

Suplemento Computacional **Física de Oscilaciones y Ondas**

Sebastian Bustamante Jaramillo

macsebas33@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Motivación	5
1.2. Instalación de Paquetes	5
1.3. Ejemplo de Uso	8
1.4. Consejos de Programación	10
2. Oscilaciones	13
2.1. Demostración 1: Péndulo Simple Ideal	13
2.2. Demostración 2: Solución Exacta del Péndulo	18
2.3. Demostración 3: Sistema de Péndulos Acoplados	23
3. Bibliografía	33

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Motivación

La física ha evolucionado hasta un estado actual donde la mayoría de cálculos teóricos necesarios para realizar investigación de frontera requieren de una gran componente computacional. Desde la corroboración entre teoría y experimento, la predicción y control de los resultados de un experimento hecho a posteriori y la recreación de condiciones imposibles de lograr experimentalmente, tales como simulaciones cosmológicas del universo a gran escala o complejos sistemas atómicos. Estos son sólo algunos ejemplos representativos del papel de la computación en la física moderna. Debido a esto, el principal objetivo del suplemento computacional es la introducción temprana en los cursos de física básica de herramientas computacionales que serán de utilidad a los estudiantes en este curso específico y durante el transcurso de sus carreras científicas.

1.2. Instalación de Paquetes

En la totalidad de esta guía será usado el lenguaje de programación *Python* como referente para todos las prácticas y ejercicios computacionales. La principal motivación de esto es su facilidad de implementación en comparación a otros lenguajes también de amplio uso en ciencia. Además es un lenguaje interpretado, lo que permite una depuración más sencilla por parte del estudiante, sin necesidad de usar más complicados sistemas de depuración en el caso de lenguajes compilados como C o Fortran. *Python* es un lenguaje de código abierto, lo que permite la libre distribución del paquete y evita el pago de costosas licencias de uso, además la gran mayoría de paquetes que extienden enormemente la funcionalidad de *Python* son también código abierto y de libre distribución y uso.

A pesar de que *Python* es un lenguaje multiplataforma, permitiendo correr scripts python en Linux, Windows y Mac, acá solo se indicará el método de instalación para distribuciones Linux basadas en Debian.

La última versión de *Python* de la rama 2 es 2.7.4 y de la rama 3 es la 3.3.1, debido a ligeras incompatibilidades entre ambas ramas de desarrollo, será utilizada la rama 2 en una de sus últimas versiones. En orden, para instalar *Python* en una versión Linux basta con descargarlo directamente de los repositorios oficiales¹, en el caso de una distro basada en Debian el gestor de paquetes es `apt-get`, y desde una terminal se tiene

```
\$ apt-get install python2.7
```

también puede descargarse directamente desde la página oficial del proyecto <http://python.org/>.

Una vez instalada la última versión de *Python*, es necesario instalar los siguiente paquetes para el correcto desarrollo de las aplicaciones del curso:

iPython

iPython es un shell que permite una interacción más interactiva con los scripts de python, permitiendo el resaltado de sintaxis desde consola, funciones de autocompletado y depuración de código más simple. Para su instalación basta descargarlo de los repositorios oficiales

```
\$ apt-get install ipython
```

o puede de descargarse de la página oficial <http://ipython.org/>. También puede encontrarse documentación completa y actualizada en esta página, se recomienda visitarla frecuentemente para tener las más recientes actualizaciones.

NumPy

NumPy es una librería que extiende las funciones matemáticas de *Python*, permitiendo el manejo de matrices y vectores. Es esencial para la programación científica en *Python* y puede ser instalada de los repositorios

```
\$ apt-get install python-numpy
```

¹En la mayoría de distribuciones Linux *Python* viene precargado por defecto.

La última versión estable es la 1.6.2. En la página oficial del proyecto puede encontrarse versiones actualizadas y una amplia documentación <http://www.numpy.org/>.

SciPy

SciPy es una amplia biblioteca de algoritmos matemáticos para *Python*, esta incluye herramientas que van desde funciones especiales, integración, optimización, procesamiento de señales, análisis de Fourier, etc. Al igual que los anteriores paquetes, puede ser instalada desde los repositorios oficiales

```
\$ apt-get install python-scipy
```

Una completa documentación del paquete puede ser encontrada en <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/>. La última versión estable es la 0.11.0 y puede ser encontrada en la página oficial del proyecto <http://www.scipy.org/>.

Matplotlib

Matplotlib es una completa librería con rutinas para la generación de gráficos a partir de datos. Aunque en su estado actual está enfocada principalmente a gráficos 2D, permite un amplio control sobre el formato de las gráficas generadas, dando una amplia versatilidad a los usuarios. Su instalación puede realizarse a partir de los repositorios oficiales

```
\$ apt-get install python-matplotlib
```

La última versión estable es la 1.2.1. y puede encontrarse en la página oficial del proyecto <http://matplotlib.org/>. Una amplia documentación está disponible en <http://matplotlib.org/1.2.0/contents.html>.

MayaVi2

MayaVi2 es una librería para la visualización científica en python, en especial para gráficos 3D, permitiendo funciones avanzadas como renderizado, manejo de texturas, etc. Se encuentra en los repositorios oficiales

```
\$ apt-get install mayavi2
```

La versión 2 es una versión mejorada de la original, estando más orientada a la reutilización de código. Por defecto incluye una interfaz gráfica que facilita su manejo. La página oficial del proyecto es <http://mayavi.sourceforge.net/>.

Tkinter

TKinter es una librería para la gestión gráfica de aplicaciones in *Python* y viene por defecto instalada, aún así puede ser instalada de los repositorios oficiales

```
\$ apt-get install python-tk
```

La página oficial del proyecto es <http://wiki.python.org/moin/TkInter>. Para el desarrollo de entornos gráficos existen otras llamativas alternativas como PyGTK o PyQt, pero debido a la facilidad de uso y a ser la librería estándar soportada, *TKinter* será usada en este curso.

1.3. Ejemplo de Uso

En esta sección se ilustra un ejemplo sencillo que permite al estudiante identificar la manera estándar de ejecutar códigos en *Python*, además probar los paquetes instalados.

El código de ejemplo permite graficar dos funciones diferentes en una misma ventana y además un conjunto de datos aleatorios generados en el eje Y.

```
1  #!/usr/bin/env python
2  #=====
3  # EJEMPLO DE USO
4  # Grafica de funciones y datos aleatorios
5  #=====
6  import numpy as np
7  import scipy as sp
8  import matplotlib.pyplot as plt
9
10 #Funcion 1
11 def Funcion1(x):
12     f1 = np.sin(x)/( np.sqrt(1 + x**2) )
13     return f1
14
15 #Funcion 2
16 def Funcion2(x):
```



```
17     f2 = 1/(1+x)
18     return f2
19
20 #Valores de x para evaluar
21 X = np.linspace( 0, 10, 100 )
22 #Evaluacion de funcion 1
23 F1 = Funcion1(X)
24 #Evaluacion de funcion 2
25 F2 = Funcion2(X)
26
27 #Grafica funcion 1
28 plt.plot( X, F1, label='Funcion 1' )
29 #Grafica funcion 2
30 plt.plot( X, F2, label='Funcion 2' )
31
32 #Datos aleatorios eje Y
33 Yrand = sp.random.rand( 100 )
34 #Grafica datos aleatorios
35 plt.plot( X, Yrand, 'o', label='Datos' )
36
37 plt.legend()
38 plt.show()
```

El resultado obtenido es la siguiente gráfica

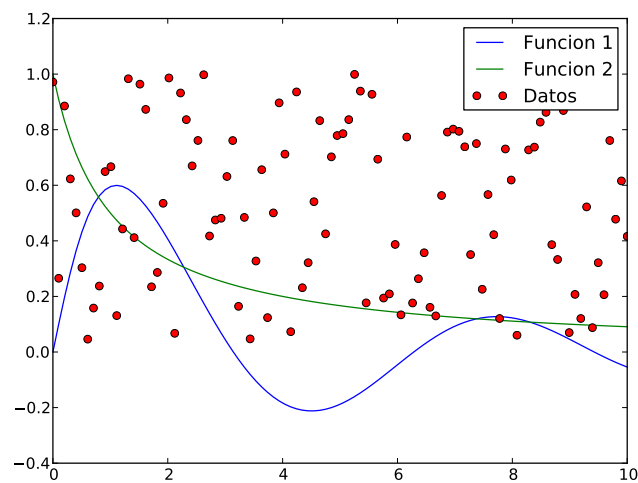


Figura 1.1: Resultado del ejemplo anterior, gráfica de dos funciones y datos aleatorios.

Para obtener el anterior script, el estudiante puede transcribirlo directamente de esta guía o puede descargarlo del repositorio oficial del curso² en el link https://github.com/sbustamante/Computacional-Campos/raw/master/codigos/usage_01.py. Una vez obtenido el archivo `usage_01.py`, abrir una terminal en la carpeta donde se ha guardado y escribir `ipython` para abrir el intérprete de *Python*

```
\$ ipython
```

Se debe obtener algo como

```
\$ ipython
Python 2.6.5 (r265:79063, Apr 16 2010, 13:57:41)
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.

IPython 0.10 -- An enhanced Interactive Python.
?          -> Introduction and overview of IPython's features.
%quickref  -> Quick reference.
help       -> Python's own help system.
object?    -> Details about 'object'. ?object also works, ?? prints more.

In [1]:
```

Finalmente para ejecutar el script, usar el comando `run` seguido del nombre del código en el intérprete de código *Python*

```
In [1]: run usage_01.py
```

1.4. Consejos de Programación

En esta sección se dan algunos consejos útiles a la hora de programar. Estas buenas prácticas ayudan al programador a ser estructurado y tener un método coherente de desarrollar códigos.

- Asignar nombres a los archivos que sean coherentes con lo que realizan. Por ejemplo si está realizando una rutina que integra la trayectoria de una partícula en un campo eléctrico E , un nombre adecuado para el código puede ser `trayectoria_electric_field.py`. Evite usar nombres poco intuitivos y que tengan caracteres extraños, inclusive caracteres tildados como *í*, *ó*, *ñ*, etc. También evite el uso de espacios, si desea separar palabras, use el caracter `_`.

²Repositorio oficial en <https://github.com/sbustamante/Computacional-Campos>

- Una práctica casi obligatoria que debe realizar cualquier programador serio, consiste en comentar su código exhaustivamente. Los lenguajes de programación fueron inventados para facilitar la interacción entre el humano y la computadores, los compiladores e intérpretes de códigos *traducen* este lenguaje a lenguaje binario de máquina. Es por esta razón que cuando se crea un código, se debe pensar en que este sea comprensible, siempre recuerde que la máquina solo requiere código binario.

Comente todo lo que usted crea conveniente. Es muy común que por minimizar líneas de código o simplemente por pensar que no es necesario, muchos programadores dejan de comentar su código y semanas más tarde retoman y no entienden que han hecho. La programación en equipo es cada vez más común en ciencia, existiendo grandes proyectos donde una comunidad activa está contribuyendo, comentar el código es indispensable para este tipo de actividades.

- Use el inglés siempre que pueda, para asignar nombres a sus archivos, para comentar su código, y para datos impresos en pantalla y en archivos de datos. Tenga en cuenta que en disciplinas científicas cualquier labor que sea realizada en inglés tendrá un potencial de impacto mayor que otro si se hace en otro idioma. Su código puede ser útil después a otras personas y esto puede ayudar a que usted sea reconocido en círculos académicos.
- Comparta su código, para esto puede usar páginas diseñadas para esto tales como `github.com` o `sourceforge.net`. Estas páginas además de permitir compartir su código a terceras personas, tiene potentes herramientas de control de versiones (git, svn, etc.) las cuales le ayudan a manejar su código de forma más estructurada, permitiendo el control de las diferentes versiones de un código o un paquete completo y el desarrollo entre varias personas.
- Use software open source, este tipo de software es de libre distribución y uso. Cuando se usan herramientas que necesitan licencia se está sujeto al pago de ingentes cantidades de dinero por funcionalidades que se pueden encontrar de forma gratuita. Este tipo de herramientas pagas limitan aspectos como el poder compartir códigos y resultados, por ejemplo si usted no tiene su licencia al día puede tener problemas a la hora de reportar en un artículo de investigación sus resultados y gráficas obtenidos con estos paquetes.

Capítulo 2

Oscilaciones

El concepto de oscilación es ampliamente usado en ciencia y se aplica para cualquier cantidad que presente fluctuaciones o perturbaciones en función del tiempo, ya sean periódicas o no. En este capítulo se presentan algunos ejemplos de oscilaciones para sistemas mecánicos y electromagnéticos, que a pesar de su simplicidad, permiten ahondar en los detalles físicos de este tipo de fenómenos.

La forma estándar de abordar un problema en una disciplina científica consiste en el estudio de situaciones ideales y muy particulares para llegar luego, usando refinamientos y consideraciones posteriores, a descripciones realistas y más generales. Por este motivo se comienza con demostraciones computacionales aplicadas a sistemas ideales, como el péndulo simple, el sistema masa resorte, etc. En demostraciones siguientes se abordarán aspectos cada vez más complejos de estos sistemas.

2.1. Demostración 1: Péndulo Simple Ideal

Como primer caso se aborda el péndulo simple. Este consiste en un sistema de una masa m con dimensión despreciable y bajo la acción de la gravedad \mathbf{g} , además pende de una cuerda tensa de longitud l y sujeta en un punto fijo. A partir de la figura 2.1, la ecuación de movimiento está dada por

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} + \mathbf{T} \quad (2.1)$$

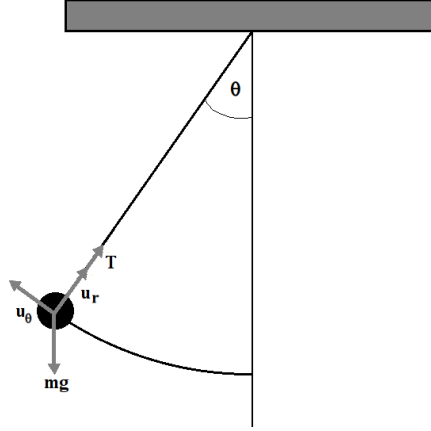


Figura 2.1: Péndulo simple bajo la acción del campo gravitacional.

En coordenadas polares se obtiene

$$ml\dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta \quad (2.2)$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (2.3)$$

Como primera demostración computacional de este capítulo se solucionará el movimiento del péndulo simple a partir de las ecuaciones 2.2 y 2.3. Para esto se asumirá que la amplitud de oscilación del péndulo es pequeña de tal forma que $\theta \approx \sin \theta$ y $\cos \theta \approx 1$, obteniendo

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \quad (2.4)$$

Usando un ansatz de la forma $\theta(t) = e^{\lambda t}$ se llega a la solución

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (2.5)$$

donde θ_0 y δ son la amplitud y la fase respectivamente y constituyen las condiciones iniciales. La frecuencia ω_0 está definida por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.6)$$

En el siguiente script de *Python* se grafica esta solución para diferentes valores de la amplitud y la fase.

```
1  #!/usr/bin/env python
2  #=====
3  # DEMOSTRACION 1
4  # Grafica de soluciones aproximadas del pendulo simple
5  #=====
6  import numpy as np
7  import matplotlib.pyplot as plt
8
9  #Solucion
10 def Theta(t):
11     theta = theta0*np.sin( omega0*t + delta )
12     return theta
13
14 #Gravedad
15 g = 9.8
16 #Longitud
17 l = 1
18 #Frecuencia
19 omega0 = np.sqrt( g/l )
20 #Tiempos
21 tiempo = np.arange( 0, 10, 0.1 )
22
23 #SOLUCION 1
24 #Amplitud
25 theta0 = 0.05
26 #Fase
27 delta = 0.0
28 #Grafica
29 plt.plot( tiempo, Theta(tiempo), label='solucion 1' )
30
31 #SOLUCION 2
32 #Amplitud
33 theta0 = 0.05
34 #Fase
35 delta = np.pi
36 #Grafica
37 plt.plot( tiempo, Theta(tiempo), label='solucion 2' )
38
39 #SOLUCION 3
40 #Amplitud
41 theta0 = 0.1
42 #Fase
```

```
43 delta = 0.0
44 #Grafica
45 plt.plot( tiempo, Theta(tiempo), label='solucion 3' )
46
47 plt.legend()
48 plt.show()
```

El resultado que se obtiene es

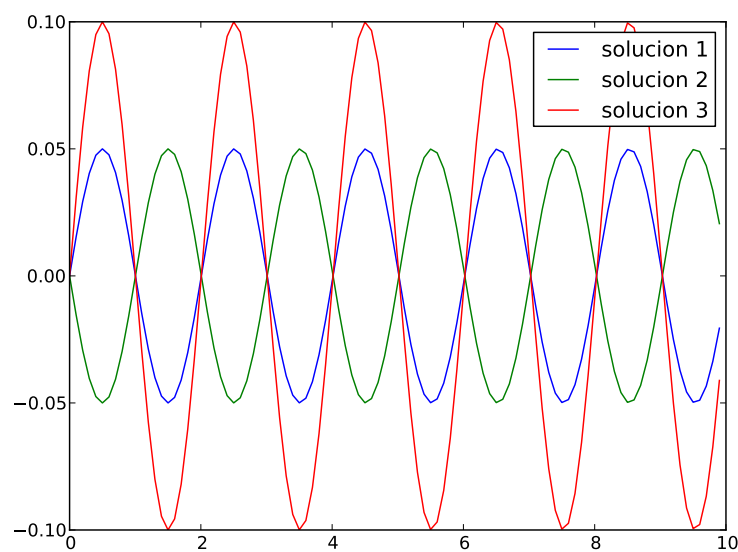


Figura 2.2: Soluciones aproximadas obtenidas para el péndulo simple.

En lo siguiente se explica cada porción de código.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Esto corresponde al cargado de las librerías *NumPy*, bajo el alias de *np* y *Matplotlib* bajo el alias de *plt*, ambas son necesarias para el desarrollo de todo el código.

```
#Solucion
def Theta(t):
    theta = theta0*np.sin( omega0*t + delta )
    return theta
```


En esta parte se define la solución obtenida en la ecuación 2.5 para cualquier tiempo dado. Las funciones matemáticas estándar, tales como exponencial, logaritmo, trigonométricas, hiperbólicas, etc. Son accedidas desde el módulo *NumPy* como `np.sin`, `np.sinh`, `np.exp`, `np.log`, etc.

```
#Gravedad
g = 9.8
#Longitud
l = 1
#Frecuencia
omega0 = np.sqrt( g/l )
#Tiempos
tiempo = np.arange( 0, 10, 0.1 )
```

Se define la gravedad, la longitud de la cuerda (en metros), la frecuencia de oscilación y finalmente, usando la función `arange` de la librería *NumPy*, se construye un arreglo de tiempos donde es evaluada la solución, de 0 a 10 segundos con saltos de 0.1.

```
#SOLUCION 1
#Amplitud
theta0 = 0.05
#Fase
delta = 0.0
#Grafica
plt.plot( tiempo, Theta(tiempo), label='solucion 1' )
```

La primera solución es obtenida para una amplitud de $\theta_0 = 0,05$ radianes y una fase $\delta = 0$. La última línea corresponde a la construcción de la gráfica de la solución. Para esto se usa la función `plot` de la librería *Matplotlib*. El primer argumento corresponde a los datos asociados al eje x, en este caso `tiempo`, mientras el segundo argumento son los datos asociados al eje y, en este caso la solución evaluada en el tiempo, es decir `Theta(tiempo)`. El argumento `label` indica el nombre que tendrá la solución en la gráfica final, esto se denomina etiqueta de la función.

```
plt.legend()
plt.show()
```

Finalmente se termina el script con la función `legend`, la cual muestra en pantalla las etiquetas puestas a cada gráfica. Y la función `show` que muestra en pantalla todas las soluciones.

2.2. Demostración 2: Solución Exacta del Péndulo

La solución propuesta en la demostración anterior está basada en la aproximación de pequeñas oscilaciones, para la cual $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$, aún así, a medida que el movimiento sea de mayor amplitud, esta aproximación deja de ser válida y se la solución general debe obtenerse directamente de las ecuaciones 2.2 y 2.3

Una forma conveniente de reescribir las ecuaciones de movimiento es derivando 2.2 respecto al tiempo e introduciendo la ecuación 2.3

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \dot{\theta} (2ml\ddot{\theta} - mg \sin \theta) \\ \dot{T} &= -\dot{\theta} (2mg \sin \theta + mg \sin \theta) \\ \dot{T} &= -3\dot{\theta}mg \sin \theta\end{aligned}\tag{2.7}$$

Definiendo la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$, el sistema de ecuaciones originales junto con la ecuación 2.7 queda

$$\dot{\theta} = \omega\tag{2.8}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta\tag{2.9}$$

$$\dot{T} = -3\omega mg \sin \theta\tag{2.10}$$

Esta forma se denomina sistema de ecuaciones diferenciales lineales y es esencial para la solución exacta a partir de algoritmos de integración numérica.

Las condiciones iniciales para la solución aproximada son completamente determinadas a partir de la fase δ y la amplitud θ_0 . En el caso de la solución exacta es necesario suministrar tres condiciones para cada una de las variables de las ecuaciones 2.8 - 2.10, es decir, la posición angular inicial del péndulo θ_{t_0} , la velocidad angular inicial ω_{t_0} y la tensión inicial T_{t_0} . Aún así, la tensión inicial depende de las otras dos condiciones a través de la ecuación 2.2

$$T_{t_0} = ml\omega_{t_0}^2 + mg \cos \theta_{t_0}\tag{2.11}$$

En esta demostración se calcularán ambas soluciones para un péndulo con condiciones iniciales fijadas. La solución numérica se realiza a partir de la rutina de integración numérica `odeint` del módulo `integrate` del paquete *SciPy*.

```
1  #!/usr/bin/env python
2  #=====
3  # DEMOSTRACION 2
4  # Comparacion de solucion completa y aproximada para el
5  # pendulo simple
6  #=====
7  import numpy as np
8  import matplotlib.pyplot as plt
9  import scipy.integrate as integ
10
11 #Solucion aproximada
12 def Theta(t):
13     theta = theta0*np.sin( omega0*t + delta )
14     return theta
15
16 #Ecuaciones de movimiento
17 def dF(Y, t):
18     #Valor anterior de theta
19     theta = Y[0]
20     #Valor anterior de omega
21     omega = Y[1]
22     #Valor anterior de la tension
23     tension = Y[2]
24     #Derivada de theta
25     Dtheta = omega
26     #Derivada de omega
27     Domega = -g*np.sin( theta )/l
28     #Derivada de la tension
29     Dtension = -3*omega*m*g*np.sin( theta )
30     return (Dtheta, Domega, Dtension)
31
32 #Gravedad
33 g = 9.8
34 #Longitud
35 l = 1
36 #Masa
37 m = 1
38 #Frecuencia
39 omega0 = np.sqrt( g/l )
40 #Tiempos
41 tiempo = np.arange( 0, 10, 0.01 )
42
```

```

43 #SOLUCION APROXIMADA
44 #Amplitud
45 theta0 = np.pi/4
46 #Fase
47 delta = np.pi/2.
48 #Grafica
49 plt.plot(tiempo, Theta(tiempo), label='solucion aproximada')
50
51 #SOLUCION NUMERICA
52 #Angulo inicial
53 theta_t0 = np.pi/4
54 #Velocidad angular inicial
55 omega_t0 = 0.0
56 #Tension inicial
57 tension_t0 = m*l*omega_t0**2 + m*g*np.cos( theta_t0 )
58 #Condiciones iniciales
59 cond_ini = ( theta_t0, omega_t0, tension_t0 )
60 #Solucion numerica
61 theta_t, omega_t, tension_t = np.transpose(
62 integ.odeint( dF, cond_ini, tiempo ) )
63 #Grafica
64 plt.plot( tiempo, theta_t, label='solucion numerica' )
65
66 plt.legend()
67 plt.show()

```

Para ambas soluciones se ha asumido una amplitud de $\theta_0 = 45^\circ = \pi/4$ y las condiciones iniciales son definidas de tal forma que el péndulo sea soltado desde su máxima amplitud. En el caso de la solución aproximada, esto implica una amplitud $\theta_0 = \pi/4$ y una fase de $\delta = \pi/2$. Para la solución aproximada, las condiciones equivalentes son $\theta_{t_0} = \pi/4$ y $\omega_{t_0} = 0$. El resultado de la integración para 10 segundos es mostrado en la figura 2.3.

Cambiando la amplitud inicial a un valor $\theta = 10^\circ \approx 0,17$ ambas soluciones son muy similares, indicando el rango de la validez de la aproximación inicial. El resultado para 10 segundos es mostrado en la figura 2.4.

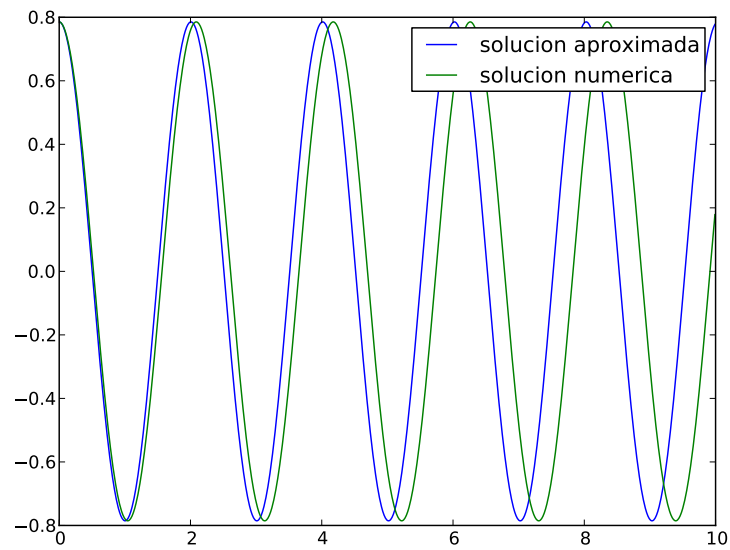


Figura 2.3: Comparación entre la solución exacta numérica y la solución aproximada. Debido a la mayor amplitud de oscilación, la aproximación de pequeñas oscilaciones deja de ser válida y difiere considerablemente de la solución real.

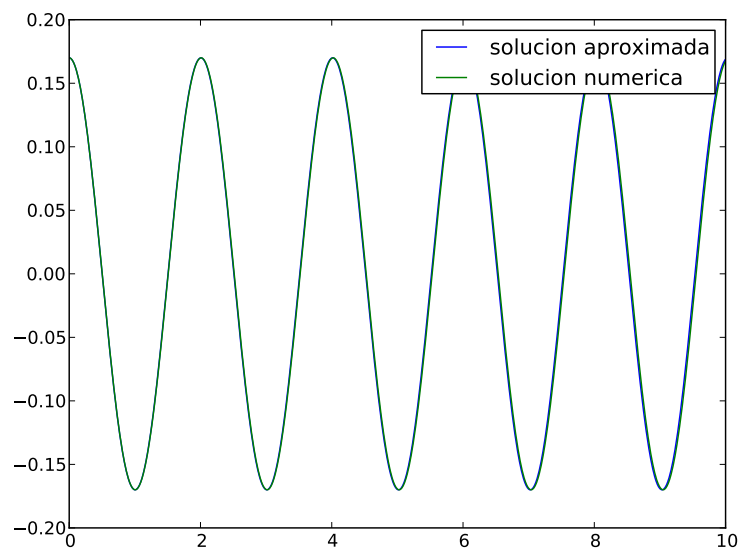


Figura 2.4: Comparación entre la solución exacta numérica y la solución aproximada. Para pequeñas amplitudes ambas soluciones son muy similares.

A continuación se explican las nuevas partes introducidas en el código en comparación con la demostración 1.

```
import scipy.integrate as integ
```

Esto corresponde al cargado del módulo `integrate` de *SciPy* bajo el alias de `integ` para las funcionalidades de integración numérica.

```
#Ecuaciones de movimiento
def dF(Y, t):
    #Valor anterior de theta
    theta = Y[0]
    #Valor anterior de omega
    omega = Y[1]
    #Valor anterior de la tension
    tension = Y[2]
    #Derivada de theta
    Dtheta = omega
    #Derivada de omega
    Domega = -g*np.sin( theta )/l
    #Derivada de la tension
    Dtension = -3*omega*m*g*np.sin( theta )
    return (Dtheta, Domega, Dtension)
```

Se define la función que contiene las derivadas de cada una de las variables del sistema, acorde al sistema 2.8 - 2.10. Y es un arreglo que contiene las variables θ , ω y T evaluadas en el tiempo anterior respectivamente y finalmente el argumento t es el tiempo actual.

```
#SOLUCION NUMERICA
#Angulo inicial
theta_t0 = np.pi/4
#Velocidad angular inicial
omega_t0 = 0.0
#Tension inicial
tension_t0 = m*l*omega_t0**2 + m*g*np.cos( theta_t0 )
#Condiciones iniciales
cond_ini = ( theta_t0, omega_t0, tension_t0 )
#Solucion numerica
theta_t, omega_t, tension_t = np.transpose(
    integ.odeint( dF, cond_ini, tiempo ) )
#Grafica
```

```
plt.plot( tiempo, theta_t, label='solucion numerica' )
```

En esta parte se realiza la integración de la solución exacta del péndulo simple. Se dan las condiciones iniciales para el ángulo y la velocidad angular inicial, para la tensión se usa la ecuación 2.11. Luego, en un arreglo `cond_ini` se dan las tres condiciones para luego llamar la función `integ.odeint`. Esta tiene como primer argumento la función `dF` con las ecuaciones de movimiento del sistema, segundo argumento el arreglo de condiciones iniciales y como tercero el arreglo de tiempo donde se desea evaluar la solución. Finalmente se grafica la solución.

2.3. Demostración 3: Sistema de Péndulos Acoplados

En esta demostración se abordarán aspectos más complejos de computación, donde se comenzará a realizar animaciones y representaciones 3D a partir de la librería *MayaVi2*. Como tercera demostración se plantea entonces un sistema acoplado de 4 péndulos simples de diferente longitud tal como se muestra en la figura 2.5.

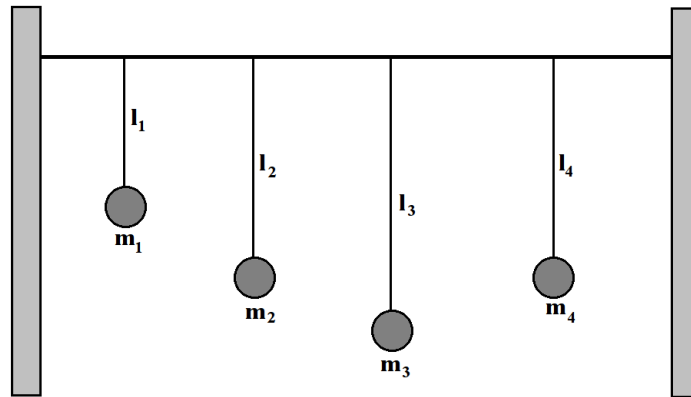


Figura 2.5: Sistema de 4 péndulos acoplados.

Todos los péndulos son de dimensión despreciable de tal forma que pueden ser considerados puntuales, además todos penden de una cuerda tensionada y no de un cuerpo rígido debido a que la cuerda actúa como agente de acoplamiento en el sistema, permitiendo el intercambio de energía entre los péndulos.

Para modelar el término de acoplamiento entre los péndulos se supondrá que cada péndulo solo interactúa de forma apreciable con sus vecinos más cercanos y que

la fuerza de interacción solo actúa en la dirección horizontal determinada por el eje x , siendo proporcional a la solución de los vecinos próximos. Teniendo esto en consideración, a ecuación de movimiento para el i -ésimo péndulo es

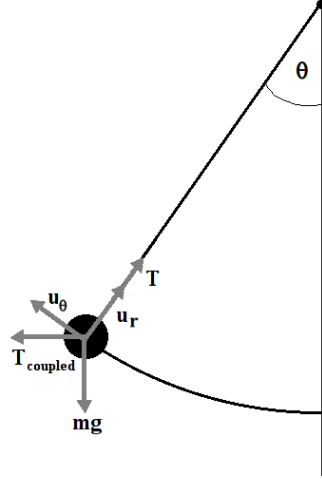


Figura 2.6: i -ésimo péndulo del sistema acoplado. La fuerza de acoplamiento actúa en el eje horizontal.

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = m \mathbf{g} + \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_{c,i-1} + \mathbf{T}_{c,i+1} \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{T}_{c,i+1}$ y $\mathbf{T}_{c,i-1}$ son los términos de acoplamiento asociados a los péndulos vecinos, en caso de no existir uno de los vecinos, el término es nulo. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad se asumirán péndulos de masas iguales. Finalmente, con el objetivo de cuantificar la fuerza de acoplamiento, se usará el peso de los péndulos de tal forma que

$$\mathbf{T}_{c,j} = f m g \theta_j(t) \mathbf{i} \quad (2.13)$$

con $\theta_j(t)$ la solución del péndulo j y f un factor que indica la magnitud de la fuerza de acoplamiento en unidades mg . En principio, este factor depende de la tensión de la cuerda principal de la cual penden los péndulos, pero por simplicidad se tomará como un parámetro libre de tal forma que $f \ll 1$.

Descomponiendo las ecuaciones de movimiento en coordenadas polares del i -ésimo péndulo tal como se hizo para el péndulo simple en la demostración 1 2.1 se llega a

$$ml\dot{\theta}_i^2 = T_i - mg \cos \theta_i - fmg (\theta_{i-1} + \theta_{i+1}) \sin \theta_i \quad (2.14)$$

$$ml\ddot{\theta}_i = -mg \sin \theta_i + fmg (\theta_{i-1} + \theta_{i+1}) \cos \theta_i \quad (2.15)$$

Al igual que la demostración 2 2.2, no se realizará la aproximación de pequeñas oscilaciones y las ecuaciones serán resueltas de forma numérica. Es necesario entonces llevar las ecuaciones 2.14 2.15 a una sistema de ecuaciones diferenciales lineales, para esto se deriva la ecuación 2.14 respecto al tiempo y se reemplaza el termino en $\ddot{\theta}_i$ por la ecuación 2.15.

$$\begin{aligned} \dot{T}_i &= \dot{\theta}_i [2ml\ddot{\theta}_i - mg \sin \theta_i + fmg (\theta_{i-1} + \theta_{i+1}) \cos \theta_i] \\ &\quad + fmg (\dot{\theta}_{i-1} + \dot{\theta}_{i+1}) \sin \theta_i \\ \dot{T}_i &= 3\dot{\theta}_i [fmg (\theta_{i-1} + \theta_{i+1}) \cos \theta_i - mg \sin \theta_i] \\ &\quad + fmg (\dot{\theta}_{i-1} + \dot{\theta}_{i+1}) \sin \theta_i \end{aligned} \quad (2.16)$$

Introduciendo de nuevo la definición de velocidad angular $\omega_i = \dot{\theta}_i$ se obtiene

$$\dot{\theta}_i = \omega_i \quad (2.17)$$

$$\dot{\omega}_i = -\frac{g}{l} \sin \theta_i + f \frac{g}{l} (\theta_{i-1} + \theta_{i+1}) \cos \theta_i \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_i &= 3\omega_i [fmg (\theta_{i-1} + \theta_{i+1}) \cos \theta_i - mg \sin \theta_i] \\ &\quad + fmg (\omega_{i-1} + \omega_{i+1}) \sin \theta_i \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se llega entonces a un sistema de $3 \times 4 = 12$ ecuaciones diferenciales acopladas. Note que haciendo el parámetro de acoplamiento nulo $f = 0$ se llega de nuevo al péndulo simple de la demostración 2.

El conjunto de condiciones iniciales se definirá de tal forma que el sistema presente resonancia entre dos péndulos, para esto los tres primeros péndulos partirán del reposo mientras el cuarto péndulo comenzará oscilando con una amplitud de $\theta_4(t = 0) = 45^\circ = \pi/4$ rad. La longitud de los péndulos serán respectivamente $l_1 = 1$ m, $l_2 = 2$ m, $l_3 = 3$ m y $l_4 = 2$ m, de esta forma se garantiza una resonancia entre los péndulos 2 y 4. El estudiante puede modificar estas condiciones en los códigos y así recrear las situaciones que desee.

Esta tercera demostración se dividirá en dos diferentes códigos, el primer script realizará la integración numérica de los péndulos y guardará las soluciones en un archivo de datos (demo2_03_1.py), el segundo script cargará estos archivos de datos y realizará la animación 3D del sistema (demo2_03_2.py) ¹.

```

1  #!/usr/bin/env python
2  #=====
3  # DEMOSTRACION 3: Parte 1
4  # Solucion numerica de 4 pendulos simples acoplados
5  #=====
6  from __future__ import division
7  import numpy as np
8  import matplotlib.pyplot as plt
9  import scipy.integrate as integ
10
11 #Ecuaciones de movimiento
12 def dF(Y, t):
13     #Valor anterior de theta pendulo 1
14     theta1 = Y[0]
15     #Valor anterior de omega pendulo 1
16     omega1 = Y[1]
17     #Valor anterior de la tension pendulo 1
18     tension1 = Y[2]
19
20     #Valor anterior de theta pendulo 2
21     theta2 = Y[3]
22     #Valor anterior de omega pendulo 2
23     omega2 = Y[4]
24     #Valor anterior de la tension pendulo 2
25     tension2 = Y[5]
26
27     #Valor anterior de theta pendulo 3
28     theta3 = Y[6]
29     #Valor anterior de omega pendulo 3
30     omega3 = Y[7]
31     #Valor anterior de la tension pendulo 3
32     tension3 = Y[8]
33
34     #Valor anterior de theta pendulo 4

```

¹Recuerde que puede descargar los códigos originales del repositorio oficial del curso en <https://github.com/sbustamante/Computacional-OscilacionesOndas/tree/master/codigos>

```

35     theta4 = Y[9]
36     #Valor anterior de omega pendulo 4
37     omega4 = Y[10]
38     #Valor anterior de la tension pendulo 4
39     tension4 = Y[11]
40
41     #Derivada de theta pendulo 1
42     Dtheta1 = omega1
43     #Derivada de omega pendulo 1
44     Domega1 = -(g/l1)*np.sin( theta1 ) + \
45     f*(g/l1)*( theta2 )*np.cos( theta1 )
46     #Derivada de la tension pendulo 1
47     Dtension1 = -3*omega1*(-m*g*np.sin( theta1 ) + \
48     f*m*g*( theta2 )*np.cos( theta1 )) + \
49     f*m*g*( omega2 )*np.sin( theta1 )
50
51     #Derivada de theta pendulo 2
52     Dtheta2 = omega2
53     #Derivada de omega pendulo 2
54     Domega2 = -(g/l2)*np.sin( theta2 ) + \
55     f*(g/l2)*( theta1 + theta3 )*np.cos( theta2 )
56     #Derivada de la tension pendulo 2
57     Dtension2 = -3*omega2*(-m*g*np.sin( theta2 ) + \
58     f*m*g*( theta1 + theta3 )*np.cos( theta2 )) + \
59     f*m*g*( omega1 + omega3 )*np.sin( theta2 )
60
61     #Derivada de theta pendulo 3
62     Dtheta3 = omega3
63     #Derivada de omega pendulo 3
64     Domega3 = -(g/l3)*np.sin( theta3 ) + \
65     f*(g/l3)*( theta2 + theta4 )*np.cos( theta3 )
66     #Derivada de la tension pendulo 3
67     Dtension3 = -3*omega3*(-m*g*np.sin( theta3 ) + \
68     f*m*g*( theta2 + theta4 )*np.cos( theta3 )) + \
69     f*m*g*( omega2 + omega4 )*np.sin( theta3 )
70
71     #Derivada de theta pendulo 4
72     Dtheta4 = omega4
73     #Derivada de omega pendulo 4
74     Domega4 = -(g/l4)*np.sin( theta4 ) + \
75     f*(g/l4)*( theta3 )*np.cos( theta4 )
76     #Derivada de la tension pendulo 4
77     Dtension4 = -3*omega4*(-m*g*np.sin( theta4 ) + \

```

```

78     f*m*g*( theta3 )*np.cos( theta4 )) + \
79     f*m*g*( omega3 )*np.sin( theta4 )
80
81     return (Dtheta1, Domega1, Dtension1, \
82     Dtheta2, Domega2, Dtension2, \
83     Dtheta3, Domega3, Dtension3, \
84     Dtheta4, Domega4, Dtension4)
85
86     #Gravedad
87     g = 9.8
88     #Masa de todos los pendulos
89     m = 1.
90     #Longitud pendulo 1
91     l1 = 1.0
92     #Longitud pendulo 2
93     l2 = 2.0
94     #Longitud pendulo 3
95     l3 = 3.0
96     #Longitud pendulo 4
97     l4 = 2.0
98     #Factor de acoplamiento
99     f = 0.1
100    #Tiempos
101    tiempo = np.arange( 0, 200, 0.1 )
102
103
104    #SOLUCION NUMERICA
105    #Condicion inicial pendulo 1
106    #Angulo inicial
107    theta1_t0 = 0.0
108    #Velocidad angular inicial
109    omega1_t0 = 0.0
110    #Tension inicial
111    tension1_t0 = m*l1*omega1_t0**2 + m*g*np.cos( theta1_t0 )
112
113    #Condicion inicial pendulo 2
114    #Angulo inicial
115    theta2_t0 = 0.0
116    #Velocidad angular inicial
117    omega2_t0 = 0.0
118    #Tension inicial
119    tension2_t0 = m*l2*omega2_t0**2 + m*g*np.cos( theta2_t0 )
120

```

```
121 #Condicion inicial pendulo 3
122 #Angulo inicial
123 theta3_t0 = 0.0
124 #Velocidad angular inicial
125 omega3_t0 = 0.0
126 #Tension inicial
127 tension3_t0 = m*l3*omega3_t0**2 + m*g*np.cos( theta3_t0 )
128
129 #Condicion inicial pendulo 4
130 #Angulo inicial
131 theta4_t0 = np.pi/4
132 #Velocidad angular inicial
133 omega4_t0 = 0.0
134 #Tension inicial
135 tension4_t0 = m*l3*omega3_t0**2 + m*g*np.cos( theta3_t0 )
136
137 #Condiciones iniciales de todos los pendulos
138 cond_ini = ( theta1_t0, omega1_t0, tension1_t0, \
139 theta2_t0, omega2_t0, tension2_t0, \
140 theta3_t0, omega3_t0, tension3_t0, \
141 theta4_t0, omega4_t0, tension4_t0)
142 #Solucion numerica de todos los pendulos
143 theta1_t, omega1_t, tension1_t, \
144 theta2_t, omega2_t, tension2_t, \
145 theta3_t, omega3_t, tension3_t, \
146 theta4_t, omega4_t, tension4_t = \
147 np.transpose( integ.odeint( dF, cond_ini, tiempo ) )
148
149 #Guardado de resultados en archivo externo
150 datos = np.transpose((tiempo, theta1_t, theta2_t, \
151 theta3_t, theta4_t))
152 np.savetxt( 'amplitudes.txt', datos )
153
154 #Grafica de las soluciones
155 plt.plot( tiempo, theta1_t, label = 'pendulo 1', \
156 color='red', linewidth = 2 )
157 plt.plot( tiempo, theta2_t, label = 'pendulo 2', \
158 color='blue', linewidth = 2 )
159 plt.plot( tiempo, theta3_t, label = 'pendulo 3', \
160 color='green', linewidth = 2 )
161 plt.plot( tiempo, theta4_t, label = 'pendulo 4', \
162 color='black', linewidth = 2 )
163
```

```

164 #Formato de grafica
165 plt.title('Soluciones de pendulos acoplados')
166 plt.xlabel('tiempo')
167 plt.ylabel('Angulo oscilacion [rad]')
168 plt.grid()
169 plt.legend()
170 plt.show()

```

Una vez corrido el programa se debe obtener el archivo `amplitudes.txt` con las soluciones angulares, y la siguiente figura

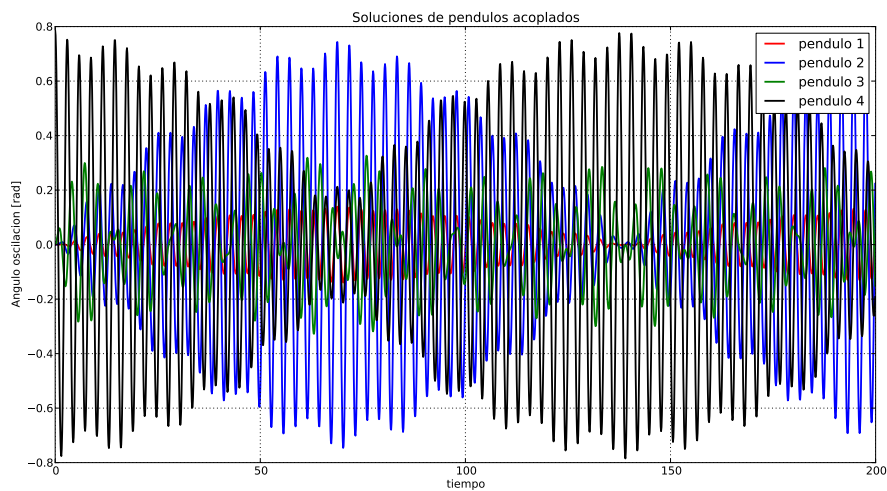


Figura 2.7: Solución de la amplitud para cada uno de los cuatro péndulos acoplados del sistema. Puede notarse que a pesar de que los péndulos 1 y 3 comienzan a oscilar, absorbiendo parte de la energía del péndulo 4, el péndulo 2 lo hace más eficientemente debido a tener la misma longitud, presentando resonancia.

A continuación se explica el código anterior

```

from __future__ import division
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integ

```

La primera línea hace que *Python* divida entre enteros de forma adecuada ya que por defecto cuando se dividen dos enteros se retorna el residuo entero entre la división, por ejemplo sin la primera línea $3/2 = 1$, y con ella, $3/2 = 1.5$. Se

recomienda siempre usarla. Las demás líneas corresponden a las librerías ya conocidas importadas bajo los alias estándares.

```
#Guardado de resultados en archivo externo
datos = np.transpose((tiempo, theta1_t, theta2_t, \
theta3_t, theta4_t))
np.savetxt( 'amplitudes.txt', datos )
```

En la primera línea se crea un arreglo con las diferentes columnas del archivo que se desea guardar, en este caso es el arreglo de tiempo en la primera y los arreglos con la solución de los ángulos para los 4 péndulos en las siguientes. El operador backslash `\` permite saltar de línea en *Python* sin que haya problemas de sintaxis y sirve para organizar el código y hacerlo más legible. La función de *NumPy* `transpose` se usa para transponer la matriz (arreglo) de datos para que el archivo externo esté organizado por columnas y no por filas. Finalmente la función `savetxt` permite guardar todos los datos en un archivo externo llamado `amplitudes.txt`.

```
#Grafica de las soluciones
plt.plot( tiempo, theta1_t, label = 'pendulo 1', \
color='red', linewidth = 2 )
plt.plot( tiempo, theta2_t, label = 'pendulo 2', \
color='blue', linewidth = 2 )
plt.plot( tiempo, theta3_t, label = 'pendulo 3', \
color='green', linewidth = 2 )
plt.plot( tiempo, theta4_t, label = 'pendulo 4', \
color='black', linewidth = 2 )
```

En esta parte se grafican en una misma ventana todas las soluciones para los 4 péndulos. Se usa de nuevo el operador backslash `\` para ordenar el código y se aplican nuevos argumentos de la función `plot` de la librería *Matplotlib*. El argumento `color` permite definir el color de la curva mientras que `linewidth` define el grosor, el valor de 1 se toma por defecto si no se especifica.

```
#Formato de grafica
plt.title('Soluciones de pendulos acoplados')
plt.xlabel('tiempo')
plt.ylabel('Angulo oscilacion [rad]')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

En esta última parte se usan funciones de *Matplotlib* para dar formato a las gráficas.

En primer lugar se asigna un título con la función `title`, luego se asignan etiquetas en cada eje con las funciones `xlabel` y `ylabel`, se activa una malla sobre la ventana con la función `grid` y finalmente se muestran las etiquetas de cada curva con `legend` y se muestra el resultado en pantalla con `show`.

Como segunda parte de esta demostración se usaran los datos integrados y almacenados en el archivo `amplitudes.txt` para representar una animación 3D del sistema.

Capítulo 3

Bibliografía