

# Osciloscopio\*

Ann Author<sup>†</sup> and Second Author<sup>‡</sup>  
*Departamento de Física, Universidad de los Andes*  
(Dated: 13/8/2015)

An article usually includes an abstract, a concise summary of the work covered at length in the main body of the article.

## I. INTRODUCCIÓN

Las resistencias, capacitancias e inductancias son de los componentes más fundamentales de los circuitos electrónicos. Su comportamiento puede ser cuantificado con gran exactitud y por esta razón sirven para estudiar diversos sistemas que van desde sistemas no oscilatorios hasta sistemas de oscilaciones forzadas y amortiguadas. Las diversas aplicaciones de los circuitos RC, RL, LC, RLC, etc. van desde transformadores AC a DC, filtros de seales, hasta generadores simples de voltaje. Estos circuitos son los componentes primordiales de elementos cotidianos como las bujías, los flashes de cámaras fotográficas, etc.

En primera instancia, en este laboratorio nos interesamos en estudiar el proceso de carga y descarga de un capacitor en un circuito RC en serie bajo una diferencia de potencial constante ( $V_f$ ). Si se obtiene la ecuación diferencial para la carga del capacitor en estos sistemas, es sencillo demostrar que las funciones de voltaje sobre el capacitor para el sistema de carga ( $V_c$ ) y descarga ( $V_d$ ) son respectivamente:

$$Vc(t) = V_f(1 - e^{-t/RC}) \quad (1)$$

$$Vd(t) = V_f e^{-t/RC} \quad (2)$$

En estas ecuaciones,  $\tau = RC$  es una constante fundamental que indica qué tan rápido se carga o descarga el capacitor. En el caso del proceso de descarga, esta constante indica en cuánto tiempo el capacitor llega a un factor de  $e^{-1} \approx 37\%$  de su valor inicial.

En segunda instancia, para caracterizar un sistema oscilatorio forzado y amortiguado con el osciloscopio, nos propusimos estudiar un circuito RLC en serie. Para este tipo de circuitos, la ecuación diferencial que caracteriza la carga almacenada en el capacitor es lineal de segundo orden. De forma general, la ecuación diferencial este tipo de sistemas es de la forma:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (3)$$

Aquí  $\omega$  es la frecuencia de forzamiento de la fuente y  $F_0$  su amplitud. El parámetro  $m$  sería la masa en un sistema mecánico.  $\omega_0$  es la frecuencia natural del sistema. El parámetro  $\gamma$  hace referencia a la pérdida de energía del sistema, por fricción en sistemas mecánicos, y por resistencia en los electrónicos. Estos dos últimos parámetros determinan la resonancia del sistema respecto a la fuente de forzamiento, e incluso determinan si la ecuación diferencial acepta o no soluciones oscilatorias en el caso en que no haya forzamiento ( $\omega = 0$ ).

Sin mucho esfuerzo, analizando el circuito RLC en sí, es posible deducir que  $m \equiv L$ ,  $F_0 \equiv V_f$  y que los valores de los parámetros de frecuencia y fricción están dados por:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4)$$

$$\gamma = R/L \quad (5)$$

Si hay la fuente es una onda sinusoidal, es decir, si hay forzamiento, la ecuación diferencial solo aceptará soluciones de tipo sinusoidal, con frecuencia igual a la de forzamiento ( $q(t) = A * e^{i\omega t + \delta}$ ). En este caso, lo importante es analizar la amplitud de las soluciones en términos de la frecuencia de forzamiento. Si insertamos la solución propuesta en la ecuación diferencial, obtenemos una expresión para la amplitud del sistema en términos de la frecuencia de forzamiento:

$$A(\omega) = \frac{V_f/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (6)$$

Derivando esta expresión, se puede encontrar la frecuencia de forzamiento ( $\omega_m$ ) que produce el máximo de amplitud en el sistema. Esta frecuencia estará dada por:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \quad (7)$$

---

\* A footnote to the article title

<sup>†</sup> Also at Departamento de Física, Universidad de los Andes

<sup>‡</sup> Second.Author@institution.edu

De la misma manera es sencillo demostrar que el ancho de la curva de resonancia, es decir, la distancia entre los dos valores de frecuencia que producen la mitad de la amplitud máxima, está dado por:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\gamma} = \frac{L}{R} \quad (8)$$

En tercera instancia, para analizar un sistema no forzado y amortiguado, tomamos el mismo circuito RLC, esta vez, bajo una fuente directa. En este caso, si se tiene una resistencia lo suficientemente pequeña, la ecuación diferencial admitirá soluciones oscilatorias. En dicho caso, la solución a la ecuación diferencial (3), con  $\omega = 0$  es una onda con la frecuencia  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ , con amplitud modulada por una exponencial determinada por la resistencia. Esta solución se presenta de la siguiente manera:

$$V(t) = V_0 e^{\frac{-\gamma t}{2}} \cos(\omega_a t + \delta) \quad (9)$$

## II. MONTAJE EXPERIMENTAL

## III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

### A. Circuito RLC Forzado

En este montaje utilizamos los valores  $R = 0.8\Omega$ ,  $L = 2mH$  y  $C = 47nF$ . Como se puede inferir, decidimos tomar únicamente la resistencia del inductor y demás componentes del circuito. Con esta configuración podíamos apreciar mejor la curva de resonancia y determinar mejor su máximo. Una vez identificado el máximo de amplitud, tomamos 16 datos de frecuencia y voltaje (pp y rms) alrededor del máximo. Dichos datos se presentan en la tabla I.

En estos resultados, la precisión de la frecuencia por medio del generador era enorme, por lo que no la tendremos en cuenta. En este experimento trabajamos con frecuencias del orden de  $10kHz$  y el generador permitía cambiar la frecuencia hasta el orden de los  $mHz$ . Por su parte, la precisión del voltaje estaba dada por el osciloscopio, el cual mostraba usualmente 3 cifras significativas. En general, el error asociado a las mediciones de voltaje se debía a la inestabilidad de la medida y no a la restricción por cifras significativas. El osciloscopio mostraba valores cercanos que variaban mientras el sistema estaba en una sola configuración. Los valores de voltaje fueron tomados en donde el osciloscopio se mostraba por más tiempo. El error asociado a todas las medidas de voltaje en este montaje, lo tomamos  $0.3V$ , ya que ese era el rango en el que variaban los voltajes

mostrados para una sola configuración.

Por otra parte, para una seal sinusoidal, los valores  $V_{pp}$  y  $V_{rms}$  están relacionados por un factor de  $\sqrt{2}$ . Por lo tanto, usar uno u otro para el análisis es equivalente. Sin embargo, el valor  $V_{pp}$  presenta menor error relativo al ser más grande, por lo que decidimos hacer el análisis cuantitativo con dichas cantidades.

Frecuencia (Hz)	$V_{pp}$ (V)	$V_{rms}$
16.3	12.6	4.37
16.5	12.5	4.35
16.7	12.4	4.3
17.0	12	4.18
17.5	11.1	3.85
18.0	9.84	3.41
16.1	12.5	4.36
16.9	12.4	4.3
15.6	12	4.16
15.2	11.4	3.93
14.5	10	3.42
14.0	9.28	3.19
13.0	7.84	2.72
12.0	6.96	2.37
19.0	7.60	2.62
20.0	5.76	1.98

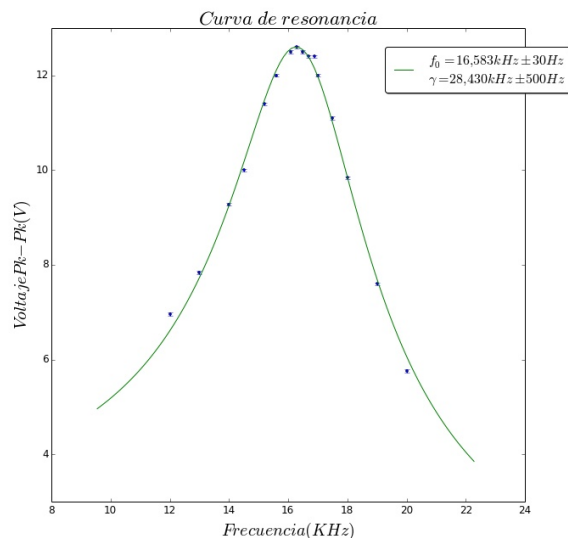
TABLE I. Datos de curva de resonancia RLC.

Para obtener el mximo de resonancia de la curva dada por la tabla I, realizamos computacionalmente un ajuste de parmetros de dichos datos (con  $V_{pp}$ ) teniendo en cuenta que teóricamente deberían tener la forma de la ecuación 6. Dicho ajuste de parmetros itera de manera no aleatoria sobre los parámetros a ajustar decidiendo cual configuración produce la curva más cercana a los datos. Los parámetros ajustados fueron la frecuencia natural  $\omega_0$  del sistema, el parámetro  $\gamma$  de resistencia, y la amplitud  $V_f/L$  por la que no nos interesaremos. Este método computacional hace parte de la librería Optimization de ScyPy y permite además estimar el rango de error de los parámetros ajustados. Los resultados gráficos y cuantitativos del ajuste están presentes en la figura 1.

En esta gráfica se puede ver que el ajuste fue bastante preciso. Para verificarlo, tomamos el valor real de frecuencia angular natural  $\omega_0^{Teo} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 16,416kHz$  y lo comparamos con el valor experimental obtenido  $\omega_0^{Exp} = 16,583kHz$ . Debido a que no tenemos el error terico, no sabremos con exactitud si el valor experimental entra en el rango aceptado. A pesar de esto, podemos afirmar que el error absoluto asociado a esta medicion es del 1%.

De la misma manera podemos calcular experimentalmente el valor del término  $\gamma$  de resistencia. En teora, dicho valor, teniendo en cuenta únicamente el

FIG. 1. Ajuste de parámetros para la curva de resonancia



valor de resistencia aportado por la inductancia, está dado por  $\gamma^{Teo} = \frac{R}{L} = 400 Hz$ ; experimentalmente, esta cantidad tiene un valor de  $\gamma^{Exp} = 28,430 KHz$ . Estos valores están desfasados por casi 2 órdenes de magnitud probablemente por no tener en cuenta todos los valores de resistencia asociados a los demás aparatos usados.

Además del método anterior podemos confirmar esta medida calculando el ancho de banda de la curva de resonancia. Teniendo el ajuste de parámetros, tenemos la función en prácticamente cualquier frecuencia deseada. Con esto es muy sencillo calcular numéricamente y con gran precisión el máximo real de la curva. Con este máximo, que se encuentra en  $16,270 KHz$  (se encuentra antes de la frecuencia natural como es esperado) podemos calcular el valor que se tiene que alcanzar para calcular el ancho de banda ( $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ ). Una vez calculados los valores de frecuencia que lo cumplen, obtenemos su diferencia y eso nos da el ancho de banda. El valor experimental obtenido para el ancho de banda es en este caso  $\gamma^{ExpBW} = 28,996 KHz$ , lo cual confirma nuestro resultado anterior y le da fuerza a nuestro argumento. Podríamos obtener  $\gamma$  otra vez comparando la frecuencia angular natural  $\omega_0$  y la frecuencia que provoca el máximo en la curva de resonancia, sin embargo, este método sería redundancia del ancho de banda y del uso de parámetros ajustados.

## IV. CONCLUSIONES

### A. Citations and References

A citation in text uses the command `\cite{#1}` or `\onlinecite{#1}` and refers to an entry in the bibliography. An entry in the bibliography is a reference to another document.

#### 1. Citations

Because REVTeX uses the `natbib` package of Patrick Daly, the entire repertoire of commands in that package are available for your document; see the `natbib` documentation for further details. Please note that REVTeX requires version 8.31a or later of `natbib`.

*a. Syntax* The argument of `\cite` may be a single *key*, or may consist of a comma-separated list of keys. The citation *key* may contain letters, numbers, the dash (-) character, or the period (.) character. New with `natbib` 8.3 is an extension to the syntax that allows for a star (\*) form and two optional arguments on the citation key itself. The syntax of the `\cite` command is thus (informally stated)

`\cite { key }, or`  
`\cite { optarg+key }, or`  
`\cite { optarg+key , optarg+key... },`  
 where *optarg+key* signifies

*key*, or  
`*key`, or  
`[pre]key`, or  
`[pre] [post]key`, or even  
`*[pre] [post]key`.

where *pre* and *post* is whatever text you wish to place at the beginning and end, respectively, of the bibliographic reference (see Ref. [?] and the two under Ref. [?]). (Keep in mind that no automatic space or punctuation is applied.) It is highly recommended that you put the entire *pre* or *post* portion within its own set of braces, for example: `\cite { [ {text} ]key }`. The extra set of braces will keep L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X out of trouble if your *text* contains the comma (,) character.

The star (\*) modifier to the *key* signifies that the reference is to be merged with the previous reference into a single bibliographic entry, a common idiom in APS and AIP articles (see below, Ref. [?]). When references are merged in this way, they are separated by a semicolon instead of the period (full stop) that would otherwise appear.

*b. Eliding repeated information* When a reference is merged, some of its fields may be elided: for example, when the author matches that of the previous reference, it is omitted. If both author and journal match, both are omitted. If the journal matches, but the author does not, the journal is replaced by *ibid.*, as exemplified by Ref. [?]

]. These rules embody common editorial practice in APS and AIP journals and will only be in effect if the markup features of the APS and AIP BibTEX styles is employed.

*c. The options of the cite command itself* Please note that optional arguments to the *key* change the ref-

erence in the bibliography, not the citation in the body of the document. For the latter, use the optional arguments of the `\cite` command itself: `\cite *[pre-cite] [post-cite]{key-list}`.