El problema de tres cuerpos en la superficie esférica

Jesus Prada

Advisor: PhD Alonso Botero

Universidad de los Andes, Departamento de Física

Marzo 9, 2016

Outline

- El problema de N cuerpos trata de estudiar las trayectorias que seguirían N partículas interactuando con fuerzas externas e internas, teniendo en cuenta la información de las condiciones iniciales.

- Es de interés para la comprensión de la mecánica clásica. Fue así como Poincaré planteó las bases de la teoría del caos. [**?**]

- Para $N \geq 3$ los sistemas son en general no integrables. Varios casos son integrables pero involucran Fuerzas poco realistas [**?**].
- Alonso Botero et al. demostraron en [**?**] la integrabilidad de un caso de tres partículas cargadas en el plano.
- El caso incluye potenciales centrales y puede ser tomado como modelo de electrones para estudiar el efecto Hall clásico y cuántico.
- La motivación principal es extender el análisis en [**?**] al análogo caso de las esfera.

El Hamiltoniano del problema propuesto está dado por:

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2m} \left\| \vec{p_i} - e\vec{A}\left(\vec{q_i}\right) \right\|^2 + V\left(\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}\right) + \frac{m\omega}{2} \sum_{i=1}^{3} \left\| \vec{q_i} \right\|^2$$

Se propone la transformación canónica de los centros guía:

$$\vec{\pi_i} = \vec{p_i} - e\vec{A}\left(\vec{q_i}\right)$$

$$\vec{R_i} = \vec{q_i} - \frac{\hat{k} \times \vec{\pi_i}}{eB}$$

Que es canónica dados los corchetes de Poisson:

$$\left\{\pi_{i,\alpha}, \pi_{j,\beta}\right\} = (eB)\, \delta_{ij}\epsilon_{\alpha\beta}$$

$$\left\{R_{i,\alpha}, R_{j,\beta}\right\} = -(eB)^{-1}\, \delta_{ij}\epsilon_{\alpha\beta}$$

$$\left\{R_{i,\alpha}, \pi_{j,\beta}\right\} = 0$$

En unidades necesarias y bajo un gran B el Hamiltoniano es separable y el problema se reduce a solucionar el Hamiltoniano de los centros guía con $R_{i,\alpha} = \{(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\}$:

$$H_{gc} = \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^{3} \left\|\bar{x}^2\right\| + \left\|\bar{y}^2\right\| + V\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$$

El cual es integrable dadas las integrales en involución [**?**]:

$$R_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$L = T_x^2 + T_y^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} y_i\right)^2$$

El centro de masa del sistema describirá movimiento circular uniforme. El problema es reducido a analizar el comportamiento de las coordenadas relativas al centro de masa descritas por el espinor:

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,(z_2 - z_1) \\ z_2 + z_1 - 2z_2 \end{pmatrix},$$

Donde $z = x + iy$. Los corchetes de Poisson son:

$$\begin{aligned} \{\Psi_\alpha, \Psi_\beta\} &= \{\Psi_\alpha^*, \Psi_\beta^*\} = 0 \\ \{\Psi_\alpha^*, \Psi_\beta\} &= i\delta_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

La una fase aplicada a Ψ representa una rotación alrededor del centro de masa. Entonces Ψ está asociado con el grupo de simetría $SU(2)$:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{S}\Psi^{\dagger}\vec{\sigma}\Psi.$$

Con S una constante de movimiento. Los valores esperados de $\vec{\sigma}$ codifican la forma del triangulo:

$$\rho_k = 2S\left(1 + \vec{m}_k \cdot \vec{\zeta}\right)$$

$$\vec{m}_k = \left(\sin\frac{2\pi k}{3}, 0, \cos\frac{2\pi k}{3}\right), k \in \{1, 2, 3\}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}S}{2}\zeta_2.$$

Donde ρ_k es el lado del triángulo opuesto a la partícula k.

Podemos construir un Hamiltoniano más apropiado para estudiar el movimiento de las partículas a través de Ψ:

$$H_{\Psi} = H_{gc} - \omega L = V(\Psi, \Psi^*) + \omega(J - L) = V(\Psi, \Psi^*) + \omega S$$
$$= V(\Psi_\alpha, \Psi_\alpha^*) + \omega \Psi_\alpha \Psi_\alpha^*.$$

Donde las ecuaciones de movimiento para Ψ serán:

$$i\dot{\Psi} = i\{\Psi, H_\Psi\} = \frac{\partial V}{\partial \Psi^*} + \omega\Psi.$$
$$= \left(\omega + \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{S}\frac{\partial V}{\partial \zeta_j}\left(-\zeta_j \mathbb{I} + \sigma^j\right)\right)\Psi.$$

En coordenadas de la esfera de Bloch:

$$\dot{\vec{\zeta}} = \frac{2}{S} \left(\nabla_{\vec{\zeta}} V \right) \times \vec{\zeta}.$$

Pero se necesita información de la fase asociada a Ψ que codifica la rotación del triángulo. Defínase una fase entre dos estados Ψ infinitesimalmente cercanos:

$$e^{-id\chi}\Psi \approx \Psi - id\chi\Psi = \Psi + d\Psi$$

$$d\chi = i\frac{\Psi^\dagger d\Psi}{\Psi^\dagger \Psi}.$$

De esta manera obtenemos una fase dinámica asociada, dada por:

$$\omega_r^{(dyn)} = \omega + \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Si parametrizamos el espinor Ψ de la siguiente manera, podemos obtener información de la rotación del triángulo:

$$\Psi = \sqrt{S} e^{-i\gamma} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \omega_r^{(dyn)} &= i\frac{1}{S}\Psi^\dagger\dot{\Psi} \\ &= \dot{\gamma} + \dot{\phi}\sin^2\frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

La velocidad de rotación es sobre un periodo T_s:

$$\omega_r = \frac{\Delta\gamma}{T_s} = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s}\omega_r^{(dyn)}dt - \frac{1}{T_s}\oint \sin^2\frac{\theta}{2}d\phi$$

$$\omega_r = \left\langle \omega_r^{(dyn)} \right\rangle + \omega_r^{(geo)}$$

El Lagrangiano y Hamiltoniano de la partícula están dados por:

$$L\left(\vec{x},\dot{\vec{x}}\right) = \frac{m}{2}\left\|\dot{\vec{x}}\right\|^2 - e\vec{A}_{\hat{u}}(\vec{x})\cdot\dot{\vec{x}}$$

$$H\left(\vec{x},\vec{p}\right) = \left.\frac{1}{2m}\left\|\vec{p} + e\vec{A}_{\hat{u}}(\vec{x})\right\|^2\right|_{S^2}$$

Con [?]:

$$\vec{A}_{\hat{u}}(\vec{x}) = \frac{g}{r}\frac{\hat{u}\times\hat{r}}{1+\hat{u}\cdot\hat{r}}$$

Dadas las simetrías del problema se deduce que la trayectoria está restringida a un cono:

$$\mathbb{J} = \vec{x} \times \vec{\pi} + eg\hat{x} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} + eg\hat{x}$$

$$\begin{aligned} \left\|\vec{J}\right\|^2 &= \|\mathbb{L}\|^2 + (ge)^2 \\ \|\mathbb{L}\| &= cte \\ \cos\theta &= \frac{\vec{J}\cdot\hat{x}}{\left\|\vec{J}\right\|} = \sqrt{\frac{(ge)^2}{\|\mathbb{L}\|^2 + (ge)^2}} \end{aligned} \tag{1}$$

Lo cual, junto a la restricción de la esfera, dice que la partícula describe movimiento circular uniforme alrededor del centro guía definido por $\mathbb{J}$. Más aún, en el formalismo Hamiltoniano dicho $\mathbb{J}$ satisface las relaciones Poisson de un momento angular canónico [?].

Referencias I