El problema de tres cuerpos en la superficie esférica

Jesus Prada

Advisor: PhD Alonso Botero

Universidad de los Andes, Departamento de Física

Marzo 9, 2016

Outline

Introducción
Introducción
Motivación
El problema de 3 cuerpos en el plano
Integrabilidad del problema clásico
La representación espinorial y la esfera de Bloch
Análisis del movimiento
El análogo cuántico
El problema de 3 cuerpos en la esfera
El problema de una partícula bajo el campo magnético monopolar
En coordenadas cartesianas
En coordenadas esféricas
En coordenadas estereográficas
References

- El problema de N cuerpos trata de estudiar las trayectorias que seguirían N partículas interactuando con fuerzas externas e internas, teniendo en cuenta la información de las condiciones iniciales.

- Es de interés para la comprensión de la mecánica clásica. Fue así como Poincaré planteó las bases de la teoría del caos. [1]

- Para $N \geq 3$ los sistemas son en general no integrables. Varios casos son integrables pero involucran Fuerzas poco realistas [2].
- Alonso Botero et al. demostraron en [3] la integrabilidad de un caso de tres partículas cargadas en el plano.
- El caso incluye potenciales centrales y puede ser tomado como modelo de electrones para estudiar el efecto Hall clásico y cuántico.
- La motivación principal es extender el análisis en [3] al análogo caso de las esfera.

El Hamiltoniano del problema propuesto está dado por:

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2m} \left\| \vec{p_i} - e\vec{A}\left(\vec{q_i}\right) \right\|^2 + V\left(\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}\right) + \frac{m\omega}{2} \sum_{i=1}^{3} \left\| \vec{q_i} \right\|^2$$

Se propone la transformación canónica de los centros guía:

$$\vec{\pi_i} = \vec{p_i} - e\vec{A}\left(\vec{q_i}\right)$$
$$\vec{R_i} = \vec{q_i} - \frac{\hat{k} \times \vec{\pi_i}}{eB}$$

Que es canónica dados los corchetes de Poisson:

$$\left\{\pi_{i,\alpha}, \pi_{j,\beta}\right\} = \left(eB\right) \delta_{ij} \epsilon_{\alpha\beta}$$
$$\left\{R_{i,\alpha}, R_{j,\beta}\right\} = -\left(eB\right)^{-1} \delta_{ij} \epsilon_{\alpha\beta}$$
$$\left\{R_{i,\alpha}, \pi_{j,\beta}\right\} = 0$$

En unidades necesarias y bajo un gran B el Hamiltoniano es separable y el problema se reduce a solucionar el Hamiltoniano de los centros guía con $R_{i,\alpha} = \{(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\}$:

$$H_{gc} = \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^{3} \|\bar{x}^2\| + \|\bar{y}^2\| + V(\bar{x}, \bar{y})$$

El cual es integrable dadas las integrales en involución [4]:

$$R_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$L = T_x^2 + T_y^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} y_i\right)^2$$

El centro de masa del sistema describirá movimiento circular uniforme. El problema es reducido a analizar el comportamiento de las coordenadas relativas al centro de masa descritas por el espinor:

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,(z_2 - z_1) \\ z_2 + z_1 - 2z_2 \end{pmatrix},$$

Donde $z = x + iy$. Los corchetes de Poisson son:

$$\{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\} = \{\Psi^*_\alpha, \Psi^*_\beta\} = 0$$
$$\{\Psi^*_\alpha, \Psi_\beta\} = i\delta_{\alpha,\beta}.$$

La una fase aplicada a Ψ representa una rotación alrededor del centro de masa. Entonces Ψ está asociado con el grupo de simetría $SU(2)$:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{S}\Psi^\dagger \vec{\sigma}\Psi.$$

Con S una constante de movimiento. Los valores esperados de $\vec{\sigma}$ codifican la forma del triangulo:

$$\begin{aligned}
\rho_k &= 2S\left(1 + \vec{m}_k \cdot \vec{\zeta}\right) \\
\vec{m}_k &= \left(\sin\frac{2\pi k}{3}, 0, \cos\frac{2\pi k}{3}\right), k \in \{1,2,3\} \\
A &= \frac{\sqrt{3}S}{2}\zeta_2.
\end{aligned}$$

Donde ρ_k es el lado del triángulo opuesto a la partícula k.

Podemos construir un Hamiltoniano más apropiado para estudiar el movimiento de las partículas a través de Ψ:

$$
\begin{aligned}
H_\Psi &= H_{gc} - \omega L = V(\Psi, \Psi^*) + \omega(J - L) = V(\Psi, \Psi^*) + \omega S \\
&= V(\Psi_\alpha, \Psi_\alpha^*) + \omega \Psi_\alpha \Psi_\alpha^*.
\end{aligned}
$$

Donde las ecuaciones de movimiento para Ψ serán:

$$
\begin{aligned}
i\dot{\Psi} &= i\{\Psi, H_\Psi\} = \frac{\partial V}{\partial \Psi^*} + \omega \Psi. \\
&= \left(\omega + \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{S} \frac{\partial V}{\partial \zeta_j} \left(-\zeta_j \mathbb{I} + \sigma^j \right) \right) \Psi.
\end{aligned}
$$

En coordenadas de la esfera de Bloch:

$$\dot{\vec{\zeta}} = \frac{2}{S}\left(\nabla_{\vec{\zeta}} V\right) \times \vec{\zeta}.$$

Pero se necesita información de la fase asociada a Ψ que codifica la rotación del triángulo. Defínase una fase entre dos estados Ψ infinitesimalmente cercanos:

$$e^{-id\chi}\Psi \approx \Psi - id\chi\Psi = \Psi + d\Psi$$
$$d\chi = i\frac{\Psi^{\dagger} d\Psi}{\Psi^{\dagger}\Psi}.$$

De esta manera obtenemos una velocidad angular dinámica asociada, dada por:

$$\omega_r^{(dyn)} = \omega + \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Si parametrizamos el espinor Ψ de la siguiente manera, podemos obtener información de la rotación del triángulo:

$$\Psi = \sqrt{S} e^{-i\gamma} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{-i\phi} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \omega_r^{(dyn)} &= i\frac{1}{S}\Psi^\dagger \dot{\Psi} \\ &= \dot{\gamma} + \dot{\phi}\sin^2\frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

La velocidad de rotación sobre un periodo T_s es:

$$\omega_r = \frac{\Delta\gamma}{T_s} = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} \omega_r^{(dyn)} dt - \frac{1}{T_s}\oint \sin^2\frac{\theta}{2} d\phi$$

$$\omega_r = \left\langle \omega_r^{(dyn)} \right\rangle + \omega_r^{(geo)}$$

El problema es escencialmente el mismo, teniendo en cuenta las reglas de la cuantización canónica [5].

$$H_{gc} = V\left(\Psi, \Psi^{\dagger}\right) + \omega(S + L).$$

$$\begin{pmatrix} b \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

Donde $a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + iy_i)$ son operadores creación aniquilación. Se tienen RCC análogas:

$$\left[\Psi_\alpha, \Psi_\beta^{\dagger}\right] = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\left[b, b^{\dagger}\right] = 1,$$

Además $bb^\dagger = L - \frac{1}{2}$ y $\Psi^\dagger \Psi = S - 1$, indica que L y S son cuantizados por números enteros y semienteros respectivamente.

La simetría SU(2) asociada a Ψ se hace clara al notar que Ψ implementa un momento angular de Schwinger [6]:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\Psi^\dagger \vec{\sigma} \Psi,$$

Con $[F_i, F_j] = \epsilon_{ijk} F_k$ y $F^2 = \frac{S^2-1}{4}$. Dado esto, el las energías propias estarán determinadas:

$$E_{l,m,s} = V_{s,m} + \omega(s + l).$$

El Lagrangiano y Hamiltoniano de la partícula están dados por:

$$L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}}\right) = \frac{m}{2}\left\|\dot{\vec{x}}\right\|^2 - e\vec{A}_{\hat{u}}(\vec{x})\cdot\dot{\vec{x}}$$

$$H\left(\vec{x},\vec{p}\right) = \left.\frac{1}{2m}\left\|\vec{p} + e\vec{A}_{\hat{u}}(\vec{x})\right\|^2\right|_{S^2}$$

Con [7]:

$$\vec{A}_{\hat{u}}(\vec{x}) = \frac{g}{r}\frac{\hat{u}\times\hat{r}}{1+\hat{u}\cdot\hat{r}}$$

Dadas las simetrías del problema se deduce que la trayectoria está restringida a un cono:

$$\mathbb{J} = \vec{x} \times \vec{\pi} + eg\hat{x} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} + eg\hat{x}$$

$$\begin{aligned} \left\|\vec{J}\right\|^2 &= \|\mathbb{L}\|^2 + (ge)^2 \\ \|\mathbb{L}\| &= cte \\ \cos\theta &= \frac{\vec{J} \cdot \hat{x}}{\left\|\vec{J}\right\|} = \sqrt{\frac{(ge)^2}{\|\mathbb{L}\|^2 + (ge)^2}} \end{aligned} \qquad (1)$$

En el formalismo Hamiltoniano dicho $\mathbb{J}$ satisface las relaciones Poisson de un momento angular canónico [8].

El Hamiltoniano en coordenadas cartesianas está dado por:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2} \left\| \vec{p}_i + e\vec{A}_{\hat{u}}(\vec{r}_i) \right\|^2 + V\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\right) \Bigg|_{S^2},$$

Definimos el momento angular de los centros guia:

$$\begin{aligned} \vec{J}_i &= \vec{r}_i \times \vec{\pi}_i + eg\hat{r}_i \\ &= \vec{r}_i \times \left(\vec{p}_i + e\vec{A}_{\hat{u}}(\vec{r}_i)\right) + eg\hat{r}_i \\ \{J_i, J_j\} &= \epsilon_{ijk} J_k, \end{aligned}$$

E intentamos realizar la transformación de los centros guía, la cual descubrimos no es canónica:

$$\begin{aligned} \vec{R}_i = \frac{\vec{J}_i}{\frac{eg}{r}} &= \vec{r}_i + \frac{\hat{r}_i \times \vec{\pi}_i}{\frac{eg}{r^2}} \\ &= \vec{r}_i + \frac{\hat{r}_i \times \vec{\pi}_i}{eB}. \end{aligned}$$

El Hamiltoniano en coordenadas esféricas el hamiltoniano de una sola partícula está dado por:

$$H = \frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \left(\frac{p_\phi - \frac{eg}{r}\tan\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}\right)^2\right). \tag{2}$$

El momento lineal de la partícula determina su centro guía:

$$\pi_\theta = \frac{p_\theta}{r}$$
$$\pi_\phi = \frac{p_\phi - \frac{eg}{r}\tan\frac{\theta}{2}}{r\sin\theta}.$$

Los momentos angulares asociados a cada variable harían el papel de momentos lineales:

$$L_\theta = p_\theta$$
$$L_\phi = p_\phi - \frac{eg}{r}\tan\frac{\theta}{2}$$
$$\{L_\theta, L_\phi\} = \frac{eg}{r}\frac{1}{1+\cos\theta}.$$

La proyección estereográfica proyecta la esfera de radio r al plano de la siguiente manera:

$$X = \frac{x}{1 + z/r}$$
$$Y = \frac{y}{1 + z/r}.$$

La expresión del Hamiltoniano en estas coordenadas no es trivial. Por esto, empezamos con el formalismo Lagrangiano:

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}{\left(\frac{1}{2r^2}\left(r^2 + X^2 + Y^2\right)\right)^2}\right) + \frac{eg}{r^2}\frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{\frac{1}{2r^2}\left(r^2 + X^2 + Y^2\right)}$$
$$= \frac{m}{2}\left(\left(\frac{\dot{X}}{K}\right)^2 + \left(\frac{\dot{Y}}{K}\right)^2\right) + eB\left(X\left(\frac{\dot{Y}}{K}\right) - Y\left(\frac{\dot{X}}{K}\right)\right),$$

Con $K = \frac{1}{2r^2}\left(r^2 + X^2 + Y^2\right)$ un factor de escala debido a que la transformación es conformal.

Pasando al formalismo Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m}\left((KP_X - eBY)^2 + (KP_Y + eBX)^2\right).$$

Y definimos los momentos lineales en el plano estereográfico:

$$\pi_X = KP_X - eBY$$
$$\pi_Y = KP_Y + eBX$$

Cuyos corchetes de Poisson están dados por:

$$\{\pi_X, \pi_Y\} = -K\left(2B + \frac{1}{r^2}(P_Y X - P_X Y)\right)$$
$$= -B + \frac{m}{K}\left(Y\dot{X} - X\dot{Y}\right).$$

A pesar de que se llega a un resultado en el que es necesario aproximar para llegar a la transformación canónica, las coincidencias de esta transformación con el caso planar nos llevan a pensar que son las coordenadas más apropiadas para continuar el trabajo.

Referencias I

[1] Henri Poincaré.
Remarques sur une expérience de m. birkeland.
Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris, 123:530–533, 1896.

[2] Francesco Calogero.
Classical many-body problems amenable to exact treatments: solvable and/or integrable and/or linearizable... in one-, two-, and three- dimensional space.
Lecture notes in physics. Monographs m66. Springer, 1 edition, 2001.
p. 471-493.

[3] A. Botero and F. Leyvraz.
The two-dimensional three-body problem in a strong magnetic field is integrable.

[4] Florian Scheck.
Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos.
Graduate Texts in Physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5 edition, 2010.
p. 160.

[5] P. A. M. Dirac.
The fundamental equations of quantum mechanics.
Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 109(752):642–653, 1925.

[6] Julian Schwinger.
On angular momentum.
U.S. Atomic Energy Commission.; Report. ORNL US AEC, 1952.
p. 1-3.

[7] T. Kawai M. Ikeda and H. Yoshida.
Magnetic monopole, vector potential and gauge transformation.
Lettere al Nuovo Cimento, 227-235:530–533, 1977.

Referencias II

[8] F. D. M. Haldane.
Fractional quantization of the hall effect: A hierarchy of incompressible quantum fluid states.
Physical Review Letters, 51:605–608, 1983.