MCTB019-17
Matemática Discreta

Jair Donadelli

CMCC–UFABC
jair.donadelli@ufabc.edu.br

2020-1

Semana 1

1. Administrativia

2. Lógica informal

Matemática Discreta

"Estudo de estruturas matemáticas que são discretas (em oposição às que são contínuas como em cálculo). Não há uma descrição precisa do termo.

A pesquisa em matemática discreta aumentou na segunda metade do século XX. Conceitos e notações úteis no estudo e descrição de objetos e problemas da ciência da computação.

Nos currículos universitários, apareceu nos anos 80, inicialmente como um curso de suporte de ciência da computação; hoje em dia faz parte dos cursos de matemática também.

O Prêmio Fulkerson é concedido por trabalhos de destaque em matemática discreta."

[Wikipedia]

Semana 1

Administrativia

Página web da disciplina

`http://professor.ufabc.edu.br/~jair.donadelli/discreta/`

- Avaliação
- Ementa e Bibliografia
- Programa semanal das aulas (Temas+Refs+Exercs)
- Listas, slides, notas de aula *quando houver*
- Horário atendimento
- ...

Administrativia

Avaliações: P1, P2, SUB, REC

- P1,P2 $\longrightarrow$ Conceito Final (`tabela`)
- SUB pra quem faltou com justificativa
- REC pra todos com frequência miníma, o resultado *fica como conceito final*.

Atenção para as datas de eventos na semana de reposição definida pela ~~*troll*~~prograd. Horários e salas se mantêm.

Frequência: passo lista.

+info na página web

Administrativia

Objetivo

Introduzir o aluno às técnicas de demonstração através de conteúdos de Teoria de Conjuntos e Combinatória.

Conteúdo resumido da disciplina

Demonstração. Teoria intuitiva de conjuntos. Relações e Funções. Análise Combinatória. Funções geradoras. Relações recorrência

+info na página web

Administrativia

Referências

- GRIMALDI, Ralph Peter. *Discrete and combinatorial mathematics : an applied introduction*. Pearson/Addison-Wesley, 5ª Edição, c2004. [510 GRIMdi5]
- ROSEN, Kenneth H. *Matemática discreta e suas aplicações*. McGraw-Hill, 6ª Edição. c2009. [510 ROSEma6]

+info na página web

Semana 1

1. Administrativia
2. Lógica informal

Informalmente...

...uma **demonstração** é um argumento que convence as outras pessoas de que algo é verdade. Uma demonstração corretamente apresentada não deixa dúvidas quanto a sua validade.

A linguagem usada nas demostrações é uma linguagem natural mas tem suas especificidades. Existe um certo vocabulário que inclui palavras que têm significados precisos em matemática e que podem diferir do uso diário.

Também, existem certas construções, ou princípios de lógica, que usamos para, a partir de sentenças verdadeiras, deduzir novas sentenças verdadeiras.

Sobre convencimento...

$$\frac{d}{dx}x^2 =$$

Sobre convencimento...

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

Sobre convencimento...

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}(x + x + \cdots + x) \ [x \text{ termos}] \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Sobre convencimento...

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}(x + x + \cdots + x)\ [x \text{ termos}]\\ &= \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x + \cdots + \frac{d}{dx}x\ [x \text{ termos}]\\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Sobre convencimento...

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}(x + x + \cdots + x) \text{ [}x\text{ termos]}\\
&= \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x + \cdots + \frac{d}{dx}x \text{ [}x\text{ termos]}\\
&= 1 + 1 + \cdots + 1 \text{ [}x\text{ termos]}\\
&=
\end{aligned}$$

Sobre convencimento...

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}(x + x + \cdots + x) \text{ [}x\text{ termos]} \\
&= \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x + \cdots + \frac{d}{dx}x \text{ [}x\text{ termos]} \\
&= 1 + 1 + \cdots + 1 \text{ [}x\text{ termos]} \\
&= x
\end{aligned}$$

Sobre convencimento...

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}(x + x + \cdots + x) \text{ [}x\text{ termos]}\\
&= \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x + \cdots + \frac{d}{dx}x \text{ [}x\text{ termos]}\\
&= 1 + 1 + \cdots + 1 \text{ [}x\text{ termos]}\\
&= x
\end{aligned}$$

De modo que $2x = x$, portanto $2 = 1$.

Sobre convencimento...

a e b números naturais.

$$a = b \qquad [\times a]$$

Sobre convencimento...

a e b números naturais.

$$\begin{aligned} a &= b && [\times a] \\ a^2 &= ab && [-b^2] \end{aligned}$$

Sobre convencimento...

a e b números naturais.

$$\begin{aligned} a &= b && [\times a] \\ a^2 &= ab && [-b^2] \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 && [\text{fatora}] \end{aligned}$$

Sobre convencimento...

a e b números naturais.

$$\begin{aligned} a &= b & [\times a] \\ a^2 &= ab & [-b^2] \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 & [\text{fatora}] \\ (a+b)(a-b) &= (a-b)b & [\text{cancela } a-b] \end{aligned}$$

Sobre convencimento...

a e b números naturais.

$$
\begin{aligned}
a &= b && [\times a] \\
a^2 &= ab && [-b^2] \\
a^2 - b^2 &= ab - b^2 && [\text{fatora}] \\
(a+b)(a-b) &= (a-b)b && [\text{cancela } a-b] \\
a+b &= b && [a=b]
\end{aligned}
$$

Sobre convencimento...

a e b números naturais.

$$
\begin{aligned}
a &= b && [\times a] \\
a^2 &= ab && [-b^2] \\
a^2 - b^2 &= ab - b^2 && [\text{fatora}] \\
(a+b)(a-b) &= (a-b)b && [\text{cancela } a-b] \\
a + b &= b && [a = b] \\
b + b &= b
\end{aligned}
$$

Sobre convencimento...

a e b números naturais.

$$
\begin{aligned}
a &= b && [\times a]\\
a^2 &= ab && [-b^2]\\
a^2 - b^2 &= ab - b^2 && [\text{fatora}]\\
(a+b)(a-b) &= (a-b)b && [\text{cancela } a-b]\\
a+b &= b && [a=b]\\
b+b &= b\\
2b &= b
\end{aligned}
$$

De modo que $2 = 1$.

Quem está convencido de que $2 = 1$ levanta a mão.

Sobre convencimento...

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \qquad [\surd]$$

Sobre convencimento...

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \qquad [\sqrt{\ }]$$

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \qquad [+1]$$

Sobre convencimento...

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &= 1 - \sin^2(x) && [\sqrt{\ }] \\ \cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} && [+1] \\ 1 + \cos(x) &= 1 + \sqrt{1 - \sin^2(x)} && [x = \pi] \end{aligned}$$

Sobre convencimento...

$$
\begin{aligned}
\cos^2(x) &= 1 - \sin^2(x) && [\sqrt{\ }]\\
\cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} && [+1]\\
1 + \cos(x) &= 1 + \sqrt{1 - \sin^2(x)} && [x = \pi]\\
1 + \cos(\pi) &= 1 + \sqrt{1 - \sin^2(\pi)}
\end{aligned}
$$

Sobre convencimento...

$$
\begin{aligned}
\cos^2(x) &= 1 - \sin^2(x) && [\sqrt{\ }] \\
\cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} && [+1] \\
1 + \cos(x) &= 1 + \sqrt{1 - \sin^2(x)} && [x = \pi] \\
1 + \cos(\pi) &= 1 + \sqrt{1 - \sin^2(\pi)} \\
1 + (-1) &= 1 + \sqrt{1 - 0}
\end{aligned}
$$

Sobre convencimento...

$$
\begin{aligned}
\cos^2(x) &= 1 - \sin^2(x) && [\sqrt{\ }] \\
\cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} && [+1] \\
1 + \cos(x) &= 1 + \sqrt{1 - \sin^2(x)} && [x = \pi] \\
1 + \cos(\pi) &= 1 + \sqrt{1 - \sin^2(\pi)} \\
1 + (-1) &= 1 + \sqrt{1 - 0} \\
0 &= 2
\end{aligned}
$$

Sobre convencimento...

$$-1 = -1 \qquad \left[-1 = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}\right]$$

Sobre convencimento...

$$-1 = -1 \qquad \left[-1 = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}\right]$$

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \qquad \left[\sqrt{}\right]$$

Sobre convencimento...

$$-1 = -1 \qquad [-1 = \tfrac{-1}{1} = \tfrac{1}{-1}]$$

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \qquad [\sqrt{\ }]$$

$$\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} \qquad [\sqrt{-1} = i]$$

Sobre convencimento...

$$
\begin{aligned}
-1 &= -1 & \left[-1 = \tfrac{-1}{1} = \tfrac{1}{-1}\right]\\
\frac{-1}{1} &= \frac{1}{-1} & \left[\sqrt{}\right]\\
\sqrt{\frac{-1}{1}} &= \sqrt{\frac{1}{-1}} & \left[\sqrt{-1} = i\right]\\
\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}
\end{aligned}
$$

Sobre convencimento...

$$
\begin{aligned}
-1 &= -1 && [-1 = \tfrac{-1}{1} = \tfrac{1}{-1}]\\
\frac{-1}{1} &= \frac{1}{-1} && [\sqrt{\ }]\\
\sqrt{\frac{-1}{1}} &= \sqrt{\frac{1}{-1}} && [\sqrt{-1} = i]\\
\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} && \\
\frac{i}{1} &= \frac{1}{i} && [\times i]
\end{aligned}
$$

Sobre convencimento...

$$
\begin{array}{rcll}
-1 &=& -1 & [-1 = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}] \\
\frac{-1}{1} &=& \frac{1}{-1} & [\sqrt{\ }] \\
\sqrt{\frac{-1}{1}} &=& \sqrt{\frac{1}{-1}} & [\sqrt{-1} = i] \\
\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} &=& \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} & \\
\frac{i}{1} &=& \frac{1}{i} & [\times i] \\
i^2 &=& 1 & [i^2 = -1]
\end{array}
$$

Sobre convencimento...

$$
\begin{aligned}
-1 &= -1 & \left[-1 = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}\right]\\
\frac{-1}{1} &= \frac{1}{-1} & [\sqrt{\ }]\\
\sqrt{\frac{-1}{1}} &= \sqrt{\frac{1}{-1}} & [\sqrt{-1} = i]\\
\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} & \\
\frac{i}{1} &= \frac{1}{i} & [\times i]\\
i^2 &= 1 & [i^2 = -1]\\
-1 &= 1 & [+1]
\end{aligned}
$$

Sobre convencimento...

$$
\begin{array}{rclr}
-1 &=& -1 & [-1 = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}] \\
\frac{-1}{1} &=& \frac{1}{-1} & [\sqrt{\ }] \\
\sqrt{\frac{-1}{1}} &=& \sqrt{\frac{1}{-1}} & [\sqrt{-1} = i] \\
\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} &=& \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} & \\
\frac{i}{1} &=& \frac{1}{i} & [\times i] \\
i^2 &=& 1 & [i^2 = -1] \\
-1 &=& 1 & [+1] \\
0 &=& 2 &
\end{array}
$$

Sobre linguagem

"Essa frase é falsa"

Sobre linguagem

“Essa frase é falsa”

“O conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos, pertence a si mesmo?”

Sobre linguagem

“Essa frase é falsa”

“O conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos, pertence a si mesmo?”

“ Havia, no vilarejo, um barbeiro que só fazia a barba de todas as pessoas que não faziam a própria barba. Quem faz a barba do barbeiro?”

Necessidade de entender a linguagem

. . . pra ler e escrever demonstrações.

Necessidade de entender a linguagem

…pra ler e escrever demonstrações.

“Existe alguém no bar, tal que, se ele estiver bebendo, então todos no bar estarão bebendo.”

Necessidade de entender a linguagem

. . . pra ler e escrever demonstrações.

“Existe alguém no bar, tal que, se ele estiver bebendo, então todos no bar estarão bebendo.”

Essa frase sempre é verdadeira.

Raymond Smullyan (1978). *What is the Name of this Book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. [S.l.]: Prentice Hall. chapter 14. How to Prove Anything. (topic) 250. The Drinking Principle. pp. 209–211.

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira $(\mathbf{V})$ ou falsa $(\mathbf{F})$

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

$$\text{verdadeira } (\mathbf{V}) \text{ ou falsa } (\mathbf{F})$$

- O rio lá fora está cheio

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

$$\text{verdadeira } (\mathbf{V}) \text{ ou falsa } (\mathbf{F})$$

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

$$\text{verdadeira } (\mathbf{V}) \text{ ou falsa } (\mathbf{F})$$

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo.

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo.

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo. ✗
- Toda sequência limitada de números reais é convergente

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo. ✗
- Toda sequência limitada de números reais é convergente

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira $(\mathbf{V})$ ou falsa $(\mathbf{F})$

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo. ✗
- Toda sequência limitada de números reais é convergente ✓
- $1 + 1 = 2$.

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo. ✗
- Toda sequência limitada de números reais é convergente ✓
- $1 + 1 = 2$.

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo. ✗
- Toda sequência limitada de números reais é convergente ✓
- $1 + 1 = 2$. ✓
- $x^2 + y^2 = z^2$

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo. ✗
- Toda sequência limitada de números reais é convergente ✓
- $1 + 1 = 2$. ✓
- $x^2 + y^2 = z^2$

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

$$\text{verdadeira } (\mathbf{V}) \text{ ou falsa } (\mathbf{F})$$

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo. ✗
- Toda sequência limitada de números reais é convergente ✓
- $1 + 1 = 2$. ✓
- $x^2 + y^2 = z^2$ ✗
- Vá estudar Matemática Discreta.

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

verdadeira ($\mathbf{V}$) ou falsa ($\mathbf{F}$)

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo. ✗
- Toda sequência limitada de números reais é convergente ✓
- $1 + 1 = 2$. ✓
- $x^2 + y^2 = z^2$ ✗
- Vá estudar Matemática Discreta.

Sentenças

Qualquer frase declarativa para a qual podemos atribuir um, e só um, dentre dois **valores-lógicos**:

$$\text{verdadeira } (\mathbf{V}) \text{ ou falsa } (\mathbf{F})$$

- O rio lá fora está cheio ✓
- n é um natural par ✗
- 27 é um quadrado perfeito ✓
- O conjunto vazio é único ✓
- x^2 é positivo. ✗
- Toda sequência limitada de números reais é convergente ✓
- $1 + 1 = 2$. ✓
- $x^2 + y^2 = z^2$ ✗
- Vá estudar Matemática Discreta.✗

Dois princípios

Não-contradição: uma proposição verdadeira não pode ser falsa e uma proposição falsa não pode ser verdadeira.

Terceiro Excluído: qualquer proposição, ou é verdadeira, ou é falsa.

Conectivos/Operadores

Os conectivos

“não”, “e”, “ou”, “se,então”, “se, e só se,”

são para formar sentenças compostas.

Correspondem, respectivamente, aos operadores lógicos

$\neg$ (**negação**) , $\wedge$ (**conjunção**), $\vee$ (**disjunção**), $\rightarrow$ (**condicional**), $\leftrightarrow$ (**bicondicional**)

A	$\neg A$
V	F
F	V

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A e B representam sentenças

Se, então

"Se não comer tudo, então não ganha sobremesa"

V ou **F**?

se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então 2 é par.

se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então 2 é ímpar.

se $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, então 2 é par.

se $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, então 2 é ímpar.

V ou **F**?

$(\mathbf{V})$ se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então 2 é par.

$(\mathbf{V})$ se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então 2 é ímpar.

$(\mathbf{V})$ se $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, então 2 é par.

$(\mathbf{F})$ se $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, então 2 é ímpar.

Em $A \to B$ chamamos A de *antecedente* e B de *consequente* da condicional.

formas "implícitas" do *Se, então*

"se A então B"

"se A, B"

"A é suficiente para B"

"B é necessário para A"

"B sempre que A"

veja + na pág. 6 do Rosen.

Predicados

Uma **sentença aberta** é uma sentença que depende de uma ou mais variáveis, por exemplo

- "$x + 1$ é maior que x"
- "n é um número primo"
- "x + y = 2x + z"

Predicados

O valor-lógico depende dos valores das variáveis

"x é maior que y"

Verdadeiro no caso $x = 1$ e $y = 0$

Falso no caso $x = 0$ e $y = 1$.

Predicados

As vezes, por conveniência, usamos letras minúsculas x, y, z para denotar variáveis e letras maiúsculas P, Q, R (os predicados) seguidas por uma lista de variáveis distintas entre parênteses, para denotar sentenças abertas que dependem dessas variáveis.

Predicados

Por exemplo,

$S(x)$ representa "$x + 1$ é maior que x"

$P(n)$ representa "n é um número primo"

$E(x, y, z)$ representa "x + y = 2x + z"

$E(1, 1, 0)$ é **V**

$P(4)$ é **F**

$S(2 + 5i)$?

Predicados

As variáveis devem estar associadas à domínios não vazios.

Quanficadores

“**Para todo** $\underline{x \text{ real}}$, $x + 1$ é maior que x”

é uma sentença (fechada) **V**erdadeira.

Em símbolos

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 > x$$

Quanficadores

"**Para algum** $\underline{n \text{ natural}}$, n é primo"

é uma sentença (fechada) **V**erdadeira.

Em símbolos

$$\exists n \in \mathbb{N}, n \text{ é primo}$$

Obs "$\forall n \in \mathbb{N}, n$ é primo" é **F**alsa

Quanficadores

$E(x, y, z)$ representa "x + y = 2x + z"

$\forall x \in \mathbb{R}, E(x, y, z)$ aberta ou fechada?

É **V** ou **F**?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, E(x, x, x)$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ E(x, y, z)$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\ E(x, y, z)$

Exercícios para fixação

Seção 1.1 do Rosen: 9,13,19,31,42,43,45,49

Seção 1.3 do Rosen: 7,15,17,21,25,39,52,53

Seção 1.4 do Rosen: 3,1,13,25,30,31,39,47

Metassentenças

"Se a sentença '*Joaquim é alto e Manoel é baixo*' é verdadeira, então a sentença '*Joaquim é alto*' é verdadeira".

"A sentença 'A *é um conjunto finito ou* f *é uma função contínua*' sendo verdadeira é equivalente à sentença 'f *é uma função contínua ou* A *é um conjunto finito*' ser verdadeira."

Metassentenças

Intuitivamente, as duas sentenças parecem corretas.

Formalmente são *metassentenças*, sentenças que diz algo a respeito de sentenças.

Na prática, do ponto de vista informal que adotamos, a distinção entre sentenças e metassentenças é simples.

Metassentenças

Stewart, Cálculo, vol. 1, pg. 144:

4 **TEOREMA** Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

Metassentenças

Stewart, Cálculo, vol. 1, pg. 144:

> **4** **TEOREMA** Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

Leia-se: *A sentença "Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a" é verdadeira*.

Metassentenças

Stewart, Cálculo, vol. 1, pg. 144:

> $\boxed{4}$ **TEOREMA** Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

Leia-se: *A sentença "Se* f *for diferenciável em* a*, então* f *é contínua em* a*" é verdadeira*.

e para verificar basta que

Se a sentença "f *é diferenciável em* a*" é verdadeira, então a sentença "*f *é contínua em* a*" é verdadeira.*

DEMONSTRAÇÃO Para demonstrar que f é contínua em a, temos de mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Fazemos isso mostrando que a diferença $f(x) - f(a)$ tende a 0 quando x tende a a.

A informação dada é que f é diferenciável em a, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (veja a Equação 2.7.5). Para conectar o dado com o desconhecido, dividimos e multiplicamos $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (o que pode ser feito quando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,(x - a)$$

Assim, usando a Propriedade do Produto e a Equação 2.7.5, podemos escrever

Sobre os princípios lógicos

P implica logicamente Q

Notação: $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$

se Q é *obrigatoriamente* verdadeiro sempre que P é verdadeiro.

Atenção: potencial para confusão entre $\rightarrow$ e $\Rightarrow$

Exemplos

$$\text{“Se } \underbrace{\text{o céu está azul}}_{P} \text{ então a } \underbrace{\text{grama está verde}}_{Q}\text{”}$$

é uma sentença da forma

$$P \rightarrow Q$$

Exemplos

$$\text{“Se } \underbrace{\text{o céu está azul}}_{P} \text{ então a } \underbrace{\text{grama está verde}}_{Q}\text{”}$$

é uma sentença da forma

$$P \rightarrow Q$$

porém não vale que

$$P \Rightarrow Q$$

Exemplos

"Se '*não é o caso que, se* $\underbrace{\textit{Bart acha Lisa fofa}}_{P}$*, então* $\underbrace{\textit{ele gosta da Lisa}}_{Q}$', então '*Bart acha Lisa fofa ou ele gosta de Lisa*'"

$$\text{não}(P \to Q) \to (P \text{ ou } Q).$$

Cada sentença simbólica acima é verdadeira ou falsa dependendo de saber se ou não, "Bart acha Lisa fofa" (P) e se "Bart gosta de Lisa" (Q).

Exemplos

“Se ‘*não é o caso que, se* $\underbrace{\textit{Bart acha Lisa fofa}}_{P}$*, então* $\underbrace{\textit{ele gosta da Lisa}}_{Q}$’, então ‘*Bart acha Lisa fofa ou ele gosta de Lisa*’”

$$\text{não}(P \to Q) \to (P \text{ ou } Q).$$

Cada sentença simbólica acima é verdadeira ou falsa dependendo de saber se ou não, “Bart acha Lisa fofa” (P) e se “Bart gosta de Lisa” (Q).

Porém

$$\text{não}(P \to Q) \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$$

Implicação lógica — definição

P **implica** Q se a sentença $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ é verdadeira, independentemente do valor lógico de P e de Q, ou seja, a interdependência das sentenças exclui a possibilidade de P verdadeira e Q falsa.

$\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ é uma sentença (**V** ou **F**) composta, construída a partir de P e Q.

$\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ é uma metassentença que é uma abreviação da expressão em português "P implica Q" e significa que $\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ é uma verdade.

Implicações lógicas notáveis

Sejam P, Q, R e S sentenças. Alguns princípios lógicos importantes são

1. $(P \to Q)$ e $P \Rightarrow Q$ (Modus Ponens)
2. $(P$ ou $Q)$ e não-$P \Rightarrow Q$ (Modus Tollendo Ponens)
3. $(P \to Q)$ e $(Q \to R) \Rightarrow P \to R$ (silogismo hipotético)
4. $\big((P$ e não-$Q) \to \mathbf{F}\big) \Rightarrow \big(P \to Q\big)$ (Redução ao absurdo)

veja + na pág. 66 do Rosen (regras de inferência).

Equivalência lógica

Dizemos que P e Q são **logicamente equivalentes** se a sentença $P \leftrightarrow Q$ e verdadeira para todo valoração lógica de P e Q.

Abreviamos "P e Q são equivalente" e usamos a a notação $P \Leftrightarrow Q$.

É importante notar a diferença entre as notações "$P \Leftrightarrow Q$" e "$P \leftrightarrow Q$".

Algumas equivalências lógicas notáveis

1. não-(não-P) $\Leftrightarrow P$ (Negação Dupla)
2. $P \rightarrow Q \Leftrightarrow$ não-P ou Q (Condicional)
3. $P \rightarrow Q \Leftrightarrow$ não-$Q \rightarrow$ não-P (Contra positivo).
4. não-(P e Q) $\Leftrightarrow$ não-P ou não-Q (Lei de De Morgan).
5. não-(P ou Q) $\Leftrightarrow$ não-P e não-Q (Lei de De Morgan).
6. não-$(\forall x \in D, P(x)) \Leftrightarrow$ $\exists x \in D,$ não-$P(x)$ (Negação de Quantificador)
7. não-$(\exists x \in D, P(x)) \Leftrightarrow$ $\forall x \in D,$ não-$P(x)$ (Negação de Quantificador)

veja + na sec. 1.2 do Rosen

Argumentos válidos

Em lógica um argumento é uma sequência $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ de sentenças das quais a última é a **conclusão**, as outras são as **premissas**.

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

Argumentos válidos

O argumento é **válido** se, e só se,

$$(P_1 \text{ e } P_2 \text{ e } \cdots \text{ e } P_n) \Rightarrow Q$$

Argumentos válidos

O argumento é **válido** se, e só se,

$$(P_1 \text{ e } P_2 \text{ e } \cdots \text{ e } P_n) \Rightarrow Q$$

ou seja, é verdadeira a sentença

$$\textit{Se } (P_1 \text{ e } P_2 \text{ e } \cdots \text{ e } P_n) \textit{ então } Q$$

Argumentos válidos

O argumento é **válido** se, e só se,

$$(P_1 \text{ e } P_2 \text{ e } \cdots \text{ e } P_n) \Rightarrow Q$$

ou seja, é verdadeira a sentença

$$\textit{Se } (P_1 \text{ e } P_2 \text{ e } \cdots \text{ e } P_n) \textit{ então } Q$$

ou seja, Q é verdadeiro sempre que $(P_1 \text{ e } P_2 \text{ e } \cdots \text{ e } P_n)$ é verdadeiro.

Argumentos válidos

As **regras de inferência** são esquemas de argumentos válidos simples que usamos para para construir argumentos válidos mais complexos. Por exemplo,

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

chamada *Modus Ponens*.

Argumentos válidos

Exemplo: o seguinte argumento é válido porque se encaixa nessa regra de inferência

Se você tem a senha, então pode fazer login no facebook.
Você tem a senha.

Portanto, você pode fazer login no facebook.

Regras de inferência

As principais regras de inferência são as dadas pelas implicações notáveis. Por exemplo,

Modus Tollens:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \neg Q \\ \hline \therefore \neg P \end{array}$$

silogismo hipotético:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \\ \hline \therefore P \rightarrow R \end{array}$$

Regra da Simplificação:

$$\begin{array}{l} P \wedge Q \\ \hline \therefore P \end{array}$$

Regras de inferência para quantificadores

E, também as regras para quantificadores. Existem quatro regras desse tipo e seu uso requer um pouco mais de cuidado; elas são usadas para o mesmo propósito, que é mostrar a validade de argumentos lógicos.

Regras de instanciação

Instanciação universal: se $\forall x \in D, P(x)$ é $\mathbf{V}$ então $P(c)$ é $\mathbf{V}$ qualquer que seja $c \in D$

$$\frac{\forall x \in D, P(x)}{\therefore P(c) \;\; \text{qualquer que seja } c \in D}$$

Instanciação existencial: se $\exists x \in D,\; P(x)$ é **V** então $P(c)$ é **V** para algum elemento $c \in D$

$$\frac{\exists x \in D, P(x)}{\therefore P(c) \;\; \text{algum } c \in D}$$

(desde que o símbolo c não tenha qualquer outro significado no argumento dado)

Regras de generalização

Generalização universal: se $P(c)$ é $\mathbf{V}$ para um elemento $c \in D$ *arbitrário* do domínio D então $\forall x \in D,\ P(x)$ é $\mathbf{V}$

$$\frac{P(c) \text{ para } c \in D \text{ arbitrário}}{\therefore \forall x \in D, P(x)}$$

Generalização existencial: se $P(c)$ é $\mathbf{V}$ para algum c particular de D, então $\exists x \in D,\ P(x)$

$$\frac{P(c) \text{ para algum } c \in D \text{ particular}}{\therefore \exists x \in D,\ P(x)}.$$

Exemplo – argumentos válidos

Por exemplo, argumento é válido:

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \\ \hline \therefore \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \end{array}$$

Vejamos

Exemplo – argumentos válidos

Por exemplo, argumento é válido:
$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \forall x(Q(x) \to R(x)) \\ \hline \therefore \forall x(P(x) \to R(x)) \end{array}$$

Vejamos

passo	*sentença*	*justificativa*
1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	premissa
2.	$P(c) \to Q(c)$	instanciação universal de 1
3.	$\forall x(Q(x) \to R(x))$	premissa
4.	$Q(c) \to R(c)$	instanciação universal de 3
5.	$P(c) \to R(c)$	Silogismo hipotético com 3 e 4
6.	$\forall x(P(x) \to R(x))$	generalização universal.

Exemplo – argumentos válidos

Cada gato que é legal e inteligente gosta de fígado picado. Todo gato siamês é legal. Há um gato siamês que não gosta de fígado picado. Portanto, há um gato estúpido.

aqui, "estúpido" é a negação de "inteligente".

D é a coleção de todos os gatos,
$L(x)$ é "gato x é legal",
$I(x)$ é "gato x é inteligente",
$F(x)$ é "gato x gosta de fígado picado",
$S(x)$ é "gato x é siamês".

Exemplo – argumentos válidos

Em símbolos

$$\begin{array}{l} \forall x \in D, (L(x) \land I(x)) \to F(x) \\ \forall x \in D, S(x) \to L(x) \\ \forall x \in D, S(x) \land \neg F(x) \\ \hline \forall x \in D, \neg I(x) \end{array}$$

Exercício: É argumento válido?

Exemplo – argumentos válidos

1.	$\forall x \in D, (L(x) \wedge I(x)) \rightarrow F(x)$	premissa
2.	$\forall x \in D, S(x) \rightarrow S(x)$	premissa
3.	$\forall x \in D, S(x) \wedge \neg F(x)$	premissa
4.	$S(a) \wedge \neg F(a)$	instanc. universal de 3
5.	$\neg F(a)$	simplificação de 4
6.	$S(a)$	simplificação de 4
7.	$S(a) \rightarrow L(a)$	instanc. universal de 2
8.	$L(a)$	modus ponens com 7 e 6
9.	$\neg\neg L(a)$	dupla negação de 8
10.	$(L(a) \wedge I(a)) \rightarrow F(a)$	instanc. universal de 1
11.	$\neg(L(a) \wedge I(a))$	modus tollens com 10 e 5
12.	$\neg L(a) \vee \neg I(a)$	De Morgan em 11
13.	$\neg I(a)$	modus tollendo ponens com 12 e 9
14.	$\exists x \in D, \neg I(x)$	generalização universal

Exercícios

Seção 1.2 do Rosen: 7,9,18,28,41,57

Seção 1.5 do Rosen: 11,13,15,17,19,23,25,34,35