El problema de tres cuerpos en la superficie esférica

Jesus Prada

Advisor: PhD Alonso Botero

Universidad de los Andes, Departamento de Física

Marzo 9, 2016

El problema de tres cuerpos en la superficie esférica

Jesus Prada

Introducción

Introducción Motivación

Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar

Jesus Prada

Introducción Introducción Motivación

Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar

References

ntroducción

ntroducción Motivación

Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar

Jesus Prada

Introducción

Introducción

Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar

References

► El problema de N cuerpos trata de estudiar las trayectorias que seguirían N partículas interactuando con fuerzas externas e internas, teniendo en cuenta la información de las condiciones iniciales.

► Es de interés para la comprensión de la mecánica clásica. Fue así como Poincaré planteó las bases de la teoría del caos. [1]

Tabla de

contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético

Deference

Para N ≥ 3 los sistemas son en general no integrables. Varios casos son integrables pero involucran Fuerzas poco realistas [2].

- ► Alonso Botero et al. demostraron en [3] la integrabilidad de un caso de tres partículas cargadas en el plano.
- ► El caso incluye potenciales centrales y puede ser tomado como modelo de electrones para estudiar el efecto Hall clásico y cuántico.

.

Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético

Deference

► Los modelos de efecto Hall no se interesan en la física interna y se trabajan sobre superficies sin borde[4].

► La motivación principal es extender el análisis en [3] al análogo caso de las esfera.

- Motivación
- ► The three body problem on the plane
 - ► The definition of the problem
 - ► The canonical transformation of the guiding centres
 - Integration of the system
 - Analysis of the motion
- ► The problem of a charged particle in the magnetic field of a monopole
 - ► Definition of the Lagrangian
 - ► The symmetries and its conserved quantities
 - ► Important quantities in the Hamiltonian formalism
- ► The three body problem on the sphere
 - ► The definition of the problem
 - ► Integrability of the system
 - ► Analysis of the movement of the guiding centres

El problema de tres cuerpos en la superficie esférica

Jesus Prada

troducción

Introducción Motivación

Tabla de contenidos de la Tesis

Avance

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar



Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar

0-6----

- Quantum analysis of the three body problem in the plane
 - ► The spinorial representation
 - ► The Schwinger oscillator and the angular momentum representation
- ▶ The quantum three body problem on the sphere
- ▶ Conclusions

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2m} \left\| \vec{p_i} - e\vec{A}(\vec{q_i}) \right\|^2 + V(\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}) + \frac{\omega_c^2}{2m} \sum_{i=1}^{3} \|\vec{q_i}\|^2$$

Se propone la transformación canónica de los centros guía:

$$ec{\pi_i} = ec{p_i} - e ec{A}(ec{q_i})$$
 $ec{R_i} = ec{q_i} - rac{\hat{k} imes ec{\pi_i}}{e R}$

Que es canónica dados los corchetes de Poisson:

$$\{\pi_{i,\alpha}, \pi_{j,\beta}\} = (eB) \, \delta_{ij} \epsilon_{\alpha\beta}$$

 $\{R_{i,\alpha}, R_{j,\beta}\} = -(eB)^{-1} \, \delta_{ij} \epsilon_{\alpha\beta}$
 $\{R_{i,\alpha}, \pi_{j,\beta}\} = 0$

El problema de tres cuerpos en la superficie esférica

Jesus Prada

ntroducción

Motivación Tabla de

. 05.5

Avance

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético

En unidades necesarias y bajo un gran B el Hamiltoniano es separable y el problema se reduce a solucionar el Hamiltoniano de los centros guía con $R_{i,\alpha} = \{(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\}:$

$$H_{gc} = \frac{\omega_c^{*2}}{2m} \sum_{i=1}^{3} \|\bar{x}^2\| + \|\bar{y}^2\| + V^*(\bar{x}, \bar{y})$$

El cual es integrable dadas las integrales en involucion [5]:

$$R_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} (x_i^2 + y_i^2)$$

$$L = T_x^2 + T_y^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} y_i\right)^2$$

El problema de tres cuerpos en la superficie esférica

Jesus Prada

ntroducción

ntroducción Motivación

Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético

Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético

monopolar References

El Lagrangiano y Hamiltoniano de la partícula están dados por:

$$L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}\right) = \frac{m}{2} \left\| \dot{\vec{x}} \right\|^2 - e \vec{A}_{\hat{u}}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}$$

$$H\left(\vec{x}, \vec{p}\right) = \frac{1}{2m} \left\| \vec{p} + e \vec{A}_{\hat{u}}(\vec{x}) \right\|^2 \Big|_{\mathcal{E}^2}$$

Con [6]:

$$\vec{A}_{\hat{u}}(\vec{x}) = \frac{g}{r} \frac{\hat{u} \times \hat{r}}{1 + \hat{u} \cdot \hat{r}}$$

Dadas las simetrías del problema se deduce que la trayectoria está restringida a un cono:

$$\mathbb{J} = \vec{x} \times \vec{\pi} + eg\hat{x} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} + eg\hat{x}$$

$$\|\vec{J}\|^2 = \|\mathbb{L}\|^2 + (gc)^2$$

$$\|\mathbb{L}\| = ct$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{J} \cdot \hat{x}}{\|\vec{J}\|} = \sqrt{\frac{(gc)^2}{\|\mathbb{L}\|^2 + (gc)^2}}$$
(1)

Lo cual, junto a la restricción de la esfera, dice que la partícula describe movimiento circular uniforme alrededor del centro guía definido por J. Más aún, en el formalismo Hamiltoniano dicho J satisface las relaciones Poisson de un momento angular canónico [7].

El problema de tres cuerpos en la superficie esférica

Jesus Prada

troducción

ntroducción Motivación

Tabla de contenidos de la

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar

eterences

Jesus Prada

troducción

ntroducción Motivación

Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar

References

[1] Henri Poincaré.

Remarques sur une expérience de m. birkeland.

Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris, 123:530–533, 1896.

[2] Francesco Calogero.

Classical many-body problems amenable to exact treatments: solvable and/or integrable and/or linearizable... in one-, two-, and three- dimensional space.

Lecture notes in physics. Monographs m66. Springer, 1 edition, 2001.

p. 471-493.

[3] A. Botero and F. Leyvraz.

The two-dimensional three-body problem in a strong magnetic field is integrable.

[4] A. Schlief.

Estructuras de enredamiento en el efecto Hall cuántico fraccionario.

B.s. thesis, Universidad de los Andes, 2013.

p. 69-122.

[5] Florian Scheck.

Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos.

Graduate Texts in Physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5 edition, 2010.

p. 160.

[6] T. Kawai M. Ikeda and H. Yoshida.

Magnetic monopole, vector potential and gauge transformation.

Lettere al Nuovo Cimento, 227-235:530-533, 1977.

Jesus Prada

troducción

troducción lotivación

Tabla de contenidos de la Tesis

Avance

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar

[7] F. D. M. Haldane.

Fractional quantization of the hall effect: A hierarchy of incompressible quantum fluid states.

Physical Review Letters, 51:605-608, 1983.

Jesus Prada

troducción

Introducción Motivación

Tabla de contenidos de la Tesis

Avances

El problema de 3 cuerpos en el plano El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar