

# Métodos de Álgebra Linear em Teoria dos Grafos

Uma introdução à Teoria  
Espectral de grafos e aos  
Grafos Expansores

Jair Donadelli Jr



# Sumário

<b>1</b>	<b>Matrizes</b>	<b>7</b>
1.1	Notações, definições e fatos elementares . . . . .	7
1.2	Autovalores e autovetores de matrizes . . . . .	12
1.2.1	Autoespaço e multiplicidades . . . . .	15
1.3	Matrizes simétricas . . . . .	17
1.3.1	Ortogonalidade dos autovetores . . . . .	18
1.3.2	Projeção ortogonal e Ortogonalização . . . . .	20
1.3.3	Matrizes ortogonais . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Tópicos de Álgebra Linear</b>	<b>23</b>
2.1	Teorema Espectral para matrizes reais . . . . .	23
2.2	Princípio de Rayleigh . . . . .	25
	Desigualdades de Weyl . . . . .	27
2.3	Teorema minimax de Courant–Fischer . . . . .	28
2.4	Teorema do entrelaçamento de Cauchy . . . . .	30
2.5	Teorema de Perron–Frobenius para matrizes não-negativas . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Introdução à Teoria Espectral de Grafos</b>	<b>35</b>
3.1	Matriz de adjacências . . . . .	35
3.1.1	Grau . . . . .	41
3.1.2	Subgrafos . . . . .	42
3.1.3	Passeios, Caminhos e Circuitos . . . . .	46
3.1.4	Distância . . . . .	49
3.1.5	Grafos bipartidos . . . . .	49
3.1.6	Diâmetro . . . . .	51
3.1.7	Grafos conexos e componentes conexas . . . . .	54
3.1.8	Árvores . . . . .	56
3.2	Matriz laplaciana . . . . .	58
3.2.1	Componentes conexas . . . . .	62
3.2.2	Árvores geradoras: o Teorema de Kirchhoff . . . . .	63
3.2.3	O segundo menor autovalor . . . . .	65
	Cortes de arestas . . . . .	69

---

<b>4</b>	<b>Valores extremos e típicos</b>	<b>73</b>
4.1	Conjuntos independentes . . . . .	73
4.2	Cliques . . . . .	75
4.2.1	Grafos extremais sem $K^p$ . . . . .	78
4.3	Coloração de vértices . . . . .	81
4.4	$\alpha$ e $\chi$ típicos . . . . .	85
4.5	$\lambda_1, \lambda$ típicos . . . . .	87
4.5.1	$e(G)$ e $n_G(C^4)$ típicos . . . . .	88
4.6	Distribuição das arestas e autovalores . . . . .	93
4.6.1	Grafos não-regulares . . . . .	96
4.6.2	Distribuição típica das arestas . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Grafos Expansores</b>	<b>101</b>
5.1	Definições . . . . .	101
5.2	Expansão e espectro . . . . .	103
5.3	Construções . . . . .	108
5.3.1	Grafos de Cayley . . . . .	108
	Grafo de Paley . . . . .	109
5.3.2	Grafos de Ramanujan . . . . .	112
5.3.3	Produto Zig-Zag . . . . .	114
5.4	Passeios Aleatórios em Grafos Expansores . . . . .	114
5.4.1	Aplicações . . . . .	117
	Índice Remissivo . . . . .	124
	Índice de Símbolos . . . . .	127

# PREFÁCIO

Dado um grafo  $G$  sobre o conjunto de vértices  $V$ , o conjunto  $\mathbb{R}^V$  com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar é um espaço vetorial real com produto interno  $\langle f, g \rangle = \sum_{v \in V} f(v)g(v)$ . Uma matriz de  $\mathbb{R}^{V \times V}$  age como operador linear nesse espaço e, em especial, a matriz de adjacências  $A$  define, naturalmente, um operador auto-adjunto:  $Af(x) = \sum_{xy \in E(G)} f(y)$ . Com isso, podemos perguntar como os vários resultados conhecidos sobre espaços vetoriais com produto interno podem ser usados para inferir propriedades combinatórias em Teoria dos Grafos.

- matriz complementar  $\bar{A} = \mathbf{1} - A - \text{Id}$ ;
- matriz laplaciana  $L = D - A$ , onde  $D$  é a matriz diagonal  $d_i^i = \sum_j a_i^j$ ;
- matriz laplaciana sem sinal  $|L| = D + A$ ;
- matriz de Seidel  $S = \bar{A} - A$ .

Como exemplo, os seguintes aspectos estruturais podem ser deduzidos das matrizes  $A(G)$  e  $L(G)$

- (i) o número de vértices  $|V(G)|$  e o número de arestas  $|E(G)|$ ;
- (ii) se o grafo  $G$  é regular;
- (iii) se o grafo  $G$  é regular com uma dada cintura;

de  $A(G)$ :

- (iv) o número de passeios fechados de dado comprimento;
- (v) se  $G$  é bipartido;

de  $L(G)$ :

- (vi) o número de componentes conexas de  $G$ ;
- (vii) o número de árvores geradoras de  $G$ .

Neste texto apresentamos uma introdução às aplicações de Álgebra Linear em Teoria dos Grafos focada na matriz de adjacências. Também apresentamos uma introdução aos Grafos Expansores, que são grafos com uma propriedade espacial que os torna de ampla utilidade e têm sido objetos de grande interesse recentemente.

Neste capítulo veremos relações entre o espectro parâmetros importantes de grafos: número de independência ( $\alpha$ ), clique máximo ( $\omega$ ) e número cromático ( $\chi$ ). Esses parâmetros são amplamente estudados e resultados profundos são conhecidos a respeito do comportamento dessas funções, isso porque, dentre outros motivos, há várias aplicações relevantes, por exemplo em problemas de escalonamento, e porque são problemas centrais em Teoria de Computação, a computação desses parâmetros é NP-difícil. Mais que isso, é sabido que vale o seguinte resultado: *Não existe um algoritmo de tempo polinomial  $M$  tal que, dado  $G$ ,  $M(G)$  aproxima o tamanho do clique máximo em  $G$ ,  $\omega(G)$ , com  $n$  vértices por um fator menor que  $n^\epsilon$ , para certo  $\epsilon > 0$ , a menos que  $P = NP$ .*

Grafos expansores são caracterizados combinatorialmente por possuir alta conectividade: um corte  $E(U, \overline{U})$  tem muitas arestas. Sabe-se que essa caracterização é equivalente a dizer que um passeio aleatório no grafo converge rapidamente para a distribuição estacionária e é equivalente a caracterização algébrica: a *distância espectral*  $\lambda_1(G) - \lambda_2(G)$  é grande.

São conhecidas muitas aplicações de grafos expansores em várias áreas como em Teoria da Medida, Teoria dos Grupos, Teoria dos Códigos, Criptografia e em Complexidade Computacional, como é o caso do resultado de não-aproximação citado na introdução do Capítulo 4. Algumas dessas aplicações requerem uma *construção explícita* dos grafos, isto é, que sejamos capazes de construir uma representação de  $G^n$  em tempo  $\text{poly}(n)$  ou, um requisito mais forte, a vizinhança de um vértice é computada em tempo  $\text{poly}(\log(n))$ .

A busca por construções explícitas desses grafos passou a ser objeto de investigação, mas apesar da abundância de expansores decidir se um dado grafo é  $\epsilon$ -expansor é um problema NP-difícil. A caracterização espectral de grafos expansores levou os pesquisadores a considerarem construções algébricas para esses grafos e a demonstração de que tais grafos esparsos são expansores depende em geral de teoremas difíceis de várias subáreas da matemática que fogem do nosso escopo, por exemplo, uma célebre construção devida a Lubotzky, Phillips e Sarnak em 1988 envolve resultados em Teoria dos Números e Teoria da Representação de Grupos Finitos.

Esse texto nasceu das notas de aulas da disciplina Tópicos em Teoria dos Grafos oferecida ao Bacharelado em Ciência da Computação da UFPR. Parte do texto foram redigidas pelos alunos do curso aos quais deixamos um agradecimento especial: Ander Conselvan Oliveira, Everson Mauda, Gustavo Baggio, João Luiz Santos, Leonardo Boiko, Renan Fischer, Ricardo Samila, Tiago Sak, Tiago Vignatti.





# MATRIZES

Neste capítulo colocamos as definições, propriedades e resultados mais elementares da Álgebra Linear que são usadas neste texto. A primeira seção traz as definições mais básicas e serve para ajustar a notação. Na segunda seção apresentamos autovetores, autovalores e suas multiplicidades algébrica e geométrica, na terceira seção tratamos de matrizes simétricas, as quais são o foco de estudo no restante do texto. Não obstante apresentarmos neste capítulo fatos e definições fundamentais, estamos assumindo algum conhecimento de Álgebra Linear, notadamente, os conceitos de espaço vetorial, dependência linear, base e dimensão são usados sem apresentação prévia.

## 1.1 Notações, definições e fatos elementares

Por todo o texto usaremos a notação

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Vamos assumir que as matrizes são sempre quadradas  $n \times n$  a menos que seja mencionado o contrário. Denotamos por  $A = (a_i^j)$  a *matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

cujo valor na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é o número complexo  $a_i^j \in \mathbb{C}$ , para quaisquer  $i, j \in [n]$ . Um *vetor*  $\mathbf{v}$  é uma matriz coluna  $n \times 1$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

e também denotamos matrizes com mais de uma coluna através dos seus vetores coluna; nesse caso a matriz em (1.1) fica escrita como

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n), \text{ com as colunas } \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_1^j \\ a_2^j \\ \vdots \\ a_n^j \end{pmatrix}.$$

Dizemos que a matriz  $A$  é *invertível* se existe uma matriz  $B$ , tal que  $AB = BA = \text{Id}_n$ , onde  $\text{Id}_n$  é a matriz identidade

$$\text{Id}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz  $B$  é chamada *inversa* de  $A$ , é única e denotada por  $A^{-1}$ .

A matriz *transposta* da matriz  $A$  é a matriz

$$A^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix},$$

e a matriz *adjunta* é a matriz

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_1^1} & \overline{a_2^1} & \cdots & \overline{a_n^1} \\ \overline{a_1^2} & \overline{a_2^2} & \cdots & \overline{a_n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_1^n} & \overline{a_2^n} & \cdots & \overline{a_n^n} \end{pmatrix},$$

onde  $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$  é o conjugado de um número complexo  $z$ .

As matrizes  $A$  e  $B$  são *semelhantes*, denotado por  $A \sim B$ , se existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $B = P^{-1}AP$ , onde  $P^{-1}$  é a matriz inversa da matriz  $P$ .

Quando a matriz  $A$  é semelhante a uma matriz *diagonal*

$$\text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

dizemos que  $A$  é *diagonalizável*.

O *traço* da matriz  $A$  é a soma dos elementos da diagonal

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_i^i$$

e o *determinante*

$$\det(A) = \sum_{\sigma} s(\sigma) a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$

onde a soma é sobre toda permutação  $\sigma: [n] \rightarrow [n]$  e  $s(\sigma)$  é o sinal do produto

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i)).$$

Dizemos que uma matriz é *não-negativa* se suas entradas são não-negativas.

No exercício abaixo reunimos uma coleção de fatos a respeito das definições apresentadas acima e que serão úteis mais adiante no texto.

*Exercício 1.* Demonstre as seguintes afirmações

- (i)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
- (ii)  $(AB)^* = B^*A^*$ .
- (iii)  $\det(A^T) = \det(A)$ .
- (iv)  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .
- (v) Se  $A \sim B$  então  $\det(A) = \det(B)$ .
- (vi) Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas então

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B),$$

em que  $\mathbf{0}$  denota a *matriz nula*, isto é, tem todas as entradas iguais a zero.

- (vii)  $\det(A) = \sum_{j=1}^n \text{cof}(a_i^j) a_i^j = \sum_{i=1}^n \text{cof}(a_i^j) a_i^j$ , onde

$$\text{cof}(a_i^j) = (-1)^{i+j} \det(A_i^j) \tag{1.2}$$

e

$$A_i^j = (a_k^\ell)_{k \neq i, \ell \neq j}. \tag{1.3}$$

*Exercício 2* (Fórmula de Binet–Cauchy). Sejam  $A = (a_i^j)$  uma matriz  $n \times m$ ,  $B = (b_i^j)$  uma matriz  $m \times n$  e  $S \subset [m]$  um subconjunto de índices com  $|S| = n$ , para  $m \geq n$ . Denote por  $A^S$  a matriz  $n \times n$  dada por  $(a_i^j)_{j \in S}$  e denote por  $B_S$  a matriz  $n \times n$  dada por  $(b_i^j)_{i \in S}$ . Então

$$\det(AB) = \sum_S \det(A^S) \det(B_S),$$

onde a soma é sobre todo subconjunto de  $n$  índices.

Dada a matriz  $A = (a_i^j)$  e dada uma permutação  $\rho: [n] \rightarrow [n]$ , denotamos por  $A_\rho$  a matriz  $(a_{\rho(i)}^{\rho(j)})$ .

*Exemplo 3.* Para a permutação  $\rho(1) = 3, \rho(3) = 1, \rho(i) = i$  ( $\forall i \neq 1, 3$ ) e a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \text{ temos } A_\rho = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dizemos que a matriz  $A$  é *irredutível* se não existe permutação  $\rho$  tal que

$$A_\rho = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$$

com  $B$  e  $D$  matrizes quadradas. Caso contrário a matriz é *reduzível*, como a matriz  $A$  do Exemplo 3.

*Exercício 4.* Seja  $P$  a matriz obtida da matriz identidade permutando-se somente as linhas da matriz identidade de acordo com  $\rho$ . Mostre que

$$A_\rho = PAP^T. \quad (1.4)$$

Convencionamos

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} & \delta_{2,i} & \cdots & \delta_{n,i} \end{pmatrix}^T, \text{ onde } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (1.5)$$

é o delta de Kronecker. Finalizamos essa seção com o seguinte resultado.

**Teorema 5.** *São equivalentes*

- (i)  $A$  é invertível;
- (ii)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tem uma solução;
- (iii)  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tem apenas a solução trivial  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- (iv) os vetores coluna de  $A$  são linearmente independentes;
- (v)  $\det(A) \neq 0$ .

*Demonstração.* Se  $A$  é invertível então verifica-se que  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  é solução de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  para qualquer vetor  $\mathbf{b}$ . Se  $\mathbf{y}$  satisfaz  $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$  então  $A\mathbf{x} - A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , multiplicando-se ambos os lados por  $A^{-1}$  concluímos que  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . Em particular,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  admite uma única solução e, claramente,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é uma solução.

Por outro lado, se (iii) vale e existe um vetor  $\mathbf{b}$  tal que  $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$  e  $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ , então  $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ , portanto  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ . Até aqui, provamos (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii).

Como  $A\mathbf{x}$  é uma combinação linear dos vetores coluna de  $A$  a solução trivial única significa, por definição, independência linear dos vetores coluna, e vice-versa, portanto (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv).

Se  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tem solução para todo  $\mathbf{b}$  sejam  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  as soluções de  $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$  para cada  $i \in [n]$ , respectivamente. Então

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = \text{Id}_n \quad (1.6)$$

logo  $\det(A)\det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \det(\text{Id}_n) = 1$ , portanto  $\det(A) \neq 0$ .

Para fechar a prova, vamos mostrar que (v)  $\Rightarrow$  (i). Se  $\det(A) \neq 0$  então definimos as matrizes  $C = (\text{cof}(a_i^j)_i^j)$  e  $B$  por

$$b_i^j = \frac{C^T}{\det(A)}. \quad (1.7)$$

Vamos mostrar que  $AC^T = C^T A = \det(A)\text{Id}_n$ , claramente, isso implica que  $B$  é inversa de  $A$ . Escrevemos  $C = (c_i^j)$ ,  $D = AC^T = (d_i^j)$  e  $E = C^T A = (e_i^j)$ . Pelo Exercício 1 (vii)

$$d_i^i = \sum_{k=1}^n a_i^k c_i^k = \det(A) \quad \text{e} \quad e_i^i = \sum_{k=1}^n c_k^i a_k^i = \det(A). \quad (1.8)$$

No caso  $i \neq j$  tome a matriz  $A'$  obtida de  $A$  substituindo-se a linha  $j$  pela linha  $i$ . Então pelo Exercício 1 (vii)

$$d_i^j = \sum_{k=1}^n a_i^k c_i^k = \sum_{k=1}^n a'_i{}^k c_j^k = \det(A') = 0 \quad (1.9)$$

onde a segunda igualdade decorre do fato dos cofatores não serem alterados por modificação na linha  $j$ , a última igualdade decorre do fato de  $A$  ter duas linhas iguais.

Agora, tome a matriz  $A''$  obtida de  $A$  substituindo-se a coluna  $i$  pela coluna  $j$ . Então, de modo análogo temos  $e_i^j = 0$  para  $i \neq j$ .  $\square$

## 1.2 Autovalores e autovetores de matrizes

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  sobre  $\mathbb{C}$ . Dizemos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é *autovalor* de  $A$  se existe um vetor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (1.10)$$

Dizemos que  $\mathbf{v}$  é um *autovetor* associado ao autovalor  $\lambda$ . A equação (1.10) acima pode ser escrita na forma

$$(\lambda \text{Id}_n - A)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

e, pelo Teorema 5, para que sejam admitidas soluções não-nulas a matriz  $\lambda \text{Id}_n - A$  deve ser não-invertível, ou seja,  $\det(\lambda \text{Id}_n - A) = 0$ .

O determinante de  $x \text{Id}_n - A = (b_i^j)$  é

$$\sum_{\sigma} s(\sigma) b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \cdots b_n^{\sigma(n)}$$

e quando  $\sigma$  é a permutação identidade temos o termo

$$(x - a_1^1)(x - a_2^2) \cdots (x - a_n^n)$$

nessa soma, o qual é um polinômio em  $x$  de grau  $n$ ; para as outras permutações temos potência menores de  $x$  e assim  $\det(x \text{Id}_n - A)$  é um polinômio mônico em  $x$  de grau  $n$  denominado *polinômio característico* de  $A$ :

$$p_A(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1} x + c_n. \quad (1.11)$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, toda matriz  $n \times n$  possui  $n$  autovalores complexos, a saber, as  $n$  raízes não necessariamente distintas da equação polinomial  $p_A(x) = 0$ .

**Teorema 6.** *Toda matriz admite um autovalor  $\lambda \in \mathbb{C}$ .*  $\square$

*Exemplo 7.* A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

tem polinômio característico

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2, \quad (1.13)$$

com raízes  $1+i$  e  $1-i$ , que são os autovalores de  $A$ . Os autovetores associados a  $1+i$  são

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}, \quad (1.14)$$

os autovetores associados a  $1-i$  são

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}. \quad (1.15)$$

*Exercício 8.* Mostre que para toda matriz  $A$  com autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , levando em conta as multiplicidades, valem

$$(i) \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$$

$$(ii) \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

*Exercício 9.* Prove que se  $A \sim B$  então  $p_A(x) = p_B(x)$ .

*Exercício 10.* Prove que se  $A = \begin{pmatrix} D & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$  com  $D$  e  $C$  matrizes quadradas, então  $p_A(x) = p_D(x)p_C(x)$ .

*Observação 11.* Se a matriz tem entradas reais e os autovalores são reais, então podemos tomar autovetores com entradas em  $\mathbb{R}$ .

*Exemplo 12.* Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

O polinômio característico  $p_A(x) = (3-x)^2(-1-x)$  admite como raízes 3 e  $-1$  com multiplicidades 2 e 1, respectivamente. Os autovetores reais associados a 3 são

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}. \quad (1.17)$$

Os autovetores associados a  $-1$  são

$$\left\{ \begin{pmatrix} z \\ \frac{5}{4}z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}. \quad (1.18)$$

**Lema 13.** *Autovetores associados a autovalores distintos de uma matriz são linearmente independentes.*

*Demonstração.* Seja  $A$  uma matriz com  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sendo os seus autovalores distintos e  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  os respectivos autovetores. A prova é por contradição.

Tome  $j = \min\{i: \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}\} \text{ é linearmente dependente}\}$ . Então existem números complexos  $x_1, \dots, x_n$  não todos nulos tais que

$$\mathbf{v}_{i+1} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_i \mathbf{v}_i. \quad (1.19)$$

Multiplicando por  $A - \lambda_{i+1} \text{Id}_n$  ambos os lados da igualdade resulta em

$$\lambda_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} - \lambda_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} = \sum_{j=1}^i x_j \lambda_j \mathbf{v}_j - \lambda_{i+1} \sum_{j=1}^i x_j \mathbf{v}_j, \quad (1.20)$$

portanto

$$\sum_{j=1}^i (\lambda_j - \lambda_{i+1}) x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}. \quad (1.21)$$

Logo,  $(\lambda_j - \lambda_{i+1})x_j = 0$  e como o termo  $(\lambda_j - \lambda_{i+1})$  não pode ser nulo, por se tratar de autovalores distintos, tem-se  $x_j = 0$  para todo  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , portanto  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{0}$  contradizendo a definição de autovetor.  $\square$

**Lema 14.** *Uma matriz é diagonalizável se, e somente se, tem  $n$  autovetores linearmente independentes.*

*Demonstração.* Seja  $A$  uma matriz diagonalizável e tome  $P$  invertível e  $D = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  tais que  $A = P^{-1}DP$ .

Como  $P$  é invertível podemos escrever  $P^{-1} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ , onde  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  são linearmente independentes (Teorema 5). Ainda

$$AP^{-1} = (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots, A\mathbf{u}_n) \text{ e } P^{-1}D = (x_1\mathbf{u}_1, x_2\mathbf{u}_2, \dots, x_n\mathbf{u}_n) \quad (1.22)$$

portanto  $A\mathbf{u}_i = x_i\mathbf{u}_i$  para todo  $i \in [n]$ , ou seja, as colunas de  $P^{-1}$  são autovetores linearmente independentes de  $A$ .



Por outro lado, se  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  são  $n$  autovetores linearmente independentes então fazendo  $P = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  temos

$$\begin{aligned} AP &= (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots, A\mathbf{u}_n) = (\lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2, \dots, \lambda_n\mathbf{u}_n) \\ &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = PD, \end{aligned}$$

ou seja,  $A$  é diagonalizável.  $\square$

*Exercício 15.* Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $\rho$  uma permutação sobre  $[n]$ . Prove que

- (i)  $A_\rho$  tem os mesmos autovalores de  $A$  (veja (1.4));
- (ii) se  $\mathbf{v}$  é um autovetor de  $A$  então  $\mathbf{v}_\rho = P\mathbf{v}$  é um autovetor de  $A_\rho$ .

### 1.2.1 Autoespaço e multiplicidades

O conjunto de todas as matrizes  $m \times n$  sobre  $\mathbb{C}$  com a soma de matrizes e multiplicação por escalar natural (multiplicar cada entrada pelo mesmo escalar) define um espaço vetorial que denotamos por  $\mathbb{C}^{m \times n}$ . Agora, se  $\lambda$  é autovalor de  $A$ , então

$$V_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n \times 1} : A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\} \quad (1.23)$$

unido com o vetor nulo é um subespaço vetorial de  $\mathbb{C}^{n \times 1}$  denominado *autoespaço associado a  $\lambda$* .

O seguinte resultado segue do Lema 13.

**Corolário 16.** *A união das bases dos autoespaços associados a autovalores distintos é linearmente independente.*

*Demonstração.* Seja  $A$  uma matriz e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  os autovalores distintos de  $A$ . Definamos  $\{\mathbf{v}_{ij} : j \in d_i\}$  uma base do subespaço  $V_{\lambda_i}$  de dimensão  $d_i$ , para todo  $i \in [k]$ .

Agora, tomemos a combinação linear

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j \in d_i} x_{i,j} \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0} \quad (1.24)$$

e vamos mostrar que os coeficientes são nulos.

Claramente, para cada  $i$  temos que  $\mathbf{u}_i = \sum_{j \in d_i} x_{i,j} \mathbf{v}_{ij}$  é ou um autovetor associado a  $\lambda_i$  ou  $\mathbf{0}$ . Seja  $N \subseteq [k]$  o subconjunto de índices  $i$  tais que  $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ . Se  $N \neq \emptyset$  então

$$\sum_{i \in N} \mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$$

pelo Lema 13, contrariando (1.24). Logo  $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$  para todo  $i$ . De  $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$  temos  $x_{i,j} = 0$  para todo  $j$ , fato que prova o corolário.  $\square$

A *multiplicidade geométrica* do autovalor  $\lambda$ , denotado por  $\text{mg}(\lambda)$ , é a dimensão do autoespaço associado ao autovalor  $\lambda$ , isto é

$$\text{mg}(\lambda) = \dim V_\lambda.$$

A *multiplicidade algébrica* de  $\lambda$ , denotada por  $\text{ma}(\lambda)$ , é a multiplicidade da raiz  $\lambda$  do polinômio característico  $p_A(x)$ .

**Proposição 17.** *Se  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz então*

$$\text{mg}(\lambda) \leq \text{ma}(\lambda).$$

*Demonstração.* Sejam  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda$  autovalor de  $A$  e  $V_\lambda$  o autoespaço associado de dimensão  $d = \text{mg}(\lambda)$ . Vamos mostrar que  $d$  divide  $\text{ma}(\lambda)$ .

Sejam  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$  vetores linearmente independentes em  $V_\lambda$  e formemos

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-d}$$

vetores de uma base de  $\mathbb{C}^{n \times 1}$ .

Definimos a matriz invertível (veja Teorema 5, página 10)

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_d & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_{n-d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & U \end{pmatrix},$$

onde  $V$  é definido pelas colunas  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$  e  $U$  pelas colunas  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-d}$ , portanto existe

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{U} \end{pmatrix}$$

com  $\tilde{V}^T$  dado por  $d$  vetores coluna e  $\tilde{U}^T$  por  $n - d$  colunas tais que

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}V & \tilde{V}U \\ \tilde{U}V & \tilde{U}U \end{pmatrix} = \text{Id}_n,$$

donde tiramos que  $\tilde{V}V = \text{Id}_d$ ,  $\tilde{V}U = \tilde{U}V = \mathbf{0}$  e  $\tilde{U}U = \text{Id}_{n-d}$ . De  $A\mathbf{v}_i = \lambda\mathbf{v}_i$ , para todo  $i \in [d]$ , temos que  $A$  é semelhante à matriz  $B$  dada por

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{U} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AV \\ AU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}AV & \tilde{V}AU \\ \tilde{U}AV & \tilde{U}AU \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\tilde{V}V & \tilde{V}AU \\ \lambda\tilde{U}V & \tilde{U}AU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\text{Id}_d & \tilde{V}AU \\ \mathbf{0} & \tilde{U}AU \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo Exercício 10

$$p_B(x) = \det((x - \lambda)\text{Id}_d) \det(x\text{Id}_{n-d} - \tilde{U}AU) = (x - \lambda)^d \det(x\text{Id}_{n-d} - \tilde{U}AU),$$

portanto,  $d$  divide  $\text{ma}(\lambda)$ .  $\square$

Mais pode ser dito a respeito das multiplicidades dos autovalores quando a matriz em questão é diagonalizável.

**Teorema 18.** *Se uma matriz  $A$  é diagonalizável, então  $\text{ma}(\lambda) = \text{mg}(\lambda)$  para todo autovalor  $\lambda$  de  $A$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A$  uma matriz diagonalizável e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  seus autovalores distintos com multiplicidades  $m_1, \dots, m_k$ , respectivamente, e sejam  $d_1, \dots, d_k$  as respectivas multiplicidades geométricas. Como  $A$  é diagonalizável a união das bases dos autoespaços tem  $n$  vetores (Lema 14 e Corolário 16), ou seja,

$$n = d_1 + \dots + d_k \leq m_1 + \dots + m_k = n.$$

Logo, vale a igualdade e temos  $(m_1 - d_1) + \dots + (m_k - d_k) = 0$ . Pelo resultado anterior cada parcela é positiva, logo vale  $m_i = d_i$  para todo  $i$ .  $\square$

### 1.3 Matrizes simétricas

Dizemos que a matriz  $A$  é *auto-adjunta* (ou *hermitinana*) se

$$A = A^*.$$

Começaremos esta seção pelo resultado que estabelece que os autovalores de matrizes auto-adjuntas são reais.

**Teorema 19.** *Os autovalores de uma matriz auto-adjunta são reais.*

*Demonstração.* Seja  $\lambda$  um autovalor da matriz auto-adjunta  $A$  e  $\mathbf{v}$  um autovetor associado. Por um lado temos

$$\mathbf{v}^* A \mathbf{v} = \mathbf{v}^* \lambda \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^* \mathbf{v},$$

e por outro, (Exercício 1, página 9)

$$\mathbf{v}^* A \mathbf{v} = (A^* \mathbf{v})^* \mathbf{v} = (A \mathbf{v})^* \mathbf{v} = (\lambda \mathbf{v})^* \mathbf{v} = \bar{\lambda} \mathbf{v}^* \mathbf{v}.$$

Portanto,  $\bar{\lambda} = \lambda$ , ou seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Chamamos uma matriz real e auto-adjunta de *simétrica*, em outras palavras, a matriz  $A$  é *simétrica* se

$$A = A^T.$$

Por exemplo, a matriz de adjacências de um grafo  $G$ , denotada por  $A(G)$ , e definida por  $a_i^j = 1$  se  $\{i, j\}$  é uma aresta de  $G$  e  $a_i^j = 0$  caso contrário, é uma matriz simétrica.

*No que segue, abandonamos os números complexos e trabalharemos apenas com o caso real (veja a observação 11) consideraremos matrizes simétricas reais, seus autovalores reais e os autovetores reais associados aos autovetores.*

Em particular, notemos que há um isomorfismo canônico de espaços vetoriais  $\mathbb{R}^{n \times 1} \cong \mathbb{R}^n$  e no que segue identificaremos  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  com o  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.3.1 Ortogonalidade dos autovetores

Denotamos por  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  o produto escalar dos vetores (reais)  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  definido por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n, \quad (1.25)$$

e definimos a *norma* do vetor  $\mathbf{v}$  como  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ .

*Exercício 20.* Verifique que o produto escalar tem as seguintes propriedades:

1.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ ;
2.  $\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  ( $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ );
3.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ ;
4.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ;
5.  $\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  ( $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ );
6.  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ ;
7.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .
8.  $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, B\mathbf{v} \rangle$  para todos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  se e somente se  $A = B^T$ .

**Proposição 21** (Desigualdade de Cauchy–Schwarz). *Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são dois vetores quaisquer então*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2. \quad (1.26)$$

*Demonstração.* Começamos considerando  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vetores linearmente independentes (pois se fossem linearmente dependentes vale a igualdade na equação acima). Para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos:

$$\|x\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = x^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2x \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0,$$

portanto o discriminante  $(2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  deve ser negativo, donde segue que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 < \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ .  $\square$

**Corolário 22** (Desigualdade triangular). *Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são dois vetores quaisquer então*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \quad (1.27)$$

*Demonstração.* Segue da definição de norma e da desigualdade de Cauchy–Schwarz que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (1.28)$$

e o lado direito é  $(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$ .  $\square$

Observemos que de (1.28)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$  se, e somente se,  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ . Essa fato motiva a seguinte definição. Se  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$  então dizemos que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são *ortogonais*, para quaisquer  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  diferentes de  $\mathbf{0}$ . Para  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  ortogonais escrevemos  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ .

Vimos na seção anterior que autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. Como vetores ortogonais são linearmente independentes (verifique), mais pode ser dito no caso de matrizes simétricas.

**Teorema 23.** *Se  $A$  é uma matriz simétrica então autovetores associados a autovalores distintos de  $A$  são ortogonais.*

*Demonstração.* Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  autovalores distintos com os respectivos autovetores associados  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Vamos mostrar que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Usando o Exercício 20

$$\lambda_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda_2 \mathbf{v} \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

logo, temos  $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$  e como  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , pois são diferentes, temos  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

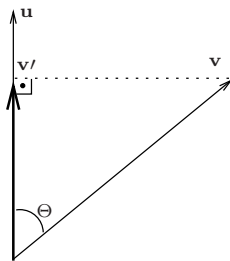


Figura 1.1: Projeção ortogonal de  $\mathbf{v}$  sobre  $\mathbf{u}$ .

### 1.3.2 Projeção ortogonal e Ortogonalização

Considere dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  não nulos. Vamos denotar por  $\mathbf{v}'$  a *projeção ortogonal* de  $\mathbf{v}$  sobre  $\mathbf{u}$ , ou seja,  $\mathbf{v}'$  é um múltiplo escalar do vetor  $\mathbf{u}$ , digamos  $\mathbf{v}' = \alpha \mathbf{u}$ , tal que  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ , ou seja,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}' \rangle$ , logo  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ , portanto

$$\mathbf{v}' = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}.$$

Essa idéia pode ser generalizada e a partir de um conjunto qualquer  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$  de vetores linearmente independentes podemos obter um conjunto de vetores ortogonais  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$  que gera o mesmo subespaço gerados pelos  $\mathbf{u}_i$ 's da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle} \mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_m &= \mathbf{u}_m - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_m \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_m \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle} \mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\langle \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_m \rangle}{\langle \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_{m-1} \rangle} \mathbf{u}_{m-1} \end{aligned}$$

que é conhecido como *Processo de Ortogonalização de Gram—Schmidt*. Ainda, podemos normalizar os vetores  $\mathbf{v}_i$ 's de modo a formarmos uma base de vetores unitários dois-a-dois ortogonais chamada de base *ortonormal*.

*Exercício 24.* Sejam  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  vetores ortonormais e  $W$  o subespaço de  $\mathbb{R}^{n \times 1}$  gerado por esses vetores. Prove que

$$(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \dots + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{x}$$

é a projeção ortogonal de  $\mathbf{x}$  sobre  $W$ .

### 1.3.3 Matrizes ortogonais

Uma matriz é dita *ortogonal* se suas colunas formam um conjunto de vetores ortonormais. Equivalentemente,  $Q$  é ortogonal se  $Q^T Q = \text{Id}_n$ . Dessa forma, para uma matriz ortogonal a transposta e a inversa são iguais.

*Exercício 25.* Mostre que para  $Q$  ortogonal vale

(i)  $\|Q\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ .

(ii)  $\langle Q\mathbf{u}, Q\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .

(iii) Produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

(iv) Se  $\lambda$  é um autovalor de  $Q$  então  $|\lambda| = 1$ .

### Comentários adicionais e referências bibliográficas

Os temas e resultados que são tratados nas seções 1.1, 1.2 e 1.3 deste capítulo podem ser encontrados na maioria dos textos que contêm uma introdução da Álgebra Linear, por exemplo, [26, 15].





# TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Apresentaremos neste capítulo cinco teoremas sobre Matrizes Simétricas. O primeiro resultado que estudamos é o Teorema Espectral que diz que qualquer matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável. Os próximos dois resultados que apresentamos são o Princípio de Rayleigh e o Teorema Minimax de Courant-Fischer, esses são princípios variacionais que caracterizam os autovalores de matrizes simétricas como valores máximos de uma forma quadrática restrita a esfera unitária. Os dois últimos teoremas são o Teorema do Entrelaçamento devido a Cauchy e o Teorema de Perron–Frobenius para matrizes simétricas e não-negativas. Estes teoremas formam um conjunto de ferramentas para os capítulos adiante.

## 2.1 Teorema Espectral para matrizes reais

O Teorema Espectral, em uma de suas formas, diz o seguinte.

**Teorema 26** (Teorema Espectral). *Se  $A$  é uma matriz simétrica com autovalores (reais)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , então existe uma matriz ortogonal  $Q$  tal que*

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

*Demonstração.* A prova é por indução na dimensão da matriz  $A$ . A base da indução para  $n = 1$  é deixada como exercício.

Agora, seja  $\lambda_1$  um autovalor de  $A$  e  $\mathbf{u}_1$  um autovetor associado. Sejam  $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  vetores tais que  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  são linearmente independentes. Ortonormalizamos esses vetores usando o Processo de Gram–Schmidt e denotamos o resultado obtido por  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n$ .

Claramente,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 / \|\mathbf{u}_1\|$  é um autovetor de  $A$ . Agora, denotamos por  $Q_1$  a matriz

$$Q_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

e denotamos por  $B$  a matriz

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} A (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} (\lambda_1 \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n).$$

Pela ortogonalidade dos vetores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Como  $B^T = (Q_1^T A Q_1)^T = Q_1^T A Q_1 = B$ , a matriz é simétrica, conseqüentemente,  $A_1$  é simétrica e pela hipótese indutiva existe uma matriz ortogonal  $Q_2$  tal que

$$Q_2^T A_1 Q_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$$

com  $\mu_i$  autovalor de  $A_1$  para todo  $i \in [n-1]$ .

A partir de  $Q_2$  formamos a matriz

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

que é ortogonal, portanto,  $Q_1 Q_3$  é ortogonal (Exercício 25, página 21). Além disso, a matriz  $A$  é semelhante à matriz

$$(Q_1 Q_3)^T A (Q_1 Q_3) = Q_3^T (Q_1^T A Q_1) Q_3 = Q_3^T B Q_3 = \text{diag}(\lambda_1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}).$$

o que prova que  $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$  são autovalores de  $A$ , pois matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores (Exercício 9, página 13). Tomamos  $Q = Q_1 Q_3$  e o teorema está provado.  $\square$

O Teorema Espectral pode ser reescrito da seguinte forma, possivelmente a formulação mais conhecida.

**Teorema 27** (Teorema Espectral). *Se  $A$  é uma matriz simétrica então existe uma base ortonormal do  $\mathbb{R}^n$  formada por autovetores de  $A$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $A$  e tome a matriz ortogonal  $Q = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$  tal que  $Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  dada pelo teorema acima. De  $Q^T = Q^{-1}$  temos  $AQ = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e tomando a igualdade das colunas de cada lado da igualdade concluímos que  $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ , para todo  $i$ , portanto o teorema segue de  $Q$  ser ortogonal.  $\square$

*Exercício 28.* Prove a recíproca do Teorema 27.

*Exercício 29.* Deduza o Teorema 26 a partir do Teorema 27.

**Corolário 30** (Decomposição espectral de matrizes simétricas). *Se  $A$  é uma matriz simétrica e  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  autovetores ortonormais de  $A$ , então*

$$A = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T. \quad (2.1)$$

*Demonstração.* Exercício, mostre que a afirmação é consequência do Teorema 26.  $\square$

## 2.2 Princípio de Rayleigh

Seja  $A$  uma matriz simétrica,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  seus autovalores reais,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  autovetores ortonormais de  $A$  tais que  $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ ,  $Q = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n)$  matriz ortogonal e  $D$  a matriz  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Denotamos por  $q_A$  a *forma quadrática* dada por

$$q_A(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

e observamos que  $q_A(\mathbf{v}_i) = \lambda_i$ , portanto,  $q_A(\mathbf{v}_1) \geq q_A(\mathbf{v}_2) \geq \dots \geq q_A(\mathbf{v}_n)$ . Um problema sugerido naturalmente é determinar os valores máximo e mínimo de  $q_A$  restrita a *esfera*

$$S = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

De  $A = QDQ^T$  temos, tomando  $\mathbf{y} = Q^T \mathbf{x}$ , que

$$q_A(\mathbf{x}) = q_D(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_1 \|\mathbf{y}\|^2 = \lambda_1 \quad (2.2)$$

pois  $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| = 1$  (veja Exercício 25, página 21). Analogamente, temos  $q_A(\mathbf{x}) \geq \lambda_n$  para todo  $\mathbf{x} \in S$ , ou seja

$$\lambda_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad \text{e} \quad \lambda_n = \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle. \quad (2.3)$$

Notemos que o valor máximo e o valor mínimo de  $q_A(\mathbf{x})$  na esfera é atingido quando  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  e quando  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_n$ , respectivamente, pois  $q_A(\mathbf{v}_i) = q_D(\mathbf{e}_i) = \lambda_i$  para todo  $i$ .

A recíproca da afirmação anterior vale, isto é, se  $\mathbf{v}$  é ponto de máximo de  $q_A(\mathbf{x})$  então  $\mathbf{v}$  é autovetor associado a  $\lambda_1$  ou, se  $\mathbf{v}$  é ponto de mínimo, então é autovetor associado a  $\lambda_n$ .

**Proposição 31.** *Seja  $A$  uma matriz simétrica com autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Se  $q_A(\mathbf{v})$  é um valor extremo de  $q_A$  em  $S$ , então  $\mathbf{v}$  é um autovetor de  $A$ . Ainda, se  $q_A(\mathbf{v})$  é valor máximo então  $\mathbf{v}$  está associado a  $\lambda_1$  e se  $q_A(\mathbf{v})$  é mínimo então  $\mathbf{v}$  está associado a  $\lambda_n$ .*

*Demonstração.* Provaremos esse fato usando Multiplicadores de Lagrange. Se  $\mathbf{v}$  é um ponto onde  $q_A(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} a_i^j x_i x_j$  restrito a  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1$  assume valor extremo, então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $j \in [n]$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} q_A(\mathbf{v}) = \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - 1).$$

ou seja

$$\sum_i a_i^j v_i = \lambda v_j,$$

donde segue que se  $q_A(\mathbf{v})$  é um valor extremo então  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Da discussão prévia temos que se  $\mathbf{v}$  é ponto de máximo da forma quadrática temos  $\lambda = \lambda_1$ , analogamente, se  $\mathbf{v}$  é ponto de mínimo então  $\lambda = \lambda_n$ .  $\square$

Podemos generalizar a equação (2.3) no seguinte sentido.

**Lema 32.** *Seja  $U$  subespaço do  $\mathbb{R}^n$  dado por todos os vetores que podem ser escritos como combinação linear de  $\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_s$ , então*

$$\lambda_s \leq q_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_r, \text{ para todo } \mathbf{x} \in U \cap S \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Se  $x \in U$  então  $Q^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{x} \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_s, \mathbf{x} \rangle & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$ , assim para  $\mathbf{x} \in U \cap S$

$$q_A(\mathbf{x}) = q_D(Q^T \mathbf{x}) = \lambda_r \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{x} \rangle^2 + \dots + \lambda_s \langle \mathbf{v}_s, \mathbf{x} \rangle^2 \leq \lambda_r \sum_{i=r}^s \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{x} \rangle^2 = \lambda_r$$

e, de modo análogo,  $q_A(\mathbf{x}) \geq \lambda_s$ .  $\square$

Equivalentemente, podemos considerar o *quociente de Rayleigh*; é a função definida para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  por

$$R_A(\mathbf{x}) = \frac{q_A(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (2.5)$$

e é fácil verificar que para todo  $\mathbf{x}$  da forma  $\sum_{i=r}^s a_i \mathbf{v}_i$  e não nulo

$$\lambda_r \leq R_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_s. \quad (2.6)$$

**Teorema 33** (Princípio de Rayleigh). *Seja  $A$  matriz simétrica,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  autovalores de  $A$ , e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  os respectivos autovetores ortonormais. Então*

$$\lambda_i = \max \{ R_A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_j (1 \leq j < i) \}. \quad (2.7)$$

*Demonstração.* Basta notar que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}_j (1 \leq j < i)$  é da forma  $\sum_{i=i}^n a_i \mathbf{v}_i$ , portanto  $R_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_i$ , ademais  $R_A(\mathbf{v}_i) = \lambda_i$ .  $\square$

*Exercício 34.* Prove que sob as hipóteses do teorema acima

$$\lambda_i = \min \{ R_A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_j (i < j \leq n) \}. \quad (2.8)$$

*Exercício 35.* Mostre que na matriz não-simétrica  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  não valem as igualdades de (2.3) para qualquer  $a > 1$ .

*Exercício 36.* Seja  $M$  uma matriz quadrada e não-simétrica. Mostre que se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores unitários que maximizam  $\langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  então  $M\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}$ . Mostre também que qualquer autovalor  $\lambda$  de  $M$  satisfaz

$$\min_{\|\mathbf{x}\|=1} |\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle| \leq |\lambda| \leq \max_{\|\mathbf{x}\|=1} |\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|.$$

## Desigualdades de Weyl

Considere três matrizes simétricas:  $M$  com autovalores  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ ,  $N$  com autovalores  $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n$  e  $P$  com autovalores  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$  tais que  $M = N + P$ .

Para todo vetor  $\mathbf{x}$  vale que  $\langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle N\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle P\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  por linearidade do produto escalar. Se  $\|\mathbf{x}\| = 1$  então temos  $\rho_n \leq \langle P\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq \rho_1$  e, portanto,

$$\langle N\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \rho_n \leq \langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle N\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \rho_1 \quad (2.9)$$

e se  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  são autovetores ortonormais de  $M$  então

$$\max_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}}} \langle N\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \rho_n \leq \max_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}}} \langle M\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq \max_{\substack{\|\mathbf{x}\|=1 \\ \mathbf{x} \perp \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}}} \langle N\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \rho_1$$

o que prova o seguinte resultado.

**Lema 37.** *Se  $M$ ,  $N$  e  $P$  são como enunciado acima então*

$$\eta_i + \rho_{\min} \leq \mu_i \leq \eta_i + \rho_{\max} \quad (2.10)$$

para todo  $i \in [n]$ . □

Agora, defina a *norma de uma matriz*  $A$  por

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|. \quad (2.11)$$

Claramente  $\|A\| \geq |\lambda|$  para todo  $\lambda$  autovalor de  $A$ . Tome  $P = M - N$ . Aplicando o lema anterior temos  $\rho_n \leq \mu_i - \eta_i \leq \rho_1$  para todo  $i \in [n]$ . Como  $\rho_1 \leq \|P\|$  e  $\rho_n \geq -\|P\|$  deduzimos o seguinte resuntado.

**Teorema 38** (Teorema de Weyl). *Se  $M$  e  $N$  são matrizes simétricas com autovalores  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_n$  e  $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \eta_n$ , respectivamente, então*

$$-\|M - N\| \leq \mu_i - \eta_i \leq \|M - N\| \quad (2.12)$$

para todo  $i \in [n]$ . □

*Exercício 39.* Mostre as estimativas

$$\|P\| \leq \sqrt{\sum_i \sum_j |p_{i,j}|^2} \quad \text{e} \quad \|P\| \leq \max_i \sum_j |p_{i,j}|. \quad (2.13)$$

## 2.3 Teorema minimax de Courant–Fischer

Por toda esta seção  $A$  denota uma matriz simétrica,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  são seus autovalores com os autovetores ortonormais associados  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ , respectivamente, e a matriz ortogonal  $Q = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ,  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e escrevemos  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  para um subespaço vetorial qualquer do  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 40** (Teorema de Courant–Fischer). *Para todo  $i \in [n]$  vale que*

$$\lambda_i = \max_{\substack{\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \\ \dim \mathcal{U} = i}} \min_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} R_A(\mathbf{x}). \quad (2.14)$$

*Demonstração.* Fixemos  $i$  e definamos  $\mathcal{V}_i$  como o conjunto de todos os vetores que podem ser escritos como combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i$  e  $\mathcal{V}_i^\perp$  como o conjunto de todos os vetores que podem ser escritos como combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ .

Em todo  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\dim \mathcal{U} = i$  existe  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  tal que  $R_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_i$ , basta notar que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_{i-1}^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$  pois  $\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V}_{i-1}^\perp = (n - i + 1) + i = n + 1$  e como  $\mathbf{x} = \alpha_i \mathbf{v}_i + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}_{i-1}^\perp$ , pela equação (2.6)  $R_A(\mathbf{x}) \leq \lambda_i$  portanto

$$\max_{\substack{\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \\ \dim \mathcal{U} = i}} \left( \min_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} R_A(\mathbf{x}) \right) \leq \lambda_i.$$

Fazendo  $\mathcal{U} = \mathcal{V}_i$  temos  $\min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} R_A(\mathbf{x}) = R_A(\mathbf{v}_i) = \lambda_i$ , portanto

$$\max_{\substack{\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \\ \dim \mathcal{U} = i}} \left( \min_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} R_A(\mathbf{x}) \right) = \lambda_i.$$

□

A prova do teorema de Courant–Fischer na seguinte versão deixamos como exercício.

**Teorema 41** (Teorema de Courant–Fischer). *Para todo  $i \in [n]$  vale que*

$$\lambda_{n-i+1} = \min_{\mathcal{U}_i} \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_i \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} R_A(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

*Exercício 42.* Sejam  $A$  uma matriz simétrica com autovalores  $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$  e  $B$  matriz simétrica com autovalores  $\lambda_1(B) \geq \lambda_2(B) \geq \dots \geq \lambda_n(B)$ . Mostre que dado  $\varepsilon > 0$ ,

- (i) se  $|\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle B\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle| \leq \varepsilon$  para todo vetor  $\mathbf{x}$  com  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , então  $|\lambda_j(A) - \lambda_j(B)| \leq \varepsilon$ ;
- (ii) se  $A = B + \varepsilon C$  com  $B$  e  $C$  (simétrica) independentes de  $\varepsilon$ , então existe uma constante positiva  $c = c(\varepsilon)$  tal que  $|\lambda_j(A) - \lambda_j(B)| \leq c\varepsilon$ ;
- (iii) se  $C$  é uma matriz simétrica com autovalores positivos e  $A = B + C$ , então  $\lambda_j(A) > \lambda_j(B)$ .

## 2.4 Teorema do entrelaçamento de Cauchy

Lembrando a definição dada em (1.3), página 9, denotamos por  $A_k^k$  a matriz obtida de  $A$  quando removemos a  $k$ -ésima linha e a  $k$ -ésima coluna. Dessa forma, se  $A$  é simétrica então  $A_k^k$  é simétrica, portanto, seus autovalores são reais e comparáveis com os da matriz  $A$ .

Nesta seção, veremos uma estreita relação entre os autovalores de  $A$  e de  $A_k^k$ . Para simplificar a notação vamos denotar genericamente por  $\mathcal{U}_j$  um subespaço de dimensão  $j$  menos o vetor  $\mathbf{0}$ . Pelo Teorema 40

$$\lambda_j(A_1^1) = \max_{\mathcal{U}_j} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_j} \frac{\langle A_1^1 \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

onde  $\mathcal{U}_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ; tomamos  $\mathcal{U}_j' \subset \mathbb{R}^n$  dado pelos vetores  $\mathbf{x}'$  tais que

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \text{ em que } \mathbf{x} \in \mathcal{U}_j,$$

assim

$$\max_{\mathcal{U}_j} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_j} \frac{\langle A_1^1 \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \max_{\mathcal{U}_j'} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_j'} \frac{\langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \leq \max_{\mathcal{U}_j} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_j} \frac{\langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \lambda_j(A).$$

Analogamente, agora usando o Teorema 41, podemos provar que  $\lambda_j(A_1^1) \geq \lambda_{j+1}(A)$

$$\min_{\mathcal{U}_{n-j}} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_{n-j}} \frac{\langle A_1^1 \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \min_{\mathcal{U}_{n-j}'} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_{n-j}'} \frac{\langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq \min_{\mathcal{U}_{n-j}} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}_{n-j}} \frac{\langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

o lado esquerdo é  $\lambda_j(A_1^1)$  e o direito  $\lambda_{j+1}(A)$ . Logo os autovalores das duas matrizes *entrelaçam*

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_1(A_1^1) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_j(A) \geq \lambda_j(A_1^1) \geq \lambda_{j+1}(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A).$$

Não é difícil mostrar que o Teorema do entrelaçamento vale para  $A_k^k$ , para qualquer  $k \in [n]$ . Esse fato é uma consequência imediata do Exercício 15, página 15. Entretanto, vale uma versão ainda mais geral, se  $I \subset [n]$  é um conjunto de índices e  $A_I^I$  é a matriz obtida removendo-se de  $A$  as linhas e colunas indexadas por  $I$ , então os autovalores dessas duas matrizes entrelaçam.



**Teorema 43** (Teorema do Entrelaçamento). *Seja  $A$  uma matriz simétrica com autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  e  $S$  uma matriz ortogonal  $n \times m$ . Sejam  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$  os autovalores de  $B = S^T A S$ . Então*

$$\lambda_j \geq \mu_j \geq \lambda_{n-m+j} \text{ para todo } j \in [m].$$

*Demonstração.* Fixemos  $j \in [m]$ . Sejam  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$  autovetores ortonormais de  $B$  e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  autovetores ortonormais de  $A$ . Podemos escolher um vetor não-nulo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  ortogonal a  $\mathbf{u}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+2}, \dots, \mathbf{u}_m$  e ortogonal a  $S^T \mathbf{v}_1, S^T \mathbf{v}_2, \dots, S^T \mathbf{v}_{j-1}$ . Como  $S$  é uma matriz ortogonal, preserva produto interno, portanto,  $S\mathbf{x}$  é ortogonal a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$  e

$$\lambda_j = \max_{\substack{\mathbf{z} \perp \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1} \\ \mathbf{z} \neq \mathbf{0}}} R_A(\mathbf{z}) \geq R_A(S\mathbf{x}) = \frac{(S\mathbf{x})^T A S\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^T B \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \geq \min_{\substack{\mathbf{z} \perp \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_m \\ \mathbf{z} \neq \mathbf{0}}} R_B(\mathbf{x}) = \mu_j.$$

Do mesmo modo, podemos escolher um vetor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  ortogonal a  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{j-1}$  e ortogonal a  $S^T \mathbf{v}_{n-m+j+1}, S^T \mathbf{v}_{n-m+j+2}, \dots, S^T \mathbf{v}_n$ , portanto o vetor  $S\mathbf{x}$  é ortogonal a  $\mathbf{v}_{n-m+j+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  que resulta em

$$\mu_j \geq R_B(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T B \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{(S\mathbf{x})^T A S\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = R_A(S\mathbf{x}) \geq \lambda_{n-m+j} \quad (2.16)$$

onde a última desigualdade nas equações acima seguem de (2.8).  $\square$

## 2.5 Teorema de Perron–Frobenius para matrizes não-negativas

**Teorema 44** (Teorema de Perron–Frobenius). *Seja  $A$  uma matriz simétrica, não-negativa, irredutível e com autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Então*

1.  $\lambda_1 > 0$  e associado a esse autovalor existe um autovetor positivo;

2.  $\lambda_1 > \lambda_2$ ;

3.  $|\lambda_i| \leq \lambda_1$  para todo  $i \in [n]$ ;

4.  $\lambda$  e  $-\lambda$  são autovalores de  $A$  se, e só se, existe  $\rho$  tal que  $A_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ B^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  com as matrizes nulas sendo quadradas.

*Demonstração.* Para provar (1) observamos que de  $A$  não-negativa obtemos  $\text{tr}(A) \geq 0$ . Pelo Exercício 8, página 13,  $\text{tr}(A) = \sum_i \lambda_i$ , logo  $\lambda_1 \geq 0$ . Agora vamos mostrar que há autovetor  $\mathbf{v}$  associado a  $\lambda_1$  positivo e, em seguida, que  $\lambda_1$  é positivo.

Seja  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  um autovetor unitário associado a  $\lambda_1$ . Assim, usando (2.3) (página 25)

$$|\lambda_1| = |\mathbf{u}^T A \mathbf{u}| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i u_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} |u_i| |u_j| \leq \lambda_1 \quad (2.17)$$

onde a última desigualdade segue de  $\mathbf{v} = (|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|)$  unitário. Como  $|\lambda_1| = \lambda_1$  vale a igualdade na equação acima e pela Proposição 31, página 26,  $\mathbf{v}$  é um autovetor associado a  $\lambda_1$ , não-negativo e unitário. Agora, suponha que existam coordenadas nulas em  $\mathbf{v}$ . Seja  $\rho$  uma permutação tal que  $|u_{\rho(i)}| > 0$  para todo  $i \leq m$  e  $|u_{\rho(i)}| = 0$  para todo  $i > m$ . Escrevendo

$$A_\rho = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ com } \mathbf{u}' \text{ positivo}$$

temos então

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{u}' \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

donde concluímos que  $D = \mathbf{0}$ , , um absurdo pois  $A$  é uma matriz irredutível.

Com isso estabelecemos  $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ . Observamos que supondo  $\lambda_1 = 0$  temos, da mesmo forma, que  $D = \mathbf{0}$  o que contraria o fato de  $A$  ser irredutível, logo esse autovalor é positivo.

Para provar (2) supomos que  $\text{mg}(\lambda_1) \geq 2$  e chegaremos a uma contradição. Antes, lembremos que  $\text{ma}(\lambda_1) = \text{mg}(\lambda_1)$  pois a matriz é simétrica (Teorema 18, página 17).

Sejam  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^T$  e  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^T$  dois autovetores ortonormais associados a  $\lambda_1$  e definimos os autovetores associados a  $\lambda_1$

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1 + |u_1| \\ u_2 + |u_2| \\ \vdots \\ u_n + |u_n| \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v_1 + |v_1| \\ v_2 + |v_2| \\ \vdots \\ v_n + |v_n| \end{pmatrix}.$$

Claramente  $u_i + |u_i| \geq 0$  para todo  $i \in [n]$ , portanto,  $u_i + |u_i| > 0$ , caso contrário, usando a mesma estratégia do item (1) e, como em (2.18), concluiríamos que a matriz

seria redutível. Analogamente, temos  $v_i + |v_i| > 0$  para todo  $i \in [n]$ . Dessa forma, temos  $u_i, v_i > 0$ , para todo  $i \in [n]$ , mas os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ortogonais, o que é uma contradição. Assim  $\text{mg}(\lambda_1) = 1$  e  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Para o item (3) do enunciado,  $|\lambda_i| \leq \lambda_1$ , basta notarmos que se  $\mathbf{v}_i$  é um autovetor unitário de  $\lambda_i$  então, pelo Princípio de Rayleigh (Teorema 33, página 27)

$$|\lambda_i| = |\mathbf{v}_i^T A \mathbf{v}_i| = \left| \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_k^\ell v_k v_\ell \right| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_k^\ell |v_k| |v_\ell| \leq \lambda_1.$$

Finalmente demonstraremos (4), a última afirmação do teorema. Sejam  $\lambda$  um autovalor de  $A$  e  $\mathbf{v}$  um autovetor associado e vamos mostrar que  $-\lambda$  um autovalor de  $A$ . Primeiro, suponha que existe uma permutação  $\rho$  tal que

$$A_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ B^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Escrevemos  $\mathbf{v}_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{v}'' \end{pmatrix}$ , onde  $\mathbf{v}'$  tem a mesma dimensão da matriz  $\mathbf{0}$  superior esquerda, logo  $A_\rho \mathbf{v}_\rho = \lambda \mathbf{v}_\rho$  e decorre

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ B^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{v}'' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{v}'' \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} B\mathbf{v}'' \\ B^T\mathbf{v}' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{v}'' \end{pmatrix} \iff \\ \begin{pmatrix} -B\mathbf{v}'' \\ B^T\mathbf{v}' \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ -\mathbf{v}'' \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ B^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ -\mathbf{v}'' \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ -\mathbf{v}'' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ou seja,  $-\lambda$  autovalor de  $A_\rho$ , portanto é autovalor de  $A$  (Exercício 15, página 15). Agora nos resta provar a recíproca dessa afirmação. Suponha que  $-\lambda_1$  é autovalor e seja  $\mathbf{v}$  um autovetor unitário de  $-\lambda_1$ . Como

$$\lambda_1 = |-\lambda_1| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^j v_i v_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^j |v_i| |v_j| \leq \lambda_1$$

temos que  $\mathbf{u} = (|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|)^T$  é autovetor de  $\lambda_1$  (com  $|v_i| \neq 0$ ). Seja  $\rho$  uma permutação tal que  $\mathbf{v}_\rho = (v_{\rho(1)}, v_{\rho(2)}, \dots, v_{\rho(n)})^T$  com  $v_{\rho(i)} > 0$  para todo  $i \leq m$  e  $v_{\rho(i)} < 0$  para todo  $i > m$ . Escrevemos

$$\mathbf{u}_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{v}'' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ -\mathbf{v}'' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_\rho = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}.$$

Com essa notação

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{v}'' \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{v}'' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} B\mathbf{v}' + C\mathbf{v}'' \\ D\mathbf{v}' + E\mathbf{v}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{v}' \\ \lambda_1 \mathbf{v}'' \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ -\mathbf{v}'' \end{pmatrix} = -\lambda_1 \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ -\mathbf{v}'' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} B\mathbf{v}' - C\mathbf{v}'' \\ D\mathbf{v}' - E\mathbf{v}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \mathbf{v}' \\ \lambda_1 \mathbf{v}'' \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{cases} B\mathbf{v}' + C\mathbf{v}'' = \lambda_1 \mathbf{v}' \\ B\mathbf{v}' - C\mathbf{v}'' = -\lambda_1 \mathbf{v}' \end{cases} \quad (2.21)$$

e

$$\begin{cases} D\mathbf{v}' + E\mathbf{v}'' = \lambda_1 \mathbf{v}'' \\ D\mathbf{v}' - E\mathbf{v}'' = \lambda_1 \mathbf{v}'' \end{cases} \quad (2.22)$$

Como a matriz é não-negativa e  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{v}''$  são positivos temos em (2.21) que  $B\mathbf{v}' = \mathbf{0}$  implica em  $B = \mathbf{0}$ . Analogamente, de (2.22) temos que  $E = \mathbf{0}$  logo

$$A_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & C \\ D & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Como a matriz é simétrica,  $D = C^T$ . □

## Comentários adicionais e referências bibliográficas

Vários dos resultados estudados aqui valem em uma forma mais geral com poucas alterações, entretanto optamos pela apresentação destes teoremas numa versão que esteja mais perto da forma que serão aplicados. Os temas e resultados que são tratados nas seções iniciais, 1.1, 1.2 e 1.3, podem ser encontrados na maioria dos textos que contêm uma introdução da Álgebra Linear, por exemplo, [26, 16]. Para saber mais sobre o Teorema Espectral veja [26, 16, 2], para o Princípio de Rayleigh e o teorema de Courant-Fischer veja [15, 11], para o Teorema do Entrelaçamento e o Teorema de Perron-Frobenius para matrizes irredutíveis positivas veja [11], a demonstração do Teorema de Perron-Frobenius apresentada aqui é de [22]. Multiplicadores de Lagrange, usado na prova da Proposição 31, pode ser encontrado em [ ].

# INTRODUÇÃO À TEORIA ESPECTRAL DE GRAFOS

Os resultados que apresentaremos neste capítulo relacionam a matriz de adjacências de um grafo e seu espectro com parâmetros e aspectos estruturais como grau dos vértices, diâmetro, subgrafos, subgrafos específicos como passeios, caminhos e circuitos, conectividade. Também veremos algumas propriedades espectrais das árvores e dos grafos bipartidos. Esses temas são tratados na primeira seção. Na segunda seção estudamos o espectro laplaciano de grafos com ênfase somente nos resultados elementares e nos resultados clássicos desse tema, como o famoso Teorema de Kirchhoff para o número de árvores geradoras e a fórmula de Cayley para o número de árvores com  $n$  vértices.

## 3.1 Matriz de adjacências

Um *grafo* é definido por um par ordenado de conjuntos  $(V, E)$  com  $V$  finito e cada elemento de  $E$  é um subconjunto formado por dois elementos de  $V$ , ou seja  $E \subseteq \binom{V}{2}$ , onde  $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subset V : u \neq v\}$  é o conjunto de todos os pares de vértices de  $U$ . Cada elemento de  $V$  é chamado de *vértice* e cada elemento de  $E$  é chamado de *aresta* do grafo.

Para os propósitos deste texto podemos assumir, sem perda de generalidade, que o conjunto de vértices está fixo e para facilitar a notação, todos os grafos considerados são sobre o conjunto de vértices

$$V = [n] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Usamos  $G = (V, E)$  com o significado de “ $G$  é o grafo definido por  $(V, E)$ ”. O conjunto dos vértices e o conjunto das arestas de um grafo  $G$ , quando não são explicitamente denominados, são denotados por  $V(G)$  e  $E(G)$ , respectivamente. Num grafo  $G$  qualquer definimos as seguintes relações entre vértices  $u, v \in V(G)$  e arestas  $e, f \in E(G)$

- a aresta  $e$  *incide* no vértice  $v$  se  $v \in e$ ;

- $u$  e  $v$  são vértices *adjacentes* se  $\{u, v\}$  é uma aresta do grafo;
- $e$  e  $f$  são arestas *adjacentes* se  $|e \cap f| = 1$ .

Quando denotamos por  $e$  a aresta  $\{v, u\}$  dizemos que  $u$  e  $v$  são os *extremos* da aresta  $e$ . Também denotamos a aresta  $\{v, u\}$  por  $vu$  (ou  $uv$ ) quando a ocasião permite.

*Exemplo 45.* O par  $(V, E)$  dado por

$$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ E &= \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}\} \end{aligned}$$

define um grafo.

Um grafo pode ser representado geometricamente desenhando um ponto no plano para cada vértice e um segmento de curva ligando cada par de vértices que formam uma aresta. Por exemplo, uma representação geométrica para o grafo do exemplo anterior é dada na Figura 3.1.

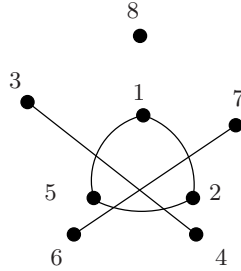


Figura 3.1: Representação geométrica (ou *diagrama*) do grafo.

Seja  $G$  um grafo com  $V(G) = [n]$ . Definimos a *matriz de adjacências* do grafo  $G$  por  $A_G = (a_i^j)$  em que

$$a_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } ij \in E(G) \\ 0, & \text{se } ij \notin E(G). \end{cases}$$

**Proposição 46.** *A matriz de adjacências de qualquer grafo é simétrica e portanto tem  $n$  autovalores reais não necessariamente distintos.*  $\square$

O *espectro* da matriz de adjacências de  $G$ , ou simplesmente *espectro de  $G$* , é a sequência dos autovalores de  $A_G$

$$\text{Sp}(G) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad \text{com} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n. \quad (3.1)$$

Por abuso da nomenclatura, chamamos os autovalores da matriz de adjacências de  $G$  de *autovalores de  $G$*  e chamamos o polinômio característico da matriz  $A_G$  de *polinômio característico de  $G$* .

*Exemplo 47.* A matriz de adjacências do grafo do Exemplo 45 tem polinômio característico  $x^8 - 5x^6 - 2x^5 + 7x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x$  e espectro  $(2, 1, 1, 0, -1, -1, -1, -1)$ .

*Exemplo 48 (Grafo de Petersen).* O grafo de Petersen, representado pelo diagrama na Figura 3.2, tem polinômio característico  $(x - 3)(x - 1)^5(x + 2)^4$  e espectro

$$(3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2).$$

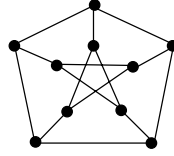


Figura 3.2: Grafo de Petersen.

*Exemplo 49.* O grafo com  $n$  vértices e sem arestas tem o autolvalor 0 com multiplicidade  $n$  pois o polinômio característico é  $\det(x\text{Id}_n) = x^n$ .

*Exemplo 50 (Grafo completo).* Um grafo é *completo* se todo par de vértices é uma aresta do grafo. O grafo completo sobre os vértices  $[n]$  é denotado por  $K^n$  e sua matriz de adjacências é

$$A_{K^n} = J - \text{Id}_n$$

em que  $J$  denota a matriz com todas as entradas iguais a 1. O espectro de  $\text{Id}_n$  é  $(1, 1, \dots, 1)$  e se  $\mathbf{v}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , são os autovetores ortogonais de  $\text{Id}_n$  então

$$A_{K^n} \mathbf{v}_i = J \mathbf{v}_i - \text{Id}_n \mathbf{v}_i = \begin{cases} n\mathbf{1} - \mathbf{1} & \text{se } i = 1 \\ \mathbf{0} - \mathbf{1} \mathbf{v}_i & \text{para todo } 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

pois  $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{1}$  logo suas coordenadas somam 0. Com isso, deduzimos que o espectro do grafo completo com  $n$  vértices é  $(n - 1, -1, -1, \dots, -1)$ .

O *complemento* de um grafo  $G = (V, E)$  é o grafo  $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ . A matriz de adjacências de  $\overline{G}$  é  $A_{K^n} - A_G$ .

Dizemos que os grafos  $G$  e  $H$  são *isomorfos* se existe uma função bijetora (chamada de *isomorfismo*)

$$f: V(G) \rightarrow V(H) \quad (3.2)$$

tal que

$$\{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H). \quad (3.3)$$

**Proposição 51.** *Grafos isomorfos têm o mesmo espectro.*

*Demonstração.* É suficiente notar que um isomorfismo entre grafos sobre o conjunto de vértices  $[n]$  é uma permutação  $\rho: [n] \rightarrow [n]$ , portanto, se  $H$  e  $G$  são isomorfos e  $B = A_H$  então  $A_G = B_\rho$ . O resultado segue do Exercício 15, página 15.  $\square$

A recíproca da afirmação acima não vale, dois grafos não-isomorfos podem ter o mesmo polinômio característico e, conseqüentemente, o mesmo espectro como mostra o seguinte exemplo. A matriz de adjacência dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  representados nos diagramas da Figura 3.3 têm polinômio característico  $4x^3 - x^5$  e espectro  $(2, 0, 0, 0, -2)$ .

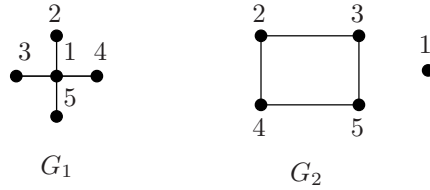


Figura 3.3: Dois grafos diferentes com mesmo polinômio característico.

Pelo restante deste texto usaremos a seguinte notação: se  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  é o espectro de  $A = A_G$  então, para qualquer  $i \in [n]$ , escrevemos  $\lambda_i(G)$  ou  $\lambda_i(A)$  para o  $i$ -ésimo maior autovalor de  $A$  e

$$\lambda_{\max}(G) = \lambda_1(G) \text{ e } \lambda_{\min}(G) = \lambda_n(G). \quad (3.4)$$

*Exercício 52.* Prove que  $|\lambda_{\max}(G) - \lambda_{\max}(\overline{G})| < \sqrt{n}$ .

*Exercício 53.* Prove que

$$n - 1 \leq \lambda_{\max}(G) + \lambda_{\max}(\overline{G}) \leq \sqrt{2n}.$$

(Dica: veja a seção 2.2.)



**Produto cartesiano de grafos.** Se  $G$  e  $H$  são dois grafos quaisquer o *produto cartesiano* deles, denotado  $G \times H$ , é o grafo definido pelos vértices  $V(G) \times V(H)$  e arestas

$$((i, j), (k, \ell)) \text{ tais que } j = \ell \text{ e } \{i, k\} \in E(G) \text{ ou } i = k \text{ e } \{j, \ell\} \in E(H)$$

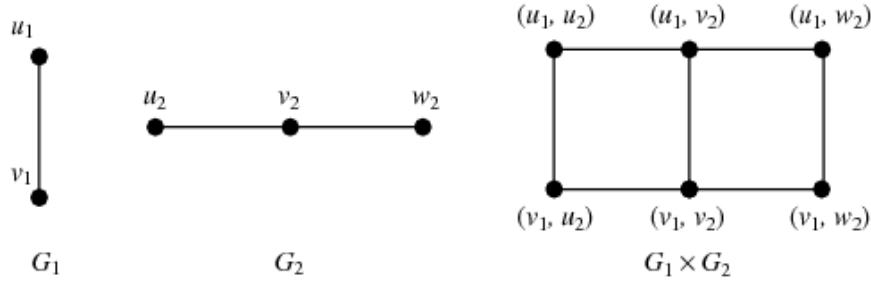


Figura 3.4: Exemplo de produto cartesiano

Se  $G$  tem  $n$  vértice e matriz de adjacências  $(g_i^j)$ , e  $H$  tem  $m$  vértices e matriz de adjacências  $B$ , então da definição acima podemos verificar que a matriz de adjacências de  $G \times H$  é

$$\begin{pmatrix} g_1^1 \text{Id}_m & \cdots & g_1^n \text{Id}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n^1 \text{Id}_m & \cdots & g_n^n \text{Id}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{1,1} B & \cdots & \delta_{1,n} B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n,1} B & \cdots & \delta_{n,n} B \end{pmatrix}$$

em que  $\delta_{i,j}$  é o delta de Kronecker. Sejam  $\lambda_G$  e  $\lambda_H$  autovalores e  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  os respectivos autovetores de  $G$  e  $H$ . Consideremos o produto

$$\left( \begin{pmatrix} g_1^1 \text{Id}_m & \cdots & g_1^n \text{Id}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n^1 \text{Id}_m & \cdots & g_n^n \text{Id}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{1,1} B & \cdots & \delta_{1,n} B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n,1} B & \cdots & \delta_{n,n} B \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \mathbf{w} \\ \vdots \\ v_n \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Dado  $x \in V(G)$  e  $y \in v(H)$  temos na linha  $(x, y)$  desse produto

$$\begin{aligned}
 \sum_{(a,b) \in N((x,y))} v_a w_b &= \sum_{(x,b) \in N((x,y))} v_x w_b + \sum_{(a,y) \in N((x,y))} v_a w_y \\
 &= \sum_{b \in N(y)} v_x w_b + \sum_{a \in N(x)} v_a w_y \\
 &= v_x \sum_{b \in N(y)} w_b + w_y \sum_{a \in N(x)} v_a \\
 &= v_x \lambda_H w_y + w_y \lambda_G v_x \\
 &= (\lambda_H + \lambda_G) v_x w_y
 \end{aligned}$$

ou seja, tal produto resulta em

$$(\lambda_H + \lambda_G) \begin{pmatrix} v_1 \mathbf{w} \\ \vdots \\ v_n \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Com isso, porvamos o seguinte resultado.

**Proposição 54.** *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos quaisquer. Os autovalores de  $G \times H$  são*

$$\lambda_i(G) + \lambda_j(H) \tag{3.5}$$

para todos  $i \in [|V(G)|]$  e  $j \in [|V(H)|]$ .  $\square$

*Exercício 55.* Seja  $k$  um número natural. O  $k$ -cubo é o grafo  $Q_k$  cujo conjunto de vértices são as seqüências binárias de  $k$  bits e dois vértices são adjacentes se e somente se as  $k$ -tuplas correspondentes diferem exatamente em uma posição. Verifique que

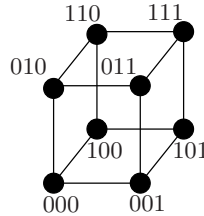


Figura 3.5: O 3-cubo: os vértices correspondem às seqüências de três bits, duas delas sendo adjacentes se e só se diferirem numa única posição.

$Q_k = K^2 \times Q_{k-1}$  para todo  $k > 1$  e  $Q_1 = K^2$ , com  $K^2$  o grafo completo sobre o conjunto de vértices  $\{0, 1\}$ . Mostre que o  $Q_k$  tem autovalor  $k - 2i$  com multiplicidade  $\binom{k}{i}$  para todo  $0 \leq i \leq k$ .

### 3.1.1 Grau

Para um vértice  $v$  qualquer em um grafo  $G$  definimos a *vizinhança* de  $v$  como o conjunto

$$N_G(v) = \{w \in V(G) : vw \in E\}, \quad (3.6)$$

dos vértices de  $V(G)$  que são adjacentes ao vértice  $v$ . Seus elementos são chamados de *vizinhos* de  $v$ . Seguindo a notação padrão

$$\text{grau de } v \text{ em } G: \quad d_G(v) = |N_G(v)| \quad (3.7)$$

$$\text{grau mínimo em } G: \quad \delta(G) = \min\{d_G(u) : u \in V(G)\} \quad (3.8)$$

$$\text{grau máximo em } G: \quad \Delta(G) = \max\{d_G(u) : u \in V(G)\} \quad (3.9)$$

$$\text{grau médio em } G: \quad d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{u \in V(G)} d_G(u) \quad (3.10)$$

Sempre que não houver perigo de confusão podemos suprimir os índices ou os argumentos para simplificar escrevendo, por exemplo,  $d(u)$  e  $\Delta$  para denotar  $d_G(u)$  e  $\Delta(G)$ , respectivamente.

O seguinte resultado é um velho conhecido na Teoria dos Grafos e a demonstração é deixada como exercício.

**Teorema 56.** *Para todo grafo  $G = (V, E)$  vale que*

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|. \quad (3.11)$$

A seguir, veremos algumas relações entre o espectro e os graus dos vértices do grafo.

**Teorema 57.** *Para todo  $G$  vale que  $d(G) \leq \lambda_1(G) \leq \Delta(G)$ .*

*Demonstração.* Pelo Princípio de Rayleigh o maior autovalor de  $G$  satisfaz

$$\lambda_1 = \max_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} R_A(\mathbf{u}).$$

Tomando por  $\mathbf{u}$  o vetor constante igual a 1 temos a primeira desigualdade do enunciado

$$\lambda_1 \geq \frac{\langle A\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n d(i)}{n} = d(G). \quad (3.12)$$

Por outro lado, se  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$  é um autovetor associado a  $\lambda_1$  e  $|v_k| = \max\{|v_i| : i \in [n]\}$ , então da linha  $k$  da igualdade de vetores  $\lambda_1 \mathbf{v} = A\mathbf{v}$  sai que

$$|\lambda_1 v_k| = \left| \sum_{i=1}^n a_k^i v_i \right| \leq \sum_{i=1}^n a_k^i |v_k| = d(k) |v_k| \leq \Delta |v_k|$$

logo  $\lambda_1 \leq \Delta$ , pois  $|\lambda_1| = \lambda_1$ . □

Um grafo é chamado de  $d$ -regular, para  $d \in \mathbb{N}$ , se todos os vértices têm grau  $d$ . Por exemplo, o 3-cubo representado na Figura 3.5 é 3-regular e, de modo geral, o  $Q_k$  é  $k$ -regular.

**Corolário 58.** Se  $\lambda_1(G) = d(G)$ , então  $G$  é  $d(G)$ -regular.

*Demonstração.* Note que se vale a igualdade em (3.12), então  $(1/\sqrt{n})\mathbf{1}$  é um autovetor associado a  $\lambda_1$  (Proposição 31, página 26), logo,  $\mathbf{1}$  é autovetor e  $A\mathbf{1} = \lambda_1\mathbf{1}$  é equivalente a  $(d(1), d(2), \dots, d(n))^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_1)^T$ . Por definição  $G$  é  $\lambda_1$ -regular.  $\square$

É fácil ver que a recíproca também vale, deixamos os detalhes a cargo do leitor.

**Corolário 59.** Se  $G$  é  $d$ -regular, então  $\lambda_1(G) = d$ .  $\square$

*Exercício 60.* Mostre que para todo autovalor  $\lambda_i(G)$  vale que

$$|\lambda_i(G)| \leq \Delta(G).$$

*Exercício 61.* Encontre um grafo  $G$  tal que  $d(G) < \lambda_1(G) < \Delta(G)$ .

*Exercício 62.* Mostre que para todo vetor positivo  $\mathbf{x}$  vale

$$\lambda_1(G) \leq \max_{i \in V(G)} \frac{\sum_{j=1}^n a_i^j x_j}{x_i}.$$

(Dica: avalie  $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{x} \rangle$  onde  $\mathbf{v}$  é um autovetor não-negativo associado a  $\lambda_1$ . A existência de um autovetor não-negativo segue de (2.17).)

*Exercício 63.* Mostre que valem para todo  $G$  as desigualdades

$$\frac{1}{|E(G)|} \sum_{ij \in E(G)} \sqrt{d(i)d(j)} \leq \lambda_1(G) \leq \max_{i \in V(G)} \sqrt{\sum_{j \in N_G(i)} d(j)}$$

(Dica: para a primeira desigualdade use a equação (2.3) e para a segunda o exercício anterior e Cauchy–Schwarz, veja (1.26) na página 18.)

### 3.1.2 Subgrafos

Para quaisquer  $U \subseteq V(G)$  e  $F \subseteq E(G)$  se o par  $H = (U, F)$  define um grafo então dizemos que  $H$  é *subgrafo* de  $G$  e escrevemos  $H \subseteq G$ .

Qualquer subconjunto  $U \subset V(G)$  define um subgrafo de  $G$ , chamado de *subgrafo induzido por  $U$*  e dado pelas arestas de  $E(G)$  que têm ambos extremos em  $U$ . Esse grafo é denotado por  $G[U]$

$$G[U] = \left( U, E(G) \cap \binom{U}{2} \right).$$

Ainda, denotamos por  $G - U$  o subgrafo  $G[V(G) \setminus U]$  e por  $G - v$  o subgrafo  $G - \{v\}$ .

Reescrevendo o Teorema do Entrelaçamento, Teorema 43 na página 31, em linguagem de Teoria dos Grafos temos o seguinte resultado a respeito de autovalores de subgrafos induzidos.

**Teorema 64.** *Para todo grafo  $G$  com  $n \geq 2$  vértices e todo  $U \subset V(G)$  com  $u$  vértices valem as desigualdades*

$$\lambda_j(G) \geq \lambda_j(G - U) \geq \lambda_{u+j}(G)$$

para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n - u\}$ .

*Demonstração.* Seja  $Q = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{i_1} & \mathbf{e}_{i_2} & \cdots & \mathbf{e}_{i_{n-u}} \end{pmatrix}$  a matriz  $n \times (n - u)$  cujas colunas são os vetores

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} & \delta_{2,i} & \cdots & \delta_{n,i} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T,$$

para todo vértice  $i \notin U$ . O elemento na linha  $r$  e coluna  $s$  de  $Q^T A_G Q$  é

$$b_r^s = \mathbf{e}_{i_r}^T A \mathbf{e}_{i_s} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \delta_{p,i_r} a_p^q \delta_{q,i_s} = a_{i_r}^{i_s} \text{ para todos } i_r, i_s \notin U,$$

ou seja,  $Q^T A_G Q = (b_r^s)$  é a matriz de adjacências de um grafo  $H$  sobre o conjunto de vértices  $[n - u]$  isomorfo a  $G - U$ , e o isomorfismo  $f: V(H) \rightarrow V(G) \setminus U$  é dado por  $f(r) = i_r$ . O resultado segue do Teorema 43 e da Proposição 51.  $\square$

O próximo resultado mostra a hereditariedade do maior autovalor com relação a subgrafos.

**Teorema 65.** *Se  $G \subset H$ , então  $\lambda_1(G) \leq \lambda_1(H)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A_{G'}$  a matriz de adjacências de  $G' = (V(H), E(G))$  e  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  um autovetor não-negativo (veja equação (2.17), página 32) de  $A_{G'}$  associado a  $\lambda_1$ . Do Princípio de Rayleigh e do fato de  $A_{G'} \leq A_H$  componente-a-componente

$$\lambda_1(G') = \frac{\langle A_{G'} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \leq \frac{\langle A_H \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \leq \lambda_1(H).$$

O resultado segue de  $\lambda_1(G) \leq \lambda_1(G')$ , que é obtido do Teorema 64 com  $G = G' - U$  onde  $U = V(H) \setminus V(G)$ .  $\square$

Em geral, a hereditariedade não vale para os outros autovalores do espectro.

*Exercício 66.* Descubra um exemplo de dois grafos  $G \subset H$  e tal que  $\lambda_2(G) > \lambda_2(H)$ .

*Exercício 67.* Prove que se  $G$  é subgrafo induzido de  $H$ , então  $\lambda_2(G) \leq \lambda_2(H)$ .

O próximo resultado é um bom exemplo de aplicação do Teorema do Entrelaçamento e relaciona autovalores a grau médio de subgrafos induzidos. Vamos usar a seguinte notação: para quaisquer subconjuntos disjuntos  $U, W \subset V(G)$

$$\begin{aligned} e(G) &= |E(G)|; \\ e_G(U) &= e(G[U]); \\ e_G(U, W) &= e_G(U \cup W) - e_G(U) - e_G(W), \end{aligned} \tag{3.13}$$

ou seja,  $e_G(U)$  é o número de arestas no subgrafo induzido por  $U$  e  $e_G(U, W)$  é a número de arestas com um extremo em  $U$  e o outro em  $W$ , que denotamos por  $E_G(U, W)$

$$E_G(U, W) = \{ \{u, w\} \in E(G) : u \in U \text{ e } w \in W \}.$$

**Lema 68.** *Seja  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  uma partição de  $V = [n]$ . Para todo grafo  $G$  sobre  $V$  temos  $\lambda_i(G) \geq \lambda_i(E) \geq \lambda_{n-k+i}(G)$ , para todo  $i \in [k]$ , onde  $E = (e_i^j)$  é a matriz dada por*

$$e_i^j = \begin{cases} \frac{e(V_i, V_j)}{\sqrt{|V_i||V_j|}} & \text{para } i \neq j, \\ \frac{2e(V_i)}{|V_i|} & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.14}$$

*Demonstração.* Para cada  $i \in [n]$ , tomamos  $\mathbf{v}_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)^T$  o vetor característico de  $V_i$  e formamos a matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} & \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} & \dots & \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} \end{pmatrix}.$$

Na linha  $i$ , coluna  $j$  de  $Q^T A_G Q$  temos, para todos  $1 \leq i, j \leq k$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{|V_i||V_j|}} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n v_k^i a_k^\ell v_\ell^j = \begin{cases} \frac{1}{|V_i|} \sum_{k \in V_i} \sum_{\ell \in V_i} a_k^\ell & \text{se } i = j \\ \frac{1}{\sqrt{|V_i||V_j|}} \sum_{k \in V_i} \sum_{\ell \in V_j} a_k^\ell & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No primeiro caso temos  $e_i^i$  de (3.14) e no segundo caso temos  $e_i^j$  de (3.14), ou seja,  $E = Q^T A_G Q$ . Pelo Teorema 43,  $\lambda_i(G) \geq \lambda_i(E) \geq \lambda_{n-k+i}(G)$ , para todo  $i \in [k]$ .  $\square$

Agora, denotemos por  $d_i^j$ , para  $i \neq j$ , o grau médio em  $V_i$  do subgrafo induzido pelas arestas  $E_G(V_i, V_j)$  e por  $d_i^i$  o grau médio no subgrafo induzido por  $V_i$ , ou seja,

$$d_i^j = \begin{cases} \frac{e_G(V_i, V_j)}{|V_i|} & \text{se } i \neq j \\ \frac{2e_G(V_i)}{|V_i|} & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (3.15)$$

Então os autovalores dessa matriz entrelaçam com os da matriz  $A_G$ .

**Corolário 69.** Para a matriz  $D = (d_i^j)$  dada em (3.15) temos  $\lambda_i(G) \geq \lambda_i(D) \geq \lambda_{n-k+i}(G)$ , para todo  $i \in [k]$ .

*Demonstração.* Defina  $C = \text{diag}(\sqrt{|V_1|}, \sqrt{|V_2|}, \dots, \sqrt{|V_k|})$  e note que  $D = C^{-1}EC$ , onde  $E$  é a matriz dada em (3.14). Por serem matrizes semelhantes  $\lambda_i(D) = \lambda_i(E)$  e o corolário segue.  $\square$

Como aplicação do lema acima podemos obter uma relação entre  $\lambda_{\min}$  e os graus médios de  $G[U]$ ,  $G[\bar{U}]$  e  $G$ .

**Proposição 70.** Para todo grafo  $G$  e todo subconjunto  $U \subset V(G)$  não-vazio

$$\lambda_{\min}(G) \leq d(G[U]) + d(G[\bar{U}]) - d(G) \quad (3.16)$$

*Demonstração.* Fazendo  $k = 2$ ,  $V_1 = U$  e  $V_2 = \bar{U}$  na proposição acima temos  $\lambda_1(G) \geq \lambda_1(E) \geq \lambda_2(E) \geq \lambda_{\min}(G)$  onde

$$E = \begin{pmatrix} \frac{2e(U)}{|U|} & \frac{e(U, \bar{U})}{\sqrt{|U||\bar{U}|}} \\ \frac{e(U, \bar{U})}{\sqrt{|U||\bar{U}|}} & \frac{2e(\bar{U})}{|\bar{U}|} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Agora,  $\lambda_{\min}(G) \leq \lambda_2(E) = \text{tr}(E) - \lambda_1(E)$  pois o traço é a soma dos autovalores (Exercício 8, página 13). Se  $\mathbf{x} = (|U|^{1/2}, |\bar{U}|^{1/2})^T$  então pelo Princípio Rayleigh

$$\lambda_1(E) \geq \frac{\langle E\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{2e(U) + e(U, \bar{U}) + e(U, \bar{U}) + 2e(\bar{U})}{|U| + |\bar{U}|} = \frac{2e(G)}{|V(G)|}.$$

Por outro lado,  $\text{tr}(E) = 2e(U)/|U| + 2e(\bar{U})/|\bar{U}|$ , assim

$$\lambda_{\min}(G) \leq \frac{2e(U)}{|U|} + \frac{2e(\bar{U})}{|\bar{U}|} - \frac{2e(G)}{|V(G)|}$$

e o enunciado segue da definição de grau médio.  $\square$

Reproduzindo a prova da Proposição 70 para o caso de qualquer  $k \geq 2$  temos o seguinte resultado.

**Proposição 71.** *Dado um grafo  $G$  com matriz de adjacências  $A = A_G$  e um inteiro  $k \geq 2$ , para toda partição  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  de  $V(G) = [n]$  valem as desigualdades*

$$\lambda_1(A) + \lambda_2(A) + \dots + \lambda_k(A) \geq d(G[V_1]) + d(G[V_2]) + \dots + d(G[V_k])$$

$e$

$$\lambda_{n-k+2}(A) + \lambda_{n-k+3}(A) + \dots + \lambda_n(A) \leq d(G[V_1]) + d(G[V_2]) + \dots + d(G[V_k]) - d(G).$$

*Exercício 72.* Demonstre a proposição acima.

### 3.1.3 Passeios, Caminhos e Circuitos

Seja  $G$  um grafo. Chamamos de  $(i, j)$ -*passeio* em  $G$ , ou simplesmente *passeio*, uma seqüência  $(i, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, j)$  de vértices não necessariamente distintos de  $G$  tal que vértices consecutivos são adjacentes, isto é,  $\{i, x_1\} \in E(G)$ ,  $\{x_{k-1}, j\} \in E(G)$  e  $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$  para todo  $i \in [k-2]$ . Dizemos que o passeio tem *comprimento*  $k$  se  $k$  é o número de arestas no passeio.

Nessa seção veremos algumas contagens de subestruturas em  $G$  baseadas no seguinte resultado.

**Proposição 73.** *Seja  $G$  um grafo,  $A$  sua matriz de adjacências e  $k$  um inteiro positivo. O elemento na linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $A^k$  é o número de  $(i, j)$ -passeios de comprimento  $k$ .*

*Demonstração.* O resultado segue diretamente da definição de produto de matrizes, na linha  $i$  e coluna  $j$  temos

$$\sum_{v_1=1}^n \sum_{v_2=1}^n \dots \sum_{v_{k-1}=1}^n a_i^{v_1} a_{v_1}^{v_2} a_{v_2}^{v_3} \dots a_{v_{k-2}}^{v_{k-1}} a_{v_{k-1}}^j.$$

Um termo da soma é 1 se e somente se a seqüência  $(i, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, j)$  define um passeio de comprimento  $k$  em  $G$ .  $\square$

Para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $w_k(G)$  o número de passeios de comprimento  $k$  em  $G$ . Segue diretamente das definições que

$$w_2(G) = \sum_{i \in V} d(i)^2 = \langle A^2 \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle \quad (3.18)$$



e pelo Princípio de Rayleigh temos  $\lambda_{\max}(G)^2|V| \geq \langle A^2 \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle$ , portanto

$$\lambda_{\max}(G)^2 \geq \frac{1}{|V|} \sum_{i \in V} d_G(i)^2 = \frac{w_2(G)}{|V|}. \quad (3.19)$$

*Exercício 74.* Mostre as igualdades

$$(i) \sum_{ij \in E} d(i)d(j) = w_3(G);$$

(ii) denote por  $w_t(i)$  a soma para todo  $j$  de  $w_t(i, j)$  onde  $w_t(i, j)$  é a entrada  $(i, j)$  de  $A^t$ , então

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} w_p(i)w_r(i, j)w_q(j) = w_{p+q+r-2}(G).$$

Um subgrafo sobre o conjunto de vértices  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq V(G)$  é um *caminho* de comprimento  $k - 1$  no grafo  $G$  se existe uma permutação  $\rho: [k] \rightarrow [k]$  tal que a seqüência de vértices  $(x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, \dots, x_{\rho(k)})$  é um passeio em  $G$ .

Se os únicos vértices e arestas de um grafo são aqueles que formam um caminho então esse grafo *também* é chamado de caminho e é denotado por  $P^k$ , onde  $k$  é o número de vértices desse grafo.

Um subgrafo sobre o conjunto de vértices  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq V(G)$  é um *circuito* de comprimento  $k$  no grafo  $G$  se existe uma permutação  $\rho: [k] \rightarrow [k]$  tal que a seqüência de vértices  $(x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, \dots, x_{\rho(k)}, x_{\rho(1)})$  é um passeio em  $G$ .

Se os únicos vértices e arestas de um grafo são aqueles que formam um circuito então esse grafo *também* é chamado de circuito e é denotado por  $C^k$ , onde  $k$  é o número de vértices desse grafo. No caso  $k = 3$  o grafo  $C^3 = K^3$  é chamado de *triângulo*.

Seja  $G$  um grafo,  $A$  sua matriz de adjacências e denotemos por  $T$  o número de triângulos em  $G$ , então

$$\text{tr}(A) = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{tr}(A^2) = 2|E| \quad (3.21)$$

$$\text{tr}(A^3) = 6T \quad (3.22)$$

pois, do Teorema Espectral temos que a matriz de adjacências  $A$  pode ser escrita como  $Q^T D Q$ , onde  $Q$  é ortogonal e  $D$  diagonal formada pelo espectro de  $G$ , logo  $A^k = Q^T D^k Q$  para todo natural  $k \geq 1$  e  $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(Q^T D^k Q)$ , portanto

$$\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \quad (3.23)$$

para todo natural  $k \geq 1$ . Em  $A^4 = (d_i^j)$  a situação fica ligeiramente mais embaraçosa, temos

$$d_i^j = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_i^m a_m^l a_l^k a_k^j$$

e na diagonal  $d_i^i$  lemos o número de passeios  $(i, l, m, k, i)$  no grafo, ou ainda separando em casos  $d_i^i$  conta

- (i)  $r_{C^4}(G; i)$  que denota o número de triplas  $(x_0, x_1, x_2) \in V \times V \times V$  tais que o passeio  $(i, x_0, x_1, x_2, i)$  é um circuito de comprimento 4 em  $G$ , mais
- (ii)  $r_{P^2}(G; i)$  que é o número de pares  $(x_0, x_1) \in V \times V$  tais que  $(i, x_0, i, x_1, i)$  é um passeio com  $x_0 \neq x_1$ ; notemos que esse passeio é um caminho  $P^2$  em  $G$  com  $i$  sendo vértice interno, mais
- (iii)  $d_G(i)$  que é o número de vértices  $x_0 \in V$  tais que  $(i, x_0, i, x_0, i)$  é um passeio, mais
- (iv)  $r_{P^2}(G; i)$  denota o número de pares  $(x_0, x_1) \in V \times V$  tais que  $(i, x_0, x_1, x_0, x_1)$  é um passeio; notemos que  $(i, x_0, x_1)$  é um caminho de comprimento 2 em  $G$ .

$$d_i^i = \underbrace{\text{diagrama 1}}_{\text{contado 2 vezes em (i)}} + \underbrace{\text{diagrama 2}}_{\text{contado 2 vezes em (ii)}} + \underbrace{\text{diagrama 3}}_{\text{contado 1 vez em (iii)}} + \underbrace{\text{diagrama 4}}_{\text{contado 1 vez em (iv)}}. \quad (3.24)$$

$$= r_{C^4}(G; i) + r_{P^2}(G; i) + d_G(i) + r_{P^2}(G; i). \quad (3.25)$$

Se  $H$  e  $G$  são grafos quaisquer então chamamos de *cópia rotulada* de  $H$  em  $G$  todo isomorfismo de  $H$  com um subgrafo  $J \subseteq G$ , por exemplo um único  $C^4 \subset G$  define 8 cópias rotuladas de um  $C^4$ , uma aresta tem  $2|E(G)|$  cópias rotuladas em  $G$  e um  $P^2 \subset G$  define duas cópias rotuladas de um caminho. Dado  $H$ , denotamos por  $r_H(G)$  o número de cópias rotuladas de  $H$  no grafo  $G$ . Com essa notação, cada  $C^4 \subset G$  contribui com 8 para a primeira parcela da soma em (3.25), cada  $P^2 \subset G$  contribui com 2 para a segunda e 2 para a quarta parcelas, finalmente, cada aresta contribui com 2 para a terceira parcela, ou seja,

$$\text{tr}(A^4) = r_{C^4}(G) + 2r_{P^2}(G) + r_{K^2}(G). \quad (3.26)$$

### 3.1.4 Distância

A *distância* entre dois vértices  $i, j \in V$ , denotada por  $\text{dist}_G(i, j)$ , é definida como o comprimento do menor caminho que liga esses vértices

$$\text{dist}_G(i, j) = \min \{k \in \mathbb{N}: \exists(i, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, j) \text{ caminho em } G\}, \quad (3.27)$$

quando existe algum caminho. Se  $i$  e  $j$  não são ligados por caminho em  $G$ , então escrevemos  $\text{dist}_G(i, j) = \infty$ .

Quando  $\text{dist}_G(i, j) < \infty$  para todo  $i, j \in V(G)$  então dizemos que  $G$  é um *grafo conexo*. Estudaremos grafos conexos na Seção 3.1.7, por enquanto a propriedade dos grafos conexos que nos interessa está enunciada no exercício a seguir, a qual nos permite usar o Teorema de Perron–Frobenius provado no Capítulo 2.

*Exercício 75.* Prove que  $G$  é um grafo conexo se, e somente se, a matriz  $A_G$  é irredutível.

### 3.1.5 Grafos bipartidos

Um grafo  $G$  é chamado de *bipartido* quando  $V(G)$  é a união de dois conjuntos disjuntos,  $V(G) = X \cup Y$ , de forma que para toda aresta  $e \in E(G)$  vale que  $|e \cap X| = 1$  (logo,  $|e \cap Y| = 1$ ).

*Exemplo 76.* O seguinte grafo é bipartido

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6, 7, 8\} \quad \text{e} \quad E(G) = \{16, 62, 37, 38, 74, 75\}.$$

Seu polinômio característico é  $x^8 - 5x^6 - 7x^4 - 2x^2$  e seu espectro

$$\left( \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$$

*Exemplo 77.* O 3-cubo, grafo representado na Figura 3.5, é um grafo bipartido com partes  $\{001, 010, 111, 100\}$  e  $\{000, 011, 101, 110\}$ . O polinômio característico do 3-cubo é  $x^8 - 12x^6 + 30x^4 - 28x^2 + 9$  e o espectro  $(3, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -3)$ .

*Exercício 78.* Prove que um grafo é bipartido se e somente se não contém circuito de comprimento ímpar.

*Exercício 79.* Mostre que  $G$  é bipartido com matriz de adjacências  $A$  se, e somente se, existe alguma permutação  $\rho$  dos vértices de  $G$  tal que

$$A_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ B^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{0}$  é uma matriz quadrada.

Notemos que nos exemplos dados acima há uma simetria em torno do 0 no espectro de grafos bipartidos. Isso ocorre por que se para um dado autovetor  $\mathbf{v}$ , associado ao autovalor  $\lambda$ , invertermos o sinal das coordenadas dos vértices de uma das partes, o vetor resultante também é um autovetor, agora associado ao autovalor  $-\lambda$  de mesma multiplicidade de  $\lambda$  (veja equação (2.20), página 33). Mais especificamente, na demonstração do Teorema de Perron–Frobenius está implícita a prova do seguinte resultado.

**Proposição 80.** *Seja  $G$  um grafo conexo com autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  respectivos autovetores ortonormais. Se  $G = (X \cup Y, E)$  é bipartido então para todo vértice  $j \in V(G)$  e todo  $i \in [n]$*

$$v_j^i = v_j^{n-i+1} \text{ se } j \in X \text{ e } v_j^i = -v_j^{n-i+1} \text{ se } j \in Y$$

onde  $v_j^i$  é a  $j$ -ésima linha de  $\mathbf{v}_i$ . □

Pelos Exercícios 75 e 79, o grafo  $G$  é conexo e bipartido se e somente se  $A = A_G$  é irredutível e existe uma permutação  $\rho: [n] \rightarrow [n]$  tal que  $A_\rho$  é como em (3.28). Como  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A_\rho)$  uma das afirmações do Teorema de Perron–Frobenius é o seguinte resultado.

**Teorema 81.** *Se  $G$  é um grafo conexo com  $n$  vértices, então  $G$  é bipartido se, e somente se,  $\lambda_i(G) = -\lambda_{n+1-i}(G)$  para todo  $i \in [n]$ .* □

Um grafo  $G = (X \cup Y, E)$  é chamado de *bipartido completo* se  $|E| = |X||Y|$  e é denotado por  $K^{|X|,|Y|}$ . Nesse caso, se  $|X| = a$  e  $|Y| = b$  então existe uma permutação  $\rho$  das linhas e colunas de  $A = A_{K^{a,b}}$  tal que

$$A_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & J_{a \times b} \\ J_{a \times b}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

em que  $J_{a \times b}$  é a matriz  $a \times b$  constante igual a 1. Agora, se  $\mathbf{v}_\rho$  é um vetor então  $A_\rho \mathbf{v}_\rho$  é constante nas coordenadas de  $X$  e nas coordenadas de  $Y$ . Se  $\mathbf{v}$  é um autovetor com autovalor  $\lambda$  e  $x \in X$  e  $y \in Y$  então  $\lambda v_{\rho_x} = b v_{\rho_y}$  então  $\lambda v_{\rho_y} = a v_{\rho_x}$ , logo, multiplicando a igualdade em cada lado, temos  $\lambda = \pm \sqrt{ab}$ . O espectro de um grafo bipartido completo com classes de tamanho  $a$  e  $b$  é  $\text{Sp}(K^{a,b}) = (\sqrt{ab}, 0, \dots, 0, -\sqrt{ab})$ .

*Exercício 82.* Mostre que se  $G = (X \cup Y, E)$  é bipartido e

$$\Delta_X = \max\{d(v) : v \in X\} \text{ e } \Delta_Y = \max\{d(v) : v \in Y\}$$

então  $\lambda_1(G) \leq \sqrt{\Delta_X \Delta_Y}$ .

### 3.1.6 Diâmetro

Definimos o *diâmetro* do grafo  $G$  como a maior distância entre dois vértices quaisquer de  $G$ , ou seja

$$\text{diam}(G) = \max \{k \in \mathbb{N} : \exists i, j \in V(G) \text{ tais que } \text{dist}_G(i, j) = k\}. \quad (3.29)$$

Definimos  $\text{diam}(G) = \infty$  se existirem dois vértices no grafo  $G$  que não são ligados por caminho.

**Teorema 83.** *Se  $\text{diam}(G) = d$ , então  $A_G$  tem pelo menos  $d + 1$  autovalores distintos.*

*Demonstração.* Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  os autovalores distintos de  $A = A_G$ . Do Teorema Espectral e da definição de matriz ortogonal  $\lambda_i \text{Id} - A = \lambda_i Q Q^T - Q D Q^T$ , logo

$$\prod_{i=1}^k (\lambda_i \text{Id} - A) = Q \left( \prod_{i=1}^k (\lambda_i \text{Id} - D) \right) Q^T = \mathbf{0}$$

de modo que  $A^k$  é combinação linear de  $\text{Id}, A, A^2, \dots, A^{k-1}$ .

Se o diâmetro de  $G$  é  $d$  então existem vértices  $i$  e  $j$  cuja distância é  $d$  o que significa que na linha  $i$  e coluna  $j$  de  $A^t$ , para todo  $t < d$ , a entrada é zero. Como  $A^k$  é combinação linear de potências de  $A$  devemos ter  $k > d$ .  $\square$

*Exemplo 84.* Para um inteiro positivo  $d$  o  $d$ -cubo tem diâmetro  $d$  (verifique). Pelo Exercício 55 o  $d$ -cubo tem exatamente  $d + 1$  autovalores distintos.

**Teorema 85.** *Se  $G$  é conexo,  $d$ -regular, tem  $n$  vértices e não é bipartido então*

$$\text{diam}(G) \leq \frac{\log(n-1)}{\log d - \log(\max_{i \neq 1} |\lambda_i|)} + 1.$$

*Demonstração.* Seja  $G$  como no enunciado e  $A = A_G$  sua matriz de adjacências. Sabemos que, pelo Teorema Espectral,  $A^m = Q^T D^m Q$  para todo inteiro positivo  $m$ , onde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e  $Q = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$  é a matriz cujas colunas formam uma base ortonormal de autovetores com  $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{n})\mathbf{1}$ , portanto, na linha  $\ell$  e coluna  $j$  de  $A^m$  temos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n v_i^\ell (d_i^k)^m v_k^j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m v_i^\ell v_i^j = \lambda_1^m v_1^\ell v_1^j + \sum_{i=2}^n \lambda_i^m v_i^\ell v_i^j,$$

onde  $v_r^s$  é a linha  $r$  de  $\mathbf{v}_s$  para quaisquer  $r, s \in [n]$ .

Se  $\ell$  e  $j$  na equação acima são dois vértices que realizam o diâmetro de  $G$ , ou seja,  $\text{diam}(G) = \text{dist}_G(\ell, j)$  e  $m < \text{diam}(G)$  então a equação acima é igual a 0, ou seja,

$$\lambda_1^m v_1^\ell v_1^j = \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i^m v_i^\ell v_i^j \right|. \quad (3.30)$$

Como  $G$  é  $d$ -regular temos  $\lambda_1 = d$  portanto

$$\frac{d^m}{n} = \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i^m v_i^\ell v_i^j \right|.$$

e lado direito da igualdade pode ser estimado usando a desigualdade de Cauchy–Schwarz como

$$\left| \sum_{i=2}^n \lambda_i^m v_i^\ell v_i^j \right| \leq \sum_{i=2}^n |\lambda_i|^m |v_i^\ell v_i^j| \leq \lambda^m \left( \sum_{i=2}^n (v_i^\ell)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=2}^n (v_i^j)^2 \right)^{1/2}$$

em que  $\lambda = \max_{i \neq 1} |\lambda_i|$  com  $\lambda \neq d$  pois  $G$  não é bipartido. Como os autovetores são unitários

$$\frac{d^m}{n} \leq \lambda^m \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$$

portanto  $d^m \leq \lambda^m(n-1)$ ; tomando logaritmo e resolvendo a desigualdade para  $m$

$$m \leq \frac{\log(n-1)}{\log d - \log \lambda}$$

e o resultado segue escolhendo  $m = \text{diam}(G) - 1$ . □

O caso bipartido exige um pouco mais de análise; pela Proposição 80

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^m v_i^\ell v_i^j$$

é trivialmente igual a zero se  $m$  não tem a mesma paridade de  $\text{dist}(\ell, j) = \text{diam}(G)$  pois

$$v_i^{n-\ell+1} v_i^{n-\ell+1} = (-1)^{\text{dist}(\ell, j)} v_i^\ell v_i^j$$

Para os outros valores de  $m$  temos

$$2\frac{d}{n} + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i^m v_i^\ell v_i^j = 0$$

e seguindo as deduções feitas acima concluímos que

$$m \leq \frac{\log(n-2) - \log 2}{\log d - \log(\max_{i \neq 1, n} |\lambda_i|)},$$

para todo  $m < \text{diam}(G)$  e de mesma paridade de  $\text{diam}(G)$ . Escolhendo  $m = \text{diam}(G) - 2$  temos a versão do teorema acima para grafos bipartidos.

**Teorema 86.** *Se  $G$  é conexo, bipartido e  $d$ -regular então*

$$\text{diam}(G) \leq \frac{\log(|V(G)| - 2) - \log 2}{\log d - \log(\max_{i \neq 1, n} |\lambda_i|)} + 2.$$

□

A partir desse resultado podemos concluir que se quisermos construir uma rede de comunicação com tamanho linear no número de vértices e com diâmetro pequeno, então devemos projetá-la como um grafo com o segundo maior autovalor (em módulo) pequeno. Entretanto, o segundo autovalor não pode ser arbitrariamente pequeno.

**Proposição 87.** *Para todo  $G$  com  $n$  vértices e  $d$ -regular vale que*

$$\lambda \geq \sqrt{d} \left( \sqrt{\frac{n-d}{n-1}} \right). \quad (3.31)$$

*Demonstração.* Seja  $G$  com  $n$  vértices e  $d$ -regular. Pelo Teorema 56 temos  $2|E(G)| = nd$ , e sabemos que  $\text{tr}(A_G^2) = 2|E(G)|$  e  $\text{tr}(A_G^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \lambda_1^2 + (n-1)\lambda^2$ , portanto,  $d^2 + (n-1)\lambda^2 \geq nd$  donde segue a proposição. □

*Exercício 88.* Definimos a *cintura* do grafo  $G$  como o comprimento do menor circuito contido em  $G$ , ou seja

$$\text{cin}(G) = \min \{k \in \mathbb{N} : \exists(i, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, i) \text{ circuito em } G\}. \quad (3.32)$$

Mostre que se  $G$  é  $d$ -regular de cintura  $g$  então

$$g \geq \frac{\log |V(G)|}{\log(d-1)}.$$

*Exercício 89.* Mostre que  $\lambda_1(G) \leq \min\{\Delta(G), \sqrt{|V|-1}\}$  para todo  $G$  de cintura pelo menos 5. (Dica: Exercício 63, página 42.)

### 3.1.7 Grafos conexos e componentes conexas

Vimos que um grafo não-vazio é *conexo* se quaisquer dois vértices do grafo são ligados por um caminho. A relação  $C \subset V(G) \times V(G)$  dada por  $(u, v) \in C$  se  $u$  e  $v$  são ligados por caminho em  $G$  é uma relação de equivalência, as classes de equivalência dessa relação são as *componentes conexas* do grafo. As vezes dizemos somente *componente* do grafo. Por exemplo, no grafo do Exemplo 45 temos três componentes conexas, a saber, induzidas pelos conjuntos de vértices  $\{1, 2, 5\}$ ,  $\{6, 7\}$ ,  $\{3, 4\}$  e  $\{8\}$ .

Pelo Exercício 75 um grafo é conexo se, e somente se, sua matriz de adjacências é irredutível. Com essa informação em mãos podemos reescrever o Teorema de Perron–Frobenius em linguagem de Teoria dos Grafos.

**Teorema 90** (Teorema de Perron–Frobenius para grafos). *Se  $G$  é um grafo conexo e  $\text{Sp}(G) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , então*

1.  $\lambda_1 > 0$  e associado a esse autovalor existe um autovetor positivo;
2.  $\lambda_1 > \lambda_2$ ;
3.  $|\lambda_i| \leq \lambda_1$  para todo  $i \in [n]$ ;
4.  $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$  para todo  $i \in [n]$  se, e só se,  $G$  é bipartido.

Seja  $G$  um grafo com componentes conexas  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , então existe uma permutação  $\rho$  das linhas e colunas tal que

$$A_\rho = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_m \end{pmatrix},$$

onde  $A_i$  é “a matriz” de adjacência da componente conexa  $C_i$  e cada matriz  $\mathbf{0}$  é “a matriz” de adjacências do grafo bipartido induzido por  $C_i$  e  $C_j$ , para  $i \neq j$ . Claramente, para a matriz  $A_\rho$  acima  $p_{A_\rho}(x) = \prod_{i=1}^m p_{A_i}(x)$ .

*Exercício 91.* Se  $G$  é um grafo então o conjunto dos autovalores de  $G$  é a união dos conjuntos de autovalores das componentes conexas de  $G$ .

*Exercício 92.* Vimos no Teorema 65 que se  $H \subset G$ , então  $\lambda_1(H) \leq \lambda_1(G)$ . Mostre que se  $G$  é conexo então a desigualdade é estrita.



*Exercício 93.* Mostre que se  $\lambda_{\max}(G) = -\lambda_{\min}(G)$  então pelo menos uma componente conexa de  $G$  é bipartida.

*Observação 94.* Decorre do Teorema de Perron–Frobenius para grafos que se  $G$  é um grafo conexo, então  $\lambda_1 > \lambda_2$ . A recíproca não vale como mostra o seguinte exemplo

*Exemplo 95.* O grafo com duas componentes conexas representado na Figura 3.6 abaixo tem espectro  $(3, 2, -1, -1, -1, -1, -1)$

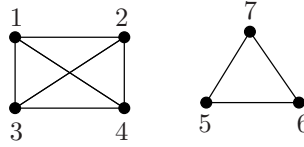


Figura 3.6: Grafo desconexo com  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

No caso de grafos regulares o espectro do grafo nos dá, diretamente, informação sobre a quantidade de componentes conexas.

**Teorema 96.** Se  $G$  é um grafo  $d$ -regular então  $\text{ma}(\lambda_1)$  é o número de componentes conexas de  $G$ .

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo  $d$ -regular com  $\text{Sp}(G) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e matriz de adjacências  $A = A_G$ . Sejam  $C_1, C_2, \dots, C_m$  as componentes conexas de  $G$  e  $\mathbf{c}_i$  o vetor característico da  $i$ -ésima componente. Cada  $\mathbf{c}_i$  é uma autovetor de  $\lambda_1$  para todo  $i \in [m]$  e como  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$  são ortogonais  $\dim V_{\lambda_1} \geq m$ .

Agora, mostraremos que  $\dim V_{\lambda_1} \leq m$ . Seja  $\mathbf{v}$  um autovetor não-negativo em  $V_{\lambda_1}$  e vamos mostrar que  $\mathbf{v}$  é constante nas linhas correspondentes aos vértices de  $C_i$  para cada  $i \in [m]$ .

Suponha, sem perda de generalidade, que  $v_1 = \max_{j \in V(G)} v_j$  e que  $1 \in C_1$ . Vamos mostrar por indução em  $k$  que  $v_1 = v_j$  para todo vértice  $j$  a distância  $k$  do vértice 1. Para mostrar a base da indução,

$$dv_1 = \sum_{j=1}^n a_1^j v_j \leq \sum_{j=1}^n a_1^j v_1 = dv_1$$

logo,

$$\sum_{j=1}^n a_1^j v_j = \sum_{j=1}^n a_1^j v_1.$$

e como  $v_1$  é máximo no vetor, devemos ter  $v_j = v_1$  para todo  $j \in N_G(1)$ , portanto, para todo  $j$  a distância um de 1.

Suponha que para  $k > 1$  temos  $v_j = v_1$  para todo  $j$  tal que  $\text{dist}(j, 1) = k - 1$ . Seja  $t$  um vértice a distância  $k$  e  $\ell \in N_G(t)$  tal que  $\text{dist}(\ell, 1) = k - 1$ . Assim, podemos repetir o argumento com

$$dv_\ell = \sum_{j=1}^n a_\ell^j v_j \leq \sum_{j=1}^n a_\ell^j v_t = dv_t,$$

e da mesma forma  $v_j = v_t$  para todo  $j \in N_G(\ell)$ , logo  $v_t = v_1$ . Pelo Princípio da Indução,  $v_1 = v_j$  para todo vértice  $j \in C_1$ .

Agora, seja  $v_t = \max\{v_j : 1 \leq j \leq n, v_j \notin C_1\}$  e suponha, sem perda de generalidade, que  $t \in C_2$ . Então

$$dv_t = \sum_{j=1}^n a_t^j v_j = \sum_{j \in C_1} a_t^j v_j + \sum_{j \notin C_1} a_t^j v_j = \sum_{j \notin C_1} a_t^j v_j \leq \sum_{j \notin C_1} a_t^j v_t \leq dv_t.$$

e, como antes,  $v_j = v_t$  para todo  $j \in N(t)$  e, de fato, temos  $v_j = v_t$  para todo  $j \in C_2$  como foi feito acima para  $C_1$ . E, assim por diante, esse argumento mostra que  $\mathbf{v}$  é constante em cada componente conexa do grafo  $G$ . Assim, se  $m$  é o número de componentes conexas de  $G$ , então  $\dim V_{\lambda_1} \leq m$ .  $\square$

*Exercício 97.* Chamamos  $e = \{u, v\} \in E(G)$  de *aresta de corte* em  $G$  se  $G$  é conexo mas  $G - e$  não é conexo. Sejam  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  matrizes de adjacências de  $G$ ,  $G - e$  e  $G - u - v$ , respectivamente. Mostre que

$$p_A(x) = p_{A'}(x) - p_{A''}(x).$$

### 3.1.8 Árvores

*Árvores* são grafos conexos e sem circuitos. Como não contém circuito, pelo Exercício 78 toda árvore é um grafo bipartido, portanto valem os resultados da seção 3.1.5. Um fato bastante conhecido da Teoria dos Grafos é o seguinte.

*Exercício 98.* Prove que toda árvore sobre  $n$  vértices tem  $n - 1$  arestas. Prove que todo grafo conexo com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas é uma árvore.

*Exemplo 99.* O diagrama da Figura 3.7 representa uma árvore cujo polinômio característico é  $x^9 - 8x^7 + 15x^5 - 10x^3 + 2x$  e tem espectro

$$\left( \sqrt{\sqrt{7} + 3}, 1, 1, \sqrt{3 - \sqrt{7}}, 0, -\sqrt{3 - \sqrt{7}}, -1, -1, -\sqrt{\sqrt{7} + 3} \right).$$

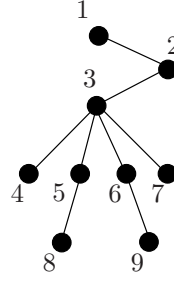


Figura 3.7: Exemplo de uma árvore.

Para toda árvore  $T$  vale  $\lambda_1(T) = -\lambda_n(T)$ , ademais o espectro de uma árvore de  $n$  vértices está no intervalo  $[-\sqrt{n-1}, \sqrt{n-1}]$  pois  $2|E(T)| = \text{tr}(A^2) \geq \lambda_1^2 + \lambda_n^2$ , que resulta em

$$\lambda_1(T) \leq \sqrt{n-1}, \quad (3.33)$$

para toda árvore  $T$  sobre  $n$  vértices. Esse limitante simples é justo como exemplo a seguir mostra.

*Exemplo 100 (Estrela de  $r$  pontas).* A estrela de  $r$  pontas, denotado por  $K^{1,r}$ , é um grafo bipartido completo com 1 vértice numa classe e  $r$  vértices na outra, cujo espectro é  $\text{Sp}(K^{1,r}) = (\sqrt{r}, 0, \dots, 0, -\sqrt{r})$ .

*Exercício 101.* Mostre que  $\lambda_1(T) = \sqrt{n-1}$  se e somente se  $T = K^{1,n-1}$ .

Agora, notemos que se  $T$  é uma árvore e  $v$  é um vértice de grau 1 em  $T$ , chamado de *folha*, então  $T - v$  é uma árvore. Não é difícil perceber que toda árvore  $T$  tem pelo menos  $\Delta(T)$  folhas, assim para qualquer subconjunto  $F \subset V(T)$  de folhas vale que  $T - F$  é uma árvore. Usando o Teorema do Entrelaçamento (página 43) deduzimos que

$$\lambda_j(T) \geq \lambda_j(T - F) \geq \lambda_{|F|+j}(T),$$

para todo  $F$  com  $1 \leq |F| \leq \Delta(T)$ . Assim,

$$\lambda_f(T) \leq \sqrt{n-f} \quad (3.34)$$

para todo  $1 \leq f \leq \Delta(T)+1$ . Um resultado um pouco melhor é dado a seguir. Primeiro, enunciaremos um lema cuja prova deixamos para o leitor.

**Lema 102.** *Dados um inteiro positivo  $m$  e uma árvore  $T$  sobre  $n$  vértices, existe um vértice  $v$  tal que  $T - v$  tem uma componente  $C_v$  com no máximo  $\max\{n - m - 1, m\}$  vértices e todas as demais componentes conexas têm no máximo  $m$  vértices.*  $\square$

No que segue, denotamos por  $[x]$  a parte inteira de  $x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 103.** *Se  $T$  é uma árvore sobre  $n$  vértices então*

$$\lambda_k(T) \leq \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1}$$

para todo  $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ .

*Demonstração.* Dados  $m$  e uma árvore  $T$ , pelo lema acima existe um vértice  $v_1$  em  $T$  e uma componente  $C_{v_1}$  de  $T - v_1$  com no máximo  $\max\{n - m - 1, m\}$  vértices e todas as demais componentes conexas têm no máximo  $m$  vértices.

Aplicamos o lema acima na componente  $C_{v_1}$  e obtemos  $v_2$  e  $C_{v_2}$  componente de  $T - v_1 - v_2$  com no máximo  $\max\{|V(C_{v_1})| - m - 1, m\} \leq \max\{n - 2m - 2, m\}$  vértices e as demais componentes têm no máximo  $m$ .

Indutivamente, dado um natural  $k$ , se  $n$  é suficientemente grande então existe uma seqüência  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de vértices de  $T$  tal que  $T - v_1 - v_2 - \dots - v_k$  tem uma componente com no máximo  $\max\{n - k(m - 1), m\}$  vértices e as demais componentes têm no máximo  $m$  vértices.

Se fizermos  $m = \lfloor n/k \rfloor$ , para  $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ , teremos  $\max\{n - k(m - 1), m\} \leq m = \lfloor n/k \rfloor$  pois, como  $n \leq k\lfloor n/k \rfloor + k - 1$ ,

$$n - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \leq (k - 1) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + k - 2 = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

Como toda componente tem  $\leq \lfloor n/k \rfloor$  vértices  $\lambda_1(T - v_1 - v_2 - \dots - v_k) \leq \sqrt{\lfloor n/k \rfloor - 1}$ . O resultado segue do Teorema do Entrelaçamento.  $\square$

*Exercício 104.* Uma *floresta* é um grafo sem circuitos. Mostre que se  $G$  é uma floresta então

$$\lambda_1 \leq \min\{2\sqrt{\Delta - 1}, \sqrt{n - 1}\}.$$

(Dica:  $\lambda_1 = -\lambda_n$  e  $\text{tr}(A^2) \leq 2n - 2$ .)

## 3.2 Matriz laplaciana

Dado um grafo  $G$ , definimos a matriz  $D_G$  por  $D_G = \text{diag}(d(1), d(2), \dots, d(n))$  e definimos a *matriz laplaciana* de  $G$ , denotada  $L_G$ , por

$$L_G = D_G - A_G \tag{3.35}$$

e se  $L_G = (\ell_i^j)$  então

$$\ell_i^j = \begin{cases} -1, & \text{se } \{i, j\} \in E(G) \\ d(i), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.36)$$

A matriz laplaciana de  $G$  também pode ser obtida da forma

$$L_G = QQ^T \quad (3.37)$$

onde  $Q$  é a matriz  $|V(G)| \times |E(G)|$  dada por

$$q_i^e = \begin{cases} 1, & \text{se } i = \min(e) \\ -1, & \text{se } i = \max(e) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Cada elemento dessa matriz pode ser escrito como

$$\ell_i^j = \sum_{e \in E(G)} q_i^e q_j^e \quad (3.39)$$

onde cada um dos dois elementos do somatório pode assumir valores 0, 1 ou  $-1$ , de modo que o resultado da soma coincide com (3.38).

*Exercício 105.* Dado um grafo  $G = (V, E)$ , considere o grafo orientado  $D = (V, A)$  obtido escolhendo-se uma orientação qualquer das arestas de  $G$ , isto é, se  $\{i, j\} \in E$  então  $(i, j) \in A$  ou  $(j, i) \in A$ . Redefina a matriz  $Q$  acima de acordo com a orientação escolhida pondo em (3.38)  $\min(i, j) = i$  e  $\max(i, j) = j$  para cada  $(i, j) \in A$ . Mostre que para qualquer orientação das arestas de  $G$  vale que  $L_G = QQ^T$ .

**Teorema 106.** *Os autovalores de  $L_G$  são reais.*

*Demonstração.* Decorre da definição da matriz que  $L_G$  é simétrica e, portanto, os autovalores são reais (Teorema 19).  $\square$

A seguir, enunciamos algumas das propriedades da matriz laplaciana de um grafo e seus autovalores.

**Proposição 107.** *A matriz laplaciana de um grafo é positiva e semidefinida, isto é,  $\langle L_G \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$  para todo vetor  $\mathbf{v}$  e para todo grafo  $G$ .*

*Demonstração.* Dado um vetor  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^T$  temos

$$\langle L_G \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T Q Q^T \mathbf{v} = (Q^T \mathbf{v})^T (Q^T \mathbf{v}) = \langle Q^T \mathbf{v}, Q^T \mathbf{v} \rangle \geq 0, \quad (3.40)$$

portanto,  $L_G$  é positiva e semidefinida.  $\square$

Disso concluímos, usando o Princípio de Rayleigh os seguintes corolários.

**Corolário 108.** *Os autovalores de  $L_G$  são não-negativos.*  $\square$

**Corolário 109.** *Todo grafo tem 0 como o menor autovalor da matriz laplaciana e  $\mathbf{1}$  é um autovetor associado.*  $\square$

Desenvolvendo  $\langle Q^T \mathbf{v}, Q^T \mathbf{v} \rangle$  notamos que se  $e = \{i, j\}$  e  $i < j$  então na linha  $e$  do vetor  $Q^T \mathbf{v}$  temos

$$\sum_{k=1}^n q_e^k v_k = (v_i - v_j) \quad (3.41)$$

logo  $\langle Q^T \mathbf{v}, Q^T \mathbf{v} \rangle = \sum_{ij \in E(G)} (v_i - v_j)(v_i - v_j)$ , portanto a forma quadrática  $q_{L_G}(\mathbf{v})$  tem a seguinte forma, muito útil por sua simplicidade

$$q_{L_G}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, L_G \mathbf{v} \rangle = \sum_{ij \in E(G)} (v_i - v_j)^2. \quad (3.42)$$

*Exemplo 110.* Pelo Princípio de Rayleeigh o segundo menor autovalor do caminho  $P^{n+1}$  é dado por  $\min R_{L_G}(\mathbf{v})$  com  $\mathbf{v} \perp \mathbf{1}$  não-nulo. Por (3.42) podemos limitar esse valor fazendo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -n & -n+2 & -n+4 & \cdots & n-4 & n-2 & n \end{pmatrix}^T$$

com o qual temos

$$\min_{\mathbf{x} \perp \mathbf{1}} R_{L_G}(\mathbf{x}) \leq \frac{\sum_{ij \in E(G)} (v_i - v_j)^2}{\sum_i v_i^2} = \frac{4n}{4(n(n+1)(2n+1)/6)} = \frac{6}{(n+1)(2n+1)}.$$

O espectro de  $L_G$ , que também chamamos de *espectro laplaciano de  $G$*  é a seqüência de seus autovalores em ordem *não-decrescente*

$$\text{Sp}_L = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n), \quad \text{com} \quad 0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n = \mu_{\max}, \quad (3.43)$$

onde  $n = |V(G)|$ .

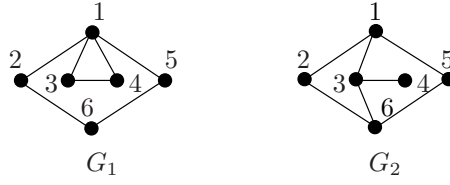


Figura 3.8: Grafos coespectrias com relação a matriz laplaciana

Como no caso da matriz de adjacências, o espectro laplaciano, em geral, não determina o grafo. Os dois grafos não-isomorfos representados na Figura 3.8 têm o mesmo espectro.

Para grafos  $d$ -regulares, se  $L = L_G$  é a matriz laplaciana com espectro  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  e  $A = A_G$  é a matriz de adjacência com espectro  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  então, por definição  $L = D_G - A = d \cdot \text{Id}_n - A$ , portanto o polinômio característico de  $L$  é

$$p_L(x) = \det(x\text{Id}_n - L) = (-1)^n \det((d - x)\text{Id}_n - A) \quad (3.44)$$

e podemos concluir a seguinte relação entre os autovalores  $A_G$  e  $L_G$

$$\mu_i = d - \lambda_i \quad (3.45)$$

para todo  $i \in [n]$ .

*Exemplo 111 (Grafo de Petersen).* O grafo de Petersen, Exemplo 48 na página 37, tem espectro laplaciano  $(0, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5)$ .

*Exemplo 112 (Grafo completo).* O espectro laplaciano do grafo completo  $K^n$  tem 0 como menor autovalor e  $n$  com multiplicidade  $n - 1$

$$(0, n, \dots, n).$$

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Notemos que  $\mu_1(\overline{G}) = \mu_1(G) = 0$ . Agora, consideremos os autovetores ortogonais  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{1}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  com  $L_G \mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{v}_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , dados pelo Teorema Espectral.

É fácil notar, diretamente da definição, que  $L_{\overline{G}} = n\text{Id}_n - J - L_G$ , em que  $J$  é a matriz quadrada de ordem  $n$  com todas as entradas iguais a 1. Logo  $L_{\overline{G}} \mathbf{v}_i = (n\text{Id}_n - J - L_G) \mathbf{v}_i$  e se  $i \neq 1$  então  $J \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ , ou seja,

$$L_{\overline{G}} \mathbf{v}_i = (n\text{Id}_n - L_G) \mathbf{v}_i = (n - \mu_i) \mathbf{v}_i$$

para todo  $2 \leq i \leq n$ . Com isso, e considerando a ordem em que os autovalores aparecem no espectro da matriz laplaciana, provamos o seguinte resultado.

**Proposição 113.** Se  $G$  é um grafo de  $n$  vértices então  $\mu_1(\overline{G}) = \mu_1(G)$  e

$$\mu_i(\overline{G}) = n - \mu_{n-i+2}(G),$$

para todo  $2 \leq i \leq n$ . □

*Exemplo 114* (Grafo bipartido completo). O espectro laplaciano do grafo bipartido completo, definido na página 50, denotado  $K^{n,m}$  é

$$(0, \underbrace{n, \dots, n}_{m-1}, \underbrace{m, \dots, m}_{n-1}, n+m)$$

pois o complemento de  $K^{n,m}$  é a união disjunta de  $K^n$  com  $K^m$ .

**Proposição 115.** Para todo  $G$  vale  $\mu_{\max} \leq 2\Delta(G)$ .

*Demonstração.* Essa desigualdade segue do Teorema de Perron–Frobenius aplicado a matriz  $\Delta(G)\text{Id}_n - L_G$  que é simétrica, não-negativa e irredutível; pelo terceiro item desse teorema tiramos que o maior autovalor dessa matriz é maior ou igual ao valor absoluto de qualquer outro autovalor dela, ou seja,  $\Delta(G) - 0 \geq |\Delta(G) - \mu_{\max}(G)|$ . □

*Exercício 116.* Mostre que se  $G$  tem espectro laplaciano  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  então

$$\sum_i \mu_i = 2e(G) \leq \sqrt{n \sum_i \mu_i(\mu_i - 1)},$$

com igualdade se e só se  $G$  é regular.

### 3.2.1 Componentes conexas

O número de componentes conexas de um grafo, como vimos, é igual a multiplicidade algébrica do maior autovalor (Teorema 96). No caso do espectro laplaciano temos um resultado análogo.

**Lema 117.** Para todo grafo  $G$ , a multiplicidade algébrica de  $\mu_1(G)$  é igual ao número de componentes conexas de  $G$ .

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo com matriz laplaciana  $L = L_G$ ,  $C$  uma componente conexa de  $G$  e tome seu vetor característico  $\mathbf{c} = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)^T$ . Da definição de  $L$  obtemos, na linha  $i$  de  $L\mathbf{c}$ , a igualdade

$$\sum_{j=1}^n \ell_i^j c_j = \ell_i^i c_i + \sum_{j \neq i} \ell_i^j c_j = 0 \tag{3.46}$$



para todo  $i \in [n]$ . Isso implica que 0 é uma autovalor de  $L$  com autovetor associado  $\mathbf{c}$ . Se  $G$  tem  $m$  componentes conexas os  $m$  vetores característicos são autovetores ortogonais associados ao autovalor 0, portanto a dimensão do auto-espaço  $V_{\mu_1}$  é pelo menos  $m$ .

Por outro lado, se  $\mathbf{x}$  é um autovetor de 0 então (veja equação (3.42))

$$0 = \langle \mathbf{x}, L\mathbf{x} \rangle = \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 \quad (3.47)$$

que implica em  $\mathbf{x}$  constante em cada componente conexa de  $G$ , ou seja,  $\mathbf{x}$  é uma combinação linear dos vetores característicos das componentes e, portanto,  $\dim V_{\mu_1} \leq m$ . Como  $\text{ma}(\mu_1) = \text{mg}(\mu_1)$  (Teorema 18, página 17) temos que  $m$  é a multiplicidade algébrica de  $\mu_1$ .  $\square$

**Corolário 118.** *Para todo grafo  $G$  com  $n$  vértices,  $\mu_n \leq n$  com igualdade se e somente se  $\overline{G}$  é desconexo.*

*Demonstração.* Da Proposição 113 temos  $\mu_n(G) = n - \mu_2(\overline{G})$ , portanto,  $\mu_n(G) = n$  se, e somente se,  $\mu_2(\overline{G}) = 0$  que, por sua vez, ocorre se e somente se  $\overline{G}$  é desconexo.  $\square$

### 3.2.2 Árvores geradoras: o Teorema de Kirchhoff

Seja  $G$  um grafo conexo. Uma árvore geradora de  $G$  é um subgrafo  $T$  de  $G$  tal que  $T$  é árvore e  $V(T) = V(G)$ . Nessa seção vamos determinar o número de árvores geradoras de um grafo conexo  $G$  de  $n$  vértices em função de sua matriz laplaciana.

Seja  $L = QQ^T$  a matriz laplaciana de um grafo conexo  $G$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Vamos supor que  $G$  não é uma árvore, portanto,  $m \geq n$  (Exercício 98, página 56). Lembremos que  $L_k^k$  denota  $(\ell_i^j)_{i,j \neq k}$  e que, de acordo com a notação do Exercício 2, página 10, para  $S \subset [n]$ ,  $Q^S$  é a matriz  $n \times n$  dada por  $(q_i^j)_{j \in S}$  e  $Q^T_S$  a matriz  $n \times n$  dada por  $(q_i^T_j)_{i \in S}$  e temos

$$\det(L_k^k) = \det((Q_{\overline{\{k\}}})(Q_{\overline{\{k\}}}^T))$$

e usando a fórmula de Binet–Cauchy para o determinante do produto de matrizes, com  $M = Q_{\overline{\{k\}}}$

$$\det(L_k^k) = \sum_{\overline{S}} \det(M^{\overline{S}}) \det((M^{\overline{S}})^T)$$

onde  $S$  é um conjunto de  $m - n + 1$  arestas. Dessa forma,  $|\overline{S}| = n - 1$ , portanto,  $M^{\overline{S}}$  é uma matriz  $n - 1 \times n - 1$  e denotamos por  $G' = G'(S)$  o grafo obtido de  $G$  removendo-se  $m - n + 1$  as arestas de  $S$ .

Agora, resta mostrar que

$$\det(M^{\overline{S}}) = \begin{cases} \pm 1, & \text{se as arestas de } \overline{S} \text{ determinam uma árvore} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.48)$$

Se as arestas de  $\overline{S}$  não determinam uma árvore então existe uma componente conexa de  $G'$  que não contém o vértice  $k$ . A soma das linhas que correspondem aos vértices dessa componente é 0, portanto são linhas linearmente dependentes, ou seja, pelo Teorema 5, página 10, temos  $\det(M^{\overline{S}}) = 0$ .

Se  $G'$  é uma árvore, então tome uma folha  $f_1 \neq k$  e considere a árvore  $G'' = G' - f_1$ . Continuando dessa maneira temos uma seqüência de folhas  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$  e uma seqüência de arestas  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  tais que  $f_i \in e_i$ .

Seja  $\rho$  uma permutação de  $[n]$  que nas linhas de  $M^{\overline{S}}$  deixa  $f_k$  na linha  $k$ . Como  $f_k \notin e_i$  para  $i > k$ , essa matriz, denotada por  $Q'$ , é triangular inferior com  $\pm 1$  na diagonal, portanto o determinante de  $M^{\overline{S}}$  é  $\pm \det(Q') = \pm 1$ . Com isso provamos o seguinte teorema.

**Teorema 119** (Teorema de Kirchhoff). *Seja  $G$  um grafo com matriz laplaciana  $L$ . Para qualquer  $u \in V(G)$ ,  $\det(L_u^u)$  é o número de árvores geradoras de  $G$ .*  $\square$

**Corolário 120.** *O número de árvores geradoras de  $G$  é*

$$\frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \mu_i. \quad (3.49)$$

*Demonstração.* Podemos supor  $G$  conexo, caso contrário  $\mu_2 = 0$  e o resultado segue. Como  $\mu_1 = 0$  o termo constante de  $p_L(x) = \det(x\text{Id}_n - L)$  é zero. O coeficiente de  $x$  é  $(-1)^{n-1} \prod_{i=2}^n \mu_i$ . Pelo Exercício 1, página 9, esse mesmo coeficiente é  $(-1)^{n-1} \sum_v \det L_v^v$ .  $\square$

O seguinte resultado é conhecido como *fórmula de Cayley para o número de árvore*.

**Corolário 121.** *Existem  $n^{n-2}$  árvores sobre o conjunto de vértices  $[n]$ .*

*Demonstração.* Basta tomar  $G = K^n$  no corolário acima.  $\square$

### 3.2.3 O segundo menor autovalor

O autovalor  $\mu_2$  de um espectro laplaciano é chamado de *conexidade algébrica do grafo* e tem um papel importante no estudo da conexidade de um grafo. Vimos que  $\mu_2(G) = 0$  é equivalente a  $G$  desconexo e o que de fato sabemos é que quanto maior  $\mu_2$  mais difícil é desconectar o grafo no seguinte sentido.

Dado um subconjunto  $U \subset V(G)$  e  $k \in \mathbb{N}$ , dizemos que um grafo  $G$  é *k-conexo* se

- $|V(G)| > k$  e
- para todo  $U \subset V(G)$ , se  $|U| < k$  então  $G - U$  é conexo.

Segue, imediatamente dessa definição, que todo grafo  $k$ -conexo também é  $\ell$ -conexo para todo natural  $\ell < k$ . A *conexidade* de  $G$  é o maior inteiro  $k$  para o qual  $G$  é  $k$ -conexo

$$\kappa(G) = \max \{k \in \mathbb{N}: G \text{ é } k\text{-conexo}\}. \quad (3.50)$$

A afirmação que quanto maior  $\mu_2$  mais difícil é desconectar o grafo é traduzida no seguinte resultado.

**Teorema 122.** *Para todo grafo  $G$  vale  $\kappa(G) \geq \mu_2(G)$ .*

Esse resultado segue facilmente, como veremos, do lema a seguir cuja prova adiamos.

**Lema 123.** *Para todo  $G$  e todo  $U \subseteq V(G)$*

$$\mu_2(G) \leq \mu_2(G - U) + |U|. \quad (3.51)$$

*Demonstração do Teorema 122.* Seja  $G$  um grafo e  $U \subset V(G)$  tal que  $G - U$  é desconexo, onde  $|U| = \kappa(G)$ . Em (3.51) temos  $\mu_2(G) \leq 0 + \kappa(G)$ , donde segue o teorema.  $\square$

O trabalho pesado da prova do Teorema 122 ficou todo no Lema 123 que passamos a demonstrar agora.

*Demonstração do Lema 123.* Seja  $G$  um grafo e  $v \in V(G)$ . Definimos os grafos

$$\begin{aligned} H &= G - v \\ F &= (V(G), E(H) \cup \{vu: u \in V(G)\}) \\ K &= (V(G) \setminus N_G(v), \emptyset) \end{aligned}$$

Notemos que  $E(F) = E(G) \cup E(K^{1,m} \cup K)$ , em que a união é disjunta e  $K^{1,m}$  é uma estrela com  $m = d_G(v)$  pontas centrada em  $v$  e  $K$  é um grafo com  $n - m$  vértices isolados, logo  $L_F = L_G + L_{K^{1,m} \cup K}$ .

Usando as Desigualdades de Weyl (página 27) em  $L_F = L_G + L_{K^{1,m} \cup K}$  temos

$$\mu_i(G) + \mu_{\min}(K^{1,m} \cup K) \leq \mu_i(F) \leq \mu_i(G) + \mu_{\max}(K^{1,m} \cup K)$$

ou seja

$$\mu_i(G) \leq \mu_i(F) \leq \mu_i(G) + m + 1. \quad (3.52)$$

Ademais, temos  $\mu_2(F) \leq \mu_2(H) + 1$ . De fato, se  $L = L_G$  e  $L_v^v = (h_i^j)$  e  $L_F = (f_i^j)$  então temos as seguintes relações

$$\text{se } i \neq v \quad \text{então } f_i^i = d_F(i) = d_H(i) + 1 = h_i^i + 1 \quad (3.53)$$

$$\text{se } i = v \quad \text{então } f_i^i = d_F(v) = n - 1 \quad (3.54)$$

$$\text{se } i \neq j \neq v \quad \text{então } f_i^j = h_i^j \text{ e } f_i^v = f_v^i = -1. \quad (3.55)$$

Agora, se  $\mu \neq \mu_1(L_v^v)$  é um autovalor de  $L_v^v$  e  $\mathbf{u} \perp \mathbf{1}$  um autovetor associado, então o vetor  $\mathbf{u}'$  com componentes  $u'_i = u_i$  caso  $i \neq v$  e  $u'_v = 0$  é um autovetor de  $L_F$  com autovalor  $\mu + 1$ , pois na linha  $i$  de  $L_F \mathbf{u}'$  lemos

$$\sum_{j \in V(G)} f_i^j u'_j = \sum_{\substack{j \in V(G) \\ j \neq v}} f_i^j u_j = \begin{cases} \sum_{j \neq v, i} f_i^j u_j + f_i^i u_i & \text{caso } i \neq v \\ \sum_{j \neq v} f_v^j u_j & \text{caso } i = v \end{cases}.$$

No caso  $i \neq v$  temos

$$\sum_{j \neq v, i} f_i^j u_j + f_i^i u_i = \sum_{j \neq v, i} h_i^j u_j + (h_i^i + 1)u_i = (\mu + 1)u_i$$

e caso contrário temos

$$\sum_{j \neq v} -1 u_j = 0$$

pois  $\mathbf{u}$  é ortogonal a  $\mathbf{1}$ . Notemos que  $\mu_i(L_v^v) = \mu_i(H)$ , ou seja, com (3.52) provamos que

$$\mu_i(G) \leq \mu_i(F) \leq \mu_i(H) + 1. \quad (3.56)$$

Da desigualdades (3.56) acima

$$\mu_2(G) \leq \mu_2(G - v) + 1 \text{ para todo } v \in V(G) \quad (3.57)$$

e usando uma indução simples podemos provar o lema, os detalhes são deixados a cargo do leitor.  $\square$

*Exercício 124.* Mostre que  $\mu_2(G) \leq \mu_2(G + e) \leq \mu_2(G) + 2$  para toda aresta  $e \subseteq V(G)$ ,  $e \notin E(G)$ .

O Princípio de Rayleigh caracteriza o segundo autovalor como o valor mínimo de  $R_{L_G}(\mathbf{x})$  onde  $\mathbf{x}$  varia sobre todos os vetores ortogonais a  $\mathbf{1}$ . Esse fato se traduz da seguinte maneira muito útil em situações que envolvem  $\mu_2(G)$ .

**Proposição 125.** Para todo  $G = (V, E)$

$$\mu_2 = 2n \min_{\mathbf{x} \perp \mathbf{1}} \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (x_i - x_j)^2}. \quad (3.58)$$

Ainda, para qualquer constante  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\mu_2 = 2n \min_{\mathbf{x} \neq c \cdot \mathbf{1}} \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (x_i - x_j)^2}. \quad (3.59)$$

*Demonstração.* Para provar a equação (3.58), observe que

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (x_i - x_j)^2 \\ &= \sum_i^n \sum_j^n x_i^2 - 2 \sum_i^n \sum_j^n x_i x_j + \sum_i^n \sum_j^n x_j^2 \\ &= \sum_j^n \sum_i^n x_i^2 - 2 \sum_i^n \sum_j^n x_i x_j + \sum_i^n \sum_j^n x_j^2 \\ &= n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2 \sum_i^n x_i \sum_j^n x_j + n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= 2n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle^2 = 2n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

pois  $\mathbf{x}$  é ortogonal a  $\mathbf{1}$ . Então, usando o Princípio de Rayleigh e (3.42)

$$\mu_2 = \min_{\mathbf{x} \perp \mathbf{1}} \frac{\langle \mathbf{x}, L\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = 2n \min_{\mathbf{x} \perp \mathbf{1}} \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (x_i - x_j)^2}. \quad (3.60)$$

Para a equação (3.59), observe que

$$\frac{\sum_{ij \in E} ((x_i + c) - (x_j + c))^2}{\sum_i \sum_j ((x_i + c) - (x_j + c))^2} = \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{\sum_i \sum_j (x_i - x_j)^2} \quad (3.61)$$

o que prova a igualdade.  $\square$

Analogamente, temos a seguinte igualdade para o maior autovalor, cuja verificação deixamos a cargo do leitor.

*Exercício 126.* Prove que para qualquer  $c \in \mathbb{R}$

$$\mu_n = 2n \max_{\mathbf{x} \neq c \cdot \mathbf{1}} \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (x_i - x_j)^2}. \quad (3.62)$$

**Corolário 127.** Para todo  $G$  com  $n$  vértices

$$\mu_2(G) \leq \frac{n}{n-1} \delta(G) \leq \frac{n}{n-1} \Delta(G) \leq \mu_n(G). \quad (3.63)$$

*Demonstração.* Para a primeira desigualdade tome  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$  em (3.59)

$$\mu_2 \leq 2n \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (x_i - x_j)^2} = 2n \frac{d(k)}{2(n-1)} = \frac{n}{n-1} d(k), \quad (3.64)$$

para todo  $k \in V$ . A segunda desigualdade é trivial e a terceira segue de modo análogo a derivação da primeira usando (3.62).  $\square$

**Corolário 128.** Se  $G$  é um grafo conexo de diâmetro  $d$  e  $n$  vértices então  $\mu_2(G) \geq 2/dn$ .

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo de diâmetro  $d$  e  $\mathbf{v}$  um autovetor associado a  $\mu_2$  e que satisfaz (3.58). Tomemos  $x, y \in V(G)$  dados por  $(v_x - v_y)^2 = \max_{i,j \in V} (v_i - v_j)^2$  que é diferente de zero pois  $\mathbf{v} \perp \mathbf{1}$ . Seja  $P^{\ell+1} = (x = i_0, i_1, \dots, i_\ell = y)$  um caminho de comprimento mínimo ligando esses dois vértices. Então

$$\begin{aligned} \mu_2 &= 2n \frac{\sum_{ij \in E(G)} (v_i - v_j)^2}{\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (v_i - v_j)^2} \\ &\geq 2n \frac{\sum_{ij \in E(P^{\ell+1})} (v_i - v_j)^2}{n^2 (v_x - v_y)^2} \\ &\geq \frac{2}{n\ell} \left( \sum_{ij \in E(P^{\ell+1})} \frac{(v_i - v_j)}{v_x - v_y} \right)^2 \\ &= \frac{2}{n\ell} \geq \frac{2}{nd}, \end{aligned}$$

na segunda linha aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.  $\square$

### Cortes de arestas

Dados  $G = (V, E)$  e  $U \subseteq V(G)$  o *corte associado a  $U$*  em  $G$  é o subconjunto das arestas  $E(U, \bar{U})$  em  $G$  que têm um extremo em  $U$  e outro em  $\bar{U}$ , cuja cardinalidade é  $e(U, \bar{U})$ . Se  $\mathbf{u}$  denota o vetor característico de  $U$  então por (3.59)

$$\mu_2 \leq 2n \frac{\sum_{ij \in E} (u_i - u_j)^2}{\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (u_i - u_j)^2} = 2n \frac{e(U, \bar{U})}{2|U|(n - |U|)}.$$

Analogamente, por (3.62)

$$\mu_n \geq 2n \frac{\sum_{ij \in E} (u_i - u_j)^2}{\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} (u_i - u_j)^2} = 2n \frac{e(U, \bar{U})}{2|U|(n - |U|)}.$$

Reescrevendo essas desigualdades

**Proposição 129.** *Para todo  $G$*

$$\mu_2 \frac{|U||\bar{U}|}{n} \leq e(U, \bar{U}) \leq \mu_n \frac{|U||\bar{U}|}{n}. \quad (3.65)$$

para todo  $U \subset V(G)$ , com  $U \neq \emptyset$ . □

*Exercício 130.* Dizemos que  $G$  é  $k$ -aresta-conexo se  $G$  tem pelo menos dois vértices e a remoção de qualquer subconjunto de arestas com menos que  $k$  arestas não torna  $G$  desconexo. Prove que se  $\mu_2 \geq 2$ , então um grafo  $d$ -regular  $G = (V, E)$  é  $d$ -aresta-conexo.

Para finalizar essa seção, vamos demonstrar o seguinte teorema que versa sobre o que é conhecido em Teoria dos Grafos como desigualdades isoperimétricas e

$$\min \left\{ \frac{e(U, \bar{U})}{|U|} : U \subseteq V(G), |U| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$

é chamada constante isoperimétrica (computacionalmente seu cálculo é um problema NP-difícil) e mede quantas arestas seria preciso remover para desconectar uma parte grande do grafo. Notemos que se  $\mathbf{u}$  é o vetor característico de  $U$  então  $R_L(\mathbf{u}) = e(U, \bar{U})/|U|$ .

**Teorema 131.** *Para todo  $G$*

$$\mu_2 \leq 2 \min_{\substack{U \subseteq V(G) \\ |U| \leq \frac{|V|}{2}}} \frac{e(U, \bar{U})}{|U|} \quad (3.66)$$

*Demonstração.* Fixe  $U \neq \emptyset$  qualquer e tome  $\mathbf{u}$  o vetor

$$u_i = \begin{cases} |U|^{-1} & \text{se } i \in U \\ -|\overline{U}|^{-1} & \text{se } i \notin U \end{cases} \quad (3.67)$$

então

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{1} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{|U|}|U| + \frac{-1}{|\overline{U}|}|\overline{U}| = 0. \quad (3.68)$$

Como  $\mathbf{u}$  é ortogonal a  $\mathbf{1}$ ,

$$\mu_2 \leq \frac{\sum_{i,j \in E} (u_i - u_j)^2}{\sum_i u_i^2} = \left( \frac{1}{|U|} + \frac{1}{|\overline{U}|} \right) e(U, \overline{U}) \leq \frac{2}{|U|} e(U, \overline{U}) \quad (3.69)$$

donde segue o enunciado.  $\square$

## Comentários adicionais e referências bibliográficas

Neste capítulo mostramos as principais técnicas da Teoria Espectral de Grafos. Um estudo mais pragmático do assunto pode ser feito a partir de [8, 7, 13, 5]. Mais sobre aplicações de matrizes laplacianas de grafos pode ser encontrado em [25] e nas referências desse artigo. Vários temas e problemas não foram abordados aqui, por exemplo, determinar quais grafos são determinados pelo espectro é um problema que não está completamente resolvido, sabe-se que alguns grafos são determinados pelo espectro, para a maioria deles não se sabe (veja [30]); o par de grafos distintos com mesmo espectro dado no Exemplo 3.3 é clássico e foi dado pela primeira vez por Cvetković em 1971.

O Teorema 57 é devida a Collatz e Sinogowitz de 1957 [6] e marca o início do estudo sistemático da Teoria Espectral de Grafos, cujos primeiros resultados datam de 1931 e estão relacionados a problemas surgidos na Química. A primeira desigualdade no Exercício 63 é de 1993 devida a Favaron, Mahéo e Saclé que mostram que a igualdade vale se e só se  $G$  é regular ou *semiregular*, isto é, bipartido e vértices da mesma parte têm o mesmo grau. A Proposição 71 é de Bollobás e Nikiforov (2004). O Teorema 85 é de Fan Chung (1989) e o Teorema 86 é devido a Quenell (1994). O limitante para o segundo maior autovalor em termos absolutos dado na Proposição 87 é uma versão fraca de um resultado de Alon e Boppana e, independentemente, Buser e também Serre que mostra que a cota inferior é  $2\sqrt{d-1}$ . Jia-Yu Shao (1991) provou o Teorema 103; em 2005 Ji-Ming Guo caracterizou a família de árvores aonde vale a igualdade na equação



do Teorema 103, como caso particular obteve que  $\lambda_1(T) = \sqrt{n-1}$  se e somente se  $T = K^{1,n-1}$ .

O Teorema de Kirchhoff e a fórmula de Cayley para o número de árvores são resultados clássicos e datam de 1847 e 1889, respectivamente. A Proposição 125 é de Fiedler (1975) assim como o Corolário 127 (1973) e é devida a Fiedler a caracterização do segundo autovalor laplaciano dado em (3.58). Para a NP-completeza de (3.66) veja [12].



# VALORES EXTREMOS E TÍPICOS

Neste capítulo veremos relações entre o espectro parâmetros importantes de grafos: número de independência ( $\alpha$ ), clique máximo ( $\omega$ ) e número cromático ( $\chi$ ); apresentamos esses invariantes, damos alguns limitantes conhecidos e mostramos como eles se relacionam com autovalores da matriz de adjacências.

Também veremos os valores típicos desses parâmetros no seguinte sentido. Denotemos por  $\mathcal{G}(n)$  o conjunto de todos os grafos sobre  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  e, assim, qualquer propriedade  $P$  de grafos é naturalmente identificada com um subconjunto  $\mathcal{P}(n)$  de  $\mathcal{G}(n)$ . Se  $\mathcal{P}(n) \subset \mathcal{G}(n)$  é uma subfamília de grafos então dizemos que os grafos de  $\mathcal{P}(n)$  são *típicos* se  $|\mathcal{P}(n)|/|\mathcal{G}(n)| \rightarrow 1$  conforme  $n \rightarrow \infty$ , nesse caso dizemos que *quase-todo* grafo de  $\mathcal{G}(n)$  pertence a  $\mathcal{P}(n)$ . Nesse caso, se para todo natural  $n$ ,  $\mathcal{P}(n)$  é a família dos grafos que satisfazem uma propriedade  $P$ , então dizemos que quase-todo grafo satisfaz (ou tem)  $P$ .

Damos os valores típicos dos números de independência e cromático, em seguida, damos os valores típicos do maior e segundo maior autovalores. Veremos que grafos de  $\mathcal{G}(n)$  com  $\lambda_1$  aproximadamente  $n/2$  e  $\lambda(G) = \max\{|\lambda_i(G)| : i \neq 1\}$  muito menor que  $n$  são típicos. Na última seção deste capítulo estudamos a distribuição das arestas de um grafo em função de  $\lambda$  definido em (??).

Neste capítulo adotamos a notação  $N = \binom{n}{2}$ .

## 4.1 Conjuntos independentes

Um subconjunto  $U \subset V(G)$  é dito *independente* no grafo  $G$  se  $G[U]$  é vazio, isto é,  $G[U] = (U, \emptyset)$ . Denotamos por  $\alpha(G)$  a cardinalidade do maior conjunto independente em  $G$ ,

$$\alpha(G) = \max\{|A| : A \subset V(G) \text{ é um conjunto independente}\}.$$

O seguinte resultado exhibe algumas delimitações conhecidas para o *número de independência* de  $G$ , deixamos as demonstrações para o leitor.

**Proposição 132.** *Para todo  $G$  sem vértice de grau zero,*

1.  $\alpha(G) \geq |V(G)|/(\Delta(G) + 1);$

2.  $\alpha(G) \leq |E(G)|/\delta(G)$ ;
3.  $\alpha(G) \leq |V(G)| - \text{posto}(A_G)/2$ .

*Demonstração.* Damos como exercício para o leitor.  $\square$

Notemos que o limitante (1), por exemplo, é justo para grafos completos mas extremamente pobre para grafos bipartidos completos. O mesmo fenômeno ocorre com os limitantes em (2) e (3), há grafos onde vale a igualdade e grafos onde a distância é arbitrariamente grande.

A seguir damos um limitante para  $\alpha(G)$  que decorre de maneira simples do Teorema do Entrelaçamento.

**Proposição 133.** *Para todo grafo, denote por  $\lambda^{\leq 0}$  o número de autovalores menores ou iguais a zero e  $\lambda^{\geq 0}$  o número de autovalores maiores ou iguais a zero.*

$$\alpha(G) \leq \min\{\lambda^{\leq 0}, \lambda^{\geq 0}\}.$$

*Demonstração.* O subgrafo induzido por um conjunto independente  $U$  tem matriz de adjacências  $\mathbf{0}$ , portanto, autovalores 0 com multiplicidade algébrica igual a  $|U|$ . Segue do Teorema do Entrelaçamento (página 43) que  $\lambda_i(G) \geq 0$  e  $\lambda_{n-i+1}(G) \leq 0$  para todo  $i \in [|U|]$ . Se  $U$  é um conjunto independente máximo então  $|U| \leq |\{i: \lambda_i(G) \leq 0\}|$  e que  $|U| \leq |\{i: \lambda_i(G) \geq 0\}|$ .  $\square$

O próximo resultado é uma belo exemplo de aplicação do entrelaçamento de autovalores.

**Teorema 134.** *Para todo grafo  $G$  de  $n$  vértices e grau mínimo  $\delta$  vale*

$$\alpha(G) \leq n \frac{-\lambda_1 \lambda_n}{\delta^2 - \lambda_1 \lambda_n}.$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo e  $U$  um conjunto independente em  $G$ . A partição  $\{U, \bar{U}\}$  de  $V(G)$  define a matriz  $E$  abaixo segundo o Lema 68, página 44,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e(U, \bar{U})}{\sqrt{|U||\bar{U}|}} \\ \frac{e(U, \bar{U})}{\sqrt{|U||\bar{U}|}} & \frac{2e(\bar{U})}{|\bar{U}|} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

de modo que  $\lambda_1(A) \geq \lambda_1(E) \geq \lambda_2(E) \geq \lambda_n(A)$  e

$$-\lambda_1(E)\lambda_2(E) = -\det(E) = \frac{e(U, \overline{U})^2}{|U||\overline{U}|}$$

logo

$$-\lambda_1(A)\lambda_n(A) \geq -\lambda_1(E)\lambda_2(E) \geq \frac{\delta^2|U|}{|\overline{U}|}$$

onde a última desigualdade vem do fato de  $e(U, \overline{U}) \geq \delta|U|$ . O teorema segue tomando  $U$  um conjunto independente de cardinalidade  $\alpha(G)$  e resolvendo a desigualdade acima para  $\alpha(G)$ .  $\square$

No teorema acima vale a igualdade na estrela de  $n - 1$  pontas (veja Exemplo 100): temos  $\delta = 1$ ,  $\lambda_1 = -\lambda_n = \sqrt{n - 1}$  e  $\alpha = n - 1$ . Na árvore da Figura 3.7 temos  $\alpha = 5$  que é menor que  $n(-\lambda_1\lambda_n)/(\delta^2 - \lambda_1\lambda_n) = 5 + \sqrt{7}$ .

No caso particular de grafos  $d$ -regulares o teorema fica

$$\alpha(G) \leq n \frac{-\lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} = n \frac{-\lambda_n}{d - \lambda_n} \quad (4.2)$$

e vale a igualdade no grafo de Petersen (Figura 3.2, página 37), onde temos  $n = 10$ ,  $\lambda_1 = d = 3$ ,  $\lambda_n = -2$  e  $\alpha = 4$ . Também vale a igualdade para o 3-cubo.

*Exercício 135.* Dê um exemplo de grafo regular onde (4.2) é uma desigualdade estrita.

## 4.2 Cliques

Chamamos um subconjunto  $U \subset V(G)$  de *clique* em  $G$  se  $G[U]$  é completo. Claramente, se  $U$  é um clique em  $G$  então  $U$  é um conjunto independente em  $\overline{G}$  e como o complemento de  $\overline{G}$  é  $G$  temos que o maior clique em  $G$  tem cardinalidade  $\alpha(\overline{G})$ . Denotamos por  $\omega(G)$  a cardinalidade do maior clique em  $G$ ,

$$\omega(G) = \max\{|A| : A \subset V(G) \text{ é um clique}\}.$$

Quando  $G$  é  $d$ -regular, temos  $\lambda_1(\overline{G}) = n - 1 - d$  e  $\lambda_n(\overline{G}) = -(\lambda_2(G) + 1)$ , portanto a equação (4.2) fica

$$\omega(G) \leq n \frac{\lambda_2 + 1}{n - d + \lambda_2} = n \frac{\lambda_2 + 1}{n - d + \lambda_2}. \quad (4.3)$$

**Proposição 136.** *Para todo  $G$*

$$\omega(G) \leq 1 + \lambda_1(G). \quad (4.4)$$

*Demonstração.* Por entrelaçamento temos  $\lambda_1(G) \geq \lambda_1(G[U])$ , para todo  $U \subseteq V(G)$ . Seja  $U$  um clique em  $G$  de tamanho  $\omega(G)$ . O resultado segue de  $\lambda_1(G[U]) = \omega(G) - 1$ .  $\square$

Para o próximo resultado, precisaremos da desigualdade de Motzkin–Strauss que diz o seguinte: para todo grafo  $G$  e para todo vetor  $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n)^T$  com  $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 1$  vale que

$$\sum_{ij \in E(G)} v_i v_j \leq \frac{\omega(G) - 1}{2\omega(G)}. \quad (4.5)$$

De fato, dado um vetor  $\mathbf{v}$ , se  $x$  e  $y$  são vértices não adjacentes tais que  $v_x, v_y > 0$  e

$$\sum_{\ell \in N(x)} v_\ell > \sum_{\ell \in N(y)} v_\ell$$

então para o novo vetor  $\mathbf{u}$  dado por  $u_y = 0$ ,  $u_x = v_x + v_y$  e para todo  $\ell \neq x, y$  fica  $u_\ell = v_\ell$ , a soma em (4.5) vale

$$\sum_{ij \in E(G)} u_i u_j = \sum_{ij \in E(G)} v_i v_j + v_y \left( \sum_{\ell \in N(x)} v_\ell - \sum_{\ell \in N(y)} v_\ell \right),$$

logo, o valor máximo da soma no lado esquerdo de (4.5) ocorre quando os pesos positivos concentram-se num clique e para todo outro vértice  $j$  o peso é zero. Agora, se  $v_i - v_j = \varepsilon > 0$  então tomando  $u_i = v_i - \varepsilon$ ,  $u_j = v_j + \varepsilon$  e  $u_\ell = v_\ell$  onde  $\ell \neq i, j$ , temos

$$\sum_{ij \in E(G)} u_i u_j = \sum_{ij \in E(G)} v_i v_j + \varepsilon v_i - \varepsilon v_j - \varepsilon^2 > \sum_{ij \in E(G)} v_i v_j.$$

Portanto, o valor máximo da soma no lado esquerdo de (4.5) ocorre para  $v_i = 1/k$  para todo vértice  $i$  de um clique de tamanho  $k$  e  $v_i = 0$ , caso contrário. Além disso, se  $u_i = 1/(k+1)$  para todo vértice  $i$  de um clique de tamanho  $k+1$  e  $u_i = 0$ , caso contrário, então  $\sum u_i u_j > \sum v_i v_j$ , assim o melhor que podemos fazer é distribuir os pesos igualmente sobre um clique de tamanho  $\omega(G)$ .

**Teorema 137.** *Para todo  $G$*

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right) e(G)}. \quad (4.6)$$

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{v}$  um autovetor unitário associado à  $\lambda_1$ . Pelo Princípio de Rayleigh  $\lambda_1 = \sum_i \sum_j v_i a_i^j v_j$  e usando a desigualdade de Cauchy–Schwarz

$$\lambda_1^2 = \left( \sum_i \sum_{j \in N_G(i)} v_i v_j \right)^2 \leq \left( \sum_i \sum_{j \in N_G(i)} 1^2 \right) \left( \sum_i \sum_{j \in N_G(i)} v_i^2 v_j^2 \right).$$

Como  $\mathbf{v}$  é um vetor unitário, podemos aplicar a desigualdade de Motzkin–Strauss para  $(v_1^2 \ \dots \ v_n^2)^T$  e a equação acima fica

$$\lambda_1^2 \leq 2e(G) \frac{\omega(G) - 1}{\omega(G)}$$

donde segue o teorema. □

Fazendo  $G$  uma árvore de  $n$  vértices no teorema acima, temos  $\omega(G) = 2$  e  $e(G) = n - 1$  resultando que  $\lambda_1 \leq \sqrt{n - 1}$ , um resultado que já conhecíamos. No caso  $G = K^{n,m}$  o teorema dá  $\lambda_1 \leq \sqrt{nm}$  e portanto vale a igualdade.

**Corolário 138.** *Para todo grafo  $G$  sobre  $n$  vértices*

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}) \leq \sqrt{2 \left(2 - \frac{1}{\omega(G)} - \frac{1}{\omega(\overline{G})}\right) \binom{n}{2}}.$$

*Demonstração.* Do Teorema 137 temos

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}) \leq \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right) e(G)} + \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\omega(\overline{G})}\right) e(\overline{G})}$$

e aplicando a desigualdade de Cauchy–Schwarz, o lado direito dessa equação é no máximo

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(2 - \frac{1}{\omega(G)} - \frac{1}{\omega(\overline{G})}\right) \binom{n}{2}}$$

como queríamos demonstrar. □

*Exercício 139.* Considere a função  $f(n) = \max_G \{\lambda_1(G) - d(G)\}$  onde o máximo é tomado sobre todo  $G$  com vértices  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ . Mostre que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-2}{4} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-2}{4} + O(1/n) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(Dica: use a equação (4.6))

### 4.2.1 Grafos extremais sem $K^p$

Suponha que  $G = G^n$  é um grafo de  $n$  vértices que não contenha  $p$  vértices formando um clique como o maior número possível de arestas. Dizemos que  $G$  é um grafo extremal sem  $K^p$ .

*Exercício 140.* Deduza de (4.5) que se  $G$  é extremal e sem  $K^p$  então

$$e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Um candidato natural a grafo extremal sem  $K^3$ , ou seja, um grafo sem triângulo e com o maior número possível de arestas, é o grafo bipartido completo. Suponha que  $A$  e  $B$  são partes de um grafo bipartido com  $|A| - |B| \geq 2$ . Note que transferindo um vértice de  $A$  para  $B$  temos um novo grafo bipartido com  $|A| - |B|$  arestas a mais. No caso geral, deixamos como exercício o seguinte fato.

*Exercício 141.* Denotamos por  $K^{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$  o grafo  $(p-1)$ -partido completo onde as partes têm cardinalidades  $n_1, n_2, \dots, n_{p-1}$ . Mostre que dentre os grafos  $(p-1)$ -partidos completos com  $\sum_i n_i = n$  vértices, o número máximo de arestas é atingido quando  $|n_i - n_j| \leq 1$  para todos  $i, j \in [p-1]$ . Em 1941, Paul Turán provou que esse grafo é extremal com relação a conter  $K^p$ . Mais que isso, esse grafo é único (a menos de isomorfismos) com essa propriedade. Esse grafo é conhecido como de *grafo de Turán*. Mostre também que para inteiros  $n, p > 1$ , se  $n = (p-1)k + r$ , com  $0 \leq r < p-1$ , então o número de arestas no grafo de Turán é

$$\frac{1}{2} \left( \frac{p-2}{p-1} \right) (n^2 - r^2) + \binom{r}{2} \leq \frac{p-2}{p-1} \binom{n}{2}. \quad (4.7)$$

**Teorema** (Teorema de Turán). *Para todos  $n, p > 1$  o número de arestas num grafo de ordem  $n$  extremal sem  $K^p$  é dado por (4.7). Ainda, todo grafo extremal  $G^n$  que não contém  $K^p$  é o grafo de Turán.*



*Demonstração.* Seja  $G^n$  um grafo extremal sem  $K^p$ . Vamos mostrar que em  $G^n$  não existem três vértices  $u, v, w$  tais que  $uw \in E(G)$ ,  $vu \notin E(G)$  e  $vw \notin E(G)$ .

Suponha o contrário e vamos derivar uma contradição em dois casos. Primeiro, vamos supor que  $d(v) < d(u)$ . Nesse caso removemos o vértice  $v$ , ou seja consideramos  $G - v = G[V \setminus \{v\}]$ , e nesse grafo duplicamos o vértice  $u$ : o conjunto de vértices fica  $V(G - v) \cup \{u'\}$ , supondo que  $u'$  é um vértice novo, e ligamos  $u'$  a todos os vértices de  $N(u)$ . Esse grafo resultante tem ordem  $n$  e  $d(u) - d(v)$  arestas a mais que  $G^n$ ; também (exercício) não contém  $K^p$ , um absurdo pois  $G^n$  é extremal.

Portanto  $d(v) \geq d(u)$  e, analogamente,  $d(v) \geq d(w)$ . Nesse caso, removemos  $u$  e  $w$  do grafo  $G$  e duplicamos  $v$  em  $v'$  e em  $v''$ . Novamente, o grafo obtido tem mais arestas que  $G^n$  e não contém  $K^p$ , um absurdo.

Com esse fato concluímos que a relação  $R \subset V(G) \times V(G)$  dada por  $(u, v) \in R$  se  $uv \notin E(G)$  é de equivalência sobre  $V(G)$ . Claramente, as classes de equivalência são conjuntos independentes. Do fato de  $G^n$  ser extremal concluímos que é um grafo  $(p-1)$ -partido completo.  $\square$

Do fato de  $uv \notin E(G)$  ser uma relação de equivalência no grafo de Turán temos que se  $U = N(u)$ , para algum vértice  $u$ , então  $e(\overline{U}) = 0$ , e pela Proposição 70 temos

$$\lambda_{\min} \leq \frac{2|e(U)|}{d(u)} - d(G),$$

somando-se ambos os lados para todo  $u$  obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 142.** *Para o grafo de Turán vale*

$$\lambda_{\min} \leq \frac{3nT - 4m^2}{nm},$$

onde  $n$  é o número de vértices,  $m$  o número de arestas e  $T$  o número de triângulos no grafo.  $\square$

Notemos que no caso de grafo extremal sem  $K^3$  o resultado acima pode ser obtido de  $\lambda_{\max}(G) \geq d(G)$ , para todo  $G$ , e do fato desse grafo ser bipartido, donde temos  $\lambda_{\max} = -\lambda_{\min}$ .

Segue da equação (4.6) que se  $G^n$  é extremal sem  $K^p$  então

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) e(G)} \quad (4.8)$$

a segunda desigualdade segue de (4.6) visto que  $\omega \leq n$ .

**Corolário 143.** Se  $K^p \not\subset G$  então

$$\lambda_1(G) \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) |V(G)|.$$

*Demonstração.* Basta limitar  $e(G)$  de acordo com o Teorema de Turán na equação (4.8).  $\square$

**Corolário 144.** Para todo  $G$

$$\lambda_1(G) \leq \left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right) |V(G)|$$

*Demonstração.* Conseqüência da desigualdade do Teorema de Turán e (4.6).  $\square$

*Exercício 145.* Mostre que se  $K^p \not\subset G$  então

$$\lambda_1(G)^2 \leq (p-1) \sum_{i=2}^n \lambda_i^2.$$

Note que a equação (3.21) (página 47) e o Teorema de Turán nos dão

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j(G)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) |V(G)|^2,$$

para todo  $G \not\supset K^p$ . Agora, se  $G$  não contém  $K^p$  então  $N_j = G[N_G(j)]$  não contém  $K^{p-1}$ , qualquer que seja  $j \in V(G)$ , e

$$e(N_j) \leq \left(1 - \frac{1}{p-2}\right) \frac{d_G(j)^2}{2}$$

pelo Teorema de Turán. Mas, cada aresta em  $E(N_j)$  determina um triângulo que contém  $j$ , portanto, de (3.22) (página 47)

$$6T = \sum_{j=1}^n \lambda_j(G)^3 \leq \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{p-2}\right) d_G(j)^2 = \left(1 - \frac{1}{p-2}\right) \sum_{j=1}^n d_G(j)^2.$$

Ainda  $\sum_{j=1}^n d_G(j)^2 \leq n\lambda_1^2$  (equação (3.19)) portanto

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j(G)^3 \leq \left(1 - \frac{1}{p-2}\right) n\lambda_1^2.$$

### 4.3 Coloração de vértices

Uma  $p$ -coloração dos vértices de  $G$  é uma partição  $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$  e dizemos que os vértices de  $V_i$  têm *cor*  $i$ . Se as classes  $V_i$  são conjuntos independentes então dizemos que a coloração é *própria*.

O *número cromático* de  $G$  é definido por

$$\chi(G) = \min\{p \in \mathbb{N} : G \text{ admite uma } p\text{-coloração própria}\}.$$

É fácil deduzir que  $\chi(K^p) = p$ . Conseqüentemente, se  $\omega(G) = p$  então o número cromático de  $G$  é pelo menos  $p$ . Também, como numa coloração própria cada classe de cor é um conjunto independente temos  $\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$ .

**Proposição 146.** *Para todo  $G$*

1.  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .
2.  $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$ .

O próximo resultado é menos imediato.

**Proposição 147.** *O número cromático de qualquer grafo  $G$  satisfaz*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2e(G) + \frac{1}{4}}.$$

*Demonstração.* Dada uma  $\chi(G)$ -coloração própria teremos pelo menos uma aresta entre vértices de cada par de classes de cor. Assim

$$e(G) \geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)^2 - \chi(G)}{2},$$

donde, resolvendo para  $\chi(G)$ , concluímos o limitante superior enunciado.  $\square$

*Exercício 148.* Adapte a demonstração acima para provar o seguinte limitante

$$\lambda_1(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2e(G) + \frac{1}{4}}. \quad (4.9)$$

Como seria de se esperar intuitivamente, quanto menor é o grau máximo menor o número cromático do grafo.

**Teorema 149.** *Para todo  $G$  vale que  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

*Demonstração.* A prova é por indução em  $n$ , o número de vértices do grafo. Se  $n = 1$  então o enunciado do teorema vale. Seja  $G$  um grafo de  $n$  vértices e seja  $v$  um vértice qualquer.

Formamos o grafo  $H = G - v$  e pela hipótese indutiva temos que  $\chi(H) = k \leq \Delta(H) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ . Seja  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  uma coloração própria de  $H$ .

Se  $k < \Delta(G) + 1$  então  $\{\{v\}, V_1, \dots, V_k\}$  é uma coloração própria de  $G$  com no máximo  $\Delta(G) + 1$  cores.

Se  $k = \Delta(G) + 1$  então existe uma cor  $i \in [k]$  que não ocorre entre os vizinhos de  $v$  pois  $d_G(v) \leq \Delta(G)$ . Dessa forma podemos tomar a coloração própria  $\{V_1, V_2, \dots, V_i \cup \{v\}, \dots, V_k\}$ .  $\square$

*Observação 150.* Um algoritmo guloso para colorir propriamente os vértices com as cores  $1, 2, \dots, \Delta + 1$  é o seguinte: fixe uma enumeração qualquer dos vértices, digamos  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Tendo colorido  $v_1, v_2, \dots, v_i$  atribua a  $v_{i+1}$  a menor cor disponível, compatível com seus vizinhos que já estão coloridos e que são no máximo  $\Delta$ .

Para circuitos ímpares e grafos completos essa coloração é ótima, entretanto, chamamos a atenção para o fato de  $\Delta(G) - \chi(G)$  poder ser arbitrariamente grande, como demonstra o grafo bipartido completo  $K^{1,n}$ .

Um pouco mais pode ser dito em certos casos. O seguinte resultado é conhecido como Teorema de Brooks. A prova é deixada como exercício.

**Teorema** (Teorema de Brooks). *Se  $G$  não é um circuito ímpar nem um grafo completo então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

Usando a técnica algorítmica da Observação 150 podemos provar que  $\chi \leq \lambda_1 + 1$ . No resultado abaixo provamos essa cota superior e uma cota inferior baseada no espectro para o número cromático.

**Teorema 151.** *Para todo grafo  $G$*

$$1 - \frac{\lambda_1(G)}{\lambda_{\min}(G)} \leq \chi(G) \leq 1 + \lambda_1(G).$$

*Demonstração.* Primeiro, vamos mostrar que  $\chi(G) \leq 1 + \lambda_1(G)$ . Podemos supor que  $G$  é conexo com  $n > 0$  vértices.

Pelo Teorema de Perron–Frobenius podemos assumir  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^T$  um autovetor positivo associado a  $\lambda_1$ . Seja  $\rho$  uma permutação que ordena  $\mathbf{v}$ , isto é, tal que  $\mathbf{v}_\rho = \begin{pmatrix} v_{\rho(1)} & \cdots & v_{\rho(n)} \end{pmatrix}^T$  com  $v_{\rho(1)} \geq \cdots \geq v_{\rho(n)}$ .

Agora, colorimos o vértice  $\rho(1)$  com uma cor arbitrária e dado que os vértices  $\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(i-1)$  estão propriamente coloridos mostraremos como colorir  $\rho(i)$  propriamente.

Para todo  $i \in V(G)$  definimos o conjunto  $X(i) = \{j \in V : ij \in E \text{ e } j < i\}$  e de  $\lambda_1 \mathbf{v}_\rho = A_\rho \mathbf{v}_\rho$  temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_{\rho(i)} &= \sum_j a_{\rho(i)}^{\rho(j)} v_{\rho(j)} = \sum_{\rho(j) \in N(\rho(i))} v_{\rho(j)} \geq \sum_{\substack{\rho(j) \in N(\rho(i)) \\ j < i}} v_{\rho(j)} \geq \\ &\geq \sum_{\rho(j) \in X(\rho(i))} v_{\rho(j)} = |X(\rho(i))| v_{\rho(i)}. \end{aligned}$$

Assim, nos vértices de  $X(\rho(i))$  usamos no máximo  $\lambda_1$  cores, logo, com  $\lambda_1 + 1$  cores sempre há uma cor disponível para pintar o vértice  $\rho(i)$  sem que vértices adjacentes tenham a mesma cor.

Agora vamos provar a outra desigualdade do teorema:  $1 - \lambda_1 / \lambda_{\min} \leq \chi$ . Começamos enunciando uma afirmação que usaremos em seguida para provar o teorema.

**Afirmação 152.** *Para a matriz simétrica e não-negativa*

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^m \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m^1 & A_m^2 & \dots & A_m^m \end{pmatrix}$$

onde  $A_i^i$  é uma matriz quadrada para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , temos

$$\lambda_1(A) + (m-1)\lambda_{\min}(A) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_1(A_i^i).$$

Tomamos  $\chi(G) = m$  e escrevemos  $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$  com  $V_i$  sendo as classes de cor de uma coloração própria dos vértices de  $G$ . Existe uma permutação  $\rho$  tal que se  $A = A_G$  então

$$A_\rho = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^m \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m^1 & A_m^2 & \dots & A_m^m \end{pmatrix}$$

com  $A_i^i = \mathbf{0}$  uma matriz quadrada de dimensão  $|V_i|$ , para todo  $i \in [m]$ , que corresponde a  $A_{G[V_i]}$  e  $A_i^j$  corresponde a matriz de adjacências de  $G[V_i \cup V_j]$ , quando  $i \neq j$ .

Pela Afirmação 152, em  $A_\rho$  temos

$$\lambda_1(A_\rho) + (m-1)\lambda_n(A_\rho) \leq 0$$

donde a desigualdade  $1 - \lambda_1(A)/\lambda_{\min}(A) \leq \chi(G)$ , segue pois  $A$  e  $A_\rho$  são semelhantes e  $\lambda_n(A) < 0$ . Com isso, o teorema está provado.  $\square$

Agora, resta demonstrar a afirmação usada na prova do teorema.

*Prova da Afirmação 152.* A prova é por indução em  $m$ . Para  $m = 2$  escrevemos

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_1^2 \\ (A_1^2)^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^2 \end{pmatrix} = B + C$$

e observamos que  $\lambda_1(C) = \max\{\lambda_1(A_1^1), \lambda_1(A_2^2)\}$ . Usando as Desigualdades de Weyl temos

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) &\leq \lambda_1(B) + \lambda_1(C) \\ \lambda_{\min}(A) &\leq \lambda_{\min}(B) + \lambda_1(C). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Perron–Frobenius (página 31) sabemos que  $\lambda_{\min}(B) = -\lambda_1(B)$ . Portanto,  $\lambda_1(A) + \lambda_{\min}(A) \leq \lambda_1(A_1^1) + \lambda_1(A_2^2)$ .

Suponha que a afirmação vale para  $m-1$ , ou seja, em

$$A' = \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_1^{m-1} \\ A_2^1 & \cdots & A_2^{m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m-1}^1 & \cdots & A_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix}$$

temos

$$\lambda_1(A') + (m-2)\lambda_{\min}(A') \leq \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_1(A_i^i). \quad (4.10)$$

Pelo caso base em

$$A = \begin{pmatrix} A' & A''^T \\ A'' & A_m^m \end{pmatrix}$$

temos  $\lambda_1(A) + \lambda_{\min}(A) \leq \lambda_1(A') + \lambda_1(A_m^m)$  e substituindo a equação (4.10) no lado direito dessa desigualdade ficamos com

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) + \lambda_{\min}(A) &\leq -(m-2)\lambda_{\min}(A') + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_1(A_i^i) + \lambda_1(A_m^m) \\ &\leq -(m-2)\lambda_{\min}(A) + \sum_{i=1}^m \lambda_1(A_i^i), \end{aligned}$$

pois  $\lambda_{\min}(A') \geq \lambda_{\min}(A)$  por entrelaçamento. Assim provamos a afirmação.  $\square$

*Exercício 153.* Prove o teorema acima usando entrelaçamento diretamente. Para isso, determine uma matriz ortogonal  $Q$  de dimensão  $n \times \chi(G)$  tal que na matriz  $B = Q^T A Q$  valha  $\lambda_1(B) = \lambda_1(A)$  e note que  $\lambda_i(B) \geq \lambda_{\min}(A)$ , para todo  $i$ , e  $\text{tr}(B) = 0$ .

*Exercício 154.* De  $\omega(G) \leq \chi(G)$ , para todo  $G$ , na equação (4.6) temos

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\chi(G)}\right) e(G)}. \quad (4.11)$$

Mostre a partir de (4.11) o seguinte limitante

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}) \leq \sqrt{2 \left(2 - \frac{1}{\chi(G)} - \frac{1}{\chi(\overline{G})}\right) \binom{n}{2}}. \quad (4.12)$$

## 4.4 $\alpha$ e $\chi$ típicos

Denotamos por  $\mathcal{P}_k(n)$ , para  $k \in \mathbb{N}$  fixo, o conjunto dos grafos  $G \in \mathcal{G}(n)$  tais que  $\alpha(G) \geq k$ . Para estimar a cardinalidade dessa família de grafos, primeiro fixamos  $X \subset \{1, 2, \dots, n\}$  de cardinalidade  $k$ .

Os grafos de  $\mathcal{G}(n)$  nos quais  $X$  é um conjunto independente podem ser identificados numa relação de um-para-um com os subconjuntos de  $[V]^2 \setminus [X]^2$ . A quantidade de tais subconjuntos é  $2^{N - \binom{k}{2}}$ .

Como há  $\binom{n}{k}$  possíveis escolhas para  $X$ , segue-se que

$$|\mathcal{P}_k(n)| \leq \binom{n}{k} 2^{N - \binom{k}{2}},$$

donde deduzimos

$$\frac{|\mathcal{P}_k(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} \leq n^k 2^{-\frac{k(k-1)}{2}}.$$

Como logaritmo é uma função crescente

$$2 \lg \left( \frac{|\mathcal{P}_k(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} \right) \leq k \lg(n) - k(k-1) = k(-k + \lg(n) + 1).$$

Fazendo  $k = \lceil (2 + \varepsilon) \lg(n) \rceil$  concluímos que

$$\begin{aligned} 2 \lg \left( \frac{|\mathcal{P}_k(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} \right) &\leq \lceil (2 + \varepsilon) \lg(n) \rceil (-(2 + \varepsilon) \lg(n) + \lg(n) + 1) = \\ &\quad - \lceil (2 + \varepsilon) \lg(n) \rceil ((1 + \varepsilon) \lg(n) - 1) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

conforme  $n \rightarrow \infty$ , logo podemos enunciar o seguinte resultado.

**Teorema 155.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  e para quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$*

$$\alpha(G) < \lceil (2 + \varepsilon) \lg n \rceil.$$

Usando a Proposição 146, enunciada na página 81, temos de imediato um limitante para o número cromático típico.

**Corolário 156.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  e para quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$*

$$\chi(G) > \frac{n}{\lceil (2 + \varepsilon) \lg n \rceil}.$$

□

*Exercício 157.* Prove que para todo  $\varepsilon > 0$

$$\omega(G) \leq (2 + \varepsilon) \lg n$$

para quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$ .

*Observação 158.* Um resultado famoso de Bollobás de 1988 estabelece que para quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$

$$\chi(G) \leq (1 + \varepsilon) \frac{n}{2 \lg n}$$

para todo  $\varepsilon > 0$  e  $n$  suficientemente grande. Outro resultado, devido a Erdős, Bollobás e Matula, afirma que existe uma função  $k = k(n)$  (da ordem de  $\lg n$ ) tal que  $\omega(G) \in \{k, k+1\}$  para quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$ .



## 4.5 $\lambda_1, \lambda$ típicos

Nessa seção provaremos resultados análogos para autovalores aos resultados provados na seção 4.4 para  $\alpha$  e  $\chi$ . Vamos mostrar que quase-todo grafo  $\mathcal{G}(n)$  têm valores de  $\lambda_1$  próximos a  $n/2$  e de  $\lambda$  menor que  $\varepsilon n$  para qualquer  $\varepsilon > 0$ , por menor que seja.

Antes de seguirmos, convidamos leitor a relembrar algumas notações da seção 3.1.3, página 48, onde definimos  $r_H(G)$  como o número de cópias rotuladas (i.e., subgrafos isomorfos) de  $H$  em  $G$  e a equação (3.26), página 48, nos diz que

$$\text{tr}(A^4) = r_{C^4}(G) + 2r_{P^2}(G) + r_{K^2}(G).$$

**Teorema 159.** *Seja  $G \in \mathcal{G}(n)$  um grafo. Para todo  $\delta > 0$  (por menor que seja), existe  $\varepsilon > 0$  tal que, se*

$$e(G) > (1 - \varepsilon) \frac{n^2}{4} \quad e \quad r_{C^4}(G) < (1 + \varepsilon) \frac{n^4}{16} \quad (4.13)$$

então

$$\left| \lambda_1 - \frac{n}{2} \right| < \delta n \quad e \quad \lambda < \delta n \quad (4.14)$$

para todo  $n$  suficientemente grande.

*Demonstração.* Dado  $\delta > 0$  tomamos

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{16}{14} \delta^4 \right\}$$

e seja  $G$  no qual vale (4.13). No que segue, consideramos que  $n$  sempre é suficientemente grande para as desigualdades valerem.

Um limitante inferior para  $\lambda_1$  é o grau médio (Teorema 57, página 41)

$$\lambda_1 \geq d(G) = \frac{2|E|}{n} > \frac{2(1 - \varepsilon) \frac{n^2}{4}}{n} = (1 - \varepsilon) \frac{n}{2}. \quad (4.15)$$

Para a cota superior, começamos com uma estimativa generosa para  $r_{P^2}(G)$ : se cada uma das  $\binom{n}{3}$  triplas de vértices definem um  $P^2$

$$r_G(P^2) \leq c_1 n^3 \quad (4.16)$$

para alguma constante positiva  $c_1$  (o valor dessa constante não importa no momento). Agora, pela equação (3.26), como  $\text{tr}(A^4) = \sum_i \lambda_i(G)^4$  e usando que o número de arestas

é menor que  $n^2$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^4 &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = r_{C^4}(G) + 2r_{P^2}(G) + 2|E(G)| \\
 &< (1 + \varepsilon) \frac{n^4}{16} + c_1 n^3 + n^2 \\
 &< (1 + \varepsilon) \frac{n^4}{16} + \frac{\varepsilon n^4}{2 \cdot 16} + \frac{\varepsilon n^4}{2 \cdot 16} \\
 &= (1 + 2\varepsilon) \frac{n^4}{16}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

que, junto com (4.15) e a escolha de  $\varepsilon$ , resulta em

$$\left| \lambda_1 - \frac{n}{2} \right| < \delta n.$$

Para o segundo autovalor, supomos para algum  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$  vale  $|\lambda_i| = \delta n$ . Sem perda de generalidade podemos assumir que  $i = 2$ . Com essas hipóteses temos, usando (4.17)

$$(1 + 2\varepsilon) \frac{n^4}{16} > \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \sum_{i=3}^n \lambda_i^4.$$

Pela escolha de  $\varepsilon$  e usando a desigualdade em (4.15) ficamos com

$$\sum_{i=3}^n \lambda_i^4 < (1 + 2\varepsilon) \frac{n^4}{16} - (1 - \varepsilon)^4 \frac{n^4}{16} - \delta^4 n^4 = \left( 6\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - \varepsilon^4 - \frac{\delta^4}{16} \right) \frac{n^4}{16} < 0$$

uma contradição, logo  $\lambda < \delta n$  para todo  $\delta > 0$ .  $\square$

Na seção 4.5.1 mostraremos que quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$  satisfaz as hipóteses do teorema que acabamos de provar e com isso temos a seguinte consequência.

**Corolário 160.** *Para quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$ , para todo  $\delta > 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_1(G)$  e  $\lambda = \lambda(G)$  satisfazem*

$$\left| \lambda_1 - \frac{n}{2} \right| < \delta n \quad \text{e} \quad \lambda < \delta n.$$

#### 4.5.1 $e(G)$ e $n_G(C^4)$ típicos

Foi assumido acima que para  $\varepsilon > 0$  quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$  satisfaz

$$e(G) > (1 - \varepsilon) \frac{n^2}{4} \quad \text{e} \quad r_{C^4}(G) < (1 + \varepsilon) \frac{n^4}{16}.$$

Nesta seção vamos mostrar que dado  $\varepsilon > 0$

$$\left| e(G) - \frac{n^2}{4} \right| < \varepsilon n^2 \quad \text{e} \quad \left| r_{C^4}(G) - \frac{n^4}{16} \right| < \frac{\varepsilon n^4}{16}$$

vale para quase-todo grafo de  $\mathcal{G}(n)$ . Na verdade, mostraremos que o complemento vale para poucos grafos

$$\frac{\left| \left\{ G \in \mathcal{G}(n) : \left| e(G) - \frac{n^2}{4} \right| > \varepsilon n^2 \right\} \right|}{2^N} < \delta \quad \text{e} \quad (4.18)$$

$$\frac{\left| \left\{ G \in \mathcal{G}(n) : \left| r_{C^4}(G) - \frac{n^4}{16} \right| > \varepsilon \frac{n^4}{16} \right\} \right|}{2^N} < \delta \quad (4.19)$$

para qualquer  $\delta > 0$  se  $n$  é suficientemente grande.

Para tal objetivo precisamos de algumas ferramentas. Seja  $X: \mathcal{G}(n) \rightarrow \mathbb{N}$  uma função cuja *média* é

$$\mu_X = \frac{\sum_{G \in \mathcal{G}(n)} X(G)}{2^N}.$$

Dessa forma, se considerarmos apenas os grafos que têm um valor alto de  $X$ , digamos  $X(G) \geq t_0$ , obtemos

$$\mu_X \geq \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{G \in \mathcal{G}(n) \\ X(G) \geq t_0}} X(G)$$

por um lado e, por outro,

$$\sum_{\substack{G \in \mathcal{G}(n) \\ X(G) \geq t_0}} X(G) \geq t_0 \left| \{ G \in \mathcal{G}(n) : X(G) \geq t_0 \} \right|.$$

Das duas últimas equações obtemos a *desigualdade de Markov*

$$\mu_X \geq t_0 \frac{\left| \{ G \in \mathcal{G}(n) : X(G) \geq t_0 \} \right|}{2^N}. \quad (4.20)$$

Ainda, estamos interessado em saber quanto o valor de uma função desvia de seu valor médio, por isso passamos a considerar a seguinte função

$$Y(G) = (X(G) - \mu_X)^2$$

cuja média é  $\mu_Y = \mu_{X^2} - (\mu_X)^2$ . Substituindo  $Y$  e  $\mu_Y$  na desigualdade de Markov (4.20) obtemos a *desigualdade de Chebyshev*:

$$\frac{\left| \{ G \in \mathcal{G}(n) : |X(G) - \mu_X| \geq t_0 \} \right|}{2^N} \leq \frac{\mu_{X^2} - (\mu_X)^2}{t_0^2}.$$

Se denotamos por  $\mu = \mu_e$  a média de  $e: \mathcal{G}(n) \rightarrow \mathbb{N}$ , em que  $e(G)$  é o número de arestas de  $G$ , então a desigualdade de Chebyshev fica

$$\frac{|\{G \in \mathcal{G}(n): |e(G) - \mu| > t_0\}|}{2^N} < \frac{\mu_{e^2} - \mu^2}{t_0^2}.$$

**Proposição 161.** Para todo  $\varepsilon > 0$ , para quase-todo grafo  $G \in \mathcal{G}(n)$

$$\left| e(G) - \frac{n^2}{4} \right| < \varepsilon n^2.$$

*Demonstração.* Consideremos uma enumeração  $e_1, e_2, \dots, e_N$  dos pares de vértices, sendo  $N = \binom{n}{2}$ . Abusando da notação, definimos para cada  $i \in [N]$  a função

$$e_i(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } e_i \in E(G) \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Claramente

$$e(G) = \sum_{i=1}^N e_i(G) \quad \text{e} \quad e(G)^2 = \sum_{i=1}^N e_i(G) + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N e_i(G)e_j(G)$$

e, dessa forma,

$$\mu = \sum_{i=1}^N \mu_{e_i} = \frac{N}{2}$$

pois

$$\mu_{e_i} = \frac{\sum_G e_i(G)}{2^N} = \frac{|\{G \in \mathcal{G}(n): e_i \in E(G)\}|}{2^N} = \frac{1}{2}.$$

Fixados  $i$  e  $j$  distintos

$$\mu_{e_i \cdot e_j} = \frac{\sum_G e_i(G)e_j(G)}{2^N} = \frac{2^{N-2}}{2^N} = \frac{1}{4}$$

portanto

$$\mu = \frac{N}{2} \quad \text{e} \quad \mu_{e^2} = \frac{N}{2} + \frac{1}{4}N(N-1) = \frac{N^2}{4} + \frac{N}{2}$$

e usando a desigualdade de Chebyshev fica

$$\frac{|\{G \in \mathcal{G}(n): |e(G) - \mu| > \varepsilon \mu\}|}{2^N} < \frac{\mu_{e^2} - \mu^2}{\varepsilon^2 \mu^2} = \frac{\frac{N}{2}}{\varepsilon^2 \frac{N^2}{4}} < \delta$$

para qualquer  $\delta > 0$ , para todo  $n$  é suficientemente grande, qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ , o que prova (4.18).  $\square$

**Proposição 162.** Para todo  $\varepsilon > 0$ , para quase-todo grafo  $G \in \mathcal{G}(n)$

$$\left| r_{C^4}(G) - \frac{n^4}{16} \right| < \frac{\varepsilon n^4}{16}$$

*Demonstração.* No caso de  $r_{C^4}(G)$ , definimos  $(n)_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$  o número de seqüências  $(a, b, c, d)$ , todas diferentes, tomadas de  $n$  letras. Seja  $C_1, C_2, \dots, C_{(n)_4}$  uma enumeração das quádruplas  $(a, b, c, d)$  de vértices e definimos as funções indicadoras

$$X_i(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } C_i \text{ define um circuito de comprimento 4 em } G \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Claramente,

$$\begin{aligned} r_{C^4}(G) &= \sum_{i=1}^{(n)_4} X_i(G) \text{ e} \\ (r_{C^4}(G))^2 &= \sum_{i=1}^{(n)_4} \sum_{j=1}^{(n)_4} X_i(G) X_j(G) = \sum_{i=1}^{(n)_4} X_i(G)^2 + \sum_{i=1}^{(n)_4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{(n)_4} X_i(G) X_j(G). \end{aligned}$$

O valor médio de  $r_{C^4}(G)$  é

$$\mu = \sum_{i=1}^{(n)_4} \mu_{X_i} = \frac{(n)_4}{2^4}.$$

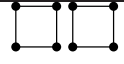
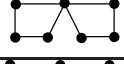


Observamos que o valor médio de  $X_i^2$  é o mesmo de  $X_i$  e assim

$$\sum_{i=1}^{(n)_4} \mu_{X_i^2} = \frac{(n)_4}{2^4}.$$

Dessa forma resta calcularmos para cada par  $i \neq j$

$$\mu_{X_i \cdot X_j} = \frac{\sum_{G \in \mathcal{G}(n)} X_i(G) X_j(G)}{2^N} = \frac{|\{G \in \mathcal{G}(n) : C_i \subset G \text{ e } C_j \subset G\}|}{2^N}.$$

Abaixo, apresentamos uma tabela onde na primeira coluna desenhamos o diagrama dos tipos de isomorfismo possíveis para  $C_i$  e  $C_j$  fixos, na segunda coluna temos a fração de grafos que contém os respectivos  $C_i$  e  $C_j$  da primeira coluna e finalmente na terceira apresentamos o número de pares  $(i, j)$  para os quais essa fração contribui na soma.

$C_i \quad C_j$	fração dos grafos com $C_i$ e $C_j$	número de pares $(i, j)$
	$\frac{2^{N-8}}{2^N}$	$(n)_8$
	$\frac{2^{N-8}}{2^N}$	$(n)_7$
	$\frac{2^{N-7}}{2^N}$	$(n)_6$
	$\frac{2^{N-6}}{2^N}$	$(n)_5$

Dessa forma a média da função  $r_{C^4}(G)^2$  fica

$$\mu_{r_{C^4}^2} = \frac{(n)_4}{2^4} + \frac{(n)_8}{2^8} + \frac{(n)_7}{2^8} + \frac{(n)_6}{2^7} + \frac{(n)_5}{2^6}$$

e aplicando-a em Chebyshev

$$\begin{aligned} \frac{\mu - \mu_{r_{C^4}^2}}{\varepsilon^2 \mu^2} &< \frac{\frac{(n)_4}{2^4} + \frac{(n)_7}{2^8} + \frac{(n)_6}{2^7} + \frac{(n)_5}{2^6}}{\varepsilon^2 \left( \frac{(n)_4}{2^4} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{2^4}{(n)_4} + \frac{(n-4)_3}{(n)_4} + \frac{2(n-4)_2}{(n)_4} + \frac{2^2(n-4)}{(n)_4} \right) < \delta \end{aligned}$$

para todo  $\delta > 0$  se  $n$  é suficientemente grande.

Dessa forma, provamos que para todo  $\delta > 0$

$$\frac{\left| \left\{ G \in \mathcal{G}(n) : \left| r_{C^4}(G) - \frac{n^4}{16} \right| > \varepsilon \frac{n^4}{16} \right\} \right|}{2^N} < \delta.$$

□

*Exercício 163.* Prove que para quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$  o grau médio satisfaz

$$\left| d(G) - \frac{n}{2} \right| < \delta n$$

para qualquer  $\delta > 0$ .

*Exercício 164.* Prove que para quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$

$$\sum_{i=1}^n \left| d(i) - \frac{n}{2} \right| < \delta n^2 \quad (4.21)$$

para qualquer  $\delta > 0$  (esse resultado é consequência do corolário anterior).

*Exercício 165.* Prove que para quase-todo  $G \in \mathcal{G}(n)$  vale que: para todo  $\gamma > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se (4.21) então

$$\left| d(i) - \frac{n}{2} \right| < \gamma n$$

para pelo menos  $(1 - \alpha)n$  vértices, para qualquer  $\alpha > 0$  (Dica: use Cauchy-Schwarz).

## 4.6 Distribuição das arestas e autovalores

Sejam  $G$  um grafo com  $n$  vértices,  $A = A_G$  sua matriz de adjacências com espectro  $\text{Sp}(G) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  autovetores ortonormais, de modo que  $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ , e  $Q = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ .

Se  $A \subset V(G)$  então  $\chi_A: V(G) \rightarrow \{0, 1\}$  denota a função característica de  $A$ , isto é,  $\chi_A(j) = 1$  se e só se  $j \in A$ . Sejam  $U, W \subseteq V(G)$  com  $U \cap W = \emptyset$ . Definimos os *vetores característicos*  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  dos conjuntos  $U$  e  $W$ , respectivamente,  $\mathbf{u} = (\chi_U(1), \chi_U(2), \dots, \chi_U(n))^T$  e  $\mathbf{w} = (\chi_W(1), \chi_W(2), \dots, \chi_W(n))^T$ .

Esses vetores característicos representados na base ortonormal são

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} \chi_U(1) \\ \chi_U(2) \\ \vdots \\ \chi_U(n) \end{pmatrix}$$

pois  $Q^{-1} = Q^T$  e lembremos que (exercício 25, página 21) que  $\|Q^T \chi_U\| = \|\chi_U\|$ . Notemos também que  $\|\mathbf{u}\| = |U|$ , que  $\|\mathbf{w}\| = |W|$  e que  $u_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle$ , para todo  $i \in [n]$  (e, também, vale o análogo para  $w_i$ ).

Relembrando um pouco de notação, denotamos por  $e(U)$  como o número de arestas do grafo  $G$  induzido por  $U$ ,  $e(U) = |E(G[U])|$  e  $e(U, W)$  como o número de arestas no subgrafo bipartido induzido pelas partes  $U$  e  $W$ . Dessa forma

$$\langle \mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^j \chi_U(i) \chi_U(j) = 2e(U) \quad \text{e} \quad (4.22)$$

$$\langle \mathbf{u}, A\mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^j \chi_U(i) \chi_W(j) = e(U, W). \quad (4.23)$$

Usando a decomposição espectral da matriz  $A$  (Corolário 30, página 25)

$$A = \underbrace{\lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T}_{A_1} + \underbrace{\lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T}_{\mathcal{E}}, \quad (4.24)$$

em (4.22) e em (4.23) obtemos, respectivamente

$$2e(U) = \langle \mathbf{u}, A_1 \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathcal{E} \mathbf{u} \rangle, \text{ e} \quad (4.25)$$

$$e(U, W) = \langle \mathbf{u}, A_1 \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathcal{E} \mathbf{w} \rangle. \quad (4.26)$$

Fazendo  $A_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T$  no primeiro termo da soma em (4.25) e no primeiro termo da soma em (4.26) acima resulta em

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, A_1 \mathbf{u} \rangle &= \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle^2 = \lambda_1 u_1^2 \quad \text{e} \\ \langle \mathbf{u}, A_1 \mathbf{w} \rangle &= \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle = \lambda_1 u_1 w_1. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Analogamente, substituindo a expressão para  $\mathcal{E}$  dada em (4.24) no segundo termo da soma das equações (4.25) e (4.26)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathcal{E} \mathbf{u} \rangle &= \sum_{i=2}^n \lambda_i \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=2}^n \lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u} \rangle^2 = \sum_{i=2}^n \lambda_i u_i^2 \\ \langle \mathbf{u}, \mathcal{E} \mathbf{w} \rangle &= \sum_{i=2}^n \lambda_i \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=2}^n \lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=2}^n \lambda_i u_i w_i. \end{aligned} \quad (4.28)$$

De (4.25) tiramos que  $|2e(U) - \langle \mathbf{u}, A_1 \mathbf{u} \rangle| = |\langle \mathbf{u}, \mathcal{E} \mathbf{u} \rangle|$ , ou seja, usando (4.27) e (4.28)

$$|2e(U) - \lambda_1 u_1^2| = \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i u_i^2 \right|$$

e o lado direito da equação acima fica

$$\left| \sum_{i=2}^n \lambda_i u_i^2 \right| \leq \sum_{i=2}^n |\lambda_i| u_i^2 \leq \lambda \sum_{i=2}^n u_i^2 = \lambda (|U| - u_1^2)$$

para  $\lambda = \lambda(G)$  como definido acima. Deduzindo de maneira análoga a distribuição das arestas em subgrafo bipartido induzido e reunindo essas informações temos o seguinte resultado.

**Teorema 166.** *Para todo grafo  $G$  e para todo subconjunto  $U \subseteq V(G)$*

$$\left| 2e(U) - \lambda_1 u_1^2 \right| \leq \lambda (|U| - u_1^2) \quad (4.29)$$

*e para quaisquer subconjuntos disjuntos  $U, W \subseteq V(G)$*

$$\left| e(U, W) - \lambda_1 u_1 w_1 \right| \leq \lambda \sqrt{(|U| - u_1^2)(|W| - w_1^2)}, \quad (4.30)$$

*para  $u_1$  e  $w_1$  como acima.*



*Demonstração.* A validade de (4.29) está provada acima. Para a prova de (4.30) observamos que

$$|e(U, W) - \lambda_1 u_1 w_1| = \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i u_i w_i \right|$$

para todos  $U$  e  $W$  subconjuntos disjuntos de  $V(G)$ . Da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i u_i w_i \right| &\leq \sqrt{\left( \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 u_i^2 \right) \left( \sum_{i=2}^n w_i^2 \right)} \\ &\leq \lambda \sqrt{\left( \sum_{i=2}^n u_i^2 \right) \left( \sum_{i=2}^n w_i^2 \right)} \\ &\leq \lambda \sqrt{(\|\mathbf{u}\|^2 - u_1^2) (\|\mathbf{w}\|^2 - w_1^2)} \end{aligned}$$

que nos dá o resultado que queríamos.  $\square$

Esse resultado assume uma forma elegante quando o grafo é regular. Num grafo  $d$ -regular de ordem  $n$  a densidade de arestas é  $(nd/2)/\binom{n}{2} \approx d/n$ . O resultado a seguir mostra que quando  $\lambda$  é pequeno as arestas estão aproximadamente uniformemente distribuídas, ou ainda, o segundo autovalor controla o erro na distribuição das arestas em relação a distribuição uniforme.

**Corolário 167.** *Para todo grafo  $d$ -regular  $G$  de ordem  $n$  e para todo subconjunto  $U \subseteq V(G)$*

$$\left| e(U) - \frac{d}{n} \binom{|U|}{2} \right| \leq \left( \lambda \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + 1 \right) \frac{|U|}{2} \quad (4.31)$$

*e para quaisquer subconjuntos disjuntos  $U, W \subseteq V(G)$*

$$\left| e(U, W) - \frac{d}{n} |U| |W| \right| \leq \lambda \sqrt{|U| \left( 1 - \frac{|U|}{n} \right) |W| \left( 1 - \frac{|W|}{n} \right)}. \quad (4.32)$$

*Demonstração.* Em um grafo  $d$ -regular com  $n$  vértices temos  $\lambda_1 = d$ ,  $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{n})(1, 1, \dots, 1)^T$ , portanto  $u_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = |U|/\sqrt{n}$  e  $\beta_1 = |W|/\sqrt{n}$ .

Assim, as equações (4.29) e (4.30) ficam

$$\left| 2e(U) - \frac{d}{n} |U|^2 \right| \leq \lambda |U| \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

para qualquer subconjunto  $U \subseteq V(G)$  e

$$\left| e(U, W) - \frac{d}{n} |U| |W| \right| \leq \lambda \sqrt{|U| \left(1 - \frac{|U|}{n}\right) |W| \left(1 - \frac{|W|}{n}\right)}$$

para qualquer  $U, W$  de subconjuntos disjuntos de  $V(G)$ .

Usando o fato de que

$$\left| \lambda |U| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{d|U|}{n} \right| \leq \left( \lambda \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 1 \right) |U|$$

a equação (4.31) segue.  $\square$

#### 4.6.1 Grafos não-regulares

Nesse caso a distribuição de arestas não tem uma forma fechada razoável. Nessa seção estimaremos a distribuição nas arestas do grafo em função do desvio dos parâmetros  $u_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $w_1$  e  $\mathbf{v}_1$  com relação aos seus valores num grafo  $d$ -regular com  $n$  vértices.

Sejam  $G$  um grafo com grau médio  $d$ , matriz de adjacências  $A$  cujos autovetores ortonormais denotamos por  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ , onde  $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$  para todo  $i \in [n]$ .

Denotamos por  $\hat{\mathbf{1}}$  o vetor  $(1/\sqrt{n})\mathbf{1}$ , escrevemos  $d_i$  para  $d_G(i)$  e definimos

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} d_1 - d \\ d_2 - d \\ \vdots \\ d_n - d \end{pmatrix} = A\hat{\mathbf{1}} - d\hat{\mathbf{1}} \quad (4.33)$$

que na base ortonormal de autovetores fica

$$\mathbf{d} = \sum_i \langle A\hat{\mathbf{1}} - d\hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - d) \langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i. \quad (4.34)$$

Definimos a variância dos graus de  $G$

$$\text{var}(d_G) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - d)^2 \quad (4.35)$$

e temos que  $\text{var}(d_G) = \|\mathbf{d}\|^2 = \|A\hat{\mathbf{1}} - d\hat{\mathbf{1}}\|^2$ .

Das equações (4.34) e (4.35) deduzimos que  $\text{var}(d_G) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - d)^2 \langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_i \rangle^2 \geq \langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 (\lambda_1 - d)^2$ , portanto

$$|\lambda_1 - d| \leq \frac{\sqrt{\text{var}(d_G)}}{\langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_1 \rangle} \quad (4.36)$$

Ainda,  $u_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{1}} \rangle - \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{1}} - \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{|U|}{\sqrt{n}} - \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{1}} - \mathbf{v}_1 \rangle$  donde, com argumento análogo para  $w_1$ , aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e usando que  $\|\hat{\mathbf{1}} - \mathbf{v}_1\|^2 = \langle \hat{\mathbf{1}} - \mathbf{v}_1, \hat{\mathbf{1}} - \mathbf{v}_1 \rangle = 2 - 2\langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_1 \rangle$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \left| u_1 - \frac{|U|}{\sqrt{n}} \right| &= |\langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{1}} - \mathbf{v}_1 \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\hat{\mathbf{1}} - \mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{u}\| \sqrt{2 - 2\langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_1 \rangle} \quad \text{e} \\ \left| w_1 - \frac{|W|}{\sqrt{n}} \right| &= |\langle \mathbf{w}, \hat{\mathbf{1}} - \mathbf{v}_1 \rangle| \leq \|\mathbf{w}\| \|\hat{\mathbf{1}} - \mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{w}\| \sqrt{2 - 2\langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_1 \rangle}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Finalmente, estimaremos  $\langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_1 \rangle$ . Como  $\text{var}(d_G) \geq \sum_{i=2}^n \langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_i \rangle^2 (\lambda_i - d)^2 \geq (\lambda - d)^2 \sum_{i=2}^n \langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_i \rangle^2$  e  $\sum_{i=2}^n \langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_i \rangle^2 = \|Q^T \mathbf{v}_1\|^2 = \|\hat{\mathbf{1}}\|^2 = 1$  temos

$$\langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_1 \rangle \geq \langle \hat{\mathbf{1}}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 \geq 1 - \frac{\text{var}(d_G)}{(d - \lambda)^2}. \quad (4.38)$$

e, resumindo, ficamos assim

$$|2e(U) - \lambda_1 u_1^2| \leq \lambda |U| \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

para qualquer subconjunto  $U \subseteq V(G)$  e

$$|e(U, W) - \lambda_1 u_1 w_1| \leq \lambda \sqrt{|U| \left( 1 - \frac{|U|}{n} \right) |W| \left( 1 - \frac{|W|}{n} \right)} \quad (4.39)$$

para qualquer par de subconjuntos disjuntos  $U, W$  e os parâmetros  $\lambda_1, u_1$  e  $w_1$  satisfazem

$$\left| u_1 - \frac{|U|}{\sqrt{n}} \right| \leq |U| \frac{\sqrt{2\text{var}(d_G)}}{(d - \lambda)} \quad \text{e} \quad (4.40)$$

$$\left| w_1 - \frac{|W|}{\sqrt{n}} \right| \leq |W| \frac{\sqrt{2\text{var}(d_G)}}{(d - \lambda)} \quad \text{e} \quad (4.41)$$

$$|\lambda_1 - d| \leq \frac{(d - \lambda)^2 \sqrt{\text{var}(d_G)}}{(d - \lambda)^2 - \text{var}(d_G)}. \quad (4.42)$$

*Exercício 168.* Mostre que  $\text{var}(d_G) \leq \lambda_1(G)^2 - d(G)^2$ .

*Exercício 169.* Mostre que  $\lambda_1^2 + \lambda_1 \leq 2|E|$  e deduza desse fato a equação (4.9) (página 81). Também, deduza  $\text{var}(d_G) \leq \sqrt{8e(G)}(\lambda_1(G) - d(G))$  do exercício anterior e de (4.9).

### 4.6.2 Distribuição típica das arestas

Lembrando a equação (4.39), a distribuição de arestas em  $G$  é dada por

$$|e(U, W) - \lambda_1 u_1 w_1| \leq \lambda \sqrt{|U| \left(1 - \frac{|U|}{n}\right) |W| \left(1 - \frac{|W|}{n}\right)}$$

para qualquer par de subconjuntos disjuntos  $U, W$  e os parâmetros  $\lambda_1, u_1$  e  $w_1$  satisfazem

$$\begin{aligned} \left|u_1 - \frac{|U|}{\sqrt{n}}\right| &\leq \frac{\sqrt{2|U|\text{var}(d_G)}}{(d - \lambda)} < \varepsilon \sqrt{|U|} & \text{e} \\ \left|w_1 - \frac{|W|}{\sqrt{n}}\right| &\leq \frac{\sqrt{2|W|\text{var}(d_G)}}{(d - \lambda)} < \varepsilon \sqrt{|W|} & \text{e} \\ \left|\lambda_1 - \frac{n}{2}\right| &\leq \frac{(d - \lambda)^2 \sqrt{\text{var}(d_G)}}{(d - \lambda)^2 - \text{var}(d_G)} < \varepsilon \end{aligned}$$

para todo  $\varepsilon > 0$ ; as últimas desigualdade de cada linha seguem do exercício 165, do exercício 163 e da definição de  $\text{var}(d)$ , página 96.

Reunindo essa informações chegamos a

$$\left|e(U, W) - \frac{|U||W|}{2}\right| \leq \lambda \sqrt{|U| \left(1 - \frac{|U|}{n}\right) |W| \left(1 - \frac{|W|}{n}\right)} + \varepsilon n \sqrt{|U||W|}$$

e, usando que tipicamente  $\lambda < \delta n$  para todo  $\delta > 0$ , temos

$$\left|e(U, W) - \frac{|U||W|}{2}\right| < \eta n \sqrt{|U||W|} \quad (4.43)$$

para todo  $\eta > 0$ .

Para  $S \subseteq V(G)$  com  $|S| = s$  o número de arestas em  $G[S]$  é, somando-se sobre todos os subconjuntos  $U \subset S$  e  $W = S \setminus U$  com  $|U| = u = \lfloor s/2 \rfloor$ ,

$$e(S) = \frac{\sum_{U,W} e(U, W)}{2^{\binom{s-2}{u-1}}} \leq \frac{\binom{s}{u} (1/2) u (s - u) + \eta n \sqrt{u(s - u)}}{2^{\binom{s-2}{u-1}}} < \frac{1}{2} \binom{s}{2} + \eta n s.$$

Da mesma forma,  $e(S) \geq (1/2) \binom{s}{2} - \eta n s$ , logo

$$\left|e(S) - \frac{1}{2} \binom{s}{2}\right| < \eta n^2, \quad (4.44)$$

para todo  $\eta > 0$ .

## **Comentários adicionais e referências bibliográficas**

O assunto que acabamos de ver é só uma brevíssima intrpdução de uma disciplina com resultados profundos, conhecida com Grafos Aleatórios [3, 19].

Os resultados relatados na observação 158 no final da seção 4.4 podem ser lidos em [1], o teorema 10.3.1 dessa referência é o resultado de Bollobás e a seção 10.2 trata do resultado de Erdős e Matula.

A seção 4.5 foi baseada nos resultados em [4] e a 4.6 em [21]. Foi provado por Chung, Graham e Wilson em [4] que (4.13), (4.14), (4.43) e (4.44) são equivalentes.

O limitante (148) foi provado pela primeira vez em 1987 por Stanley.



# GRAFOS EXPANSORES

Grafos expansores são caracterizados combinatorialmente por possuir boa conexidade no sentido de que o número de arestas num *corte* qualquer é limitado inferiormente. Sabemos que essa caracterização é equivalente a dizer que um passeio aleatório no grafo converge rapidamente para a distribuição estacionária e é equivalente a caracterização algébrica: a *distância espectral*, a diferença entre os dois maiores autovalores, é grande. Há várias definições essencialmente equivalentes para grafos expansores na literatura.

Neste capítulo apresentamos os grafos expansores e mostramos algumas de suas propriedades e algumas construções conhecidas de expansores.

A menos que seja dito diferente, aqui os grafos são regulares e podem ter laços e arestas múltiplas. Denotamos por  $\mathbb{Z}_m$  o anel  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$  dos inteiros módulo  $m$  identificado com  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  com a soma  $+$  e o produto  $\cdot$  módulo  $m$ , por abuso de notação. Para  $m$  potência de primo, denotamos por  $\mathbb{Z}_m^*$  o grupo multiplicativo  $(\mathbb{Z}_m \setminus \{0\}, \cdot)$ .

## 5.1 Definições

A *constante isoperimétrica* (ou razão de expansão) de um grafo  $G$  de ordem  $n$ , denotada por  $h(G)$ , é definida por

$$h(G) = \min \left\{ \frac{e(U, \overline{U})}{|U|} : U \neq \emptyset \text{ e } |U| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$$

*Exemplo 170.* O valor de  $h(G^n)$  para o grafo completo de  $n$  vértices é aproximadamente  $n/2$ . De fato, se  $|U| = m$  então  $e(U, \overline{U}) = m(n-m)$  e  $\min\{n-m : m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} = n - \lfloor n/2 \rfloor$ ,

$$h(K^n) = \lceil n/2 \rceil.$$

No caso do circuito  $C^n$  de comprimento  $n$  temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(C^n) = 0$  pois se tomamos  $U$  que induz um caminho sobre  $\lfloor n/2 \rfloor$  vértices então  $e(U, \overline{U}) = 2$  e

$$h(C^n) \leq \frac{2}{n/2} = \frac{4}{n}.$$

*Exercício 171.* Seja  $k$  um inteiro positivo. Prove que para o  $k$ -cubo  $Q_k$  (Exercício 55, página 40) vale  $h(Q_k) \leq 1$ .

Fixado  $\varepsilon > 0$  um grafo  $G$  com  $h(G) \geq \varepsilon$  é dito  $\varepsilon$ -aresta-expansor, portanto, para todo  $U \subseteq V(G)$  com no máximo metade dos vértices

$$e(U, \overline{U}) \geq \varepsilon|U|$$

ou seja, o número de arestas no corte é proporcional a cardinalidade da menor parte de  $\{U, \overline{U}\}$ . Notemos que se  $G$  é conexo, então é  $\varepsilon$ -aresta-expansor para algum  $\varepsilon > 0$ . O que de fato nos interessa é uma família de grafos em que mantemos  $\varepsilon$  distante de zero quando a ordem de  $G$  cresce, o que, por sua vez, não é difícil se  $G$  tem muitas arestas (compare os casos no exemplo acima). Por outro lado, grafo expansores *esparsos*, isto é, com  $n < |E| < \alpha n^2$ , para  $\alpha > 0$ , são objetos aparentemente contraditórios. A existência desses grafos foi provada pela primeira vez em 1973, uma prova probabilística de que *quase todo grafo  $d$ -regular, para  $d \geq 3$ , é expansor* e uma prova construtiva conhecida como *grafos expansores de Margulis*. Apesar da abundância, exibir explicitamente grafos expansores é uma tarefa difícil; do ponto de vista computacional, dados  $G$  e  $\varepsilon > 0$  decidir se  $G$  é  $\varepsilon$ -aresta-expansor é NP-difícil.

Em resumo, o principal problema é definir explicitamente grafos que satisfazem a definição a seguir. Uma *família de grafos expansores* é numa família  $\{G^{n_i}\}_{i \geq 0}$  de grafos  $d$ -regulares tais que  $h(G^{n_i}) \geq \varepsilon$ , para  $\varepsilon > 0$  e  $d \in \mathbb{N}$  fixos, de modo que  $n_i \rightarrow \infty$  quando  $i \rightarrow \infty$  e com  $n_i$  que não cresça muito rapidamente, por exemplo,  $n_{i+1} \leq n_i^{1+\alpha}$ . A seguir damos dois exemplos sem prova da razão de expansão, tais provas são difíceis para o propósito deste texto.

*Exemplo 172* (Margulis, 1973). O grafo sobre  $V = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$  com os vizinhos de  $(a, b) \in V$  sendo

$$N((a, b)) = \{(a+b, b), (a-b, b), (a, b+a), (a, b-a), (a+b+1, b), \\ (a-b+1, b), (a, a+b+1), (a, b-a+1)\}$$

é uma família de grafos expansores 8-regular.

*Exemplo 173.* Seja  $p$  um primo. O grafo sobre  $V = \mathbb{Z}_p$ , o corpo finito de  $p$  elementos, tal que cada  $x \in V$  tem como vizinhos os vértices  $x-1$ ,  $x+1$  e  $x^{-1}$  (com a convenção  $0^{-1} = 0$ ) é 3-regular e expansor.

*Exercício 174.* Por  $N_G(U)$  denotamos  $\bigcup_{v \in U} N_G(v)$ . Um grafo  $d$ -regular  $G$  de ordem  $n$  tal que  $|N_G(U)| \geq c|U|$  para todo subconjunto de vértices  $U$  com  $|U| \leq n/2$  é chamado de  $(n, d, c)$ -expansor. Prove que



1. se  $\lambda(G) = \max\{|\lambda_i(G)| : i \neq 1\}$  então  $G$  é  $(n, d, (d - \lambda)/2d)$ -expansor.
2. se  $G$  é  $(n, d, c)$ -expansor então  $d - \lambda(G) \geq c^2/(4 + 2c^2)$ .

## 5.2 Expansão e espectro

Lembremos que num grafo  $d$ -regular,  $\lambda_1 = d$  e  $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{n})\mathbf{1}$  é um autovetor unitário associado. Também, lembremos que um grafo é conexo se, e só se,  $\lambda_1 > \lambda_2$  e um grafo é bipartido se, e só se  $\lambda_1 = -\lambda_n$ .

Das equações (3.65) (página 69) e (3.45) (página 61) podemos concluir que para todo  $U \subset V(G^n)$  não-vazio

$$\frac{e(U, \overline{U})}{|U|} \geq (d - \lambda_2) \frac{|\overline{U}|}{n}. \quad (5.1)$$

Assim, quanto menor for  $\lambda$  maior a *distância espectral*  $d - \lambda_2$  “melhor expansor” é o grafo. A recíproca também vale como estabelece o seguinte resultado.

**Teorema 175.** *Se  $G$  é um grafo conexo e  $d$ -regular, então*

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}. \quad (5.2)$$

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo conexo,  $d$ -regular e com  $n$  vértices. Começamos pela cota inferior para a constante isoperimétrica. Dado  $U \subseteq V$  com  $0 < |U| \leq n/2$ , temos da equação (5.1) que

$$\frac{e(U, \overline{U})}{|U|} \geq \frac{d - \lambda_2}{n} |\overline{U}| \geq \frac{d - \lambda_2}{n} \frac{n}{2} = \frac{d - \lambda_2}{2}.$$

Para a prova da cota superior, vamos considerar a matriz laplaciana  $L = L_G$ . Lembremos que  $\mu_2 = \mu_2(L)$  é o segundo menor autovalor de  $L$  e que  $\mu_2 = d - \lambda_2$ . Vamos provar que  $h(G)^2 \leq 2d\mu_2$ .

Definimos para todo vetor  $\mathbf{u}$

$$B(\mathbf{u}) = \sum_{ij \in E} |u_i^2 - u_j^2|.$$

Usaremos os seguintes fatos cujas prova serão adiadas:

- (1)  $B(\mathbf{u}) \leq \sqrt{2d} \langle \mathbf{u}, L\mathbf{u} \rangle \|\mathbf{u}\|$ ,
- (2) Se  $\mathbf{u} \geq 0$  e  $u_i > 0$  para no máximo  $n/2$  coordenadas de  $\mathbf{u}$  então  $B(\mathbf{u}) \geq h(G) \|\mathbf{u}\|^2$ .

Dos itens 1 e 2 acima temos  $h(G)\|\mathbf{u}\|^2 \leq B(\mathbf{u}) \leq \sqrt{2d} \langle \mathbf{u}, L\mathbf{u} \rangle \|\mathbf{u}\|$ , logo

$$\frac{h(G)^2}{2d} \leq \frac{\langle \mathbf{u}, L\mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = R_L(\mathbf{u}), \quad (5.3)$$

e o teorema segue de uma escolha apropriada para  $\mathbf{u}$ . Seja  $\mathbf{v}$  um autovetor associado a  $\mu_2$  e considere o vetor  $\mathbf{u}$  dado por  $u_i = v_i$  se  $v_i \geq 0$  e  $u_i = 0$  caso contrário. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $u_i > 0$  para no máximo  $n/2$  coordenadas pois, caso contrário, poderíamos partir de  $-\mathbf{v}$  que também é autovetor de  $L$  associado ao autovalor  $\mu_2$ .

Seja  $U^+$  o conjunto dos no máximo  $n/2$  vértices  $i$  tais que  $u_i > 0$ . Para todo  $i \in U^+$ , temos na linha  $i$  de  $L\mathbf{u}$

$$\ell_i = du_i - \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} a_i^j u_j = dv_i - \sum_{j \in U^+} a_i^j v_j \leq dv_i - \sum_{j \in V} a_i^j v_j = \mu_2 v_i.$$

Agora, de  $u_i = 0$  para todo  $i \notin U^+$  e  $u_i = v_i$ , caso contrário

$$\langle \mathbf{u}, L\mathbf{u} \rangle = \sum_{i \in V} u_i \ell_i \leq \mu_2 \sum_{i \in V} v_i u_i = \mu_2 \sum_{i \in V} u_i^2 = \mu_2 \|\mathbf{u}\|^2. \quad (5.4)$$

Substituindo na equação (5.3) chegamos a

$$\frac{h(G)^2}{2d} \leq \mu_2 \quad (5.5)$$

donde segue o enunciado do teorema.

O fato no item 1 acima segue duma aplicação da desigualdade de Cauchy–Schwarz e de (3.42), página 60:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}) &= \sum_{ij \in E} |u_i + u_j| |u_i - u_j| \\ &\leq \sqrt{\sum_{ij \in E} (u_i + u_j)^2} \sqrt{\sum_{ij \in E} (u_i - u_j)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{ij \in E} u_i^2 + u_j^2} \langle \mathbf{u}, L\mathbf{u} \rangle \\ &= \sqrt{2d \sum_{i \in V} u_i^2} \langle \mathbf{u}, L\mathbf{u} \rangle \\ &= \sqrt{2d} \|\mathbf{u}\| \langle \mathbf{u}, L\mathbf{u} \rangle. \end{aligned}$$

Para a prova do item 2, notemos que se  $\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_r$  são todos os valores distintos que compõem o vetor  $\mathbf{u}$ , então

$$B(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^r e(V_i, \overline{V_i})(\nu_i^2 - \nu_{i-1}^2) \quad (5.6)$$

em que  $V_i = V_i(\mathbf{u}) = \{j \in V : u_j \geq \nu_i\}$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ . Seja  $\mathbf{u}$  não-negativo com no máximo  $n/2$  coordenadas positivas. Como  $\nu_0 = 0$ ,  $|V_i| \leq n/2$  para  $i > 0$ , e  $e(V_i, \overline{V_i})/|V_i| \geq h(G)$  por definição, concluímos que

$$B(\mathbf{u}) \geq h(G) \sum_{i=1}^r |V_i|(\nu_i^2 - \nu_{i-1}^2) = h(G) \left( |V_r| \nu_r^2 + \sum_{i=1}^{r-1} (|V_i| - |V_{i+1}|) \nu_i^2 \right)$$

e o termo entre parênteses é  $\|\mathbf{u}\|^2$  pois  $|V_i| - |V_{i+1}|$  é exatamente o número de vértices cuja componente vale  $\nu_i$ . Com isso, terminamos a prova do teorema.  $\square$

*Exercício 176.* Mostre que vale a igualdade na cota inferior para  $h(G)$  quando  $G$  é o  $k$ -cubo e vale a igualdade na cota superior quando  $G$  é o circuito de ordem  $n$ .

A equação 175 garante que grafos com distância espectral  $d - \lambda_2$  grande são bons expansores, entretanto, vimos na Proposição 87, página 53, que  $\lambda_2(G^n) \geq \sqrt{d}(1 - o_n(1))$ . O seguinte resultado limita inferiormente o segundo autovalor de modo mais preciso. Para qualquer família  $\{G_m\}_{m \geq 0}$  de grafos conexos,  $d$ -regulares e com  $|V(G_m)| \rightarrow \infty$  quando  $m \rightarrow \infty$ , vale

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} d - \lambda_2(G_m) \leq d - 2\sqrt{d-1}. \quad (5.7)$$

*Demonstração de (5.7).* Vamos mostrar que para todo grafo  $d$ -regular  $G = (V, E)$  com diâmetro pelo menos  $2b+2$  vale

$$d - \lambda_2 \leq d - 2\sqrt{d-1} + \frac{2\sqrt{d-1} - 1}{b+1}$$

para todo grafo  $d$ -regular com diâmetro pelo menos  $2b+2$ . Como  $\text{diam}(G) = \Omega(\log_d n)$  para todo grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $d$ -regular, a equação (5.7) segue.

Sejam  $u$  e  $w$  dois vértices de  $G$  que distam pelo menos  $2b+2$ . Denotamos por  $U_i$  e  $W_i$ , para  $0 \leq i \leq b$ , o conjuntos dos vértices de  $V(G)$  a distância  $i$  de  $u$  e  $w$ , respectivamente. Definimos os conjuntos disjuntos

$$U = \bigcup_{i=0}^b U_i \quad \text{e} \quad W = \bigcup_{i=0}^b W_i$$

e observamos que

$$|U_{i+1}| \leq (d-1)|U_i| \quad \text{e} \quad |W_{i+1}| \leq (d-1)|W_i|$$

e que, por indução

$$|U_b| \leq (d-1)^{b-i}|U_i| \quad \text{e} \quad |W_b| \leq (d-1)^{b-i}|W_i|.$$

Sabemos de (3.59) e (3.45) que

$$d - \lambda_2 \leq \frac{\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad (5.8)$$

vale para todo  $\mathbf{x} \neq c\mathbf{1}$ , para qualquer constante  $c$ . Vamos mostrar que a seguinte escolha de  $\mathbf{x}$  nos dá o resultado:

$$x_i = \begin{cases} \alpha(d-1)^{-\frac{i-1}{2}}, & \text{se } i \in U_j \\ \beta(d-1)^{-\frac{i-1}{2}}, & \text{se } i \in W_j \\ 0, & \text{no outros casos,} \end{cases} \quad (5.9)$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  escolhidos de modo que  $\mathbf{x} \neq c\mathbf{1}$ .

Notemos que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=0}^b \alpha^2 |U_i| (d-1)^{-i+1} + \sum_{i=0}^b \beta^2 |W_i| (d-1)^{-i+1} \quad (5.10)$$

e também notemos que

$$\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 \leq \sum_{\substack{ij \in E \\ \{i,j\} \cap U \neq \emptyset}} (x_i - x_j)^2 + \sum_{\substack{ij \in E \\ \{i,j\} \cap W \neq \emptyset}} (x_i - x_j)^2 \quad (5.11)$$

e como cada vértice de  $U_i$  contribui com no máximo  $d-1$  arestas para  $E(U_i, U_{i+1})$

temos para as arestas que têm pelo menos um extremo em  $U$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 \\
 & \leq \alpha^2 \left( \sum_{i=0}^{b-1} (d-1)|U_i| \left( \frac{1}{(d-1)^{\frac{i-1}{2}}} - \frac{1}{(d-1)^{\frac{i}{2}}} \right)^2 + \frac{(d-1)|U_b|}{(d-1)^{b-1}} \right) \\
 & = \alpha^2 \left( (\sqrt{d-1} - 1)^2 \left( \sum_{i=0}^b \frac{|U_i|}{(d-1)^{i-1}} \right) + (2\sqrt{d-1} - 1) \frac{|U_b|}{(d-1)^{b-1}} \right) \\
 & = (\sqrt{d-1} - 1)^2 \left( \sum_{i=0}^b \alpha^2 \frac{|U_i|}{(d-1)^{i-1}} \right) + \alpha^2 (2\sqrt{d-1} - 1) \frac{|U_b|}{(d-1)^{b-1}} \\
 & \leq \left( (\sqrt{d-1} - 1)^2 + \frac{(2\sqrt{d-1} - 1)}{b+1} \right) \left( \sum_{i=0}^b \alpha^2 \frac{|U_i|}{(d-1)^{i-1}} \right).
 \end{aligned}$$

A desigualdade análoga para as arestas que têm pelo menos um extremo em  $W$  é

$$\sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 \leq \left( (\sqrt{d-1} - 1)^2 + \frac{(2\sqrt{d-1} - 1)}{b+1} \right) \left( \sum_{i=0}^b \beta^2 \frac{|W_i|}{(d-1)^{i-1}} \right).$$

Substituindo em (5.11) e juntando o resultado com (5.10) em (5.8)

$$d - \lambda_2 \leq d - 2\sqrt{d-1} + \frac{2\sqrt{d-1} - 1}{b+1}$$

como queríamos mostrar.  $\square$

*Exercício 177.* Prove que para todo  $U, W \subset V$ , disjuntos num grafo  $d$ -regular vale:

$$e(U, W) \geq (d - \lambda_2) \frac{|W||U|}{|V|}.$$

A vértice-expansão é definida por

$$\min_{\substack{U \neq \emptyset \\ |U| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \frac{|N(U) - U|}{|U|} \tag{5.12}$$

e  $\varepsilon$ -expansor é um grafo com  $|N(U) - U| \geq \varepsilon|U|$  ou, equivalentemente,  $|N(U)| \geq (1 + \varepsilon)|U|$ . O seguinte exercício mostra que, como no caso de aresta-expansão, queremos grafos com o segundo autovalor  $\lambda(G) = \max_{i \neq 1} |\lambda_i(G)|$  pequeno.

*Exercício 178.* Prove que num grafo  $d$ -regular de ordem  $n$ , para todo  $U \subseteq V$  com  $|U| \leq \frac{n}{2}$  vale

$$\frac{|N(U) - U|}{|U|} \geq \frac{d - \lambda}{2d}.$$

Também, para todo  $U \subset V$ ,  $|U| \leq n/2$ , se  $|N(U) - U| \geq \varepsilon|U|$  então

$$\lambda \leq d - \frac{\varepsilon^2}{4 + 2\varepsilon^2}.$$

## 5.3 Construções

Usando técnicas probabilísticas é possível provar que *para todo  $\varepsilon$  positivo, existe  $d = d(\varepsilon)$  positivo tal que para todo  $n$  suficientemente grande existe  $G^n$  grafo  $(1/2 - \varepsilon)d$ -aresta-expansor*. Entretanto

dado  $G$  e  $\varepsilon$  decidei se  $G$  é  $\varepsilon$ -aresta-expansor é coNP-hard

muito explícito

explícito

Nessa seção daremos alguns exemplos de famílias expansoras e estimamos a distância espectral nos casos de família densa. No que segue, daremos exemplos de tais construções sendo o mais completo possível dentro de certas limitações técnicas.

Nesta seção usaremos  $G$  para denotar o grupo abeliano finito  $(G, +)$ . O elemento neutro de  $G$  é denotado por  $e_G$ . Se  $S \subset G$  então definimos

$$S + g = \{h + g : h \in S\},$$

para qualquer  $g \in G$ . Ainda, abusando na notação, usaremos  $S : G \rightarrow \{0, 1\}$  para denotar a função característica de  $S$ , ou seja,  $S(g) = 1$  se e somente se  $g \in S$ .

As matrizes e vetores são indexados pelos elementos de  $G$  e usaremos a notação  $A(g, h)$  para denotar o elemento na linha  $g$  e coluna  $h$  de  $A$ , usaremos  $\mathbf{v}(g)$  para denotar o elemento da linha  $g$  de  $\mathbf{v}$ .

### 5.3.1 Grafos de Cayley

Seja  $(G, +)$  um grupo abeliano finito e  $S \subseteq G \setminus \{e_G\}$  um subconjunto que não contém a identidade. Definimos os grafos  $X^+(G, S) = (G, E^+)$  e  $X^-(G, S) = (G, E^-)$  sobre o conjunto de vértices  $G$  e com arestas

$$E^+ = \{\{g, h\} : g + h \in S\} \text{ e } E^- = \{\{g, h\} : g - h \in S\}.$$

respectivamente. O grafo  $X^+$  é não-dirigido enquanto que  $X^-$  é dirigido a menos que  $S = -S$  e, no que segue, assumiremos que  $S = -S$ . Ambos grafos são  $|S|$ -regulares.

O grafo  $X^-(G, S)$  é conhecido como *grafo de Cayley*. Não é difícil provar que o grafo  $X^-(G, S)$  é conexo se, e somente se  $S$  gera  $G$ , e sem laço se e somente se  $e_G \notin S$ .

*Exemplo 179.* O grafo de Cayley  $X^-(\mathbb{Z}_d, \{-1, 1\})$  é um circuito com  $d$  vértices e o grafo de Cayley  $X^-(\mathbb{Z}_2^n, \{e_i\}_{i=1}^n)$ , para  $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ , é o  $n$ -cubo. Outros exemplos de grafos de Cayley são o  $K^{4,4}$  e o  $K^6$ .

Um fato bem conhecido sobre esses grafos de Cayley é que os autovalores do grafo  $X^-(G, S)$  são

$$\lambda_\chi = \sum_{h \in S} \chi(h),$$

onde  $\chi$  é um caracter de  $G$  com autovetor associado  $\mathbf{v}_\chi = (\chi(g))_{g \in G}$ . De fato, na linha  $g$  de  $A\mathbf{v}_\chi$  temos

$$\sum_{h \in G} A(g, h) \chi(h) = \sum_{h \in G} S(g - h) \chi(h) = \sum_{h \in S+g} \chi(h) = \sum_{a \in S} \chi(a + g) = \sum_{h \in S} \chi(a) \chi(g)$$

que é a linha  $g$  de  $\lambda_\chi \mathbf{v}_\chi$ . Observamos que  $\chi$  assume valores complexos, mas  $\lambda_\chi$  é real.

*Exercício 180.* Prove que o grafo  $X^+(G, S)$  tem os mesmos autovalores em valor absoluto que  $X^-(G, S)$ .

Dessa forma, o problema de construir grafos expansores agora passou a ser o problema algébrico de descobrir um grupo e um subconjunto apropriado, tal que  $|\lambda_\chi|$  é pequeno para todo caracter não-trivial  $\chi$ .

## Grafo de Paley

Vejamos um exemplo bem conhecido de grafo de Cayley. Tomamos os vértices  $V = \{0, 1, \dots, p-1\}$  onde  $p$  é um primo tal que  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ;  $x, y \in V$  formam uma aresta se  $x - y$  é um resíduo quadrático módulo  $p$ , ou seja, existe um inteiro  $z$  tal que  $x - y \equiv z^2 \pmod{p}$ . A condição  $p \equiv 1 \pmod{4}$  garante que  $-1$  é um quadrado módulo  $p$ , portanto, é indiferente se fazemos  $x - y$  ou  $y - x$  para definirmos as arestas.

Esse grafo é conhecido como grafo de Paley e é definido considerando o grupo  $(\mathbb{Z}_p, +)$  e

$$S = \{x^2 \pmod{p} : x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

e formamos o grafo de Cayley  $X^-(\mathbb{Z}_p, S)$ . Como observamos acima,  $S = -S$ , além disso o grafo é conexo e sem laços.

O símbolo de Legendre,  $(\cdot/p)$ , é definido da seguinte forma, para todo inteiro  $a$  não-nulo e todo primo  $p$  ímpar:

$$(a/p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \text{ divide } a, \\ +1 & \text{se } a \text{ é resíduo quadrático de } p, \\ -1 & \text{se } a \text{ não é resíduo quadrático de } p. \end{cases}$$

Os seguintes resultados serão usados nessa seção sem demonstração, eles podem ser encontrados no capítulo 5 de [18]

- (a) Metade dos inteiros  $a$  tais que  $1 \leq a \leq p-1$  são resíduos quadráticos de  $p$ .
- (b)  $(a/p)(b/p) = (ab/p)$ .

Para determinar os autovalores desse grafo começamos definindo  $\omega = \exp(2\pi i/p)$ , a  $p$ -ésima raiz primitiva da unidade, e afirmamos que  $\omega_j: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}^*$  dada por

$$\omega_j(a) = \omega^{ja} \quad (\forall a \in \mathbb{Z}_p)$$

é um caracter de  $\mathbb{Z}_p$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ .

*Exercício 181.* Mostre que

- 1.  $\omega_i = \omega_j$  se, e somente se,  $i = j \pmod p$ ;
- 2.  $\widehat{\mathbb{Z}_p} = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{p-1}\} \cong \mathbb{Z}_p$ , são os caracteres de  $\mathbb{Z}_p$ .

Os autovalores de  $X^-(\mathbb{Z}_p, S)$  são dados por

$$\lambda_{\omega_j} = \sum_{a \in S} \omega_j(a) \quad \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}.$$

Notemos que  $\lambda_{\omega_0} = \sum_x S(x) = |S| = (p-1)/2$ , pois esse é a quantidade de resíduos quadráticos em  $[p-1]$ . Ainda,  $\lambda_{\omega_0} = \lambda_{\max}$  pois o grafo é  $d$ -regular.

Para os outros autovalores, primeiro observamos que  $\sum_{x \in \mathbb{Z}_p} \omega_j(x) = 0$ . De fato, tome  $y$  tal que  $\omega_j(y) = 1$  e tem-se

$$\omega_j(y) \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} \omega_j(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} \omega_j(x+y) = \sum_{z \in \mathbb{Z}_p} \omega_j(z),$$

donde segue a igualdade observada acima. Agora, para  $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  temos

$$\lambda_{\omega_j} = \sum_{t=1}^{p-1} S(t) \omega_j(t) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{p-1} (1 + (t/p)) \omega_j(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{p-1} (t/p) \omega_j(t)$$



onde a última igualdade segue de  $\sum_t \omega_j(t) = 0$ . A soma

$$\sum_{t=0}^{p-1} (t/p) \omega_j(t)$$

é conhecida como *soma de Gauss* quadrática, e pode ser determinada da seguinte forma: se  $j \equiv 0 \pmod{p}$  então

$$\sum_{t=0}^{p-1} (t/p) \omega_j(t) = \sum_{t=0}^{p-1} (t/p) = 0$$

e se  $j \not\equiv 0 \pmod{p}$  então

$$(j/p) \sum_{t=0}^{p-1} (t/p) \omega_j(t) = \sum_{t=0}^{p-1} (jt/p) \omega_j(t) = \sum_{t=0}^{p-1} (jt/p) \omega(jt) = \sum_{x=0}^{p-1} (x/p) \omega(x);$$

vamos denotar por  $g$  essa soma,  $g_j = (j/p)g = \sum_t (t/p) \omega_j(t)$  e vamos mostrar que

$$g^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p. \quad (5.13)$$

Definimos  $\delta_{x,y} = p$  se  $x \equiv y \pmod{p}$  e  $\delta_{x,y} = 0$  se  $x \not\equiv y \pmod{p}$ ; por um lado

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p-1} g_j g_{-j} &= \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} (x/p)(y/p) \omega_j(x-y) \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} (x/p)(y/p) \sum_{j=0}^{p-1} \omega_j(x-y) \\ &= \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} (x/p)(y/p) \delta_{x-y} = (p-1)p \end{aligned} \quad (5.14)$$

e, de outra forma, temos  $g_j g_{-j} = (j/p)(-j/p)g^2 = (-1/p)g^2$  logo

$$\sum_{j=0}^{p-1} g_j g_{-j} = \sum_{j=0}^{p-1} (-1/p)g^2 = (p-1)(-1/p)g^2. \quad (5.15)$$

Igualando as equações (5.14) e (5.15) temos  $(p-1)p = (p-1)(-1/p)g^2$  ou seja vale (5.13).

Pela escolha de  $p$  temos que  $-1$  é um quadrado módulo  $p$ , ou seja,  $(-1/p) = 1$ . Reescrevendo (5.13) temos

$$\sum_{x=0}^{p-1} (x/p) \omega(x) = \pm \sqrt{p} \quad (5.16)$$

Assim, os autovalores de  $X^-(\mathbb{Z}_p, Q_2)$  são  $(p-1)/2$  com multiplicidade 1 e  $(-1 \pm \sqrt{p})/2$ , ambos com a mesma multiplicidade,  $(p-1)/2$ .

Nesse caso, temos  $\lambda_2 = (1/2)(\sqrt{p} - 1)$  que é próximo do limitante  $2\sqrt{p-1}$  de (5.7), ou seja, o grafo de Paley é um bom expensor. Entretanto, o grafo é denso: tem  $p$  vértices e  $(1/2)\binom{p}{2}$  arestas.

*Exercício 182.* Determine os autovalores de  $X^+(\mathbb{Z}_p, Q_2)$ .

*Exercício 183.* Mostre que se  $U, W \subset \mathbb{Z}_p$  são conjuntos disjuntos então no grafo de Paley temos

$$\left| e(U, W) - \frac{|U||W|}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{p|U||W|}.$$

O grafo de Paley pode ser generalizado como mostramos nos exemplos abaixo.

*Exemplo 184.* Seja  $q$  uma potência de primo  $q \equiv 1 \pmod{4}$ . Tome como vértices os elementos do corpo finito com  $q$  elementos,  $\mathbb{F}_q$ , e defina que  $\{x, y\}$  é uma aresta se  $x - y = z^2$  admite solução em  $\mathbb{F}_q^*$ . Esse grafo é  $(q-1)/2$ -regular e tem  $\lambda_2 = (\sqrt{q} + 1)/2$ .

*Exemplo 185.* Considere os elementos de  $\mathbb{F}_q$  para  $q = 2nr + 1$  uma potência de primo congruente a 1 módulo 4 e defina que  $\{x, y\}$  é uma aresta se  $x - y = z^n$  admite solução em  $\mathbb{F}_q$ . Esse grafo é  $(q-1)/n$  regular, portanto tem  $(1/n)\binom{n}{2}$  arestas. Os autovalores seguem do limitante

$$\left| \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi(x^n) \right| \leq (n-1)\sqrt{q}. \quad (5.17)$$

para somas de Gauss.

*Exemplo 186.* Seja  $p = nr + 1$  um primo congruente a 1 módulo 4,  $Q_n = \{x^n : x \in \mathbb{Z}_p^*\}$  e  $A \subseteq \mathbb{Z}_p^*$  tal que  $ab^{-1} \notin Q_n$  para quaisquer  $a, b \in A$  distintos. Defina  $S = AQ_n$  e note que  $|S| = |A||Q_n|$  pela definição de  $A$ . Os vértices  $x$  e  $y$  são adjacentes se  $x + y = aq$  admite solução em  $\mathbb{Z}_p$  com  $a \in A$  e  $q \in Q_n$ . Os autovalores decorrem de

$$\left| \sum_{x \in S} \omega_j(x) \right| < \frac{|A|(n-1)}{n} \sqrt{p}. \quad (5.18)$$

### 5.3.2 Grafos de Ramanujan

Friedman provou que quase todo grafo  $d$ -regular ( $d$  fixo) tem  $\lambda \leq 2\sqrt{d-1} + \varepsilon$ .

No caso de grafos extremais com relação ao teorema de Alon–Boppana, equação (5.7), chamamos esses grafos extremais de *Grafos de Ramanujan*.

*Exercício 187.* Mostre que todo grafo  $d$ -regular de diâmetro 3 tem no máximo  $d^3 - d^2 + d + 1$  vértices e que, portanto, se  $r \geq 2$  e  $n \geq r^3$  então o diâmetro é pelo menos 4.

*Exercício 188.* Mostre que se  $G$  é  $d$ -regular e  $|V(G)|$  é relativamente grande quando comparado a  $d$ , então  $\lambda_2(G) \geq \sqrt{d}$ . (Dica: Exercício 67 e o exercício anterior. Use a informação sobre o diâmetro para descobrir subgrafos induzidos disjuntos.)

*Exemplo 189.* Lubotzky, Phillips e Sarnak construíram grafos de Ramanujan como grafos de Cayley definidos da seguinte maneira. Sejam  $p$  e  $q$  primos distintos. Seja  $G$  o grupo das matrizes  $2 \times 2$  invertíveis e  $G'$  o grupo das matrizes  $2 \times 2$  de determinante 1, ambas com entradas do  $\mathbb{Z}_p$ . Como é usual, denotamos por  $\text{PGL}(2, p)$  o grupo quociente  $G$  módulo os múltiplos escalares da matriz identidade,  $\alpha \text{Id}$ , e  $\text{PSL}(2, p)$  o grupo quociente  $G'$  módulo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Um teorema de Jacobi diz que um inteiro positivo  $n$  pode ser representado como soma de 4 quadrados de  $8 \sum_{d|n, 4 \nmid d} d$  maneiras. Assim, existem  $p+1$  seqüências  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  com  $a_1 > 0$  ímpar e  $a_2, a_3, a_4$  inteiros pares tais que  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = p$ . A cada seqüência  $\mathbf{a}$  associamos a matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & a_3 + ia_4 \\ -a_3 + ia_4 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}$$

de  $\text{PGL}(2, p)$ , onde  $i$  é um inteiro tal que  $i^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Seja  $S$  o conjunto dessas  $p+1$  matrizes.

No caso de  $p$  ser um resíduo quadrático módulo  $q^1$  o grafo  $X^{p,q} = C(\text{PGL}(2, p), S)$  é  $(p+1)$ -regular sobre  $q(q^2 - 1)/2$  vértices com cada autovalor, além de  $p+1$ , é no máximo  $2\sqrt{p}$ .

Caso contrário, o grafo  $X^{p,q} = C(\text{PSL}(2, p), S)$  é bipartido,  $(p+1)$ -regular sobre  $q(q^2 - 1)$  vértices. Cada autovalor, além de  $p+1$  e  $-(p+1)$  é no máximo  $2\sqrt{p}$ .

A determinação do espectro desses grafos depende de uma boa estimativa para o número de soluções de sobre  $a_1^2 + 4q^2a_2^2 + 4q^2a_3^2 + 4q^2a_4^2 = p^k$  dada por Eichler e Igusa uma expressão para o número de soluções dessa equação quadrática em função dos autovalores de  $X^{p,q}$ . Os detalhes são bastante técnicos e podem ser vistos em [23].

*Exemplo 190.* Para  $k \in \mathbb{N}$ , consideremos o grafo com vértices formados por vetores binário de tamanho  $k$  e número ímpar de 1's, excluindo o vetor  $(1, 1, \dots, 1)$ . As arestas são definidos por  $ij \in E \Leftrightarrow \langle i, j \rangle \equiv 1 \pmod{2}$ , ou seja, o número de 1's em comum entre  $i$  e  $j$  é ímpar. Esse grafo tem  $2^{k-1} - 1$  vértices, é  $(2^{k-2} - 2)$ -regular e  $\lambda = 1 + 2^{\frac{k-3}{2}}$ .

---

<sup>1</sup> $p$  é da forma  $x^2 \pmod{q}$ .

### 5.3.3 Produto Zig-Zag

## 5.4 Passeios Aleatórios em Grafos Expansores

Lembremos que chamamos de *passeio* uma sequência  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  de vértices não necessariamente distintos de um grafo qualquer  $G = (V, E)$  de modo que vértices consecutivos são adjacentes. Um *passeio aleatório* em  $G$  é uma sequência  $(v_0, v_1, v_2, \dots)$  de movimentos em  $V$  de modo que  $v_{i+1}$  é escolhido aleatoriamente entre os vizinhos de  $v_i$ , cada vizinho com igual probabilidade de ser escolhido, para todo  $i$ .

Se  $G$  é  $d$ -regular então o próximo vértice é escolhido com probabilidade  $1/d$ . Seja  $A = A(G)$  a matriz de adjacências de um grafo  $d$ -regular  $G$ , então

$$P = \frac{1}{d}A.$$

é a *matriz de transições* do passeio aleatório. Um vetor com entradas não-negativas cuja soma é 1 é chamado *vetor de probabilidades* ou *vetor de estocástico*.

Um passeio aleatório num grafo regular fica caracterizado por uma matriz de transição  $P$  e um vetor de probabilidades  $\mathbf{v}$ ,  $p_j^i$  é a probabilidade de passo ir do vértice  $i$  para o vértice  $j$ , para quaisquer vértices  $i$  e  $j$ ,  $v_i$  é a probabilidade de  $i \in V$  ser o vértice inicial do passeio; a probabilidade do passeio começar em  $j$  é  $v_j$ , a probabilidade do primeiro passo chegar em  $j$  é

$$P\mathbf{v} = \sum_{i \in V} v_i p_j^i.$$

Ainda, para todo inteiro  $t > 0$  a matriz  $P^t = (p_i^{j(t)})$  é a *matriz de transição em  $t$  passos*. Dessa forma, se  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}$  e, para  $t > 0$

$$\mathbf{v}(t) = P\mathbf{v}(t-1) = P^t\mathbf{v}(0) \quad (5.19)$$

então  $\mathbf{v}(t)$  na coordenada  $j$  dá a probabilidade do passeio aleatório atingir o vértice  $j$  em  $t$  passos.

Notemos que  $P^t$ , para qualquer inteiro positivo  $t$ , é uma matriz cujas entradas são não-negativas e as linhas somam 1, tal matriz é dita *matriz estocástica*. Uma matriz quadrada com entradas não-negativas é *duplamente estocástica* se é estocástica e a soma das entradas de cada coluna é 1. A matriz de transição de um passeio aleatório num grafo regular é duplamente estocástica.

*Exercício 191* (Identidade de Chapman–Kolmogorov). Prove que

$$p_i^{j(k+t)} = \sum_{\ell \in V} p_i^{\ell(k)} p_\ell^{j(t)} \quad (5.20)$$

para quaisquer  $i, j \in V$ .

Um passeio aleatório num grafo *conexo* satisfaz a seguinte propriedade (verifique)

para quaisquer  $i, j \in V$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $p_i^{j(k)} > 0$ ,

ou seja, a partir de um vértice, todo vértice de  $V$  é visitado num número finito de passos com probabilidade positiva. Um vértice  $i$  tem período  $k$  num passeio aleatório se todo subpasseio  $(i, v_1, \dots, v_j, i)$ , independente do vértice inicial, tem comprimento múltiplo de  $k$ . Um passeio aleatório é dito *aperiódico* se satisfaz

para todo  $i \in V$ , existe  $k_0 \geq 1$  inteiro tal que para todo  $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$

$$p_i^{i(k)} > 0.$$

Um passeio que não é aperiódico é dito *periódico*. Um passeio aleatório aperiódico num grafo conexo é conhecido como *passeio aleatório ergódico*.

**Lema 192.** *Seja  $G$  um grafo conexo com pelo menos dois vértices. Um passeio aleatório em  $G$  é periódico se e só se  $G$  é bipartido.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo. Suponhamos que  $G$  é bipartido com bipartição  $\{A, B\}$ . Então, todos os passeios de  $u$  para  $v$  têm a mesma paridade no número de arestas, par caso  $u, v \in A$  ou  $u, v \in B$  e ímpar caso  $u \in A$  e  $v \in B$  ou  $v \in A$  e  $u \in B$ . Logo

- se  $u, v \in A$  ou  $u, v \in B$  então  $p_u^{v(t)} = 0$  quando  $t$  é ímpar,
- se  $u \in A$  e  $v \in B$ , ou  $v \in A$  e  $u \in B$ , então  $p_u^{v(t)} = 0$  quando  $t$  é par.

Agora, suponhamos  $G$  não-bipartido, então contém um circuito ímpar  $C$  (veja exercício 78, página 49). Tomemos  $u$  e  $v$  vértices que distam  $t$  em  $G$ . Um passeio de  $u$  para  $v$  com  $t + 2r$  aresta existe para todo  $r \in \mathbb{N}$ , basta repetir alguma aresta  $r$  vezes no passeio de comprimento  $t$ . Como  $G$  é conexo existe um passeio de  $u$  até algum vértice de  $C$  e de todo  $C$  até  $v$ , portanto podemos usar as arestas de  $C$  para obter passeios de  $u$  para  $v$  que têm a paridade oposta a de  $t + 2r$ . Logo,  $p_u^{v(t)} > 0$  para todo  $t$  suficientemente grande, ou seja, o passeio é aperiódico.  $\square$

Um propriedade importante dos passeios ergódicos é que  $\mathbf{v}(t)$  converge, quando  $t \rightarrow \infty$ , para um vetor estacionário. Um vetor de probabilidades  $\pi$  tal que

$$\pi = P\pi$$

é chamado de *vetor estacionário* ou *distribuição estacionária* do passeio aleatório.

De  $\lambda_1(A) = d$  temos  $\lambda_1(P) = 1$ , ademais podemos verificar que  $\pi_i = 1/n$ , para todo  $i$ , define um autovetor de probabilidades de  $P$  associado ao autovalor 1. Ainda, como  $G$  é  $d$ -regular, conexo e não-bipartido,  $P$  é simétrica, não-negativa e irredutível, logo pelo Teorema de Perron–Frobenius (Teorema 44, página 31)

1.  $\pi$  é único;
2.  $|\lambda_i| < 1$  para todo outro autovalor  $\lambda_i$ ,  $i > 1$ .

Usando a decomposição espectral (Teorema 30, página 25)  $P = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ , portanto

$$P^t = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T = \hat{\mathbf{1}} \hat{\mathbf{1}}^T + \sum_{i=2}^n \lambda_i^t \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$$

em que  $\hat{\mathbf{1}} = (1/\sqrt{n})\mathbf{1}$ . Notemos que  $\hat{\mathbf{1}} \hat{\mathbf{1}}^T = (1/n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ , portanto

$$p_k^{\ell(t)} = \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^n \lambda_i^t u_i^k u_i^\ell$$

e como  $|\lambda_i| < 1$  para  $i > 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_k^{\ell(t)} = \frac{1}{n}$$

ou seja  $p_k^{\ell(t)} \rightarrow \pi_k$  para todo  $\ell$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 193.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo  $d$ -regular, conexo e não-bipartido. Se  $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))^T$  é dado por (5.19) então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_j(t) = \frac{1}{n}.$$

*Demonstração.* Se  $\mathbf{v}$  é qualquer vetor de probabilidades, então  $(P^t \mathbf{v})_k = \sum_{\ell} p_k^{\ell(t)} v_{\ell}$  e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\ell} p_k^{\ell(t)} v_{\ell} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\ell} p_k^{\ell(t)} v_{\ell} = \frac{1}{n} \sum_{\ell} v_{\ell} = \frac{1}{n}$$

ou seja,  $P^t \mathbf{v} \rightarrow \pi$  quando  $t \rightarrow \infty$ . □

Portanto, independente de distribuição de probabilidades no início do passeio aleatório, como o passar do tempo, a distribuição converge para a distribuição uniforme, no limite o passeio está em qualquer vértice com igual probabilidade.

**Corolário 194.** *Se  $G = (V, E)$  é conexo, não-bipartido e  $d$ -regular com pelo menos dois vértices então um passeio aleatório em  $G$  admite um vetor estacionário. Ademais, a distribuição estacionária é única e dada por*

$$\pi = (\pi_v)_{v \in V}, \text{ com } \pi_v = \frac{d}{2|E|}. \quad (5.21)$$

*Demonstração.* Do Teorema 56, página 41, temos  $nd = 2|E|$ . □

*Observação 195.* Se  $G = (V, E)$  é bipartido então podemos contornar essa propriedade indesejada (no sentido do corolário acima) acrescentando laços aos vértices do grafo com probabilidade de transição  $1/2$  e dividir por 2 a probabilidade das outras arestas, ou seja, se  $P$  é a matriz de transição da cadeia no grafo original, a nova matriz de transição é

$$Q = \frac{P + \text{Id}}{2}.$$

Essa transformação apenas “reduz a velocidade” do passeio.

A velocidade com que um passeio aleatório ergódico converge para a distribuição uniforme é regulada por  $\lambda$ .

**Teorema 196.** *Com a notação acima  $\|\mathbf{v}(t) - (1/n)\mathbf{1}\| \leq \lambda^t$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{u}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , autovetores ortonormais da matriz de adjacências  $A$  com  $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{n})\mathbf{1}$ . Se  $\mathbf{v} = \sum_i c_i \mathbf{u}_i$  então  $\mathbf{v}(t) = \sum_i c_i \lambda_i^t \mathbf{u}_i$  e

$$\|\mathbf{v}(t) - c_1 \mathbf{u}_1\|^2 = (c_1 \lambda_1^t - c_1)^2 + \sum_{i>1} (c_i \lambda_i^t)^2 \leq \lambda^t \sum_{i>1} c_i^2 \leq \lambda^t \|\mathbf{v}\|^2 \leq \lambda^t.$$

Assim  $\mathbf{v}(t)$  converge para  $c_1 \mathbf{u}_1$  quando  $t$  cresce indefinidamente ( $\lambda \in (0, 1)$ ) que, portanto, é a distribuição estacionária, pois a distribuição limite é única. □

### 5.4.1 Aplicações

Seja  $F$  o conjunto de seqüências binárias aonde o algoritmo BPP falha,  $|F| < \alpha n$ . Por abuso, denotamos por  $F$  a matriz diagonal  $(f_i^j)$  dada por  $f_i^i = 1$  se a representação binária de  $i$  está em  $F$  e  $f_i^i = 0$  caso contrário.

explicar  
BPP e  
ajustar  $\alpha$   
na prova

Seja  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  o passeio aleatório em  $G$  com vértice inicial  $X_0$  com distribuição  $\pi^{(0)} = \mathbf{u}$  e com as transições dadas por  $P = 1/2(\hat{A} + \text{Id})$ .

Com essa notação, vamos demonstrar o teorema com  $k$  rodadas do algoritmo BPP usando as seqüências de bits  $R_1, R_2, \dots, R_k$  com  $R_i$  sendo a representação binária do vértices  $X_{(i-1)T}$ .

**Lema 197.** *Para qualquer distribuição  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*

$$\|FP^t\mathbf{x}\| \leq (\sqrt{\alpha} + \lambda_2^t)\|\mathbf{x}\| \quad e \quad \|(\text{Id} - F)P^t\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|$$

*Demonstração.* A segunda desigualdade é imediata:  $\|(\text{Id} - F)P^t\mathbf{x}\| \leq \|P^t\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|$ .

Agora  $\|FP^t\mathbf{x} - \mathbf{u}\| \leq \|P^t\mathbf{x} - \mathbf{u}\| \leq \lambda_2^t\|\mathbf{x}\|$ . Pela desigualdade triangular

$$\|FP^t\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_1\|F\mathbf{u}\| + \lambda_2^t\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_1\sqrt{|F|}/n + \lambda_2^t\|\mathbf{x}\|$$

e usando Cauchy-Schwarz  $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|$ , resultando em

$$\|FP^t\mathbf{x}\| \leq (\sqrt{\alpha} + \lambda_2^t)\|\mathbf{x}\|.$$

□

Observe que se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$  é uma distribuição sobre  $V(G)$  então a probabilidade de  $F$  é  $\|F\mathbf{x}\|_1$  e a probabilidade de  $\bar{F}$  em  $t$  passos segundo a matriz transições  $P$  depois de estar em  $F$  é dada  $\|(\text{Id} - F)P^tF\mathbf{x}\|_1$ .

Para uma seqüência de matrizes  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , com  $S_i \in \{F, \text{Id} - F\}$  e  $S_i = F$  se e só se  $R_i \in F$ . Queremos determinar  $\|S_k P^t S_{k-1} P^t \dots S_2 P^t S_1 \pi^{(0)}\|_1$  para uma seqüência  $S_1, S_2, \dots, S_k$  com maioria incorreta. Por Cauchy-Schwarz

$$\|S_k P^t S_{k-1} P^t \dots S_2 P^t S_1 \pi^{(0)}\|_1 \leq \sqrt{n} \|S_k P^t S_{k-1} P^t \dots S_2 P^t S_1 \pi^{(0)}\|$$

e se, pelo lema anterior, há  $\geq k/2$  de  $F$  com probabilidade no máximo  $(\sqrt{\alpha} + \lambda_2^t)^{k/2}$ , assim a probabilidade da escolha por maioria estar incorreta é

$$2^k (\sqrt{\alpha} + \lambda_2^t)^{k/2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

**Teorema 198.** *Um algoritmo BPP que usa  $m$  bits aleatórios por rodada pode ter a probabilidade de erro reduzida para  $1/2^k$  usando  $O(m+k)$  bits aleatórios e  $O(k)$  rodadas.*



## Comentários adicionais e referências bibliográficas

*refs para* A existência desses grafos foi provada pela primeira vez em 1973, uma prova probabilística de que *quase todo grafo  $d$ -regular, para  $d \geq 3$ , é expensor* e uma prova construtiva conhecida como *grafos expansores de Margulis*. Apesar da abundância, exibir explicitamente grafos expansores é uma tarefa difícil; computacionalmente, dados  $G$  e  $\varepsilon > 0$  decidir se  $G$  é  $\varepsilon$ -aresta-expensor NP-difícil (Alon, spectral techniques in graph algorithms, latin - no approx alg up to a cte factor). <http://pcpcourse.wordpress.com/2008/09/14/lecture-5-expanders-probabilistic-proof-of-existence/>

*refs para* Seja  $p$  um primo e  $V = \mathbb{Z}_p$ , o corpo finito de  $p$  elementos. Para cada  $x$ , os vizinho de  $x$  são os vértices  $x - 1$ ,  $x + 1$  e  $x^{-1}$  (com a convenção  $0^{-1} = 0$ ). O grafo assim definido é 3-regular e expensor (a prova é difícil pra ser apresentada aqui). ( the key property is Selbergs famous 3/16 theorem on the least eigenvalue of the Laplacian on modular curves.) Selberg, Atle On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. 1965 Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII pp. Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

Grafo expansores *esparsos*, isto é, com  $n < |E| < \alpha n^2$ , para  $\alpha > 0$ , são objetos aparentemente contraditórios. O objeto de estudo deste capítulo são famílias  $\{G^{m_i}\}_{n_i \geq 0}$  de grafos expansores e  $d$ -regular para um  $d$  fixo, portanto esparsos, onde  $|V(G^{m_i})| = n_i$  é uma seqüência monotonamente crescente. A existência desses grafos segue de métodos probabilísticos usuais, como mostrou Pinsker em 1973 que quase todo grafo  $d$ -regular,  $d \geq 3$ , é expensor.

São conhecidas muitas aplicações de grafos expansores em várias áreas como em Teoria da Medida ([20]) e Teoria dos Grupos ([24]), em Códigos ([27]), Criptografia ([14]) e em Complexidade ([28, 29, 17, 10]) como é o caso do resultado de não-aproximação citado na introdução do Capítulo 4. Algumas dessas aplicações requerem uma *construção explícita* dos grafos, isto é, que sejamos capazes de construir uma representação de  $G^n$  em tempo  $\text{poly}(n)$  ou, um requisito mais forte, a vizinhança de um vértice é computada em tempo  $\text{poly}(\log(n))$ . A busca por construções explícitas desses grafos passou a ser objeto de investigação, mas apesar da abundância de expansores decidir se um dado grafo é  $\varepsilon$ -expensor é um problema NP-difícil. A caracterização espectral de grafos expansores levou os pesquisadores a considerarem construções algébricas para esses grafos e a demonstração de que tais grafos esparsos são expansores depende em geral de teorema difíceis de várias subáreas da matemática que fogem do nosso escopo,

por exemplo, uma célebre construção devida a Lubotzky, Phillips e Sarnak em 1988 envolve resultados em Teoria dos Números e Teoria da Representação de Grupos Finitos (veja [9] para um tratamento completamente autocontido da construção).

175 provado por Cheeger (1970) em outro contexto: ele provou que o primeiro autovalor do laplaciano de uma variedade pode ser limitado pelo infimo das razões entre área e volume (geometria Riemanniana). Esse resultado foi estendido em 1982 por Buser que também considerou a versão combinatória desse limitante. Também provado, independentemente, por Dodziuk 1984. A prova que apresentamos é de Alon e Milman (1984).

5.7 Alon e Boppana de Alon e Boppana (e, independentemente, Burger em 1987 e Serre em 1997)

5.7 Seguindo uma prova de A. Nilli, mostraremos que MR1124768,  
exemplos de cayley <http://mathworld.wolfram.com/CayleyGraph.html>  
soma de guass quadratica ireland pg 71  
na

## Referências Bibliográficas

- [1] Noga Alon and Joel H. Spencer. *The probabilistic method*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. With an appendix by Paul Erdős, A Wiley-Interscience Publication.
- [2] Sheldon Axler. *Linear algebra done right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [3] Béla Bollobás. *Random graphs*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1985.
- [4] F. R. K. Chung, R. L. Graham, and R. M. Wilson. Quasirandom graphs. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 85(4):969–970, 1988.
- [5] Fan R. K. Chung. *Spectral graph theory*, volume 92 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1997.
- [6] Lothar Collatz and Ulrich Sinogowitz. Spektren endlicher Grafen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 21:63–77, 1957.
- [7] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. *Eigenspaces of graphs*, volume 66 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [8] Dragoš M. Cvetković, Michael Doob, and Horst Sachs. *Spectra of graphs*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, second edition, 1982. Theory and application.
- [9] Giuliana Davidoff, Peter Sarnak, and Alain Valette. *Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs*, volume 55 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [10] Irit Dinur. The PCP theorem by gap amplification (extended abstract). In *STOC'06: Proceedings of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 241–250, New York, 2006. ACM.
- [11] Joel N. Franklin. *Matrix theory*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

- 
- [12] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.
  - [13] Chris Godsil and Gordon Royle. *Algebraic graph theory*, volume 207 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.
  - [14] Oded Goldreich, Russell Impagliazzo, Leonid Levin, Ramarathnam Venkatesan, and David Zuckerman. Security preserving amplification of hardness. In *31st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Vol. I, II (St. Louis, MO, 1990)*, pages 318–326. IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1990.
  - [15] Paul R. Halmos. *Finite-dimensional vector spaces*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1974. Undergraduate Texts in Mathematics.
  - [16] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. *Linear algebra*. Second edition. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.
  - [17] Russell Impagliazzo and Avi Wigderson.  $P = BPP$  if  $E$  requires exponential circuits: derandomizing the XOR lemma. In *STOC '97 (El Paso, TX)*, pages 220–229 (electronic). ACM, New York, 1999.
  - [18] Kenneth Ireland and Michael Rosen. *A classical introduction to modern number theory*, volume 84 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
  - [19] Svante Janson, Tomasz Łuczak, and Andrzej Ruciński. *Random graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000.
  - [20] N. J. Kalton and James W. Roberts. Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278(2):803–816, 1983.
  - [21] M. Krivelevich and B. Sudakov. Pseudo-random graphs. In *More sets, graphs and numbers*, volume 15 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 199–262. Springer, Berlin, 2006.
  - [22] K.Y. Lin. An elementary proof of the Perron–Frobenius theorem for non-negative symmetric matrices. *Chinese Journal of Physics*, 15(4):283–285, 1977.

- 
- [23] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak. Ramanujan graphs. *Combinatorica*, 8(3):261–277, 1988.
- [24] Alexander Lubotzky and Igor Pak. The product replacement algorithm and Kazhdan’s property (T). *J. Amer. Math. Soc.*, 14(2):347–363 (electronic), 2001.
- [25] Bojan Mohar. Some applications of Laplace eigenvalues of graphs. In *Graph symmetry (Montreal, PQ, 1996)*, volume 497 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 225–275. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [26] David Poole. *Álgebra Linear*. Editora Thomson, 2004.
- [27] Michael Sipser and Daniel A. Spielman. Expander codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 42(6, part 1):1710–1722, 1996. Codes and complexity.
- [28] Alasdair Urquhart. Hard examples for resolution. *J. ACM*, 34(1):209–219, 1987.
- [29] Leslie G. Valiant. On non-linear lower bounds in computational complexity. In *Seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Albuquerque, N. M., 1975)*, pages 45–53. Assoc. Comput. Mach., New York, 1975.
- [30] Edwin R. van Dam and Willem H. Haemers. Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra Appl.*, 373:241–272, 2003. Special issue on the Combinatorial Matrix Theory Conference (Pohang, 2002).

## Índice Remissivo

- $(n)_k$ , 87
- $A(G)$ , 16
- $A \sim B$ , 6
- $A^{-1}$ , 6
- $A_G$ , 34
- $A_\rho$ , 8, 13
- $E(G)$ , 33
- $E_G(U, W)$ , 40
- $G - U$ , 39
- $G - v$ , 39
- $G = (V, E)$ , 33
- $G[U]$ , 38
- $K^n$ , 35
- $K^{a,b}$ , 46
- $L_G$ , 55
- $N_G(v)$ , 36
- $P^k$ , 44
- $P^{-1}$ , 6
- $V(G)$ , 33
- $V_\lambda$ , 13
- $[n]$ , 5
- $\mathbb{C}^{m \times n}$ , 13
- $\Delta(G)$ , 36
- $\binom{V}{2}$ , 33
- $\delta(G)$ , 36
- $\kappa(G)$ , 61
- $\lambda(G)$ , 69
- $A_i^j$ , 7, 8
- $\mathbf{0}$ , 7
- $\mathbf{e}_i$ , 8
- $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ , 17
- $\mathcal{G}(n)$ , 69
- $\text{Id}_n$ , 6
- $\text{cof}(a_i^j)$ , 8
- $\det(A)$ , 7
- $\text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 6
- $\text{ma}(\lambda)$ , 14
- $\text{mg}(\lambda)$ , 14
- $\text{tr}(A)$ , 7
- $\omega(G)$ , 72
- $\text{cin}(G)$ , 50
- $\text{diam}(G)$ , 48
- $\text{dist}_G(i, j)$ , 46
- $\text{dist}_G(i, j) = \infty$ , 46
- $d(G)$ , 36
- $d(v)$ , 36
- $e(U)$ , 89
- $e(U, W)$ , 89
- $k$ -conexo, 61
- $p$ -coloração, 77
- $p_{i,j}^{(t)}$ , 110
- $r_H(G)$ , 46
- árvores, 53
- adjacentes
  - arestas, 34
  - vértices, 33
- aperiódico, 110
- aresta, 33
- aresta de corte, 53
- autoespaço associado, 13
- autovalor, 10
- autovetor, 10
- base ortonormal, 18

- cópia, 45
- cintura, 50
- clique, 72
- coloração, 77
  - própria, 77
- comprimento
  - do passeio, 42
- conexidade, 61
- conexidade algébrica, 61
- conjunto
  - independente, 70
- constante isoperimétrica, 97
- corte, 65
- desigualdade
  - de Chebyshev, 85
  - de Cauchy–Schwarz, 16
  - de Markov, 85
  - de Motzkin e Strauss, 72
- determinante, 7
- diagrama, 34
- distância espectral, 98
- distribuição estacionária, 111
- espectro, 34
  - laplaciano, 57
- extremos, 34
- fórmula
  - de Binet–Cauchy, 60
  - de Cayley, 61
- floresta, 55
- folha, 54
- grafo, 33
  - $\varepsilon$ -aresta-expansor, 98
  - $\varepsilon$ -expansor, 98
  - $d$ -regular, 37
  - de Ramanujan, 108
  - bipartido, 46
  - bipartido completo, 46
  - caminho, 44
  - circuito, 44
  - complemento do, 36
  - completo, 35
  - conexo, 46
  - de Cayley, 104
  - de Petersen, 35
  - de Turán, 75
  - estrela, 54
- grau, 36
  - máximo, 36
  - médio, 36
  - mínimo, 36
- incide, 33
- isomorfismo, 35
- isomorfos, 35
- média, 85
- matriz, 5
  - adjunta, 6
  - auto-adjunta, 15
  - coluna, 5
  - de adjacências, 34
  - de transição em  $t$  passos, 110
  - decomposição espectral de, 23
  - determinante de, 7
  - diagonal, 6
  - diagonalizável, 6
  - duplamente estocástica, 110

- estocástica, 110
- inversa, 6
- invertível, 6
- irredutível, 8
- laplaciana, 55
- não-negativa, 7
- nula, 7
- ortogonal, 19
- positiva, 7
- positiva e semidefinida, 56
- simétrica, 16
- traço de, 7
- transposta, 6
- matriz de transições, 109
- matrizes
  - semelhantes, 6
- multiplicidade
  - algébrica, 14
  - geométrica, 14
- número cromático, 77
- número de independência, 70
- norma, 16
  - de uma matriz, 25
- ortogonais, 17
- passeio, 42
- passeio aleatório, 109
- passeio aleatório ergódico, 110
- polinômio característico, 10
- polinômio característico
  - de um grafo, 34
  - do grafo completo, 35
  - do grafo de Petersen, 35
- Princípio de Rayleigh, 24
- Processo de Ortogonalização de Gram—  
Schmidt, 18
- produto
  - escalar, 16
- projeção ortogonal, 18
- pseudo-regular, 66
- quociente de Rayleigh, 24
- representação geométrica, 34
- subgrafo, 38
  - induzido, 38
- Teorema
  - da decomposição espectral, 23
  - de Perron–Frobenius, versão para gra-  
fos, 50
  - de Brooks, 78
  - de Courant–Fischer, 26, 27
  - de Kirchhoff, 60
  - de Perron–Frobenius, 29
  - do Entrelaçamento, 28
  - Espectral, 21
- traço, 7
- triângulo, 44
- vértice, 33
- vértice-expansão, 103
- valor médio, 85
- vetor, 5
  - de probabilidades, 109
  - de estocástico, 109
  - estacionário, 111
- vizinhança, 36
- vizinhos, 36



## Índice de Símbolos

- $(n)_k$ , 113
- $A(G)$ , 22
- $A \sim B$ , 10
- $A_G$ , 45
- $A_\rho$ , 12, 13, 18
- $E(G)$ , 44
- $E_G(U, W)$ , 51
- $G - U$ , 50
- $G - v$ , 50
- $G = (V, E)$ , 43
- $G[U]$ , 50
- $K^n$ , 45
- $K^{a,b}$ , 59
- $L_G$ , 69
- $N_G(v)$ , 47
- $P^k$ , 56
- $P^{-1}$ , 10
- $V(G)$ , 44
- $V_\lambda$ , 18
- $\Delta(G)$ , 47
- $\binom{V}{2}$ , 43
- $\delta(G)$ , 47
- $\kappa(G)$ , 76
- $A_i^j$ , 12
- $A_i^j$ , 12
- $\mathbf{0}$ , 12
- $\mathbf{e}_i$ , 13
- $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ , 23
- $\mathcal{G}(n)$ , 101
- $\text{Id}_n$ , 10
- $\text{cof}(a_i^j)$ , 12
- $\det(A)$ , 11
- $\text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 11
- $\text{ma}(\lambda)$ , 19
- $\text{mg}(\lambda)$ , 19
- $\text{tr}(A)$ , 11
- $\omega(G)$ , 88
- $\text{cin}(G)$ , 63
- $\text{diam}(G)$ , 60
- $\text{dist}_G(i, j)$ , 58
- $\text{dist}_G(i, j) = \infty$ , 58
- $d(G)$ , 47
- $d(v)$ , 47
- $e(U)$ , 102
- $e(U, W)$ , 102
- $k$ -conexo, 76
- $p$ -coloração, 94
- $r_H(G)$ , 58
- árvores, 66
- adjacentes
  - arestas, 44
  - vértices, 44
- aresta, 43
- aresta de corte, 66
- auto-espço associado, 18
- autovalor, 14
- autovetor, 15
- base ortonormal, 25
- cópia, 58
- cintura, 63
- clique, 88
- coloração, 94

- própria, 94
- comprimento
  - do passeio, 54
- conexidade, 76
- conexidade algébrica, 76
- conjunto
  - independente, 85
- constante isoperimétrica, 120
- corte, 80
- desigualdade
  - de Chebyshev, 112
  - de Cauchy–Schwarz, 22
  - de Markov, 111
  - de Motzkin e Strauss, 88
- determinante, 11
- diagrama, 44
- espectro, 45
  - laplaciano, 71
- extremos, 44
- fórmula
  - de Binet–Cauchy, 74
  - de Cayley, 76
- floresta, 69
- folha, 67
- grafo, 43
  - $d$ -regular, 48
  - $\varepsilon$ -expansor, 121
  - de Ramanujan, 132
  - bipartido, 58
  - bipartido completo, 59
  - caminho, 56
  - circuito, 56
  - complemento do, 47
  - completo, 45
  - conexo, 58
  - de Cayley, 127
  - de Petersen, 46
  - de Turán, 91
  - estrela, 67
- grau, 47
  - máximo, 47
  - médio, 47
  - mínimo, 47
- incide, 44
- isomorfismo, 45
- isomorfos, 45
- média, 111
- matriz, 9
  - adjunta, 10
  - auto-adjunta, 21
  - coluna, 9
  - de adjacências, 45
  - decomposição espectral de, 29
  - determinante de, 11
  - diagonal, 11
  - diagonalizável, 11
  - inversa, 10
  - invertível, 10
  - irredutível, 12
  - laplaciana, 69
  - não-negativa, 11
  - nula, 12
  - ortogonal, 25
  - positiva, 11
  - positiva e semidefinida, 70

- simétrica, 22
- traço de, 11
- transposta, 10
- matrizes
  - semelhantes, 10
- multiplicidade
  - algébrica, 19
  - geométrica, 19
- número cromático, 94
- número de independência, 85
- norma, 22
  - de uma matriz, 33
- ortogonais, 23
- passeio, 54
- polinômio característico, 15
  - de um grafo, 45
  - do grafo completo, 45
  - do grafo de Petersen, 46
- Princípio de Rayleigh, 31
- Processo de Ortogonalização de Gram—  
Schmidt, 25
- produto
  - escalar, 22
- projeção ortogonal, 24
- pseudo-regular, 82
- quociente de Rayleigh, 31
- representação geométrica, 44
- subgrafo, 49
  - induzido, 50
- Teorema
  - da decomposição espectral, 29
  - de Brooks, 95
  - de Courant–Fischer, 33, 34
  - de Kirchhoff, 75
  - de Perron–Frobenius, 37
  - de Perron–Frobenius, versão para gra-  
fos, 63
  - do Entrelaçamento, 36
  - Espectral, 27
- traço, 11
- triângulo, 56
- vértice, 43
- valor médio, 111
- vetor, 9
- vizinhança, 47
- vizinhos, 47