Semana 2

Semana 2

Conjuntos

Conjunto é informalmente entendido como uma *coleção* de entidades, ou objetos, chamados de **elementos** do conjunto e eles mesmos podem ser conjuntos.

Pertinência

Um elemento x **pertence** ao conjunto A se x é um elemento de A o que é denotado por

$$x \in A$$

e escrevemos a negação como

$$x \notin A$$

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos.

Conjunto vazio

Há um (único) conjunto sem elementos, denotado por $\varnothing$ *e chamado de conjunto vazio.*

Especificação de conjuntos

- lista entre chaves separados por vírgulas.

$$\{2,3,5,7\}$$

$$\{\{A\},\{B\},\{C\},\{D\},\{F\},\{O\}\}$$

Especificação de conjuntos

- lista entre chaves separados por vírgulas.

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

$$\{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{F\}, \{O\}\}$$

- As vezes, abreviamos usando "$\ldots$"

$$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Especificação de conjuntos

- lista entre chaves separados por vírgulas.

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

$$\{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{F\}, \{O\}\}$$

- As vezes, abreviamos usando "…"

$$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Especificação de conjuntos

- lista entre chaves separados por vírgulas.

$$\{2,3,5,7\}$$

$$\{\{A\},\{B\},\{C\},\{D\},\{F\},\{O\}\}$$

- As vezes, abreviamos usando "$\ldots$"

$$\{0,2,4,6,\ldots\}, \quad \{3,5,7,\ldots\}?$$

Especificação de conjuntos

- lista entre chaves separados por vírgulas.

$$\{2,3,5,7\}$$

$$\{\{A\},\{B\},\{C\},\{D\},\{F\},\{O\}\}$$

- As vezes, abreviamos usando "$\ldots$"

$$\{0,2,4,6,\ldots\},\quad \{3,5,7,\ldots\}?$$

- por *compreensão*, damos uma regra de como gerar todos os seus elementos

$$A=\{x\in B\colon P(x)\}$$

$a\in A$ é verdadeiro se e só se, $a\in B$ e $P(a)$ é verdadeiro.
Por exemplo, o conjunto dos números naturais primos

$$\{x\in\mathbb{N}\colon x>1 \text{ e } \forall y,z\in\mathbb{N}(yz=x\rightarrow y=1\vee z=1)\}.$$

Inclusão

A é **subconjunto** de B, se, e só se, para todo x

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Notação: $A \subset B$ (também é usual $A \subseteq B$)

A é **subconjunto próprio** de B, se, e só se, é verdadeira a sentença: $A \subset B$ e $A \neq B$

Notação: $A \subsetneq B$

Inclusão

Notação: $A \not\subseteq B$ para "A é **não é subconjunto** de B", o que é equivalente a

$$\exists x (x \in A \text{ e } x \notin B)$$

Exercício: Para qualquer conjunto A,

$$\emptyset \subseteq A.$$

Conjunto das partes

O conjunto das partes do conjunto A é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Notação: 2^A ou $\wp(A)$.

Exercício: $2^{\{a\}}$? $2^{\varnothing}$? $2^{\{\varnothing\}}$?

Operações básicas

- **União:** $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Operações básicas

- **União:** $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersecção** $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Operações básicas

- **União:** $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersecção** $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \in B\}$.
- **Diferença** $A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Operações básicas

- **União:** $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersecção** $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \in B\}$.
- **Diferença** $A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \notin B\}$.
- **Diferença simétrica**
  $A \triangle B = \{x \colon x \in A \cup B \text{ e } x \notin A \cap B\}$.

<u>Exercício:</u> Assuma que $\forall x \in D, P(x)$ é logicamente equivalente a $\forall x \in D, Q(x)$.

$$\{\, x \in D : P(x) \,\} = \{\, x \in D : Q(x) \,\}?$$

Algumas propriedades

Seguem das equivalências lógicas notáveis

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

+ na pág. 124 do Rosen

<u>Exercício:</u> Seja $\mathcal{R}$ um conjunto de conjuntos. Denote por $\bigcup \mathcal{R}$ a união dos elementos de $\mathcal{R}$.

Por exemplo, se $\mathcal{A} = \{X, Y, Z\}$, por exemplo, então $\bigcup \mathcal{A} = X \cup Y \cup Z$.

Tome $\mathcal{R} = \{\{\{1\},\{1,2\}\},\{\{1\},\{1,3\}\},\{\{2\},\{2,3\}\}\}$.

Escreva os conjuntos $\bigcup \mathcal{R}$ e $\bigcup \bigcup \mathcal{R}$.

Semana 2

Axiomas ZFC

Axioma da existência Existe um conjunto que não tem elementos. Na linguagem formal

$$\exists a \forall x (x \notin a).$$

Axioma da extensionalidade Quaisquer dois conjuntos com os mesmos elementos são iguais. Na linguagem formal

$$\forall a \forall b ((\forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \rightarrow a = b).$$

Axiomas ZFC

Axioma do par Dados conjuntos y e z existe o conjunto formado somente por tais elementos $\{y, z\}$.

$$\forall y \forall z \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow x = y \vee x = z).$$

Axioma da união Para qualquer conjunto z existe o conjunto $\bigcup z$ formado pela união dos elementos de z.

$$\forall z \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow \exists y (x \in y \wedge y \in z)).$$

<u>Exercício:</u> Dados os conjuntos A e B, forme $A \cup B$.

Axiomas ZFC

Axioma das partes Para qualquer conjunto y, existe o conjunto a tal que $x \in a$ se, e só se, $x \subseteq y$.

$$\forall y \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y)).$$

Axioma do infinito Existe um conjunto indutivo; tem $\varnothing$ como elemento e, se x é elemento, também é $x \cup \{x\}$.

$$\exists a (\varnothing \in a \land \forall x (x \in a \rightarrow x \cup \{x\} \in a))$$

Axiomas ZFC

Axioma da especificação De um conjunto y e um predicado P, formamos o conjunto $\{\, x \in y \colon P(x) \,\}$.

$$\forall y \exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in y \wedge P(x)).$$

Axiomas ZFC

A definição de união $\{x \colon x \in A \vee x \in B\}$ não se enquadra.

Se x é não vazio então

$$\bigcap x = \left\{ y \in \bigcup x \colon \forall z \in x, y \in z \right\}.$$

Não temos mais o paradoxo de Russell pois se

$$S = \{x \in U \colon x \notin x\}$$

então $S \in S$ se e só se $S \in U$ e $S \notin S$ o que não é contraditório.

não há conjunto universo: **Teorema.** $\neg \exists y \forall x (x \in y)$.

Axiomas ZFC

Axioma da fundação Cada conjunto não vazio a tem um elemento b com $a \cap b = \varnothing$.

Axioma da substituição Dado um conjunto x e um predicado $R(s,t)$ com a propriedade $\forall s \exists! t R(s,t)$, existe o conjunto z tal que $y \in z$ se, e só se, existe $w \in x$ para o qual $R(w,y)$ é verdadeiro.

Axiomas ZFC

O último axioma é controverso para alguns. Embora pareça coerente há decorrências não intuitivas.

Axioma da escolha Para qualquer conjunto x formado de conjuntos não-vazios, existe uma função f que atribui para cada $y \in x$ um $f(y) \in y$.

ou

Dado qualquer conjunto x de conjuntos não vazios e dois-a-dois disjuntos, existe pelo um conjunto z que contém exatamente um elemento em comum com cada um dos conjuntos em x.

Par ordenado

Definição: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Par ordenado

Definição: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Exercício: Verifique que a definição acima satisfaz a propriedade fundamental de par ordenado se

$$(a, b) = (x, y) \text{ então } a = x \text{ e } b = y.$$

Conclua que se $a \neq b$ então $(a, b) \neq (b, a)$.

Produto cartesiano

A e B são conjuntos **não vazios.** Vamos definir o conjunto $A \times B$ que contém os partes ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.

Produto cartesiano

A e B são conjuntos **não vazios.** Vamos definir o conjunto $A \times B$ que contém os partes ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.

—axiomas do par e da união: $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$
—axioma das partes: $\wp(A \cup B)$.

Dados $a \in A$ e $b \in B$,
—axioma do par: $\{a\}$ e $\{a, b\}$ $\in \wp(A \cup B)$.
—axioma do par: $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ $\subseteq \wp(A \cup B)$.

Produto cartesiano

A e B são conjuntos **não vazios**. Vamos definir o conjunto $A \times B$ que contém os partes ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.

—axiomas do par e da união: $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$
—axioma das partes: $\wp(A \cup B)$.

Dados $a \in A$ e $b \in B$,
—axioma do par: $\{a\}$ e $\{a, b\}$ $\in \wp(A \cup B)$.
—axioma do par: $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ $\subseteq \wp(A \cup B)$.

Portanto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \wp(\wp(A \cup B)).$$

Especificando $A \times B =$

$$\{z \in \wp(\wp(A \cup B)) \colon \exists x, \exists y (x \in A \land y \in B \land z = (x, y))\}$$

Semana 2

Relações

Se A e B são conjuntos, uma **relação** R com **domínio** A e **contradomínio** B é um subconjunto

$$R \subseteq A \times B.$$

Se $A = B$ escrevemos A^2 para $A \times B$ e dizemos que $R \subseteq A^2$ é uma relação *sobre* A, ou *em* A.

Se $R \subseteq A \times B$ e $(a, b) \in R$ escrevemos $a\ R\ b$.

Relações

Exemplo:

$A = \{1,2,3,4\}$ e $R \subseteq A \times A$ dada por

$$R = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,3),(3,2),(3,1),\\ (4,4),(4,3),(4,2),(4,1)\}$$

Temos

- $1 \; R \; 1$,
- $2 \; R \; 1$,
- $2 \; R \; 2$ e
- $3 \not R \; 4$.

Relações

Exemplo:

$<$ é uma relação sobre $\mathbb{N}$.
Ao invés de escrevermos $(x, y) \in <$ escrevemos $x < y$.

Temos

- $1 \not< 1$,
- $2 \not< 1$,
- $3 < 4$.

Funções

Uma relação $R \subseteq A \times B$ é uma **função** se para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.

Em símbolos $\forall x \in A, \exists! y \in A, (x, y) \in R$.

$\exists!$ abrevia "existe único".

Como y é único ganha um nome: **imagem** de x por R, denotado $R(x)$.

Escrevemos $R\colon A \to B$ para $R \subseteq A \times B$ função.

Funções

Exemplo:

A função f que o axioma da escolha afirma existir é um subconjunto de $x \times \bigcup x$, ou seja, $f\colon x \to \bigcup x$, com a propriedade de que $f(y) \in y$, para todo $y \in x$.

Semana 2

1. Teoria ingênua dos conjuntos
2. Axiomática ZFC de conjuntos
3. Relações e funções
4. Conjuntos numéricos

Naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

1. (associativa)$(a + b) + c = a + (b + c)$
2. (comutativa) $a + b = b + a$
3. (elemento neutro da adição) 0 é o único natural tal que $a + 0 = 0 + a = a$
4. (cancelamento da adição) Se $a + c = b + c$ então $a = b$
5. Se $a + b = 0$ então $a = b = 0$.
6. (elemento neutro da multiplicação) $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$ e 1 é único com essa propriedade.
7. (associativa)$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.
8. (comutativa) $m \cdot n = n \cdot m$.

Naturais

9. (cancelamento da multiplicação) Se $mp = np$ e $p \neq 0$ então $m = n$.
10. (multiplicação é distributiva com respeito a adição) $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$.
11. Se $m \cdot n = 0$ então $m = 0$ ou $n = 0$.
12. Se $m \cdot n = 1$ então $m = n = 1$.
13. (reflexiva) $a \leqslant a$.
14. (simétrica) Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$ então $b = a$.
15. (transitiva) Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$ então $a \leqslant c$.
16. $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.
17. (tricotomia) Vale uma e só uma das relações

$$a = b, \ a < b, \ b < a.$$

Naturais

18. (compatibilidade com $+$) Se $a \leqslant b$ então $a + c \leqslant b + c$.
19. (compatibilidade com $\cdot$) Se $a \leqslant b$ então $a \cdot c \leqslant b \cdot c$.

Naturais

Princípio da Boa Ordem (PBO) *Todo $A \subset \mathbb{N}$ não-vazio tem um **menor elemento**, ou seja, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que*

$$a \in A$$
$$\forall x \in A,\ a \leqslant x.$$

Inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

1. (Associativa) $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. (Comutativa)$a + b = b + a$.
3. (Elemento neutro) $a + 0 = a$ e 0 é o único com essa propriedade.
4. (Elemento inverso) $a + (-a) = 0$.
5. (Cancelativa) $a + b = a + c \leftrightarrow b = c$
6. (Troca de sinal) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$
7. (Associativa) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
8. (Comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$.
9. (Elemento neutro) $a \cdot 1 = a$ e 1 é o único com essa propriedade.

Inteiros

10. (Distributiva)
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
11. (Cancelativa
$$b = c \Rightarrow a \cdot b = a \cdot c$$
$$a \neq 0 \text{ e } a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c.$$
12. (Anulamento) se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.
13. (Tricotomia) vale só um de
$$a < b \text{ ou } a = b \text{ ou } b < a.$$
14. $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$
15. se $c \in \mathbb{N}$ então $a \leqslant b \Leftrightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot c$.
16. $a < b$ e $b \leqslant c \Rightarrow a < c$.

Inteiros

17. $a \leqslant b$ e $b < c \Rightarrow a < c$.
18. $a \leqslant b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
19. $a < b \Leftrightarrow -a > -b$.
20. Regras de sinal
    1. $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab > 0$
    2. $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow ab > 0$
    3. $a < 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab < 0$
21. $a \leqslant b$ e $c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$.
22. $a \leqslant b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
23. $a^2 \geq 0$.
24. $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
25. $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
26. $ac \leqslant bc$ e $c < 0 \Rightarrow a \geq b$

Inteiros

27. $|a| \geq 0$, ademais $|a| = 0$ se e só se $a = 0$.
28. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.
29. $|-a| = |a|$.
30. $|ab| = |a||b|$.
31. $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$.
32. $||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$.
33. $|a| - |b| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|$

Inteiros

$A \subset \mathbb{Z}$ não-vazio é **limitado inferiormente** se existe $m \in \mathbb{Z}$ (chamado **cota inferior**) tal que

$$\forall a \in A,\ m \leqslant a.$$

Exercício: Todo $A \subset \mathbb{Z}$ não vazio e limitado inferiormente tem um elemento mínimo.

Exercício: Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot b > a$.

Exercícios: veja na página web e nas notas de aula.