

# Osciloscopio\*

Jesus Prada<sup>†</sup> and Sergio Iván Rey<sup>‡</sup>  
Departamento de Física, Universidad de los Andes  
(Dated: 13/8/2015)

Durante la presente práctica se estudiaron los fenómenos ondulatorios en circuitos RC, RLC y en osciladores perpendiculares. En una primera instancia se determinó experimentalmente el tiempo de característico de carga y descarga de un condensador. Donde se encontró  $\tau = 274 \pm 4ms$  para la configuración  $R = 470\Omega, C = 470\mu F$  y  $\tau = 478 \pm 4\mu s$  para la configuración  $R = 470\Omega, C = 47\mu F$ . Estas medidas tienen un error del 25% y del 1% respectivamente. Esto, y otros argumentos presentados nos llevaron a pensar que en la primera configuración los dispositivos usados estaban en mal estado. En segunda instancia, se construyó un circuito RLC en serie con  $C = 47nF, L = 2mH, R = 0.8\Omega$ , donde se midió la frecuencia natural del sistema  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , y por dos métodos diferentes se determinó el parámetro de resistencia  $\gamma = \frac{R}{L}$ . Los resultados obtenidos fueron  $f_0 = 16.583 \pm 0.03KHz$ , lo cual tiene un error de 1% respecto a su valor teórico, y  $\gamma = 25.639 \pm 0.4KHz$ , lo cual tiene un error muy alto pero consistente con dos experimentos, por lo que se deduce que se subestimó la resistencia del circuito general. Para los osciladores perpendiculares se confirmaron cualitativamente varios aspectos teóricos de las curvas que formaban.

## I. INTRODUCCIÓN

Las resistencias, capacitancias e inductancias son de los componentes más fundamentales de los circuitos electrónicos. Su comportamiento puede ser cuantificado con gran exactitud y por esta razón sirven para estudiar diversos sistemas que van desde sistemas no oscilatorios hasta sistemas de oscilaciones forzadas y amortiguadas. Las diversas aplicaciones de los circuitos RC, RL, LC, RLC, etc. van desde transformadores AC a DC, filtros de señales, hasta generadores simples de voltaje. Estos circuitos son los componentes primordiales de elementos cotidianos como las bujías, los flashes de cámaras fotográficas, etc.

En primera instancia, en este laboratorio nos interesamos en estudiar el proceso de carga y descarga de un capacitor en un circuito RC en serie bajo una diferencia de potencial constante ( $V_f$ ). Si se obtiene la ecuación diferencial para la carga del capacitor en estos sistemas, es sencillo demostrar que las funciones de voltaje sobre la resistencia para el sistema de carga ( $V_c$ ) y descarga ( $V_d$ ) son respectivamente:

$$Vc(t) = V_f e^{-t/RC} \quad (1)$$

$$Vd(t) = -V_f e^{-t/RC} \quad (2)$$

En estas ecuaciones,  $\tau = RC$  es una constante fundamental que indica qué tan rápido se carga o descarga

el capacitor. Esta constante indica en cuánto tiempo el voltaje en la resistencia llega a un factor de  $e^{-1} \approx 37\%$  de su valor inicial.

En segunda instancia, para caracterizar un sistema oscilatorio forzado y amortiguado con el osciloscopio, nos propusimos estudiar un circuito RLC en serie. Para este tipo de circuitos, la ecuación diferencial que caracteriza la carga almacenada en el capacitor es lineal de segundo orden. De forma general, la ecuación diferencial este tipo de sistemas es de la forma:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (3)$$

Aquí  $\omega$  es la frecuencia de forzamiento de la fuente y  $F_0$  su amplitud. El parámetro  $m$  sería la masa en un sistema mecánico.  $\omega_0$  es la frecuencia natural del sistema. El parámetro  $\gamma$  hace referencia a la perdida de energía del sistema, por fricción en sistemas mecánicos, y por resistencia en los electrónicos. Estos dos últimos parámetros determinan la resonancia del sistema respecto a la fuente de forzamiento, e incluso determinan si la ecuación diferencial acepta o no soluciones oscilatorias en el caso en que no haya forzamiento ( $\omega = 0$ ).

Sin mucho esfuerzo, analizando el circuito RLC en sí, es posible deducir que  $m \equiv L$ ,  $F_0 \equiv V_f$  y que los valores de los parámetros de frecuencia y fricción están dados por: [?]

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4)$$

$$\gamma = R/L \quad (5)$$

\*

<sup>†</sup> jd.prada1760@uniandes.edu.co; Also at Departamento de Física,  
Universidad de los Andes

<sup>‡</sup> si.rey1826@uniandes.edu.co

Si hay la fuente es una onda sinusoidal, es decir, si hay forzamiento, la ecuación diferencial solo aceptará soluciones de tipo sinusoidal, con frecuencia igual a la de forzamiento ( $q(t) = Ae^{i\omega t + \delta}$ ). En este caso, lo importante es analizar la amplitud de las soluciones en términos de la frecuencia de forzamiento. Si insertamos la solución propuesta en la ecuación diferencial, obtenemos una expresión para la amplitud del sistema en términos de la frecuencia de forzamiento: [?]

$$A(\omega) = \frac{V_f/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (6)$$

Derivando esta expresión, se puede encontrar la frecuencia de forzamiento ( $\omega_m$ ) que produce el máximo de amplitud en el sistema. Esta frecuencia estará dada por:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (7)$$

De la misma manera es sencillo demostrar que el ancho de la curva de resonancia, es decir, la distancia entre los dos valores de frecuencia que producen la mitad de la amplitud máxima, está dado por:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} = \gamma = \frac{R}{L} \quad (8)$$

En tercera instancia, para analizar un sistema no forzado y amortiguado, tomamos el mismo circuito RLC, esta vez, bajo una fuente directa. En este caso, si se tiene una resistencia lo suficientemente pequeña, la ecuación diferencial admitirá soluciones oscilatorias. En dicho caso, la solución a la ecuación diferencial (3), con  $\omega = 0$  es una onda con la frecuencia  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ , con amplitud modulada por una exponencial determinada por la resistencia. Esta solución se presenta de la siguiente manera: [?]

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_a t + \delta) \quad (9)$$

Por otra parte, los sistemas electrónicos son generalmente más precisos que los sistemas mecánicos, por lo que si se tiene a la mano un osciloscopio y varios generadores de señales, se puede analizar cualitativamente varios aspectos de los sistemas oscilatorios. Un ejemplo de análisis cualitativo que se puede hacer con estos elementos son las curvas de Lissajous. Estas curvas consisten en la superposición de dos movimientos armónicos simples con distintos parámetros de frecuencia y amplitud. De la forma más general, las figuras de Lissajous son determinadas curvas paramétricas del

siguiente estilo:

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \delta)$$

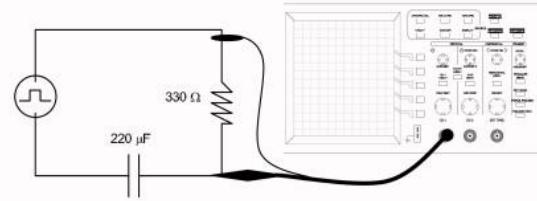
Si ambas paramétricas tienen la misma frecuencia  $\omega$  y un desfase  $\delta$  nulo, tendremos el caso de una recta de la forma  $y = \frac{A_y}{A_x}x$ . Por otra parte, si su desfasaje es igual a  $\frac{\pi}{2}$ , es sencillo demostrar que la curva que se describe es una elipse de tipo  $(\frac{y}{A_y})^2 + (\frac{x}{A_x})^2 = 1$ . Si las frecuencias no son las mismas, las figuras de Lissajous se vuelven complicadas y difíciles de analizar con herramientas simples. Aún así, se puede afirmar que las curvas serán cerradas siempre que las frecuencias sean commensurables.

## II. MONTAJE EXPERIMENTAL

El equipo que se utilizó durante la práctica consistía de dos generadores de onda, un osciloscopio, capacitores, inductores y resistencias de diferentes valores.

Para el primer montaje, se configuró el generador de onda para que generara una onda cuadrada con una frecuencia de 10Hz y una amplitud de 10V, sin embargo la sonda que conectaba éste al osciloscopio distorsionaba los valores leídos. El circuito montado es un circuito RC en serie como el que se muestra en la figura.

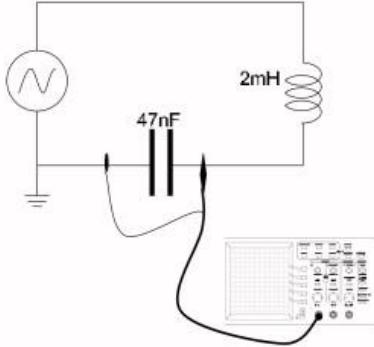
FIG. 1. Montaje de Circuito RC en Serie



Para la segunda manipulación, el generador de onda se reajustó para generar una onda sinusoidal, a continuación se construyó un circuito RLC en serie como el que se muestra en la figura. En este caso, el valor de R proporciona el inductor mismo. Luego, teniendo montado el mismo circuito, se cambió la forma de la señal a onda cuadrada. Debe anotarse que los valores de las figuras no son necesariamente los usados durante la práctica.

La tercera manipulación, consistió en conectar ambos generadores de onda directamente al osciloscopio para simular dos osciladores acoplados y ver el fenómeno de las Figuras de Lissajous. Ambos estaban ajustados para generar ondas sinusoidales. El ajuste posterior requirió

FIG. 2. Montaje de Circuito RLC en Serie



solamente de la calibración del osciloscopio para mostrar una señal como función de la otra.

### III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

#### A. Circuito RC en serie

Para esta manipulación se utilizaron dos combinaciones de resistencia y capacitor. En primer lugar,  $R = 470\Omega$  y  $C = 470\mu F$  y en segundo lugar,  $R = 10K\Omega$  y  $C = 47nF$ . Para la primera configuración el generador de onda se ajustó para generar una onda cuadrada, de tal manera que se pudiera simular un impulso de corriente directa. Dado que el valor nominal esperado de  $\tau$  era de 22ms, se ajustó la frecuencia del circuito a 5Hz para que en cada pico se pudiera apreciar significativamente el decaimiento del voltaje en el sistema.

Se procedió a medir  $\tau$  buscando un valor en la curva de decaimiento que correspondiera al 37% del valor máximo de voltaje alcanzado que era de  $V_{max} = 155 \pm 1V$ . Su 37% correspondiente es de 57.35V, que, por cuestiones de resolución sólo se pudo llegar a medir 57V. Para la configuración  $R = 10K\Omega$  y  $C = 47nF$  se hizo el mismo procedimiento. Los datos obtenidos se consignaron en la tabla I.

$C$ (F)	$R$ ( $\Omega$ )	$\tau$ (ms)	Proceso
$470 \times 10^{-6}$	470	276	Carga
$470 \times 10^{-6}$	470	272	Descarga
$47 \times 10^{-9}$	10000	0.480	Carga
$47 \times 10^{-9}$	10000	0.476	Descarga

TABLE I. Tiempos de carga y descarga, circuito RC en serie

La mínima resolución medida en tiempo era de aproximadamente 4ms para la primera configuración y  $4\mu s$  para la segunda configuración. Entre las configuraciones solo se cambió la escala del tiempo. Si tomamos el valor promedio en cada medida, los resultados de este experimento fueron  $\tau = 274 \pm 4ms$  para el primer

experimento y  $\tau = 478 \pm 4\mu s$  para la segunda configuración. Los errores porcentuales fueron del 25% y del 1% respectivamente.

Cabe resaltar que en un principio la segunda configuración (diferente a la aquí presentada) daba un error del 300% y daba un valor de capacitancia que era dos órdenes de magnitud alejados de la realidad. En los experimentos RLC se midió este mismo valor de capacitancia por lo que se concluyó que la capacitancia usada estaba desgastada. Decidimos repetir el experimento con la segunda configuración con distintas resistencias y capacitancias y obtuvimos los valores presentados acá. Esto nos sirve para justificar que el error del 25% obtenido con la primera configuración puede deberse, además de la inexactitud de la medida y el uso de aproximación para  $37\%V_0$ , al desgaste de las resistencias y capacitancias.

#### B. Circuito RLC Forzado

En este montaje utilizamos los valores  $R = 0.8\Omega$ ,  $L = 2mH$  y  $C = 47nF$ . Como se puede inferir, decidimos tomar únicamente la resistencia del inductor y demás componentes del circuito. Con esta configuración podíamos apreciar mejor la curva de resonancia y determinar mejor su máximo. Una vez identificado el máximo de amplitud, tomamos 16 datos de frecuencia y voltaje (pp y rms) alrededor del máximo. Dichos datos se presentan en la tabla ??.

En estos resultados, la precisión de la frecuencia por medio del generador era enorme, por lo que no la tendremos en cuenta. En este experimento trabajamos con frecuencias del orden de  $10kHz$  y el generador permitía cambiar la frecuencia hasta el orden de los  $mHz$ . Por su parte, la precisión del voltaje estaba dada por el osciloscopio, el cual mostraba usualmente 3 cifras significativas. En general, el error asociado a las mediciones de voltaje se debía a la inestabilidad de la medida y no a la restricción por cifras significativas. El osciloscopio mostraba valores cercanos que variaban mientras el sistema estaba en una sola configuración. Los valores de voltaje fueron tomados en donde el osciloscopio se mostraba por más tiempo. El error asociado a todas las medidas de voltaje en este montaje, lo tomamos  $0.3V$ , ya que ese era el rango en el que variaban los voltajes mostrados para una sola configuración.

Por otra parte, para una señal sinusoidal, los valores  $V_{pp}$  y  $V_{rms}$  están relacionados por un factor de  $\sqrt{2}$ . Por lo tanto, usar uno u otro para el análisis es equivalente. Sin embargo, el valor  $V_{pp}$  presenta menor error relativo al ser más grande, por lo que decidimos hacer el análisis cuantitativo con dichas cantidades.

Frecuencia (Hz)	$V_{pp}$ (V)	$V_{rms}$ (V)
16.3	12.6	4.37
16.5	12.5	4.35
16.7	12.4	4.3
17.0	12	4.18
17.5	11.1	3.85
18.0	9.84	3.41
16.1	12.5	4.36
16.9	12.4	4.3
15.6	12	4.16
15.2	11.4	3.93
14.5	10	3.42
14.0	9.28	3.19
13.0	7.84	2.72
12.0	6.96	2.37
19.0	7.60	2.62
20.0	5.76	1.98

TABLE II. Datos de curva de resonancia RLC.

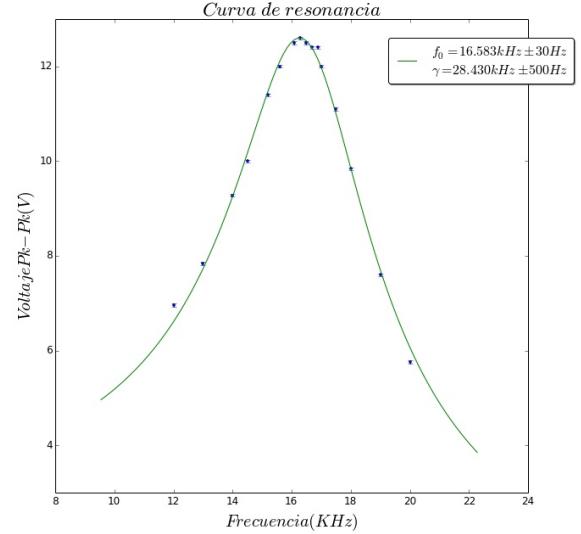
Para obtener el máximo de resonancia de la curva dada por la tabla ??, realizamos computacionalmente un ajuste de parámetros de dichos datos (con  $V_{pp}$ ) teniendo en cuenta que teóricamente deberían tener la forma de la ecuación ???. Dicho ajuste de parámetros itera de manera no aleatoria sobre los parámetros a ajustar decidiendo cual configuración produce la curva más cercana a los datos. Los parámetros ajustados fueron la frecuencia natural  $\omega_0$  del sistema, el parámetro  $\gamma$  de resistencia, y la amplitud  $V_f/L$  por la que no nos interesaremos. Este método computacional hace parte de la librería Optimization de ScyPy y permite además estimar el rango de error de los parámetros ajustados. Los resultados gráficos y cuantitativos del ajuste están presentes en la figura ??.

En esta gráfica se puede ver que el ajuste fue bastante preciso. Para verificarlo, tomamos el valor real de frecuencia angular natural  $f_0^{Teo} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1.,416kHz$  y lo comparamos con el valor experimental obtenido  $f_0^{Exp} = 16.583kHz$ . Debido a que no teníamos el error teórico, no sabremos con exactitud si el valor experimental entra en el rango aceptado. A pesar de esto, podemos afirmar que el error absoluto asociado a esta medición es del 1%.

De la misma manera podemos calcular experimentalmente el valor del término  $\gamma$  de resistencia. En teoría, dicho valor, teniendo en cuenta únicamente el valor de resistencia aportado por la inductancia, está dado por  $\gamma^{Teo} = \frac{R}{L} = 400Hz$ ; experimentalmente, esta cantidad tiene un valor de  $\gamma^{Exp} = 28.430kHz$ . Estos valores están desfasados por casi 2 órdenes de magnitud probablemente por no tener en cuenta todos los valores de resistencia asociados a los demás aparatos usados.

Además del método anterior podemos confirmar esta medida calculando el ancho de banda de la curva de res-

FIG. 3. Ajuste de parámetros para la curva de resonancia



onancia. Teniendo el ajuste de parámetros, tenemos la función en prácticamente cualquier frecuencia deseada. Con esto es muy sencillo calcular numéricamente y con gran precisión el máximo real de la curva. Con este máximo, que se encuentra en  $16,270kHz$  (se encuentra antes de la frecuencia natural como es esperado) podemos calcular los el valor que se tiene que alcanzar para calcular el ancho de banda ( $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ ). Una vez calculados los valores de frecuencia que lo cumplen, obtenemos su diferencia y eso nos da el ancho de banda. El valor experimental obtenido para el ancho de banda es en este caso  $\gamma^{ExpBW} = 28,996kHz$ , lo cual confirma nuestro resultado anterior y le da fuerza a nuestro argumento. Podríamos obtener  $\gamma$  otra vez comparando la frecuencia angular natural  $\omega_0$  y la frecuencia que provoca el máximo en la curva de resonancia, sin embargo, este método sería redundancia del ancho de banda y del uso de parámetros ajustados.

### C. Circuito RLC Amortiguado

En este montaje, el único aspecto que variamos con respecto al anterior fue la forma funcional de la fuente, es decir, los valores de R, L y C se mantuvieron constantes. En el circuito RLC forzado usamos una fuente sinusoidal que provocaba el forzamiento, mientras que en el montaje RLC amortiguado usamos una fuente cuadrada periódica. Ésta se comporta como corriente directa por la mitad del periodo y luego cambia instantáneamente el signo del voltaje aplicado, manteniendo la señal directa. Si analizamos el circuito en los intervalos de tiempo en que se comporta como con corriente directa, analizamos

un circuito RLC amortiguado.

En este experimento pretendíamos obtener el parámetro  $\gamma$ , para lo cual solo era necesario obtener la envolvente, es decir los puntos máximos y mínimos de la curva de voltaje contra tiempo. Debido al amortiguamiento de la señal, solo se pudieron tomar 9 datos en el intervalo de corriente directa. Estos datos están consignados en la tabla ??.

$V$ (V)	$t$ ( $\mu s$ )
9.2	20
4.4	80
2.2	140
1.0	200
0.6	262
-6.0	50
-2.6	110
-1.2	170
-0.6	230
9.2	$\infty$

TABLE III. Datos de señal RLC amortiguado.

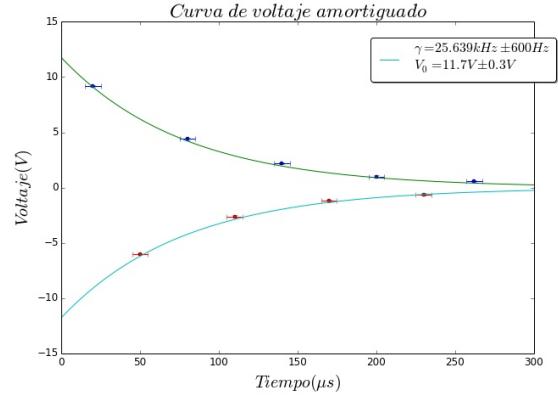
De esta tabla es sencillo notar que los valores de tiempo son en su mayoría múltiplos de 10. Esto nos dice de la resolución en esta medida. Para este análisis tomaremos dicha resolución de tiempo como  $5\mu s$ . Para el voltaje, a diferencia del experimento anterior, las medidas no oscilaban mucho, por lo que tomamos la resolución de voltaje como la mínima cantidad de voltaje que se podía medir:  $0.1V$ .

Cabe resaltar que el valor de voltaje estabilizado del circuito amortiguado, denotado por  $t = \infty$  era  $9.2V$  por lo que para hacer el ajuste exponencial sin tener que ajustar el parámetro de corrimiento, se restó este valor  $9.2V$  a cada dato en la tabla.

Los puntos que pertenecen a los máximos de la envolvente superior e inferior son fácilmente identificables. Dado que la envolvente exponencial es la misma, dada por la ecuación ??, si tomamos el valor absoluto de los voltajes medidos, podremos hacer un ajuste exponencial con todos los 9 datos, en vez de hacer 2 ajustes separados para la envolvente inferior y superior. De esta manera, el número de datos le da consistencia al ajuste y no tenemos que preocuparnos por la elección de un valor para los parámetros de mas de un ajuste. Los resultados gráficos de este ajuste se muestran en la figura ???. Aquí se muestra la envolvente inferior y superior y se usa la misma envolvente, a diferencia de un signo, para graficar el ajuste.

En este experimento volvimos a obtener un valor para  $\gamma$  2 ordenes de magnitud desfasado del valor teórico dado por la inductancia. Dado que el experimento es en principio diferente, así como lo fue el método de ajuste,

FIG. 4. Ajuste exponencial para las envolventes



tenemos evidencia fuerte para afirmar que la resistencia del inductor no era la única resistencia que estaba presente en el circuito RLC armado. Las otras resistencias provienen de cada uno de los aparatos electrónicos utilizados y pueden haber fuentes grandes de resistencia en el óxido por edad y uso de algunos contactos en la protoboard, los cables, y los elementos LC, entre otros. Debido a la simplicidad de la función ajustada, y lo directo de la medida, podemos confiar más en este valor para  $\gamma$ . Sin embargo, dado que descubrimos que estamos subestimando la resistencia total del circuito no podemos arrojar un porcentaje de error con respecto al valor teórico.

#### D. Curvas de Lissajous

Para este montaje tomamos la misma amplitud para cada generador y variamos sus frecuencias y desfases para producir diferentes curvas de Lissajous. El voltaje  $V_{pp}$  leído por el osciloscopio fue constante de  $205V$ . A continuación presentaremos tres imágenes que comparan curvas de Lissajous para una misma razón de frecuencias y distintos desfases. Cabe resaltar que tomamos fotografías únicamente para 2 desfases por cada razón de frecuencias, ya que los generadores se desfasaban naturalmente al cambiar de frecuencia y calibrarlos consumía bastante tiempo.

FIG. 5. Curvas de Lissajous. Razón 1:1, desfases ( $\frac{\pi}{4}, 0$ )



FIG. 6. Curvas de Lissajous. Razón 1:2, desfases  $(0, \frac{\pi}{4})$

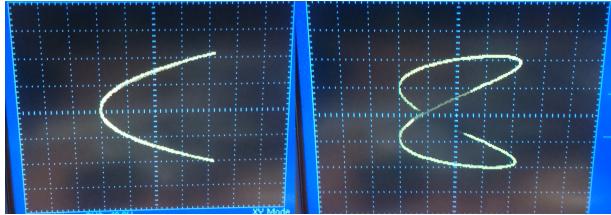


FIG. 7. Curvas de Lissajous. Razón 1:3, desfases  $(0, \frac{\pi}{4})$



Al cambiar continuamente la frecuencia, la imagen mostrada en el osciloscopio daba la impresión de estar rotando. Por otra parte, de estas figuras es importante notar que todas son cerradas. Esto era de esperarse ya que las frecuencias escogidas fueron tales que formaran racionales simples como  $1/2$  o  $1/3$  o  $1$ . Esto nos indica también que la precisión con la que se generan las frecuencias es bastante grande como ya habíamos descrito. En caso de que dicha precisión no fuera tan buena, habríamos observado curvas de Lissajous muy dinámicas en la pantalla.

#### IV. CONCLUSIONES

---

[1] A.P. French, *vibraciones y ondas* Editorial Reverté s.a., 1971, and references.

[2] Universidad de los Andes, *Guía 1 Osciloscopio* 2015, and references.