## Indução

Princípios Equivalências

Demonstraçõ indução

Erros Variantes

Mais varian

PIF pra frentetrás

Definições recursiva

## Semana 5

1 Indução

Princípios

Equivalências

Demonstrações por indução

**Erros** 

**Variantes** 

Mais variantes

PIF pra frente-pra trás

Definições recursivas

### иСТВ019-1

J Donadelli

## **PBO**

## Indução

Equivalências Demonstrações po

indução Erros

Mais variante

trás

Definições recursivas

Todo  $A \subset \mathbb{N}$  não-vazio tem um menor elemento

### ınduçad

### Princípios

Demonstrações po

indução Erros

Variantes Mais variante

PIF pra frentetrás

tras Definições recursiv

## Teorema (Princípio da Indução finita (PIF))

Seja  $X \subseteq \mathbb{N}$ . Se

- **1** 0 ∈ X **e**
- 2 para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \in X \rightarrow k+1 \in X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

### Delevioles

### Princípios

Demonstrações poindução

Varian Mais v

Mais variantes
PIF pra frente-

trás

Definições rec

## Teorema (Princípio da Indução finita (PIF))

Seja  $X \subseteq \mathbb{N}$ . Se

- **1** 0 ∈ X *e*
- 2 para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \in X \rightarrow k+1 \in X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

## Corolário (Princípio da Indução finita (PIF))

Seja P(n) uma propriedade de números naturais. Se

- 1 P(0) é verdadeiro e
- 2) para todo  $k \ge 0$ , se P(k) é verdadeiro então P(k+1) é verdadeiro,

então P(n) é verdadeiro para todo natural n.

### Inducão

### Princípios

Demonstrações po indução

Variantes Mais varia

PIF pra frente-

Teorema (Princípio da Indução finita completo (PIFc))

Seja  $X \subseteq \mathbb{N}$ . Se

- **1** 0 ∈ X *e*
- 2 para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\{0,1,\ldots,k\} \subset X \to k+1 \in X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

## Corolário (Princípio da Indução finita completo (PIFc))

Seja P(n) uma propriedade de números naturais. Se

- 1 P(0) é verdadeiro e
- 2 para todo  $k \ge 0$ , se P(0) e P(1) e ... e P(k) verdadeiro então P(k+1) é verdadeiro,

então P(n) é verdadeiro para todo natural n.

### иСТВ019-1

J Donadelli

### ndunão

Princípios

## Equivalências

Demonstrações p indução

Erros

Mais variante

PIF pra frente

Definições recursivas

## Equivalências

Vimos

$$\mathtt{PBO} \Longrightarrow \mathtt{PIF} \Longrightarrow \mathtt{PIFc}$$

### MCTB019-1

J Donadelli

### . ~

Princípios

### Equivalências

Demonstrações p indução

Erros

Mais variante

PIF pra frente

Definições recursivas

## Equivalências

Vimos

Veremos

 $PBO \Longrightarrow PIF \Longrightarrow PIFc \Longrightarrow PBO$ 

### MC1B019-1

J Donadelli

### nducão

Princípios

### Equivalências

Demonstrações prindução

Variantes

Mais variante

PIF pra frente

Deliliigoes recursive

## Equivalências

Vimos

Veremos

 $PBO \Longrightarrow PIF \Longrightarrow PIFc \Longrightarrow PBO$ 

Os 3 princípios são logicamente equivalentes.

 $PIFc \Rightarrow PBO$ 

Equivalências

indução

Definições recursivas

Tome A t.q.  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ . A prova é por contradição.

 $PIFc \Rightarrow PBO$ 

### Indução

Princípios Equivalências

Demonstrações pri indução

indução Erros

Mais variantes PIF pra frente-

PIF pra frentetrás

Definições recursiva

Tome A t.q.  $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$ . A prova é por contradição.

Supõe A não tem  $\min(A)$  e defina

$$X=\overline{A}=\{n\in\mathbb{N}:n\not\in A\}.$$

### Indução

### Princípios Equivalências

Demonstrações po indução Erros

Mais variantes
PIF pra frente-

trás Definições recursiv Tome A t.q.  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ . A prova é por contradição.

Supõe A não tem min(A) e defina

$$X = \overline{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \not\in A\}.$$

Se  $0 \notin X$  então  $0 \in A$ , portanto  $0 = \min(A)$ , contradição. Logo  $0 \in X$ .

Mais variantes PIF pra frentetrás Tome A t.q.  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ . A prova é por contradição.

Supõe A não tem min(A) e defina

$$X = \overline{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \not\in A\}.$$

Se  $0 \not\in X$  então  $0 \in A$ , portanto  $0 = \min(A)$ , contradição. Logo  $\underline{0 \in X}$ .

Tome  $k \ge 0$  arbitrário e assuma  $\{0, \dots, k\} \subset X$ .

Tome A t.q.  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ . A prova é por contradição.

Supõe A não tem min(A) e defina

$$X = \overline{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \not\in A\}.$$

Se  $0 \notin X$  então  $0 \in A$ , portanto  $0 = \min(A)$ , contradição. Logo  $0 \in X$ .

Tome  $k \ge 0$  arbitrário e assuma  $\{0, \dots, k\} \subset X$ .

 $k+1 \notin X$  implica  $k+1 \in A$  implica  $k+1 = \min(A)$ , contradição. Então  $k + 1 \in X$ .

Equivalências

Tome A t.g.  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ . A prova é por contradição.

Supõe A não tem min(A) e defina

$$X = \overline{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \not\in A\}.$$

Se  $0 \notin X$  então  $0 \in A$ , portanto  $0 = \min(A)$ , contradição. Logo  $0 \in X$ .

Tome  $k \ge 0$  arbitrário e assuma  $\{0, \dots, k\} \subset X$ .

 $k+1 \notin X$  implica  $k+1 \in A$  implica  $k+1 = \min(A)$ , contradição. Então  $k + 1 \in X$ .

Pelo PIFc  $X = \mathbb{N}$ , ou seia  $A = \emptyset$ , uma contradição.

## Demonstrações por

## indução

## PIF, PIFc

$$\frac{P(0)}{\forall k(P(k) \to P(k+1))}$$

$$\therefore \forall n, P(n)$$

$$\begin{array}{c} P(0) \\ \forall k (P(0) \ e \ \cdots \ e \ P(k) \rightarrow P(k+1)) \\ \hline \\ \therefore \forall n, \ P(n) \end{array}$$

### /ICTB019-

## J Donadelli

Princípios

Equivalências

Demonstrações por indução

Variantes Mais variantes

trás

Definições recursivas

## Exemplo

*Para todo*  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 + 1 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ .

Princípios

Equivalências Demonstraçõe

Demonstrações por indução

Erros Variantes

PIF pra frente

Definições recursivas

Exemplo

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0+1+\cdots+n=n(n+1)/2$ .

Vamos provar usando indução em  $\mathfrak{n}.$ 

### Demonstrações por indução

*Para todo*  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 + 1 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ .

Vamos provar usando indução em n.

**base:** Para n = 0, 0 = 0(0 + 1)/2.

Demonstrações por indução

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0+1+\cdots+n=n(n+1)/2$ .

Vamos provar usando indução em n.

**base:** Para n = 0, 0 = 0(0 + 1)/2.

**passo:** Seja  $k \ge 0$  um natural arbitrário,

Demonstrações por indução

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0+1+\cdots+n=n(n+1)/2$ .

Vamos provar usando indução em n.

**base:** Para n = 0, 0 = 0(0 + 1)/2.

**passo:** Seja  $k \ge 0$  um natural arbitrário,

Assuma que  $0 + 1 + \cdots + k = k(k + 1)/2$ 

Demonstrações por indução

Vamos provar usando indução em n.

**base:** Para n = 0, 0 = 0(0 + 1)/2.

**passo:** Seja  $k \ge 0$  um natural arbitrário,

*Para todo*  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 + 1 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ .

Assuma que  $0 + 1 + \cdots + k = k(k + 1)/2$ 

Vamos provar que  $0+1+\cdots+k+(k+1)=(k+1)(k+2)/2$ .

*Para todo*  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 + 1 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ .

Vamos provar usando indução em n.

**base:** Para n = 0, 0 = 0(0 + 1)/2.

**passo:** Seja  $k \ge 0$  um natural arbitrário,

Assuma que  $0 + 1 + \cdots + k = k(k + 1)/2$ 

Vamos provar que  $0+1+\cdots+k+(k+1)=(k+1)(k+2)/2$ .

(uma dedução vai aqui)

```
J Donadelli
Indução
Principios
Equivalências
Demonstrações por indução
Erros
Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-pra trâs
Definições recursiva
```

## *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ , $0 + 1 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ .

Vamos provar usando indução em  $\mathfrak n$ .

**base:** Para n = 0, 0 = 0(0 + 1)/2.

**passo:** Seja  $k \ge 0$  um natural arbitrário,

Assuma que  $0 + 1 + \cdots + k = k(k+1)/2$ 

Vamos provar que  $0+1+\cdots+k+(k+1)=(k+1)(k+2)/2$ .

(uma dedução vai aqui)

Portanto  $0 + 1 + \cdots + k + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$ .

Portanto, pelo PIF  $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### иСТВ019-

J Donadelli

Princípios

Equivalências

## Demonstrações por indução

Erros

Mais variant

PIF pra frente trás

Definições recursivas

## Exemplo

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo h > -1, vale  $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ .

### MCTB019-1

J Donadelli

## Princípios Equivalência

Equivalências

Demonstrações por indução

### indução Erros

Mais variantes

Definições recursiva

## Exemplo

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo h > -1, vale  $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ .

Seja h > -1 um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

.I Donadelli

Demonstrações por

## indução

## Exemplo

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo h > -1, vale  $(1+h)^n \ge 1 + nh$ .

Seja h > -1 um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

**base:** Se n = 0 então  $(1 + h)^n \ge 1 + nh$  vale.

## Princípios Equivalências

Equivalências Demonstrações por indução

### indução Erros

Mais variantes
PIF pra frentetrás

Definições recursi-

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo h > -1, vale  $(1 + h)^n \ge 1 + nh$ .

Seja h > -1 um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em  $\mathfrak{n}$ .

**base:** Se n = 0 então  $(1 + h)^n \geqslant 1 + nh$  vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Princípios Equivalências

Demonstrações por indução

Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-

trás

Definições rec

Exemplo

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo h > -1, vale  $(1 + h)^n \ge 1 + nh$ .

Seja h > -1 um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em  $\mathfrak{n}.$ 

**base:** Se n = 0 então  $(1 + h)^n \geqslant 1 + nh$  vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Assuma suponha que  $(1+h)^k \ge 1+kh$ .

# Demonstrações por

# indução

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo h > -1, vale  $(1 + h)^n \ge 1 + nh$ .

Seja h > -1 um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

**base:** Se n = 0 então  $(1 + h)^n \ge 1 + nh$  vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Assuma suponha que  $(1+h)^k \ge 1+kh$ .

Vamos provar que  $(1+h)^{k+1} \ge 1 + (k+1)h$ .

# Demonstrações por

indução

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo h > -1, vale  $(1 + h)^n \ge 1 + nh$ .

Seja h > -1 um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

**base:** Se n = 0 então  $(1 + h)^n \ge 1 + nh$  vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Assuma suponha que  $(1+h)^k \ge 1 + kh$ .

Vamos provar que  $(1+h)^{k+1} \ge 1 + (k+1)h$ .

(uma dedução vai aqui)

# Princípios Equivalências Demonstrações por indução

Erros Variantes Mais variantes

PIF pra frente trás Definições rec Exemplo

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo h > -1, vale  $(1 + h)^n \ge 1 + nh$ .

Seja h > -1 um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em  $\mathfrak{n}.$ 

**base:** Se n = 0 então  $(1 + h)^n \geqslant 1 + nh$  vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Assuma suponha que  $(1+h)^k \ge 1+kh$ .

Vamos provar que  $(1+h)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)h$ .

:

(uma dedução vai aqui)

.

Portanto  $(1+h)^{k+1} \ge 1 + (k+1)h$ .

Portanto, pelo PIF  $(1+h)^n\geqslant 1+nh$  para todo  $n\in\mathbb{N}.$ 

Demonstrações por indução

## Exemplo

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

### //CTB019-

J Donadelli

Indução
Princípios
Equivalências

Demonstrações por indução

Erros Variantes Mais variantes PIF pra frente-p trás

## Exemplo

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n  $\acute{e}$  primo ou ..... Pra facilitar escrita

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n é primo ou ..... Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2???}\longrightarrow$$

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n é primo ou ..... Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2???}\longrightarrow\mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\,\{\,\mathfrak{n}\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(\mathfrak{n}+2)\,\}$$

Definições recursiv

## Exemplo

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n  $\acute{e}$  primo ou ..... Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2???}\longrightarrow\mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\,\{\,n\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(n+2)\,\}$$

**base:** para n = 2, n é primo.

# Exemplo

Para todo natural n > 2, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n é primo ou ..... Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2???}\longrightarrow\mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\,\{\,n\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(n+2)\,\}$$

**base:** para n = 2, n é primo.

**passo:** Seja  $k \ge 2$  um natural arbitrário

Indução
Princípios
Equipalâncias

Demonstrações por indução Erros

Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-p

Definições recursiv

# Exemplo

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n  $\acute{e}$  primo ou ..... Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2???}\longrightarrow\mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\,\{\,n\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(n+2)\,\}$$

**base:** para n = 2, n é primo.

**passo:** Seja  $k \ge 2$  um natural arbitrário

Assuma P(2) e P(3) e  $\cdots$  e P(k).

Indução
Princípios
Equivalências

Demonstrações por indução Erros

Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-p
trás

Definições recursi-

# Exemplo

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n  $\acute{e}$  primo ou ..... Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2???}\longrightarrow\mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\,\{\,n\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(n+2)\,\}$$

**base:** para n = 2, n é primo.

**passo:** Seja  $k \ge 2$  um natural arbitrário

Assuma P(2) e P(3) e  $\cdots$  e P(k).

Vamos provar que P(k+1) vale em dois casos.

Indução
Princípios
Equivalências

Demonstrações por indução

Erros Variantes Mais variantes

tras Definições recursiv Exemplo

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n  $\acute{e}$  primo ou ..... Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2???}\longrightarrow\mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\,\{\,n\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(n+2)\,\}$$

**base:** para n = 2, n é primo.

**passo:** Seja  $k \ge 2$  um natural arbitrário

Assuma P(2) e P(3) e  $\cdots$  e P(k).

Vamos provar que P(k+1) vale em dois casos.

<u>Caso 1:</u> se k + 1 é primo então P(k + 1).

Indução
Princípios
Equivalências

Demonstrações por indução

Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-p
trás

trás Definições recursiv

# Exemplo

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n  $\acute{e}$  primo ou ..... Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant \mathbf{2???}\longrightarrow \mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\,\{\,\mathfrak{n}\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(\mathfrak{n}+2)\,\}$$

**base:** para n = 2, n é primo.

**passo:** Seja  $k \ge 2$  um natural arbitrário

Assuma P(2) e P(3) e  $\cdots$  e P(k).

Vamos provar que P(k+1) vale em dois casos.

<u>Caso 1:</u> se k + 1 é primo então P(k + 1).

<u>Caso 2</u>: se k + 1 não é primo então k + 1 =  $\alpha$ b com

 $2 \leq a, b \leq k$ .

.I Donadelli

Indução
Princípios
Foujvalências

Demonstrações por indução

Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-p
trás

trás Definições recursi

# Exemplo

Para todo natural  $n \ge 2$ , n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença n é primo ou ..... Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2\ref{2.2}} \longrightarrow \mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\,\{\,\mathfrak{n}\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(\mathfrak{n}+2)\,\}$$

**base:** para n = 2, n é primo.

**passo:** Seja  $k \ge 2$  um natural arbitrário

Assuma P(2) e P(3) e  $\cdots$  e P(k).

Vamos provar que P(k + 1) vale em dois casos.

Caso 1: se k + 1 é primo então P(k + 1).

<u>Caso 2:</u> se k + 1 não é primo então k + 1 = ab com

 $2 \le a, b \le k$ .

Pela hipótese valem P(a) e P(b)

.I Donadelli

Demonstrações por indução

Para todo natural n > 2, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença  $n \in primo ou .....$  Pra facilitar escrita

Exemplo

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2???}\longrightarrow\mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\,\{\,n\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(n+2)\,\}$$

**base:** para n = 2, n é primo.

**passo:** Seja  $k \ge 2$  um natural arbitrário

Assuma P(2) e P(3) e  $\cdots$  e P(k).

Vamos provar que P(k + 1) vale em dois casos.

Caso 1: se k + 1 é primo então P(k + 1).

Caso 2: se k + 1 não é primo então k + 1 = ab com

2 < a, b < k.

Pela hipótese valem P(a) e P(b)

Portanto ab é um produto de primos, portanto vale P(k+1).

# indução

Demonstrações por

Para todo natural n > 2, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja P(n) a sentença  $n \in primo ou .....$  Pra facilitar escrita

$$\mathbf{n}\geqslant\mathbf{2???}\longrightarrow\mathsf{PIF}\;\mathsf{em}\;\{\,\mathfrak{n}\in\mathbb{N}\colon\mathsf{P}(\mathfrak{n}+2)\,\}$$

**base:** para n = 2, n é primo.

**passo:** Seja  $k \ge 2$  um natural arbitrário

Assuma P(2) e P(3) e  $\cdots$  e P(k).

Vamos provar que P(k + 1) vale em dois casos.

Caso 1: se k + 1 é primo então P(k + 1).

Caso 2: se k + 1 não é primo então k + 1 = ab com

 $2 \le a, b \le k$ .

Pela hipótese valem P(a) e P(b)

Portanto ab é um produto de primos, portanto vale P(k+1).

Pelo PIFc, P(n) para todo n > 2.

Equivalências

# Demonstrações por

indução

Definições recursivas

# Exemplo

Para todo inteiro  $n \ge 5$ ,  $2^n > n^2$ .

## Princípios Equivalências Demonstrações por

Demonstrações p indução Erros

Mais variantes PIF pra frentetrás

Definições recursivas

Para todo inteiro  $n \geqslant 5$ ,  $2^n > n^2$ .

Vamos provar usando indução em  $\mathfrak{n}.$ 

Para todo inteiro  $n \ge 5$ ,  $2^n > n^2$ .

Vamos provar usando indução em n.

**base:** Para  $n = 5, 2^5 > 5^2$  vale.

# Princípios Equivalências Demonstrações por

## indução Erros

Mais variantes

Definições recursi

Para todo inteiro  $n \geqslant 5$ ,  $2^n > n^2$ .

Vamos provar usando indução em  $\mathfrak{n}.$ 

**base:** Para n = 5,  $2^5 > 5^2$  vale.

**passo:** Seja  $k \geqslant 5$  um natural arbitrário

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações por

### Demonstrações | indução Erros

Mais variantes

trás

Definições recursi

Para todo inteiro  $n \geqslant 5$ ,  $2^n > n^2$ .

Vamos provar usando indução em  $\mathfrak{n}.$ 

**base:** Para n = 5,  $2^5 > 5^2$  vale.

**passo:** Seja  $k \geqslant 5$  um natural arbitrário

Assuma  $2^k > k^2$ .

# Exemplo

## Princípios Equivalências Demonstrações por

## indução Erros

Mais variante

trás

Definições recursi

Para todo inteiro  $n \geqslant 5$ ,  $2^n > n^2$ .

Vamos provar usando indução em  $\mathfrak{n}.$ 

**base:** Para n = 5,  $2^5 > 5^2$  vale.

**passo:** Seja  $k \geqslant 5$  um natural arbitrário

Assuma  $2^k > k^2$ .

Vamos provar que  $2^{k+1} > (k+1)^2$ .

# Principios Equivalências Demonstrações por

### Demonstrações p indução Erros

Variantes
Mais variantes

PIF pra frentetrás

Definições recurs

Para todo inteiro  $n \geqslant 5$ ,  $2^n > n^2$ .

Vamos provar usando indução em  $\mathfrak{n}.$ 

**base:** Para n = 5,  $2^5 > 5^2$  vale.

**passo:** Seja  $k \geqslant 5$  um natural arbitrário

Assuma  $2^k > k^2$ .

Vamos provar que  $2^{k+1} > (k+1)^2$ .

:

(uma dedução vai aqui)

Para todo inteiro  $n \ge 5$ ,  $2^n > n^2$ .

Vamos provar usando indução em n.

**base:** Para n = 5.  $2^5 > 5^2$  vale.

**passo:** Seja  $k \ge 5$  um natural arbitrário

Assuma  $2^k > k^2$ 

Vamos provar que  $2^{k+1} > (k+1)^2$ .

(uma dedução vai aqui)

Portanto, pelo PIF  $2^n > n^2$  para todo  $n \ge 5$ .

## иСТВ019-1

.I Donadelli

# Indução

Princípios Equivalências

Demonstrações por indução

Variantes Mais variantes

PIF pra frente trás

Delinições recursiv

# Exemplo

Se em 2<sup>n</sup> moedas 1 é falsa, mais leve, então é possível descobrir a moeda falsa em n pesagens numa balança de comparação com 2 pratos.

## MCTB019-1

## J Donadelli

## Indução

Princípios Equivalências

# indução

### Erros Variant

variantes Mais variantes PIF pra frente–pra

Definições recursivas

# A base é importante

 $\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)$  é ímpar para todo  $\mathfrak{n}\geqslant 1$ 

## MC1B019-1

.I Donadelli

# Indução

Princípios Equivalências Demonstrações po

### Demonstrações | indução Erros

Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-pra
trás
Definições recursis

# A base é importante

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)$$
 é ímpar para todo  $\mathfrak{n}\geqslant 1$ 

Vamos provar que vale

para todo 
$$n \geqslant 1$$
,  $n(n+1)$  ímpar  $\rightarrow (n+1)(n+2)$  ímpar.

### indução Frros

Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-pra
trás
Definições recurs

# A base é importante

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)$$
 é ímpar para todo  $\mathfrak{n}\geqslant 1$ 

Vamos provar que vale

para todo 
$$n \geqslant 1$$
,  $n(n+1)$  ímpar  $\rightarrow (n+1)(n+2)$  ímpar.

Seja  $t\geqslant 1$  um natural arbitrário e suponha que t(t+1) é ímpar. Então

$$(t+1)(t+2) = (t+1)t + (t+1)2$$

que é da forma "ímpar + par", portanto ímpar.

## MCTB019-1

# J Donadelli

## Indução

Delastrias

Equivalências

### Demonstrações p indução

## Erros

Variante

Mais variantes

tras

Definições recursivas

# O passo é importante

para todo n natural, 6n = 0.

# indução

Erros

Definições recursivas

# O passo é importante

para todo n natural, 6n = 0.

Vamos provar por indução em n.

## MCTB019-1

J Donadelli

# Indução

Equivalências Demonstrações po

## indução Erros

Mais variantes
PIF pra frente-

Definições recursiva

# O passo é importante

para todo n natural, 6n = 0.

Vamos provar por indução em n.

Para n=0 a sentença é, claramente, verdadeira.

## MCTB019-1

J Donadelli

### Indução Princípios

Equivalências Demonstrações po

# Erros

Mais variantes
PIF pra frente-p
trás

PIF pra frente-pra trás Definições recursi

# O passo é importante

para todo n natural, 6n = 0.

Vamos provar por indução em n.

Para n=0 a sentença é, claramente, verdadeira.

Seja t um natural arbitrário.

Assuma que a sentença vale para 0, ..., tVamos provar que vale para t + 1. para todo n natural, 6n = 0.

Vamos provar por indução em n.

Para n = 0 a sentença é, claramente, verdadeira.

Seja t um natural arbitrário.

Assuma que a sentença vale para  $0, \dots, t$ Vamos provar que vale para t + 1.

$$6(t+1) = 6 \cdot t + 6 \cdot 1$$
  
= 0 + 0  
= 0

Pelo PIFc, P(n) vale para todo n.

## ИСТВ019-1

J Donadelli

## Indução

Princípios

Equivalências

Demonstrações por

## Variantes

Mais variantes PIF pra frente-pra trás

Definições recursiva

# Consequência do PBO

todo  $A \subset \mathbb{Z}$  não vazio e limitado inferiormente tem um menor elemento.

# Teorema (PIF generalizado (PIFg))

Sejam P(n) um predicado de números inteiros e  $n_0 \in \mathbb{Z}$ . Se

- $\mathbf{1}$  P(n<sub>0</sub>) é verdadeiro e
- 2 para todo inteiro  $z \ge n_0$ , P(z) implica P(z+1),

então P(n) é verdadeiro para todo inteiro  $n \ge n_0$ .

# Teorema (PIF completo generalizado (PIFcg))

Sejam P(n) um predicado de números inteiros e  $n_0 \in \mathbb{Z}$ . Se

- (1) P( $n_0$ ) é verdadeiro, e
- 2 para todo inteiro  $z \ge n_0$ ,  $P(n_0)$  e  $P(n_0 + 1)$  e ... e P(z)implica P(z+1).

então P(n) para todo inteiro  $n \ge n_0$ .

## иство19-1

## J Donadelli

## Indução

Equivalências

Demonstrações por indução

## Variantes

Mais variantes
PIF pra frente-pra
trás
Definições recursivas

# PIF generalizado

As demonstrações são análogas

Princípios
Equivalências
Demonstrações poindução

Mais variantes

PIF pra frente-

tras Definições recursiva Seja P(n) um predicado a respeito de  $n \in \mathbb{N}$ . Se

- $oldsymbol{1}$  P(0) e P(1) e ... e P(k-1) é verdadeiro e
- 2 para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n) e P(n+1) e \dots e P(n+k-1) \text{ implica } P(n+k)$  então P(n) para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

indução

Mais variantes

Sequência de Fibonacci (F<sub>n</sub>) dada for

$$F_0=0,\,F_1=1\;\text{e}\;F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\;\text{para todo}\;n.$$

Está bem definida:

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações prindução

Variantes

Mais variantes

PIF pra frente-pra trás Sequência de Fibonacci  $(F_n)$  dada for

$$F_0=0,\,F_1=1\;\text{e}\;F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\;\text{para todo}\;n.$$

Está bem definida:

 $P(n): F_n \text{ existe \'e unicamente determinado por } n$ 

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações p indução

Variantes
Mais variantes

PIF pra frente-pra trás Sequência de Fibonacci  $(F_n)$  dada for

$$F_0=0,\,F_1=1\;\text{e}\;F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\;\text{para todo}\;n.$$

Está bem definida:

 $P(n): F_n \text{ existe \'e unicamente determinado por } n$ 

• P(0) e P(1)

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações p indução

Variantes
Mais variantes

PIF pra frente-pra trás Sequência de Fibonacci  $(F_n)$  dada for

$$F_0=0,\,F_1=1\;\text{e}\;F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\;\text{para todo}\;n.$$

Está bem definida:

 $P(n): F_n \text{ existe \'e unicamente determinado por } n$ 

• P(0) e P(1)

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações prindução

Erros Variantes Mais variantes

PIF pra frente-pra trás Definições recursiva Sequência de Fibonacci  $(F_n)$  dada for

$$F_0=0,\,F_1=1\;\text{e}\;F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\;\text{para todo}\;n.$$

# Está bem definida:

P(n) :  $F_n$  existe é unicamente determinado por n

- P(0) e P(1) ✓
- $\forall k \in \mathbb{N}, (P(k) e P(k+1) \rightarrow P(k+2))$

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações prindução

Erros Variantes Mais variantes

PIF pra frente-pra trás Definições recursiva Sequência de Fibonacci  $(F_n)$  dada for

$$F_0=0,\,F_1=1\;\text{e}\;F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\;\text{para todo}\;n.$$

# Está bem definida:

P(n) :  $F_n$  existe é unicamente determinado por n

- P(0) e P(1) ✓
- $\forall k \in \mathbb{N}, (P(k) e P(k+1) \rightarrow P(k+2))$

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações p indução

Erros Variantes Mais variantes

PIF pra frente-p trás Sequência de Fibonacci  $(F_n)$  dada for

$$F_0=0,\,F_1=1\;\text{e}\;F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\;\text{para todo}\;n.$$

# Está bem definida:

P(n):  $F_n$  existe é unicamente determinado por n

- P(0) e P(1) ✓
- $\forall k \in \mathbb{N}, (P(k) e P(k+1) \rightarrow P(k+2)) \checkmark$

Sequência de Fibonacci  $(F_n)$  dada for

$$F_0=0,\,F_1=1\;\text{e}\;F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\;\text{para todo}\;n.$$

### Está bem definida:

P(n) :  $F_n$  existe é unicamente determinado por n

- P(0) e P(1) ✓
- $\forall k \in \mathbb{N}, (P(k) e P(k+1) \rightarrow P(k+2)) \checkmark$

Portanto  $\forall n, P(n)$ 

#### /ICTB019-

### J Donadelli

#### Indução

Princípios

Equivalências

Demonstrações po

Variantes

Mais variantes

DIF ---- foreste

Definições recursivas

PIF passo k

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Princípios Equivalências

Demonstrações po indução Erros

Mais variantes

Mais variantes

Definições recursiva

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \Biggl( \Biggl( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Biggr)^n - \Biggl( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Biggr)^n \Biggr)$$

**base:** Se n = 0 ou se n = 1 vale

$$0 = F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \right).$$

$$1 = F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right).$$

Mais variantes

passo: Seja k um natural arbitrário e suponha que

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right)$$

е

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right).$$

Precisamos provar que

$$F_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right).$$

#### .I Donadelli

Mais variantes

### Por definição $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ , pela hipótese

$$\begin{split} \mathbf{F}_{k+1} + \mathbf{F}_{k} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right). \end{split}$$

.I Donadelli

PIF pra frente-pra

## PIF pra frente-pra trás

### Teorema (Indução pra frente-pra trás)

Seja (a<sub>i</sub>) uma seguência crescente de números naturais. Seia P(n) um predicado a respeito dos números naturais. Se

- **1**  $P(a_i)$  é verdadeiro para todo índice  $i \in \mathbb{N}$  e
- 2 P(k+1) implica P(k), para todo natural k então P(n) é verdadeiro para todo natural n.

#### ИСТВ019-1

J Donadelli

Indução

Equivalências
Demonstrações poindução
Erros

Mais variantes
PIF pra frente-pra

Definições recursiva

# Aplicação de PIF pra frente-pra trás

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$$

média aritmética: 
$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

$$\underline{\text{m\'edia geom\'etrica}} \colon G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

### Teorema (MA-MG)

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

com igualdade se, e só se,  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ .

Não faremos aqui, veja notas de aula

### J Donadelli

#### Indução

D : . . .

Princípios

Demonstrações

indução

Variantes

PIF pra frente

PIF pra frentetrás

Definições recursivas

fatorial 
$$0! = 1 e (n+1)! = (n+1) \cdot n!;$$

#### J Donadelli

# Princípios

Demonstrações p indução

Erros Variantes

Mais variantes
PIF pra frente-

Definições recursivas

fatorial 
$$0! = 1$$
 e  $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ ;

somatório 
$$\sum_{i=0}^0 x_i = x_0$$
 e  $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^n x_i;$ 

### J Donadelli

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações p

Erros Variantes

Mais variantes PIF pra frentetrás

Definições recursivas

fatorial 
$$0! = 1$$
 e  $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ ;  
somatório  $\sum_{i=0}^{0} x_i = x_0$  e  $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i$ ;  
produtório  $\prod_{i=0}^{0} x_i = x_0$  e  $\prod_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} x_i$ ;

#### J Donadelli

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações p

indução Erros Variantes

Mais variantes
PIF pra frentetrás

Definições recursivas

fatorial 
$$0! = 1$$
 e  $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ ;  
somatório  $\sum_{i=0}^{0} x_i = x_0$  e  $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i$ ;  
produtório  $\prod_{i=0}^{0} x_i = x_0$  e  $\prod_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} x_i$ ;  
união  $\bigcup_{i=0}^{0} A_i = A_0$  e  $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} A_i)$ ;

#### J Donadelli

#### Indução Princípios Equivalências

Demonstrações indução Erros

Mais variantes
PIF pra frente-

Definições recursivas

fatorial 
$$0! = 1$$
 e  $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ ;  
somatório  $\sum_{i=0}^{0} x_i = x_0$  e  $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i$ ;  
produtório  $\prod_{i=0}^{0} x_i = x_0$  e  $\prod_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} x_i$ ;  
união  $\bigcup_{i=0}^{0} A_i = A_0$  e  $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} A_i)$ ;  
interseção  $\bigcap_{i=0}^{0} A_i = A_0$  e  $\bigcap_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cap (\bigcap_{i=0}^{n} A_i)$ ;

### J Donadelli

#### Indução Princípios

Equivalências

Demonstrações p
indução

Erros

Mais variantes
PIF pra frente-

Definições recursivas

$$\begin{split} & \text{fatorial } 0! = 1 \text{ e } (n+1)! = (n+1) \cdot n!; \\ & \text{somat\'orio } \sum_{i=0}^{0} x_i = x_0 \text{ e } \sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i; \\ & \text{produt\'orio } \prod_{i=0}^{0} x_i = x_0 \text{ e } \prod_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} x_i; \\ & \text{uni\~ao } \bigcup_{i=0}^{0} A_i = A_0 \text{ e } \bigcup_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} A_i); \\ & \text{interse\~c\~ao } \bigcap_{i=0}^{0} A_i = A_0 \text{ e } \bigcap_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cap (\bigcap_{i=0}^{n} A_i); \\ & \text{exponencial } \alpha^0 = 1 \text{ e } \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha; \end{split}$$

#### /ICTB019-1

J Donadelli

### Indução

Principios Equivalências Demonstrações poindução Erros Variantes Mais variantes PIF pra frente-pra trás

Definições recursivas

### Equações de recorrência

função  $f \colon \mathbb{N} \to A$  ou sequência  $(f_n)$ 

- especificamos o valor da função f em 0,..., k
- damos uma regra para encontrar o valor de f(n),  $n \geqslant k$ , em função de seus valores no inteiros menores,  $f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-k-1)$

Exemplos: 
$$f(0) = 0$$
,  $f(n + 1) = f(n) + \sqrt{n}$   
 $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 

Definições recursivas

### Exemplo (juro composto)

Se começamos uma poupança com um capital de C unidades monetárias, após n meses o montante poupado supondo  $i \in (0,1)$  fixo como a taxa de juros mensal é

$$M_0 = C$$
,  $M_{n+1} = M_n + iM_n$ 

Se poupamos  $D_n$  unidades monetárias no mês n ( $D_0 = C$ ) e o aplicamos nessa poupança

$$M_0 = C$$
,  $M_{n+1} = (1+i)M_n + D_{n+1}$ .

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações indução

Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-p
trás

Definições recursivas

### Exemplo (mapa logístico)

O mapa logístico é uma equação de recorrência frequentemente dada como um exemplo de como o comportamento complexo e caótico pode surgir a partir de equações não lineares muito simples

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

onde r é uma constante e  $x_0$  um valor inicial dado.

### Indução

Princípios
Equivalências
Demonstrações por indução
Erros
Variantes

PIF pra frente-pra trás Definições recursivas

### Exemplo (progressão aritmética)

Uma progressão aritmética que começa em  $\alpha\in\mathbb{R}$  e tem razão  $r\in\mathbb{R}$  é uma sequência  $(\alpha_n)$  tal que

$$a_0 = a$$
 e  $a_{n+1} = a_n + r$ 

*para todo*  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exemplo (progressão geométrica)

Uma progressão geométrica que começa em  $\alpha\in\mathbb{R}$  e tem razão  $r\in\mathbb{R}$  é uma sequência  $(\alpha_n)$  tal que

$$\alpha_0 = \alpha$$
 e  $\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot r$ 

*para todo*  $n \in \mathbb{N}$ .

# Indução Princípios Equivalências Demonstrações pindução

Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-p

Definições recursivas

### Exemplo (Newton-Raphson)

O método de Newton–Raphson para achar zero de função real, quando aplicado a  $(x^2-\alpha)$  computa, aproximadamente, a raiz quadrada de  $\alpha$ . A partir de  $x_0=1$  podemos computar  $\sqrt{2}$  usando

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

J Donadelli

Indução
Princípios
Equivalências
Demonstrações
indução
Erros
Variantes

trás

Definições recursivas

Delinições recursiv

## Equação de recorrência

Uma função  $\phi$  é **solução** de uma recorrência para  $(\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}})$  se

para todo natural 
$$\mathfrak{n},\,\phi(\mathfrak{n})=\mathfrak{a}_\mathfrak{n}.$$

No geral, queremos uma solução que seja dada por expressão matemática que pode ser avaliada com um número "pequeno" de operações.

Tal **solução** é chamada **forma fechada**.

#### ИСТВ019-1

#### J Donadelli

### Indução

Princípios Equivalências Demonstrações por indução

Mais variantes
PIF pra frente

Definições recursivas

### Solução para Fibonacci

$$\varphi(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

A prova de que é solução é feita por indução, como já vimos.

J Donadelli

#### . . . .

Princípios
Equivalências
Demonstrações poindução

Variantes
Mais variantes

Definições recursivas

### Solução para juro composto

sem depósito mensal

$$M(n) = (1+\mathfrak{i})^n C$$

com depósito mensal

$$M(n) = (1+i)^n C + \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k D(i)$$

#### J Donadelli

Equivalências

indução

Definições recursivas

### Solução para mapa logístico



#### J Donadelli

# Solução para progressões

Indução
Princípios
Equivalências
Demonstrações poindução
Erros
Variantes

Definições recursivas

PA:

$$\alpha(n)=nr+\alpha$$

PG:

$$a(n) = ar^n$$

### J Donadelli

Definições recursivas

## Solução para Newton-Raphson

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{2} & \text{c.c.} \end{cases}$$

#### **ICTB019-1**

J Donadelli

Indução
Principios
Equivalências
Demonstrações poindução
Erros
Variantes
Mais variantes

Definições recursivas

# Definição recursiva de conjuntos

- especificamos uma coleção inicial de naturais
- damos uma regra para "adicionar" novos elementos e para "não adicionar" outros elementos.

J Donadelli

Indução
Princípios
Equivalências
Demonstrações prindução
Erros
Variantes
Mais variantes
PIF pra frente-pra

Definições recursivas

# Definição recursiva de conjuntos

- especificamos uma coleção inicial de naturais
- damos uma regra para "adicionar" novos elementos e para "não adicionar" outros elementos.

Assumimos a convenção de que os elementos dos conjuntos definidos recursivamente são só aqueles dados pelas regras dadas.

#### иСТВ019-1

J Donadelli

Indução
Princípios
Equivalências
Demonstrações p

Variantes Mais variantes

trás Definições recursivas

### Exemplo

Vamos definir recursivamente o conjunto I dos números naturais ímpares

- **1** 1 ∈ I;
- 2 para todo  $\alpha \in \mathbb{N}$ , se  $\alpha \in I$  então  $\alpha + 2 \in I$ ;

Exercício: I é o subconjunto dos naturais ímpares.