Semana 10

Série de Taylor–Maclaurin

A série de Maclaurin da função f é a série de potências

$$\frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Série de Taylor–Maclaurin

A série de Maclaurin da função f é a série de potências

$$\frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

Série de Taylor–Maclaurin

A série de Maclaurin da função f é a série de potências

$$\frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

Na maioria das funções que estudamos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} + \cdots$$

Exemplo

Para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots$$

Exemplo

Para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1\,!}x^{2n+1}$$

Exemplo

Para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1\,!}x^{2n+1}$$

Como a sua calculadora científica calcula o valor do seno de um número?

Função geradora

A série de Maclaurin de

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

é a função geradora da sequência de Fibonacci

$$F_0, F_1, \dots,$$

Função geradora

$(a_0, a_1, a_2, \dots)$ é uma sequência de números reais

A função geradora (ordinária) $A(x)$ dessa sequência é

$$A(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$$

O coeficiente a_n de x^n é denotado por $[x^n]A(x)$.

Exemplo: $[x^n]\dfrac{x}{1 - x - x^2} = F_n$

Disclaimer

Não nos preocuparemos com questões de convergência para usar funções geradoras como uma ferramenta em contagem.

Embora seja relevante para aplicar ferramentas do cálculo, podemos tratar a série *simbolicamente*, como uma série formal de potências, que nos permite ignorar problemas de convergência e manipular séries de potências formais do mesmo modo como fazemos com polinômios.

Exercício

Determine a expressão para a função geradora da recorrência

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (\forall n \geqslant 2)$$

Como encontrar $[x^n]$?

Dado que a sequência de Fibonacci $(F_n)_{n \geqslant 0}$ é dada pela série de potências de $\frac{x}{1-x-x^2}$ como descobrir o valor de F_n?

Como encontrar $[x^n]$?

Dado que a sequência de Fibonacci $(F_n)_{n \geqslant 0}$ é dada pela série de potências de $\frac{x}{1-x-x^2}$ como descobrir o valor de F_n?

$$F_n = [x^n] \frac{x}{1 - 1 - x^2}$$

Como encontrar $[x^n]$?

Dado que a sequência de Fibonacci $(F_n)_{n\geqslant 0}$ é dada pela série de potências de $\frac{x}{1-x-x^2}$ como descobrir o valor de F_n?

$$F_n = [x^n]\frac{x}{1-1-x^2} = [x^n]\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)$$

Como encontrar $[x^n]$?

Dado que a sequência de Fibonacci $(F_n)_{n\geqslant 0}$ é dada pela série de potências de $\frac{x}{1-x-x^2}$ como descobrir o valor de F_n?

$$F_n = [x^n]\frac{x}{1-1-x^2} = [x^n]\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n\right) = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\frac{d^nF(x)}{dx^n}(0)$$

Como encontrar $[x^n]$?

Precisamos de $F^{(n)}(0) = \frac{d^n F(x)}{dx^n}(0)$

mas

$$\frac{d^3}{dx^3}F(x) = \frac{x(-(6(-2x-1)^3)}{(-x^2-x+1)^4} - \frac{(12(-2x-1))}{(-x^2-x+1)^3} + \frac{3((2(-2x-1)^2)}{(-x^2-x+1)^3} + \frac{2}{(-x^2-x+1)^2}$$

Como encontrar $[x^n]$? — Método das frações parciais

Neste caso

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)} \qquad (\alpha_i = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}))$$

e

$$\frac{x}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)} = \frac{A}{1-\alpha_1 x} + \frac{B}{1-\alpha_2 x}$$

resolvendo o sistema linear que resulta dessa identidade $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Assim

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 x} - \frac{1}{1-\alpha_2 x}\right)$$

Como encontrar $[x^n]$? — Método das frações parciais

Veremos que

$$\frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{n\geqslant 0} (\alpha x)^n$$

portanto

Como encontrar $[x^n]$? — Método das frações parciais

$$
\begin{aligned}
[x^n]\frac{1}{1-x-x^2} &= [x^n]\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 x}-\frac{1}{1-\alpha_2 x}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[x^n]\left(\frac{1}{1-\alpha_1 x}-\frac{1}{1-\alpha_2 x}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[x^n]\left(\sum_{n\geqslant 0}(\alpha_1 x)^n-\sum_{n\geqslant 0}(\alpha_2 x)^n\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha_1^n-\alpha_2^n\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)
\end{aligned}
$$

Séries formais

Se os coeficientes a_n são não nulos apenas para um número finito de índices n então a série formal de potências é um polinômio pois

- o polinômio 1 é função geradora da sequência $(1, 0, , 0, 0, \dots)$,
- o polinômio $1 - x$ é função geradora da sequência $(1, -1, 0, 0, \dots)$ e
- $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ da sequência $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$.

Soma e produto de séries formais

Se

$$A(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n \qquad \text{e} \qquad B(x) = \sum_{n \geqslant 0} b_n x^n$$

então

soma $$A(x) + B(x) = \sum_{n \geqslant 0} (a_n + b_n) x^n$$

produto $$A(x)B(x) = \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$$

Da definição de produto $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$

e escrevemos

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n$$

que é função geradora da sequência $(1,1,\ldots,1,0,0,0\ldots)$ com $n+1$ ocorrências de 1 e o restante é 0.

Da definição de produto, usando indução em n,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

é função geradora da sequência $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}, 0, 0, \ldots\right)$.

Da definição de produto $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots) = 1$ o que escrevemos como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

que é a função geradora da sequência constante $(1, 1, 1, \ldots)$

Assim

$$\frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{n \geqslant 0} \alpha^n x^n$$

que é a função geradora da sequência $(1, \alpha, \alpha^2, \ldots)$.

Exemplo

De quantas maneiras podemos encher uma sacola com n frutas sujeitas às seguintes restrições?

- O número de maçãs deve ser par.
- O número de bananas deve ser um múltiplo de 5.
- Pode haver no máximo quatro laranjas.
- Pode haver no máximo uma pêra.

Exemplo

Por exemplo, existem 7 maneiras com 6 frutas:

Maçãs	6	4	4	2	2	0	0
Bananas	0	0	0	0	0	5	5
Laranjas	0	2	1	4	3	1	0
Pêras	0	0	1	0	1	0	1

Exemplo

Maçãs $M(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} x^{2n} = \frac{1}{1 - x^2}$

Bananas $B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} x^{5n} = \frac{1}{1 - x^5}$

Laranjas $L(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + 0x^5 + 0x^6 + \cdots = \frac{1 - x^5}{1 - x}$

Pêras $P(x) = 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \cdots = 1 + x$

A função geradora para selecionar entre todos os quatro tipos de frutas é:

$$M(x) \cdot B(x) \cdot L(x) \cdot P(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot (1+x)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$