipos de armadilhas podem ocorrer no método simplex:

Inicialização Podemos não começar. Como obter uma tabela viável de início?

Iteração Podemos ficar presos em alguma iteração. Como garantir pivoteamento?

Término Podemos não terminar. Como não entrar numa sequência infinita de tabelas sem nunca chegar a uma solução?

2021

Condições iniciais

PPL: maximizar $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ sujeito a $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$, onde

$\boldsymbol{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de posto $m < n$, $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{d} = (d_i) \in \mathbb{R}^m$.

Dado $B \subset \{1, \ldots, n\}$, definimos $N := \{1, \ldots, n\} \setminus B$.

Assumimos uma solução básica viável inicial, eventualmente, dada por

$$\max_{\boldsymbol{w}} -\sum_{i=1}^{m} w_i \text{ s.a } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{d} \text{ e } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{0}$$

caso $\boldsymbol{w} = 0$, senão o programa linear original é inviável.

2021

A restrição dada pela linha i de $\boldsymbol{A}$ pode ser escrita como

$$\sum_{j\in B} a_{i,j}x_j + \sum_{j\in N} a_{i,j}x_j = d_i$$

Na forma matricial,

$$\boldsymbol{A} = \left(\, A_B \;\vdots\; A_N \, \right) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \hdashline \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}$$

de modo que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ pode ser escrito como

$$\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{d}$$

donde $\boxed{\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N}$ dado que $\boldsymbol{A}_B$ é não singular.

2021 A função objetivo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^\top \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}_B^\top(\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^\top \boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{c}_N^\top - \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)\boldsymbol{x}_N\end{aligned}$$

O primeiro termo é um número real $z_0 := \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{d}$.

No segundo termo temos $\boldsymbol{c}_N^\top = (c_j)_{j\in N}$ e definimos $(z_j)_{j\in N}$ a posição j de $\boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N$, assim

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = z_0 + \sum_{j\in N}(c_j - z_j)x_j$$

O termo $r_j := c_j - z_j$ é chamado coeficiente reduzido de custo $\left(= \frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}\right)$

2021

$$\boldsymbol{p} = (p_i) := \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{Q} = (q_{i,j}) := \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N$$

$$z_0 := \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{r} := (r_i)^\top = (\boldsymbol{c}_N^\top - \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)$$

A tabela do Simplex na forma matricial

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}_B & = & \boldsymbol{p} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_N \\ \hline z & = & z_0 + \boldsymbol{r}^\top \boldsymbol{x}_N \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - y + x \\ x_2 & = & 15 - 6y - x \\ x_3 & = & 10 + y - 4x \\ \hline z & = & y + x \end{array}$$

Na forma matricial

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \hline z & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

2021

Critério de otimalidade

Para uma tabela Simplex $\begin{array}{c} \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{p} \; - \; \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_N \\ \hline z \; = z_0 \; + \; \boldsymbol{r}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}_N \end{array}$

Critério de otimalidade: Se $\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{0}$ então a solução básica viável correspondente a B é ótima.

pois para qualquer solução viável $\tilde{\boldsymbol{x}}$ temos $\tilde{\boldsymbol{x}}_N \geqslant \boldsymbol{0}$ logo $\boldsymbol{r}^\mathsf{T}\tilde{\boldsymbol{x}}_N \leqslant \boldsymbol{0}$ e

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\tilde{\boldsymbol{x}} = z_0 + \boldsymbol{r}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \leqslant z_0$$

Caso contrário, $\boldsymbol{r} \nleqslant \boldsymbol{0}$, i.e., há $\geqslant 1$ uma coordenada i tal que $r_i > 0$. Nesse caso

$$z_0 + r_i x_{N\,i} \text{ aumenta com } x_{N\,i}$$

onde $\boldsymbol{x}_N = (x_{N\,1}, x_{N\,2}, \ldots, x_{N\,n-m})^\mathsf{T}$.

2021

Critério de entrada

Se $\mathbf{x}$ é viável básica associada a B, $r_i > 0$ e $\tilde{\mathbf{x}}$ é obtida de $\mathbf{x}$ fazendo $\tilde{x}_{N\,i} > 0$ então $\mathbf{c}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{x}} > \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$.

Critério de entrada: x_i entra na base sse o coeficiente de x_i na última linha da tabela do Simplex é positivo, $r_i > 0$.

Há algumas técnicas para desempate:

1. maior coeficiente na função objetivo
2. mais incremento no valor objetivo
3. sorteio
4. aresta mais íngreme
5. regra de Bland escolha a variável de menor índice i; essa regra evita a ciclagem.

2021

Critério de saída

Quem sai?

Tomemos $B = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, e $N = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n-m}\}$. x_{ℓ_e} entra na base.

A i-ésima equação da tabela Simplex é

$$x_{k_i} = p_i - \sum_{j=1}^{n-m} q_{i,j} x_{\ell_j}$$

$x_{\ell_j} = 0$ para todo $j \neq e$, logo

$$x_{k_i} = p_i - q_{i,\ell_e} x_{\ell_e}$$

e a não-negatividade limita os possíveis valores de x_{ℓ_e}: $p_i - q_{i,\ell_e} x_{\ell_e} \geqslant 0$ para todo i.

2021

Se $q_{i,\ell_e} \leqslant 0$, então não há restrição. Se $q_{i,\ell_e} > 0$, então $x_{\ell_e} \leqslant p_i/q_{i,\ell_e}$.

A variável de saída é dada pelo índice i com a menor cota superior, i.e, x_{k_s} tal que

$$\frac{p_{k_s}}{q_{k_s,\ell_e}} = \min\left\{ \frac{p_i}{q_{i,\ell_e}} : q_{i,\ell_e} > 0 \text{ e } i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

> **Critério de saída**: A variável de saída x_s deve ser tal que sua não negatividade, junto com a equação correspondente na tabela Simplex tendo x_s no lado esquerdo, limita o incremento da variável de entrada x_e mais estritamente.

- Se houver empate usamos a regra de Bland.
- Se não houver linha com coeficiente $q_{i,\ell}$ positivo, então o programa é ilimitado e o cálculo termina.

2021

Critério de não limitação

No segundo caso $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_N$ com $\boldsymbol{Q} \leqslant 0$, portanto $\boldsymbol{x}_B \geqslant 0$ para qualquer $\boldsymbol{x}_N \geqslant 0$.

Ainda, fazendo $x_{\ell_e} = t$, para $t \geqslant 0$, e $x_{\ell_j} = 0$, para $j \neq \mathrm{e}$, na solução viável básica obtemos $\tilde{\boldsymbol{x}}$ viável e

$$\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}_B^\mathsf{T}\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{d} + r_{\ell_e} t$$

com $r_{\ell_e} > 0$. Logo se $t \to +\infty$ então $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\tilde{\boldsymbol{x}} \to +\infty$.

Critério de não limitação: Se alguma variável não básica tem coeficiente positivo na função objetivo e os coeficientes em todas as restrições for negativo ou zero, então a função objetivo é ilimitada sobre o viável região.

2021

Proposição 9

Se B é uma base viável e e se a variável de entrada x_e e a variável de saída x_s foram selecionadas de acordo com os critérios descritos acima então $B' = (B \setminus \{x_s\}) \cup \{x_e\}$ é novamente uma base viável. Ademais, Se nenhum x_{k_i} satisfizer o critério para uma variável de saída, então o programa linear é ilimitado.

A matriz $\boldsymbol{A}_{B'}$ é não singular pois $\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_{B'}$ é não singular: as matrizes $\boldsymbol{A}_B$ e $\boldsymbol{A}_{B'}$ coincidem nas $m-1$ colunas. Assim, para os índices $i \neq s$ em B obtemos o vetor unitário $\boldsymbol{e}_i$ na coluna correspondente de $\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_{B'}$.
A outra coluna de $\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_{B'}$ ocorre na tabela do Simplex como coluna da variável de entrada ($Q = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N$), nela ocorre um número diferente de zero (q_{k_s,ℓ_e}) na linha correspondente à variável de saída e as outras colunas de $\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_{B'}$ tem 0 nessa linha. Consequentemente, a matriz é não singular.
A viabilidade da base B': a não negatividade foram condições que usadas para escolher a variável de saída.

2021

Algoritmo: Método Simplex

1. Converta o programa linear de entrada para a forma padrão: maximizar $\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}x$ sujeito a $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ com n variáveis e m equações, onde A tem posto m.

2. Se nenhuma base viável estiver disponível, resolva o seguinte programa linear auxiliar pelo método simplex:

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{w}}{\text{maximize}} \quad & -\sum_{i=1}^{m} w_i \\ \text{sujeito a} \quad & \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{d} \\ & \bar{\boldsymbol{x}} \geqslant 0 \end{aligned}$$

onde $\bar{\boldsymbol{x}} = (x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_m)$ e $\bar{\boldsymbol{A}} = (A|\mathrm{Id}_m)$. Se o valor ótimos da função objetivo for negativo, então o PPL original é inviável; Pare. Caso contrário, os n primeiros n componentes da solução ótima formam uma solução viável básica do programa linear original.

2021

3. Para uma base viável $B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ calcule a tabela Simplex da forma

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{p} - Q\boldsymbol{x}_N \\ \hline z = z_0 + \boldsymbol{r}^\top \boldsymbol{x}_N \end{array}$$

4. 4. Se $\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{0}$ na tabela Simplex atual, retorne uma solução ótima ($\boldsymbol{p}$ especifica as básicas, enquanto as não básicas são 0); Pare.

5. Caso contrário, selecione uma variável de entrada x_e cujo coeficiente no vetor $\boldsymbol{r}$ é positivo. Se houver várias possibilidades, use alguma regra de desempate.

2021

6. Se a coluna da variável de entrada na tabela Simplex for não negativa, o programa linear é ilimitado; Pare.

7. Caso contrário, selecione uma variável de saída x_s. Considere todas as linhas da tabela Simplex onde o coeficiente de x_s é negativo, e em cada linha divida o componente do vetor $\boldsymbol{p}$ por esse coeficiente e mude o sinal. A linha da variável de saída é aquela em que essa proporção é mínima. Se são várias possibilidades, decidir com uma regra de desempate.

8. Substitua a base viável atual B pela nova base viável $(B \setminus \{s\}) \cup \{e\}$. Atualize a tabela Simplex para que corresponda a esta nova base. Vá para o passo 4.

2021

Considerações a respeito da complexidade

Na prática, tem desempenho muito satisfatório, mesmo para programas lineares grandes. Experimentos indicam que para PPL na forma padrão com m equações, atinge uma solução ótima entre $2m$ e $3m$ pivotamentos.

Klee e Minty (1972) construíram poliedro para o qual o Simplex com a regra de pivô original de Dantzig (maior coeficiente) precisa de exponencialmente muitos passos de pivô.

Até hoje, toda tentativa de regra de pivotamento polinomial fracassou.

O melhor limitante conhecido foi provado para o seguinte a regra aleatória: escolha uma ordem aleatória das variáveis no início da computação; então use a regra de Bland para escolher a variável de entrada e o método lexicográfico para escolher a variável de saída.

2021

Problema

Para várias regras populares de pivotamento, há exemplos que fazem o método percorrer todos os vértices.

Entretanto, estes exemplos não excluem a possibilidade de existir uma regra de pivotamento que não apresente o comportamento de pior caso exponencial.

Esta é uma das questões mais importantes em Teoria de Programação Linear, ainda sem resposta. O fato é que não se conhece uma regra de pivotamento imune a esta patologia.

O Problema de Programação Linear é polinomialmente solúvel (via Algoritmo do Elipsóide).

2021

Tarefa

No livro texto

Ler seção 3.3.4 – O Quadro Simplex, pg. 106, e 3.3.5 – Um Exemplo Numérico, pg. 110.

Exercícios do capítulo 3.

2021

Exercício 26

A tabela do Simplex, conforme usamos anteriormente, pode ser genericamente descrita por

$$
\begin{array}{rcl}
x_{k_1} & = & p_1 + q_{1,1}x_{\ell_1} + \cdots + q_{1,n-m}x_{\ell_{n-m}} \\
x_{k_2} & = & p_2 + q_{2,1}x_{\ell_1} + \cdots + q_{2,n-m}x_{\ell_{n-m}} \\
 & \vdots & \\
x_{k_m} & = & p_m + q_{m,1}x_{\ell_1} + \cdots + q_{m,n-m}x_{\ell_{n-m}} \\
\hline
z & = & z_0 + r_1 x_{\ell_1} + \cdots + r_{n-m}x_{\ell_{n-m}}
\end{array}
$$

onde $p_i, z_0, q_{i,j}, r_i$ são números reais para todos i, j.

Suponha que para algum $t \in \{1, \ldots, n-m\}$ vale $q_{1,\ell_t}, \ldots, q_{m,\ell_t}, r_t > 0$. Nesse caso, a função objetivo (representado por z na tabela) pode assumir valores arbitrariamente grandes fazendo x_{ℓ_t} crescer.

2021 Fazendo $x_{\ell_j} = 0$ para todo $j \neq t$, $x_{\ell_t} = \alpha$, a parte superior da tabela fica reescrita como

$$x_{k_i} = p_i + q_{i,t} x_{\ell_t} = p_i + q_{i,t}\alpha$$

completando com as variáveis não básicas à esquerda:

$$\begin{aligned}
x_{k_1} &= p_1 + q_{1,t}\alpha \\
x_{k_2} &= p_2 + q_{2,t}\alpha \\
&\vdots \\
x_{k_m} &= p_m + q_{m,t}\alpha \\
x_{\ell_t} &= 0 + 1\alpha \\
x_{\ell_1} &= 0 + 0\alpha \\
&\vdots \\
x_{\ell_{t-1}} &= 0 + 0\alpha \\
x_{\ell_{t+1}} &= 0 + 0\alpha \\
&\vdots \\
x_{\ell_{n-m}} &= 0 + 0\alpha
\end{aligned}$$

2021

Tome $\boldsymbol{p}$ como o vetor dado pelos termos independentes na direita do "$=$"e $\boldsymbol{q}$ o vetor dos coeficientes de α.

Prove que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \alpha\boldsymbol{q}$ é viável para todo $\alpha > 0$. Conclua que $\boldsymbol{c}^\intercal\boldsymbol{x} \to \infty$ quando $\alpha \to \infty$.

Dualidade

A teoria da dualidade é um dos mais importantes tópicos da Programação Linear, bastante útil na resolução de problemas de programação linear.

Associado a cada modelo de PL (denominado Primal) há outro modelo (denominado Dual), com o qual está intimamente conectado. Cada variável no primal torna-se uma restrição no dual; cada restrição no primal torna-se uma variável no dual; o objetivo é invertido.

2021

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. a} \quad & 4x_1 + 8x_2 \leqslant 12 \quad (1) \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 3 \quad (2) \\ & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \quad (3) \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

De (1), $2x_1 + 3x_2 \leqslant 4x_1 + 8x_2 \leqslant 12$

De (1)−(2), $2x_1 + 3x_2 \leqslant 2x_1 + 7x_2 \leqslant 9$

De $\frac{1}{2}$(1), $2x_1 + 3x_2 \leqslant 2x_1 + 4x_2 \leqslant 6$

De $\frac{1}{3}$((1)+(2)), $2x_1 + 3x_2 \leqslant 2x_1 + 3x_2 \leqslant 5$

De (3)−(2), $2x_1 + 3x_2 \leqslant 3x_1 + 3x_2 \leqslant 3$

? $2x_1 + 3x_2 \leqslant d_1 x_1 + d_2 x_2 \leqslant h$, $d_1 \geqslant 2$, $d_2 \geqslant 3$ e h o menor possível ?

2021

Combinação linear de (1), (2) e (3) com coeficientes não negativos fica

$$y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \leqslant 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$$

rearranjado

$$(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (8y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \leqslant 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$$

2021

$$\begin{aligned} \underset{y_1, y_2, y_3}{\text{minimize}} \quad & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{sujeito a} \quad & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geqslant 2 \\ & 8y_1 + y_2 + 2y_3 \geqslant 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Cuja solução viável ótima é $\boldsymbol{y} = (5/16, 0, 1/4)$ e valor ótimo $7/4$.

2021

Primal × Dual

$$
\begin{aligned}
(P)\quad \underset{x_1, x_2}{\text{maximize}} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & 4x_1 + 8x_2 \leqslant 12 \\
& 2x_1 + x_2 \leqslant 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(D)\quad \underset{y_1, y_2, y_3}{\text{minimize}} \quad & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\
\text{sujeito a} \quad & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geqslant 2 \\
& 8y_1 + y_2 + 2y_3 \geqslant 3 \\
& y_1, y_2, y_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

2021

Primal $\times$ Dual

PL Primal

$$(P)\quad \underset{\boldsymbol{x}}{\text{maximize}} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$$
$$\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant 0$$

PL Dual

$$(D)\quad \underset{\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} \quad \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}$$
$$\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}$$

2021

Teorema da dualidade fraca

Com a notação acima, para cada solução viável x de (P) e cada solução viável y de (D) vale

$$c^\top x \leqslant d^\top y$$

Se vale a igualdade então ambas soluções são ótimas.
Em particular, se (P) é ilimitado então (D) é inviável e se (D) é ilimitado então (P) é inviável.

2021

Exercício 27

Prove que o dual do dual é o primal.

2021

Exercício 28

Verifique que o dual de

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{maximize}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

é

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{v}}{\text{minimize}} \quad & \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{v} \\ \text{sujeito a} \quad & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

(Obs: $\boldsymbol{v}$ é livre de sinal na restrição)

2021

Exercício 29

Verifique que o dual de

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

é

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{u}}{\text{maximize}} \quad & \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{u} \\ \text{sujeito a} \quad & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{u} \leqslant \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{u} \geqslant 0 \end{aligned}$$

2021

PL Primal

$$(P)\quad \begin{aligned} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{maximize}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

PL Dual

$$(D)\quad \begin{aligned} \underset{\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} \quad & \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Da dualidade fraca

Se (P) e (D) são viáveis então ambos têm solução ótima.

pois se (P) é viável então (D) é limitado e se (D) é viável então (P) é limitado. Logo ambos sendo viáveis e limitados admitem solução ótima.

2021

Proposição 10

Se (P) tem solução ótima então (D) é viável.

Assumamos (P) solúvel e

$$\begin{aligned} \underset{\hat{\boldsymbol{x}}}{\text{maximize}} \quad & \hat{\boldsymbol{c}}^{\mathsf{T}}\hat{\boldsymbol{x}} \\ \text{sujeito a} \quad & \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{d} \\ & \hat{\boldsymbol{x}} \geqslant 0 \end{aligned}$$

o PPL na forma padrão com variáveis de folga $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$.

$\hat{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{c}|0)^{\mathsf{T}}$, $\hat{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_{n+m})^{\mathsf{T}}$, $\hat{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}|\mathrm{Id})$, onde Id é a matriz identidade $m \times m$.

2021 para alguma base viável B temos o critério de otimalidade

$$\hat{\boldsymbol{c}}_N^{\mathsf{T}} - \hat{\boldsymbol{c}}_B^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}_N \leqslant 0$$

e se $\hat{\boldsymbol{x}}$ é viável básica (ótima) então

$$\hat{\boldsymbol{c}}^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{c}}_B^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{x}}_B = \hat{\boldsymbol{c}}_B^{\mathsf{T}} \left(\hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1} \boldsymbol{d} \right) = \left(\hat{\boldsymbol{c}}_B^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1} \right) \boldsymbol{d}$$

Façamos $\hat{\boldsymbol{y}} := \left(\hat{\boldsymbol{c}}_B^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1} \right)^{\mathsf{T}}$

$\hat{\boldsymbol{y}}$ é viável de (D)?

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}} \left(\hat{\boldsymbol{c}}_B^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1} \right)^{\mathsf{T}} = \left(\hat{\boldsymbol{c}}_B^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1} \hat{\boldsymbol{A}} \right)^{\mathsf{T}} = \left(\hat{\boldsymbol{c}}_B \hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}_B \,|\, \hat{\boldsymbol{c}}_B \hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}_N \right)^{\mathsf{T}} = \left(\hat{\boldsymbol{c}}_B \mathrm{Id} \,|\, \hat{\boldsymbol{c}}_B^{\mathsf{T}} \hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}_N \right)^{\mathsf{T}}$$
$$\geqslant (\hat{\boldsymbol{c}}_B \,|\, \hat{\boldsymbol{c}}_N)^{\mathsf{T}} = \hat{\boldsymbol{c}}$$

2021

Exercício 30

Verifique que

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}}\hat{\boldsymbol{y}} \geqslant \hat{\boldsymbol{c}}$$

é equivalente a

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\hat{\boldsymbol{y}} \geqslant \boldsymbol{c} \text{ e } \hat{\boldsymbol{y}} \geqslant 0.$$

$\square$

2021

Corolário

Se (D) tem solução ótima então (P) é viável.

Se (D) tem solução ótima então o dual de (D), que é (P), é viável

Portanto, num par primal-dual de PPL não ocorre de um ser viável e o outro inviável.

2021

Teorema da dualidade forte

Para o par primal-dual

$$(P)\quad \underset{x}{\text{maximize}} \quad c^\top x \qquad \text{sujeito a} \quad Ax \leqslant d, \quad x \geqslant 0$$

$$(D)\quad \underset{y}{\text{minimize}} \quad d^\top y \qquad \text{sujeito a} \quad A^\top y \geqslant c, \quad y \geqslant 0$$

ocorre exatamente um de

1. nenhum é viável;
2. um é ilimitado e o outro inviável;
3. ambos são viáveis, portanto limitados, portanto têm solução ótima. Ademais, os valores ótimos coincidem.

2021

Resta provar que no caso 3 os valores ótimos coincidem.

Na proposição 10 temos B uma base viável ótima, $\hat{\boldsymbol{x}}$ uma solução viável básica ótima do PPL padrão dado por (P) e $\hat{\boldsymbol{y}}$ dado por $\hat{\boldsymbol{y}} = \left(\hat{\boldsymbol{c}}_B^\intercal \hat{\boldsymbol{A}}_B^{-1}\right)^\intercal$ viável para (D) e $\hat{\boldsymbol{c}}^\intercal \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{d}^\intercal \hat{\boldsymbol{y}}$.

Uma solução ótima de (P) $\boldsymbol{x}^*$ é dada pelas n primeiras coordenadas de $\hat{\boldsymbol{x}}$ e

$$\boldsymbol{c}^\intercal \boldsymbol{x}^* = \hat{\boldsymbol{c}}^\intercal \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{d}^\intercal \hat{\boldsymbol{y}}$$

Pela dualidade fraca $\boldsymbol{c}^\intercal \boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{d}^\intercal \boldsymbol{y}$ para todo $\boldsymbol{y}$ viável, portanto $\hat{\boldsymbol{y}}$ é solução viável mínima. $\square$

2021

Resumo da viabilidade

Há 9 combinações possíveis para (P) e (D).

(P)	(D)	
viável	viável	✓
viável	ilimitado	✗ (pelo teo. fraco)
viável	inviável	✗ (pelo teo. forte)
ilimitado	viável	✗ (pelo teo. fraco)
ilimitado	ilimitado	✗ (pelo teo. fraco)
ilimitado	inviável	✓
inviável	viável	✗ (pelo teo. forte)
inviável	ilimitado	✓
inviável	inviável	✓

2021

Teorema das folgas complementares

Uma solução viável básica de (P) $\bar{x}$ e uma solução viável básica de (D) $\bar{y}$ são soluções ótimas sse satisfazem as condições de folgas complementares

1. $\bar{y}^\top(d - A\bar{x}) = 0$
2. $\bar{x}^\top(A^\top\bar{y} - c) = 0$

Rascunho da dem.:

$\alpha := \bar{\boldsymbol{y}}^\top(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}})$ e $\beta := \bar{\boldsymbol{x}}^\top(\boldsymbol{A}^\top\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{c})$.

($\Rightarrow$) $\alpha, \beta \geqslant 0 \therefore \alpha + \beta = \boldsymbol{d}^\top\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{c}^\top\bar{\boldsymbol{x}} \geqslant 0$. Teo. forte $\Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

($\Leftarrow$) $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \boldsymbol{d}^\top\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{c}^\top\bar{\boldsymbol{x}} = 0$.
$\boldsymbol{d}^\top\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^\top\bar{\boldsymbol{x}} \Rightarrow$ soluções ótima (verifique).

2021

Decorre das condições de folga complementar que

1. para todo i, $\bar{y}_i\left(d_i - \sum_j a_{i,j}\bar{x}_j\right) = 0$

2. para todo j, $\bar{x}_j(\sum_i a_{i,j}\bar{y}_j - c_j) = 0$

de modo que se introduzimos variáveis de folga nas restrições temos

1. para todo i, $\bar{y}_i \cdot \bar{x}_{n+i} = 0$

2. para todo j, $\bar{x}_j \cdot \bar{y}_{m+j} = 0$.

2021

Exercício 31

Na prova da proposição 10, se B e B' são bases distintas com a mesma solução viável básica ótima $\hat{\boldsymbol{x}}$ de (P), então teremos $\hat{\boldsymbol{y}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}'$, ambas viáveis de (D). Toda combinação linear convexa de $\hat{\boldsymbol{y}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}'$ é viável de (D). A partir daí, como na prova do teorema de dualidade forte,

$$\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}}(\lambda\hat{\boldsymbol{y}} + (1-\lambda)\hat{\boldsymbol{y}}')$$

Esse argumento está correto?