Semana 5

PBO

Todo $A \subset \mathbb{N}$ não-vazio tem um menor elemento

PIF

Teorema (Princípio da Indução finita (PIF))

Seja $X \subseteq \mathbb{N}$. *Se*

1. $0 \in X$ *e*
2. *para todo* $k \in \mathbb{N}$, $k \in X \rightarrow k + 1 \in X$,

então $X = \mathbb{N}$.

PIF

Teorema (Princípio da Indução finita (PIF))

Seja $X \subseteq \mathbb{N}$*. Se*

1. $0 \in X$ *e*
2. *para todo* $k \in \mathbb{N}$*,* $k \in X \to k+1 \in X$*,*

então $X = \mathbb{N}$*.*

Corolário (Princípio da Indução finita (PIF))

Seja $P(n)$ *uma propriedade de números naturais. Se*

1. $P(0)$ *é verdadeiro e*
2. *para todo* $k \geqslant 0$*, se* $P(k)$ *é verdadeiro então* $P(k+1)$ *é verdadeiro,*

então $P(n)$ *é verdadeiro para todo natural* n*.*

PIF completo

Teorema (Princípio da Indução finita completo (PIFc))

Seja $X \subseteq \mathbb{N}$. *Se*

1. $0 \in X$ *e*
2. *para todo* $k \in \mathbb{N}$, $\{0, 1, \ldots, k\} \subset X \to k + 1 \in X$,

então $X = \mathbb{N}$.

Corolário (Princípio da Indução finita completo (PIFc))

Seja $P(n)$ *uma propriedade de números naturais. Se*

1. $P(0)$ *é verdadeiro e*
2. *para todo* $k \geqslant 0$, *se* $P(0)$ *e* $P(1)$ *e* ... *e* $P(k)$ *verdadeiro então* $P(k+1)$ *é verdadeiro,*

então $P(n)$ *é verdadeiro para todo natural* n.

Equivalências

Vimos

$$\mathrm{PBO} \implies \mathrm{PIF} \implies \mathrm{PIFc}$$

Equivalências

Vimos Veremos

$$\mathrm{PBO} \Longrightarrow \mathrm{PIF} \Longrightarrow \mathrm{PIFc} \Longrightarrow \mathrm{PBO}$$

Equivalências

Vimos Veremos

$$\mathrm{PBO} \Longrightarrow \mathrm{PIF} \Longrightarrow \mathrm{PIFc} \Longrightarrow \mathrm{PBO}$$

Os 3 princípios são logicamente equivalentes.

PIFc $\Rightarrow$ PBO

Tome A t.q. $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. A prova é por contradição.

PIFc $\Rightarrow$ PBO

Tome A t.q. $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. A prova é por contradição.

Supõe A não tem $\min(A)$ e defina

$$X = \overline{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}.$$

PIFc $\Rightarrow$ PBO

Tome A t.q. $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. A prova é por contradição.

Supõe A não tem $\min(A)$ e defina

$$X = \overline{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}.$$

Se $0 \notin X$ então $0 \in A$, portanto $0 = \min(A)$, contradição. Logo $\underline{0 \in X}$.

PIFc $\Rightarrow$ PBO

Tome A t.q. $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. A prova é por contradição.

Supõe A não tem $\min(A)$ e defina

$$X = \overline{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}.$$

Se $0 \notin X$ então $0 \in A$, portanto $0 = \min(A)$, contradição. Logo $\underline{0 \in X}$.

Tome $k \geqslant 0$ arbitrário e assuma $\underline{\{0, \ldots, k\} \subset X}$.

PIFc $\Rightarrow$ PBO

Tome A t.q. $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. A prova é por contradição.

Supõe A não tem $\min(A)$ e defina

$$X = \overline{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}.$$

Se $0 \notin X$ então $0 \in A$, portanto $0 = \min(A)$, contradição. Logo $\underline{0 \in X}$.

Tome $k \geqslant 0$ arbitrário e assuma $\underline{\{0, \dots, k\} \subset X}$.

$k+1 \notin X$ implica $k+1 \in A$ implica $k+1 = \min(A)$, contradição. $\underline{\text{Então } k+1 \in X}$.

PIFc $\Rightarrow$ PBO

Tome A t.q. $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. A prova é por contradição.

Supõe A não tem $\min(A)$ e defina

$$X = \overline{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}.$$

Se $0 \notin X$ então $0 \in A$, portanto $0 = \min(A)$, contradição. Logo $\underline{0 \in X}$.

Tome $k \geqslant 0$ arbitrário e assuma $\underline{\{0, \dots, k\} \subset X}$.

$k+1 \notin X$ implica $k+1 \in A$ implica $k+1 = \min(A)$, contradição. $\underline{\text{Então } k+1 \in X}$.

Pelo PIFc $X = \mathbb{N}$, ou seja $A = \varnothing$, uma contradição.

PIF, PIFc

$$\frac{\begin{array}{c} P(0) \\ \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1)) \end{array}}{\therefore \forall n,\ P(n)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} P(0) \\ \forall k(P(0) \text{ e } \cdots \text{ e } P(k) \rightarrow P(k+1)) \end{array}}{\therefore \forall n,\ P(n)}$$

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Vamos provar usando indução em n.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Vamos provar usando indução em n.

base: Para $n = 0$, $0 = 0(0+1)/2$.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$*.*

Vamos provar usando indução em n.

base: Para $n = 0$, $0 = 0(0+1)/2$.

passo: Seja $k \geqslant 0$ um natural arbitrário,

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Vamos provar usando indução em n.

base: Para $n = 0$, $0 = 0(0+1)/2$.

passo: Seja $k \geqslant 0$ um natural arbitrário,

Assuma que $0 + 1 + \cdots + k = k(k+1)/2$

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Vamos provar usando indução em n.

base: Para $n = 0$, $0 = 0(0+1)/2$.

passo: Seja $k \geqslant 0$ um natural arbitrário,

Assuma que $0 + 1 + \cdots + k = k(k+1)/2$

Vamos provar que $0+1+\cdots+k+(k+1) = (k+1)(k+2)/2$.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Vamos provar usando indução em n.

base: Para $n = 0$, $0 = 0(0+1)/2$.

passo: Seja $k \geqslant 0$ um natural arbitrário,

Assuma que $0 + 1 + \cdots + k = k(k+1)/2$

Vamos provar que $0 + 1 + \cdots + k + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$.

$\vdots$

(uma dedução vai aqui)

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Vamos provar usando indução em n.

base: Para $n = 0$, $0 = 0(0+1)/2$.

passo: Seja $k \geqslant 0$ um natural arbitrário,

Assuma que $0 + 1 + \cdots + k = k(k+1)/2$

Vamos provar que $0 + 1 + \cdots + k + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$.

$\vdots$

(uma dedução vai aqui)

$\vdots$

Portanto $0 + 1 + \cdots + k + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$.

Portanto, pelo PIF $0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $h > -1$, *vale* $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h > -1$, vale $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$.

Seja $h > -1$ um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h > -1$, vale $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$.

Seja $h > -1$ um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

base: Se $n = 0$ então $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ vale.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h > -1$, vale $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$.

Seja $h > -1$ um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

base: Se $n = 0$ então $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h > -1$, vale $(1+h)^n \geqslant 1+nh$.

Seja $h > -1$ um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

base: Se $n = 0$ então $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Assuma suponha que $(1+h)^k \geqslant 1+kh$.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h > -1$, vale $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$.

Seja $h > -1$ um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

base: Se $n = 0$ então $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Assuma suponha que $(1+h)^k \geqslant 1 + kh$.

Vamos provar que $(1+h)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)h$.

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h > -1$, vale $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$.

Seja $h > -1$ um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

base: Se $n = 0$ então $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Assuma suponha que $(1+h)^k \geqslant 1 + kh$.

Vamos provar que $(1+h)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)h$.

$$\vdots$$

(uma dedução vai aqui)

Exemplo

Para todo $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $h > -1$*, vale* $(1+h)^n \geqslant 1+nh$*.*

Seja $h > -1$ um real arbitrário.

Vamos provar a desigualdade por indução em n.

base: Se $n = 0$ então $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ vale.

passo: Seja k um natural arbitrário

Assuma suponha que $(1+h)^k \geqslant 1+kh$.

Vamos provar que $(1+h)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)h$.

$\vdots$

(uma dedução vai aqui)

$\vdots$

Portanto $(1+h)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)h$.

Portanto, pelo PIF $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2???} \longrightarrow$

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2}$**???** $\longrightarrow$ PIF em $\{\, n \in \mathbb{N} \colon P(n+2) \,\}$

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou* ..... Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2}$**???** $\longrightarrow$ PIF em $\{ n \in \mathbb{N} \colon P(n+2) \}$

base: para $n = 2$, n é primo.

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2}$**???** $\longrightarrow$ PIF em $\{n \in \mathbb{N} \colon P(n+2)\}$

base: para $n = 2$, n é primo.

passo: Seja $k \geq 2$ um natural arbitrário

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2}$**???** $\longrightarrow$ PIF em $\{ n \in \mathbb{N} \colon P(n+2) \}$

base: para $n = 2$, n é primo.
passo: Seja $k \geq 2$ um natural arbitrário
Assuma $P(2)$ e $P(3)$ e $\cdots$ e $P(k)$.

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2}$**???** $\longrightarrow$ PIF em $\{n \in \mathbb{N} \colon P(n+2)\}$

base: para $n = 2$, n é primo.
passo: Seja $k \geq 2$ um natural arbitrário
Assuma $P(2)$ e $P(3)$ e $\cdots$ e $P(k)$.
Vamos provar que $P(k+1)$ vale em dois casos.

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2}$**???** $\longrightarrow$ PIF em $\{\, n \in \mathbb{N} \colon P(n+2) \,\}$

base: para $n = 2$, n é primo.
passo: Seja $k \geq 2$ um natural arbitrário
Assuma $P(2)$ e $P(3)$ e $\cdots$ e $P(k)$.
Vamos provar que $P(k+1)$ vale em dois casos.
Caso 1: se $k+1$ é primo então $P(k+1)$.

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2}$**???** $\longrightarrow$ PIF em $\{ n \in \mathbb{N} \colon P(n+2) \}$

base: para $n = 2$, n é primo.
passo: Seja $k \geq 2$ um natural arbitrário
Assuma $P(2)$ e $P(3)$ e $\cdots$ e $P(k)$.
Vamos provar que $P(k+1)$ vale em dois casos.
<u>Caso 1:</u> se $k+1$ é primo então $P(k+1)$.
<u>Caso 2:</u> se $k+1$ não é primo então $k+1 = ab$ com $2 \leq a, b \leq k$.

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2???}$ $\longrightarrow$ PIF em $\{ n \in \mathbb{N} \colon P(n+2) \}$

base: para $n = 2$, n é primo.
passo: Seja $k \geq 2$ um natural arbitrário
Assuma $P(2)$ e $P(3)$ e $\cdots$ e $P(k)$.
Vamos provar que $P(k+1)$ vale em dois casos.
Caso 1: se $k+1$ é primo então $P(k+1)$.
Caso 2: se $k+1$ não é primo então $k+1 = ab$ com $2 \leq a, b \leq k$.
Pela hipótese valem $P(a)$ e $P(b)$

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2???} \longrightarrow$ PIF em $\{ n \in \mathbb{N} \colon P(n+2) \}$

base: para $n = 2$, n é primo.
passo: Seja $k \geq 2$ um natural arbitrário
Assuma $P(2)$ e $P(3)$ e $\cdots$ e $P(k)$.
Vamos provar que $P(k+1)$ vale em dois casos.
<u>Caso 1:</u> se $k+1$ é primo então $P(k+1)$.
<u>Caso 2:</u> se $k+1$ não é primo então $k+1 = ab$ com $2 \leq a, b \leq k$.
Pela hipótese valem $P(a)$ e $P(b)$
Portanto ab é um produto de primos, portanto vale $P(k+1)$.

Exemplo

Para todo natural $n \geq 2$, n é primo ou pode ser escrito como produto de primos.

Seja $P(n)$ a sentença n *é primo ou .....* Pra facilitar escrita

$\mathbf{n \geqslant 2???}$ $\longrightarrow$ PIF em $\{ n \in \mathbb{N} \colon P(n+2) \}$

base: para $n = 2$, n é primo.
passo: Seja $k \geq 2$ um natural arbitrário
Assuma $P(2)$ e $P(3)$ e $\cdots$ e $P(k)$.
Vamos provar que $P(k+1)$ vale em dois casos.
<u>Caso 1:</u> se $k+1$ é primo então $P(k+1)$.
<u>Caso 2:</u> se $k+1$ não é primo então $k+1 = ab$ com $2 \leq a, b \leq k$.
Pela hipótese valem $P(a)$ e $P(b)$
Portanto ab é um produto de primos, portanto vale $P(k+1)$.

Pelo PIFc, $P(n)$ para todo $n \geq 2$.

Exemplo

Para todo inteiro $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Exemplo

Para todo inteiro $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Vamos provar usando indução em n.

Exemplo

Para todo inteiro $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Vamos provar usando indução em n.
base: Para $n = 5$, $2^5 > 5^2$ vale.

Exemplo

Para todo inteiro $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Vamos provar usando indução em n.
base: Para $n = 5$, $2^5 > 5^2$ vale.
passo: Seja $k \geqslant 5$ um natural arbitrário

Exemplo

Para todo inteiro $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Vamos provar usando indução em n.
base: Para $n = 5$, $2^5 > 5^2$ vale.
passo: Seja $k \geqslant 5$ um natural arbitrário
Assuma $2^k > k^2$.

Exemplo

Para todo inteiro $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Vamos provar usando indução em n.
base: Para $n = 5$, $2^5 > 5^2$ vale.
passo: Seja $k \geqslant 5$ um natural arbitrário
Assuma $2^k > k^2$.
Vamos provar que $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Exemplo

Para todo inteiro $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Vamos provar usando indução em n.
base: Para $n = 5$, $2^5 > 5^2$ vale.
passo: Seja $k \geqslant 5$ um natural arbitrário
Assuma $2^k > k^2$.
Vamos provar que $2^{k+1} > (k+1)^2$.

$$\vdots$$

(uma dedução vai aqui)

Exemplo

Para todo inteiro $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Vamos provar usando indução em n.
base: Para $n = 5$, $2^5 > 5^2$ vale.
passo: Seja $k \geqslant 5$ um natural arbitrário
Assuma $2^k > k^2$.
Vamos provar que $2^{k+1} > (k+1)^2$.

$\vdots$

(uma dedução vai aqui)

$\vdots$

Portanto, pelo PIF $2^n > n^2$ para todo $n \geqslant 5$.

Exemplo

Se em 2^n moedas 1 é falsa, mais leve, então é possível descobrir a moeda falsa em n pesagens numa balança de comparação com 2 pratos.

A base é importante

$n(n+1)$ *é ímpar para todo* $n \geqslant 1$

A base é importante

$n(n+1)$ *é ímpar para todo* $n \geqslant 1$

Vamos provar que vale

para todo $n \geqslant 1$, $n(n+1)$ ímpar $\rightarrow (n+1)(n+2)$ ímpar.

A base é importante

$n(n+1)$ *é ímpar para todo* $n \geqslant 1$

Vamos provar que vale

para todo $n \geqslant 1$, $n(n+1)$ ímpar $\rightarrow (n+1)(n+2)$ ímpar.

Seja $t \geqslant 1$ um natural arbitrário e suponha que $t(t+1)$ é ímpar. Então

$$(t+1)(t+2) = (t+1)t + (t+1)2$$

que é da forma "ímpar + par", portanto ímpar.

O passo é importante

para todo n *natural,* $6n = 0$*.*

O passo é importante

para todo n *natural,* $6n = 0$*.*

Vamos provar por indução em n.

O passo é importante

para todo n natural, $6n = 0$.

Vamos provar por indução em n.

Para $n = 0$ a sentença é, claramente, verdadeira.

O passo é importante

para todo n natural, $6n = 0$.

Vamos provar por indução em n.

Para $n = 0$ a sentença é, claramente, verdadeira.

Seja t um natural arbitrário.
Assuma que a sentença vale para $0, \ldots, t$
Vamos provar que vale para $t + 1$.

O passo é importante

para todo n natural, $6n = 0$.

Vamos provar por indução em n.

Para $n = 0$ a sentença é, claramente, verdadeira.

Seja t um natural arbitrário.
Assuma que a sentença vale para $0, \ldots, t$
Vamos provar que vale para $t + 1$.

$$\begin{aligned} 6(t+1) &= 6 \cdot t + 6 \cdot 1 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pelo PIFc, $P(n)$ vale para todo n. $\square$

Consequência do PBO

todo $\mathrm{A} \subset \mathbb{Z}$ não vazio e limitado inferiormente tem um menor elemento.

PIF generalizado

Teorema (PIF generalizado (PIFg))

Sejam $P(n)$ *um predicado de números inteiros e* $n_0 \in \mathbb{Z}$*. Se*

1. $P(n_0)$ *é verdadeiro e*
2. *para todo inteiro* $z \geqslant n_0$, $P(z)$ *implica* $P(z+1)$,

então $P(n)$ *é verdadeiro para todo inteiro* $n \geqslant n_0$*.*

Teorema (PIF completo generalizado (PIFcg))

Sejam $P(n)$ *um predicado de números inteiros e* $n_0 \in \mathbb{Z}$*. Se*

1. $P(n_0)$ *é verdadeiro, e*
2. *para todo inteiro* $z \geqslant n_0$, $P(n_0)$ *e* $P(n_0+1)$ *e ... e* $P(z)$ *implica* $P(z+1)$,

então $P(n)$ *para todo inteiro* $n \geqslant n_0$*.*

PIF generalizado

As demonstrações são análogas

PIF passo k

Seja $P(n)$ *um predicado a respeito de* $n \in \mathbb{N}$*. Se*

1. $P(0)$ *e* $P(1)$ *e . . . e* $P(k-1)$ *é verdadeiro e*
2. *para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*
   $P(n)$ *e* $P(n+1)$ *e . . . e* $P(n+k-1)$ *implica* $P(n+k)$

então $P(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

PIF passo 2

Sequência de Fibonacci (F_n) dada for

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para todo } n.$$

Está bem definida:

PIF passo 2

Sequência de Fibonacci (F_n) dada for

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para todo } n.$$

Está bem definida:

$$P(n) : F_n \text{ existe é unicamente determinado por } n$$

PIF passo 2

Sequência de Fibonacci (F_n) dada for

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para todo } n.$$

Está bem definida:

$$P(n) : F_n \text{ existe é unicamente determinado por } n$$

- $P(0)$ e $P(1)$

PIF passo 2

Sequência de Fibonacci (F_n) dada for

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para todo } n.$$

Está bem definida:

$$P(n) : F_n \text{ existe é unicamente determinado por } n$$

- $P(0)$ e $P(1)$

PIF passo 2

Sequência de Fibonacci (F_n) dada for

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para todo } n.$$

Está bem definida:

$$P(n) : F_n \text{ existe é unicamente determinado por } n$$

- $P(0)$ e $P(1)$ ✓
- $\forall k \in \mathbb{N},\ (P(k) \text{ e } P(k+1) \to P(k+2))$

PIF passo 2

Sequência de Fibonacci (F_n) dada for

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para todo } n.$$

Está bem definida:

$$P(n) : F_n \text{ existe é unicamente determinado por } n$$

- $P(0)$ e $P(1)$ ✓
- $\forall k \in \mathbb{N},\ (P(k) \text{ e } P(k+1) \to P(k+2))$

PIF passo 2

Sequência de Fibonacci (F_n) dada for

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para todo } n.$$

Está bem definida:

$$P(n) : F_n \text{ existe é unicamente determinado por } n$$

- $P(0)$ e $P(1)$ ✓
- $\forall k \in \mathbb{N},\ (P(k) \text{ e } P(k+1) \rightarrow P(k+2))$ ✓

PIF passo 2

Sequência de Fibonacci (F_n) dada for

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para todo } n.$$

Está bem definida:

$$P(n) : F_n \text{ existe é unicamente determinado por } n$$

- $P(0)$ e $P(1)$ ✓
- $\forall k \in \mathbb{N},\ (P(k) \text{ e } P(k+1) \to P(k+2))$ ✓

Portanto $\forall n,\ P(n)$

PIF passo k

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

PIF passo k

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

base: Se $n = 0$ ou se $n = 1$ vale

$$0 = F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right).$$

$$1 = F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right).$$

PIF passo k

passo: Seja k um natural arbitrário e suponha que

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$$

e

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right).$$

Precisamos provar que

$$F_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right).$$

Por definição $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, pela hipótese

$$
\begin{aligned}
F_{k+1} + F_k &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right).
\end{aligned}
$$

PIF pra frente–pra trás

Teorema (Indução pra frente–pra trás)

Seja (a_i) *uma sequência crescente de números naturais. Seja* $P(n)$ *um predicado a respeito dos números naturais. Se*

1. $P(a_i)$ *é verdadeiro para todo índice* $i \in \mathbb{N}$ *e*
2. $P(k+1)$ *implica* $P(k)$, *para todo natural* k

então $P(n)$ *é verdadeiro para todo natural* n.

Aplicação de PIF pra frente–pra trás

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$

<u>média aritmética</u>: $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

<u>média geométrica</u>: $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$

Teorema (MA–MG)

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

com igualdade se, e só se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Não faremos aqui, veja notas de aula

Definições recursivas

fatorial $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$;

Definições recursivas

fatorial $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$;

somatório $\sum_{i=0}^{0} x_i = x_0$ e $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i$;

Definições recursivas

fatorial $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$;

somatório $\sum_{i=0}^{0} x_i = x_0$ e $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i$;

produtório $\prod_{i=0}^{0} x_i = x_0$ e $\prod_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} x_i$;

Definições recursivas

fatorial $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$;

somatório $\sum_{i=0}^{0} x_i = x_0$ e $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i$;

produtório $\prod_{i=0}^{0} x_i = x_0$ e $\prod_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} x_i$;

união $\bigcup_{i=0}^{0} A_i = A_0$ e $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cup \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$;

Definições recursivas

fatorial $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$;

somatório $\sum_{i=0}^{0} x_i = x_0$ e $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i$;

produtório $\prod_{i=0}^{0} x_i = x_0$ e $\prod_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} x_i$;

união $\bigcup_{i=0}^{0} A_i = A_0$ e $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} A_i)$;

interseção $\bigcap_{i=0}^{0} A_i = A_0$ e $\bigcap_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cap (\bigcap_{i=0}^{n} A_i)$;

Definições recursivas

fatorial $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$;

somatório $\sum_{i=0}^{0} x_i = x_0$ e $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i$;

produtório $\prod_{i=0}^{0} x_i = x_0$ e $\prod_{i=0}^{n+1} x_i = x_{n+1} \cdot \prod_{i=0}^{n} x_i$;

união $\bigcup_{i=0}^{0} A_i = A_0$ e $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cup (\bigcup_{i=0}^{n} A_i)$;

interseção $\bigcap_{i=0}^{0} A_i = A_0$ e $\bigcap_{i=0}^{n+1} A_i = A_{n+1} \cap (\bigcap_{i=0}^{n} A_i)$;

exponencial $a^0 = 1$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$;

Equações de recorrência

função $f\colon \mathbb{N} \to A$ ou sequência (f_n)

- especificamos o valor da função f em $0, \dots, k$
- damos uma regra para encontrar o valor de $f(n)$, $n \geqslant k$, em função de seus valores no inteiros menores, $f(n-1), f(n-2), \dots, f(n-k-1)$

Exemplos: $f(0) = 0,\ f(n+1) = f(n) + \sqrt{n}$

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Exemplos

Exemplo (**juro composto**)

Se começamos uma poupança com um capital de C *unidades monetárias, após* n *meses o montante poupado supondo* $i \in (0,1)$ *fixo como a taxa de juros mensal é*

$$M_0 = C, M_{n+1} = M_n + iM_n$$

Se poupamos D_n *unidades monetárias no mês* n *(*$D_0 = C$*) e o aplicamos nessa poupança*

$$M_0 = C,\ M_{n+1} = (1+i)M_n + D_{n+1}.$$

Exemplos

Exemplo (**mapa logístico**)

O mapa logístico é uma equação de recorrência frequentemente dada como um exemplo de como o comportamento complexo e caótico pode surgir a partir de equações não lineares muito simples

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

onde r *é uma constante e* x_0 *um valor inicial dado.*

Exemplos

Exemplo (**progressão aritmética**)

Uma progressão aritmética que começa em $a \in \mathbb{R}$ *e tem razão* $r \in \mathbb{R}$ *é uma sequência* (a_n) *tal que*

$$a_0 = a \text{ e } a_{n+1} = a_n + r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo (**progressão geométrica**)

Uma progressão geométrica que começa em $a \in \mathbb{R}$ *e tem razão* $r \in \mathbb{R}$ *é uma sequência* (a_n) *tal que*

$$a_0 = a \text{ e } a_{n+1} = a_n \cdot r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos

Exemplo (**Newton–Raphson**)

O método de Newton–Raphson para achar zero de função real, quando aplicado a $(x^2 - a)$ computa, aproximadamente, a raiz quadrada de a. A partir de $x_0 = 1$ podemos computar $\sqrt{2}$ usando

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Equação de recorrência

Uma função φ é **solução** de uma recorrência para (a_n) se

$$\boxed{\text{para todo natural } n,\ \varphi(n) = a_n.}$$

No geral, queremos uma solução que seja dada por expressão matemática que pode ser avaliada com um número “pequeno” de operações.

Tal **solução** é chamada **forma fechada**.

Solução para Fibonacci

$$\varphi(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

A prova de que é solução é feita por indução, como já vimos.

Solução para juro composto

sem depósito mensal

$$M(n) = (1+i)^n C$$

com depósito mensal

$$M(n) = (1+i)^n C + \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k D(i)$$

Solução para mapa logístico

?

Solução para progressões

PA:

$$a(n) = nr + a$$

PG:

$$a(n) = ar^n$$

Solução para Newton–Raphson

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{2} & \text{c.c.} \end{cases}$$

Definição recursiva de conjuntos

- especificamos uma coleção inicial de naturais
- damos uma regra para “adicionar” novos elementos e para “não adicionar” outros elementos.

Definição recursiva de conjuntos

- especificamos uma coleção inicial de naturais
- damos uma regra para “adicionar” novos elementos ~~e para “não adicionar” outros elementos.~~

Assumimos a convenção de que os elementos dos conjuntos definidos recursivamente são só aqueles dados pelas regras dadas.

Exemplo

Vamos definir recursivamente o conjunto I *dos números naturais ímpares*

1. $1 \in \mathrm{I}$;
2. *para todo* $a \in \mathbb{N}$, *se* $a \in \mathrm{I}$ *então* $a + 2 \in \mathrm{I}$;

Exercício: I é o subconjunto dos naturais ímpares.