

Support de cours

COMMANDE DES SYSTEMES CONTINUS

Intervenants :

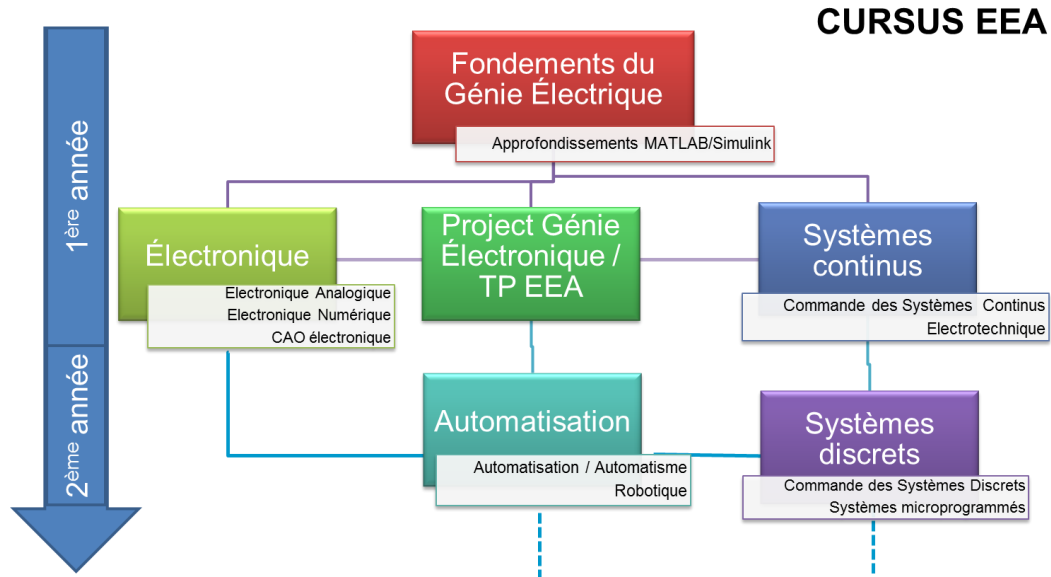
Adriana Aguilera Gonzalez – a.aguilera-gonzalez@estia.fr

Jessye Dos santos – j.dossantos@estia.fr

Table des matières

Introduction générale.....	7
1. Modélisation du système à asservir	14
1.1. Représentation d'un système	14
1.2. Modèle analytique du système	22
1.3. Modèle empirique du système	24
1.3.1. Réponse indicielle.....	24
1.3.2. Réponse fréquentielle	29
2. Etude des performances du système à asservir.....	35
2.1. Analyse de la fonction de transfert obtenue.....	35
2.2. Analyse des performances	37
2.2.1. Stabilité.....	38
2.2.2. Précision	42
2.2.4. Rapidité.....	45
3. Mise en place d'un correcteur	47
3.1. Schéma bloc avec correcteur	47
3.2. Etude de 4 correcteurs	49
3.2.1. P.....	49
3.2.1. PD	50
3.2.2. PI.....	51
3.2.3. PID	52
3.2.4. Détermination des paramètres des correcteurs	54
3.2.5. Bilan	56
4. Réalisation et conception du correcteur analogique	58
4.1. Schéma électronique du correcteur.....	58
4.2. Calcul des valeurs des composants	60
4.2.1. P.....	60
4.2.2. PD	61
4.2.3. PI.....	63
4.2.4. PID	65

Objet du cours



Le module Systèmes Continus s'inscrit dans le cursus EEA. Il est composé d'un cours d'Electrotechnique et d'un cours de Commande des Systèmes Continus.

Les systèmes discrets et les systèmes séquentiels (automatisme, automate, grafccets) seront étudiés en 2^{ème} année.

L'objectif de ce support est d'apporter les principales notions d'automatique à connaître à l'issue du cours « Commande des Systèmes Continus » de 1^{ère} année.

Objectifs :

- Etudier les systèmes linéaires continus invariants dans le temps.
- Connaître les notions liées aux systèmes asservis.
- Identifier les principaux outils pour l'étude du comportement des systèmes linéaires.
- Identifier les actions basiques de régulation et les implémenter sur des systèmes linéaires.

A l'issue du module, tout étudiant doit :

- Être capable de comprendre et de représenter le fonctionnement d'un système automatisé : asservissement, régulation, suivi.
- Être capable d'évaluer les performances d'un système (stabilité, précision...).
- Être capable d'améliorer les performances d'un système (régulation, correction, réglages...).

	<p align="center">ESTIA 2021 Année Scolaire 2018-2019</p>	
Support de cours		

Références

GRANJON, Yves. Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'états. Dunod, 2015.

GENTIL, Sylviane. Principes des chaines de régulation. Ed. Techniques Ingénieur, 2003.

FABERT, Jean-Yves. Automatisme et automatique : sciences industrielles : cours et exercices corrigés. Ellipses Ed. Marketing, 2003.

http://www4.ac-nancy-metz.fr/cpge-pmf-pinal/Cours_TD_SII/Elec/cours_asservissement.pdf

www.specialautom.net

<http://cerig.pagora.grenoble-inp.fr/tutoriel/automatique>

Préambule : je m'évalue

Ce tableau récapitule l'ensemble des notions à connaître.

Evaluez vos connaissances au démarrage de ce module puis à la fin du module en mettant une note de 1 à 5.

1. Je n'ai jamais entendu parler de cette notion.
2. J'ai de vagues souvenirs... et ils ne sont pas très bons.
3. Avec du travail, je vais vite me remettre à niveau.
4. Je connais le sujet et je suis confiant.
5. J'ai mis en pratique ces notions (durant un stage par exemple) : je vais pouvoir aider les autres.

		Avant	Après
Vocabulaire et notions de base			
	Je sais représenter un système sous forme de schéma bloc.		
	Je sais appliquer la transformée de Laplace à une équation différentielle pour déterminer la fonction de transfert d'un système.		
	Je sais identifier les principaux composants et signaux d'une boucle de commande, je connais leur nom (contrôleur, procédé, référence / consigne, erreur, signal de commande, variable à contrôler...).		
	Je connais les notions de Boucle Ouverte (BO), Boucle Fermée (BF) et Chaîne Directe (CD).		
	Je comprends les notions de système SISO, linéarité et système stationnaire.		
	Je connais la différence entre régulation et asservissement.		
Modélisation de systèmes physiques			
	Je fais la différence entre modèle de simulation et modèle de commande.		
	Je sais écrire des équations différentielles pour des systèmes mécaniques, électriques, thermiques...		
	Je sais caractériser une fonction de transfert : définition de la fonction de transfert, pôles, zéros, gain statique.		
Réponse temporelle d'un système			
	Je comprends le concept de stabilité et je sais donner les conditions de stabilité. Je sais caractériser la réponse indicielle.		

Support de cours

	Je sais analyser le régime transitoire : concept, caractéristiques (dépassement, temps de réponse, temps de retard).		
	Je sais analyser le régime permanent : concept, erreur statique en fonction du nombre d'intégrateurs et du type d'entrée.		
	Je sais caractériser les systèmes du 1 ^{er} ordre : paramètres caractéristiques (constante de temps, facteur d'amortissement, pulsation naturelle) et lien avec les caractéristiques du transitoire.		
Contrôleurs P, PI, PID			
	Je comprends l'influence de chaque action.		
	Je sais réaliser un réglage analytique, basé sur le modèle de commande.		

Introduction générale

Les premiers systèmes automatiques ont été conçus il y a plus de 2000 ans. Néanmoins, le terme automatique a été employé pour la première fois en 1914. L'automatique moderne ne date que d'après 1950.

On définit l'automatique comme la science et technique permettant la conception de système autonome. Elle traite de la modélisation, de l'analyse, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques.

Le terme automatisme représente les systèmes de commande automatique.

On retrouve de nombreux systèmes automatisés dans des domaines différents comme le montre la Figure 1.

APPLICATIONS AÉRIENNES:

- Pilote automatique
- Automatisation des systèmes de navigation
- Stabilisation des paramètres de vol

APPLICATIONS POUR LES VOITURES:

- ABS (Anti-Blocking System)
- ESP (Electronic Stability Program): contrôle de trajectoire
- Régulateur de vitesse
- Climatisation automatique
- Régulation de l'injection moteur

APPLICATIONS INDUSTRIELLES:

- Robotique (bras robot), domotique (+écolo)...
- Automatisation de la chaîne de production
- Asservissement par vision (robots, drones)
- Régulation de température, pression, niveaux, etc.
- Transports : véhicules électriques

Figure 1 : Exemples d'applications.

La Figure 2 représente un système automatisé. Il est composé d'une partie commande et d'une partie opérative.

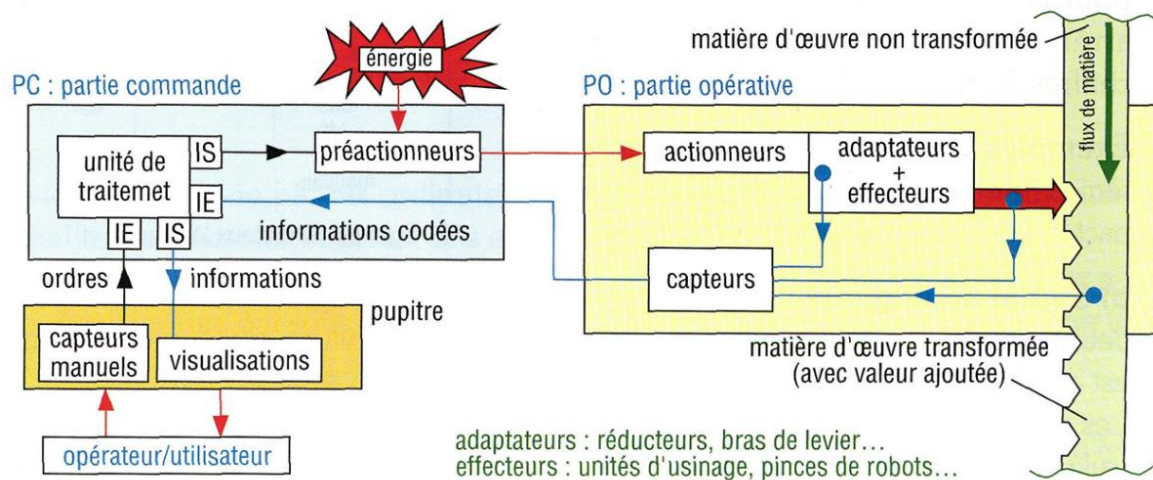


Figure 2 : Système automatisé.

Partie commande : elle reçoit des informations ou des ordres du milieu environnant et du processus commandé. Elle émet également des ordres et informations vers le système à commander et l'environnement. Elle assure le pilotage et le contrôle du système. Elle est composée d'une unité de traitement. C'est le cerveau de l'automatisme.

Exemples : ordinateur, processeur ou microprocesseur, automate programmable (API), séquenceurs.

Les interfaces (IE = Interfaces d'Entrée, IS = Interfaces de Sortie) sont employées pour l'échange des données avec les autres éléments ainsi que la protection de l'unité.

On retrouve également une partie pré-actionneurs qui gère la distribution de l'énergie vers les actionneurs sur ordre de l'unité de traitement.

Partie opérative : elle comprend le système à commander. Elle effectue des opérations en produisant des mouvements, de la chaleur, de la lumière, des sons, etc. Elle est constituée d'une partie actionneur qui reçoit l'énergie distribuée par les pré-actionneurs.

Exemples : vérins, moteurs, vannes...

La partie capteur permet de surveiller, de contrôler, de mesurer et d'informer l'unité de traitement sur l'état et l'évolution de l'automatisme.

Il est bien évidemment possible d'avoir plusieurs partie opérative et partie commande. L'automatique s'intéresse à la partie commande des systèmes.

Dans ce cours nous allons travailler avec des **Systèmes Linéaires Continus Invariants (SLCI)**. La définition de ce type de système est donnée comme suit :

Système Continu : les variations des grandeurs physiques entrées et sorties sont des fonctions continues du temps. On peut donc définir ces grandeurs à tout instant. La plupart des systèmes physiques, du point de vue macroscopique, sont continus.

Système Linéaire : Un système est linéaire, si et seulement si, il satisfait au principe de superposition :

$$\text{Si pour } e_1 \text{ (resp. } e_2) \text{ correspond une sortie } s_1 \text{ (resp. } s_2) \text{ alors}$$

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 = k_1 s_1 + k_2 s_2$$

Ce principe de superposition est très utile car il va permettre, connaissant la réponse du système à des sollicitations simples, de déterminer par additivité la réponse du système à des sollicitations plus complexes. La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'application. Cependant dans de nombreux cas, ils ne sont utilisés que sur une plage réduite de leur domaine.

Linéariser un système consiste à étudier le comportement d'un système autour d'un point de fonctionnement appelé point d'équilibre.

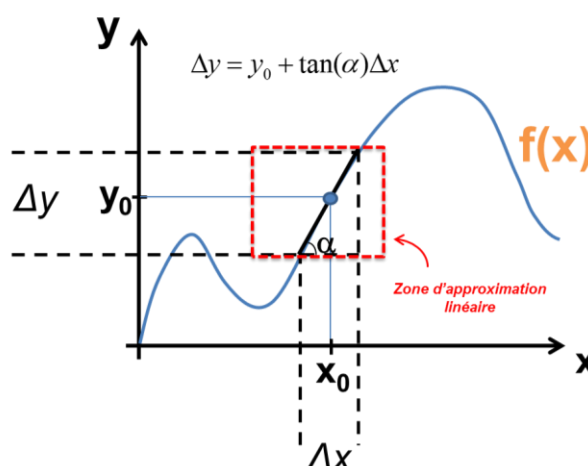
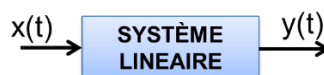


Figure 3 : Linéarisation.

Système Invariant : On suppose que les caractéristiques du système ne varient pas au cours du temps. On dit que le système ne vieillit pas.

Pour un système linéaire et invariant, la relation entre grandeur d'entrée et grandeur de sortie est donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants (Figure 4).



$$a_0 x(t) + a_1 \frac{dx}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n x}{dt^n} = b_0 y(t) + b_1 \frac{dy}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m y}{dt^m}$$

Figure 4 : Equation différentielle linéaire.

On parle de système causal si $m \geq n$.

Pour un **système causal**, toutes les valeurs sont nulles avant le début de l'expérience (correspondant à l'application de la première consigne). Un système physique réel est causal ou vérifie le principe de causalité.

De manière globale, un système automatique est constitué de :

- Variables : entrées, sorties, variables internes...
- Paramètres : constantes du système.
- Relations algébriques ou différentielles.

Dans un système automatique, des actions sur le système (entrées) sont effectuées dans le but d'obtenir des objectifs donnés (sorties).

Les signaux d'entrées sont indépendants du système et peuvent être commandables (consignes) ou non commandables (perturbations).

Les signaux de sorties sont dépendants du système et du signal d'entrée. Pour évaluer les objectifs, ces signaux doivent être observables par l'utilisation de capteurs.

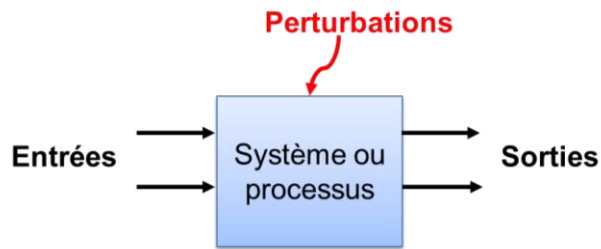


Figure 5 : Schéma d'un système.

Les systèmes peuvent être non asservis. Les sorties sont observées mais n'influencent pas le fonctionnement du système. Le système travaille alors en boucle ouverte ou en chaîne directe. De nombreux systèmes mécaniques sont non-bouclés.

Exemple : les obus. On observe sa trajectoire sans pouvoir la modifier.

Ces systèmes non asservis ont des performances limitées. La dynamique est mal maîtrisée. On ne peut agir sur le système lors d'une perturbation. Enfin si la consigne est dépassée, il est impossible de corriger le système.

Au contraire, si les informations recueillies sont utilisées comme entrées, le système est alors asservi. Il fonctionne en boucle fermée. La grandeur de sortie est alors comparée à la grandeur d'entrée. La différence est appelée **écart ou erreur**.

Exemple : les missiles.

Ce signal **écart** est adapté et amplifié afin de commander la partie opérative. L'évolution de la grandeur de sortie est surveillée au moyen d'un capteur qui la transforme en grandeur image appelée **retour**. Cette grandeur image doit être de la même nature et à la même échelle que la grandeur d'entrée.

Il existe deux types de systèmes asservis :

- **Les régulations** : on souhaite éliminer les effets des perturbations. Les systèmes sont destinés à maintenir en sortie une grandeur constante pour une consigne constante face aux perturbations.
- **Les systèmes suiveurs dits asservissements** : on souhaite que la sortie suive l'entrée. La consigne varie au cours du temps mais les grandeurs de perturbations n'existent pas ou sont très peu influentes. L'objectif est alors d'ajuster le signal de sortie au signal d'entrée.

La distinction est importante car les réglages ne sont en général pas les mêmes. En asservissement, les réglages dépendent de la dynamique propre du système alors qu'en régulation ils dépendent surtout des perturbations.

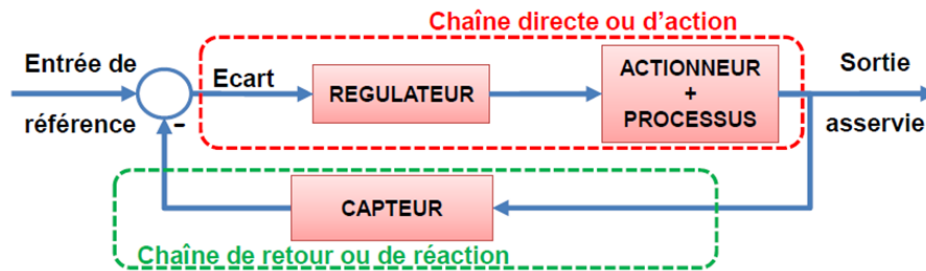


Figure 6 : Système asservi.

La Figure 6 montre une représentation d'un système asservi. Cette représentation fait intervenir deux chaînes. La chaîne d'action et la chaîne de retour appelée aussi chaîne d'information. Les éléments qui composent un système asservi sont :

- ⇒ **Le régulateur** (comparateur + correcteur) élabore l'ordre de commande à partir de la consigne d'entrée et de la mesure. C'est l'organe « intelligent ». Notons que toutes les grandeurs manipulées à ce niveau sont des grandeurs informationnelles. C'est l'automaticien qui le définit vis-à-vis des performances attendues et des caractéristiques du système.
- ⇒ **L'actionneur** apporte la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche (moteur, vérin, vanne).
- ⇒ **Le processus physique** évolue suivant des lois qui lui sont propres. Sa sortie peut fluctuer en fonction des perturbations extérieures, en général imprévisibles.
- ⇒ **Le capteur** délivre, à partir de la sortie, une grandeur caractérisant l'observation. Il transforme le signal de sortie (température, position...) en grandeur comparable au signal d'entrée. Outre sa précision, le capteur doit délivrer une information quasi instantanée par rapport aux évolutions temporelles de la sortie.

Les signaux intervenant dans un système d'asservissement sont :

- ⇒ **Entrée ou consigne** : valeur que l'on désire atteindre. C'est un signal extérieur que l'on applique au système. C'est la grandeur réglant le système.
- ⇒ **Sortie régulée** : signal qui représente le phénomène physique que doit régler le système. C'est la raison d'être du système.
- ⇒ **Perturbation** : fait référence à tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Ces signaux excitent le processus de manière indésirable et altèrent le signal de sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations.
- ⇒ **Ecart ou Erreur** : différence entre la consigne et la sortie. Cette mesure ne peut être réalisée que sur des grandeurs comparables. On réalisera donc en général la comparaison entre la consigne et la mesure de la sortie. L'observation de ce signal informe sur les performances du système asservi. L'erreur peut être positive ou négative.

En fonction de l'**écart** entre la valeur de référence et la mesure du **capteur** correspondante, le **régulateur** agit et délivre un signal de **commande** dirigé vers l'**actionneur** pour rendre la valeur de mesure aussi proche que possible de la valeur de référence.

Le rôle d'un automaticien est de concevoir un Système de Régulation Automatique (SRA) ou régulateur qui soit :

- **Stable** : la grandeur de sortie doit converger vers une valeur finie si le signal d'entrée est aussi limité.
- **Précis** : la grandeur à mesurer doit être la plus proche de celle désirée de l'état statique.
- **Rapide** : il doit répondre rapidement à une excitation (signal d'entrée).

Pour cela il faut :

1. Bien analyser le procédé (modélisation).
2. Formuler le problème de commande : poursuite et/ou rejet de perturbation. On en déduit un schéma bloc avec fonction de transfert, signaux...
3. Type de commande disponible et support d'implémentation (numérique, analogique...).
4. Performances souhaitées en boucle fermée (bande passante, amortissement).
5. Concevoir le correcteur / régulateur (synthèse d'un correcteur).
6. Validation en simulation et application au système réel.

1. Modélisation du système à asservir

1.1. Représentation d'un système

A. Introduction

L'élaboration complète d'un SRA nécessite de nombreuses phases d'essais-retours avant d'obtenir le bon paramétrage réalisant les performances attendues.

Dans l'industrie, le système à contrôler n'est souvent pas accessible pour mener ces phases en conditions réelles. De plus, la mise en place d'un correcteur inapproprié pourrait engendrer des dommages sur le système mais également sur les personnes.

Le but de la **modélisation** est de pouvoir créer une simulation du système et de tester les différents contrôleurs pour élaborer le meilleur avant une implémentation en réel. L'implémentation et la conception d'un système de régulation commence donc par la modélisation du système à contrôler.

La **modélisation** consiste en l'ensemble des procédures permettant d'obtenir un modèle. **Modéliser un système** revient à être capable de prédire le comportement du système. Un modèle n'est jamais exact. Il dépend du système et de son modélisateur.

Le **comportement dynamique** d'un système peut se représenter mathématiquement comme un **modèle**. Il est nécessaire alors d'établir les relations existantes entre les entrées (variables de commande) et les sorties (variables d'observation).

Il sera possible avec le modèle du système, de calculer la sortie si **l'entrée et les conditions initiales sont connues**.

Il existe différents modèles. Leur nature va dépendre de plusieurs paramètres :

- De la nature des signaux. Ceux-ci peuvent être **déterministes**. Les variables évoluent de façon continue. Ainsi, à une valeur donnée de l'entrée correspond une seule valeur de sortie.
A l'inverse, les variables **stochastiques** évoluent de façon aléatoire. On attribue à une valeur d'entrée une espérance mathématique de la sortie. On obtient alors uniquement une estimation de la sortie. Dans notre étude, les signaux seront déterministes.
- Des caractéristiques du système : la nature, l'invariance, la linéarité... On rappelle que nous travaillerons avec des systèmes **SLCI**. Si le système a été linéarisé autour d'un point de fonctionnement, le modèle ne sera alors valable uniquement en ce point.
Le système peut être **monovarié SISO** (Single Input Single Output) ou **multivariable MIMO** (Multiple Input Multiple Output). Nous nous intéresserons uniquement aux systèmes SISO.

On distingue trois phases dans la modélisation :

1. Isoler le système étudié : pour cela il faut remplacer son environnement par un ensemble de relation d'entrées/sorties ayant des relations équivalentes.
2. Effectuer une décomposition en sous-systèmes couplés par des relations.
3. Etablir un modèle de connaissance (lois de la physique, étude analytique) ou de comportement (identification, étude empirique) pour chaque sous système.

La création d'un modèle théorique d'un système complexe est difficile. Néanmoins, un modèle utile obtenu représente au moins 75% du travail.

En effet, le modèle va servir à analyser le système, ses propriétés et performances puis de synthétiser le correcteur suivant un cahier des charges et les performances désirées.

Un modèle proche du système réel permettra donc de limiter le nombre d'essais-retour avant l'obtention du correcteur adapté.

Pour modéliser le système, nous avons besoin d'un outil : **la transformée de Laplace**.

B. Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est utilisée pour de nombreuses applications.

Son intérêt fondamental est de transformer des opérations différentielles en opérations algébriques.

Elle permet de définir les fonctions de transfert, analyser les performances et construire des correcteurs sans avoir à résoudre les équations différentielles.

Pour rappel, la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ continue, nulle pour $t < 0$ et bornée est donnée par la définition suivante :

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \text{ avec } p = \sigma + j\omega$$

Où p est la variable de Laplace. Dans les notations anglo-saxonne p est remplacée par s .

Nous garderons la notation p pour la suite du document.

Sa transformée inverse se déduit par :

$$f(t) = L^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p) e^{pt} dp$$

Fort heureusement, nous ne chercherons pas à calculer directement les transformées de Laplace à partir des définitions précédentes.

Nous allons utiliser des transformées dites usuelles ainsi que différents théorèmes pour résoudre la plupart des problèmes simples que l'on rencontre habituellement.

Les transformées usuelles sont celles des signaux de tests utilisés comme entrées du système. Le Tableau 1 donne les transformées **à connaître** de ces signaux.

Tableau 1 : Transformées usuelles.

Signal	Equation	Laplace
Dirac $\delta(t)$ / Impulsion	$\delta(t) = 0 \forall t \neq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$	1
Echelon	$f(t) = A \text{ pour } t \geq 0$ $f(t) = 0 \text{ sinon}$	$\frac{A}{p}$
Rampe	$f(t) = A.t \text{ pour } t \geq 0$ $f(t) = 0 \text{ sinon}$	$\frac{A}{p^2}$
Sinus	$f(t) = f_0 \sin(\omega t + \varphi) \text{ pour } t \geq 0$ $f(t) = 0 \text{ sinon}$	$f_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
Cosinus	$f(t) = f_0 \cos(\omega t + \varphi) \text{ pour } t \geq 0$ $f(t) = 0 \text{ sinon}$	$f_0 \frac{p}{p^2 + \omega^2}$

 ESTIA 2021 Année Scolaire 2018-2019	 CCI BAYONNE PAYS BASQUE <i>Euskal Herri</i>
Support de cours	

Différentes propriétés et théorèmes vont également nous permettre de résoudre les problèmes.

Linéarité : $L(Af_1(t) + Bf_2(t)) = AF_1(p) + BF_2(p)$

Dérivation : $L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p)$ avec les Conditions Initiales (CI) nulles.

Intégration : $L\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(p)}{p}$

Facteur d'échelle : $L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$

Théorème de l'avance : $L(e^{-at}f(t)) = F(p + a)$

Théorème du retard : $L(f(t - \tau)) = e^{-\tau p} F(p)$

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$

Théorème de la valeur finale : $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

De même que l'on ne calcule pas directement la transformée via sa définition, on ne va pas retrouver une fonction temporelle à partir de sa transformée de Laplace en appliquant la définition. Le but est de réutiliser le Tableau 1.

Pour cela, il est nécessaire de réussir à « formater » la fonction que l'on souhaite inverser pour faire apparaître ces fonctions usuelles et pouvoir utiliser les théorèmes précédents.

L'une des techniques que vous devez connaître est la décomposition en éléments simples. Le but de cette technique est de passer d'un produit de facteurs à une somme et de pouvoir utiliser la propriété de linéarité avec les fonctions usuelles.

Illustrons cette technique par un exemple. Nous cherchons à décomposer en éléments simples la fraction suivante :

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)^2((p-c)^2+d^2)} = \frac{A}{p-a} + \frac{B}{p-b} + \frac{C}{(p-b)^2} + \frac{Dp+E}{(p-c)^2+d^2}$$

Il faut alors trouver les valeurs de A, B, C, D, E en mettant sur le même dénominateur puis en prenant des valeurs particulières pour p (p=0, p=a...). Dès lors, en utilisant le Tableau 1, on peut identifier des échelons, rampe et fonctions trigonométriques et « retrouver » la fonction de départ.

Ces différents outils mathématiques vont pouvoir être appliqués sur notre système pour élaborer le modèle et l'analyser.

C. Représentation d'un système

Considérons un SLCI décrit par l'équation différentielle suivante où $x(t)$ représente l'entrée du système et $y(t)$ sa sortie.

$$a_0x(t) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} = b_0y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m}$$

En prenant les CI nulles, on a en Laplace :

$$X(p)(a_0 + a_1p + \dots + a_np^n) = Y(p)(b_0 + b_1p + \dots + b_mp^m)$$

Avec $X(p)$ transformée de Laplace de $x(t)$ et $Y(p)$ celle de $y(t)$.

D'où :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_0 + a_1p + \dots + a_np^n}{b_0 + b_1p + \dots + b_mp^m}$$

Cette fraction rationnelle de la sortie Y sur l'entrée X est appelée **fonction de transfert** du système. Elle caractérise le système indépendamment de l'entrée appliquée et des CI. Elle permet de modéliser le système et donc d'étudier ses performances. C'est l'élément central de l'étude des asservissements.

Regardons maintenant comment représenter ce système via sa fonction de transfert.

Soit $H(p)$ la fonction de transfert d'un système décrit par une équation différentielle. Le système peut être représenté sous forme de schéma bloc (Figure 7) dans le domaine de Laplace.

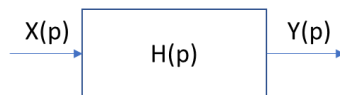


Figure 7 : Schéma bloc.

Afin de représenter le système il faut :

- Délimiter les contours de notre système.
- Identifier les grandeurs d'entrée de notre système.
- Identifier les grandeurs de sortie de notre système.
- Représenter le système sous forme de schéma bloc.

Il est possible dans certains cas que la phase de délimitation du système soit compliquée et différente suivant les points de vue.

Par exemple, s'il on considère l'étude d'un four, il est possible de tenir compte uniquement du four ou d'inclure l'actionneur (résistance) voire les pièces à cuire. La représentation du système sera alors différente tout comme son étude. Notons d'ailleurs que les éléments d'intérêt pour l'automaticien n'englobent pas forcément tout le système physique.

Les schémas blocs peuvent être également utilisés pour tracer le schéma fonctionnel d'un système asservi dans le domaine de Laplace.

On rappelle que, dans un système asservi, la sortie est réinjectée comme entrée. C'est ce type de système qui est au cœur de l'étude de ce cours.

Nous allons vouloir réinjecter la sortie en entrée pour pouvoir commander le système vis-à-vis d'une consigne.

Nous allons devoir obtenir les FT de chaque élément de la Figure 6 afin de représenter l'asservissement complet.

Le schéma bloc de la Figure 8 représente un asservissement du système. $G_2(p)$ et $G_1(p)$ peuvent, par exemple, représenter les FT du système et de son actionneur.

Les **branches** représentent les variables, les **blocs** sont les transmittances.

Les **sommateurs** et **comparateurs** additionnent ou soustraient algébriquement les variables.

Les **jonctions** sont les points de prélèvement qui servent à mesurer les valeurs des variables.

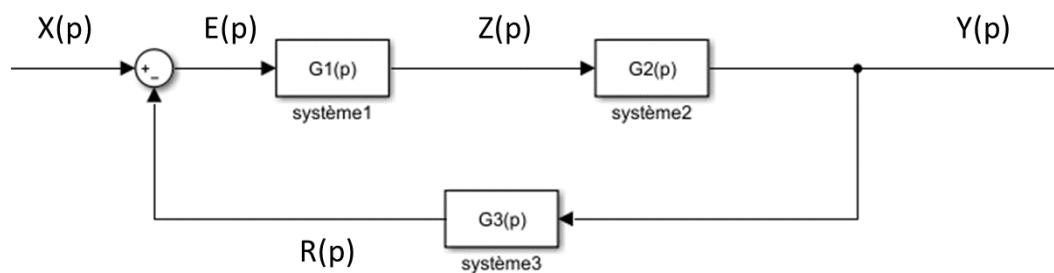


Figure 8 : Schéma bloc d'un système asservi.

On a alors :

$$\begin{aligned} E(p) &= X(p) - R(p) & Y(p) &= G_2(p)Z(p) & Z(p) &= G_1(p)E(p) \\ R(p) &= G_3(p)Y(p) \end{aligned}$$

$$d'où : Y(p) = G_2(p) G_1(p)E(p)$$

De cette équation, on peut simplifier la Figure 8 pour obtenir la **forme canonique** suivante :

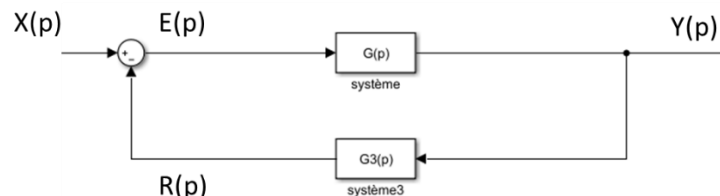


Figure 9 : Forme canonique.

$$\begin{aligned} E(p) &= X(p) - R(p) & Y(p) &= G(p)E(p) & R(p) &= G_3(p)Y(p) \\ d'où : Y(p) &= G(p)(X(p) - R(p)) = G(p)(X(p) - G_3(p)Y(p)) \end{aligned}$$

$$On\ en\ déduit : R(p) = G_3(p) G(p)E(p) \text{ et } Y(p)(1 + G_3(p)G(p)) = G(p)X(p)$$

Afin de se ramener à des formes plus simples, on exploite des schémas blocs équivalents (Figure 10) notamment pour se ramener à une forme canonique à retour unitaire (Figure 11). On tente souvent de se ramener à ce type de forme pour faciliter l'analyse.



Figure 10 : Algèbre des schémas blocs.

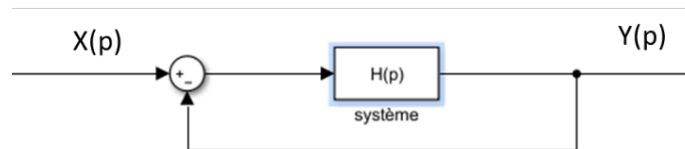


Figure 11 : Retour unitaire.

Maintenant que nous avons vu le concept de schéma bloc, il est nécessaire tout d'abord de déterminer la fonction de transfert $H(p)$ du système. Connaître la FT d'un système permet de déterminer le comportement et les performances de celui-ci.

Nous allons donc modéliser le système afin de déterminer une expression possible de $H(p)$. Pour cela, deux études peuvent être menées : une étude analytique ou une étude empirique.

1.2. Modèle analytique du système

Dans un système dynamique linéaire, chaque sous-système peut être représenté par une équation différentielle à coefficients constants connue. Il suffit alors de les décomposer pour trouver l'équation différentielle entrée-sortie.

Une des représentations qui va nous permettre d'analyser un système est donc le schéma physique et la connaissance des lois (électrique, mécanique, hydraulique...) qui le régissent. On parle alors de **modèle de connaissance ou d'étude analytique**. Les paramètres ayant un sens physique, le modèle obtenu est commode pour l'analyse.

Cette méthode permet de pouvoir élaborer le correcteur sans avoir le système à disposition pour des tests. Néanmoins, pour réaliser le modèle d'un système, il est nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices. On se trouve alors devant un dilemme précision/simplicité : un modèle simple est faux, un modèle compliqué est inutilisable.

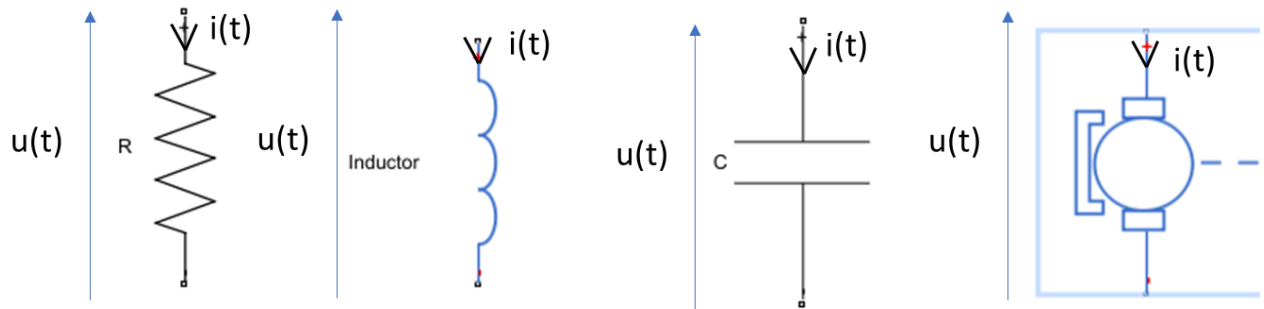
Nous allons donc chercher à déterminer la relation entre l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ de notre système.

La méthodologie à appliquer est la suivante :

1. Identifier le système. Quels éléments entrent en jeu (résistance, masse des éléments, frottement...) ? Ne pas hésiter à faire un schéma « éclaté » du système.
2. Identifier les entrée et sortie du système. En effet, nous souhaitons trouver une relation qui les lie ($f(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$). Nous allons donc devoir les identifier dans les différentes équations physiques pour les isoler.
3. Appliquer les lois générales de la physique. Attention à choisir celles qui seront utiles vis-à-vis du système.
4. Appliquer la transformée de Laplace. Les équations obtenues étant des équations différentielles, nous appliquons Laplace pour ne travailler qu'avec ces équations linéaires.
5. Isoler les termes et réorganiser les équations de façon à obtenir la fonction de transfert du système $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$.

Dans cette partie, certaines équations utiles à l'élaboration du modèle sont données. Attention, la liste n'est pas exhaustive, il est possible que certains phénomènes physiques ne soient pas décrits.

- Systèmes électriques



$$u(t) = R \cdot i(t) \quad ; \quad u(t) = l \frac{di}{dt} \quad ; \quad i = c \frac{du}{dt} \quad ; \quad E(t) = K_e \omega(t) \\ \text{et } C_m = K_t i(t)$$

E : force électromotrice. C_m : couple moteur. ω : vitesse de rotation.

Utilisation de la loi d'Ohm, loi des mailles, loi des nœuds, loi de Kirchhoff.

Puissance utile électrique : $P_e = i(t)E(t)$

- Systèmes mécaniques

Puissance utile mécanique : $P_m = C_m \omega(t)$

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) en translation : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

PFD en rotation : $\sum M = J \frac{d\omega}{dt}$

Après avoir appliqué les équations physiques, grâce à Laplace, on obtient la FT du système $H(p)$.

A cette étape, la modélisation par étude analytique est terminée. Il est possible de remplacer $H(p)$ par sa valeur dans le schéma bloc.

1.3. Modèle empirique du système

Dans cette étude, nous avons accès au système. On va alors le soumettre à des entrées connues afin d'observer la sortie et de la comparer à des réponses types. On parle de **modèle de comportement (empirique) ou d'identification**.

Le système est vu comme une boîte noire. On ne peut donc pas utiliser les lois physiques pour déterminer sa FT. Seules les entrée-sortie vont nous permettre de déterminer sa FT. L'objectif est de déterminer la FT du système à partir de l'expérience.

Pour cela, il est possible d'étudier la réponse du système à des entrées type échelon unitaire, rampe ou à un signal sinusoïdal pour réaliser une étude fréquentielle. L'analyse temporelle permet de décrire le comportement des systèmes linéaires tout comme l'analyse fréquentielle. Ces deux analyses sont complémentaires.

1.3.1. Réponse indicielle

La **réponse indicielle** représente la réponse du système soumis en entrée à un **échelon unitaire**. La réponse indicielle d'un système peut être décomposée en deux phases ou régimes.

Lors de l'application de l'entrée ou consigne, le système réagit pour atteindre un nouvel équilibre. Ce régime est appelé **régime transitoire**. Ce régime transitoire peut de nouveau apparaître à la suite d'une perturbation. Le comportement lors de cette phase est souvent difficile à quantifier avec une analyse temporelle seule. Le régime transitoire est une caractéristique liée au système et non à l'entrée.

Le système atteint un **régime permanent** lorsque la sortie observée se stabilise sur une valeur finale.

Ces deux régimes vont permettre de déterminer la FT du système en comparant les valeurs obtenues avec un catalogue de sorties connues.

Les systèmes peuvent être classés selon l'ordre de leur FT. En pratique, les systèmes fréquemment rencontrés sont d'ordre 1 ou 2. Leurs caractéristiques temporelles et fréquentielles sont parfaitement connues. Les systèmes plus complexes dont les ordres sont supérieurs à 2 ont souvent un comportement qui peut se rapprocher à un 2nd ordre. Le catalogue de sorties connues utilisé porte donc uniquement sur les systèmes de 1^{er} et 2nd ordre.

A. FT d'un système du 1^{er} ordre

La FT d'un système du 1^{er} ordre est de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Avec les paramètres K : gain statique et τ : constante de temps.

Le gain statique K est défini comme l'amplification d'un système en régime permanent (rapport en % de l'accroissement de l'amplitude du signal de sortie par rapport à l'accroissement du signal d'entrée correspondant). Si $K < 1$ alors le système atténue le signal d'entrée.

On peut calculer K en utilisant le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} (p E(p) H(p))$$

Or l'entrée du système $E(p) = \frac{1}{p}$ car $e(t)$ est un échelon unitaire (d'amplitude 1).

Donc :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{1}{p} \frac{K}{1 + \tau p} \right) = K$$

On en déduit que :

$$\text{Gain statique} = \lim_{p \rightarrow 0} H(p)$$

Dans une étude empirique, nous ne connaissons pas $H(p)$. Nous ne pouvons donc pas utiliser les calculs précédents pour déterminer K .

Le but est alors de réussir à identifier le système comme un 1^{er} ordre grâce à la courbe de sa sortie. Nous connaissons alors la forme générique de sa FT. Puis il faut réussir à déterminer graphiquement K et τ pour obtenir la FT du système.

Partons du principe que nous connaissons $H(p)$. Nous allons montrer comment retrouver K et τ sur la courbe.

Soit $S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p} = K \left(\frac{1}{p} + \frac{-\tau}{1 + \tau p} \right)$ par décomposition en éléments simples.

On a alors la transformée inverse qui vaut : $s(t) = K(1 - e^{-t/\tau})$

Et sa dérivée vaut : $\frac{ds(t)}{dt} = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}$

D'où $\frac{ds(0)}{dt} = \frac{K}{\tau}$.

Ce résultat nous donne la première caractéristique : **Pour un 1^{er} ordre, la tangente à l'origine n'est pas nulle.**

Calculons $s(t)$ pour des valeurs particulières de t :

$$s(\tau) = K(1 - e^{-1}) = 0.63K$$

$$s(3\tau) = K(1 - e^{-3}) = 0.95K$$

On trouve donc que la constante de temps τ est le temps nécessaire pour atteindre 63% de la valeur finale.

La sortie atteint 95% de sa valeur finale au bout de 3τ . On définira donc 3τ comme le temps de réponse à 5% ($tr_{5\%}$).

Ces trois caractéristiques vont permettre d'identifier, sur la courbe obtenue de la sortie, K et τ et donc d'en déduire la FT du système (Figure 12).

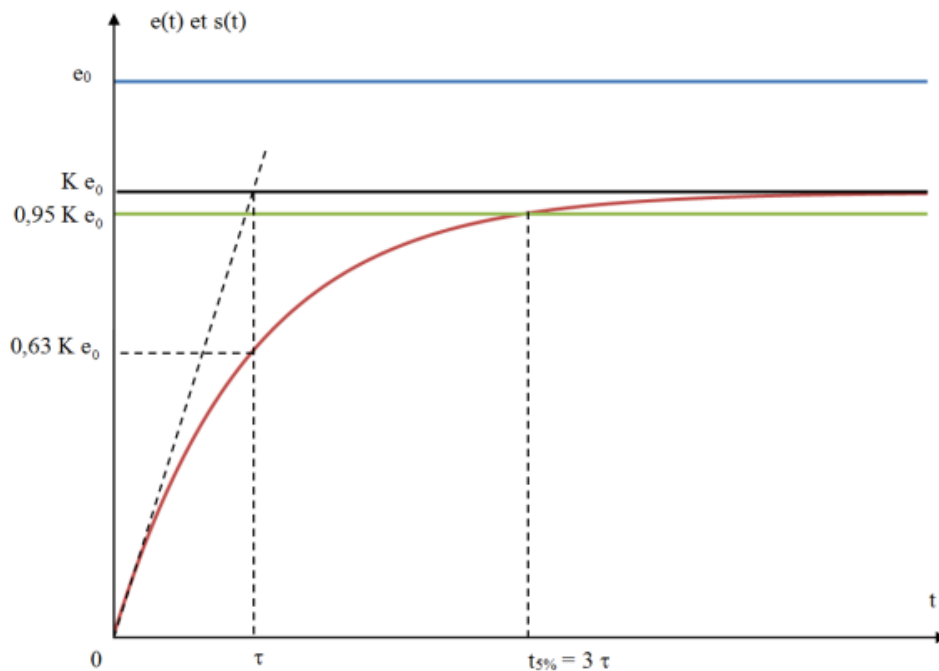


Figure 12 : Réponse indicielle d'un 1er ordre.

B. FT d'un système du 2^{ème} ordre

La FT d'un système du 2^{ème} ordre est de la forme :

$$\frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Avec les paramètres K : gain statique, ω_0 pulsation naturelle homogène à l'inverse d'un temps et m : facteur d'amortissement.

On souhaite, comme pour un système du 1^{er} ordre, identifier les différents paramètres de la FT i.e. déterminer K, m, ω_0 .

$$\text{Soit } S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p} - \frac{k(p+2m\omega_0)}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{p} - KY(p)$$

On a alors la transformée inverse qui vaut : $s(t) = K(1 - y(t))$. Il faut donc déterminer $y(t)$.

Pour cela, nous allons étudier les racines de $p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2$. Calculons le discriminant $\Delta = \omega_0^2(m^2 - 1)$. Les racines vont dépendre de m .

Si $m > 1$, il y a deux racines réelles négatives. On parle de régime apériodique.

Si $m = 1$, il y a une racine double réelle négative.

Si $m < 1$, il y a deux racines complexes conjuguées à parties réelles négatives. On a alors un régime oscillatoire.

L'allure de la sortie du système va donc dépendre de cette valeur de m .

Lors d'un régime apériodique ($m \geq 1$), la sortie n'aura pas de dépassement. On obtient une courbe « en S ». Plus m est grand, plus le système est amorti, d'où l'appellation « facteur d'amortissement ». Le système sera plus lent à atteindre la valeur finale. La forme de la FT peut se simplifier.

Pour un régime oscillatoire, on va observer un ou des dépassements. Plus m tends vers 0, moins les oscillations seront amorties. Pour $m = 0$, les oscillations sont entretenues. Le système n'atteint jamais de régime permanent.

Avec une étude similaire à ce qui a été fait pour un 1^{er} ordre (transformée inverse, analyse de la dérivée en 0...) on peut déduire les caractéristiques de la courbe. Nous ne détaillerons pas les calculs. Nous ne donnerons uniquement les résultats.

Pour un système de 2^{ème} ordre, indépendamment de la valeur de m , la **tangente à l'origine est nulle**.

Il faut ensuite réussir à identifier les paramètres K, m et ω_0 d'un système de 2^{ème} ordre sur la réponse indicielle.

Le gain statique K est identifié de la même façon que pour un système de 1^{er} ordre.

On définit la pulsation propre $\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$ et la période des oscillations $T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_n}$.

Le 1^{er} dépassement (A_1 sur la Figure 13) est calculé par : $A_1 = K e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$. Grâce à ce dépassement **on en déduit m** .

Ce 1^{er} dépassement a lieu au temps $T_p = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$. **On en déduit alors ω_0** .

Le 2^{ème} dépassement est calculé par : $A_2 = K e^{-\frac{2m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$.

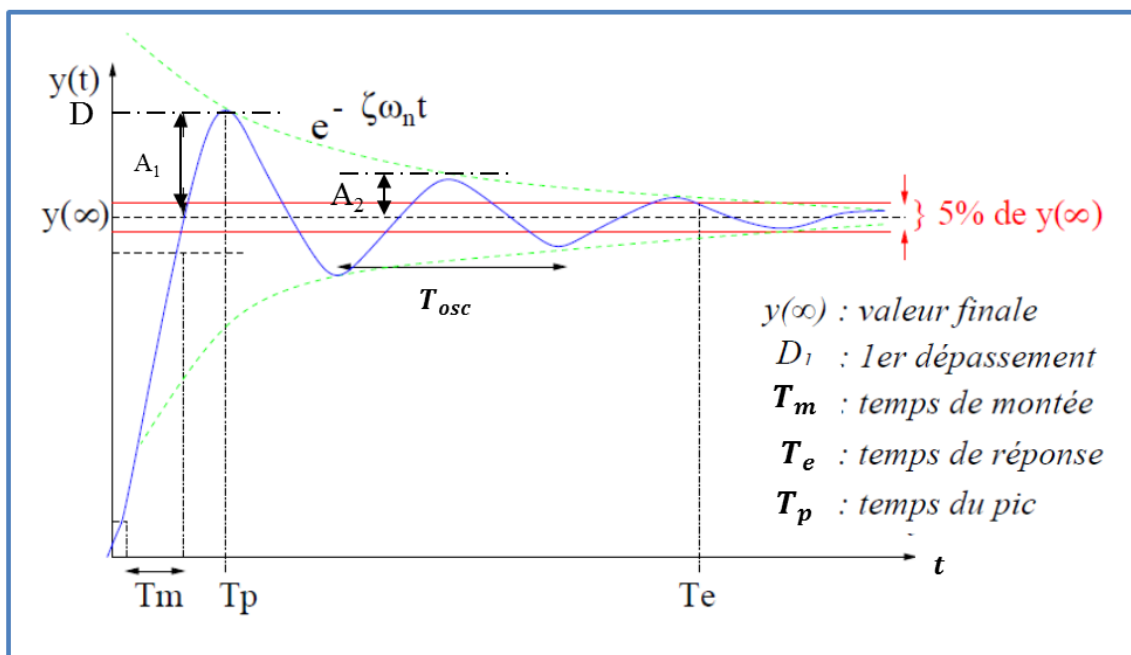


Figure 13 : Réponse indicielle d'un 2^{ème} ordre.

Pour obtenir un $tr_{5\%}$ correspondant au 1^{er} dépassement, il faut choisir une valeur de $m = 0.7$. A_1 sera alors égal à $0.05K$.

Pour obtenir un $tr_{5\%}$ correspondant au 2^{ème} dépassement, il faut choisir une valeur de $m = 0.43$. A_2 sera alors égal à $0.05K$.

On peut observer que cette méthode d'identification ne fonctionne que lorsque le système est un 2nd ordre avec oscillations. Lorsque le système est un 2nd ordre avec une courbe dit « en S », c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'oscillations, d'autres méthodes peuvent être utilisées. On trouve la méthode de Strejc, Broïda ou encore Davoust. Nous ne détaillerons pas ces méthodes. Elles permettent d'identifier les paramètres de la FT quand celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^n}$$

1.3.2. Réponse fréquentielle

L'objectif de l'**analyse fréquentielle** est d'étudier le comportement et la réponse d'un système linéaire à une **entrée sinusoïdale**.

La sortie du système linéaire sera donc **sinusoïdale de même pulsation** que le signal d'entrée **mais d'amplitude différente et déphasé** par rapport au signal d'entrée.

Lorsque le signal d'entrée est sinusoïdal, nous n'allons pas utiliser le formalisme de Laplace. Nous utiliserons la fonction de transfert complexe avec l'opérateur de Laplace $p = j\omega$ (ω est la pulsation du signal d'entrée).

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Afin d'étudier un système à partir de sa fonction de transfert complexe, nous disposons de plusieurs outils graphiques :

- Diagrammes de Bode.
- Diagramme de Nyquist
- Diagramme de Black-Nichols.

Pour la modélisation des systèmes linéaires, nous utiliserons les diagrammes de Bode (représentés dans la Figure 14).

Les diagrammes de BODE se décomposent en deux graphiques.

Le premier diagramme (Figure 14) appelé **diagramme de gain** permet de représenter l'amplitude de la FT.

On calcule alors le **module** de $H(j\omega)$ exprimé en décibels (db). On trace la caractéristique $20 \log|H(j\omega)|$ en fonction de la pulsation ω (rd/s) sur une échelle logarithmique.

On parle de **décade** entre ω et 10ω et **d'octave** entre ω et 2ω .

On va utiliser des asymptotes pour identifier l'ordre de notre système. On parlera d'asymptote de pente -1 si la pente est de -20db/décade ou -6dB/octave. Une asymptote de pente -2 signifiera -40dB/décade ou -12dB/octave.

Le deuxième diagramme de la Figure 14 est le **diagramme de phase**. Il représente l'argument $\Phi(H(j\omega))$ exprimé en degrés en fonction de ω tracé en échelle logarithmique.

Sur les diagrammes de Bode, le point $\omega = 0$ rd/s sera rejeté à $-\infty$.

Un module de 0 dB équivaut à un gain de 1.

Si $H(j\omega) = -1$, le module vaut 0 dB et l'argument vaut -180° .

Lorsque les FT se multiplient, les diagrammes de Bode permettent de transformer ces multiplications en additions, ce qui représente l'avantage principal des diagrammes de Bode. Ainsi, si $H(j\omega) = F(j\omega).G(j\omega)$ alors :

$$20 \log|H(j\omega)| = 20 \log|F(j\omega)| + 20 \log|G(j\omega)|$$

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(F(j\omega)) + \text{Arg}(G(j\omega))$$

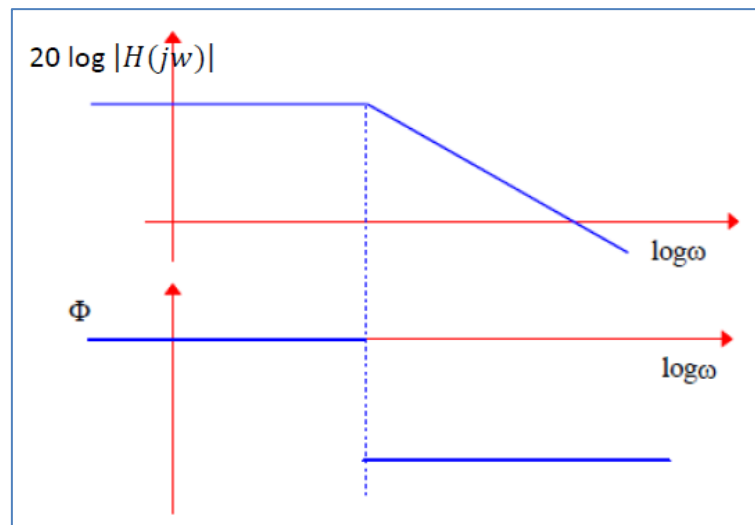


Figure 14 : Diagrammes de Bode.

Il suffit donc d'ajouter les diagrammes des fonctions $F(j\omega)$ et $G(j\omega)$ aussi bien sur le diagramme de gain que sur le diagramme de phase pour obtenir les diagrammes de $H(j\omega)$.

La construction des diagrammes de Bode d'un système va permettre l'identification du modèle à partir d'essais fréquentiels.

La méthode consiste à appliquer en entrée une grandeur sinusoïdale connue (fréquence et amplitude).

Lorsque le système est stabilisé (fin du régime transitoire), on relève l'allure de la grandeur de sortie, ceci pour plusieurs valeurs de fréquences d'entrée afin de reconstituer avec plusieurs points les diagrammes de Bode du système.

Puis on détermine graphiquement, comme précédemment, les paramètres de la FT.

A. FT d'un système du 1^{er} ordre

La fonction de transfert harmonique d'un système du 1^{er} ordre est :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau(j\omega)}$$

Le module de la FT vaut : $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$

Soit $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 10 \log(1 + \omega^2 \tau^2)$

On va chercher différentes asymptotes de gain. Pour cela, nous allons calculer le gain pour différentes valeurs de ω :

- Si $\omega \rightarrow 0$, $|H(j\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log K$. On observe une première **asymptote horizontale**.
- Si $\omega \rightarrow \infty$, $|H(j\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log K - 10 \log \omega^2 \tau^2$. On obtient une **seconde asymptote de pente -1**.

Les 2 asymptotes se coupent pour $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$.

ω_c est appelée **pulsation de coupure**.

On a alors, $|H(j\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$ d'où $|H(j\omega_c)|_{dB} = 20 \log K - 3dB$.

On observe un affaiblissement de 3dB entre l'asymptote et la courbe réelle. On parle également de **bande passante à -3 dB**.

Pour chercher les asymptotes de phase on analyse la réponse pour les mêmes valeurs de ω :

- Si $\omega \rightarrow 0$, alors $\Phi \approx \text{Arg}(K) = 0^\circ$
- Si $\omega \rightarrow \infty$, alors $\Phi \approx \text{Arg} \frac{K}{j\omega_0} = -90^\circ$
- Si $\omega = \omega_c$, alors $\Phi \approx \text{Arg} \left(\frac{K}{1+j} \right) = -\arctan(1) = -45^\circ$

On obtient les diagrammes suivants :

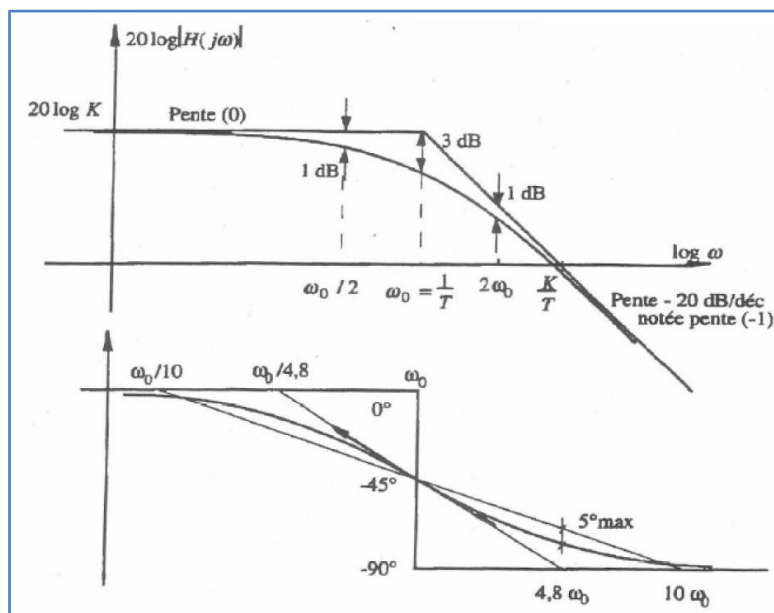


Figure 15 : Diagrammes de Bode d'un système du 1^{er} ordre.

Ces courbes permettent d'identifier le système comme un 1^{er} ordre.

Pour ω petit, en calculant le rapport d'amplitude de la sortie sur l'entrée, on obtient alors le gain statique K .

Puis il faut augmenter ω jusqu'à obtenir une atténuation du gain de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On note alors la valeur de ω .

Celle-ci correspond à $\omega = \omega_c$. On en déduit alors τ .

B. FT d'un système du 2nd ordre

La fonction de transfert harmonique d'un système du 2nd ordre est :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{2m\omega}{\omega_0}}$$

Le module de la FT vaut : $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2}}$ avec $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

Soit $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 10 \log((1 - u^2)^2 + 4m^2u^2)$

En observant la courbe de gain pour des valeurs de ω similaires à celles de l'étude d'un 1^{er} ordre, on obtient :

- Si $\omega \rightarrow 0$, $|H(j\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log K$. On observe une première **asymptote horizontale**.
- Si $\omega \rightarrow \infty$, $|H(j\omega)|_{dB} \rightarrow 20 \log K - 10 \log u^4$. On obtient une **seconde asymptote de pente -2**.

Les 2 asymptotes se coupent pour $\omega = \omega_0$. **La pulsation propre est également la pulsation de coupure.**

On a alors, $|H(j\omega_0)| = \frac{K}{2m}$. Le module de $|H(j\omega_0)|$ est maximal quand $m = 0.707$.

On définit alors une **pulsation de résonance** :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2} \text{ et } |H(j\omega_0)|_{max} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Suivant la valeur de m , la courbe de gain sera positionnée différemment vis-à-vis des asymptotes.

Si $m < 0.707$, la courbe de gain sera au-dessus des asymptotes.

Si $m > 0.707$, la courbe de gain sera au-dessous des asymptotes.

Pour chercher les asymptotes de phase on analyse la réponse pour les mêmes valeurs de ω :

- Si $\omega \rightarrow 0$, alors $\Phi \approx \text{Arg}(K) = 0^\circ$
- Si $\omega \rightarrow \infty$, alors $\Phi \approx \text{Arg} \frac{K}{j\omega_0} = -180^\circ$
- Si $\omega = \omega_0$, alors $\Phi = -90^\circ$

On obtient les diagrammes suivants :

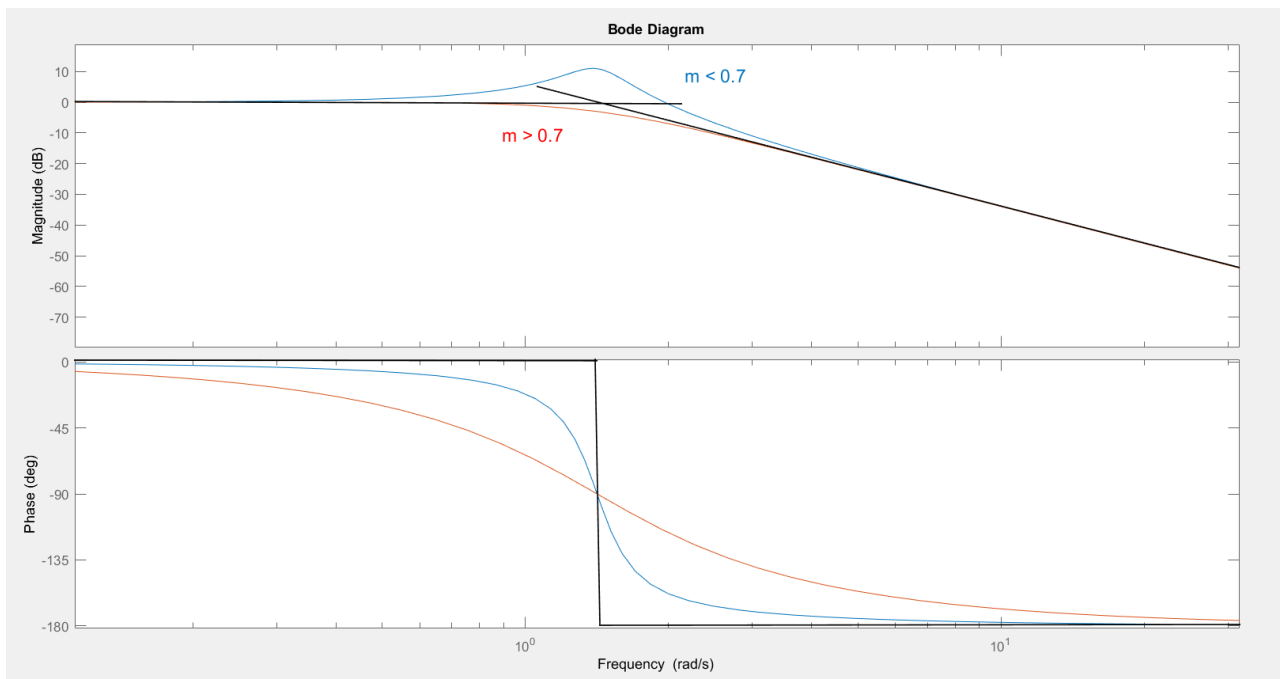


Figure 16 : Diagrammes de Bode d'un système du 2nd ordre.

Ces courbes permettent d'identifier le système comme un 2nd ordre. Pour ω petit, en calculant le rapport d'amplitude de la sortie sur l'entrée, on obtient alors le gain statique K .

On mesure ω_0 pour un déphasage de -90° . Puis avec $|H(j\omega_0)| = \frac{K}{2m}$ on en déduit la valeur de m .

2. Etude des performances du système à asservir

Que ce soit par une étude analytique ou empirique, nous venons d'obtenir un modèle de notre système via sa fonction de transfert.

Mais que fait-on d'un modèle ?

Nous allons tout d'abord utiliser ce modèle ou plutôt sa FT afin d'étudier le système.

Nous analyserons par la suite les propriétés et performances du système en Boucle Ouverte (BO) et Boucle Fermée (BF).

Ces deux étapes primordiales nous permettront de créer, vis-à-vis du cahier des charges, la loi de commande adaptée.

2.1. Analyse de la fonction de transfert obtenue

Commençons par analyser la FT obtenue.

Soit la FT :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec $N(p)$ numérateur de la FT et $D(p)$ dénominateur de la FT.

Soit n le degré du polynôme $D(p)$ et m le degré du polynôme $N(p)$.

Dans l'analyse empirique, nous avons vu que, suivant l'ordre de la FT, l'allure de la courbe était différente.

On appelle **Ordre** d'une FT le degré du polynôme du dénominateur $D(p)$. La FT est donc d'ordre n .

$D(p)$ possède p racines distinctes réelles ou complexes conjuguées.

$D(p)$ est appelé **Polynôme Caractéristique (PC) ou Equation Caractéristique (EC)** de la FT.

On appelle **Pôles d'une fonction de transfert** les racines p_i qui annulent le dénominateur de la FT. Nous verrons par la suite que ces pôles vont influencer la stabilité du système.

De même, on appelle **Zéros d'une fonction de transfert** les racines z_i qui annulent le numérateur $N(p)$.

Analyser une fonction de transfert revient à **déterminer l'ordre, l'EC, les pôles et les zéros** de celle-ci.

Mais sur quelle FT travailler ?

En effet, la modélisation nous a permis d'obtenir la FT du système seul. Or, ce n'est pas le système qui nous intéresse mais son asservissement. Ce sont les résultats sur le système asservi qui nous aideront à mettre en place le correcteur répondant au cahier des charges.

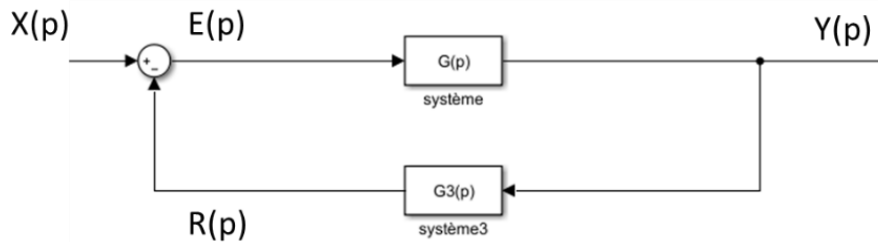


Figure 17 : Schéma bloc du système asservi.

Lorsque la sortie n'est pas réinjectée comme entrée, on dit que le système fonctionne en **Boucle Ouverte (BO)**.

Les effets des perturbations ou tout changement dans la consigne ne sont pas compensés.

On définit la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) comme :

$$FTBO(p) = \frac{R(p)}{X(p)} = G(p) \cdot G_3(p) = FTCD(p) \cdot FTCT(p)$$

FTCD : Fonction de Transfert en Chaîne Directe

FTCT : Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour.

Dans le cas d'un retour unitaire, l'expression est simplifiée :

$$FTBO(p) = FTCD(p)$$

Néanmoins, une commande appliquée sur une BO ne permet pas de régler le niveau de la sortie avec précision ni de corriger l'effet des perturbations.

Il est donc important de passer en **Boucle Fermée (BF)** pour pouvoir contrôler correctement le système.

Nous allons utiliser l'information sur la sortie collectée par le capteur pour la comparer à la référence.

Le système de régulation pourra agir sur l'erreur (différence entre sortie et consigne) pour rectifier celle-ci et faire tendre l'erreur vers 0.

On définit la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) comme :

$$FTBF(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p) \cdot G_3(p)} = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Dans le cas d'un retour unitaire, l'expression est simplifiée :

$$FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p)}$$

L'analyse (ordre, zéros, pôles) pourra être réalisée soit sur la FTBF soit sur la FTBO.
De même, les performances pourront être analysées sur la FTBO et/ou la FTBF.

2.2. Analyse des performances

L'objectif d'un automaticien va être de déterminer le correcteur adapté qui réponde à un cahier des charges préétabli vis-à-vis de l'application. Il existe de nombreuses méthodes afin de déterminer les paramètres du SRA.

Ce correcteur devra corriger les performances du système. Il est donc primordial d'analyser et quantifier ces performances avant de construire le correcteur.

Les performances peuvent être analysées soit avec un signal temporel soit avec un signal fréquentiel.

Trois critères essentiels permettent de caractériser la qualité d'un système asservi :

- Stabilité : le signal de sortie converge vers une valeur finie pour une entrée fixe.
- Rapidité : le système atteint « au plus vite » la consigne. Il est quantifié par le temps mis par le système pour que sa sortie reste sur une plage de variation centrée sur la valeur de la consigne. La rapidité est liée au régime transitoire.
- Précision : l'erreur entre la valeur réelle de la sortie et la valeur désirée (consigne d'entrée) est minimisée ou inférieure à une tolérance donnée.

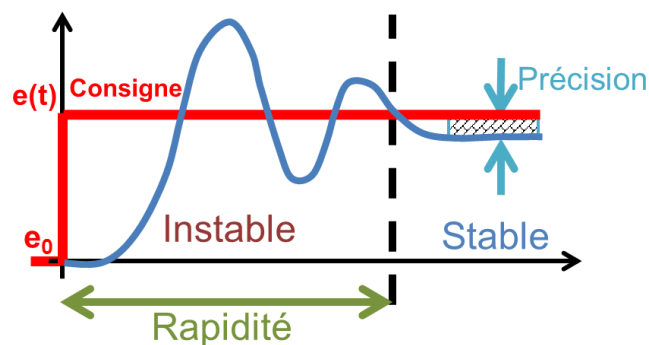


Figure 18 : Performances d'un système.

Il n'y a pas de critère plus important que d'autre.

Les performances vont dépendre de l'application et de la nature du système physique à commander.

Par exemple, l'asservissement d'un robot chirurgical nécessitera de grands moyens pour assurer la précision au dépend des autres critères (notamment rapidité) alors que l'asservissement d'un régulateur de vitesse mettra l'accent sur la stabilité pour éviter des désagréments au conducteur.

2.2.1. Stabilité

Un système dynamique est stable si, lorsqu'il est écarté d'une position d'équilibre, il tend à y revenir.

On dit que le système est stable si, à une entrée limitée, correspond une sortie elle aussi limitée.

La stabilité ne s'étudie pas dans le régime transitoire. Des oscillations dans le régime transitoire ne signifient pas un système instable.

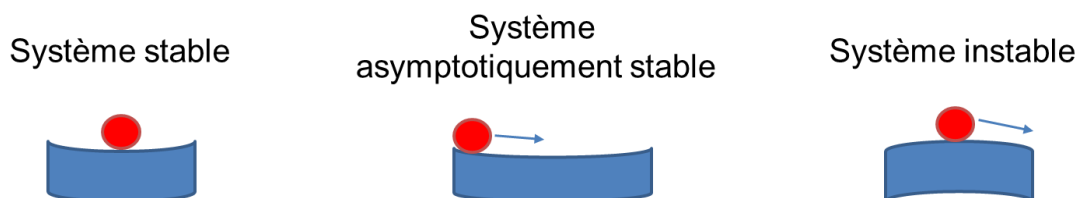


Figure 19 : Stabilité.

Pour un système bouclé, on étudiera la stabilité en Boucle Fermée.

Attention la stabilité en Boucle Ouverte n'implique pas la stabilité en Boucle Fermée et inversement. Un système instable est un système inutilisable. Le critère de stabilité est donc un critère obligatoire.

La stabilité dépend de l'entrée choisie.

Mais comment savoir si un système est stable ?

La nature et position des pôles (racines du dénominateur) vont nous donner cette information.

Condition de stabilité : Un système bouclé linéaire est stable si et seulement si **tous les pôles de sa FTBF (racines de l'EC) sont à parties réelles strictement négatives.**

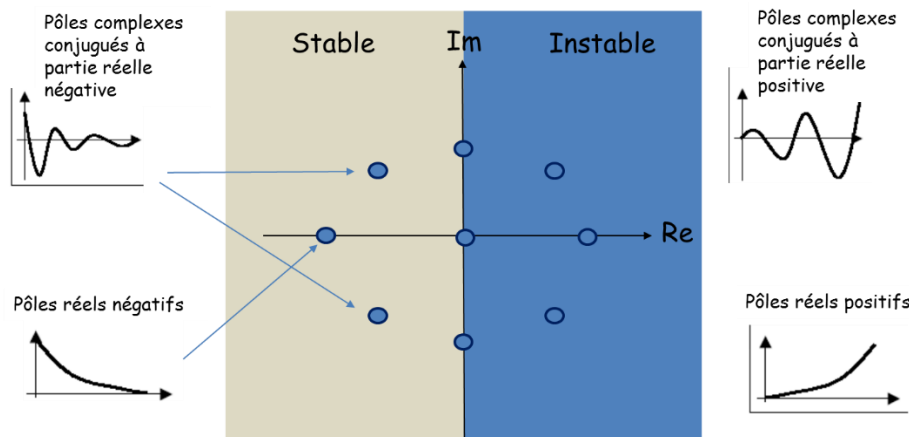


Figure 20 : Position des pôles pour la stabilité.

Pour savoir si un système est stable, nous venons de voir qu'il suffit de calculer les pôles de sa FT et de regarder leur position dans le plan complexe.

Pour des fonctions d'ordre 1 et 2, le travail est assez facile, mais pour les fonctions d'ordre supérieur, ce calcul peut s'avérer complexe et laborieux.

Il existe alors un critère algébrique de stabilité appelé **critère de Routh-Hurwitz**.

Il permet de déterminer la stabilité d'un système sans calculer explicitement ces racines.

Il est alors possible d'analyser la stabilité du système en boucle fermée à partir de l'équation caractéristique (dénominateur de la FTBF) sans avoir à résoudre $D(p) = 0$.

Considérons la FT suivante :

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Avec $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$, polynôme caractéristique.

Nous allons construire le tableau de Routh-Hurwitz de la Figure 21 à partir du polynôme caractéristique.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	a_2	a_0	...	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	a_1		...	a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...	si n pair		...	si n impair	
p^{n-3}	c_{n-3}						
...							
p^1							
p^0	...								

Coefficients à calculer

Figure 21 : Tableau de Routh-Hurwitz.

Il faut tout d'abord placer, sur les deux premières lignes, les coefficients du polynôme comme sur la Figure 21.

La première colonne est appelée **colonne des pivots**. Elle contient $n+1$ termes pour un polynôme de degré n .

A partir de la troisième ligne, on utilise les formules suivantes :

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-4} \cdot a_{n-1} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-6} = \frac{a_{n-6} \cdot a_{n-1} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{a_{n-3} \cdot b_{n-2} - a_{n-1} \cdot b_{n-4}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-5} = \frac{a_{n-5} \cdot b_{n-2} - a_{n-1} \cdot b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

On obtient un tableau triangulaire. Attention, chaque terme est égal à l'opposé d'un déterminant usuel divisé par l'élément précédent de la colonne des pivots.

Critère de Routh-Hurwitz : Le système est stable si **tous** les coefficients de la **colonne des pivots sont de même signe**. Il y a autant de racines instables qu'il y a de changements de signes dans la colonne des pivots.

Un zéro dans la colonne des pivots sera considéré comme un changement de signe.

Le critère de Routh-Hurwitz tout comme le calcul des pôles donnent uniquement une **condition nécessaire et suffisante** de stabilité (stable ou instable). Nous allons alors utiliser des critères graphiques afin d'apprécier si le système est plus ou moins proche de l'instabilité.

Nous avons vu que la résolution de l'équation caractéristique permet d'obtenir les limites de la stabilité.

En boucle fermée, le polynôme caractéristique de la FTBF vaut $1+FTBO$.

Résoudre $FTBF = 0$ revient à calculer $FTBO = -1$. Le point pour lequel $FTBO = -1$ est appelé **point critique**. Il correspond à un gain de 0dB et une phase de -180° . Ce point est considéré comme le point limite de stabilité.

Nous allons utiliser l'étude fréquentielle et les diagrammes de Bode pour analyser la position de la courbe du système vis-à-vis de ce point critique. En pratique, il ne faut pas trop s'approcher du point critique. En effet, si le système possède une courbe trop proche de ce point, le moindre phénomène peut le faire basculer dans l'instabilité.

Nous allons donc définir des marges de stabilité. Elles permettent d'estimer plus précisément la marge relative à la stabilité d'un système. Ces marges existent sur les diagrammes de Bode mais également de Nyquist et Black. C'est un critère graphique facilement utilisable.

Il existe deux marges permettant de quantifier la stabilité :

- La marge de gain ΔG : c'est la garantie (sécurité) que la stabilité sera maintenue malgré les variations imprévues du gain en boucle ouverte (BO).
- La marge de phase $\Delta \varphi$: C'est la garantie que la stabilité persistera malgré l'existence de retards parasites dont on n'a pas tenu compte dans le réglage.

Pour calculer la marge de gain, on calcule $MG = -20 \log|H(j\omega)|$ pour $\omega = -180^\circ$.

Si cette marge est positive le système est stable. S'il est inférieur à 0, le système est instable. Pour 0, on observe la limite de stabilité.

De manière graphique, on cherche tout d'abord sur le diagramme de phase le point de la courbe correspondant à -180° . On note la valeur de ω obtenue.

Sur le diagramme de gain, on regarde pour cette valeur de ω , la valeur du gain associé.

Si le gain observé sur la courbe est inférieur à 0dB, le système est stable sinon le système est instable. Pour 0dB, le système est oscillant.

Pour calculer la marge de phase, on calcule $MP = 180^\circ + \text{Arg}(H(j\omega))$ pour $|H| = 1$.

De manière graphique, on cherche tout d'abord sur le diagramme de gain la valeur de ω pour laquelle $\log|H(j\omega)| = 0$.

Sur le diagramme de phase, on regarde pour cette valeur de ω , la valeur du déphasage.

Si le déphasage est inférieur à -180° , le système est stable sinon, le système est instable.

La Figure 22 montre la marge de phase et son influence sur la stabilité.

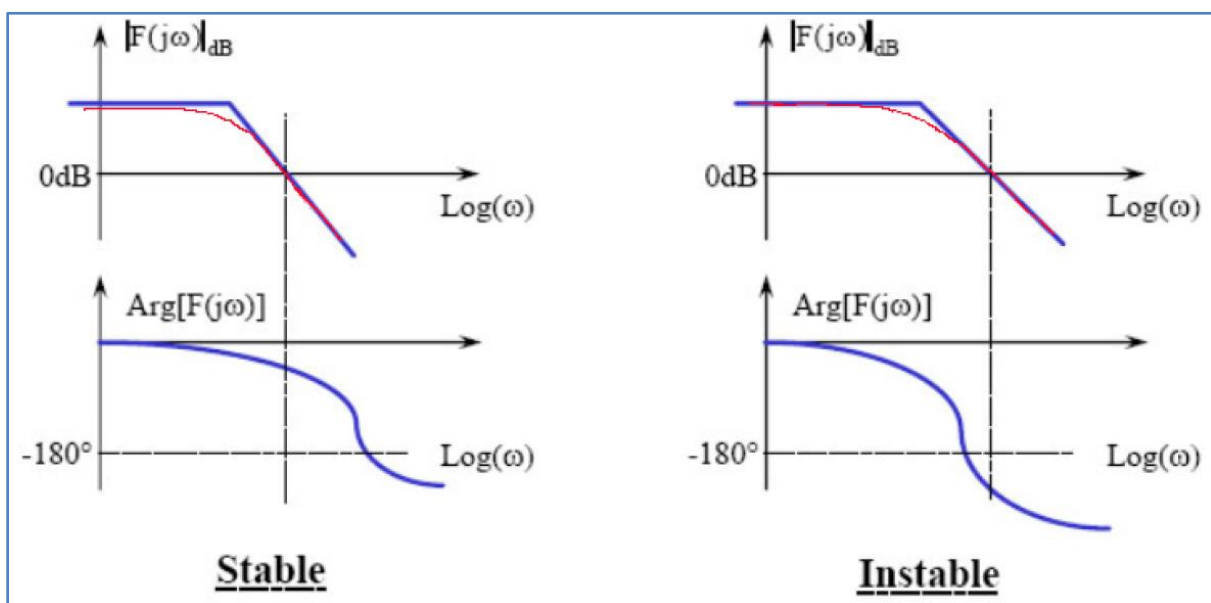


Figure 22 : Critère de stabilité selon BODE.

Plus la distance entre le point critique et la courbe est grande, plus le système est stable.

2.2.2. Précision

La précision qualifie l'aptitude d'un système à atteindre la valeur de la consigne.

Elle est caractérisée par l'écart $\varepsilon(t)$ entre la valeur visée et la valeur effectivement atteinte par la sortie. La précision dépend de la consigne d'entrée.

Considérons le système bouclé de la Figure 23.

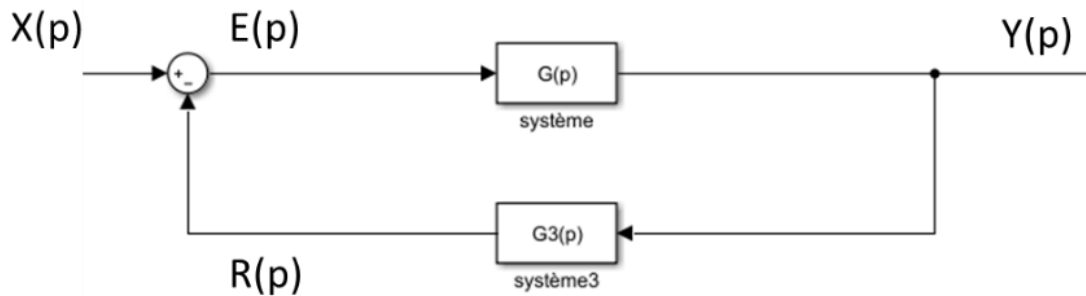


Figure 23 : Système bouclé.

$E(p)$ représente la transformée de Laplace de $\varepsilon(t)$.

$$E(p) = X(p) - R(p) = X(p) - FTBO(p). \text{ } E(p) \text{ d'où } E(p) = \frac{X(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Le système sera précis si son écart $\varepsilon(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

En utilisant le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot X(p)}{1 + FTBO(p)}$$

On voit que la valeur de $E(p)$ dépend de l'entrée $X(p)$.

Nous allons considérer deux types d'erreur.

- Erreur statique ou erreur de position

L'erreur de position est l'écart en régime permanent pour une entrée échelon $X(p) = \frac{A}{p}$.

On a alors,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + FTBO(p)} \cdot \frac{A}{p}$$

L'écart va dépendre de l'ordre de la FT.

- Erreur de traînage ou de vitesse

L'erreur de traînage est l'écart en régime permanent pour une entrée rampe $X(p) = \frac{A}{p^2}$.

On a alors,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{1 + FTBO(p)} \cdot \frac{A}{p^2}$$

L'écart va également dépendre de l'ordre de la FT.

Le Tableau 2 synthétise l'influence de l'entrée et de l'ordre α de la FT. K gain statique.

Tableau 2 : Erreurs.

Entrée $x(t)$	Classe de la FTBO			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$a \cdot u(t)$ (Échelon)	$\frac{a}{1 + K}$	0	0	0
$a \cdot t \cdot u(t)$ (Rampe)	∞	$\frac{a}{K}$	0	0
$a \cdot t^2 \cdot u(t)$ (Parabolique)	∞	∞	$\frac{2a}{K}$	0

On peut voir que, dans le cas d'un système du 1^{er} ordre, avec une entrée échelon, l'écart sera fini.

On pourra tenter de le rendre aussi petit que l'on veut en augmentant K mais on ne pourra pas l'annuler.

En revanche, dès lors où l'ordre est au moins de 1, l'erreur est nulle.

Pour avoir un écart de position nul, il faut **au moins une intégration** dans la FTBO.

Un correcteur approprié sera nécessaire afin d'augmenter la classe (l'ordre) du système.

Un raisonnement similaire peut être fait pour les autres types d'entrée.

Pour avoir une bonne précision, il faut augmenter le gain. Mais cette augmentation rend le système instable. Il faut donc un **compromis entre précision et stabilité**.

2.2.4. Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée.

Plusieurs temps vont être utilisés pour quantifier la rapidité (Figure 24) pour une entrée échelon :

- **Temps de réponse à 5% ($tr_{5\%}$ ou t_{pr})** : le $tr_{5\%}$ est le temps au bout duquel la réponse du système pénètre dans le couloir de plus ou moins 5% de la valeur finale sans en sortir.
- **Temps de montée t_m** : temps pour lequel la réponse atteint pour la première fois la valeur finale. Il caractérise la vitesse de réaction du système aux premiers instants.
- **Temps de retard pur τ** : temps pendant lequel la sortie est insensible à l'entrée. Il est dû à l'inertie du système, insensibilité, jeu mécanique ...
- **Temps d'établissement t_e** : temps pour lequel la réponse atteint pour la première fois la valeur maximale.

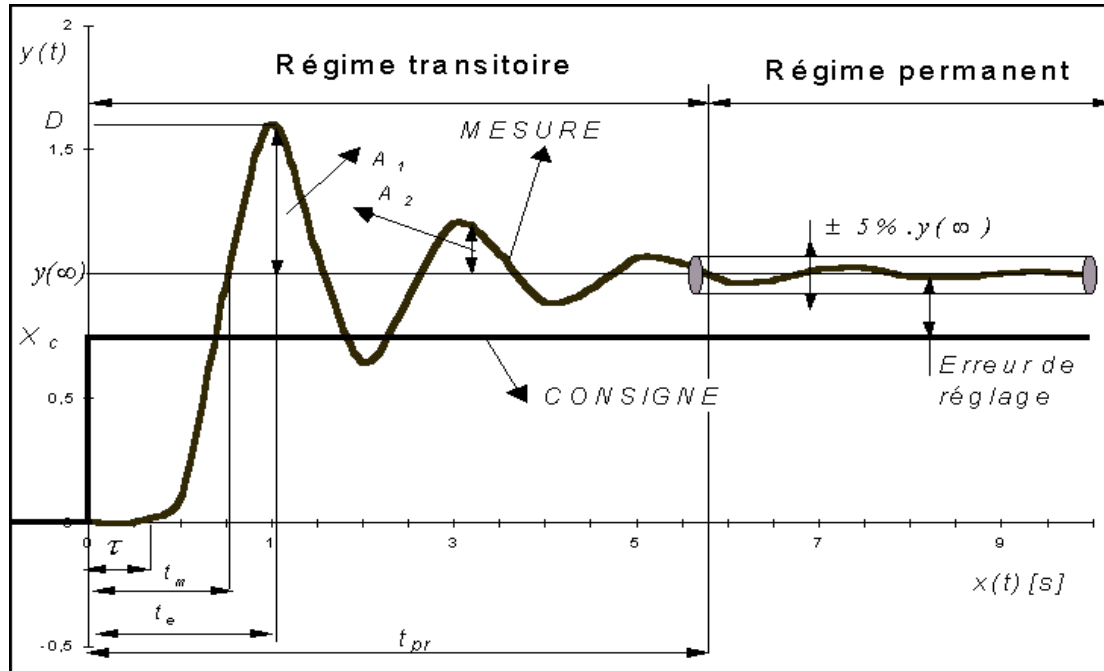


Figure 24 : Temps caractéristiques de la rapidité.

Un autre critère de rapidité concerne l'amortissement en présence de dépassements. L'amortissement est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la sortie.

Plus les oscillations s'atténuent rapidement, plus le système est amorti.

Deux paramètres sont à considérer :

- **Le dépassement (overshoot)** : ce critère est également utile pour évaluer la stabilité notamment la stabilité relative. Il est mesuré par le taux de dépassement. La valeur du premier dépassement en % vaut :

$$D = \frac{A_1}{y(\infty)} \times 100\% = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

Pour certaines applications, le dépassement est interdit ou doit être faible.

- **Le coefficient d'amortissement (damping ratio)** : la nature des pôles de la FT détermine le comportement transitoire. Elle dépend en particulier du coefficient d'amortissement calculé par :

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1}$$

Plus le coefficient d'amortissement est grand, plus le temps de réponse est important.

Le diagramme de gain de Bode permet également de quantifier la rapidité.

Pour cela, on va utiliser la bande passante à -3dB de la FTBF.

Cette bande passante représente la plage de valeur des pulsations ω pour laquelle la perte de gain reste inférieure à 3dB par rapport à une valeur optimale.

Une augmentation de la bande passante provoque une augmentation de la rapidité.

La bande passante à -3dB de la FTBF correspond à la bande passante à 0dB de la FTBO.

3. Mise en place d'un correcteur

Il n'existe pas de paramètres qui permettent de rendre un système rapide, précis et stable.

L'automaticien est souvent confronté à ce dilemme et ne dispose que d'une marge de manœuvre réduite quand le système, les organes de puissance et les capteurs sont imposés. C'est pourquoi il est nécessaire de mettre en place un ou plusieurs correcteurs.

Dans cette partie, nous allons voir les correcteurs existants, comment les disposer et comment déterminer leurs paramètres pour pallier les performances du système seul.

Le but est d'assurer une réponse acceptable pour les entrées définies et de fournir les caractéristiques demandées dans le cahier des charges.

Pour cela, nous devons calculer la FT du correcteur.

En général, le cahier des charges d'une boucle de régulation impose, en boucle fermée, plusieurs performances dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel :

- La précision, en imposant par exemple une valeur maximale pour l'erreur de position ou de traînage.
- La rapidité avec un temps de montée ou de réponse à 5% maximal.
- La stabilité avec, en plus d'un système stable, une restriction voire une interdiction des dépassements.
- La marge de stabilité avec une valeur minimale de la marge de phase. On retrouve généralement des performances de 10dB à 15dB pour la MG et 40° à 45° pour la MP.

Le régulateur/correcteur aura donc pour objectif d'assurer ces critères.

3.1. Schéma bloc avec correcteur

Un correcteur est un mécanisme automatique qui élabore un signal de commande U en fonction de l'écart de réglage selon un algorithme donné.

Cet algorithme va donc être calculé sur l'écart entre l'entrée et la sortie mesurée et appliqué en **entrée** du système comme le montre la Figure 25.

On dit que le correcteur est placé en cascade (ou en série). Il existe d'autres positions possibles pour le correcteur. Nous n'aborderons pas ces dispositions.

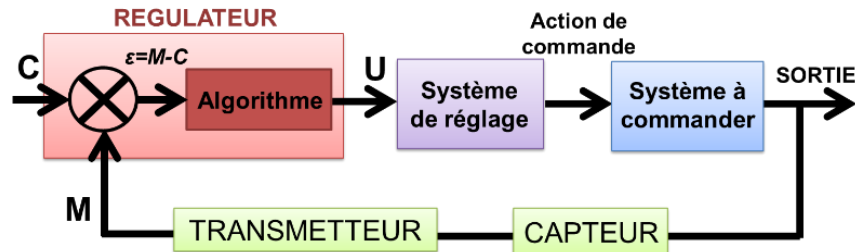


Figure 25 : Asservissement avec correcteur.

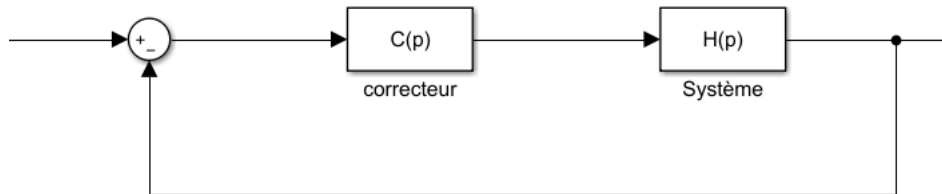


Figure 26 : Schéma bloc d'un système asservi avec correcteur.

On note $C(p)$ la FT du correcteur et $H(p)$ la FT du système.

La FTBF du système bouclé avec régulateur de la Figure 26 vaut :

$$FTBF(p) = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)}$$

Tout l'art de la correction des systèmes consiste à choisir correctement $C(p)$ de manière à régler chaque performance du cahier des charges à sa valeur requise.

Pour cela, il est possible de mener une étude empirique. Cette méthode est facile et suffisante dans certains cas. En revanche, elle ne permet pas un réglage fin.

On peut alors utiliser une méthode théorique dans laquelle la fonction de transfert du système et de son correcteur est calculée en fonction des performances désirées. La fonction de transfert du correcteur $C(p)$ est alors isolée et organisée pour identifier une structure connue d'un correcteur. Avec cette méthode, le régulateur n'est pas forcément réalisable physiquement. De plus, elle ne convient pas au système avec des zéros instables ou un retard pur.

Il existe plusieurs types de régulateurs. Ils peuvent être classés selon la nature de l'énergie utilisée (pneumatique, électronique, numérique), selon le sens de l'action (direct ou inverse) ou encore selon le type d'action (P, PD, PI, PID).

3.2. Etude de 4 correcteurs

3.2.1. P

Le **correcteur Proportionnel (P)** est un amplificateur de gain réglable $C(p) = K$ qui a pour but de modifier le gain statique initial du système. C'est le plus simple des correcteurs.

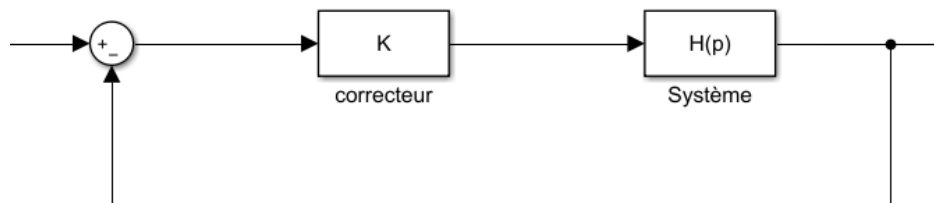


Figure 27 : Schéma bloc correcteur proportionnel.

Il s'agit d'appliquer une correction proportionnelle à l'**erreur** corrigeant de manière instantanée tout écart de la grandeur à régler : $u(p) = K\varepsilon(p)$.

Si $K < 1$ (atténuateur), la stabilité en BF est améliorée et on diminue le dépassement. En revanche, la précision et la rapidité sont dégradées.

Si $K > 1$ (amplificateur), la rapidité et la précision en BF sont améliorées mais on diminue la stabilité et on accroît son dépassement.

Ce correcteur permet donc de vaincre les grandes inerties du système et de diminuer le temps de montée (amélioration de la rapidité). L'erreur statique est améliorée.

En revanche, on dégrade la stabilité. Le dépassement se fait de plus en plus grand et le système peut diverger.

3.2.1. PD

Dans un **correcteur Dérivé (D)**, le signal de commande est proportionnel à la **dérivée** de l'**écart**
 $u(p) = K_d \cdot p \cdot \varepsilon(p)$.

Il a pour but d'ajouter un zéro nul à la FTBO. L'action compense les effets du temps mort du procédé.

Néanmoins, l'action dérivée est **irréalisable physiquement**. On l'associe donc **toujours** à une action proportionnelle $u(p) = K_p \cdot \varepsilon(p) + K_d \cdot p \cdot \varepsilon(p)$

Autrement dit, **on ne trouvera jamais de correcteur dérivé seul** mais uniquement des combinaisons (PD ou PID).

Les deux correcteurs peuvent être combinés en série ou en parallèle. La Figure 28 montre l'association parallèle de l'action proportionnelle K_p et de l'action dérivée $K_d p$.

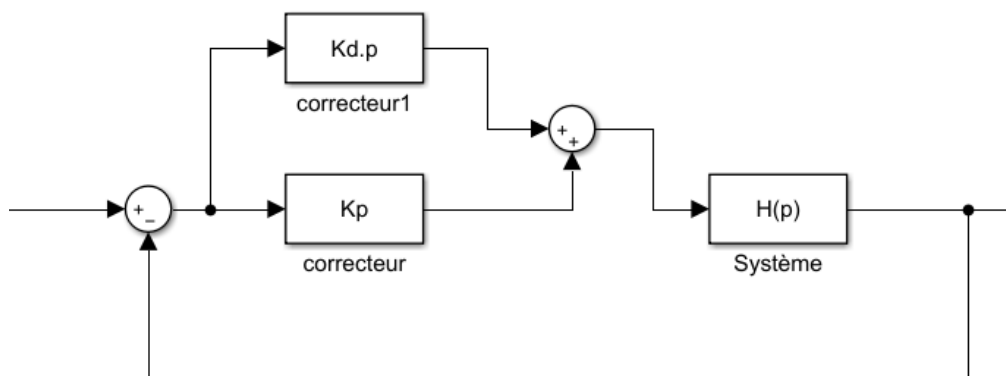


Figure 28 : Correcteur PD parallèle.

La fonction de transfert d'un tel correcteur est $C(p) = K_p + K_d \cdot p$
avec K_p : gain du proportionnel et K_d constante de temps.

Lors d'une association série, les correcteurs sont mis en cascade comme le montre la Figure 29.

La fonction de transfert devient alors : $C(p) = K_p(1 + K_d \cdot p)$

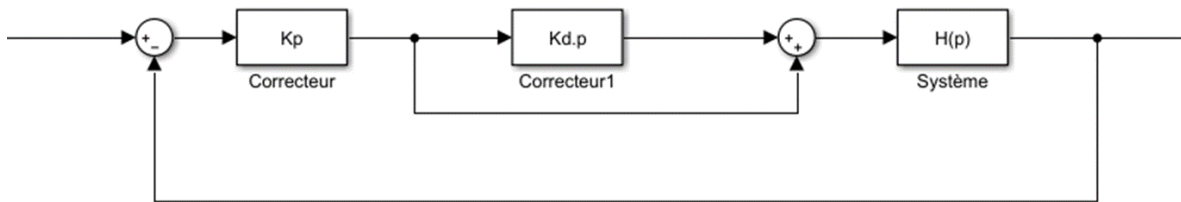


Figure 29 : Correcteur PD série.

Un correcteur dérivé est à utiliser à chaque fois que le système à corriger doit être plus rapide. Il accélère le système mais dégrade la stabilité et la précision. L'action dérivée ne se justifie que si la mesure possède un certain retard.

3.2.2. PI

Le correcteur **Proportionnel Intégral (PI)** a pour intérêt principal d'ajouter dans la chaîne de commande une intégration afin d'annuler l'erreur statique lorsque l'entrée est un échelon.

La précision sera améliorée au dépend de la stabilité.

L'idée est d'intégrer l'erreur depuis le début et d'ajouter cette erreur à la consigne : lorsque l'on se rapproche de la valeur demandée, l'erreur devient de plus en plus faible. Le terme proportionnel n'agit plus mais le terme intégral subsiste et reste stable, ce qui maintient la sortie à la valeur de la consigne. Le correcteur intégral ralentit le système.

Il est donc important de choisir une valeur optimale pour satisfaire un compromis stabilité-rapidité.

Dans l'action intégrale, le signal de commande est **proportionnel** à l'**intégrale** de l'écart

$$u(p) = K_i \cdot \frac{1}{p} \cdot \varepsilon(p).$$

Bien que le correcteur intégral soit physiquement réalisable, il est associé en général à un correcteur proportionnel

$$u(p) = K_p \cdot \varepsilon(p) + K_i \cdot \frac{1}{p} \cdot \varepsilon(p).$$

Pour une association parallèle (Figure 30), la fonction de transfert d'un tel correcteur est

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$$

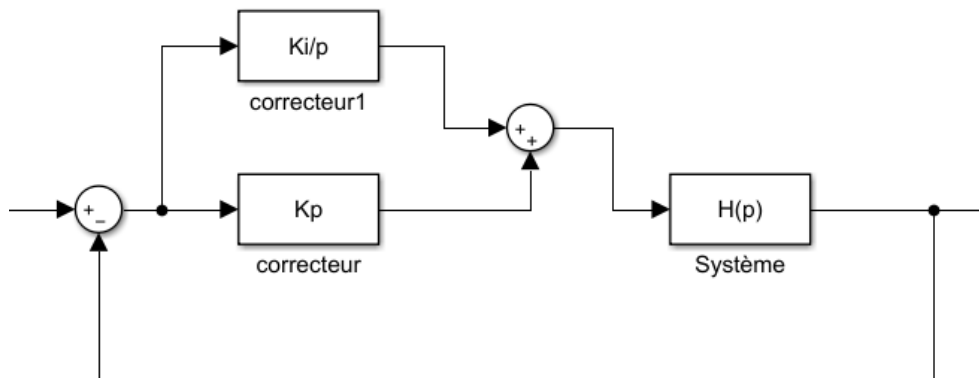


Figure 30 : Correcteur PI parallèle.

Pour une association série (Figure 31), la fonction de transfert devient : $C(p) = K_p(1 + \frac{K_i}{p})$

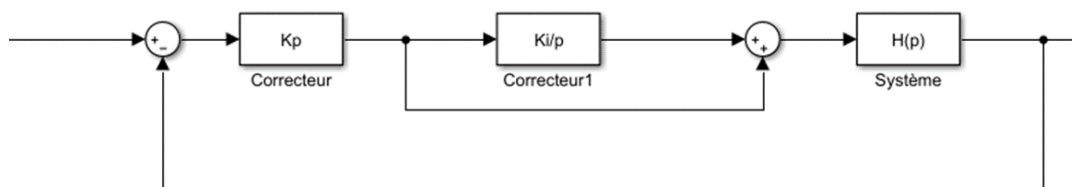


Figure 31 : Correcteur PI série.

3.2.3. PID

Le correcteur **Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)** permet de combiner les effets des trois correcteurs précédents :

- Amélioration de la stabilité par l'effet dérivateur.
- Amélioration de la précision par l'effet intégrateur.
- Amélioration de la rapidité par l'effet proportionnel.

Le correcteur PID est le correcteur le plus utilisé dans l'industrie. Ces trois correcteurs peuvent être associés de différentes manières.

Lorsque l'on construit un PID série, les éléments sont associés comme sur la Figure 32.

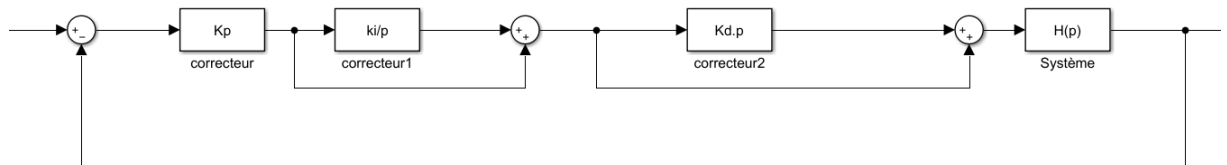


Figure 32 : Correcteur PID série.

La FT d'un correcteur PID série est :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{p}\right) (1 + K_d \cdot p)$$

Les éléments peuvent également être placés en parallèle (Figure 33).

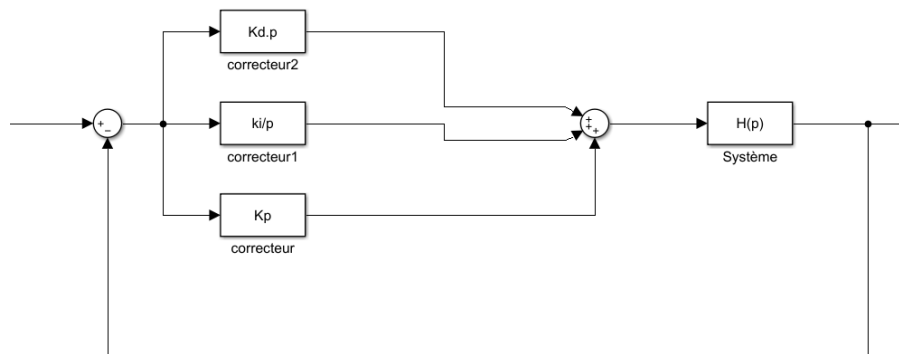


Figure 33 : Correcteur PID parallèle.

La FT d'un correcteur PID est :

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d \cdot p$$

La principale différence entre ces deux formes concerne l'effet des coefficients sur le comportement du correcteur.

La forme parallèle permet de découpler les actions ce que ne fait pas la forme série.

Dans l'agencement série, une modification du gain proportionnel affecte également les actions dérivé et intégrale.

La forme parallèle est souvent préférée afin de limiter ce couplage et permettre un réglage plus facile des coefficients.

En revanche, avec la forme série, il n'est pas possible d'annuler l'action intégrale qui transformerait alors le PID en PD et donc de perdre l'intérêt de l'action intégrale. Il n'existe donc pas de forme préconisée.

3.2.4. Détermination des paramètres des correcteurs

Il faut donc maintenant déterminer le réglage des coefficients K_p , K_d et K_i .

Le réglage d'un PID est en général très complexe, de nombreuses méthodes existent en fonction du cahier des charges.

Une première méthode consiste à faire une **étude théorique** avec le critère de **Routh-Hurwitz**. Il faut calculer la FTBF du système + correcteur puis construire le tableau de Routh-Hurwitz.

Cela permet d'obtenir uniquement un ordre de grandeur pour K_p . Il est nécessaire alors de procéder à des essais pratiques pour affiner cette valeur.

Les essais pratiques ont un autre avantage.

Les valeurs calculées en théorie ne sont pas exactement les meilleures valeurs à implémenter dans le système réel.

En effet, le calcul ne prend pas en compte les différentes imperfections du système réel (saturation, non linéarité...).

Déterminé expérimentalement, le gain sera mieux ajusté.

La méthode pratique la plus connue a été mise au point en 1942 par Ziegler et Nichols.

Cette méthode est également appelée méthode de pompage ou des oscillations entretenues. Elle a également pour avantage de permettre de piloter un système même si la FT de celui-ci est inconnue.

On commence par régler le correcteur en proportionnel pur.

Pour cela, on augmente progressivement le gain du correcteur proportionnel pur jusqu'à l'apparition d'oscillations entretenues.

On note K_{osc} la valeur du plus petit gain faisant apparaître et maintenir les oscillations.

Notons T_{osc} la période de ces oscillations.

Dès lors, le Tableau 3 élaboré par Ziegler et Nichols permet de calculer les valeurs des autres paramètres vis-à-vis de K_{osc} et T_{osc} .

Avec $T_i = \frac{K_p}{K_i}$ et $T_d = \frac{K_d}{K_p}$.

Attention ces valeurs sont données pour la Boucle Fermée.

Pour le réglage en Boucle Ouverte, il existe d'autres valeurs également données par Ziegler et Nichols et obtenues de manière similaire (augmentation du gain jusqu'à oscillation).

Tableau 3 : Réglage correcteur par la méthode de Ziegler et Nichols.

	P	PI		PID	
		Série	Parallèle	Série	Parallèle
K_p	$\frac{K_{osc}}{2}$	$\frac{K_{osc}}{2.2}$		$\frac{K_{osc}}{3.3}$	$\frac{K_{osc}}{1.7}$
T_i		$\frac{T_{osc}}{1.2}$	$\frac{2 T_{osc}}{K_{osc}}$	$\frac{T_{osc}}{4}$	$\frac{0.85 T_{osc}}{K_{osc}}$
T_d				$\frac{T_{osc}}{4}$	$\frac{K_{osc} T_{osc}}{13.3}$

Cette méthode est basée sur l'apparition des oscillations. **Cela implique qu'elle n'est utilisable que si le système étudié supporte les dépassements.**

Un correcteur PID permet en théorie de rendre le système stable, précis et rapide.

Mais, si l'augmentation du gain permet de rendre le système précis et rapide, une augmentation trop importante peut entraîner une saturation. Le système n'est alors plus linéaire.

Le régulateur idéal n'existe donc pas. Il faut trouver des compromis.

De plus, le correcteur PID n'est pas la solution à tout.

En d'autres termes, mettre en place un PID n'est pas forcément l'unique et meilleur choix. Il va surement améliorer les performances comme attendues mais il est possible qu'un correcteur PI aurait suffi pour faire le même travail.

Un PID nécessite plus de matériels ce qui augmente les coûts et l'encombrement et complique le travail d'élaboration du correcteur.

C'est pourquoi, il est important de bien analyser les performances du système seul, de les confronter au cahier des charges pour établir le correcteur adapté et non foncer tête baissée sur un PID.

3.2.5. Bilan

Nous avons donc vu 4 types de correcteurs possibles. Chacun d'entre eux permet d'améliorer certaines performances mais au détriment d'autres.

Il en existe bien sûr d'autres que nous n'avons pas abordés. Ces autres correcteurs sont notamment utiles lorsque le système possède un ordre supérieur à 2.










Le choix du correcteur dépend des critères demandés dans le cahier des charges.

- Le **correcteur Proportionnel P** : correcteur le plus simple, son action est instantanée. Il améliore la précision en diminuant l'erreur statique. En revanche, il ne permet pas de l'annuler. Si le gain est choisi trop grand, le système peut devenir instable.
- Le **correcteur Intégral I** : il permet d'annuler complètement l'erreur statique en augmentant l'ordre de la FTBF. Néanmoins, il ralentit le système pouvant le rendre instable.
- Le **correcteur Dérivé D** : provoque une action très dynamique qui améliore la rapidité et permet de rendre le système plus stable.

La combinaison de ces 3 actions va permettre d'améliorer certains critères mais en détériorer d'autres.

Le Tableau 4 récapitule les effets des correcteurs.

Tableau 4 : Bilan des correcteurs.

	Rapidité	Stabilité	Précision
PD			
PI			
PID			

Pour mettre en place un correcteur :

1. Analyser le système : identification, performances...
2. Analyser le cahier des charges et traduire en termes de performances attendues.
3. Choix de la structure du correcteur vis-à-vis du cahier des charges et du système.
4. Calcul des paramètres du correcteur.
5. Vérification des performances du système corrigé. Si le cahier des charges n'est pas satisfait, il faut recommencer à l'étape 3.
6. Réalisation de l'asservissement et tests.

Si le cahier des charges spécifie un critère fréquentiel, il faut alors utiliser une méthode fréquentielle.

Pour cela, il faut tout d'abord déterminer le lieu de transfert puis le point critique par les diagrammes de Bode. On va tenter de s'éloigner de ce point critique. Il faut alors utiliser les marges de stabilités.

Pour obtenir une erreur statique nulle, il faut une action intégrale. Le correcteur sera donc au moins un PI. La valeur de la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges permet alors de déterminer $|G|$ et $\arg(G)$ et donc de déduire ω_0 et K .

Dans ce type de correcteur, on souhaite $\frac{1}{T_i p} + 1$ négligeable en ω_0 . On prendra des valeurs de l'ordre de $\frac{1}{T_i} = 0.1 \omega_0$. On en déduit alors T_i .

On calcule ensuite la marge de phase obtenue pour ces paramètres du correcteur. Si la marge de phase est trop faible par rapport à ce qui est demandé dans le cahier des charges, on prendra $\frac{1}{T_i} < 0.1 \omega_0$. On calcule à nouveau la marge de phase pour cette nouvelle valeur. K reste inchangé.

Si le cahier des charges ne demande pas d'erreur statique nulle, un correcteur P simple peut être suffisant.

On détermine alors K et on en déduit la marge de phase. Si cette marge est trop faible, il faut opter pour un correcteur PD.

On garde alors le même ω_0 et K et on détermine T_d pour la marge de phase.

4. Réalisation et conception du correcteur analogique

Maintenant que nous avons vu les correcteurs, il faut les concevoir à l'aide de composants analogiques.

Les composants peuvent être de nature électrique, mécanique, pneumatique ou encore hydraulique. Nous ne nous intéresserons uniquement aux correcteurs électriques.

Il existe de nombreuses possibilités de réalisation dans les ouvrages. Nous ne détaillerons ici que certains exemples.

4.1. Schéma électronique du correcteur

Les correcteurs peuvent être passifs.

Dans ce cas, seuls des composants passifs sont utilisés (résistances, condensateurs...). Malheureusement, ce type de correcteur ne peut être mis en cascade (ou série) pour en créer des plus complexes à cause des perturbations d'un correcteur vis-à-vis de l'autre.

On utilise alors des composants actifs où l'on va introduire des amplificateurs opérationnels. Nous allons aborder les correcteurs actifs.

Le format générique d'un correcteur actif est donné dans la Figure 34.

Dans ce schéma la broche positive de l'amplificateur opérationnel est reliée au GND et l'entrée négative au signal d'entrée. Dans certains montages, il est possible qu'une résistance soit ajoutée entre la broche positive et le GND. Néanmoins, cette résistance n'entre pas dans le calcul des paramètres du correcteur. Elle ne sera donc pas représentée par la suite.

Ce signal d'entrée de l'amplificateur opérationnel correspond à l'écart ε . Sa sortie $U(p)$ correspond à la loi de commande appliquée en entrée du système à commander.

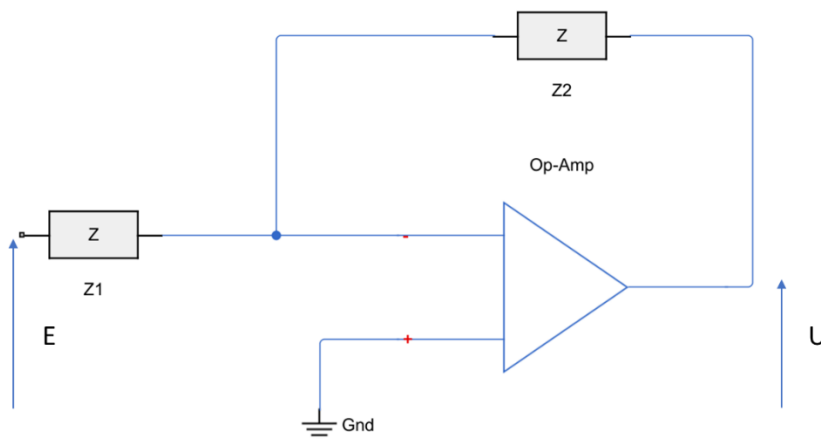


Figure 34 : Schéma générique d'un correcteur analogique.

La FT est alors :

$$\frac{U(p)}{E(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}.$$

Il faut maintenant déterminer les valeurs des impédances Z_1 et Z_2 afin de construire le correcteur voulu.

Afin de se ramener à une FT de la forme $\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}$ et donc éliminer le signe négatif, un amplificateur inverseur (Figure 1Figure 35) peut être ajouté à la suite de notre correcteur. Attention, il faut que ce correcteur ait un gain de -1. Il faut donc prendre $R_1 = R_2$.

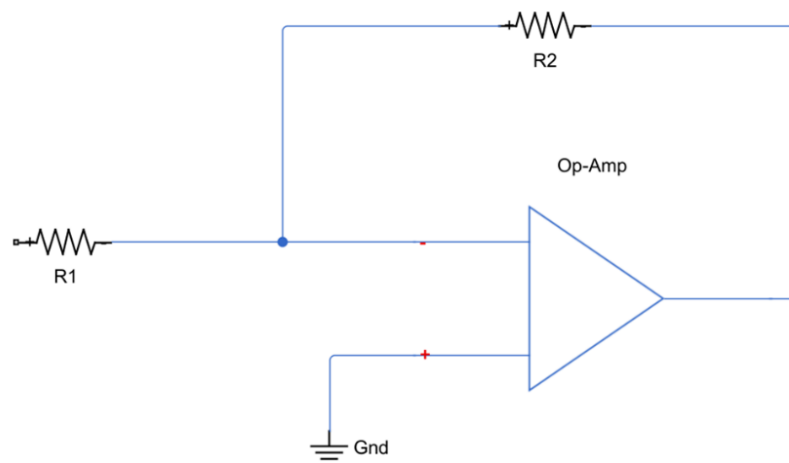


Figure 35 : Montage inverseur.

Par la suite, ce montage inverseur ne sera pas spécifié dans les différents correcteurs.

Attention, afin de simplifier les calculs, les amplificateurs opérationnels sont considérés comme idéaux. On suppose alors par la suite que l'amplification en tension est infinie.

4.2. Calcul des valeurs des composants

Nous allons voir comment réaliser, à l'aide de composants, ces correcteurs.

4.2.1. P

Nous avons vu que le correcteur proportionnel était le plus simple, que la correction apportée n'était pas optimale mais qu'il permettait par la suite de mettre en place d'autres correcteurs.

Le correcteur P correspond à un gain. Son schéma est donc simple.

Il consiste en 2 résistances (Figure 36) dont il faut déterminer les valeurs pour obtenir le gain désiré.

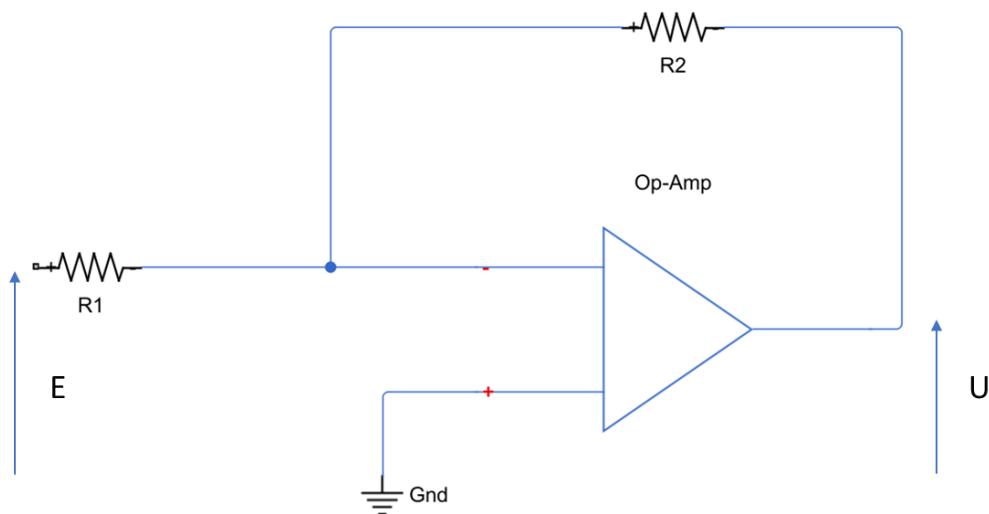


Figure 36 : Correcteur analogique Proportionnel.

On a alors :

$$\frac{U(p)}{E(p)} = -\frac{R_2}{R_1} = K$$

4.2.2. PD

Les correcteurs PD permettent d'augmenter la marge de phase.

Comme expliqué précédemment, les correcteurs peuvent être montés en série ou en parallèle.

Pour un correcteur PD série, le montage électronique est le suivant :

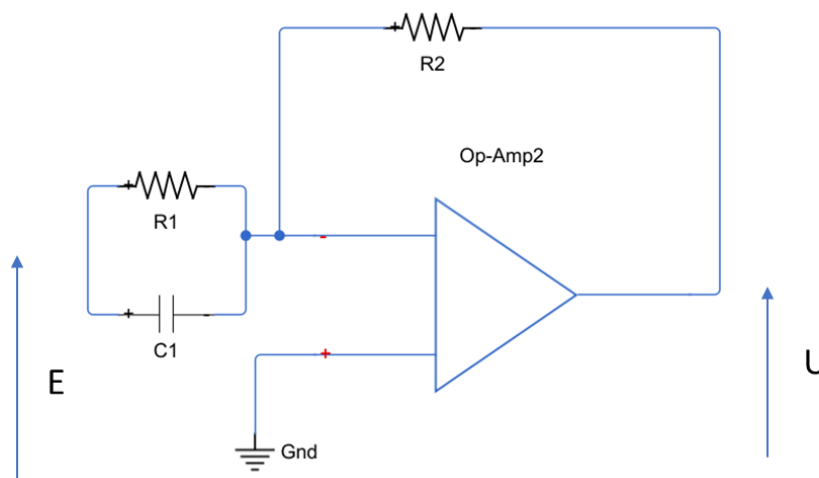


Figure 37 : Correcteur analogique PD série.

Il est possible d'ajouter une autre résistance en série avec C_1 afin de limiter le gain en haute fréquence.

La FT d'un tel correcteur est :

$$C(p) = K_p(1 + K_d \cdot p)$$

D'après la Figure 37,

$$\frac{U(p)}{E(p)} = -\frac{R_2}{R_1}(1 + R_1 C_1 p) = K_p(1 + K_d \cdot p)$$

On obtient donc :

$$K_p = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$K_d = R_1 C_1$$

Avec les correcteurs séries, les paramètres sont liés. On peut voir que la configuration de la partie dérivée est dépendante de R_1 tout comme la partie proportionnelle. Si on souhaite augmenter la composante dérivée, il faut augmenter la valeur de la capacité.

On peut alors utiliser la forme parallèle.

La Figure 38 donne la forme d'un correcteur PD parallèle.

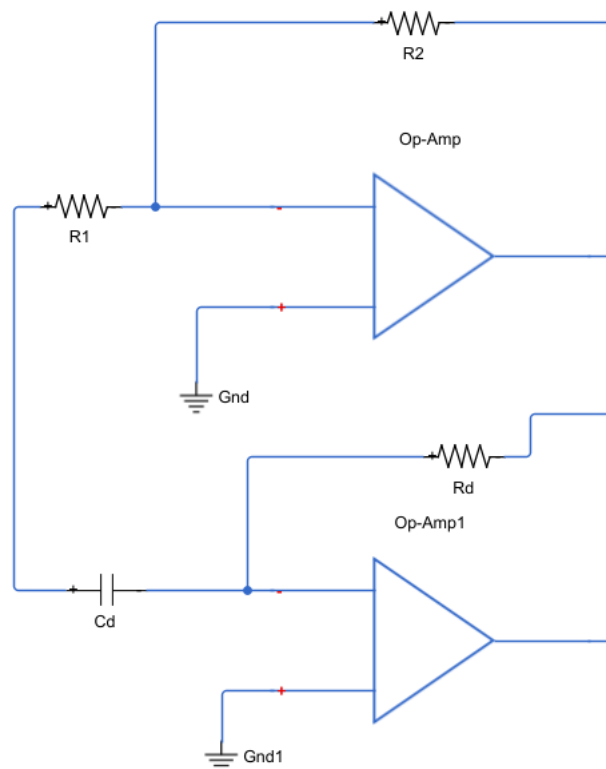


Figure 38 : Correcteur analogique PD parallèle.

On a alors,

$$C(p) = K_p + K_d \cdot p$$

$$K_p = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$K_d = R_d C_d$$

4.2.3. PI

Le schéma d'un correcteur PI série analogique est le suivant :

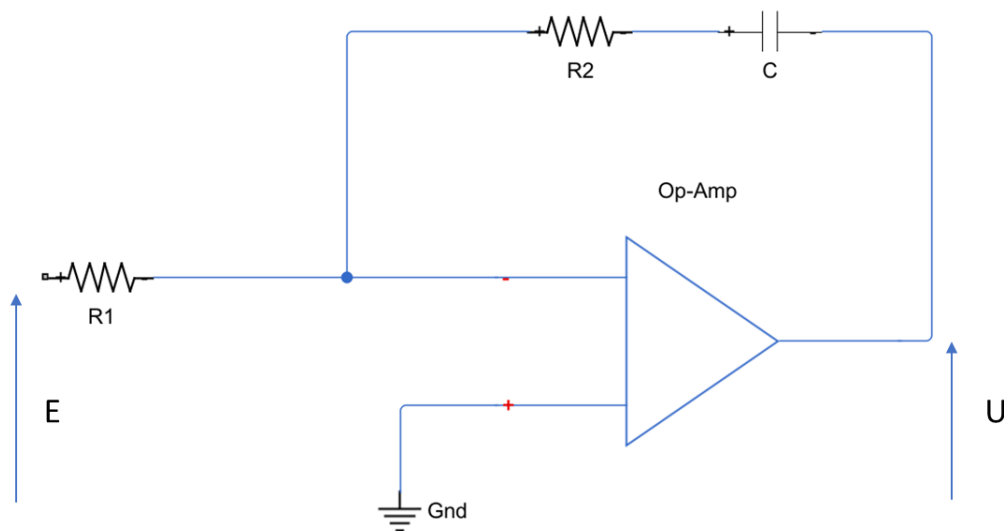


Figure 39 : Correcteur analogique PI série.

On rappelle que la FT d'un correcteur PI est :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{p}\right)$$

D'après la Figure 39,

$$\frac{U(p)}{E(p)} = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{1}{R_2 C p}\right) = K_p \left(1 + \frac{K_i}{p}\right)$$

On obtient donc :

$$K_p = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$K_i = \frac{1}{R_2 C}$$

Avec ce schéma, les valeurs de K_p et K_i sont dépendantes.

Il est possible alors d'utiliser un montage avec un amplificateur opérationnel supplémentaire (Figure 40) pour permettre le réglage de la composante intégrale indépendamment de la composante proportionnelle. C'est le montage **parallèle** d'un PI.

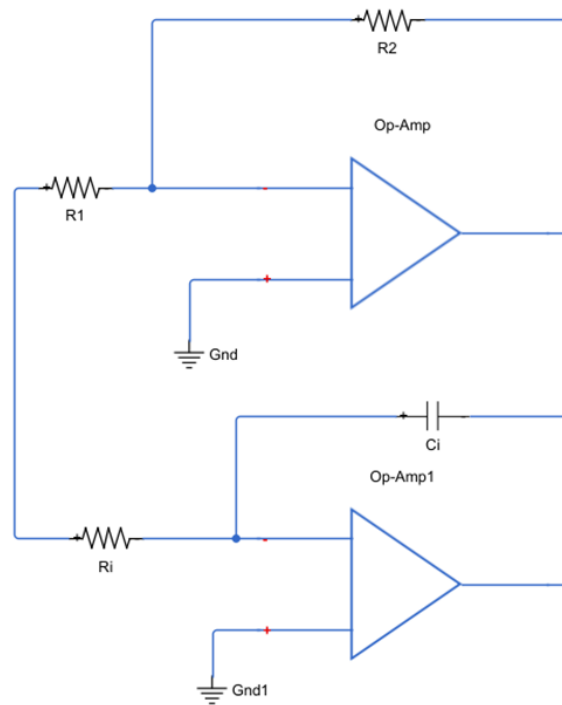


Figure 40 : Correcteur analogique PI parallèle.

Ainsi,

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$$

Avec : $K_p = -\frac{R_2}{R_1}$ et $K_i = \frac{1}{R_i C_i}$

4.2.4. PID

Comme expliqué précédemment, les PID, tout comme les correcteurs PI et PD, peuvent être associés différemment (série ou parallèle). Le choix de la structure va donc influencer le schéma électronique et donc les composants choisis.

Pour un PID série dont la FT s'exprime : $C(p) = K_p(1 + \frac{K_i}{p})(1 + K_d p)$ le schéma est représenté dans la Figure 41.

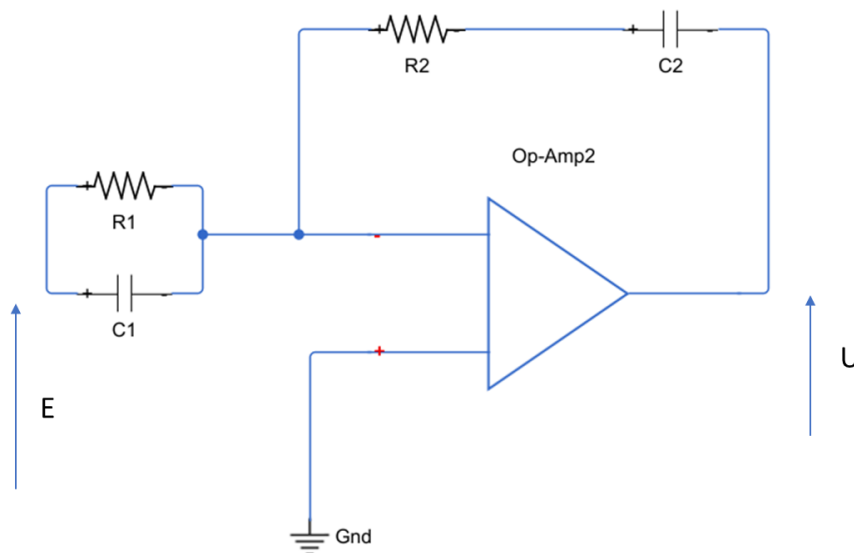


Figure 41 : Correcteur analogique PID série.

On obtient donc :

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}$$

$$K_i = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$K_d = R_2 C_1$$

Les paramètres des 3 correcteurs sont encore liés.

Support de cours

En utilisant la forme parallèle de la Figure 42, on obtient les paramètres suivants :

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d \cdot p$$

Avec : $K_p = -\frac{R_2}{R_1}$, $K_i = \frac{1}{R_i C_i}$ et $K_d = R_d C_d$

Avec ce type de montage, les paramètres peuvent être configurés séparément.

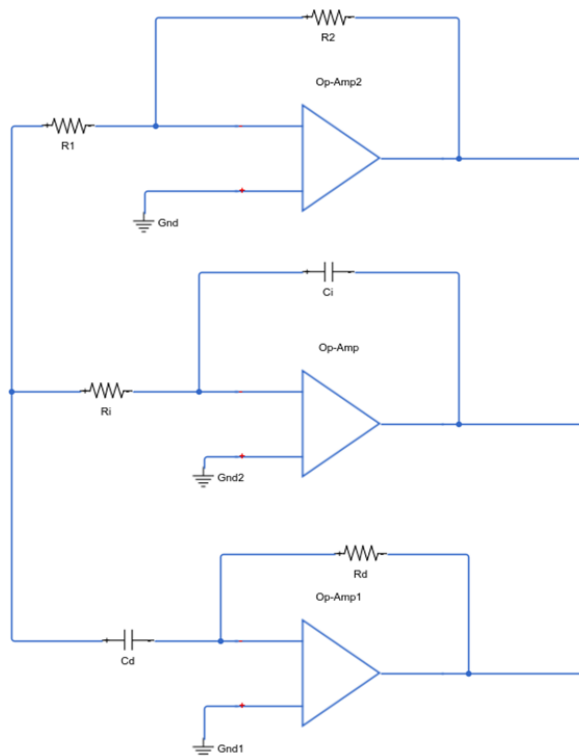


Figure 42 : Correcteur analogique PID parallèle.