8 Combinatória

8.1 Princípios de contagem: combinatória

Uma interpretação para o princípio aditivo, que vimos anteriormente, é: suponha que o evento E pode ocorrer n maneiras e o evento F de m maneiras distintas das outras n. Então, o número de maneiras de ocorrer o evento "E ou F" é $n+m$. No caso geral, se $A_1,\dots,A_n$ são conjuntos dois-a-dois disjuntos então

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Por exemplo, há quantas possibilidades de escolher um inteiro entre 1 e 16 que é múltiplo de 3 ou de 7? Devemos determinar a cardinalidade do conjunto de inteiros entre 1 e 16 que são múltiplos de 3 ou múltiplos de 7, tais conjuntos são disjuntos pois $\mathrm{mmc}(3,7) = 21$. Os múltiplos de 3 são cinco, os múltiplos de 7 são dois, portanto, os múltiplos de ambos são $5+2=7$. O evento *múltiplo de* 3 *ou múltiplo de* 7 ocorre de 7 modos distintos. E se contássemos os múltiplos de 2 e 3 entre 1 e 16? O princípio aditivo não se aplica pois alguns números são contados duas vezes, como o 6 e o 12.

TEOREMA 185 (PRINCÍPIO DE INCLUSÃO–EXCLUSÃO) *Se E e F são conjuntos finitos (não necessariamente disjuntos) então*

$$|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam E e F conjuntos finitos. Podemos escrever $E = (E \cap F) \cup (E \setminus F)$, uma união disjunta (verifique). Logo, podemos usar o princípio aditivo e escrever, rearranjando os termos, que

$$|E \setminus F| = |E| - |E \cap F|. \tag{8.2}$$

Agora, escrevemos $E \cup F$ como a seguinte união de subconjuntos disjuntos (verifique) $E \cup F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \cup (E \cap F)$ e, pelo princípio aditivo e (8.2), temos $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$. □

Por inclusão–exclusão o número de possíveis resultados que são múltiplo de 2 ou de 3 no lançamento de uma dado é dado por: os múltiplos de 2 definem o subconjunto $E = \{2,4,6\}$, os múltiplos de 3 definem o subconjunto $F = \{3,6\}$, portanto,

$$|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F| = 4.$$

Exercício 186. Prove que se A, B e C são conjuntos finitos então

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Exercício 187. Conjecture uma expressão para o princípio de inclusão–exclusão para a cardinalidade da união de n conjuntos finitos.

Em uma turma de Matemática Discreta, há 43 estudantes que fazem aula de Análise de Algoritmos, 57 estudantes que fazem Análise Real e 29 estudantes que tomam aula de Análise na Educação Básica. Há 10 alunos em Análise de Algoritmos e Análise real, 5 em Análise Real e Análise na Educação Básica, 5 em Análise de Algoritmos e Análise na Educação Básica e 2 tendo todos os três cursos. Quantos alunos estão fazendo pelo menos dos cursos de análises? Vamos indicar por C, P e E os conjuntos de alunos que fazem Análise de Algoritmos, Análise Real e Análise na Educação Básica, respectivamente. Queremos calcular $|C \cup P \cup E|$. Aplicamos inclusão–exclusão $|C \cup P \cup E| = |C| + |P| + |E| - |C \cap P| - |P \cap E| - |C \cap E| + |C \cap P \cap E| = 111$.

Exercício 188. De quantas maneiras podemos escolher um número em [100] que não é divisível por 2, 3 ou 5?

Podemos interpretar o princípio multiplicativo da seguinte forma: se um experimento pode ser descrito em duas etapas de modo que há n desfechos possíveis para a 1ª etapa e há m desfechos possíveis para a 2ª etapa, então o número de possíveis desfechos para o experimento é $n \cdot m$. De um modo geral, se $E_1,\dots,E_r$ representam r etapas de experimento composto, então o números de modos distintos de realizar o experimento é

$$\left|\prod_{i=1}^{r} E_i\right| = |E_1| \cdot |E_2| \cdots |E_r|$$

que pode ser demonstrado usando princípio da indução.

Exemplo 189. Uma placa de carro é uma sequência de 3 letras seguidas por 4 dígitos. Qual é a quantidade de placas distintas que podemos obter?

Tomamos os conjuntos $E_i = \{A, B, \dots, Z\}$ das letras do alfabeto com $i = 1,2,3$, para cada letrada placa, e os dígitos $E_i = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para $i = 4,5,6,7$, cada número da placa. Assim, a quantidade de placas distintas que podemos obter é $\left|\prod_{i=1}^{8} E_i\right| = 26\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 26^3 10^4 = 175.760.000$.

Exemplo 190. Cada posição da memória (célula de memória) de um computador tem um endereço que é uma sequência binária. As arquiteturas com processadores 32-bits tem capacidade para endereçamento de $2^{32} = 4.294.967.296$ posições de memória, aproximadamente 4 Gigabytes. As arquiteturas com processadores 64-bits tem capacidade para endereçamento de

$$2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616$$

posições de memória, aproximadamente 16 Exabytes (16 milhões de Terabytes). Suponhamos que um dispositivo de 1 Gigabyte ocupe um dispositivo de dimensões 1 mm × 1 mm × 1 mm. Para guardar 16 Exabytes precisaríamos de uma quarto de dimensões 2,5 m × 2,5 m × 2,5 m.

Definição 191. Sejam A e B conjuntos não vazios. O conjunto de todas as funções de A em B é denotado por B^A.

No caso em que A e B são conjuntos finitos B^A pode ser identificado com o conjuntos de todas as sequências $(b_1, \dots, b_{|A|})$ de comprimento $|A|$ formada por elementos de B: fixamos uma enumeração de de A e, com isso, b_1 é a imagem do *primeiro* elemento de A, b_2 é a imagem do *segundo* elemento de A, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}. \tag{8.3}$$

Notemos que essa notação estende a notação 2^A que usamos para o conjunto das partes. A definição conjuntista usual para o ordinal 2 é $2 = \{0,1\}$ e um subconjunto de A é naturalmente identificado com uma função $A \to \{0,1\}$ (veja o exercício 3, página 89 e a demonstração do teorema 176, página 84).

A seguir destacamos alguns casos particulares do princípio multiplicativo. Essencialmente, são modos de contagem do número de maneiras diferentes para selecionarmos objetos: *arranjos*, quando a ordem da seleção importa, e *combinações* quando a ordem não importa.

8.1.1 Arranjo

Uma disposição de $r \geqslant 1$ elementos tomados de um conjunto A de $n \geqslant r$ elementos em que a ordem importa é um **arranjo simples**. Cada arranjo corresponde univocamente a uma sequência $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ de elementos não repetidos de A.

Para formar um arranjo, temos n elementos para a primeira posição, temos $n-1$ elementos para a segunda, e assim por diante até $n-r+1$ elementos para a última posição, ou seja, uma arranjo é um elemento de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_r$ com X_i um conjunto que depende de $X_1, \dots, X_{i-1}$ e de cardinalidade $|X_i| = n-i+1$. Pelo princípio multiplicativo temos que $|X_1, \dots, X_{i-1}| = n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)$.

Proposição 192 *A quantidade de arranjos simples de r elementos tomados de um conjunto de n elementos ($1 \leqslant r \leqslant n$) é o número $(n)_r$ dado por*

$$(n)_r := n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Convencionamos que $(n)_0 = 1$ para todo natural n.

A quantidade de arranjos simples de r elementos tomados de um conjunto de n elementos ($1 \leqslant r \leqslant n$) é dada pela definição recursiva (verifique):

$$(n)_r = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0 \\ n\cdot(n-1)_{r-1}, & \text{se } n \geqslant r \geqslant 1. \end{cases}$$

Por exemplo, de quantas maneiras podemos escolher um inteiro entre 000 e 999 (inclusive e com 3 dígitos) com todos os dígitos distintos? O conjunto tem 1.000 elementos e a quantidade deles sem dígitos repetidos é $(10)_3 = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$.

Exercício 193. Sejam A e B conjuntos finitos com $|A| \leqslant |B|$. Há quantas funções injetivas de A em B?

Arranjo com repetição

Um arranjo em que é permitido repetição é chamado **arranjo com repetição**.

Proposição 194 *A quantidade de arranjos com repetição de r elementos tomados de um conjunto de n elementos é n^r.*

DEMONSTRAÇÃO. Um arranjo com repetição de r elementos tomados do conjunto A pode ser identificado como uma sequência s de comprimento r de elementos de A

$$s\colon [r] \to A.$$

A quantidade de tais sequências é $\left| A^{[r]} \right| = |\,A\,|^r$ por (8.3). □

Retomando o paradoxo do aniversário (página 87), com que probabilidade ocorre que num grupo com 25 pessoas 2 ou mais pessoas façam aniversário no mesmo dia? Os aniversários de 25 pessoas pode ocorrer, pelo princípio multiplicativo, de 365^{25} modos diferentes. Os aniversários de 25 pessoas sem que nenhum deles coincida pode ocorrer de $(365)_{25}$ modos diferentes, portanto, há $365^{25} - (365)_{25}$ possibilidades diferentes para o aniversário de 25 pessoas com pelo menos duas aniversariando no mesmo dia. A probabilidade desse evento é

$$\frac{365^{25} - (365)_{25}}{365^{25}} = 1 - \frac{(365)_{25}}{365^{25}} > 0{,}56.$$

Quando é dito simplesmente **arranjo** entende-se arranjo simples.

Permutação

Um arranjo simples com $r = n$ é chamado **permutação**.

De quantas maneiras diferentes 8 alunos podem se sentar numa sala com 8 cadeiras? O primeiro aluno tem 8 opções, o segundo tem 7, o terceiro tem 6, o quarto tem 5, o quinto tem 4, o sexto tem 3, o sétimo tem 2 e para o oitavo resta 1 opção. Logo há $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ maneiras dos 8 alunos sentarem nas 8 cadeiras.

Uma permutação de elementos de um conjuntos A pode ser identificado com uma sequência dos elementos de A sem repetição. O número de permutações dos elementos de um conjunto de $n \geqslant 0$ elementos é $n!$, definido recursivamente para todo natural n por

$$n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ n(n-1)!, & \text{se } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Exemplo 195. A quantidade de permutações que podem ser formadas com as letras da palavra *"livros"* é $6! = 720$. A quantidade de permutações que podem ser formadas com as letras da palavra *"teclado"* é $7! = 5.040$. A quantidade de permutações que podem ser formadas com as letras da palavra *"discreta"* é $8! = 40.320$. A quantidade de permutações que podem ser formadas com as letras da palavra *"universal"* é $9! = 362.880$. A quantidade de permutações que podem ser formadas com as letras da palavra *"pernambuco"* é $10! = 3.628.800$. A quantidade de permutações que podem ser formadas com as letras da palavra *"seminublado"* é $11! = 39.916.800$. A quantidade de permutações que podem ser formadas com as letras da palavra *"configuravel"* é $12! = 479.001.600$.

O fatorial de n cresce bastante rápido com n: 11! é mais que a quantidade de segundos de 1 ano inteiro; 12! é mais que a quantidade de segundos de 12 anos e 13! é mais que a quantidade de segundos que passam em 1.000 anos.

Exercício 196. Verifique que

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{8.4}$$

8.1.2 Combinação

Tomemos um arranjo de r elementos escolhidos de um conjunto com n elementos. A quantidade de arranjos *que têm os mesmos r elementos* é $r!$ pois a única diferença entre eles é a ordem com que se apresentam os r elementos. Por exemplo, se selecionamos sequencialmente e sem reposição 3 cartas de um baralho então temos $52 \cdot 51 \cdot 50$ arranjos distintos, um dos quais é $(K\heartsuit, 5\clubsuit, Q\diamondsuit)$. Agora, se selecionamos três cartas de uma só vez as 3! permutações de $(K\heartsuit, 5\clubsuit, Q\diamondsuit)$ correspondem a mesma seleção. A quantidade de seleções distintas é

$$\frac{52 \cdot 51 \cdots 50}{3!} = \frac{52!}{49!3!}.$$

Uma **combinação** de $r \geqslant 0$ elementos escolhidos de um conjunto A com $n \geqslant r$ elementos é uma seleção sem ordem e sem repetição de r elementos tomados de n ou, simplesmente, um subconjunto com r elementos de A.

PROPOSIÇÃO 197 *A quantidade de subconjuntos de A com r elementos, para $0 \leqslant r \leqslant n$, é*

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Dados um conjunto A de cardinalidade n e $0 \leqslant r \leqslant n$, seja $C(n,r)$ a quantidade de subconjuntos de A com cardinalidade r.

Um único subconjunto de tamanho r determina $r!$ arranjos de r elementos de A. Subconjuntos distintos determinam arranjos distintos, portanto, $C(n,r)\cdot r! = (n)_r$, ou seja, $C(n,r) = (n)_r / r!$. Usando (8.4)

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

□

O **coeficiente binomial** $\binom{n}{r}$ para todo $n \geqslant r \geqslant 0$ é dado por

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Convencionamos que $\binom{n}{r} = 0$ se $n < r$.

Em combinatória entendemos $\binom{n}{r}$ como a quantidade de subconjuntos de r elementos que podem ser formados a partir de um conjunto com n elementos.

Exemplo 198. A Mega-Sena é um jogo de apostas que consiste em acertar 6 dezenas escolhidas dentre 60. O número de possíveis resultados distinto para a Mega-Sena é $\binom{60}{6} = 50.063.860$. Se uma aposta em seis números demorar 1 segundo para ser registrada, então registrar 50.063.860 demoraria um ano e meio, aproximadamente. A probabilidade de acertar os seis números é

$$\frac{1}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{50.063.860} \approx 2 \times 10^{-8}.$$

A chance de morrer por raio no Brasil em 2010 era[3] $0{,}8 \times 10^{-6}$ (40 vezes maior).

Exemplo 199. Numa população com n elementos, n_1 são azuis e $n_2 = n - n_1$ são verdes. De quantas maneiras podemos escolher k elementos com r deles azuis? ($0 \leqslant r \leqslant \min\{n_1, k\}$) O número de maneiras de escolher $k - r$ verdes é $\binom{n_2}{k-r}$. O número de maneiras de escolher r azuis é $\binom{n_1}{r}$. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de maneiras de escolher r azuis e $k - r$ verdes é $\binom{n_2}{k-r}\binom{n_1}{r}$.

Exemplo 200. Três bolas são retiradas aleatoriamente de uma caixa com 6 bolas brancas e 5 bolas pretas. Com que probabilidade a escolha resulta em 1 branca e 2 pretas?

No total são 13 bolas das quais escolhemos 3. O número de possíveis resultados é $\binom{13}{3}$. "6 bolas brancas e 5 bolas pretas" ocorre de $\binom{6}{1}\binom{5}{2}$ modos diferentes, pelo exercício anterior. Portanto a probabilidade é $\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{13}{3}}$.

Exercício 201. Prove que as seguintes identidades

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \tag{8.5}$$

$$i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}.$$

Exercício 202. Verifique que o coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ é uma solução para a equação de recorrência

$$C(n,k) := \begin{cases} 0 & \text{se } k > n \\ 1 & \text{se } k = n \text{ ou } k = 0 \\ C(n-1,k-1) + C(n-1,k) & \text{se } 0 < k < n. \end{cases}$$

(veja o exercício 25, página 72).

Exercício 203. Para $n > r > 0$ prove que

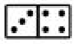
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \tag{8.6}$$

e dê uma justificativa para essa igualdade usando a interpretação combinatória de $\binom{n}{r}$ (quantidade de subconjuntos).

[3] esse número é uma média no sentido de que considera que todos têm a mesma chance de ser atingido por um raio ao acaso, o que não é real.

Combinação com repetição

Se escolhemos uma peça de dominó ao acaso, com que probabilidade obtemos a peça

 ?

As peças de dominós são formadas por dois números tomados dos números de 0 a 6 podendo haver repetição. Os dominós com pares de números diferentes são $\binom{7}{2} = 21$, mais os 7 pares repetidos resultam em 28 peças de dominós, portanto, são 28 combinações de 2 objetos tomados dentre 7 com repetição. Essa estratégia de contagem não é facilmente generalizável, o leitor pode tentar contar o número de peças de dominós de 5 pontas com 16 possíveis números diferentes, o resultado deverá ser 15.504.

A resposta para o caso geral é que dentre n objetos, se queremos selecionar r podendo haver repetição e sem considerar ordem, então isso pode ser feito de

$$\left(\!\!\binom{n}{r}\!\!\right) := \binom{n+r-1}{r} \tag{8.7}$$

maneiras diferentes.

No caso dos dominós, por exemplo, são 7 números dos quais selecionamos 2, podendo repetir número

$$\left(\!\!\binom{7}{2}\!\!\right) = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{6!2!} = 28.$$

Uma maneira de modelar combinação com repetição para deduzir equação (8.7) é escrever uma equação com uma indeterminada para cada um dos n objetos, $x_1, x_2, \dots, x_n$. A variável x_i indica quantas vezes o i-ésimo objeto será selecionado, portanto $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$. Assim, o número combinações com repetição é a quantidade de soluções inteiras de

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r \text{ com } x_i \in \{0,1,2,\dots\} \text{ para todo } i. \tag{8.8}$$

Soluções inteiras de equações lineares

Vamos começar com um caso simples, estudaremos o número de soluções de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \text{ com } x_i \in \{1,2,\dots\} \text{ para todo } i. \tag{8.9}$$

Escrevemos

$$1+1+1+1+1+1 = 6$$

e uma solução da equação (8.9) corresponde a escolha de 2 operadores + dentre os 5 escritos na equação acima; por exemplo, se usamos $\oplus$ para representar as escolhas

$$\underbrace{1+1}_{x_1} \oplus \underbrace{1+1+1}_{x_2} \oplus \underbrace{1}_{x_3} = 6$$

corresponde a $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 1$, e

$$\underbrace{1+1}_{x_1} \oplus \underbrace{1+1}_{x_2} \oplus \underbrace{1+1}_{x_3} = 6$$

corresponde a $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 2$. Portanto essa equação tem $\binom{5}{2}$ soluções em $\mathbb{Z}^+$.

Agora, estudaremos o número de soluções de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \text{ com } x_i \in \{0,1,2,\dots\} \text{ para todo } i.$$

Notemos que uma solução $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ inteira e *positiva* da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6 + 3$ determina uma única solução inteira e *não-negativa* $(x-1, y-1, z-1)$ da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ e vice-versa, ou seja, as equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6+3 \quad \text{com } x_i \in \{1,2,3,\dots\} \text{ para todo } i. \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \quad \text{com } x_i \in \{0,1,2,3,\dots\} \text{ para todo } i. \end{aligned}$$

têm o mesmo número de soluções.

De volta ao problema que gerou essa discussão: o número de maneiras de selecionar r objetos, podendo haver repetição, dentre n objetos é igual ao número de soluções inteiras da equação (8.8), que é o mesmo número de soluções inteiras de

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = n + r \text{ com } x_i \in \{1,2,\dots\} \text{ para todo } i.$$

consideramos $1+1+1+\cdots+1 = n+r$ e dos $n+r-1$ operadores + escolhemos $n-1$, ou seja, usando (8.5) são $\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$ soluções inteiras.

Exercício 204. Escreva a partir das ideias acima uma demonstração para a afirmação de que o número de combinações com repetição é dada por (8.7).

Resumindo, a quantidade de maneiras diferentes de selecionarmos r elementos de um conjunto de n elementos é,

	sem repetição	com repetição
com ordem	$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
sem ordem	$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!}$	$\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n+r-1}{r}$

Bolas em caixas

Um outro modelo para problemas de contagem, além de contar soluções inteiras de equações, é considerar a distribuição de bolas em caixas. Consideramos os casos: *caixas distinguíveis* ou *caixas idênticas* e *bolas distinguíveis* ou *bolas idênticas*.

Por exemplo, há 8 modos de distribuir as bolas distinguíveis a, b, c em duas caixas distinguíveis, *esquerda* e *direita*

$$\begin{array}{cccc} abc| & ab|c & a|bc & |abc \\ ac|b & bc|a & b|ac & c|ab \end{array}$$

Se as caixas fossem idênticas, ou indistinguíveis, então $abc|$ e $|abc$ definem a mesma configuração, assim como $ac|b$ e $b|ac$, como $ab|c$ e $c|ab$, como $bc|a$ e $a|bc$. Não há ordem na disposição das bolas dentro da caixa. Portanto, há 4 modos de distribuir as bolas distinguíveis a, b, c em duas caixas indistinguíveis.

Se as bolas são idênticas, ou indistinguíveis, e as caixas não, são 4 modos

$$* * * \mid \qquad * * \mid * \qquad * \mid * * \qquad \mid * * *$$

Se caixas e bolas são indistinguíveis são 2 modos: $* * * \mid$ (ou, $\mid * * *$) e $* * \mid *$ (ou, $* \mid * *$).

Exemplo 205. De quantas maneiras distintas podemos distribuir 3 bolas distinguíveis em 4 caixas distinguíveis? Para cada uma das 3 bolas bola há 4 possíveis caixas, portanto temos um evento composto por uma sequência de 3 etapas em que cada um tem 4 possíveis resultados, portanto 4^3 maneiras distintas para distribuir as bolas nas caixas.

Exercício 206. De quantas maneiras podemos

1. distribuir r bolas distintas em n caixas distintas com qualquer número de bolas por caixa;
2. distribuir r bolas distintas em n caixas distintas com no máximo uma bola por caixa;
3. distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com no máximo uma bola por caixa;
4. distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com qualquer número de bolas por caixa.

O número de modos de distribuir n bolas distintas em n caixas idênticas é conhecido como número de Bell, do qual falaremos adiante.

Binômio de Newton

Se A é um conjunto com n elementos então a quantidade de subconjuntos de A de cardinalidade r é o número de maneiras distintas que podemos selecionar r elementos dentre os n do conjunto, isto é, são $\binom{n}{r}$ subconjuntos. Por outro lado, a bijeção que identifica subconjuntos de A com sequências binárias, exercício 3 na página 89 garante que há 2^n subconjuntos de A. Disso[4] concluímos que

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

Esse fato também é consequência de um resultado mais geral conhecido como Teorema Binomial.

TEOREMA 207 (TEOREMA BINOMIAL) *Para todo $n > 0$, vale*

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}.$$

[4] Alguns textos denominam essa estratégia de demonstração de uma igualdade de **contagem dupla**: contando a quantidade de elementos de um conjunto de dois modos distintos os resultados devem ser iguais.

Vejamos como o produto se desenvolve para valores pequenos de n. No caso $n=2$ temos

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y) &= (x+y)x+(x+y)y\\ &= xx+yx+xy+yy\end{aligned}$$

e multiplicado o resultado por $(x+y)$ obtemos o caso $n=3$

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y)(x+y) &= (x+y)(xx+yx+xy+yy)\\ &= (x+y)xx+(x+y)yx+(x+y)xy+(x+y)yy\\ &= xxx+yxx+xyx+yyx+xxy+yxy+xyy+yyy.\end{aligned}$$

Observe que em ambos os casos temos uma soma monômios da forma $x^i y^j$ com $i+j=n$ e as ocorrências das vaiáveis no monômio não repete cor. Isso porque na aplicação da propriedade distributiva cada um dos n termos $(x+y)$ contribui com uma das variáveis, x ou y. O caso $n=4$

$$\begin{aligned}&(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)\\ &= (x+y)(xxx+yxx+xyx+yyx+xxy+yxy+xyy+yyy)\\ &= xxxx+xyxx+xxyx+xyyx+xxxy+xyxy+xxyy+xyyy\\ &+yxxx+yyxx+yxyx+yyyx+yxxy+yyxy+yxyy+yyyy\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $(x+y)^n =$

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ vezes}}; \tag{8.10}$$

desenvolvendo o produto usando a propriedade distributiva cada x e cada y de cada termo do produto será multiplicado com todos os outros, de modo que temos uma soma em que cada termo da soma é um monômio da forma $x^r y^{n-r}$, para $0 \leqslant r \leqslant n$ e precisamos determinar quantas vezes cada monômio ocorre nesse desenvolvimento.

Para cada r, o coeficiente de $x^r y^{n-r}$ é o número de maneiras de escolher o x de r fatores da equação (8.10); os $n-r$ fatores restantes contribuem com o y. O número de maneiras de escolher r fatores dentre n é $\binom{n}{r}$, portanto

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$$

como queríamos. □

Exercício 208. Escreva uma prova do teorema binomial usando indução.

Exercício 209. Verifique se vale a igualdade

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r.$$

A relação de Stifel (8.6) nos dá um algoritmo para encontrar os coeficientes do polinômio. A disposição desses coeficientes num arranjo triangular cuja n-ésima linha são os coeficientes de $(x+y)^n$ é chamado **triângulo de Pascal**.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&\binom{0}{0}&&&&\\ &&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&\\ &&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&\\ &\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&\\ \binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&& \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&&\\ &&&1&&1&&&\\ &&1&&2&&1&&\\ &1&&3&&3&&1&\\ 1&&4&&6&&4&&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&& \end{array}$$

O 1 é o primeiro e o último número de cada linha. Os outros números é a soma dos outros dois logo acima a esquerda e acima a direita:

$$\cdots \quad \binom{n-1}{k-1} \quad \binom{n-1}{k} \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \binom{n}{k} \quad \cdots$$

Vejamos um exemplo de aplicação desse teorema na prova de uma igualdade. Por um lado temos que

$$(1+x)^{2n} = \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} x^m.$$

Por outro lado, temos que $(1+x)^n(1+x)^n$ é o produto

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell} x^{k+\ell} = \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j}\binom{n}{m-j}\right) x^m$$

e como $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ os coeficientes dos dois polinômios devem ser iguais na mesma potência de x, ou seja, temos essa bela identidade

$$\binom{2n}{m} = \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j}\binom{n}{m-j}.$$

Exemplo 210. Se A, B e C são três subconjuntos de $X = \{1,2,\ldots,n\}$. Vamos contar o número de ternas (A,B,C) com $A \cap B \subset C$.

Primeiro, fixamos o conjunto $C \in S$ e o conjunto $A \in S$. Digamos que C tem cardinalidade c e $A \setminus C$ tem cardinalidade a, com $0 \leqslant c \leqslant n$ e $0 \leqslant a \leqslant n-c$. O número de possíveis $B \in S$ tais que $A \cap B \subset C$ é contado da seguinte maneira: para que $A \cap B$ seja subconjunto de C o conjunto B não pode ter elementos de $A \setminus C$, caso contrário teríamos $x \in A \cap B$ e $x \notin C$. Qualquer outro elemento de X pode estar em B logo temos 2^{n-a} possibilidades em S para o conjunto B.

Deixemos C fixado e vamos contar quantos $A \in S$ são possíveis com a elementos em $A \setminus C$. Um conjunto A com a elementos em $A \setminus C$ é formado por elementos de um subconjunto de a elementos escolhidos em $n-c$, ou seja $\binom{n-c}{a}$ possibilidades para $A \setminus C$ aos quais unimos um dos 2^c subconjuntos de C para formar A, pelo princípio multiplicativo são $2^{n-a}\binom{n-c}{a}2^c$ possibilidades para formar A. Assim o número de pares (A,B) cuja interseção está contida em C (fixo) é

$$\sum_{a=0}^{n-c} 2^{n-a}\binom{n-c}{a}2^c = 2^c 2^c \sum_{a=0}^{n-c}\binom{n-c}{a}2^{n-c-a} = 4^c(1+2)^{n-c} = 4^c 3^{n-c} \tag{8.11}$$

na segunda igualdade usamos o teorema binomial.

Da equação (8.11) acima, são 4^c3^{n-c} pares (A,B) cuja interseção está contida em qualquer $C \in S$ cuja cardinalidade é c. A quantidade de tais C é $\binom{n}{c}$, portanto, o número de ternas $(A,B,C) \in S \times S \times S$ tais que $A \cap B \subset C$ é

$$\sum_{c=0}^{n} \binom{n}{c} 4^c 3^{n-c} = (4+3)^n \tag{8.12}$$

novamente, na equação (8.12) usamos o teorema binomial para concluir o resultado. Portanto $|\{(A,B,C) \in S \times S \times S : A \cap B \subset C\}| = 7^n$.

Exercício 211. Escreva um equação de recorrência para resolver o problema do exercício anterior. Verifique que 7^n é uma solução.

8.1.3 Relações de equivalência e contagem

Uma permutação qualquer das letras de uma dada palavra é chamada de *anagrama* dessa palavra, mesmo que esta permutação não tenha sentido. Por exemplo, "lodo" é um anagrama de "dolo", bem como "odol" e "dool".

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra "ana"? Sabemos que são 3! permutações de 3 símbolos distintos, mas nesse caso há permutações que dão origem ao mesmo anagrama. As seis permutações de ana são:

ana ana aan aan naa naa

em cada duas permutações a palavra é a mesma, só muda (a cor) a ordem da letra repetida, portanto são

$$\frac{3!}{2} = 3$$

permutações distintas, ou 3 anagramas.

Exemplo 212. Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra *"dado"*?

Da mesma maneira, diferenciamos artificialmente as letras iguais e olhamos para todas as sequências formadas por tais letras. O número de arranjos de quatro letras tomadas de $\{d_1, a, d_2, o\}$ é 4!; no entanto para cada arranjo há um único outro que dá origem ao mesmo anagrama, as saber o que troca as posições das duas letras "d" e deixa as outras letras na mesma posição. Desse modo cada anagrama é contado duas vezes, ou seja, são

$$\frac{4!}{2} = 12$$

anagramas distintos (veja a figura 8.7 abaixo).

(a, d_1, d_2, o) (a, d_2, d_1, o)	(o, d_1, d_2, a) (o, d_2, d_1, a)	(d_1, d_2, a, o) (d_2, d_1, a, o)	(d_1, a, d_2, o) (d_2, a, d_1, o)
(a, d_1, o, d_2) (a, d_2, o, d_1)	(o, a, d_1, d_2) (o, a, d_2, d_1)	(d_1, a, o, d_2) (d_2, a, o, d_1)	(d_1, d_2, o, a) (d_2, d_1, o, a)
(a, o, d_1, d_2) (a, o, d_2, d_1)	(o, d_1, a, d_2) (o, d_2, a, d_1)	(d_1, o, a, d_2) (d_2, o, a, d_1)	(d_1, o, d_2, a) (d_2, o, d_1, a)

Figura 8.7: anagramas de "dado"com os "d"'s diferenciados.

Temos quatro letras na palavra mas menos do 4! anagramas pois temos letras "d" repetidas. Distinguimos essas letras usando índices, d_1 e d_2, e assim temos o conjunto das letras $\{d_1, a, d_2, o\}$. Seja A o conjunto das permutações destas quatro letras

$$A = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \colon x_i \in \{d_1, a, d_2, o\} \text{ e } x_i \neq x_j \text{ sempre que } i \neq j,\ \forall i, j \in [4]\big\}.$$

Definimos a relação binária $\backsim$ em A pondo $(x_1, x_2, x_3, x_4) \backsim (y_1, y_2, y_3, y_4)$ se, e só se, para cada $i \in [4]$ vale que

$$\begin{aligned} &x_i = y_i \text{ ou} \\ &x_i, y_i \in \{d_1, d_2\} \end{aligned}$$

isto é, duas permutações equivalentes de elementos de A têm o d_1 possivelmente trocado por d_2 e as demais letras nas mesmas posições. Por exemplo, $(d_1, a, o, d_2) \sim (d_2, a, o, d_1)$ e $(a, o, d_1, d_2) \backsim (a, o, d_2, d_1)$, enquanto que $(d_1, a, o, d_2) \not\backsim (a, o, d_1, d_2)$.

Os doze subconjuntos formados das permutações equivalentes entre si são representados na figura 8.7 acima, os doze quadros correspondem aos doze anagramas da palavra "dado" considerando as letras "d" como "diferentes". Cada um dos quadros é o que chamamos de classe de equivalência da relação de equivalência.

Exemplo 213. Um modo de contar quantos subconjuntos de cardinalidade r tem um conjunto de cardinalidade n é considerar o conjunto A dos arranjos simples de r elementos. Dados dois arranjos $\alpha, \beta \in A$ dizemos que eles são equivalentes se eles diferem apenas na ordem dos elementos, os elementos em si são os mesmos. Se α e β são equivalentes, escrevemos $\alpha \sim \beta$ que é uma relação de equivalência sobre A (verifique). Como α e β têm os mesmos elementos, α é uma permutação de β, assim a classe de equivalência $[\alpha]_\sim$ tem $r!$ elementos. Toda classe de equivalência tem $r!$ elementos, pelo mesmo argumento. Notemos que há tantos subconjuntos de cardinalidade r de um conjunto de cardinalidade n quantos são os elementos de $A/\sim$, o conjunto das classes de equivalência de $\sim$ sobre A. Lembremos o teorema 123, página 62, que diz que o conjunto quociente $A/\sim$, formado pelas classes de equivalência da relação $\sim$ sobre A, é uma partição de A de modo que $|A/\sim| \cdot r! = |A|$ pelo princípio aditivo. Finalmente, $|A/\sim|$, a quantidade de subconjuntos de cardinalidade r de um conjunto de cardinalidade n é

$$\frac{|A|}{r!} = \frac{(n)_r}{r!}.$$

É frequente precisar determinar a cardinalidade das classes de equivalência e do conjunto quociente nas aplicações.

TEOREMA 214 *Se A é finito e $\sim$ é uma relação de equivalência sobre A cujas classes de equivalência têm a mesma cardinalidade, digamos $k = |[a]_\sim|$, então*

$$\big|A/\!\sim\big| = \frac{|A|}{k}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se A é finito, então de (4.2), da proposição 119 (página 62) e do princípio aditivo temos

$$|A| = \sum_{[a]_\sim \in A/\sim} |[a]_\sim|.$$

Se ainda tivermos todos as classes de equivalência de mesma cardinalidade k então $|A| = k \cdot |A/\!\sim|$, donde segue o teorema. □

No exemplo dos anagramas de “dado”, A é o conjunto de todas as permutações e cada classe de equivalência tem dois anagramas obtido um do outro pela permutação das duas letras “d”, portanto, o quantidade de anagramas distintos sem diferenciar as letras “d” é $\left|A/\backsim\right| = 4!/2 = 12$.

Exemplo 215. Na relação binária sobre $\mathbb{R}$ dada por $x \sim y$ se, e só se, $x - y \in \mathbb{Z}$ não há $(x, y) \in [0,1) \times [0,1)$ com $x \neq y$ na relação $\sim$. Então a função $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}/\sim$ dada por $f(x) = [x]_\sim$ é injetiva e, portanto, $\mathfrak{c} \le \left|\mathbb{R}/\sim\right|$. Por outro lado, $\left|\mathbb{R}/\sim\right| \le |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, logo $\left|\mathbb{R}/\sim\right| = \mathfrak{c}$. Finalmente, se $x \in \mathbb{R}$, então $[x]_\sim = \{y \in \mathbb{R}\colon x - y \in \mathbb{Z}\} = \{z + x\colon z \in \mathbb{Z}\}$, portanto, $|[x]_\sim| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 216. Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra *“banana”*? Como há letras repetidas vamos diferenciá-las usando cores. Como no caso de “dado”, temos permutações que são diferentes quando diferenciamos as letras iguais, mas que não diferem na ordem, isto é, definem o mesmo anagrama. Por exemplo:

banana banana banana banana

são permutações diferentes que determinam o mesmo anagrama. As 3! permutações das letras a no mesmo anagrama são indistinguíveis, assim como as 2! da letras n, portanto, há $3! \cdot 2! = 12$ permutações em cada classe de equivalência, quando consideramos equivalentes dois anagramas com a mesma sequência de letras. Vejamos as dez classes de equivalência das permutações que começam com a letra “b”

banana	banana	banana	banana	banana	banana
banana	banana	banana	banana	banana	banana
banaan	banaan	banaan	banaan	banaan	banaan
banaan	banaan	banaan	banaan	banaan	banaan
baanna	baanna	baanna	baanna	baanna	baanna
baanna	baanna	baanna	baanna	baanna	baanna
baanan	baanan	baanan	baanan	baanan	baanan
baanan	baanan	baanan	baanan	baanan	baanan
bannaa	bannaa	bannaa	bannaa	bannaa	bannaa
bannaa	bannaa	bannaa	bannaa	bannaa	bannaa
bnaana	bnaana	bnaana	bnaana	bnaana	bnaana
bnaana	bnaana	bnaana	bnaana	bnaana	bnaana
bnaaan	bnaaan	bnaaan	bnaaan	bnaaan	bnaaan
bnaaan	bnaaan	bnaaan	bnaaan	bnaaan	bnaaan
bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa
bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa	bnanaa
bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa
bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa	bnnaaa
baaann	baaann	baaann	baaann	baaann	baaann
baaann	baaann	baaann	baaann	baaann	baaann

A palavra tem 6 letras portanto são $6! = 720$ permutações se considerarmos as letras distintamente e pelo teorema 214 o número de anagramas é $720/12 = 60$.

Permutação com repetição

De quantos modos podemos arranjar n objetos se esses são de r tipos diferentes e o no arranjo o objeto do tipo i ocorre k_i vezes para todo $i \in [r]$, sendo que $k_1 + \cdots + k_r = n$?

Defina A como o conjunto das sequências de objetos $(o_1, o_2, \dots, o_n)$ de acordo com as restrições do parágrafo anterior e com os objetos do mesmo tipo diferenciados por algum artifício, por exemplo, colorindo ou indexando os objetos. Agora, tome em A a relação de equivalência definida por $(o_1, o_2, \dots, o_n) \backsim (p_1, p_2, \dots, p_n)$ se, e só se, para todo $i \in [n]$ os objetos o_i e p_i são do mesmo tipo.

Fixada uma sequência $(o_1, o_2, \dots, o_n)$ de A, se permutamos os objetos do tipo i, porém preservando as posições relativas na sequência, obtemos uma sequência $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ equivalente a original pela relação $\backsim$. São $k_i!$ sequências $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ equivalentes a $(o_1, o_2, \dots, o_n)$ quando só se permuta os objetos do tipo i. O número total de permutações que só mudam a posição entre objetos de mesmo tipo é $\prod_{i=1}^{r} k_i!$. O número de permutações distintas com repetição é dado pelo teorema 214.

Proposição 217 *Em n objetos no total, com r tipos diferentes de objetos e k_i objetos do tipo i, sujeitos a $1 \leqslant i \leqslant r$ e $n = k_1 + \cdots + k_r$, a quantidade de permutações de n objetos com repetição é dado pelo* ***coeficiente multinomial***

$$\binom{n}{k_1,\ k_2, \dots,\ k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}$$

Exemplo 218 (**mãos de bridge**). Numa mão de Bridge as 52 cartas de um baralho embaralhado são divididas igualmente entre 4 jogadores. O número de modos distintos com que isso é feito pode ser calculado da seguinte forma: uma distribuição de cartas corresponde a uma sequência de 52 objetos, os 13 primeiros objetos da sequência são as cartas do primeiro jogador, os 13 seguintes do segundo jogador, os próximos 13 do terceiro e os 13 últimos objetos da sequência são as cartas do quarto jogador. Há 52! sequências distintas de cartas. Entretanto, dessas 52! temos que, para cada jogador, 13! permutações correspondem a mesma sequência de cartas em sua mão, portanto, são

$$\binom{52}{13,13,13,13} = 53.644.737.765.488.792.839.237.440.000$$

modos distintos de distribuir as cartas, ou mãos diferentes de início de jogo.

Com raciocínio análogo ao feito para o Teorema Binomial,

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{N} \\ k_1+k_2+k_3=n}} \binom{n}{r_1, r_2, r_3} x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3}.$$

Exercício 219. Se numa mão de Bridge as 52 cartas de um baralho são divididas igualmente e aleatoriamente entre 4 jogadores. Com que probabilidade cada jogador recebe um ás?

Solução. Os 4 ases podem ser distribuídos de 4! modos distintos entregando um para cada jogador. As 48 cartas restantes são distribuídas pelos jogadores de $\binom{48}{12,12,12,12}$ maneiras distintas. Pelo princípio multiplicativo são $4!\binom{48}{12,12,12,12}$ modos distintos de os jogadores receberem um ás cada. Portanto a probabilidade é

$$\frac{4!\binom{48}{12,12,12,12}}{\binom{52}{13,13,13,13}}$$

que vale aproximadamente 0,0044. □

Exercício 220. Quantos são os anagramas formados com as letras da palavra *"matemática"*?

Exercício 221. Um sinal é composto por nove bandeiras alinhadas. Quantos sinais diferentes é possível formar quando há disponíveis 4 bandeiras brancas, três bandeiras vermelhas e duas bandeiras azuis? Bandeiras da mesma cor são idênticas.

Exercício 222. Formule o problema de contar o número de combinações usando relação de equivalência.

Permutação circular

De quantos modos 5 crianças, denominadas a, b, c, d, e podem formar uma roda de ciranda? Em fila, seriam 5! filas diferentes, entretanto, numa roda há vários arranjos que descrevem a mesma configuração circular, por exemplo, as rodas $abcde$, $eabcd$ e $deabc$ são iguais pois importa apenas a posição relativa das crianças. Assim, cada roda tem 5 descrições equivalentes dependendo do primeiro elemento da descrição, logo a resposta correta é $5!/5 = 4! = 24$.

PROPOSIÇÃO 223 *O número de permutações circulares de $n \geqslant 1$ objetos distintos é igual a*

$$\frac{n!}{n}$$

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

Número de funções sobrejetivas

Sejam A, B dois conjuntos com cardinalidades m e n, respectivamente. Vimos que o número de funções $f: A \to B$ é n^m e que o número de funções injetivas é $(n)_m$. Quantas são as funções sobrejetivas $f: A \to B$? Essa pergunta só é interessante se $m \geqslant n \geqslant 1$.

Tome uma enumeração qualquer de B, digamos que $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Denote, para cada $i \in [n]$, por A_i o conjunto da funções f de A em B tais que $b_i \notin \mathrm{Im}(f)$. O conjunto da funções sobrejetivas é

$$S = B^A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Sabemos que $|B^A| = n^m$. Usando inclusão–exclusão, exercício 27, página 107,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

e $\bigcap_{i\in I} A_i$ é o conjunto das funções de A em B que deixam $\{b_i : i \in I\}$ de fora da imagem, logo para todo $I \neq \varnothing$

$$\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = (n-|I|)^m$$

portanto

$$\begin{aligned}
|S| &= n^m - \sum_{\varnothing\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1}(n-|I|)^m \\
&= n^m - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(n-i)^m \\
&= n^m + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^m \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^m
\end{aligned}$$

Número de partições

Se $f : A \to B$ é sobrejetiva e $|A| = m$ e $|B| = n$, então para cada $y \in B$ a pré-imagem $f^{-1}(y) \subseteq A$ é um subconjunto não vazio de modo que $\{f^{-1}(y) : y \in B\}$ é uma partição de A em n partes.

No conjunto de todas as funções sobrejetivas de A em B definimos uma relação de equivalência pondo para quaisquer funções f, g desse conjunto $f \equiv g$ se, e só se, elas definem a mesma partição de A, isto é, $\{f^{-1}(y) : y \in B\} = \{g^{-1}(y) : y \in B\}$.

Ainda, $\big|[f]_\equiv\big| = n!$ pois se $\mathscr{A}$ é uma partição de A em n partes então existem $n!$ bijeções $F : \mathscr{A} \to B$ e cada bijeção F define uma sobrejeção $f : A \to B$, portanto, são $n!$ sobrejeções que definem a mesma partição $\mathscr{A}$.

Definição 224. A quantidade de maneiras de particionar um conjunto de cardinalidade m em n partes é conhecida como **número de Stirling do segundo tipo** e é denotada por $\left\{{m \atop n}\right\}$ ou $S(m,n)$. Convencionamos que $\left\{{0 \atop 0}\right\} = 1$.

Pela definição acima e a discussão no parágrafo que a precede, usando o teorema 214 concluímos que o número de funções sobrejetoras é $n!\left\{{m \atop n}\right\}$, portanto

$$\left\{{m \atop n}\right\} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m. \tag{8.13}$$

Exercício 225. Justifique a seguinte equação de recorrência. Tome $\left\{{n \atop 0}\right\} = \left\{{0 \atop n}\right\} = 0$ e para $n > 0$ e todo m, vale que

$$\left\{{m+1 \atop n}\right\} = \left\{{m \atop n-1}\right\} + n\left\{{m \atop n}\right\}. \tag{8.14}$$

Exercício 226. Dê uma demonstração combinatória (sem usar a recorrência (8.14) e sem usar (8.13)) para $\left\{{m \atop 2}\right\} = 2^m - 2$.

Definição 227. O número de partições de um conjunto de cardinalidade m é

$$B_m = \sum_{n=0}^{m}\left\{{m \atop n}\right\}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, chamado de m-ésimo **número de Bell**.

Da convenção assumida na definição 224 temos que $B_0 = 1$.

Exercício 228. Justifique a seguinte equação de recorrência

$$B_{m+1} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_k$$

com $B_0 = 1$.

Exercício 229. De quantas maneiras podemos distribuir n bolas distintas em n caixas idênticas?

Exercícios

1. Quantos elementos há em $A_1 \cup A_2$ se $|A_1| = 12$, $|A_2| = 18$ e
   (a) A_1 e A_2 são disjuntos;
   (b) $|A_1 \cap A_2| = 6$;
   (c) $A_1 \subseteq A_2$.

2. Uma pesquisa revela que 96% das residência têm pelo menos um aparelho de TV; 98% em telefone e 95% das residências têm pelo menos uma TV e telefone. Qual a porcentagem de residências que não tem nem TV nem telefone?

3. Quantos naturais menores ou iguais a 100 são divisíveis por 5 ou por 7?

4. Quantos naturais menores ou iguais a 100 são ímpares ou quadrado de um inteiro?

5. Quantas sequências de 8 bits não contém seis zeros consecutivos?

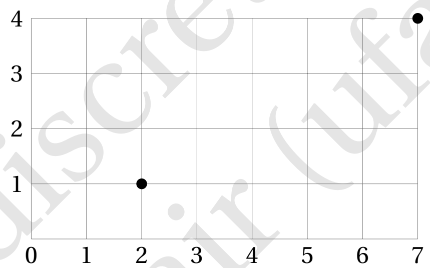
6. Uma sala tem 6 portas. De quantas maneiras é possível entrar e sair dessa sala? De quantas formas é possível entrar e sair da sala por portas distintas?

7. De quantas maneiras diferentes podemos distribuir seis brinquedos diferentes para três crianças de modo que cada uma receba pelo menos um brinquedo?

8. Quantos inteiros entre 10000 e 100000 existem cujos dígitos são somente $6, 7$ ou 8? E quantos são os inteiros cujos dígitos são somente $0, 6, 7$ ou 8?

9. Quantos inteiros entre 1000 e 9999 (inclusive) existem com todos os dígitos distintos? Desses quantos são ímpares? Desses quantos são pares?

10. Na figura abaixo, de quantas maneiras pode-se caminhar do ponto $(2,1)$ até o ponto $(7,4)$ se cada passo só pode ser para a direita ou para cima (ou seja, a partir do ponto (i, j) só se chega, em um passo, ao $(i+1, j)$ ou ao $(i, j+1)$)?



De quantas maneiras pode-se caminhar do ponto $(0,0)$ até o ponto $(7,4)$? De quantas maneiras pode-se caminhar do ponto $(0,0)$ até o ponto $(7,4)$ passando pelo ponto $(2,1)$?

11. Prove que para quaisquer inteiros positivos n e k, se $n \geqslant 2k$ então a fração $n!/2^k$ resulta num inteiro.

12. Numa estante temos 13 livros: 6 de cálculo, 3 de geometria analítica e 4 de física básica. De quantas maneiras é possível ordenar os livros se:
   (a) Não colocarmos nenhuma restrição.
   (b) Se pedirmos para que os livros de cálculo sejam colocados primeiro, depois os de geometria analítica e por fim os de física básica.
   (c) Se pedirmos para que os livros do mesmo assunto fiquem juntos.
   (d) Considerando agora os 3 livros de cálculo são iguais, responda novamente cada um dos três itens anteriores.

13. Defina o domínio (nos naturais) das variáveis n e r para os quais valem as identidades e prove as identidades abaixo.
   (a) $(n+1)_r = \frac{n+1}{n+1-r}(n)_r$.
   (b) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
   (c) $n\binom{m+n}{m} = (m+1)\binom{m+n}{m+1}$.

14. Para jogar uma partida de futebol 22 crianças dividem-se em dois times de 11 cada. Quantas divisões diferentes são possíveis?

15. Um *byte* é uma sequência de 8 *bits*. Quantos *bytes* contém
    (a) exatamente dois 1's;
    (b) exatamente quatro 1's;
    (c) exatamente seis 1's;
    (d) pelo menos seis 1's.

16. Em uma caixa há 100 bolas enumeradas de 1 a 100. Cinco bolas são escolhidas ao acaso. Qual a probabilidade de que os números correspondentes as cinco bolas escolhidas sejam consecutivos?

17. Temos 20 mil reais que devem ser aplicados entre 4 carteiras diferentes. Cada aplicação deve ser feita em múltiplos de mil reais e os investimentos mínimos que podem ser feitos são de 2,2,3 e 4 mil reais. Quantas estratégias de aplicação diferentes existem se
    (a) uma aplicação tiver que ser feita em cada carteira?
    (b) aplicações tiverem que ser feitas em pelo menos 3 das quatro carteiras?

18. Formule os seguintes problemas em termos de soluções inteiras de equações.
    (a) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com pelo menos k bolas na primeira caixa.
    (b) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com nenhuma caixa com mais de duas bolas.
    (c) O número de subconjuntos de $\{A, B, C, D, E\}$ com 3 elementos.
    (d) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas tal que as duas primeiras caixas tenham juntas p bolas.

19. Formule os seguintes problemas em termos de soluções inteiras de equações e distribuição de bolas em caixas.
    (a) Seleção de seis sorvetes a partir de 31 sabores
    (b) Seleção de cinco camisas de um grupo de cinco vermelhas, quatro azuis e duas amarelas.
    (c) Seleção de 12 cervejas de 4 tipos com pelo menos duas de cada tipo.
    (d) Seleção de 20 refrigerantes de 4 tipos com número par de cada tipo e não mais que oito do mesmo tipo.

20. De quantas maneiras podemos dispor 8 peças brancas idênticas e 8 peças pretas idênticas num tabuleiro de xadrez (8×8)? Quantas são simétricas (a disposição ficará a mesma quando rotacionamos o tabuleiro de 180 graus)?

21. Sejam k, n, p números naturais com p primo.
    (a) prove que $p|\binom{p}{k}$, sempre que $k < p$;
    (b) prove que $p|\binom{n}{k}$ se, e somente se, $p|\lfloor n/p \rfloor$.

22. Quantas são as funções $f\colon [n] \to [n]$ não decrescentes, isto é, tais que se $i < j$ então $f(i) \leqslant f(j)$? (Dica: $x_0 = f(1), x(i) = f(i+1) - f(i), x_n = n - f(n)$, reformule em termos de soluções inteiras de equações lineares.)

23. Quantas soluções tem $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ com $0 \leqslant x_i < 6$ para todo i?

24. Para que valores de n as equações

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} = n$$
$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{64} = n$$

    têm o mesmo número de soluções inteiras positivas?

25. Sejam n e m inteiros positivos, $m \geqslant n$. Prove que o número de maneiras de distribuir m bolas idênticas em n caixas distinguíveis sem que alguma caixa fique vazia é

$$\binom{m-1}{n-1}.$$

Prove que se cada caixa tiver que receber pelo menos r objetos, quando $m \geqslant rn$, então são

$$\binom{m-1+(1-r)n}{n-1}.$$

maneiras.

26. (**identidade de Vandermonde**) Prove

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{m}{k-r}\binom{n}{r}.$$

27. (**Princípio de Inclusão–Exclusão**) Prove o caso geral do princípio de Inclusão–Exclusão

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

28. Determine o número de primos menores que 200 usando o princípio de inclusão–exclusão.

29. Uma permutação dos números $[n]$ é dita **permutação caótica** se todos os números estão fora de suas posições originais. Por exemplo, para $n = 4$, a permutação 2413 é caótica, mas a permutação 2431 não é, pois o número 3 está na terceira posição. Quantas permutações caóticas há num conjunto com sete elementos?

30. Quantas permutações caóticas de $1,2,3,4,5,6$ começam com $1,2,3$ em qualquer ordem?

31. Prove que o número de permutações caóticas de $n \geqslant 1$ elementos é

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

32. Use o teorema binomial para provar as identidades abaixo.

    (a) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

    (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0$.

    (c) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

33. Prove a seguinte relação entre coeficientes binomiais e os números de Fibonacci

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

34. Prove que

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

para os valores de $n, k_1, \ldots, k_r$ nos quais os coeficientes binomiais estão definidos.

35. Prove que para todo $n \geqslant 1$

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{k_1,\ k_2,\ k_3\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2+k_3=n}} \binom{n}{k_1,\ k_2,\ k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}.$$

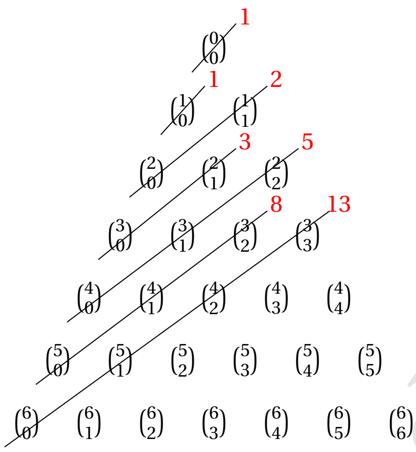


Figura 8.8: triângulo de Pascal e números de Fibonacci.

36. Prove o **teorema multinomial** de Leibniz: Para todo $n > 0$, vale

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \in \mathbb{N} \\ r_1+r_2+\cdots+r_k=n}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}.$$

37. A soma dos números na diagonal do triângulo de Pascal é igual ao número abaixo do último somando. Por exemplo, $1+1=2$, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+3=4$, $1+3+6=10$, etc.

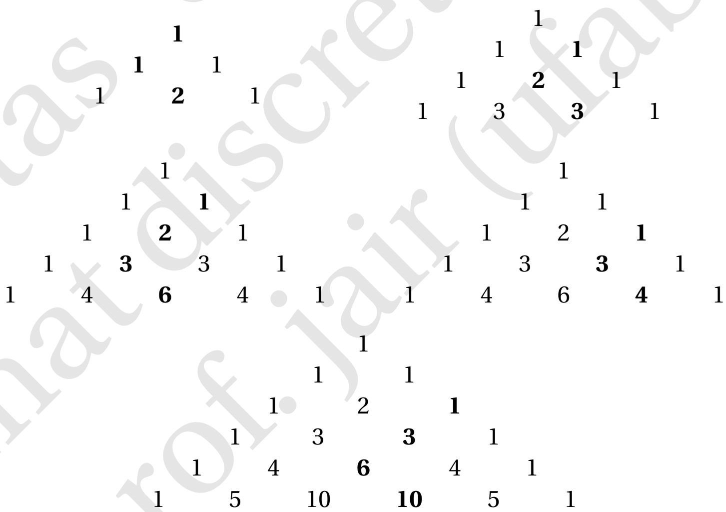


Figura 8.9: somas nas diagonais no triângulo de Pascal.

Use indução e a relação de Stifel para mostrar que

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{k+1}.$$

38. Uma caixa tem um número desconhecido de bolas idênticas, que denotamos por n e queremos estimá-lo. Para tal, selecionamos aleatoriamente n_1 bolas, cada uma recebe uma marca e é devolvida para a caixa.

   (a) De quantas maneiras podemos extrair r bolas de modo que k estarão marcadas?

(b) Qual é o número de seleções de r bolas.

(c) Defina o índice de acerto por $p_k(n) = \dfrac{\text{resultado do item (a)}}{\text{resultado do item (b)}}$.

Mostre que $p_k(n)$ é

i. crescente para os valores de n tais que $p_k(n) > p_k(n-1)$,

ii. decrescente para os valores de n tais que $p_k(n) < p_k(n-1)$.

Conclua que $\lfloor n_1 r/k \rfloor$ é ponto de máximo de $p_k(n)$. Qual é uma boa estimativa para n?

Aproximação de Stirling e limitantes para coeficiente binomial

A fórmula de Stirling é uma boa aproximação para o fatorial. Uma primeira aproximação é dada por aproximação de uma soma por uma integral

$$\int_{k-1}^{k} \ln(x)\,\mathrm{d}x < \ln k < \int_{k}^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

e de

$$\ln(n!) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i)$$

de onde deduzimos que

$$\int_{0}^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x < \ln(n!) < \int_{1}^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

ou seja,

$$n\ln(n) - n < \ln(n!) < (n+1)\ln(n+1) - n$$

A fórmula de Stirling, mais apurada, é assintótica. Duas sequências de números a_n e b_n são *assintoticamente iguais* e escrevemos $a_n \sim b_n$, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Frequentemente, é muito útil quanto trabalhamos com fatoriais a seguinte igualdade assintótica conhecida como fórmula de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

n	$n!$	stirling	$\exp(n\ln n - n + 1)$
1	1	0.922137	1
2	2	1.919004	1.471517764685769
3	6	5.83621	3.654052647388543
7	5040	4980.396	2041.359003828341
10	3628800	3598696	1234098.0408668
20	$2.432902e+18$	$2.422787e+18$	$5.874957877287052e+17$
50	$3.041409e+64$	$3.036345e+64$	$4.656617903154618e+63$
75	$2.480914e+109$	$2.478159e+109$	$3.103152318837849e+100$
100	$9.332622e+157$	$9.324848e+157$	$1.01122149261047e+157$
142	$2.695364e+245$	$2.693783e+245$	$2.451449516100687e+244$

também valem os limitantes

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqslant n! \leqslant \mathrm{e}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

O coeficiente binomial tem os seguintes limitantes triviais

$$0 \leqslant \binom{n}{k} \leqslant 2^n.$$

Para um limitante inferior melhor podemos escrever

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} \geqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

e para um limitante superior usamos o teorema binomial de Newton e de $e^x \geqslant (1+x)$

$$e^{nx} \geqslant (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \geqslant \binom{n}{i} x^i$$

para todo $x > 0$ e todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Logo

$$\binom{n}{i} \leqslant e^{nx} x^{-i}.$$

Em particular, fazendo $x = i/n$, temos a segunda desigualdade de

$$\left(\frac{n}{i}\right)^i \leqslant \binom{n}{i} \leqslant \left(e\frac{n}{i}\right)^i.$$