$\boxed{\text{RASCUNHO SOLUÇÕES P2}}$

(*) $A\bar{x} = \bar{d}$
$\bar{x} \geq \bar{0}$

(**) $\min \ 1^T \bar{w}$
s.a. $(A \vdots Id)\begin{pmatrix}\bar{x} \\ \bar{w}\end{pmatrix}^T = \bar{d}$
$\bar{x}, \bar{w} \geq \bar{0}$

- $\bar{x}'$ sol. viável de (*) $\Rightarrow (\bar{x}' \ \bar{0})^T$ sol. viável de (**) com valor 0. Como $\bar{w} \geq \bar{0}$ essa solução é ótima

- (**) tem sol. ótima $\Rightarrow$ tem solução viável básica ótima digamos $\bar{z}^* = (\bar{x}' \ \bar{0})$
B dado pelos j tais que $z^*_j > 0$ define colunas l.i. de $(A \vdots Id)$, portanto de A, logo $\bar{x}'$ é básica.

- Pela contrapositiva: PPL não tem valor ótimo $> 0 \Rightarrow$ (*) tem solução viável

Da hipótese, $\underbrace{\text{não tem valor ótimo}}_{A}$ ou $\underbrace{\text{valor ótimo} = 0}_{B}$

<u>CASO B</u>: solução ótima $(\bar{x}^*, \bar{w}^*) = (\bar{x}^*, \bar{0})$ t.q. $A\bar{x}^* + \bar{0} = \bar{d}$
portanto $\bar{x}^*$ é viável de (*)

<u>CASO A</u>: Em $A\bar{x} = \bar{d}$ podemos considerar $\bar{d} \geq 0$ (simplesmente $\times(-1)$ as equações com $d_i < 0$)
De $A\bar{x} + \bar{w} = \bar{d}$ temos $\begin{pmatrix}\bar{x} \\ \bar{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} \\ \bar{d}\end{pmatrix}$ é uma solução viável, como a função objetivo é limitada (≥ 0) o PPL tem valor ótimo, logo o caso A não ocorre

(NOTAÇÃO SEGUE SLIDES)

$\max \bar{c}^T \bar{x}$; $A\bar{x} = \bar{d}$; $\bar{x} \geq 0$

$B = \{k_1, \dots, k_n\}$ $N = \{\ell_1, \dots, \ell_m\}$ (*)

Se define base então $\bar{x} = (\bar{x}_B\ \bar{x}_N)^T$ com $\bar{x}_B = \boxed{A_B^{-1}d - A_B^{-1}A_N\bar{x}_N}$

Se $\bar{x}_N = \bar{0}$, $\bar{x}$ é viável básica logo $\bar{p} := A_B^{-1}d \geq 0$

Se $\bar{x}_N \geq 0$ é tal que $\bar{x}_B \geq 0$, $\bar{x}$ é viável

Nas linhas de (*)

$$x_{k_i} = (A_B^{-1}\bar{d})_i - (A_B^{-1}A_N)_i \bar{x}_N$$

$$= p_i - \sum_j q_{ij} x_{\ell_j}$$

Fazendo

$x_{\ell_j} = 0$ $\forall j \neq t$ e $x_{\ell_t} := \alpha$ $\Rightarrow$

$$x_{k_i} = p_i + (-q_{it})\alpha$$

por hipótese $(-q_{it}) \geq 0$ portanto $x_{k_i} \geq 0$ e

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_{k_1} \\ \vdots \\ x_{k_n} \\ x_{\ell_1} \\ \vdots \\ x_{\ell_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -q_{i1}\alpha \\ \vdots \\ -q_{in}\alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \text{, logo viável.}$$

$$\bar{c}^T\tilde{x} = \bar{c}_B\bar{p} + (\bar{c}_N^T - \bar{c}_B^T\bar{q})\tilde{x} = \bar{c}_B^T\bar{p} + (\bar{c}_N^T - \bar{c}_B^T\bar{q})\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \bar{c}_B\bar{p} + \left[(\bar{c}_N^T)_{\ell_t} - (\bar{c}_B^T\bar{q})_{\ell_t}\right]\cdot\alpha = \bar{c}_B^T\bar{p} + r_{\ell_t}\cdot\alpha$$

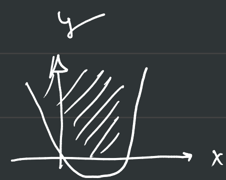
$\rightarrow \infty$ quando $\alpha \to \infty$ pois $\alpha > 0$

Se $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa, $C=\{x : f(x) \le c\}$ convexo:

$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda) y \in C$?

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad [f \text{ convexa}]$$
$$\le \lambda c + (1-\lambda) c \quad [\in C]$$
$$= c$$

portanto $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$. *



$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > ax^2 + bx + c\}$

convexo ?

$(x,y), (z,w) \in C$ e $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda(x,y) + (1-\lambda)(z,w) = (\lambda x + (1-\lambda) z, \lambda y + (1-\lambda) w)$$

$$\lambda y + (1-\lambda) w > \lambda(ax^2 + bx + c) + (1-\lambda)(az^2 + bz + c)$$
$$= a(\lambda x^2 + (1-\lambda) z^2) + b(\lambda u + (1-\lambda) w) + c$$
$$> a(\lambda x + (1-\lambda) z)^2 + b(\lambda u + (1-\lambda) w + c$$

$\therefore \lambda(x,y) + (1-\lambda)(z,w) \in C$