Semanas 3,4

1. Técnicas de demonstração

Os rótulos

- **Teoremas** — resultados importantes,

Os rótulos

- **Teoremas** — resultados importantes,
- **Proposições** — um pouco menos importantes,

Os rótulos

- **Teoremas** — resultados importantes,
- **Proposições** — um pouco menos importantes,
- **Lemas** — resultados auxiliares,

Os rótulos

- **Teoremas** — resultados importantes,
- **Proposições** — um pouco menos importantes,
- **Lemas** — resultados auxiliares,
- **Corolários** — consequência “fácil” de outro resultado,

Os rótulos

- **Teoremas** — resultados importantes,
- **Proposições** — um pouco menos importantes,
- **Lemas** — resultados auxiliares,
- **Corolários** — consequência “fácil” de outro resultado,
- **Conjeturas** — propostas de uma sentença verdadeira. Se for provada vira um teorema.

Os rótulos

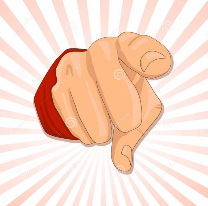
- **Teoremas** — resultados importantes,
- **Proposições** — um pouco menos importantes,
- **Lemas** — resultados auxiliares,
- **Corolários** — consequência “fácil” de outro resultado,
- **Conjeturas** — propostas de uma sentença verdadeira. Se for provada vira um teorema.
- **Exercícios**:

Os rótulos

- **Teoremas** — resultados importantes,
- **Proposições** — um pouco menos importantes,
- **Lemas** — resultados auxiliares,
- **Corolários** — consequência “fácil” de outro resultado,
- **Conjeturas** — propostas de uma sentença verdadeira. Se for provada vira um teorema.
- **Exercícios**:

Os rótulos

- **Teoremas** — resultados importantes,
- **Proposições** — um pouco menos importantes,
- **Lemas** — resultados auxiliares,
- **Corolários** — consequência "fácil" de outro resultado,
- **Conjeturas** — propostas de uma sentença verdadeira. Se for provada vira um teorema.
- **Exercícios**:



A classificação é subjetiva (exceto a dos exercícios 😃).

Exemplo

Teorema
Se $(a, b) = (x, y)$ *então* $a = x$ *e* $b = y$*.*

Para provar o teorema usamos o resultado auxiliar:

Lema
Se $\{ a, x \} = \{ a, y \}$ *então* $x = y$*.*

Consequência "fácil" do teorema:

Corolário
Se $a \neq b$ *então* $(a, b) \neq (b, a)$*.*

demonstrações nas notas de aula

Definições

... são parte importante das demonstrações.

Definição de número par

Um inteiro n é **par** se, e somente se, n é da forma $2k$ para algum inteiro k.

Definições

... são parte importante das demonstrações.

Definição de número par

Um inteiro n é **par** se, e somente se, n é da forma $2k$ para algum inteiro k.

É um "se, e somente se", usada em demonstrações *como se fosse* uma equivalência lógica, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$

$$n \text{ é par} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k.$$

Exemplo

Teorema

Se $x \in \mathbb{Z}$ é par e $y \in \mathbb{Z}$ é par, então $x + y$ é par.

Exemplo

Teorema

Se $x \in \mathbb{Z}$ é par e $y \in \mathbb{Z}$ é par, então $x + y$ é par.

Demonstração.

Sejam x e y números inteiros quaisquer.

Exemplo

Teorema

Se $x \in \mathbb{Z}$ é par e $y \in \mathbb{Z}$ é par, então $x + y$ é par.

Demonstração.

Sejam x e y números inteiros quaisquer.

Assuma que x é par e y é par.

Exemplo

Teorema

Se $x \in \mathbb{Z}$ é par e $y \in \mathbb{Z}$ é par, então $x + y$ é par.

Demonstração.

Sejam x e y números inteiros quaisquer.
Assuma que x é par e y é par.
Pela definição existem inteiros k_1 e k_2 tais que $x = 2k_1$ e $y = 2k_2$, (aqui usamos o $\Rightarrow$ da definição)

Exemplo

Teorema

Se $x \in \mathbb{Z}$ é par e $y \in \mathbb{Z}$ é par, então $x + y$ é par.

Demonstração.

Sejam x e y números inteiros quaisquer.
Assuma que x é par e y é par.
Pela definição existem inteiros k_1 e k_2 tais que $x = 2k_1$ e $y = 2k_2$, (aqui usamos o $\Rightarrow$ da definição) logo $x + y = 2(k_1 + k_2)$, (agora usamos o $\Leftarrow$ da definição)

Exemplo

Teorema

Se $x \in \mathbb{Z}$ é par e $y \in \mathbb{Z}$ é par, então $x + y$ é par.

Demonstração.

Sejam x e y números inteiros quaisquer.
Assuma que x é par e y é par.
Pela definição existem inteiros k_1 e k_2 tais que $x = 2k_1$ e $y = 2k_2$, (aqui usamos o $\Rightarrow$ da definição) logo $x + y = 2(k_1 + k_2)$, (agora usamos o $\Leftarrow$ da definição)portanto, $x + y$ é par. $\square$

Definições

Definição de número ímpar

Um inteiro n é **ímpar** se, e somente se, n é da forma $2k+1$ para algum inteiro k.

Se n **não** é par, é ímpar?

Se n **não** é par, é ímpar?

NÃO! Pelo menos **não** a partir das definições anteriores

Escrevendo direito

As demonstrações *devem* se escritas em português, usando *frases completas* e com *pontuação* adequada. *Fórmulas e símbolos matemáticos são partes de frases* e não são tratados diferente de outras palavras.

Lendo ... Escrutínio

1)	x é par e y é par.	(hipótese)
2)	x é par.	(simplificação)
3)	y é par.	(simplificação)
4)	x é par $\rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z}, x = 2k_1$	(definição)
5)	$\exists k_1 \in \mathbb{Z}, x = 2k_1$	(modus ponens)
6)	$x = 2k_1$	(instanciação $\exists$)
7)	y é par $\rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z}, y = 2k_2$	(definição)
8)	$\exists k_2 \in \mathbb{Z}, y = 2k_2$	(modus ponens)
9)	$y = 2k_2$	(instanciação $\exists$)
10)	$x = 2k_1$ e $y = 2k_2$	(conjunção)
11)	$x = 2k_1$ e $y = 2k_2 \rightarrow x + y = 2(k_1 + k_2)$	(compatibilidade)
12)	$x + y = 2(k_1 + k_2)$	(modus ponens)
13)	$x + y = 2(k_1 + k_2) \rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}, x + y = 2c$	(generalização $\exists$)
14)	$\exists c \in \mathbb{Z},\ x + y = 2c$	(modus ponens)
15)	$\exists c \in \mathbb{Z}, x + y = 2c \rightarrow x + y$ é par	(definição)
16)	$x + y$ é par	(modus ponens).

Demonstração direta de implicação

Para demonstrar que $A \rightarrow B$ é verdadeiro assumimos que A é verdadeiro e deduzimos que B é verdadeiro.

Demonstração direta de implicação

Para demonstrar que $A \to B$ é verdadeiro assumimos que A é verdadeiro e deduzimos que B é verdadeiro.

Demonstração:
Sejam ... Declare as variáveis
Assuma/Suponha A Declare as hipóteses
Argumente
Portanto B Conclua

Exemplo

Teorema

Se a *e* b *são números inteiros tais que* $0 < a < b$*, então* $a^2 < b^2$*.*

Exemplo

Demonstração.

Sejam a e b são números inteiros.
Suponha que $0 < a < b$ e vamos provar que $a^2 < b^2$.
Se $a < b$ e $0 < a$ então $a^2 < ab$. Se $a < b$ e $0 < b$ então $ab < b^2$. Por transitividade $a^2 < b^2$. $\square$

Escrutínio do exemplo

1)	$0 < a$ e $a < b$	(hipótese)
2)	$a < b$	(simplificação)
3)	$0 < a$	(simplificação)
4)	se $0 < a$ e $a < b$, então $0 < b$	(transitividade do $<$)
5)	$0 < b$	(modus ponens)
6)	se $a > 0$ e $a < b$ então $a \cdot a < a \cdot b$	(compatibilidade do $<$ com $\cdot$)
7)	$a^2 < ab$	(modus ponens)
8)	$0 < b$ e $a < b$	(regra da conjunção)
9)	se $b > 0$ e $a < b$ então, $a \cdot b < b \cdot b$	(compatibilidade do $<$ com $\cdot$)
10)	$ab < b^2$	(modus ponens)
11)	$a^2 < ab$ e $ab < b^2$	(regra da conjunção)
12)	se $a^2 < ab$ e $ab < b^2$ então $a^2 < b^2$	(transitividade do $<$)
13)	$a^2 < b^2$	(modus ponens)

Demonstrações

- As demonstrações devem se escritas em português, usando frases completas e com pontuação adequada.
- Fórmulas e símbolos matemáticos são partes de frases e não são tratados diferente de outras palavras.
- Rascunho é muito importante para descobrir a estratégia geral para abordar o problema a ser resolvido, antes de examinar os detalhes. Demonstrar é um trabalho de exploração. A demostração mostra só resultado final desse trabalho.

Exemplo

Teorema

Sejam A, B, C *conjuntos não vazios. Se* $A \cap C \subset B$ *e* $a \in C$ *então* $a \notin A \setminus B$*.*

Exemplo

Teorema

Sejam A, B, C *conjuntos não vazios. Se* $A \cap C \subset B$ *e* $a \in C$ *então* $a \notin A \setminus B$*.*

Lema

Sejam A, B, C *conjuntos não vazios. Se* $A \cap C \subset B$ *e* $a \in C$ *então* $a \in A \rightarrow a \in B$*.*

Exemplo

Em símbolos:

$$(A \cap C \subset B \text{ e } a \in C) \to (a \in A \to a \in B)$$

Exemplo

Em símbolos:

$$(A \cap C \subset B \text{ e } a \in C) \to (a \in A \to a \in B)$$

assumimos: $A \cap C \subset B$ e $a \in C$ verdadeiro

provamos: $a \in A \to a \in B$ verdadeiro

Exemplo

Em símbolos:

$$(A \cap C \subset B \text{ e } a \in C) \rightarrow (a \in A \rightarrow a \in B)$$

assumimos: $A \cap C \subset B$ e $a \in C$ verdadeiro

provamos: $a \in A \rightarrow a \in B$ verdadeiro

assumimos: $A \cap C \subset B$ e $a \in C$ e $a \in A$ verdadeiro

provamos: $a \in B$ verdadeiro.

Enunciados

1. Se 3 divide o inteiro n então 9 divide n^2.
2. Se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.
3. Se $m \in \mathbb{Z}$ é par e $n \in \mathbb{Z}$ é par, então $m + n$ é par.

Enunciados

1. Se 3 divide o inteiro n então 9 divide n^2.
2. Se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.
3. Se $m \in \mathbb{Z}$ é par e $n \in \mathbb{Z}$ é par, então $m + n$ é par.

Essas sentenças significam,

1. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se 3 divide n então 9 divide n^2.
2. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se n é ímpar, então n^2 é ímpar.
3. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, se m é par e n é par, então $m + n$ é par.

Prova de $\forall x \in D, P(x) \to Q(x)$

passo 1 considere c arbitrário em D

passo 2 prove $P(c) \to Q(c)$

passo 3 conclua $\forall x(P(x) \to Q(x))$ pela regra da generalização universal.

Prova de $\forall x \in D, P(x) \rightarrow Q(x)$

passo 1 considere c arbitrário em D

passo 2 prove $P(c) \rightarrow Q(c)$

passo 3 conclua $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ pela regra da generalização universal.

Demonstração:
Tome $x \in D$ qualquer/Seja x um elemento arbitrário de D
Demonstre $P(x) \rightarrow Q(x)$.
Portanto, $P(x) \rightarrow Q(x)$ para todo $x \in D$.

Demonstração indireta de implicação

Para demonstrar que $A \to B$ é verdadeiro provamos que alguma sentença logicamente equivalente a $A \to B$ é verdadeiro.

- (contrapositiva) $A \to B \iff \neg B \to \neg A$
- (contradição) $A \to B \iff A \wedge \neg B \to \mathbf{F}$

Contrapositiva

$$\neg B \to \neg A$$

Demonstração:
Sejam ... Declare as variáveis
Assuma/Suponha $\neg B$ Declare as hipóteses
Argumente
Portanto $\neg A$ Conclua

Contrapositiva

$$\neg B \to \neg A$$

Demonstração:
Sejam ... Declare as variáveis
Assuma/Suponha $\neg B$ Declare as hipóteses
Argumente
Portanto $\neg A$ Conclua

Teorema

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se n^2 é par então n é par.

Contradição

$$(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \rightarrow \mathbf{F}$$

Um exemplo de estratégia para $(A \wedge \neg B) \rightarrow \mathbf{F}$

1)	A	(hipótese)
2)	$\neg B$	(hipótese)
3)	$\neg A$	(dedução)
4)	$A \wedge \neg A$	(regra da conjunção)

Eventualmente, na linha 3 deduzimos B e chegamos na contradição $B \wedge \neg B$.

Contradição

$$(A \wedge \neg B) \rightarrow \mathbf{F}$$

Demonstração:
A prova é por contradição.
Sejam ...
Assuma/Suponha A e $\neg B$
Argumente
Portanto ... e temos uma contradição.
Logo $A \rightarrow B$.

Contradição

Definição: a e b inteiros são **coprimos** se, e só se, $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Teorema

Se a e b são números inteiros coprimos, então não são ambos par.

Demonstração trivial e por vacuidade

$P \to Q$ é verdadeira ou porque P é falso (**vacuidade**) ou porque Q é verdadeiro (**trivial**).

- Para todo x conjunto, se $x \in \varnothing$ então $x \in A$
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, se $x^2 + 1 < 0$ então $x^5 \geqslant 4$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, se $x > 0$ então $x^2 + 5 > 0$.

Demonstração de equivalências

Demonstrar que $P \leftrightarrow Q$ é verdadeira.

Usamos que $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \leftarrow Q) \wedge (P \rightarrow Q)$.

Escrevemos duas demonstrações: $P \rightarrow Q$ e a recíproca $Q \rightarrow P$.

Definição: $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \big| b \text{ se, e só se, existe } q \in \mathbb{Z} \text{ tal que } aq = b.$$

$a \big| b$ lê-se "a divide b"

Demonstração de equivalências

Teorema

Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$ *não nulos,* $a \mid b$ *e* $b \mid a$ *se, e somente se,* $a = b$ *ou* $a = -b$*.*

Demonstração por casos

O argumento aqui por casos para $P \to Q$ é usado quando P pode ser escrito na forma $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ baseado na equivalência lógica

$$((P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \to Q) \Leftrightarrow$$

$$((P_1 \to Q) \wedge (P_2 \to Q) \wedge \cdots \wedge (P_n \to Q))$$

as implicações $P_i \to Q$ são os casos.

Demonstração por casos

Teorema

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + n$ é par.

Esquema da demonstração.

Seja n um inteiro arbitrário. Então n é par ou n é ímpar.

Caso 1: Assuma n par. [argumento]. Portanto $n^2 + n$ é par.

Caso 2: Assuma n ímpar. [argumento]. Logo $n^2 + n$ é par.

Portanto, para todo n inteiro, $n^2 + n$ é par. $\square$

Demonstração por casos

Teorema

Para todo $n \in \mathbb{Z}$*, se* $1 \leqslant n \leqslant 40$ *então* $n^2 - n + 41$ *é primo.*

Demonstração por casos

Teorema

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, *se* $1 \leqslant n \leqslant 40$ *então* $n^2 - n + 41$ *é primo.*

Demonstração.

Defina $f(n) = n^2 - n + 41$.

$f(1) = 41$ é primo, $f(2) = 43$ é primo, $f(3) = 47$ é primo, $f(4) = 53$ é primo, $f(5) = 61$ é primo, $f(6) = 71$ é primo, $f(7) = 83$ é primo, $f(8) = 97$ é primo, $f(9) = 113$ é primo, $f(10) = 131$ é primo, $f(11) = 151$ é primo, $f(12) = 173$ é primo, $f(13) = 197$ é primo, $f(14) = 223$ é primo, $f(15) = 251$ é primo, $f(16) = 281$ é primo, $f(17) = 313$ é primo, $f(18) = 347$ é primo, $f(19) = 383$ é primo, $f(20) = 421$ é primo, $f(21) = 461$ é primo, $f(22) = 503$ é primo, $f(23) = 547$ é primo, $f(24) = 593$ é primo, $f(25) = 641$ é primo, $f(26) = 691$ é primo, $f(27) = 743$ é primo, $f(28) = 797$ é primo, $f(29) = 853$ é primo, $f(30) = 911$ é primo, $f(31) = 971$ é primo, $f(32) = 1033$ é primo, $f(33) = 1097$ é primo, $f(34) = 1163$ é primo, $f(35) = 1231$ é primo, $f(36) = 1301$ é primo, $f(37) = 1373$ é primo, $f(38) = 1447$ é primo, $f(39) = 1523$ é primo, $f(40) = 1601$ é primo. $\square$

Demonstração de sentenças existenciais

$$\exists x \in D,\ P(x)$$

Demonstração construtiva: Exibe $c \in D$ tal que $P(c)$.

Demonstração não-construtiva: Infere, indiretamente, $c \in D$ tal que $P(c)$.

Demonstração de sentenças existenciais

Teorema

Existe um inteiro positivo n que pode ser escrito como a soma de dois cubos de duas maneiras diferentes.

Demonstração de sentenças existenciais

Teorema

Existe um inteiro positivo n que pode ser escrito como a soma de dois cubos de duas maneiras diferentes.

Demonstração (construtiva).

Tome $n = 1729$, pois $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$. $\square$

Demonstração de sentenças existenciais

Teorema

O polinômio $p(x) = x^3 + x - 1$ *tem uma raiz real.*

Demonstração de sentenças existenciais

Teorema

O polinômio $p(x) = x^3 + x - 1$ *tem uma raiz real.*

Demonstração (não-construtiva).

Se $p(x) = x^3 + x - 1$, então $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua.

Vamos aplicar o Teorema do Valor Intermediário para $p(0) = -1 < 0$ e $p(1) = 1 > 0$.

Pelo TVI, para todo $b \in [p(0), p(1)]$, existe $a \in [0, 1]$ tal que $p(a) = b$.

Façamos $b = 0$ e concluímos que existe $a \in [0, 1]$ tal que $p(a) = 0$. Portanto a é raiz de p. $\square$

Definição: O número real x é **racional** se existem números inteiros n e m, com $m \neq 0$, tal que $x = \frac{n}{m}$. Se x não é racional então x é **irracional**.

Note que se x é racional, $\frac{n}{m}$ não é único

A fração $\frac{n}{m}$ está na **forma reduzida** se $\mathrm{mdc}(n, m) = 1$.

Demonstração de sentenças existenciais

Teorema

Existem x, y irracionais tais que x^y é racional.

Demonstração de sentenças existenciais

Teorema

Existem x, y irracionais tais que x^y é racional.

Demonstração (não-construtiva).

Sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional. O número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou irracional.

Caso 1: Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional então faça $x = y = \sqrt{2}$ e temos x^y racional.

Caso 2: Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional então faça $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$ e temos

$$x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

que é racional.

Portanto existem x, y irracionais com x^y racional. $\square$

Demonstração de sentenças existenciais

Teorema

Para todo racional y, *existe um inteiro* x *tal que* $y < x$.

Demonstração de sentenças existenciais

Teorema

Para todo racional y, existe um inteiro x tal que $y < x$.

Demonstração (construtiva).

Seja $\frac{p}{q}$ um racional arbitrário. Vamos exibir um inteiro n tal que $\frac{p}{q} < n$.

Faça $n = |p| + 1$. Temos da definição de valor absoluto que $\frac{p}{q} \leqslant |\frac{p}{q}|$. Ademais $|\frac{p}{q}| \leqslant |p|$ e $|p| < |p| + 1$. Portanto $\frac{p}{q} < |p| + 1$. $\square$

Mais exemplos — a vez do PBO

Teorema

Prove que não existe natural p *tal que* $0 < p < 1$.

Demonstração.

A prova é por contradição. Suponha que $p \in \mathbb{N}$ é tal que $0 < p < 1$. Então $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 1\}$ é um subconjunto não vazio dos naturais. Tome $m := \min(A)$ dado pelo PBO. De $0 < m$, temos $0 < m^2$. De $m < 1$, temos $m^2 < m$ e como $m < 1$, $m^2 < 1$. Portanto

$$m^2 \in A \text{ e } m^2 < \min(A),$$

uma contradição. $\square$

Teorema (Teorema da Divisão)

Para todo inteiro a e todo inteiro $b > 0$ existe um único inteiro q e existe um único inteiro r tal que

$$a = qb + r \text{ e } 0 \leqslant r < b.$$

Corolário

Para todo natural n, se n não é par então n é ímpar.

Demonstração.

Sejam a e b inteiros com $b > 0$. Definimos

$$R := \{a - nb : n \in \mathbb{Z}\}$$

e temos que $R \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$ pois $a - (-|a|b)b > 0$ está em $R \cap \mathbb{N}$.
Seja r o menor inteiro positivo de $R \cap \mathbb{N}$, que existe pelo PBO, então $r \geqslant 0$ é da forma

$$r = a - qb$$

para algum q.
Se $r \geqslant b$ então $r - b \geqslant 0$ e

$$r - b = a - (q + 1)b \in R \cap \mathbb{N}$$

e $r - b < r$, uma contradição pois r é mínimo de $R \cap \mathbb{N}$.

Falta provar que r e q são únicos.

Falta provar que r e q são únicos.
Suponha que

$$a = q_1 b + r_1 \text{ e } a = q_2 b + r_2.$$

Se $r_1 \neq r_2$, então $(q_2 - q_1)b = r_1 - r_2$, logo $b \mid r_1 - r_2$.
Porém, $-b < r_1 - r_2 < b$, e temos uma contradição. Logo $r_1 = r_2$ e $q_1 = q_2$. $\square$

Definição: Um número natural maior que 1 é **primo** se, e só se, tem exatamente dois divisores positivos, o 1 e o próprio número. Um número natural maior que 1 que não é primo é dito **composto**, o qual tem um divisor positivos diferente do 1 e do próprio número.

Teorema

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > 1$ então n é primo ou pode ser escrito como produto de números primos.

Demonstração.

Seja $n > 1$ um natural. A prova é por contradição. Assuma que exista $n > 1$ natural que não é primo e não pode ser escrito como produto de primos e defina o conjunto não vazio A formado por todos naturais com tal propriedade. Pelo PBO o conjunto A tem um mínimo m. Como m não é primo, tem um divisor $a \neq 1, m$, isto é, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = a \cdot q$. Claramente, $1 < a, q < m$. Como m é mínimo a e q são primos ou produtos de primos e em todos os casos m é produto de primos, assim temos uma contradição. $\square$

Considerações finais

Objetivo de uma demostração é fornecer aos leitores provas convincentes para a veracidade de uma afirmação. Uma prova bem escrita é mais provável de ser uma prova correta, já que os erros são difíceis de esconder.

1. *Explique seu raciocínio*.
2. *Evite o simbolismo excessivo*.
3. *Introduza a notação cuidadosamente*.
4. *Simplifique*.
5. *Estruture provas longas*.
6. *Conclua*.
7. *Não seja "telegráfico"*:

Considerações finais

Teorema. *Há infinitos números primos.*

Demonstração.

Se houvessem finitos números primos

$$0 < \prod_{p \text{ primo}} \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) = \prod_{p \text{ primo}} \sin\left(\pi \frac{1 + 2\prod_{p'} p'}{p}\right) = 0$$

uma contradição. $\square$

Exercícios

Enuncie precisamente as sentenças abaixo, incluindo quantificadores, domínio das variáveis:

1. *Seja x um inteiro não nulo. Existe um único y tal que para todo z vale $zy = \frac{z}{x}$.*
2. *Seja x um real. Existe um único y tal que $x^2y = x - y$.*

Exercícios

1. Prove que não há uma quantidade finita de números primos.
2. Prove que não há um “menor racional positivo”.
3. Prove que para qualquer natural $n > 1$, existe uma sequência formada por n números naturais consecutivos tal que nenhum deles é primo (*dica:*$(n+1)! + j$ é divisível por j.).
4. Prove que no domínio dos números reais a seguinte sentença é verdadeira:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \left(|x-3| < \delta \rightarrow \left| \frac{2x^2 - 5x - 3}{x-3} \right| < \varepsilon \right)$$