4 Relações

Vamos relembrar que uma relação com domínio A e contradomínio B, ambos não vazio, é um subconjunto de um produto cartesiano $A \times B$. Se $A = B$ escrevemos A^2 para $A \times B$ e dizemos que $R \subset A^2$ é uma relação sobre A, ou em A. Usualmente, $R \subset A \times B$ e $(a, b) \in R$ escrevemos $a\ R\ b$. Por exemplo, $<$ é uma relação sobre $\mathbb{N}$ e ao invés de escrevermos $(x, y) \in <$ escrevemos $x < y$, como em $3 < 4$ ao invés de $(3,4) \in <$. Ademais, no que se refere a notação, é mais comum usarmos símbolos como $\sim$, $\equiv$, $\simeq$, $\approx$ em vez de R, S ou qualquer letra do alfabeto.

Propriedades de relações

Uma relação $\sim$ sobre um conjunto A não vazio pode ou não ter uma ou mais das seguintes propriedades

reflexiva para todo $a \in A$, $a \sim a$;

irreflexiva para todo $a \in A$, $a \nsim a$;

simétrica para todo $a \in A$, para todo $b \in A$, se $a \sim b$ então $b \sim a$;

antissimétrica para todo $a \in A$, para todo $b \in A$, se $a \sim b$ e $b \sim a$ então $b = a$;

transitiva para todo $a \in A$, para todo $b \in A$, para todo $c \in A$, se $a \sim b$ e $b \sim c$ então $a \sim c$.

Uma relação pode ser simétrica e antissimétrica ao mesmo tempo, como $\{(1,1)\}$ sobre $\{1\}$, ou pode não ser nem simétrica nem antissimétrica, como $\{(1,2)\}$ sobre $\{1,2\}$. Uma relação pode não ser reflexiva e nem irreflexiva, porém uma relação não pode ser ao mesmo tempo reflexiva e irreflexiva sobre A (dê um exemplo). Por exemplo, as relações sobre $A = \{1,2,3,4\}$

1. $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$ é reflexiva.
2. $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ é simétrica.
3. $R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(1,4),(4,4)\}$ é reflexiva e simétrica.
4. $R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$ é irreflexiva, antissimétrica e transitiva.
5. $R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
6. $R_6 = \{(3,4)\}$ é irreflexiva, antissimétrica e transitiva.

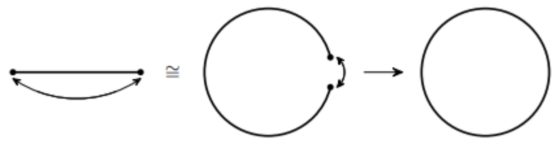
Exercício 86. A seguir, considere $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3\}$ e classifique, quanto as propriedades acima, as relações

1. $R_1 = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$.
4. $R_4 = \{(1,1),(2,3),(3,3)\}$.
5. $R_5 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$.

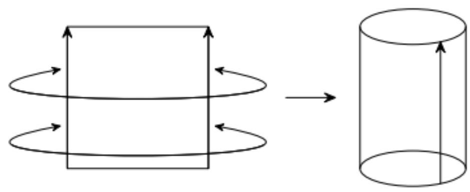
4.1 Relação de equivalência

Relação de equivalência é um tipo de relação ubíqua em matemática, usada, por exemplo, na definição de cardinalidade, na construção dos números inteiros e dos racionais a partir dos números naturais, na definição de objetos geométricos como a garrafa de Klein e a fita de Möbius.

Dizendo de modo bastante ingênuo, as relações de equivalência permitem construções de novos conjuntos a partir de um conjunto dado onde tratamos elementos diferentes do conjunto dado como iguais no novo conjunto. Por exemplo, em certas situações pode se interessante estudar a circunferência como o conjunto dos pontos obtidos de um intervalo quando identificamos (tratamos como iguais) os seus extremos



estudar o cilindro como o conjunto dos pontos obtidos de um retângulo quando identificamos (tratamos como iguais) dois de seus lados paralelos



oi, ainda, estudar o toro como o conjunto dos pontos obtidos de um retângulo quando identificamos (tratamos como iguais) seus lados paralelos

Definição 87. Uma **relação de equivalência** em um conjunto A é uma relação binária $\sim$ que satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Por exemplo

1. $=$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}$.
2. $\leqslant$ não é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}$.
3. Se T e S são triângulos no plano euclideano e $T \cong S$ se os triângulos são semelhantes, então $\cong$ é relação de equivalência sobre o conjunto de todos os triângulos no plano.
4. Semelhança de matriz é uma relação de equivalência sobre o conjuntos de todas as matrizes quadradas de ordem n de números reais.
5. $\equiv \pmod 3$ é a relação dada pelos pares de inteiros que deixam o mesmo resto quando divididos por 3, assim $13 \equiv 22 \pmod 3$ e $7 \not\equiv 13 \pmod 3$. Essa relação é de equivalência.
6. $\subset$ não é relação de equivalência sobre o conjunto das partes de A.

Em $\mathbb{R}$ a relação $x \sim y$ se, e só se, $|x-y|<1$ é reflexiva, simétrica e transitiva?

Definição 88. Seja $\sim$ uma relação de equivalência qualquer sobre o conjunto $A \neq \varnothing$ e $x \in A$, a **classe de equivalência** de x é o subconjunto

$$[x]_\sim = \{b \in A \colon b \sim x\}$$

de A formado por todos os elementos de A equivalentes a x. O elemento dentro dos colchetes, nesse caso x, é chamado de **representante** da classe.

Por causa da transitividade da relação qualquer elemento da classe pode ser seu representante, pois ambos definem a mesma classe de equivalência.

Proposição 89 *Sejam $\sim$ uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Para quaisquer $a, b \in A$ são equivalentes as sentenças*

1. *$a \sim b$,*
2. *$[a]_\sim = [b]_\sim$,*

3. $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \varnothing$.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos provar a equivalência entre os itens 1 e 2. Sejam $a, b \in A$ com $b \sim a$. Para todo $c \in [a]_\sim$ vale $c \sim a$, portanto, $c \sim b$ pela transitividade, logo $c \in [b]_\sim$. Por argumento análogo, se $c \in [b]_\sim$ então $c \in [a]_\sim$. Assim $[a]_\sim = [b]_\sim$. Agora, assumimos que $[a]_\sim = [b]_\sim$. Se $[a]_\sim = [b]_\sim$ então $a \sim b$. Assim provamos

$$a \sim b \text{ se, e só se, } [a]_\sim = [b]_\sim. \tag{4.10}$$

Para provar a equivalência das três afirmações e suficiente provar que 1 implica 3 e que 3 implica 2. Que 1 implica 3 é imediato.

Provamos que 3 implica 2, pela contrapositiva. Se $[a]_\sim \neq [b]_\sim$ então, por (4.10), segue que $a \not\sim b$, logo para todo $c \in A$ vale $c \sim a$, se e só se $c \not\sim b$ (por transitividade), de modo que $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing$. □

Exemplo 90. Em $\mathbb{Z}$ definimos a relação *"congruência módulo 3"* pondo, para quaisquer inteiros a, b, que $a \equiv b \pmod 3$, se, e só se, a e b deixam o mesmo resto quando divididos por 3. Essa relação é de equivalência e tem, pela proposição acima e o teorema da divisão euclidiana, três classes de equivalência

$$\begin{aligned}
[0]_{\equiv_3} &= \{3k\colon k \in \mathbb{Z}\},\\
[1]_{\equiv_3} &= \{3k+1\colon k \in \mathbb{Z}\},\\
[2]_{\equiv_3} &= \{3k+2\colon k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Qualquer múltiplo de três define a mesma classe de equivalência do 0, qualquer inteiro que deixa resto 1 quando dividido por 3 define a mesma classe de equivalência do 1 e qualquer inteiro que deixa resto 2 quando dividido por 3 define a mesma classe de equivalência do 2.

Exemplo 91. Tomemos o intervalo $I = [0, 1]$ da reta real. Definimos uma relação de equivalência formada pelos pares (x, x) para todo $x \in I$ mais os pares $(0, 1)$ e $(1, 0)$. As classes de equivalência dessa relação são $[x] = \{x\}$ para $x \in (0, 1)$ e $[0]$, que é a mesma que $[1]$.

Exemplo 92. No produto $I \times I$, definimos uma relação de equivalência formada pelos pares $\big((x, y), (x, y)\big) \in (I \times I) \times (I \times I)$ para todo $(x, y) \in I \times I$ mais os pares $\big((0, y), (1, y)\big)$ para todo $y \in I$. As classe são $\{(0, y), (1, y)\}$ para cada $y \in I$ mais os unitários $\{(x, y)\}$ para $x \in (0, 1)$ e $y \in I$.

Notemos que no caso do exemplo 90 acima, $[0]_{\equiv_3} \cup [1]_{\equiv_3} \cup [2]_{\equiv_3} = \mathbb{Z}$ e isso, de fato, é uma propriedade das classes de uma relação de equivalência.

Para todo $A \neq \varnothing$ e todo $a \in A$, se $\sim \subseteq A \times A$ é relação de equivalência, então da propriedade reflexiva segue que $a \in [a]_\sim$ de modo que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]_\sim$. Por outro lado, $[a]_\sim \subseteq A$ por definição, logo $\bigcup_{a \in A} [a]_\sim \subseteq A$. Portanto,

$$A = \bigcup_{a \in A} [a]_\sim. \tag{4.11}$$

TEOREMA 93 (TEOREMA FUNDAMENTAL DAS RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA) *Se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto $A \neq \varnothing$ então $A/\sim$ é uma partição de A. Por outro lado, qualquer partição P de A define uma relação de equivalência $\sim_P$ em A tal que as partes da partição de A são as classes de equivalência de A por $\sim_P$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam A e $\sim$ como dados no enunciado. Da proposição 89 e equação (4.11), $A/\sim$ é uma partição de A.

Agora, vamos considerar uma partição $\mathscr{A}$ de A e definir a relação $\sim_P$ em A por $x \sim_P y$ se, e só se, x e y estão numa mesma parte da partição. Tal relação é reflexiva pois para todo $a \in A$ existe um $B \in \mathscr{A}$ tal que $a \in B$ pelo item 3 da definição de partição. A relação é simétrica pois para todos $a, b \in A$, se existe um $B \in \mathscr{A}$ tal que $\{a, b\} \subseteq B$ então $\{b, a\} \subseteq B$. A relação é transitiva pois para todos $a, b, c \in A$ se existe um $B \in \mathscr{A}$ tal que $\{a, b\} \subseteq B$ e existe um $C \in \mathscr{A}$ tal que $\{b, c\} \subseteq C$ então, como $b \in B \cap C$, temos $B = C$ pelo item 2 da definição de partição.

Ainda, se X é uma parte da partição então $X \neq \varnothing$, logo podemos tomar $x \in X$. Por definição $y \in X$ se, e só se, $y \sim_P x$. Ademais, $y \sim_P x$ se, e só se, $y \in [x]_{\sim_P}$. Portanto, $X = [x]_{\sim_P}$. Assim, as partes da partição de A são as classes de equivalência de A por $\sim_P$. □

Se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre A, então chamamos de **conjunto quociente** de A pela relação de equivalência $\sim$ o conjunto das classes de equivalência da relação

$$A/\sim = ([a]_\sim\colon a \in A).$$

Exemplo 94. No caso da relação *"congruência módulo 3"* o conjunto quociente $\mathbb{Z}/\equiv_3$ é o conjunto

$$\big\{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\big\}$$

e $\mathbb{Z}/\equiv_3$ é, usualmente, denotado por $\mathbb{Z}_3$.

Exemplo 95. No caso do exemplo 91 o conjunto quociente é um conjunto de pontos topologicamente idêntico a uma circunferência. No caso do exemplo 92 o conjunto quociente é um conjunto de pontos topologicamente idêntico a um cilindro.

Exercícios

1. Prove ou dê contraexemplo: Para todo R_1 e todo R_2, se R_1 e R_2 são relações de equivalência sobre um conjunto A então $R_1 \cap R_2$ é uma relação de equivalência sobre A.

2. Sejam A um conjunto não vazio, $\mathfrak{P}$ o conjunto de todas as partições de A e $\mathfrak{R}$ o conjunto de todas as relações de equivalência sobre A.

   Prove que $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{P}$ dada por $f(R) = \{[a]_R : a \in A\}$ para todo $R \in \mathfrak{R}$ é uma função bijetiva.

3. Explique o que está errado na seguinte demonstração sobre uma relação R sobre A:

   TEOREMA 96 *Se R é uma relação simétrica e transitiva então R é uma relação reflexiva.*

   DEMONSTRAÇÃO. Seja x um elemento de A. Para todo y, se $x \mathrel{R} y$ então $y \mathrel{R} x$, pois a relação é simétrica. Se $x \mathrel{R} y$ e $y \mathrel{R} x$, então $x \mathrel{R} x$ pela transitividade. Portanto, R é reflexiva. □

4. Seja $f\colon X \to Y$ uma função qualquer. Defina a relação K em X por $x\,K\,y$ se, e só se, $f(x) = f(y)$. Prove que essa relação é de equivalência e que $[x]_K = f^{-1}(x)$. Essa relação é chamada de relação de equivalência do núcleo de f.

5. Seja A um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência sobre A. Prove que a função $\pi\colon A \to A/\sim$ dada por $\pi(a) = [a]_\sim$, chamada de **projeção canônica**, é sobrejetiva.

6. O que é a relação de equivalência do núcleo de uma projeção canônica?

7. Sejam $f\colon A \to B$ uma função e $\sim$ uma relação de equivalência sobre A tal que se $a \sim b$ então $f(a) = f(b)$, para quaisquer $a, b, \in A$. Prove que existe uma única função $g\colon A/\sim \to B$ tal que $f = g \circ \pi$, onde π é a projeção canônica.

8. Sejam $f\colon A \to B$ uma função sobrejetiva e $\sim$ uma relação de equivalência sobre A tal que $a \sim b$ se e somente se $f(a) = f(b)$, para quaisquer $a, b, \in A$. Prove que existe uma única função injetiva $g\colon A/\sim \to B$ tal que $f = g \circ \pi$, onde π é a projeção canônica.

9. Prove que entre quaisquer duas classes de equivalência de $\equiv \pmod 3$ há uma bijeção.

10. Sejam $\sim$ e $\cong$ duas relações de equivalência sobre o mesmo conjunto A. Se $a \sim b$ implica $a \cong b$ para todos $a, b \in A$, então dizemos que $\sim$ é uma relação que **refina** $\cong$. Dê uma relação de equivalência que refina a relação $\equiv \pmod 3$.

11. Demonstre que se $\sim$ **refina** $\cong$ então cada classe de equivalência de $\sim$ é um subconjunto de uma classe de equivalência de $\cong$.

4.2 Relação de ordem

A relação $\leqslant$ sobre $\mathbb{N}$ comporta-se, em alguns aspectos, da mesma forma que $\subseteq$ sobre $2^{\mathbb{N}}$ (não há nada de especial em ser $\mathbb{N}$ aqui) e da mesma forma que $\mid$ sobre $\mathbb{N}$. Essas são relações de ordem.

Definição 97. Uma relação $\preceq$ sobre um conjunto A não vazio é uma **relação de ordem** em A se valem as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva. O par $(A, \preceq)$ é chamado de **ordem parcial** e dizemos que A **é conjunto parcialmente ordenado por** $\preccurlyeq$.

Exemplo 98. São exemplos de ordens parciais $\left(2^{\mathbb{Z}}, \subseteq\right)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ e a ordem lexicográfica $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \trianglelefteq)$ definida no exercício 10, página 26.

Uma ordem é classificada como "parcial" pelo seguinte motivo. Há uma diferença importante entre, por exgemplo, as relações de ordem $\subseteq$ sobre $2^{\mathbb{Z}}$ e $\leqslant$ sobre $\mathbb{Z}$. Na primeira, a inclusão $\subseteq$, pode haver elementos incomparáveis, por exemplo, os conjuntos $\{1, 2\}$ e $\{2, 3\}$ são incomparáveis pois

$$\{1,2\} \not\subseteq \{2,3\} \text{ e } \{2,3\} \not\subseteq \{1,2\}$$

enquanto que quaisquer dois números inteiros x e y são comparáveis pela relação, isto é, vale que

$$x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x.$$

Definição 99. Seja A um conjunto não vazio e $\preccurlyeq$ um relação de ordem em A. O elementos $a, b \in A$ são ditos **comparáveis** por $\preccurlyeq$ se, e só se, vale que

$$x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x.$$

Caso contrário são ditos **incomparáveis**.

Diagrama de Hasse

Escrevemos $x \prec y$ se, e só se, $x \preccurlyeq y$ e $x \neq y$. O $\prec$ é uma relação sobre o mesmo conjunto que $\preccurlyeq$, é chamada de **ordem estrita** definida por $\preccurlyeq$. O par $(A, \prec)$ é a **ordem estrita associada** a ordem parcial $(A, \preccurlyeq)$.

Quando $x \preccurlyeq y$ e não existe $z \in A$ tal que $x \prec z \prec y$ então dizemos que y **cobre** x. Essa relação "cobre" é um subconjunto da relação $\preccurlyeq$. Usamos essa subrrelação para, em alguns casos, montar um diagrama que representa a ordem parcial, conhecido como **diagrama de Hasse**, que é bastante útil para ilustrar propriedades de uma ordem parcial. Representamos cada elemento de A como um ponto no plano (vértice) e desenhamos um segmento ou curva (aresta) que vai para cima de x para y sempre que y cobre x e $y \neq x$. A relação de ordem é indicada tanto pelas arestas quanto pelo posicionamento relativo dos vértices. As ordens são desenhadas de baixo para cima: se um elemento x é menor que y, então existe um caminho de x para y que é direcionado para cima. Pode ser necessário, no desenho, que as arestas conectando os elementos se cruzem fora dos vértices, mas uma aresta deve ligar só dois vértices, a saber, o elementos da ordem relacionados por "cobre". Tal diagrama determina unicamente sua ordem parcial. A figura 4.1 abaixo exibe um diagrama de Hasse da ordem parcial $\big(\wp(\{1,2,3\}), \subseteq\big)$. Na figura 4.2, temos um

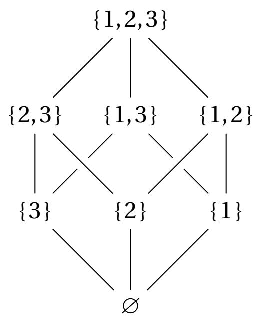


Figura 4.1: diagrama de Hasse de $\big(\wp\{1,2,3\}, \subseteq\big)$.

diagrama da ordem formada pelos divisores de 60 com a ordem |.

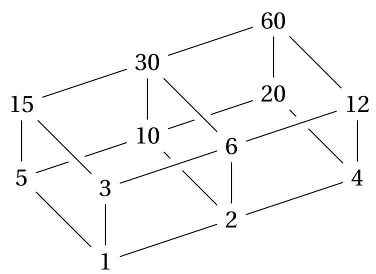


Figura 4.2: diagrama de Hasse dos divisores de 60 com a ordem |.

Elementos máximo, mínimo, maximal e minimal

Alguns elementos, quando existem, desempenham um papel especial numa ordem parcial $(A, \preccurlyeq)$. Temos que $x \in A$ é

minimal se, e só se, para todo $y \in A$,
$$y \preccurlyeq x \text{ implica } y = x.$$

mínimo se, e só se, para todo $y \in A$,
$$x \preccurlyeq y.$$

maximal se, e só se, para todo $y \in A$,
$$x \preccurlyeq y \text{ implica } y = x.$$

máximo se, e só se, para todo $y \in A$,
$$y \preccurlyeq x.$$

Há ordens parciais onde não ocorrem nenhum desses casos como, por exemplo, em $(\mathbb{Z}, \leqslant)$. Também, um conjunto parcialmente ordenado pode ter vários elementos minimais e vários elementos maximais. Por exemplo, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A com k elementos, para algum $0 < k < n$, parcialmente ordenados por $\subseteq$ é formado por elementos incomparáveis entre si, todos os elementos são maximais e todos são minimais; não há máximo e não há mínimo.

No conjunto dos divisores *próprios* de 60 com a ordem de divisibilidade, que tem uma representação dada pelo diagrama da figura 4.3, percebemos que essa ordem parcial não tem máximo nem mínimo. Os elementos $12, 20, 30$ são elementos maximais

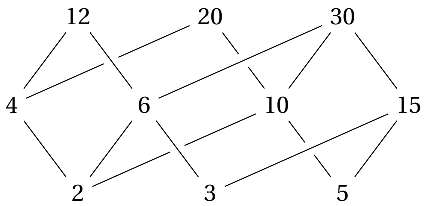


Figura 4.3: diagrama de Hasse dos divisores próprios de 60.

$2, 3, 5$ são minimais. Se consideramos todos os divisores (figura 4.2), notamos que 1 é mínimo e 60 é máximo.

Exemplo 100. Dado um conjunto A com n elementos, tomamos $\wp(A) \setminus \{\varnothing, A\}$, isto é, os **subconjuntos próprios** de A, parcialmente ordenados por pela relação de inclusão. Nesse caso há n elementos maximais e n minimais (justifique essa afirmação).

Quando A é um conjunto de conjuntos e a relação de ordem é a inclusão ($\subseteq$) um elemento minimal de $(A, \subseteq)$ é um conjunto que não contém propriamente nenhum outro elemento de A; um elemento maximal de $(A, \subseteq)$ é um conjunto que não está contido propriamente nenhum outro elemento de A. Por exemplo, se $A = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,4\}, \{3,4,5\}\}$ então $\{1,2,4\}$ não é minimal pois contém propriamente $\{1,2\} \in A$. São os elementos minimais: $\{2\}$, $\{1,3\}$ e $\{3,4,5\}$. O elemento $\{2\}$ não é maximal, nem $\{1,2\}$. Os elementos maximais do conjunto A são $\{1,3\}$, $\{1,2,4\}$ e $\{3,4,5\}$.

Exemplo 101. Para o conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ munido da relação de ordem $\preccurlyeq$ dada por

$$\{(1,3), (2,3), (1,4), (2,4), (3,4), (5,6), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

o número $2 \in A$ é um elemento *minimal* de pois não existe nenhum par $(a, 2)$, $a \neq 2$, na relação. Os elementos minimais $(A, \preccurlyeq)$ são 1, 2 e 5. Quais são os maximais? Há máximo? Há mínimo? A figura 4.4 é uma representação dessa ordem parcial.

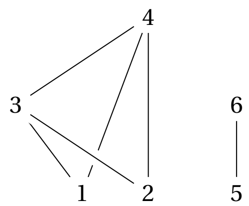


Figura 4.4: diagrama de Hasse do exemplo 101.

Exemplo 102. Tomemos $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ com a relação de divisibilidade (denotada $|$). O número 21 não é minimal pois, por exemplo, $3 \big| 21$. O número 17 é minimal pois não existe a tal que $a \big| 17$ (a única possibilidade seria o 1 que não está no conjunto). Note que os elementos minimais de $(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \preccurlyeq)$ são os números primos.

Já em $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$, o 1 é o único minimal, que também é mínimo.

Proposição 103 *Numa ordem parcial, se existe mínimo então ele é único e se existe máximo ele também é único.*

Demonstração. Seja $(A, \preccurlyeq)$ uma ordem parcial. Suponha que x_1 e x_2 sejam mínimos dessa ordem. Como x_1 é mínimo, $x_1 \preccurlyeq x_2$; analogamente $x_2 \preccurlyeq x_1$, portanto, $x_1 = x_2$ pela propriedade antissimétrica.

A demonstração para máximo é análoga. □

Exemplo 104. Considere o conjunto $\wp^{\leqslant 3}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ com no máximo três elementos e ordenados por inclusão $\subseteq$. O (único) mínimo dessa ordem parcial é o $\varnothing$. Todos os subconjuntos de 3 elementos são maximais pois não há subconjuntos com 4 elementos de modo que, por exemplo, nenhum elemento de $\wp^{\leqslant 3}(\mathbb{N})$ contém $\{0,1,2\}$, nem $\{1,2,3\}$. Como consequência de haver dois elementos maximais inferimos que não há máximo nessa ordem parcial.

Cadeias

Numa ordem parcial podem ocorrer subconjuntos nos quais quaisquer dois elementos são comparáveis. É o caso, por exemplo de $\{1,2,10,30,60\}$ na ordem dos divisores de 60. Noutros, quais quaisquer dois elementos são incomparáveis, como $\{4,5,6\}$ na ordem dos divisores de 60.

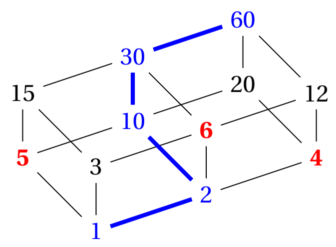


Figura 4.5: Uma cadeia em azul e uma anticadeia em vermelho.

Definição 105. Seja $(A,\preccurlyeq)$ um ordem parcial. Se $B \subseteq A$ é tal que quaisquer $x,y \in B$ vale $x \prec y$ ou $y \prec x$, dizemos que B é uma **cadeia**. Se para quaisquer $x,y \in B$ vale $x \not\prec y$ e $y \not\prec x$, dizemos que B é uma **anticadeia**.

Se a ordem parcial $(A,\preccurlyeq)$ é uma cadeia então dizemos que $(A,\preccurlyeq)$ é uma **ordem total**.

Exercícios

1. Prove que numa ordem parcial um elemento mínimo é minimal e um máximo é maximal. Construa exemplos onde a recíproca não vale.

2. Determine os elementos maximais/minimais/máximo/mínimo em $(\mathbb{Z}^+, |\,)$.

3. Prove que se $(A,\preccurlyeq)$ tem máximo então ele é único.

4. Desenhe um diagrama de Hasse para o conjunto dos subconjuntos próprios de $\{1,2,3,4\}$ com a ordem da inclusão. Quais são as anticadeias dessa ordem parcial?

5. Determine os elementos maximais e minimais de $(\{2,4,5,10,12,20,25\}, |)$.

6. Determine as cadeias e as anticadeias de $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$.

7. Prove que numa ordem parcial finita e não vazia há elementos maximais e minimais.

8. Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Determine todas as relações de ordem total. Quantas são?

9. Seja $\mathscr{S}$ o conjunto das sequências binárias finitas. Seja $l(u) \in \mathbb{N}$ o comprimento (em quantidade de bits) da sequência $u \in \mathscr{S}$ (supomos uma sequência vazia, sem símbolos, de comprimento zero). Dadas duas sequências u, v defina uma relação R em $\mathscr{S}$ da seguinte forma:
$$(u,v) \in R \iff l(u) \leqslant l(v).$$
Trata-se de uma relação de ordem? Justifique.

10. Defina a relação R sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ pela regra $(a,b)\ R\ (c,d) \leftrightarrow a \leqslant c$ ou $b \leqslant d$. A relação é uma ordem parcial sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

11. Defina a relação R sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ pela regra $(a,b)\ R\ (c,d) \leftrightarrow a = c$ ou $b = d$. A relação é uma ordem parcial sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

12. Dado um conjunto A considere o conjunto de partes com a relação de inclusão $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ e prove que trata-se de uma relação de ordem. Determine a existência, ou não, de mínimo e máximo.

13. Determine a veracidade das seguintes proposições:

    (a) Uma relação não pode ser simultâneamente de ordem e de equivalência.

    (b) Em um conjunto totalmente ordenado todo subconjunto não vazio tem mínimo.

14. Sejam $(A_1, \leq_1)$ e $(A_2, \leq_2)$ conjuntos com respectivas relações de ordem. Definimos a **ordem lexicografica** no produto $A_1 \times A_2$ por $(x_1, x_2) \trianglelefteq (y_1, y_2)$ se, e somente se,

$$(x_1 \leq x_2 \text{ e } x_1 \neq x_2) \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq y_2).$$

- Prove que de fato temos uma relação de ordem.
- No caso usual de $(\mathbb{R}, \leq)$, considere a ordem lexicográfica no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Escolha um elemento qualquer $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e desenhe o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \trianglelefteq p\}$.

15. Seja $(P, \leq)$ uma ordem parcial finita. Defina

$$K := \max\{|A| : A \subset P, \text{ cadeia}\}.$$

(a) Prove que existe uma partição de P em K conjuntos, $P = \{L_1, L_2, \ldots, L_K\}$, tais que se $x \in L_i$ e $y \in P$ é tal que $y \leq x \wedge y \neq x$ então $y \in L_1 \cup \cdots \cup L_{i-1}$.

(b) Observe que cada subconjunto L_i dos anteriores é, de fato, uma anti-cadeia.

(c) Conclua que se $|P| = n$, então temos ou uma cadeia A de comprimento $|A| \geqslant \sqrt{n}$ ou temos uma anticadeia de cardinalidade $|L| \geqslant \sqrt{n}$.

16. Para cada $m \in \mathbb{N}$ denotamos por $[m]$ ao conjunto $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ com a ordem $\leqslant$ usual dos números inteiros. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $P_{n,k} = [n] \times [k]$ com a **ordem produto**, ou seja, com a relação de ordem parcial em P definida do seguinte modo:

$$(x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2) \text{ se, e só se, } x_1 \leqslant y_1 \text{ e } x_2 \leqslant y_2.$$

(a) Prove que o comprimento da maior cadeia, C, de P é igual a $n + k - 1$
Dica: observe que existem máximo e mínimo (únicos).

(b) Quantas cadeias de comprimento máximo tem-se?

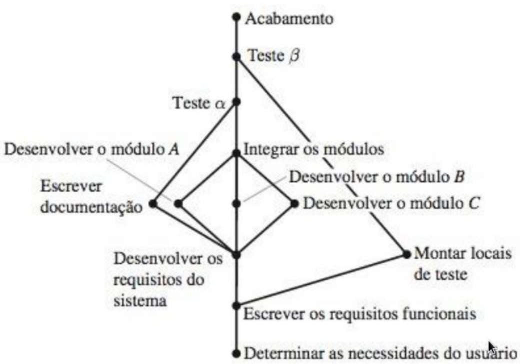
17. Sejam $(A, \preccurlyeq)$ e $(B, \trianglelefteq)$ ordens totais. Uma função $f : A \to B$ é dita crescente[2] se, e só se, para todos $x, y \in A$, vale $x \prec y \to f(x) \triangleleft f(y)$. Dê uma prova ou um contraexemplo para a sentença: uma função crescente f de A em B é injetiva.

18. Uma **ordenação topológica** de uma ordem parcial $(A, \preceq)$ é uma sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n$ com todos os elemento de A que é *compatível* com $\preceq$, isto é, se $i < j$ então $a_i \preceq a_j$, ou a_i e a_j são incomparáveis. Uma ordenação topológica de $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ é

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$$

Escreva outras duas ordenações topológicas possíveis para $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$.

19. Seja S um conjunto de tarefas e $\preceq$ uma relação de ordem, de modo que $s \preceq t$ significa que s deve ser realizada antes de t. Uma ordenação topológica corresponde a uma sequência de realização de tarefas que é compatível com a ordem. Encontre uma ordem de tarefas para um projeto de software cuja ordem é representada pelo diagrama abaixo.



[2] É mais comum dizermos que f **preserva a ordem** ao invés de crescente. Note que usamos a ordem estrita.

20. Uma **linearização** de um conjunto parcialmente ordenado e finito $(P, \preccurlyeq)$ é uma enumeração dos elementos do conjunto, $x_1, x_2, \dots, x_n$, de modo que $i < j$ implique $x_i \preccurlyeq x_j$ ou x_i e x_j incomparáveis.

    Seja $\mathscr{S}_3$ o conjunto das sequências binárias de 3 bits com a ordem produto, ou seja,

    $$a_0a_1a_2 \leq b_0b_1b_2 \text{ se,e somente se, } a_0 \preccurlyeq b_0 \text{ e } a_1 \preccurlyeq b_1 \text{ e } a_2 \preccurlyeq b_2.$$

    (a) Desenhe um diagrama de Hasse da ordem parcial, posicionando os elementos de $\mathscr{S}_3$ como os vértices de um cubo projetado contra o plano.

    (b) Verifique que a seguinte enumeração é de fato uma linearização: $000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111$.

    (c) Prove que tem-se exatamente 6 formas de reordenar os elementos de $\mathscr{S}_3$ de modo à respeitar a ordem de $\mathscr{S}_3$ (ou seja, bijeções *monótonas*: $x \leq y \implies F(x) \leq F(y)$).
    Dica: Veja que estas devem respeitar a geometria do cubo...

    (d) Porem, o números de linearizações possíveis é bem maior. Verifique que tem-se 48 linearizações.
    Dica: $48 = 3! \cdot 3! + 3 \cdot 2 \cdot 2$.

    Obs.: ordenação topológica é outro nome para linearização, usado na computação.

O teorema de Dilworth

O seguinte resultado é equivalente a vários teoremas importantes em combinatória, como o teorema de Hall[3] e o teorema de Birkhoff–Von Neumann[4], também é uma generalização do teorema de Erdős–Szekeres sobre subsequências monótonas[5].

TEOREMA 106 (TEOREMA DE DILWORTH) *Numa ordem parcial finita A, o menor número m de cadeias tal que todo elemento de A pertence a alguma dessas cadeias é igual ao número máximo de elementos M em uma anticadeia de A.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos provar que $m \leqslant M$. A prova é por indução completa em $n = |A|$.

Se $n = 1$, então $m = M$. Seja $k \geqslant 1$ um natural arbitrário e assuma que para toda ordem parcial com $\leqslant k$ elementos o teorema é verdadeiro.

Tome $(A, \preccurlyeq)$ uma ordem parcial com $k+1$ elementos e considere C uma cadeia maximal (com respeito a inclusão) em A.

Se toda anticadeia em $A \setminus C$ tem no máximo $M-1$ elementos, então $A \setminus C$ pode ser escrito como união de no máximo $M-1$ cadeias, por hipótese da indução, que com a cadeia C formam no máximo M cadeias tal que todo elemento de A pertence a alguma dessas cadeias. Portanto $m \leqslant M$.

Agora suponha que X seja uma anticadeia em $A \setminus C$ com M elementos e defina os conjuntos

$$X^- = \{x \in A \colon x \preccurlyeq a \text{ para algum } a \in X\}$$
$$X^+ = \{x \in A \colon a \preccurlyeq x \text{ para algum } a \in X\}$$

de $|X| = M$, o tamanho máximo de uma anticadeia, $A = X^- \cup X^+$, caso contrário haveria z incomparável como os elementos de X e $X \cup \{z\}$ seria uma anticadeia.

Se $|X^+|, |X^-| < |A|$ então, pela hipótese da indução, $|X^+|$ pode ser escrito como união de $\leqslant M$ cadeias cujos mínimos estão em X e $|X^-|$ pode ser escrito como união de $\leqslant M$ cadeias cujos máximos estão em X. Portanto P é união de $\leqslant M$ cadeias.

Resta verificar que $|X^+|, |X^-| < |A|$. Isso segue do fato de $\max(C) \notin X^-$ e $\min(C) \notin X^+$. Portanto, pelo PIFc, para todo natural n, o teorema vale para uma ordem parcial com n elementos. □

[Uma prova sem indução]

Exercício 107. Seja $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ uma sequência de números reais. Uma subsequência $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ é dita *monótona crescente* (respec., monótona decrescente) se $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant a_{i_k}$ (resp. $a_{i_1} \geqslant a_{i_2} \geqslant \cdots \geqslant a_{i_k}$). A sequência é *monótona* se for monótona crescente ou monótona decrescente.

Use o teorema de Dilworth para provar a seguinte afirmação, o teorema de Erdős–Szekerés: toda sequência $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ de números reais contém uma subsequência monótona de comprimento $n+1$.

[3] O teorema de Hall dá uma condição necessária e suficiente para poder selecionar elementos distintos de cada conjunto de uma família de conjuntos finitos.

[4] Toda matriz duplamente estocástica (cada linha e cada coluna somam 1) pode ser escrita como combinação convexa de matrizes de permutação (matriz quadrada 0-1 com um único 1 em cada linha e em cada coluna).

[5] Toda sequência de $mn+1$ números reais possui uma subsequência crescente de $m+1$ termos ou uma subsequência decrescente $n+1$ termos.