Resultados de ramsey e densidade para grafos pseudo-aleatórios esparsos

Jair Donadelli Júnior[1]**, Yoshiharu Kohayakawa**[1]

[1]Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística – USP
Rua do Matão 1010, CEP 05508-090
Cidade Universitária – São Paulo – SP

jair@inf.ufpr.br, yoshi@ime.usp.br

Abstract. *In this thesis we deal with problems concerning ramsey and density type results for random and pseudo-random graphs of vanishing edge density. In our approach, we generalize a certain counting lemma, which enables us to apply a method due to Füredi, together with a sparse version of Szemerédi's Regularity Lemma. We prove a density result for random oriented graphs and we obtain, as a consequence, an infinite family of counter-examples to a natural, generalized version of a conjecture of Woodall. We prove that there exist infinitely many ramsey-minimal graphs with respect to the pair (C^ℓ, H) for all H in a certain family of 2-connected graphs. Finally, using different, but related methods we obtain a new family of graphs with linear size-ramsey number.*

Resumo. *Neste trabalho abordamos problemas do tipo ramsey e do tipo densidade para grafos esparsos. Primeiro, provamos uma generalização de um lema de contagem de circuitos. Com esse resultado, aplicamos um método inventado por Füredi para provar um resultado sobre densidade de circuitos em grafo orientado aleatório — e, como conseqüência, obtemos uma família infinita de contra-exemplos para uma generalização de uma conjectura de Woodall — e para mostrar que existem infinitos grafos ramsey-minimais com relação ao par (C^ℓ, H), para todo grafo H de uma família apropriada de grafos 2-conexos. Finalmente, mostramos que se subdividimos muitas vezes as arestas de um grafo, então o número de ramsey para aresta do grafo resultante é linear.*

1. Introdução

O Teorema de Ramsey (1930) diz que, para todos m e r inteiros e positivos, existe um inteiro positivo n tal que não importa como r-colorimos as arestas do grafo completo com n vértices, denotado por K^n, sempre temos um K^m monocromático, isto é, um grafo completo sobre um subconjunto com m vértices do K^n e com todas as arestas da mesma cor. Em notação atual

$$K^n \to (K^m, \dots, K^m),$$

onde $(K^m, \dots, K^m)$ é uma seqüência com r ocorrências do K^m. Mais geralmente, sabemos que dados os grafos $H_1, \dots, H_r$ ($r \geq 1$), existe um grafo Γ tal que $\Gamma \to$

$(H_1, \ldots, H_r)$, ou seja, para qualquer r-coloração das arestas de Γ, existe um subgrafo $\tilde{H} \subseteq \Gamma$ isomorfo à H_i e com todas as suas arestas da cor i, para algum $1 \leq i \leq r$.

Por exemplo $K^{3,7} \to (C^4, C^4)$, onde $K^{3,7}$ denota o grafo bipartido com $3+7$ vértices e todas as 3×7 arestas, e C^4 é o circuito com quatro vértices. De fato, considere uma coloração qualquer das arestas do $K^{3,7}$ com duas cores, digamos branca e preta. Seja $T = \{x, y, z\}$ a parte do conjunto de vértices do $K^{3,7}$ com três vértices. Sem perda de generalidade, podemos supor que nos vértices x, $y \in T$ incidem quatro arestas da mesma cor, digamos preta, e podemos supor também que eles têm um único vizinho comum, caso contrário teríamos um C^4 com todas as arestas pretas. Se em z incidem três ou mais arestas pretas, temos um C^4 monocromático da cor preta, portanto, podemos supor que em z incidem pelo menos cinco arestas brancas. Nesse caso, teremos um C^4 monocromático da cor branca pois em x e em y incidem três arestas brancas cada. Portanto, não conseguimos evitar um C^4 monocromático em qualquer 2-coloração das arestas do $K^{3,7}$.

Lembramos que o número cromático de um hipergrafo $\mathcal{G} = (V, E)$, denotado por $\chi(\mathcal{G})$, é o menor número de partes em que podemos dividir o conjunto de vértices de $\mathcal{G}$ de modo que nenhuma das partes induza uma hiperaresta.

Escrevemos o teorema de Ramsey em linguagem de hipergrafos da seguinte forma: considere o hipergrafo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(K^n; K^m)$, cujo conjunto de vértices é o conjunto de arestas do K^n, ou seja $V(\mathcal{G}) = E(K^n)$, e as hiperarestas são dadas pelos subconjuntos de $E(K^n)$ que formam cópia de um K^m, ou seja, $E(\mathcal{G})$ é dado pelos subconjuntos $\{e_1, \ldots, e_{\binom{m}{2}}\} \subseteq E(K^n)$ que definem um grafo completo sobre m vértices no K^n. Agora, a afirmação *para todos m, $r \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K^n \to (K^m, \ldots, K^m)$, para todo $n \geq n_0$*, pode ser dita em linguagem de hipergrafos como: *para todos $m, r \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\chi(\mathcal{G}) > r$, para todo $n \geq n_0$.*

Dado um hipergrafo $\mathcal{G}$, a afirmação $\chi(\mathcal{G}) > r$ é o que chamamos de um *resultado do tipo ramsey*. Generalizando esses conceitos, dados os grafos Γ e H, definimos o hipergrafo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Gamma; H)$ cujos vértices são as arestas de Γ e as hiperarestas são definidas pelas arestas das cópias de H em Γ. Então $\Gamma \to (H, \ldots, H)$ se, e somente se, $\chi(\mathcal{G}) > r$.

Agora, seja $T(\mathcal{G})$ o menor $t \in \mathbb{N}$ tal que qualquer subconjunto de vértices com pelo menos t elementos contém uma aresta de $\mathcal{G}$. Definimos $\tau(\mathcal{G}) = T(\mathcal{G})/|V(\mathcal{G})|$. Observamos que se $\tau(\mathcal{G}) \leq r^{-1}$, então $\chi(\mathcal{G}) > r$. Dado um hipergrafo $\mathcal{G}$, a afirmação $\tau(G) \leq r^{-1}$ é o que chamamos de um *resultado do tipo densidade*. Dados os grafos Γ e H nós definimos $\tau(\mathcal{G})$ para $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Gamma; H)$ como no parágrafo anterior e, em notação atual, $\tau(\mathcal{G}) \leq \gamma$ é escrito como

$$\Gamma \to_\gamma H.$$

Por todo este resumo adotamos $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Abaixo enunciamos um dos primeiros resultados do tipo ramsey em combinatória.

Teorema 1 (van der Waerden, 1927) *Para todos ℓ, $r \in \mathbb{N}$ existe $n_0(\ell, r) \in \mathbb{N}$ tal que para todo inteiro $n \geq n_0(\ell, r)$ vale o seguinte: em qualquer r-coloração de $[n]$ ocorre uma progressão aritmética monocromática composta por ℓ termos.*

E o resultado análogo do tipo densidade:

Teorema 2 (Szemerédi, 1975) *Para todo $\ell \in \mathbb{N}$ e todo real $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\ell, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo inteiro $n \geq n_0(\ell, \varepsilon)$ vale o seguinte: todo subconjunto $A \subseteq [n]$ com $|A| \geq \varepsilon n$ contém uma progressão aritmética de ℓ termos.*

2. Lema de regularidade de Szemerédi

Para demonstrar o Teorema 2 Szemerédi provou o que hoje é conhecido como Lema de Regularidade. De uma maneira superficial, o lema diz que o conjunto de vértices de todo grafo pode ser particionado em k partes com cardinalidades que diferem de no máximo um, de modo que quase todos os $\binom{k}{2}$ subgrafos bipartidos induzidos pela partição são *pseudo-aleatórios*, um conceito que não definiremos, mas que, entre outras coisas, diz que esses subgrafos se comportam localmente como se fossem grafos bipartidos aleatórios.

Porém, o lema original de Szemerédi não nos fornece informações úteis quando o grafo alvo da aplicação do lema é esparso, isto é, quando o número de arestas é da ordem de $n^{2-\alpha}$, onde α é uma constante positiva e n o número de vértices do grafo. De fato, a pseudo-aleatoriedade envolvida nos pares regulares diz que as arestas devem estar distribuídas uniformemente com um termo de erro que é *quadrático* no número de vértices, mas com uma constante multiplicativa arbitrariamente pequena. Como alternativa para o caso esparso, Kohayakawa e Rödl provaram, independentemente, uma versão para grafos pseudo-aleatórios esparsos.

2.1. A versão do lema de regularidade para grafos pseudo-aleatórios esparsos

Sejam $G = (V, E)$ um grafo, $D \geq 1$, $0 < \eta \leq 1$ e $0 < p \leq 1$ constantes e U, $W \subseteq V$ um par de subconjuntos disjuntos. Definimos a *p-densidade* entre U, $W \subseteq V$ em G por

$$d_p(U, W) = \frac{e_G(U, W)}{p|U||W|}.$$

Dizemos que G é *(η, D, p)-esparso*, se para todos U, $W \subseteq V$ disjuntos com $|U|$, $|W| \geq \eta|V|$ temos $d_p(U, W) \leq D$.

Para $0 < \varepsilon < 1$, dizemos que (U, W) é *$(\varepsilon, G; p)$-regular*, ou somente *ε-regular* quando não há perigo de confusão, se para todos $X \subseteq U$ e $Y \subseteq W$ com $|X| \geq \varepsilon|U|$ e $|Y| \geq \varepsilon|W|$ temos

$$\big|d_p(X, Y) - d_p(U, W)\big| < \varepsilon.$$

Uma partição $\Pi = \big(V_0, V_1, \ldots, V_k\big)$ de V com $|V_0| \leq \varepsilon|V|$ e $|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k|$ é dita *(ε, k)-regular* se no máximo $\varepsilon\binom{k}{2}$ pares (V_i, V_j), com $1 \leq i < j \leq k$, não são $(\varepsilon, G; p)$-regulares.

Lema 3 (Lema de regularidade — versão esparsa) *Dados $0 < \varepsilon < 1$ e $D \geq 1$ reais e $k_0 \geq 1$ inteiro, existem constantes positivas $n_0 = n_0(\varepsilon, D, k_0)$, $\eta = \eta(\varepsilon, D, k_0)$ e $K_0 = K_0(\varepsilon, D, k_0) \geq k_0$ tais que para todo $0 < p \leq 1$ vale o seguinte. Todo grafo (η, D, p)-esparso G com pelo menos n_0 vértices admite uma partição (ε, k)-regular, para algum $k_0 \leq k \leq K_0$.*

Tomando $D = p = 1$ recuperamos a versão original, para grafos densos, do lema de regularidade de Szemerédi (1978).

2.2. A técnica de Füredi

Uma questão que surge naturalmente é investigar qual o comportamento *típico* de grafos quanto aos resultados do tipo densidade e do tipo ramsey.

Denotamos por $\mathcal{G}(n, M)$ o conjunto de todos os grafos com n vértices e $M = M(n)$ arestas. Sabemos que se escolhemos $G_{n,M} \in \mathcal{G}(n, M)$ aleatoriamente com distribuição uniforme, então a pobabilidade do grafo $G_{n.M}$ não conter um C^4 é pequena: $\mathbb{P}\left\{G_{n,M} \not\supseteq C^4\right\} < \varepsilon$, para quaisquer $\varepsilon > 0$, $M \geq n^{4/3}$ e n suficientemente grande. Além disso, se $M \leq cn^{4/3}$, onde c é constante positiva, então $\mathbb{P}\left\{G_{n,M} \not\supseteq C^4\right\} \leq \mathrm{e}^{-aM}$, onde $a > 0$ é constante. Mas, esse fato não garante que todo subgrafo de $G_{n,M}$ com $M' = \beta M$ arestas contenha um C^4, pois $\mathbb{P}\left\{G_{n,M'} \not\supseteq C^4\right\} \leq \mathrm{e}^{-a'M}$, onde $a' = a'(a, \beta) > 0$ é uma constante, e existem por volta de 2^M desses subgrafos.

Nesse caso particular, o de circuito com quatro vértices, Füredi (1994) mostrou que $\mathbb{P}\left\{G_{n,M} \not\supseteq C^4\right\} = o(1)^M$, para todo $M \gg n^{4/3}$. A técnica inventada por Füredi foi mostrar que o número de contra-exemplos para uma determinada propriedade é superexponencialmente pequeno, logo a propriedade quase-certamente não ocorre em nenhum subgrafo de um grafo *típico*.

Um exemplo de família superexponencialmente pequena de contra-exemplos é o resultado de Kohayakawa e Kreuter (1997) que para C^4 pode ser enunciado como segue. Seja $\mathcal{B}(\varepsilon, m, M)$ a família dos grafos bipartidos $B(U, W; E)$, onde $|U| = |W| = m$, com $|E| = M$ arestas e (ε, M)-regulares, isto é, tais que

$$\left| |E(A, B)| - |A||B|\frac{M}{m^2} \right| \leq \varepsilon |A||B|\frac{M}{m^2},$$

para todos $A \subseteq U$ e $B \subseteq W$ com $|A|$, $|B| \geq \varepsilon m$. Denotando por $\mathcal{B}(\varepsilon, m, M; C^4)$ a família dos grafos de $\mathcal{B}(\varepsilon, m, M)$ que não contêm C^4, então *dado* $\alpha > 0$ *existem* $c = c(\alpha)$, $m_0 = m_0(\alpha)$ *e* $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$ *tais que para todo* $m \geq m_0$ *se* $M \geq cm^{4/3}$*, vale que*

$$\frac{|\mathcal{B}(\varepsilon, m, M; C^4)|}{|\mathcal{B}(\varepsilon, m, M)|} \leq \alpha^M.$$

Esse resultado juntamente com o lema de regularidade garante que a probabilidade de subgrafos bipartidos grandes do $G_{n,M}$ não conterem C^4 é superexponencialmente pequena, para M "não muito grande". Logo, $G_{n,M}$ deve conter C^4's de uma maneira robusta, ou seja, todo subgrafo com uma proporção grande das arestas deve conter um circuito; em símbolos $G_{n,M} \to_\beta C^4$.

3. O lema de contagem

Suponhamos que sejam dados inteiros $m > 0$ e $\ell \geq 3$, e um vetor de conjuntos dois-a-dois disjuntos $\mathbf{V}^{(m)} = (V_i)_{i=1}^{\ell}$, cada um de cardinalidade m. No que segue, os índices dos V_i's serão considerados módulo ℓ. Sejam $B > 0$, $C \geq 1$, $D \geq 1$, $\varepsilon \leq 1$, $\rho_0 \leq 1$ reais positivos e $M \geq 1$ inteiro.

Chamamos um grafo F de $(\varepsilon, \rho_0, B, C, D; \mathbf{V}^{(m)}, M) - \text{grafo}$ se

(i) $E(F) = \bigcup_{i=1}^{\ell} E(V_i, V_{i+1})$ e $|E(F)| = M$.

(ii) Para todo $1 \leq i \leq \ell$ os pares (V_i, V_{i+1}) são $(\varepsilon, F; \overline{p})$-regulares, com $\overline{p}$-densidade $\rho_0 \leq d_{\overline{p}}(V_i, V_{i+1}) \leq D$, onde $\overline{p} = Bm^{-1+1/(\ell-1)}$.

(iii) Para todo $U \subseteq V_i$ e todo $W \subseteq V_{i+1}$, onde $1 \leq i < \ell - 1$, tais que $|U| \leq |W| \leq \overline{p}m|U| \leq (\overline{p}m)^{\ell-2}$, temos $e(U, W) \leq C|W|$.

O nosso resultado é:

Teorema 4 (Lema de contagem – Donadelli, 2002) *Dado um inteiro $\ell \geq 3$ e dados reais $\sigma > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \rho_0 \leq 1$, $C \geq 1$ e $D \geq 1$ existem constantes positivas $\varepsilon = \varepsilon(\ell, \sigma, \alpha, \rho_0, C, D) \leq 1$, $B_0 = B_0(\ell, \sigma, \alpha, \rho_0, C, D) > 0$, e $m_0 = m_0(\ell, \sigma, \alpha, \rho_0, C, D)$ tais que para todos inteiros $m \geq m_0$ e $M \geq 1$, e todo real $B \geq B_0$, o seguinte vale. O número de $(\varepsilon, \rho_0, B, C, D; \mathbf{V}^{(m)}, M)$-grafos contendo menos que $\sigma m^{\ell/(\ell-1)}$ circuitos de comprimento ℓ é no máximo*

$$\alpha^M \binom{(\ell+2)m^2}{M},$$

ou seja, é uma família superexponencialmente pequena.

4. Grafos ramsey-minimais

Na introdução vimos que $K^{3,7} \to (C^4, C^4)$. Na verdade, quase todo grafo com n vértices e $\Omega(n^{4/3})$ arestas satisfaz a propriedade "$\to (C^4, C^4)$". Esse é um caso particular de um resultado de Rödl e Ruciński (1995) que pode ser ingenuamente justificado da seguinte maneira: Dado $M \geq An^{4/3}$, para alguma constante $A > 0$, seja $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{n,M}$ um hipergrafo 4-uniforme sobre o conjunto de vértices $[n]$ escolhido aleatoriamente com distribuição uniforme no conjunto de todos hipergrafos 4-uniformes com M arestas. Mergulhamos em cada hiperaresta de $\mathcal{H}$ uma cópia de C^4 arbitrariamente, e denotamos por Γ o grafo resultante.

Agora, escolhemos uma aresta em cada hiperaresta de $\mathcal{H}$ para pintar de azul; assim esperamos destruir a possibilidade de existirem cópias azuis de C^4 nesse grafo Γ. Ainda, podemos esperar que tal subgrafo azul de Γ se "comporte como" $G_{n,\bar{M}}$, onde $\bar{M} \geq \bar{A}n^{4/3}$ e, portanto, a probabilidade desse subgrafo azul conter um circuito C^4 é maior que $1/2$, se a constante $\bar{A} = \bar{A}(A)$ for suficientemente grande. Ou seja, temos a propriedade "$\Gamma \to (C^4, C^4)$".

Rödl e Ruciński (1995) ainda deduzem o corolário: *seja $M = Cn^{4/3}$, onde C é constante. Para todo $t \in \mathbb{N}$, quase todo $G \in \mathcal{G}(n, M)$ é tal que nenhum subgrafo $H \subset G$ com $2 < v(H) \leq t$ satisfaz $m(H) \geq 3/2$*, onde $m(H) = \max\{e(J)/v(J) \colon J \subseteq H,\ v(J) > 0\}$, ou seja, existem grafos localmente esparsos e satisfazendo a propriedade "$\to (C^4, C^4)$".

Seja G tal como no parágrafo acima e vejamos que se H é um subgrafo de G minimal com respeito a propriedade "$\to (C^4, C^4)$", então H deve ter mais que t vértices. Para tal, basta verificarmos que, se $H \to (C^4, C^4)$, então $m(H) > 3/2$. Conseqüentemente, $v(H) > t$. Definimos

$$m_1(H) = \max\left\{\frac{e(J)}{v(J)-1} \colon J \subseteq H,\ v(J) > 1\right\}.$$

Suponha que $m(H) \leq 3/2$. Um resultado de Nash-Williams (veja Diestel, 1997, Teorema 3.5.4) diz que $\lceil m_1(H) \rceil$ é o menor número de florestas em que podemos particionar $E(H)$. Mas, $m_1(H) \leq m(H) + 1/2 \leq 2$, ou seja, podemos 2-colorir as arestas de H de modo que as cores induzem florestas em H, isto é, $H \not\to (C^4, C^4)$.

A moral da história é que para todo $t \in \mathbb{N}$ existem grafos com mais que t vértices e que são minimais com respeito à propriedade "$\to (C^4, C^4)$".

Um par de grafos (G, H) que satisfaz essa propriedade é chamado de *ramsey-infinito*. Por exemplo, considerando agora o caminho com três vértices, denotado por P^3, então $C^{2\ell+1} \to (P^3, P^3)$, logo a família dos circuitos ímpares mostra que existem infinitos grafos que são ramsey-minimais com relação ao par (P^3, P^3).

Por outro lado, se m e n são números ímpares, então o par de estrelas $(K^{1,m}, K^{1,n})$ com m e n arestas, respectivamente, é *ramsey-finito* conforme mostrou Burr et al. (1981b).

Uma importante conjectura foi proposta em 1980:

Conjectura 5 (Burr et al., 1981a) *O par (G, H) é ramsey-infinito a menos que ambos os grafos sejam estrelas de ordem par ou pelo menos um dos grafos contém um K^2 como componente conexa.*

Faudree et al. (1997) observam que:

"um caso interessante da conjectura acima é quando G é um circuito e H é 2-conexo. Até o momento nenhuma técnica é conhecida para provar que tal par é ramsey-infinito."

Nosso resultado diz respeito a famílias de grafos ramsey-minimais com relação ao par (C^ℓ, H), onde H é um grafo 2-conexo tal que todo circuito de comprimento pelo menos ℓ contém uma corda. O resultado que demonstramos, usando o lema de contagem com a técnica de Füredi e o lema de regularidade, é o seguinte:

Teorema 6 (Bollobás et al., 2002) *Dado um inteiro $\ell \geq 4$, se H é 2-conexo e não contém circuito induzido de comprimento pelo menos ℓ, então o par (C^k, H) é ramsey-infinito para todo $k \geq \ell$.*

5. Um resultado sobre densidade de circuitos em grafos orientados

Usamos os lemas de contagem e regularidade com a técnica de Füredi para demonstrar um resultado de densidade com respeito a circuitos em grafos orientados esparsos. Esse resultado para $\vec{C}^4$ diz que existe $\vec{G}$ com n vértices e $O(n^{4/3})$ arcos e que contém $\vec{C}^4$ de maneira robusta, para todo n suficientemente grande. A prova segue as observações na Seção 2.2 especializadas para tratar de grafos orientados.

Escrevemos $\vec{G}^n$ para um grafo orientado com n vértices. O nosso resultado é o seguinte:

Teorema 7 (Donadelli e Kohayakawa, 2002) *Dados um inteiro $\ell \geq 3$ e um real $\beta > 0$ existe um grafo orientado $\vec{G}^n$, para todo n suficientemente grande, com $O(n^{1+1/(\ell-1)})$ arcos e cintura orientada ℓ tal que $\vec{G}^n \to_{\frac{1}{2}+\beta} \vec{C}^\ell$.*

Esse resultado é o melhor possível no seguinte sentido: qualquer grafo orientado $\vec{G}$ contém um subgrafo sem circuitos orientados e com pelo menos metade de seus arcos, como pode ser visto tomando-se uma ordem total qualquer no conjunto de vértices $V(\vec{G})$.

Além disso, deduzimos desse resultado que existem infinitos contra-exemplos para uma generalização de uma conjectura de Woodall sobre transversais de circuitos em grafos orientados planares.

Corolário 8 (Donadelli e Kohayakawa, 2002) *Para todo n suficientemente grande existe um grafo orientado $\vec{G}^n$ com densidade $O(n^{-1+1/(\ell-1)})$ cuja cintura orientada é maior que a cardinalidade máxima de uma família de transversais de circuitos duas-a-duas disjuntas.*

Queremos deixar claro que já era conhecido um contra-exemplo "ad hoc" devido a Thomassen para tal conjectura. A principal diferença é que o contra-exemplo de Thomassen é um torneio construído sobre 15 vértices, ou seja é um grafo orientado com todas as arestas possíveis, enquanto que nossos contra-exemplos são muito esparsos e mostram que tais contra-exemplos são abundantes.

Para a conjectura de Woodall recomendamos a seção de problemas ("Open problems $\to$ Connectivity and cuts $\to$ 12. Woodall's conjecture") no sítio `http://www.cs.elte.hu/egres` do grupo "The Egerváry Research Group" (EGRES) liderado pelo conceituado professor András Frank, bastante completo e com referências bibliográficas sobre o assunto (inclusive o nosso trabalho, Donadelli e Kohayakawa, 2002).

6. O número de Ramsey para arestas linear de uma família de grafos

Dado um grafo H, definimos $\hat{r}(H)$ como o menor número de arestas M tal que existe um grafo Γ com M arestas e ramsey para o par (H, H), isto é, em símbolos,

$$\hat{r}(H) = \min\left\{e(\Gamma)\colon \Gamma \to (H, H)\right\}.$$

Denotando por $\Delta(H)$ o grau máximo de um vértice de H, por $r(H)$ o menor n tal que $K^n \to (H, H)$, e por $\lambda(H)$ o menor número de vértices cobrindo todas as arestas de H, o número de ramsey para arestas do grafo H satisfaz

$$\Delta(H)\frac{\lambda(H)}{2} \leq \hat{r}(H) \leq \binom{r(H)}{2}.$$

O limitante superior é óbvio e a igualdade vale para $H = K^n$. O limitante inferior para $\hat{r}(H)$ dado acima tem o seguinte argumento (Beck, 1983): seja Γ tal que $\Gamma \to (H, H)$. Definimos a seguinte 2-coloração das arestas de Γ: as arestas que têm algum extremo de grau $\Delta(H)$ recebem a cor azul, caso contrário, vermelha. Logo, pela escolha de Γ, devemos ter uma cópia de $H \subseteq \Gamma$ com todas as arestas azuis. Como toda aresta dessa cópia de H tem pelo menos um extremo com grau $\Delta(H)$ em Γ, temos que $e(\Gamma) \geq \Delta(H)\lambda(H)/2$. Ainda, notamos que como $2^{n/2} < r(K^n) < 4^n$ temos que $\hat{r}(K^n)$ é exponencial em n porém, para estrelas esse número de ramsey é linear; de fato $\hat{r}(K^{1,n}) = 2n - 1$.

Uma *subdivisão* de um grafo H é o grafo obtido a partir de H substituindo cada aresta $xy \in E(H)$ por um $x - y$ caminho, sendo que arestas distintas dão origem a caminhos disjuntos nos vértices internos. Denotamos por $H^{(s)}$ a subdivisão por caminhos de comprimento $s \in \mathbb{N}$. O nosso resultado é o seguinte:

Teorema 9 (Donadelli, 2002) *Dado um grafo H, existem constantes positivas C_1 e C_2 e existe um grafo Γ^n, para todo n suficientemente grande, com $O(n)$ arestas e tal que $\Gamma^n \to (H^{(s)}, H^{(s)})$ para todo $C_1 \log n \leq s \leq C_2 n$.*

Esse teorema resolve parcialmente uma conjectura divulgada no SODA'2002 (Pak, 2002). O nosso resultado ainda não foi submetido para publicação pois esperamos conseguir uma resposta mais completa à conjectura mencionada.

Para demonstrar o resultado enunciado acima, também fazemos uso do lema de regularidade. A nossa técnica é mostrar que pares regulares são bons expansores e portanto contêm caminhos longos e usar os pares dados pelo lema de regularidade para encontrar uma subdivisão do grafo H contida num grafo pseudo-aleatório G^n com $O(n)$ arestas.

References

Beck, J. (1983). On size Ramsey number of paths, trees, and circuits. I. *J. Graph Theory*, 7(1):115–129.

Bollobás, B., Donadelli, J., Kohayakawa, Y., and Schelp, R. (22002). Ramsey minimal graphs. *Journal of the Brazilian Computer Society*, 3(7):27–37. Special issue dedicated to Jayme Szwarcfiter.

Burr, S. A., Erdős, P., Faudree, R. J., Rousseau, C. C., and Schelp, R. H. (1981a). Ramsey-minimal graphs for matchings. In *The theory and applications of graphs (Kalamazoo, Mich., 1980)*, pages 159–168. Wiley, New York.

Burr, S. A., Erdős, P., Faudree, R. J., Rousseau, C. C., and Schelp, R. H. (1981b). Ramsey-minimal graphs for star-forests. *Discrete Math.*, 33(3):227–237.

Diestel, R. (1997). *Graph theory*. Springer-Verlag, New York.

Donadelli, J. (2002). *Resultados de Ramsey e de densidade para grafos pseudo-aleatórios esparsos*. PhD thesis, IME–USP. Disponível em `http://www.inf.ufpr.br/~jair/notas.html`.

Donadelli, J. and Kohayakawa, Y. (2002). A density result for random sparse oriented graphs and its relation to a conjecture of Woodall. *The Eletronic Journal of Combinatorics*, 9(#R45). `http://www.combinatorics.org`.

Faudree, R. J., Rousseau, C. C., and Schelp, R. H. (1997). Problems in graph theory from Memphis. In *The mathematics of Paul Erdős, II*, pages 7–26. Springer, Berlin.

Füredi, Z. (1994). Random Ramsey graphs for the four-cycle. *Discrete Math.*, 126(1-3):407–410.

Kohayakawa, Y. and Kreuter, B. (1997). Threshold functions for asymmetric Ramsey properties involving cycles. *Random Structures Algorithms*, 11(3):245–276.

Pak, I. (2002). Mixing time and long paths in graphs. In *"Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium On Discrete Mathematics (SODA-02)*, 321–328.

Ramsey, F. (1930). On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.*, 48:264–286.

Rödl, V. and Ruciński, A. (1995). Threshold functions for Ramsey properties. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(4):917–942.

Szemerédi, E. (1975). On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith.*, 27:199–245.

Szemerédi, E. (1978). Regular partitions of graphs. *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976).*, 399–401.

van der Waerden, B. L. (1927). Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 15:212–216.