

# Inestabilidades en sistemas acústicos y ópticos

Tesis presentada por  
**Juan David Rincón Estrada**

Como requisito para obtener  
el grado de

*Maestro en Ciencias  
en la Especialidad de Física*

Asesorado por  
**Dr. David Bermúdez Rosales**

*Departamento de Física*

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del Instituto Politécnico Nacional  
Cinvestav*

Agosto de 2019



---

*A mi hermano Alejandro.  
Siempre encuentras la manera ayudar a los demás.*



# AGRADECIMIENTOS

---

En este espacio quiero agradecer a varias personas e instituciones que permitieron realizar este trabajo. Primero a mis padres por su apoyo incondicional, de igual forma a Alejandro y Míster por siempre estar pendientes de mí, no hay palabras que expresen lo agradecido que estoy con ustedes.

Un agradecimiento muy especial a mi asesor David Bermúdez por su gran paciencia, por ser un excelente profesor, por su gran sentido de responsabilidad, por siempre tener la puerta abierta para resolverme dudas sobre física.

A las personas de quienes aprendí cosas nuevas en el Departamento de Física, en especial deseo agradecer a los organizadores del Coloquio Departamental y del Seminario de Gravitación y Física Matemática, dado que disfrutaba la mayoría de charlas de los expositores que invitaban.

También deseo agradecer a Rosemary y Marianita por su paciencia al explicarme cuestiones administrativas.

A todos mis compañeros con quienes compartí, en especial a Pacheco, Lupita, Elda, Raúl, Johan, Felipe, Karen, Danahe y José gracias por todos los buenos momentos en mi estancia en México. De igual forma agradezco a Norman, Nacho, Leo e Ivan por escucharme y ayudarme a aclarar conceptos e ideas que tenía en mente. A los chicos de Colombia que se encontraban en México, en especial a Karina, gracias por las largas conversaciones de física acompañadas de un buen *tintico*.

A las personas que conocí fuera de la academia, gracias por compartir un poco de su cultura con un extranjero. A mis amigos en Colombia gracias por tener tiempo para nuevas aventuras y la disposición para descubrir nuevos lugares en los momentos que me encontraba en mis tierras.

También reconozco al apoyo de Conacyt a través de la beca 637736 que hizo posible mi dedicación plena a este trabajo.

*Juan David Rincón Estrada*



# RESUMEN

---

En este trabajo se muestra que la radiación de Hawking resonante en la configuración de láser de agujeros negros (BHL) es producto de un conjunto discreto de inestabilidades, tanto si el sistema es un condensado de Bose-Einstein (BECs) donde la radiación son fonones, como si el sistema son pulsos de luz propagándose en una fibra óptica donde la radiación son fotones. Para obtener este resultado, describimos las propiedades de un campo cuántico al propagarse en un espacio-tiempo curvo como el generado por un agujero negro. Este tipo de curvatura posee una región de no retorno que define un horizonte de eventos y la radiación que escapa de ésta se conoce como radiación de Hawking (HR).

Mostramos cómo la propagación de una fluctuación sobre un fluido en movimiento es equivalente a la propagación de un campo escalar en un espacio-tiempo curvo. Este resultado nos permite estudiar la HR en experimentos de laboratorio en materia condensada y en óptica. Luego estudiamos la relación de dispersión que debe cumplir una fluctuación del estado base de un sistema bosónico como los BECs a partir de la linealización de la ecuación de Gross-Pitaevkii. Demostramos que la dinámica de la fluctuación que se propaga sobre el fluido en movimiento puede ser analizada por teoría de inestabilidades. Después introducimos el BHL en el contexto acústico y analizamos la dinámica de la fluctuación por teoría de inestabilidades de la manera que fue introducida en [Bermudez and Leonhardt \[2018\]](#).

Más tarde, implementamos un formalismo similar para el caso de sistemas ópticos, donde el medio en movimiento será creado a partir de la interacción de pulsos ópticos intensos con materiales no lineales y dispersivos. Estudiamos la relación de dispersión que debe seguir una fluctuación que se propaga sobre un pulso de luz que crea el medio en movimiento, esto se logra linealizando la ecuación no lineal de

Schrödinger (NLSE). Analizamos igualmente la dinámica de la fluctuación en la configuración del láser óptico de agujeros negros (OBHL) por teoría de inestabilidades. Concluimos que la configuración de OBHL permite confinar luz con luz de forma similar a una guía de ondas temporal y que también se amplifica para producir la radiación de Hawking resonante.

# ABSTRACT

---

This work shows that the resonant Hawking radiation in black-hole laser (BHL) configuration is produced by a discrete set of instabilities, whether the system a Bose-Einstein condensate (BECs) where the radiation are phonons, or if the system is light pulses propagating in optical fibers where the radiation are photons. To obtain this result, we describe the properties of a quantum field propagating in a curved spacetime, as the one generated by a black hole. This type of curvature has a region of no-return defined as an event horizon and the radiation that escapes from it is known as Hawking radiation (HR).

We show how the propagation of a fluctuation on a moving fluid is equivalent to the propagation of a scalar field in a curved spacetime. This result allows us to study HR in laboratory experiments on condensed matter and in optics. Then we study the dispersion relation that should follow a ground-state fluctuation of a bosonic system such as BECs through the linearization of the Gross-Pitaevkii equation. We demonstrate that the dynamics of the fluctuation that propagates on the moving fluid can be analyzed by the theory of instabilities. Then we introduce the BHL in the acoustic context and we analyze the dynamics of the fluctuation with the theory of instabilities introduced in [Bermudez and Leonhardt \[2018\]](#).

Later, we implement a similar formalism for optical systems, where the moving medium is created from the interaction of intense optical pulses with nonlinear and dispersive materials. We study the dispersion relation that must follow a fluctuation that propagates over a light pulse that creates the moving medium, this is achieved by linearizing the nonlinear Schrödinger equation (NLSE). We also analyzed the dynamics of the fluctuation in the optical black-hole laser (OBHL) configuration by the theory of instabilities. We conclude that the OBHL configuration allows light to

be confined with light in a way similar to a temporal waveguide and that is also amplified to produce resonant Hawking radiation.

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Radiación de Hawking . . . . .	3
1.2. Problema transplanckiano en la radiación de Hawking . . . . .	7
<b>2. Radiación de Hawking análoga en sistemas acústicos</b>	<b>9</b>
2.1. Ondas sonoras en fluidos no Relativistas . . . . .	9
2.1.1. Linealización de las ecuaciones de campo . . . . .	10
2.2. Análogos de radiación de Hawking en condensados de Bose-Einstein . . . . .	12
2.2.1. Linealización de la ecuación de campo . . . . .	14
2.2.2. Relación de dispersión . . . . .	16
2.2.3. Análisis por teoría de inestabilidades . . . . .	19
2.3. Configuración de láser de agujeros negros (BHL) . . . . .	20
2.3.1. Propagación de una onda plana a través del BHL . . . . .	21
<b>3. Inestabilidades en un BHL</b>	<b>25</b>
3.1. Método gráfico: BHL con frecuencias reales . . . . .	26
3.1.1. Dirección de viaje . . . . .	27
3.1.2. Horizonte . . . . .	28
3.1.3. Velocidad transónica . . . . .	29
3.2. Método analítico: BHL con frecuencias complejas . . . . .	29
3.2.1. Descripción cualitativa y cuantitativa . . . . .	31
3.2.2. Matriz de transferencia . . . . .	32
3.3. Estados confinados . . . . .	34
3.4. Comparación del modelo de inestabilidades con el método simple . . . . .	36
3.4.1. Condición de resonancia . . . . .	36
<b>4. Radiación de Hawking análoga en sistemas ópticos</b>	<b>39</b>

4.1. Óptica no lineal . . . . .	40
4.2. Cuantización del campo electromagnético en medios no lineales . . . . .	41
4.2.1. Dispersión . . . . .	44
4.3. Solitón cuántico . . . . .	50
4.3.1. Transformación entre marcos de referencia . . . . .	52
4.3.2. Linealización . . . . .	54
4.3.3. Relación de dispersión . . . . .	56
4.4. Configuración de un láser óptico de agujeros negros (OBHL) . . . . .	58
<b>5. Inestabilidades en un OBHL</b>	<b>63</b>
5.1. Método gráfico: OBHL con frecuencias reales . . . . .	65
5.2. Dirección de viaje . . . . .	67
5.3. Horizontes . . . . .	68
5.4. Velocidad translumínica . . . . .	69
5.5. Método analítico: OBHL con frecuencias complejas . . . . .	70
5.5.1. Descripción cualitativa y cuantitativa . . . . .	72
5.5.2. Estados confinados . . . . .	74
5.6. Comparación del modelo de inestabilidades con el método simple . . . . .	77
5.6.1. Condición de resonancia . . . . .	78
5.6.2. Tiempo de propagación . . . . .	80
<b>6. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>83</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	83
6.2. Perspectivas . . . . .	85
<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

- 2.1. (a) Relación de dispersión en el marco comóvil. En morado se encuentra la rama que contiene modos contrapropagantes, mientras de azul la rama con modo copropagantes. La solución gráfica para dos perfiles de velocidad: una subsónica  $v_1$  (rosa) y otra supersónica  $v_2$  (verde). Aquí  $v_1 = -1$ ,  $k_0 = 2$ ,  $c = 1$ ,  $v_2 = -2$  y  $\omega = 1$ . (b) Perfil de velocidades del fluido  $v(x)$  para las tres regiones, I y III con velocidad subsónica y II con velocidad supersónica [Bermudez and Leonhardt, 2018]. . . . .

2.2. Diagrama para la evolución del modo  $k_{2\text{ul}}$  atrapado en la cavidad. Las líneas punteadas indican modos con norma negativa y las líneas continuas indican modos de norma positiva. Observe que en este análisis no se tienen en cuenta los modos copropagantes indentificados con la etiqueta (v) en la figura 2.1(a) [Bermudez and Leonhardt, 2018]. . . . .

2.3. (a) Relación de dispersión en el marco comóvil. En morado se encuentra la rama que contiene modos contrapropagantes, mientras de azul la rama con modo copropagantes. La solución gráfica para dos perfiles de velocidad: una subsónica  $v_1$  (rosa) y otra supersónica  $v_2$  (verde). Aquí  $v_1 = -1$ ,  $k_0 = 2$ ,  $c = 1$ ,  $v_2 = -2$ , y  $\omega = 1$ . (b) Perfil de velocidades del fluido  $v(x)$  para las tres regiones, I y III con velocidad subsónica y II con velocidad supersónica [Bermudez and Leonhardt, 2018]. . . . .

2.4. Velocidad de grupo en el marco de laboratorio para los modos  $k$ . Para  $v_1 = -1/2$  y  $v_2 = -2$ . De mayor a menor son:  $v_{1\text{u}}$  (azul),  $v_{2\text{u}}$  (naranja),  $v_{1\text{v}}$  (verde),  $v_{2\text{v}}$  (rojo). Los horizontes  $\pm k_h$  están marcados por líneas verticales entrecortadas Bermudez and Leonhardt [2018]. . . . .





- 5.6. Diagrama de modos de una OBHL con inestabilidades en el marco comóvil, con coordenadas  $(\tau, \zeta)$ . Los coeficientes mostrados  $A_j$  y  $C_j$  describen la solución para que el campo  $\phi$  sea una función de cuadrado integrable. Recordar que en las coordenadas  $(\tau, \zeta)$  las direcciones de velocidades calculadas en la sección 5.2 cambian de sentido debido a la transformación de coordenadas dada en la ec. (4.3.10). Las líneas discontinuas indican modos con norma negativa y las continuas modos con norma positiva. . . . . 73
- 5.7. Densidad de probabilidad  $|\phi(\tau)|^2$  para modos de la cavidad encontrados por teoría de inestabilidades y con parámetros dados en la tabla 5.1. Se grafica en verde el estado base o primera resonancia, en morado el primer estado excitado o segunda resonancia y en azul el segundo estado excitado o tercera resonancia para (a)  $\tau_c = 6$  y  $\delta n_{\max} = 0.01$ , (b)  $\tau_c = 13$  y  $\delta n_{\max} = 0.01$ , (c)  $\tau_c = 20$  y  $\delta n_{\max} = 0.01$ , (d)  $\tau_c = 6$  y  $\delta n_{\max} = 0.05$ , (e)  $\tau_c = 13$  y  $\delta n_{\max} = 0.05$  y (f)  $\tau_c = 20$  y  $\delta n_{\max} = 0.05$ . . . . . 76
- 5.8. Cambio de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para  $\text{Re}(\omega'_l)$  fijo, e incrementando el valor de  $\text{Im}(\omega')$  de 0 a  $\text{Im}(\omega'_l)$  en pequeños pasos. . . . . 77
- 5.9. Diferencia de fase  $\Delta\omega\tau_c$ . (a) Considerando el modelo de ondas planas cuando se fija  $\delta n_{\max} = 0.05$  y se varia  $\tau_c = \{6(\text{verde}), 13(\text{morado}), 20(\text{azul})\}\text{fs}$ . Las diferencias de fase de  $\pi$  y  $3\pi$  predichas por el modelo clásico son marcadas con puntos negros. Las líneas verticales discontinuas marcan el valor de  $\omega_R$  encontrado por teoría de inestabilidades y su intersección con la fase son los puntos de color. (b) Manteniendo fijo  $\tau_c = 20\text{ fs}$  y variando  $\delta n_{\max} = \{0.05(\text{verde}), 0.01(\text{rosa})\}$ . Los puntos negros son las predicciones por el modelo clásico, los puntos de color representan la solución por el modelo de inestabilidades. . . . . 78
- 5.10. Número de soluciones que cumplen la condición de resonancia en el espacio de parámetros. Dados  $\delta n_{\max}$  y  $\tau_c$  el modelo simple indica el número de resonancias. Las figuras geométricas en negro son las soluciones mostradas en la tabla 5.1, siendo  $N_{ins} = 1$  para círculos,  $N_{ins} = 2$  para rectángulos y  $N_{ins} = 3$  triángulos. Las figuras geométricas en azul son otras soluciones encontradas por teoría de inestabilidades. Las líneas discontinuas en rojo indican la cantidad de modos confinados encontrados por el modelo fenomenológico. . . . . 79

# ÍNDICE DE TABLAS

---

- 5.1. Parámetros encontrados para las condiciones impuestas en la figura 5.6 para una cavidad con  $\tau = \{6, 13, 20\}$ fs, y  $\delta n_{\max} = \{0.01, 0.05\}$ . . . [76](#)
- 6.1. Diferencias entre el láser de agujeros negros en los caso acústico y óptico. [85](#)



# INTRODUCCIÓN

---

La existencia de los agujeros negros fue una de las primeras predicciones sorprendentes y novedosas que surgieron de la teoría de gravitación de Einstein. Aunque inicialmente fueron punto de controversia, en la actualidad, está bien establecida su existencia y su papel en la dinámica y evolución del universo a gran escala [Bambi \[2018\]](#). Cuando se describen los campos cuánticos sobre estas soluciones exóticas del espacio-tiempo se encuentran fenómenos fascinantes como la radiación de Hawking.

S.W. Hawking en 1974 por medio de una derivación semicásica predice que los agujeros negros emiten un flujo de radiación térmica [\[Hawking, 1974\]](#), planteando con su resultado una serie de preguntas fundamentales con respecto a la interacción de la mecánica cuántica, la gravedad y la paradoja de la información en agujeros negros [\[Susskind, 2006\]](#).

Aunque el efecto Hawking se basa en principios físicos ampliamente aceptados, la observación astrofísica de esta radiación parece un hecho poco probable, al menos, en el futuro cercano. En 1981, W.G. Unruh propone que en lugar de observar la radiación de Hawking que emana un agujero negro astrofísico, se prodría verificar esta predicción a partir de un modelo análogo realizable en el laboratorio [\[Unruh, 1981\]](#). Esta propuesta indica que las perturbaciones que se crean en un fluido en movimiento se propagan de manera similar a un campo escalar en un espacio-tiempo curvo, por lo cual si se imponen las mismas condiciones en este modelo que a la luz en el caso astrofísico se tendría el mismo fenómeno de radiación.

Desde el trabajo de Unruh, ha habido numerosas propuestas para probar por analogía varias predicciones de gravitación y cosmología utilizando experimentos de laboratorios en materia condensada y óptica. Estos emplean una gama de medios

que incluyen helio líquido [Volovik, 2003], [Jacobson and Volovik, 1998], condensados de Bose-Einstein (BECs) [Zapata et al., 2011], [Bermudez and Leonhardt, 2018], fibras ópticas [Philbin et al., 2008], [Drori et al., 2019], materiales espintrónicos [Jannes et al., 2011] y muchos más.

Las propuestas más prometedoras que se analizan brevemente en esta tesis son los análogos acústicos donde los fonones se propagan en un BECs que fluye y los análogos ópticos en donde pulsos de luz se mueven en un medio no lineal y dispersivo. Estos sistemas son los más prometedores porque permiten la construcción de un horizonte, un ingrediente escencial para que exista el efecto Hawking. Los horizontes se definen como el lugar donde la velocidad de una perturbación es igual a la velocidad del flujo del fluido y son importantes por que dividen el espacio donde se propagan los campos en dos regiones.

En los BECs, el horizonte es creado cambiando la velocidad del fluido cuántico, tal que una perturbación puede generarse en dos posibles regiones: una subsónica donde la velocidad de la perturbación es menor que la velocidad del fluido y otra supersónica donde la velocidad de la perturbación es mayor que la velocidad del fluido.

En los sistemas ópticos, la creación de horizontes requiere más ingenio. La propagación de la luz en medios no lineales como las fibras ópticas permite la existencia de solitones, pulsos de luz cuyo perfil de intensidad no cambia a lo largo del medio donde se propagan. La no linealidad del material permite la interacción entre estos pulsos y un paquete de ondas de menor intensidad (pulso de prueba) generando el análogo de horizonte de eventos. El solitón interactúa con el pulso de prueba a través del efecto Kerr, que da lugar a un pequeño cambio del índice de refracción que es proporcional a la intensidad del solitón. Por tanto el pulso de prueba se alenta cuando incide sobre el solitón y, si la diferencia de velocidad inicial entre el pulso y el solitón es pequeña, este puede llevar al paquete de ondas a su propia velocidad, o lo que es lo mismo, un observador en el marco de referencia del solitón, vería la señal detenerse. Esto corresponde a un horizonte de eventos de agujero blanco: un punto más allá del cual la señal no puede pasar.

Por otro lado los avances en esta línea han logrado la implementación de una configuración conocida como láser de agujeros negros (BHL) [Corley and Jacobson, 1996]. Esta es una variación del esquema básico, donde el flujo de velocidad del condensado cambia en tres zonas: de una región subsónica a una supersónica en un espacio finito y regresando de nuevo a una región subsónica. Para realizar el segundo cambio entre regiones se necesita la presencia de un segundo horizonte, el cual permite que la radiación confinada entre los horizontes sufra un proceso de amplificación a través de un mecanismo de resonancia similar al de un láser. El mismo fenómeno

se puede encontrar en los análogos ópticos llamado láser de agujeros negros óptico (OBHL) [Faccio et al., 2012], [Gaona-Reyes and Bermudez, 2017].

El proceso de amplificación se encuentra al describir la dinámica de pequeñas excitaciones que se producen en un medio en movimiento y estas pueden ser realizadas a partir de teoría de inestabilidades [Charru, 2011], la cual describe el proceso de amplificación de un campo permitiendo que las frecuencias en que este oscile sean complejas con su parte real positiva.

En este trabajo reproduciremos los cálculos del trabajo [Bermudez and Leonhardt, 2018] donde se emplea la teoría de inestabilidades para describir la radiación resonante en la configuración de un BHL en BECs. Además con lo aprendido, se analizará la configuración del OBHL en el caso de un análogo óptico. En ambos casos se encuentra que la radiación de Hawking resonante es producto de un conjunto discreto de inestabilidades, además en el caso óptico la configuración OBHL permite confinar luz con luz un resultado descrito en el contexto de óptica no lineal en Plansinis et al. [2016]. Pero para entender estos resultados iniciemos describiendo brevemente qué es la radiación de Hawking.

## 1.1. Radiación de Hawking

Poco después de que Einstein revelara su teoría de gravedad en 1915, los físicos se dieron cuenta que esto permitía la posibilidad de singularidades en el espacio-tiempo producto de un colapso gravitacional catastrófico. En lugares donde la densidad es extrema como el núcleo muerto de una estrella masiva, el espacio-tiempo podría ser arrastrado hacia una singularidad o agujero en el universo. Un límite en el espacio-tiempo llamado *horizonte de eventos* marca la región de no retorno, una vez que cualquier tipo de información física pase este límite no se podrá saber más de ella, i.e., una vez formado el horizonte, no hay nada en la teoría de gravedad que pueda dar información sobre lo que pasa en dicha región.

Estos agujeros negros deberían existir para siempre, solo crecer y nunca encogerse. Pero en Hawking [1974] y Hawking [1975] se prueba que esta última conclusión podría ser errónea. Cuando se estudian las propiedades de un campo cuántico sobre un espacio-tiempo curvo, en particular, sobre la métrica de Schwarzschild se encuentra que los agujeros negros pueden radiar partículas con un espectro térmico, es decir, pueden evaporarse y desaparecer.

Para entender la afirmación de Hawking debemos recurrir a algunos conceptos de teoría cuántica de campos. El espacio está lleno de campos cuánticos, los cuales pue-

den oscilar en formas particulares. Estas oscilaciones o excitaciones del campo representan el número de partículas que permean el espacio, e.g., si no hay excitaciones el campo se encuentra en el estado de vacío, el cual es el mismo para todo el espacio. Las posibles frecuencias de las oscilaciones del campo pueden ser positivas o negativas, siendo estas últimas interpretadas como partículas que viajan atrás en el tiempo o partículas de antimateria [Aitchison and Hey, 2012]. Todo lo anterior es cierto en un espacio-tiempo plano como el de Minkowski. Pero ¿qué ocurre cuando un campo cuántico se propaga sobre un espacio-tiempo curvo? En particular uno descrito por la métrica de Schwarzschild?

La curvatura causa problemas para definir un único vacío del campo, los horizontes de eventos acotan el acceso a ciertos modos de oscilación de campos cuánticos, perturbando así el equilibrio que define el vacío. Como resultado, el concepto de partículas se vuelve ambiguo y su interpretación física se hace mucho más difícil [DeWitt, 1975], i.e., la curvatura indefine los campos en la proximidad de un horizonte. Surge la pregunta ¿cómo definir un campo adecuadamente?, ¿qué información física se obtiene al lograr esto? Para responder estas preguntas se necesitaría una teoría completa que une la relatividad general y la mecánica cuántica, una teoría cuántica de la gravedad, pero esto no existe a la fecha. Aún así Hawking encontró una forma ingeniosa de dar respuesta a estas preguntas. Imaginó la trayectoria de un rayo de luz en el espacio-tiempo (geodésica nula) que se extiende desde el pasado lejano y continúa hacia el futuro lejano. En su trayecto, la luz pasa un instante antes por una región donde una estrella se convierte en agujero negro por colapso gravitacional. El rayo del que hablamos es el último en salir un instante antes de formarse el horizonte de eventos [Hawking, 1975].

Si el campo se encuentra en estado de vacío antes de la formación del horizonte, después de la creación de éste, el mismo campo podrá estar en un estado excitado, es decir, contiene partículas. Aunque no exista una teoría cuántica de la gravedad, la predicción se logra realizar al comparar los estados de vacío de las dos regiones asintóticas al horizonte (pasado lejano y futuro lejano) donde el espacio-tiempo es plano y la teoría cuántica de campos funciona sin problemas.

Matemáticamente se trata de analizar las consecuencias de tener un campo escalar cuántico  $\phi$  que obedece la ecuación de onda en un espacio tiempo curvo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \phi = 0, \quad (1.1.1)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico y  $g$  su determinante. Para nuestro interés trabajamos

con la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt_s^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (1.1.2)$$

$r_s = 2GM/c^2$  es el radio de Schwarzschild que define el horizonte de eventos y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  es el elemento de ángulo sólido.

La singularidad en el horizonte de eventos  $r = r_s$  es solo una singularidad de coordenadas en el sentido que puede ser removida bajo un cambio apropiado de estas. Por el contrario, la singularidad en  $r = 0$  es esencial o física. Esta métrica tiene como particularidad que  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$  cuando  $r/r_s \gg 1$ , i.e., la métrica de Schwarzschild  $g_{\mu\nu}$  se aproxima de manera asintótica a la métrica plana de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .

Para un espacio-tiempo plano, el campo cuántico  $\phi$  posee una descomposición en función de los operadores de aniquilación y creación ( $a, a^\dagger$ ) de la forma

$$\phi(x) = \int d\omega \left( f_\omega(x) a_\omega + f_\omega^*(x) a_\omega^\dagger \right), \quad (1.1.3)$$

siendo  $f_\omega(x)$  los denominados *modos de frecuencia positiva* y  $f_\omega^*(x)$  *modos de frecuencia negativa*, que dan igualmente solución a la ec. (1.1.1). El operador de destrucción  $a_\omega$  permite definir su estado de vacío  $|0\rangle$ , tal que

$$a_\omega |0\rangle = 0, \quad \forall \omega. \quad (1.1.4)$$

La descomposición del campo en la ec. (1.1.3) es válida en el límite asintótico que es físicamente equivalente al pasado lejano mencionado.

En un espacio-tiempo curvo con métrica  $g_{\mu\nu}$  se seguirá cumpliendo la ec. (1.1.1) pero no será posible tener una única descomposición espectral de la forma de la ec. (1.1.3) debido que las frecuencias positivas y negativas no tienen un significado invariante, cambian para cada observador. Tendríamos entonces diferentes construcciones del espacio de Fock (espacio de estados para el campo) basados en diferentes nociones de frecuencia.

Una región de interés donde el vacío está bien definido es en el futuro lejano, el cual también es un límite asintótico y permite expresar el campo como

$$\phi(x) = \int d\omega' \left( g_{\omega'}(x) b_{\omega'} + g_{\omega'}^*(x) b_{\omega'}^\dagger \right), \quad (1.1.5)$$

donde  $g_{\omega'}(x)$  son nuevas funciones modales y  $b_{\omega'}$  es el operador de aniquilación que define el estado de vacío  $|0\rangle_{\text{out}}$  en la región asintótica del futuro lejano.

La comparación entre los vacíos de ambas regiones se realiza a través de las transformaciones de Bogoliubov que permiten escribir las funciones modales y operadores de ambas regiones como

$$g_{\omega'} = \int d\omega (\alpha_{\omega\omega'} f_\omega + \beta_{\omega\omega'} f_\omega^*), \quad (1.1.6)$$

$$b_{\omega'} = \int d\omega (\alpha_{\omega\omega'}^* a_\omega + \beta_{\omega\omega'} a_\omega^\dagger), \quad (1.1.7)$$

donde  $\alpha_{\omega\omega'}^*$  y  $\beta_{\omega\omega'}$  son conocidos como los *coeficientes de Bogoliubov* y cumplen la normalización

$$|\alpha_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2 = 1. \quad (1.1.8)$$

Por lo cual el número de partículas en todo el espacio que puede medir un observador en el futuro lejado  $N_m = b_m^\dagger b_m$  en el en el estado vacío del pasado lejano es:

$$\langle 0 | N_\omega | 0 \rangle = \int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2, \quad (1.1.9)$$

El término  $\beta_{\omega\omega'}$  en la transformación de Bogoliubov describe una mezcla de modos de frecuencia positiva y negativa producto de un proceso de dispersión que es generado por la existencia de un horizonte. El estado de vacío que proviene del pasado lejano es dispersado por el horizonte generando fotones que quedan atrapados dentro del horizonte con frecuencia negativa y fotones que logran salir de él con frecuencia positiva.

El número de partículas que llegan al detector de un observador en el futuro lejano cuando se suprime la parte angular  $d\Omega = 0$  en la ec. (1.1) es

$$\langle 0 | N_\omega | 0 \rangle = \int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{\delta(0)}{\exp(\frac{2\pi\omega}{\kappa}) - 1}, \quad (1.1.10)$$

donde  $\kappa \equiv c/2r_s = c^3/4GM$  es conocida como la gravedad superficial del agujero negro. El número de partículas diverge porque es el total de partículas en todo el espacio, esto es evidente en el término  $\delta(0)$  que representa el volumen de todo el espacio, por lo cual se define una densidad de partículas  $n_\omega$  tal que

$$\langle 0 | N_\omega | 0 \rangle = n_\omega \delta(0), \quad (1.1.11)$$

con lo cual,

$$n_\omega = \frac{1}{\exp(\frac{2\pi\omega}{\kappa}) - 1}. \quad (1.1.12)$$

Esta densidad de partículas representa a su vez la distribución de frecuencias de la radiación, de hecho es un espectro de cuerpo negro el cual puede describirse a partir de un único parámetro que es la temperatura  $T_H$

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M} \approx 6.169 \times 10^{-8} \text{K} \times \frac{M_\odot}{M}, \quad (1.1.13)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. La temperatura es directamente proporcional a  $\kappa$  o inversamente proporcional a la masa del agujero. Para simplificar el resultado y obtener una estimación de éstos, la última expresión permite conocer el valor de la temperatura en unidades de Kelvin para la radiación que emite un agujero negro de  $M$  masas solares.

¿Qué valores de temperatura puede tomar la ec. (1.1)? Por ejemplo, para el agujero negro supermasivo de la galaxia M87, del cual a la fecha se tiene la única imagen real y es el más conocido por el público en general, tiene 6,500 millones de masas solares, i.e.,  $M = 6.5 \times 10^8 M_\odot$  por lo cual el valor de la temperatura de la radiación que puede emitir es del orden de  $10^{-17}$ K. Esto está 17 órdenes de magnitud por debajo de la temperatura del fondo cósmico de microondas (CMB) que es de 2.7K. Además, para agujeros negros estelares existe un límite mínimo en su masa para que sean creados por colapso gravitacional, el límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [Bom-baci, 1996], el cual es de  $\sim 3.0 M_\odot$ . Por tanto la cota superior en temperatura para agujeros negros estelares es de  $10^{-8}$ K lo cual sigue siendo una temperatura extremadamente pequeña comparada con el CMB y pone de manifiesto una gran dificultad observational para verificar este resultado en el caso astrofísico.

Ahora, ¿qué pasa si consideramos la parte angular de la métrica?. En este caso el espectro de radiación ya no es térmico, la ec. (1.12) viene apantallada por una función que depende de la frecuencia, esta cantidad suele llamarse *factor gris*  $\Gamma_{lm}(\omega)$  y en este caso ya no es posible caracterizar la radiación de Hawking con un único parámetro [Mukhanov and Winitzki, 2007].

## 1.2. Problema transplanckiano en la radiación de Hawking

El cálculo de la radiación que sale de un agujero negro plantea un problema importante llamado *problema transplanckiano* y se debe a que la radiación de Hawking se basa en un aproximación semicásica donde el campo escalar  $\phi$  es cuántico mientras que el campo gravitacional  $g_{\mu\nu}$  es tratado como un fondo clásico y fijo, generando un corrimiento exponencial al rojo en las frecuencias emitidas cerca del horizonte, i.e., la radiación térmica que podría ser observada en el futuro lejano proviene de modos que salieron del pasado lejano con una longitud de onda extremadamente corta, mucho menor que la longitud de Planck  $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.6 \times 10^{-35}$ m. Por debajo de la escala de Planck las teorías con las cuales se describe la radiación de Hawking dejan de tener validez.

Aunque la resolución completa de este problema requeriría una teoría completa de la gravedad cuántica, es interesante observar que modelos en gravedad análoga permiten regularizar la radiación de Hawking al estudiar la propagación de un campo escalar en medios dispersivos [Jacobson, 1996].

# RADIACIÓN DE HAWKING ANÁLOGA EN SISTEMAS ACÚSTICOS

---

Como se observó en el capítulo 1, la radiación de Hawking tiene varios problemas para ser observada a nivel astrofísico cuando los agujeros negros son creados por colapso gravitacional. Afortunadamente, [Unruh \[1981\]](#) demostró que los agujeros negros no son los únicos objetos con la capacidad de emitir este tipo de radiación. De hecho, en algunas condiciones (que se detallarán más adelante) la física de las ondas que se propagan en fluidos clásicos o cuánticos con movimiento tienen una correspondencia matemática con los campos cuánticos que se propagan sobre una métrica que describe un espacio-tiempo curvo por lo cual, pueden ser utilizados para realizar experimentalmente análogos del horizonte de un agujero negro en los que se podría observar el proceso de Hawking. Además, estos sistemas análogos permiten hacer un corte en las frecuencias entrantes al horizonte debido que las ondas en un medio no existen para longitudes de onda cercanas o por debajo de cierta escala física. Por ejemplo, el sonido no se propaga por debajo de la distancia intermolecular típica de un fluido i.e., hay una frecuencia mínima en nuestro modelo.

## 2.1. Ondas sonoras en fluidos no Relativistas

Partiremos explicando las ideas expuestas en [\[Unruh, 1981\]](#), el cual es el artículo que da inicio a una nueva área de la física moderna llamada *gravedad análoga* [\[Barcelo et al., 2011\]](#) y en particular al tema de *radiación de Hawking análoga*.

Tomemos como sistema de trabajo un fluido no relativista, perfecto y barotrópico. Con estas suposiciones, la dinámica de este sistema físico está totalmente regida por

las ecuaciones

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi, \quad (2.1.2)$$

donde  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$  es la velocidad del fluido,  $\rho(t, \mathbf{r})$  es su densidad,  $p(t, \mathbf{r})$  es la presión al cual está sometido y  $\Phi(\mathbf{r})$  es un potencial externo. La ec. (2.1.1) expresa la conservación de la masa, mientras que la ec. (2.1.2) es la de Euler y representa la acción de fuerzas sobre el fluido. Además, como el fluido es barotrópico se tiene como función de estado  $p = p(\rho)$ . Si además  $\mathbf{v}$  es irrotacional, podemos definir un campo de velocidades  $\psi$  tal que  $\mathbf{v} = \nabla \psi$ .

### 2.1.1. Linealización de las ecuaciones de campo

Ahora supongamos que conocemos una solución  $\psi_0, \rho_0, p_0$  que satisfacen las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2). Nuestro interés es observar cómo se modifica dicha solución bajo una fluctuación lineal, para ello proponemos una solución general de la forma [Landau L.D., 1980]:

$$\begin{pmatrix} \psi(\mathbf{r}, t) \\ \rho(\mathbf{r}, t) \\ p(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0(\mathbf{r}, t) \\ \rho_0(\mathbf{r}, t) \\ p_0(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \rho_1(\mathbf{r}, t) \\ p_1(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \epsilon + \vartheta(\epsilon^2), \quad (2.1.3)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro adimensional pequeño que no depende del tiempo y las coordenadas. Al linealizar la ecuación de continuidad y expresar de forma lineal la dependencia de la presión y la densidad se tiene

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \nabla \psi_0 + \rho_0 \nabla \psi_1) &= 0, \\ p_1 &= c^2 \rho_1, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

con  $c^2 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)$  el cuadrado de la velocidad local de las perturbaciones lineales alrededor del campo de fondo  $(\psi_0, \rho_0, p_0)$ , i.e., es la velocidad del sonido propagándose en el fluido que está en movimiento. La linealización de la ecuación de Euler, requiere usar algunas identidades vectoriales como  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}^2 / 2$  ya que  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , además  $\nabla p_0 = \nabla p(\rho_0) = c^2 \nabla \rho_0$ , y por tanto

$$\nabla(\partial_t \psi_1 + \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1) = -\nabla \left( \frac{p_1}{p_0} \right), \quad (2.1.5)$$

que, después de integrarse sobre todo el espacio equivale a

$$\rho_0(\partial_t \psi_1 + \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1) = -p_1. \quad (2.1.6)$$

Las ecuaciones diferenciales en 2.1.1 y 2.1.6 pueden combinarse y reescribirse como una única ecuación diferencial de segundo orden que contiene la misma información

$$\partial_t \left[ \frac{\rho_0}{c^2} (\partial_t \psi_1 + \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1) \right] = \nabla \cdot \left[ \rho_0 \nabla \psi_1 - \frac{\rho_0}{c^2} \nabla \psi_0 (\partial_t \psi_1 + \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_1) \right]. \quad (2.1.7)$$

Esta es una ecuación diferencial para el campo  $\psi_1$  que se propaga sobre un fondo en movimiento, esta información está contenida en los coeficientes de la ecuación diferencial. Cuando el fondo es estático (no fluye)  $\nabla \psi_0 = 0$ , la densidad volumétrica  $\rho_0$  es estacionaria y homogénea, i.e., la velocidad del sonido es la misma a todo tiempo y en todo el espacio. Con esto se encuentra que las perturbaciones acústicas del sistema se propagan como la luz en el vacío a velocidad  $c$  de acuerdo con la ecuación de d'Alembert:

$$\left( -\frac{1}{c^2} \partial_{tt} + \nabla^2 \right) \psi = 0. \quad (2.1.8)$$

La ec. (2.1.7) se puede reescribir formalmente como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi_1) = 0, \quad (2.1.9)$$

la cual describe la propagación de un campo escalar libre y sin masa sobre un espacio-tiempo curvo. El espacio-tiempo aquí representa el fluido en movimiento en el cual se propaga la perturbación y la métrica  $g_{\mu\nu}$  es

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c} \left( (c^2 - \mathbf{v}_0^2) dt^2 + 2\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} dt - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \right). \quad (2.1.10)$$

Si se asume un medio esféricamente simétrico estacionario y convergente, podemos definir un nuevo tiempo [Unruh, 1981]:

$$\tau = t + \int \frac{v_0 dr}{c^2 - v_0^2}, \quad (2.1.11)$$

con lo cual la métrica se reescribe como:

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c} \left( (c^2 - v_0^2) d\tau^2 - \frac{c dr^2}{c^2 - v_0^2} - r^2 d\Omega^2 \right). \quad (2.1.12)$$

Para que se emita radiación de Hawking debe existir un horizonte y esto se consigue cuando la velocidad del flujo cambia suavemente tal que es igual a la velocidad del sonido  $v_0 = -c$  en algún punto  $r = R$ , por tanto

$$v_0 = -c + \alpha(r - R) + \vartheta((r - R)^2). \quad (2.1.13)$$

Entonces la métrica anterior es *análoga* a la métrica de Schwarzschild (ver ec. (1.1)) cerca al horizonte salvo una constante global, si el sistema no es homogéneo, aun

así las métricas son conformalmente equivalentes.

Por otro lado si  $\psi_1$  es un campo cuántico que se propaga sobre un medio descrito por la métrica ec. (2.1.12), tendremos los ingredientes básicos para predecir que los *fonones* que se propagan fuera del horizonte poseen un espectro térmico caracterizado por una temperatura

$$T = \frac{\hbar}{2\pi\kappa_B} \alpha = \frac{\hbar}{2\pi\kappa_B} |\partial_r(v_0 - c)|_{r=R}, \quad (2.1.14)$$

similar al caso de radiación de Hawking descrito en el capítulo anterior donde al cambiar  $\alpha \rightarrow \kappa$  tenemos la misma expresión dada en la ec.(1.1).

El papel del horizonte de eventos en los agujeros negros análogos lo desempeña ahora un horizonte acústico efectivo en el que la magnitud del flujo del medio es igual a la velocidad con la que se propaga una onda en el mismo medio. La visión crucial de Unruh en su trabajo del 1981 fue que una vez que se identifica que la propagación de una onda sonora en un fluido es equivalente a la propagación de la onda en un espacio-tiempo curvo, no queda más que repetir el argumento semicásico de Hawking de 1975 para encontrar radiación emitida cerca del horizonte, siendo la radiación en el caso acústico fonones u ondas de sonido.

## 2.2. Análogos de radiación de Hawking en condensados de Bose-Einstein

Gracias a los impresionantes avances en el enfriamiento y manipulación de gases atómicos ultrafríos, los experimentos son ahora capaces de acceder a regímenes donde la materia es coherente, i.e., se logra tener un macroestado cuántico del sistema. En particular, los BECs son una herramienta versátil para observar fluctuaciones cuánticas sobre este macroestado que describe el sistema. A saber, la radiación de Hawking de los agujeros negros acústicos es una de las más estudiadas teóricamente y tal vez haya sido observada experimentalmente por [de Nova et al. \[2019\]](#).

En esta sección partiremos de la ecuación fundamental que domina la dinámica de un fluido cuántico y encontraremos que una perturbación sobre el fluido se comporta similar a un campo escalar propagándose en una métrica efectiva. Además, encontraremos la relación de dispersión que siguen estas fluctuaciones, por último, aplicaremos estas ideas a la configuración particular de láser de agujeros negros que permite autoamplificar la radiación de Hawking.

Iniciemos recordando que un campo cuántico bosónico  $\Psi$  cumple

$$[\Psi(x, t), \Psi^\dagger(x', t)] = \delta(x - x'), \quad [\Psi(x, t), \Psi(x', t)] = 0. \quad (2.2.1)$$

La primera es la relación de conmutación canónica y la segunda es la conmutación entre operadores de aniquilación a tiempos iguales pero en puntos diferentes. El campo cumple la ecuación dinámica

$$i\hbar\partial_t\Psi = [\Psi, H], \quad (2.2.2)$$

con el hamiltoniano

$$H = \int dx \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x \Psi^\dagger \nabla_x \Psi + V \Psi^\dagger \Psi + \frac{g}{2} \Psi^\dagger \Psi^\dagger \Psi \Psi \right]. \quad (2.2.3)$$

Primero verifiquemos que  $\Psi$  cumple la ecuación de Gross-Pitaevkii (GP), para lo cual observe que:

$$\nabla_x \cdot (\Psi^\dagger \nabla_x \Psi) = \nabla_x \Psi^\dagger \cdot \nabla_x \Psi + \Psi^\dagger \nabla_x^2 \Psi,$$

entonces

$$\nabla_x \Psi^\dagger \cdot \nabla_x \Psi = \nabla_x \cdot (\Psi^\dagger \nabla_x \Psi) - \Psi^\dagger \nabla_x^2 \Psi,$$

e integrando sobre un volumen ambos lados y usando el teorema de la divergencia

$$\int dx^3 \nabla_x \Psi^\dagger \cdot \nabla_x \Psi = \int dS (\Psi^\dagger \nabla_x \Psi) - \int dx^3 \Psi^\dagger \nabla_x^2 \Psi.$$

La primera integral del lado derecho se anula en la superficie ya que los campos deben ser cero sobre la frontera, la amplitud del operador de campo es una función de cuadrado integrable que expresa la probabilidad de aniquilar una partícula en el punto  $(x, t)$ , el conjugado de esta función expresa la probabilidad de crear una partícula en el mismo punto. Con lo último se concluye que

$$\nabla_x \Psi^\dagger \cdot \nabla_x \Psi = -\Psi^\dagger \nabla_x^2 \Psi, \quad (2.2.4)$$

por tanto,

$$\begin{aligned} [\Psi, H] &= \int dx' \left\{ \Psi(x, t) \Psi(x', t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 + V + \frac{g}{2} \rho(x', t) \right] \Psi(x', t) \right. \\ &\quad \left. - \Psi(x', t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 + V + \frac{g}{2} \rho(x', t) \right] \Psi(x', t) \Psi(x, t) \right\} \\ &= \int dx' \left\{ (\delta(x - x') + \Psi(x', t) \Psi(x, t)) [\dots] \Psi(x', t) - \Psi(x', t) \Psi(x, t) [\dots] \Psi(x', t) \right\} \\ &= \int dx' \left\{ \delta(x - x') [\dots] \Psi(x', t) \right\} \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 + V + \frac{g}{2} \rho(x', t) \right] \Psi(x, t), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

remplazando el resultado anterior en la ec. (2.2.2) se obtiene la ecuación de GP:

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2+V+\frac{g}{2}\rho(x,t)\right)\Psi(x,t), \quad (2.2.6)$$

donde se ha definido  $\rho\equiv|\Psi|^2$ .

### 2.2.1. Linealización de la ecuación de campo

Si consideramos un campo que tiene pequeñas fluctuaciones sobre el estado base, podemos escribir  $\Psi$  como

$$\Psi=\psi(1+\Phi), \quad (2.2.7)$$

donde  $\psi$  es un campo clásico (función escalar) y  $\Phi$  representa la fluctuación del campo (un campo cuántico).

¿Qué ecuación diferencial cumple el campo  $\Phi$ ? Para responder esto iniciamos recordando las relaciones de conmutación inicialmente expuestas se reescriben sobre la fluctuación

$$[\Phi(x,t),\Phi^\dagger(x',t)]=\delta(x-x') \quad [\Phi(x,t),\Phi(x',t)]=0, \quad (2.2.8)$$

y el hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \int dx \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x (\psi^* + \psi^*\Phi^\dagger) \cdot \nabla_x (\psi + \psi\Phi) + V(\psi^* + \psi^*\Phi^\dagger)(\psi + \psi\Phi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{2}(\psi^* + \psi^*\Phi^\dagger)^2(\psi + \psi\Phi)^2 \right] \\ &= \int dx \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla_x \psi^* \cdot \nabla_x \psi + \nabla_x \psi^* \cdot \nabla_x (\psi\Phi) + \nabla_x (\psi^*\Phi^\dagger) \nabla_x \psi + \nabla_x (\psi\Phi^\dagger) \cdot \nabla_x (\psi\Phi) \right) \right. \\ &\quad \left. + V\rho_0(1 + \Phi + \Phi^\dagger + \Phi^\dagger\Phi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{2}\rho_0^2(1 + 2\Phi + \Phi^2 + 2\Phi^\dagger + 4\Phi^\dagger\Phi + 2\Phi^\dagger\Phi^2 + \Phi^{2\dagger} + 2\Phi^{2\dagger}\Phi + \Phi^{2\dagger}\Phi^2) \right], \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

hemos definido  $\rho_0\equiv|\psi|^2$  como la densidad de partículas del campo clásico. Reescribimos el hamiltoniano por partes, primero tomamos los términos que no contienen  $\Phi$ , o de orden 0

$$H_0 = \int dx \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_x \psi^* \cdot \nabla_x \psi) + V\rho_0 + \frac{g}{2}\rho_0^2 \right]. \quad (2.2.10)$$

Luego tomamos los términos que poseen orden lineal en  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} H_1 &= \int dx \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla_x \psi^* \cdot \nabla_x (\psi \Phi) + \nabla_x (\psi^* \Phi^\dagger) \cdot \nabla_x \psi + V \psi^* \psi (\Phi + \Phi^\dagger) + \frac{g}{2} \rho_0 \psi^* \psi (2\Phi + 2\Phi^\dagger) \right) \right\} \\ &= \int dx \left\{ \psi^* \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 + V + g\rho_0 \right] \psi \Phi + \psi^* \Phi^\dagger \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 + V + g\rho_0 \right] \psi \right\} \\ &= \int dx \left\{ \psi^* \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 + V + g\rho_0 \right] + h.c. \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Por último, tomamos los términos de segundo orden (los de tercer y cuarto orden se desprecian)

$$H_2 = \int dx \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x (\psi^* \Phi^\dagger) \cdot \nabla_x (\psi \Phi) + V \rho_0 \Phi^\dagger \Phi + \frac{g}{2} \rho_0^2 (\Phi^2 + \Phi^{2\dagger} + 4\Phi^\dagger \Phi) \right]. \quad (2.2.12)$$

Analicemos el primer término:

$$\begin{aligned} \nabla_x (\psi^* \Phi^\dagger) \cdot \nabla_x (\psi \Phi) &= (\nabla_x \psi^* \cdot \nabla_x \psi) \Phi^\dagger \Phi + \Phi^\dagger \nabla_x \psi^* \cdot \psi \nabla_x \Phi + \psi^* \nabla_x \Phi^\dagger \cdot (\nabla \psi) \Phi \\ &\quad + \psi^* \nabla_x \Phi^\dagger \cdot \psi \nabla_x \Phi \\ &= (\psi^* \nabla_x^2 \psi) \Phi^\dagger \Phi + [\Phi^\dagger \nabla_x \psi^* \cdot \psi \nabla_x + \psi^* \nabla_x \Phi^\dagger \cdot \nabla_x \psi + \psi^* \nabla_x \Phi^\dagger \cdot \psi \nabla_x] \Phi \\ &= (\psi^* \nabla_x^2 \psi) \Phi^\dagger \Phi + [(\Phi^\dagger \nabla_x \psi^* + \psi^* \nabla_x \Phi^\dagger) \cdot \psi \nabla_x + \psi^* \nabla_x \Phi^\dagger \cdot \nabla_x \psi] \Phi \\ &= (\psi^* \nabla_x^2 \psi) \Phi^\dagger \Phi + [\nabla_x (\Phi^\dagger \psi^*) \cdot \psi \nabla_x + \psi^* \nabla_x \Phi^\dagger \cdot \nabla_x \psi] \Phi \\ &= \Phi^\dagger (\psi^* \nabla_x^2 \psi) \Phi + \nabla_x (\Phi^\dagger \psi^*) \cdot \psi \nabla_x \Phi + \psi^* \nabla_x \Phi^\dagger \cdot \nabla_x \psi \Phi \\ &= \Phi^\dagger \left( \frac{\psi}{\psi^*} \psi^* \nabla_x^2 \psi \right) \Phi + \Phi^\dagger \nabla_x \psi^* \psi \nabla_x \Phi - \frac{2mv}{\hbar} i \nabla_x \Phi, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

con lo anterior, el hamiltoniano se reescribe como

$$\begin{aligned} H_2 &= \int dx \rho_0 \left\{ \Phi^\dagger \left[ \frac{-\hbar^2}{2m\rho_0} \nabla_x (\rho_0 \nabla_x) - iv\hbar \nabla_x - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} + V + 2g\rho_0 \right] \Phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{2} \rho_0 (\Phi^2 + \Phi^{2\dagger}) \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto  $H = H_0 + H_1 + H_2$ , tal que la ecuación dinámica para el campo ahora es

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t (\psi + \psi \Phi) &= [\psi + \psi \Phi, H_0 + H_1 + H_2] \\ &= [\psi, H_0] + [\psi, H_1] + [\psi, H_2] + [\psi \Phi, H_0] + [\psi \Phi, H_1] + [\psi \Phi, H_2], \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

los tres primeros commutadores son nulos por que  $\psi$  es una función escalar, el cuarto se anula por que  $H_0$  no depende de  $\Phi$ . Por tanto

$$i\hbar \partial_t \psi + i\hbar \partial_t (\psi) \Phi + i\hbar \psi \partial_t \Phi = \psi [\Phi, H_1] + \psi [\Phi, H_2], \quad (2.2.15)$$

con lo que podemos dividir el problema en

$$i\hbar\partial_t\psi = \psi[\Phi, H_1] \quad (2.2.16)$$

$$i\hbar\partial_t\Phi = [\Phi, H_2] - i\hbar\partial_t\psi/\psi, \quad (2.2.17)$$

resolviedo la ec. (2.2.16), se encuentra la ecuación dinámica para el campo  $\psi$  que es la ecuación de GP que se encontró al inicio y era de esperar dado que describe la dinámica del macroestado del sistema. Resolviendo la ec. (2.2.17) se tiene

$$\begin{aligned} [\Phi, H_2] &= \int dx' \rho_0 \left\{ \Phi(x, t)\Phi^\dagger(x', t) \left[ \dots \right] \Phi(x', t) + \frac{g}{2}\rho_0\Phi(x, t)(\Phi^2 + \Phi^{2\dagger}) \right. \\ &\quad \left. - \Phi^\dagger(x', t) \left[ \dots \right] \Phi(x', t)\Phi(x, t) + \frac{g}{2}\rho_0(\Phi^2 + \Phi^{2\dagger})\Phi(x, t) \right\} \\ &= \int dx' \rho_0 \left\{ (\delta(x - x') + \Phi^\dagger(x', t)\Phi(x, t)) \left[ \dots \right] \Phi(x', t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{2}\rho_0\Phi(x, t)(\Phi^2 + \Phi^{2\dagger}) \right\} - \Phi^\dagger(x', t) \left[ \dots \right] \Phi(x', t)\Phi(x, t) - \frac{g}{2}\rho_0(\Phi^2 + \Phi^{2\dagger})\Phi(x, t) \\ &= \left[ \dots \right] \Phi(x, t) + \int dx' \rho_0 \left[ \left\{ \Phi^\dagger(x', t)\Phi(x, t) \left[ \dots \right] \Phi(x', t) - \Phi^\dagger(x', t)\Phi(x, t) \left[ \dots \right] \Phi(x', t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{2}\rho_0\Phi(x, t)(\Phi^2 + \Phi^{2\dagger}) - \frac{g}{2}\rho_0(\Phi^2 + \Phi^{2\dagger})\Phi(x, t) \right], \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

el término entre corchetes cuadrados dentro de la integral es el nulo. Aplicando con cuidado las propiedades de conmutación, se obtiene

$$[\Phi, H_2] = \left[ \dots \right] \Phi(x, t) + \frac{2g}{2}\rho^2\Phi^\dagger, \quad (2.2.19)$$

por tanto

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\Phi &= \left( \frac{-\hbar^2}{2m\rho_0} \nabla_x(\rho_0\nabla_x) - iv\hbar\nabla_x - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla_x^2\psi}{\psi} + V + 2g\rho_0 \right) \Phi \\ &\quad + g\rho_0\Phi^\dagger - \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\nabla_x^2\psi}{\psi} + V + g\rho_0 \right) \Phi \\ &= \left( \frac{-\hbar^2}{2m\rho_0} \nabla_x(\rho_0\nabla_x) - iv\hbar\nabla_x \right) \Phi + g\rho_0(\Phi^\dagger + \Phi). \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Esta ecuación gobierna la dinámica de una fluctuación creada sobre el macroestados que describe el condensado.

## 2.2.2. Relación de dispersión

Para encontrar cómo se mueven las fluctuaciones  $\Phi$ , asumimos que el operador de campo puede descomponerse en modos de frecuencia  $\omega$ , tal que

$$\phi_\omega(t, x) = a_\omega \exp[-i\omega t]\phi_\omega(x) + a_\omega^\dagger \left[ \exp[-i\omega t]\phi_\omega(x) \right]^*, \quad (2.2.21)$$

donde  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación de fonones. Insertando la ec. (2.2.21) en la ec. (2.2.20), se tiene

$$\begin{aligned} \left[ \hbar(\omega + iv\partial_x) + \frac{\hbar^2}{2m\rho_0} \partial_x \rho_0 \partial_x - mc^2 \right] \phi_\omega &= mc^2 \varphi_\omega, \\ \left[ -\hbar(\omega + iv\partial_x) + \frac{\hbar^2}{2m\rho_0} \partial_x \rho_0 \partial_x - mc^2 \right] \varphi_\omega &= mc^2 \phi_\omega, \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

donde se ha definido  $c^2 = g\rho_0/m$  como la velocidad que lleva la fluctuación sobre el fluido. Para obtener la relación de dispersión, consideremos una región en la que el condensado es homogéneo ( $\rho_0$  constante) y busquemos soluciones de las ec. (2.2.22) en forma de ondas planas  $\phi_\omega \propto \varphi_\omega \propto \exp[ikx]$ . Destacamos que la frecuencia  $\omega$  y el número de onda  $k$  no están restringido a valores reales por tanto pueden ser complejos, más adelante se verá el motivo de esta afirmación. Las partes imaginarias de  $\omega$  y  $k$  codificarán el comportamiento dinámico del sistema y es lo que se estudiará en el próximo capítulo. Sustituyendo lo mencionado en las ecs. (2.2.22) se obtiene

$$\begin{pmatrix} \hbar(\omega - vk) - \frac{\hbar}{2m} k^2 - mc^2 & -mc^2 \\ -mc^2 & -\hbar(\omega - vk) - \frac{\hbar}{2m} k^2 - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\omega \\ \varphi_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.23)$$

Los términos fuera de la diagonal mezclan modos de frecuencia negativa y positiva, entre los que se incluyen el proceso de Hawking. Para que exista una solución no trivial, el determinante de la matriz anterior debe ser nulo, esto conduce inmediatamente a la relación de dispersión de Bogoliubov.

$$(\omega - vk)^2 = c^2 k^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} = F^2(k), \quad (2.2.24)$$

se acostumbra escribir  $k_0^2 = 4m^2/(\hbar^2 c^2) = 2/\xi^2$ , donde  $\xi$  se conoce como la longitud de restitución (*healing length*) y define la escala de Planck efectiva en los análogos de gravedad en BECs. Este tipo de dispersión se conoce como *anómala*<sup>1</sup> y es globalmente válida en condensados homogéneos. En configuraciones no homogéneas sigue siendo válida como una relación de dispersión estrictamente local, siempre que todas las cantidades involucradas ( $c, v$  y  $k$ ) varíen lentamente con  $x$ . En la ec. (2.2.24)  $\omega$  representa la frecuencia de la fluctuación en el marco de laboratorio y  $F(k)$  es la frecuencia en el marco comóvil (marco que se mueve con la velocidad del fluido).

---

<sup>1</sup>Una relación de dispersión anómala se refiere al crecimiento de la velocidad de grupo cuando crece la frecuencia.

Observe que la relación de dispersión anterior es cuártica en  $k$  indicando que el modo  $\phi$  para una frecuencia  $\omega$  fija es:

$$\phi = \exp[-i\omega t] \sum_j A_j \exp[ik_j x]. \quad (2.2.25)$$

Por otro lado, la ec. (2.2.24) que siguen pequeñas fluctuaciones presentes en un BEC puede igualmente derivarse de la ecuación de movimiento para una fluctuación en un campo de velocidades (una onda de sonido) en un fluido irrotacional que incluye la dispersión de Bogoliubov

$$(\partial_t + \partial_x v)(\partial_t + v\partial_x)\phi = \partial_x^2 \phi - \frac{1}{k_0^2} \partial_x^4 \phi. \quad (2.2.26)$$

Alternativamente, la anterior ecuación se puede obtener proponiendo una acción adecuada para el campo [Corley and Jacobson, 1999]:

$$S_\phi = \frac{1}{2} \int d^2x \left( [(\partial_t + v\partial_x)\phi]^2 + \phi \left[ \partial_x^2 - \frac{1}{k_0^2} \partial_x^4 \right] \phi \right). \quad (2.2.27)$$

El operador  $\partial_t + v\partial_x$  es la derivada temporal en el marco comóvil o del fluido, es decir,  $d/dt = \partial_t + v\partial_x$ . A partir de la acción podemos verificar que ésta es invariante bajo transformaciones de fase si el campo escalar es complejo. Esto implica una corriente conservada  $j^\mu$ , la cual alquiere importancia porque su componente temporal permite definir el producto interno

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int dx [\phi_1^*(\partial_t + v\partial_x)\phi_2 - \phi_2(\partial_t + v\partial_x)\phi_1^*], \quad (2.2.28)$$

la cual es una cantidad conservada, i.e.,  $\partial_t(\phi_1, \phi_2) = 0$  cuando  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son soluciones a la ec. (2.2.26). En consecuencia, la norma  $(\phi_1, \phi_1)$  de una solución  $\phi_1$  de la ec. (2.2.26) es igualmente conservada. La conservación del producto escalar y de la norma en particular permite la creación de partículas por la existencia de modos negativos durante el proceso de Hawking.

En este trabajo  $v$  tomará dos valores diferentes constantes tal que dividirá el espacio en dos regiones, una subsónica  $v_1 < c$  y otra supersónica  $v_2 > c$ . Con esto de forma general un modo se puede escribir como  $\exp[ikx - i\omega t]$  para modos contrapropagantes y  $\exp[-ikx - i\omega t]$  para modos copropagantes. Con  $\omega = \pm vk + F(k)$ , donde (+) corresponde a modos contrapropagantes y (-) a modos copropagantes.

Si se normalizan los modos con respecto al producto escalar, la ecuación ec. (2.2.28) se reescribe como

$$\left( \exp[\pm ik_1 x - i(vk_1 + F(k_1))t], \exp[\pm ik_2 x - i(vk_2 + F(k_2))t] \right) = 4\pi F(k) \delta(k_1 - k_2) \quad (2.2.29)$$

La norma es positiva si  $F$  es positivo, con lo cual, cuando  $\omega$  es positiva se encontrarán dos modos con norma positiva en la rama copropagante denotados por (v) en la relación de dispersión y dos modos en la rama contrapropagantes denotados por (u). La norma es negativa si  $F$  es negativa y aquí si  $\omega$  es positiva solo se encontrarán dos modos en la rama contrapropagante (u) (ver figura 2.1). En el capítulo 3 se aclarará con más detalle esta afirmación.

### 2.2.3. Análisis por teoría de inestabilidades

Las inestabilidades en dinámica de fluidos se pueden introducir a partir de la siguiente pregunta: ¿qué sucede cuando pequeñas fluctuaciones aparecen en un fluido que está en movimiento?, ¿las perturbaciones crecen o decaen a través del tiempo? En el caso de que las fluctuaciones crezcan decimos que el fluido es inestable, si las perturbaciones decaen, llamamos al fluido estable [Koschmieder, 1977]. ¿Qué pasa en un fluido cuántico como los BECs? Suponiendo una pequeña fluctuación  $\Phi$  sobre el estado macroscópico del sistema  $\psi$ , se encuentra que la fluctuación se rige por la ecuación lineal ec. (2.2.20) y los valores propios ec. (2.2.24) deciden su evolución.

Las frecuencias propias complejas con partes imaginarias positivas son las que indican inestabilidades porque permiten que la fluctuación que se genera espontáneamente en el sistema crezca en el tiempo. ¿Cómo ver que la ec. (2.2.20) acepta soluciones con frecuencias complejas? Para observar esto definamos las dos componentes del campo como

$$W = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.2.30)$$

Para un estado estacionario la ec. (2.2.20) se puede reescribir como

$$i\hbar\partial_t W = \omega W = BW, \quad (2.2.31)$$

con el operador  $B$  siendo representado por

$$B = \left( \frac{-\hbar^2}{2m\rho_0} \nabla_x (\rho_0 \nabla_x) + g\rho_0 \right) \sigma_3 - iv\nabla_x + ig\rho_0\sigma_2, \quad (2.2.32)$$

donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.33)$$

La ec. (2.2.31) indica que  $\omega$  es una cantidad conservada y que el operador  $B$  no es hermítico por el término  $ig\rho_0\sigma_2$ , i.e., sus valores propios pueden ser complejos, por tanto  $\omega = \omega_R + i\omega_I$ . La inestabilidad se encuentra cuando fijamos  $\omega_I > 0$  y será tema de discusión en el capítulo 3.

## 2.3. Configuración de láser de agujeros negros (BHL)

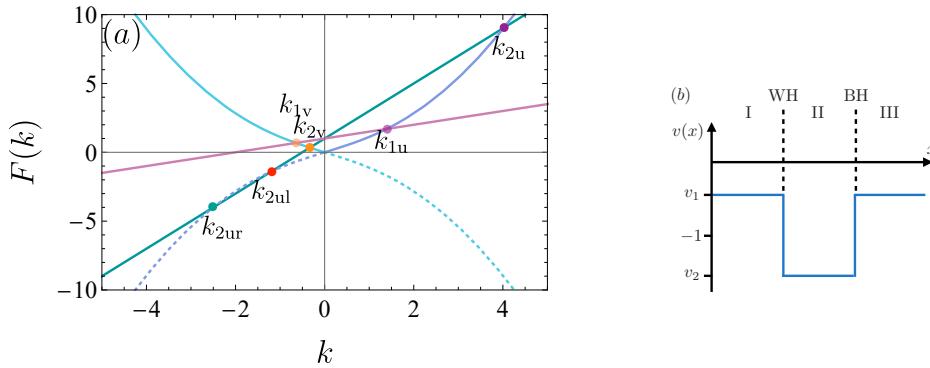
En presencia de dos horizontes, ciertas condiciones permiten amplificar la radiación de Hawking (RH) de manera similar a un láser. Por esta razón este fenómeno es conocido como láser de agujeros negros (BHL) y es una manera de validar experimentalmente los resultados de Hawking y es una propuesta tratada de forma controversial por [Steinhauer \[2014\]](#) por que sus resultados experimentales de la función de correlación han sido obtenidos con simulaciones puramente clásicos de BECs [Manuele Tettamanti, private communication 2019, \[Tettamanti et al., 2016\], \[Steinhauer and de Nova, 2017\]](#).

Esta idea de BHL es publicada por primera vez por [\[Corley and Jacobson, 1999\]](#) quiénes demuestran que en presencia de dos horizonte, uno interno u horizonte de agujero blanco (WH) y otro externo u horizonte de agujero negro (BH) la RH sufre un proceso de autoamplificación si el campo a tratar es bosónico y la relación de dispersión es anómala. En el caso que el campo sea de fermiones, la radiación es atenuada.

Esta estimulación (si el campo es bosónico) o supresión (si el campo es fermiónico) de la RH es una consecuencia del *confinamiento* de las partículas con frecuencia negativa en la región entre los horizontes.

Para entender este fenómeno se tomará como campo bosónico las fluctuaciones que se generan en un BEC, estudiadas en la sección [2.2.2](#). El elemento de línea en la ec. [\(2.1.12\)](#) se reducirá a 1+1 dimensión obteniendo  $ds^2 = c^2 dt^2 - (dx - v(x)dt)^2$ , el cual es suficiente para ilustrar la física detrás del BHL. El perfil de velocidades  $v(x)$  se asume negativo (es decir el fluido se mueve a la izquierda), este fluido tiene una velocidad constante  $v_1 < 0$  excepto en el interior de los horizontes donde el valor será  $v_2$  con  $v_2 < v_1$  entre  $x_{WH}$  y  $x_{BH}$  (con  $x_{WH} < x_{BH}$ ).

En la figura [2.1\(b\)](#) el movimiento del fluido está descrito por el perfil de velocidades  $v(x)$  más simple posible para un BHL, este perfil suele ser llamado plano [\[Larré et al., 2012\]](#). Los horizontes definen tres regiones: la región I o zona subsónica donde la velocidad del fluido es menor a la velocidad de la perturbación ( $v_1 < c$ ). La región II o zona supersónica, definida como el interior de los horizontes y es donde la velocidad del fluido es mayor a la velocidad de las perturbaciones ( $v_2 > c$ ). Por último la región III, donde el sistema tiene la misma configuración que en la región I, i.e., es subsónica.



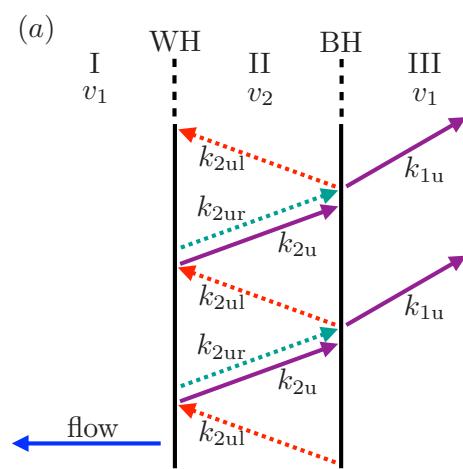
**Figura 2.1:** (a) Relación de dispersión en el marco comóvil. En morado se encuentra la rama que contiene modos contrapropagantes, mientras de azul la rama con modo co-propagantes. La solución gráfica para dos perfiles de velocidad: una subsónica  $v_1$  (rosa) y otra supersónica  $v_2$  (verde). Aquí  $v_1 = -1$ ,  $k_0 = 2$ ,  $c = 1$ ,  $v_2 = -2$  y  $\omega = 1$ . (b) Perfil de velocidades del fluido  $v(x)$  para las tres regiones, I y III con velocidad subsónica y II con velocidad supersónica [Bermudez and Leonhardt, 2018].

### 2.3.1. Propagación de una onda plana a través del BHL

Ahora que se tiene en mente la configuración del BHL, es natural preguntarse qué le pasa a una onda plana con frecuencia  $\omega$  y número de onda  $k$  que es solución a la relación de dispersión ec. (2.2.24) cuando se encuentra dentro de la cavidad. Para dar una respuesta inicialmente cualitativa a esta pregunta, supongamos que iniciamos con el modo  $k_{2ul}$ , que es solución a la relación de dispersión y de la ec.(2.2.29)  $F(k) < 0$  por tanto su norma es negativa, vea figura 2.1(a). Esta solución se encuentra en la rama contrapropagante (u) de la relación de dispersión, además como está dentro de la cavidad, es decir en la región II o supersónica es nombrado con el subíndice (2u), la velocidad de grupo de este modo es  $d\omega/dk < 1$  por tanto se mueve a la izquierda por lo que la última etiqueta de este modo es  $l$ .

Este modo se encuentra en la rama contrapropagante y se mueve en dirección opuesta al fluido en el marco comóvil, es decir del BH  $\rightarrow$  WH. Al llegar al WH, este se dispersa creando los modos  $k_{2ur}$  con norma negativa y  $k_{2u}$  con norma positiva, ambos moviéndose a la derecha ( $d\omega/dk > 1$ ) en dirección al BH. Cuando los modos llegan al horizonte, nuevamente son dispersados creándose el modo  $k_{1u}$  con norma positiva, el cual logra escapar de la cavidad, además se crea de nuevo el modo  $k_{2ul}$ , tal que se conserve la norma. El proceso se repite nuevamente generando así un ciclo.

Los modos mencionados son creados como consecuencia de la conservación de la frecuencia en el marco de laboratorio. Además, por conservación de la norma la amplitud de los modos aumenta en cada ciclo al mezclarse modos de frecuencia positiva y negativa. La amplificación puede ser vista entonces como un mecanismo



**Figura 2.2:** Diagrama para la evolución del modo  $k_{2ul}$  atrapado en la cavidad. Las líneas punteadas indican modos con norma negativa y las líneas continuas indican modos de norma positiva. Observe que en este análisis no se tienen en cuenta los modos copropagantes indentificados con la etiqueta (v) en la figura 2.1(a) [Bermudez and Leonhardt, 2018].

equivalente al funcionamiento de un dispositivo láser, donde la energía con la que se produce la amplificación proviene de los horizontes producto del cambio de velocidad del fluido en movimiento donde se generan las perturbaciones. El anterior comportamiento del modo  $k_{2\text{ul}}$  puede ver resumido en la figura 2.2.



# RADIACIÓN DE HAWKING ANÁLOGA COMO UNA INESTABILIDAD EN UN BHL

---

Como se introdujo en la sección 2.2.3 las inestabilidades son inherentes en el análisis de la dinámica de perturbaciones generadas en un fluido en movimiento [Charru, 2011]. Hemos descrito el campo o fluctuación que se genera en el fluido a partir de los modos normales en que éste oscila. Estos modos son ondas planas de la forma  $\exp[i(kx - \omega t)]$ , donde  $k$  denota el número de onda espacial y  $\omega$  la frecuencia temporal. Esta descripción es típica para una perturbación como las ondas superficiales en un fluido (ignorando viscosidad), sonido o luz, donde usualmente  $k$  y  $\omega$  son reales. Pero en el vocabulario de inestabilidades hidrodinámicas, estas ondas puras se denominan *ondas neutrales* y pueden ser generalizadas permitiendo que  $k$  y  $\omega$  sean cantidades complejas.

Elegir  $k$  real y  $\omega$  complejo significa tener una *inestabilidad temporal*, que corresponde a una situación física donde se impone un forzamiento espacial al flujo, en nuestro caso es tener un perfil de velocidades para el flujo. Si hay un número de onda para el cual su frecuencia  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  sea un número complejo con  $\omega_I(k) > 0$  entonces la perturbación crece exponencialmente y el flujo se considera linealmente inestable. En este caso, cuando  $\omega_I = 0$  se obtiene el caso típico llamado neutral, mientras que un modo con  $\omega_I < 0$  se conoce como amortiguado o estable [Gallaire and Brun, 2017].

¿Qué pasa en el caso general en que  $k$  y  $\omega$  sean complejos? Este tipo de inestabilidad espacio-temporal puede analizarse condicionando al campo  $\phi$  que describe las

excitaciones en el fluido a ser una función de cuadrado integrable, por tanto una de las condiciones que se debe cumplir es que  $\phi \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Para que esto ocurra, el número de onda  $k = k_R + ik_I$  con  $k_I > 0$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  y  $k_I < 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

En este capítulo mostraremos los resultados de [Bermudez and Leonhardt \[2018\]](#), donde se considera el modelo simple para un láser de agujero negro en un condensado de Bose-Einstein (BEC), ver sección 2.3. Se analiza la relación de dispersión de forma clásica, es decir, usando el método gráfico donde solo se permite que  $k$  y  $\omega$  sean reales (inestabilidad neutra), posteriormente se resuelve la misma relación de dispersión de forma analítica encontrando que algunos  $k$  pueden tomar valores complejos. Seguido a esto se generaliza el problema a encontrar las inestabilidades espacio-temporales las cuales resultan ser los modos resonantes que se encuentran por un método simple [[Leonhardt and Philbin, 2007](#)], permitiendo así concluir que la radiación resonante en un BHL es producto de una inestabilidad.

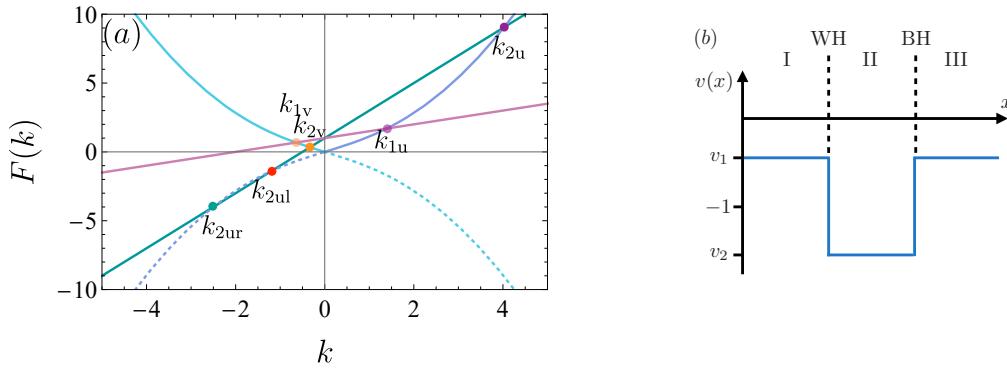
### 3.1. Método gráfico: BHL con frecuencias reales

Iniciemos recordando que la relación de dispersión que deben cumplir las fluctuaciones que se crean en la configuración del BHL es

$$(\omega - vk)^2 = F^2(k) = c^2k^2 \left( 1 + \frac{k^2}{k_0^2} \right), \quad (3.1.1)$$

donde dada una frecuencia  $\omega$ , se pueden encontrar hasta cuatro posibles soluciones para el número de onda  $k$  de la ec. (3.1.1) por el método gráfico o numérico. En la figura 3.1(a) se muestran las soluciones de la relación de dispersión para dos velocidades: una subsónica  $|v_1| < c$  y otra supersónica  $|v_2| > c$ . Con la velocidad subsónica  $v_1$  con este método se encuentran dos soluciones (formalmente serían cuatro soluciones, pero dos de ellas son complejas y se analizarán en la siguiente sección). Con la velocidad supersónica  $v_2$  se encuentran las cuatro soluciones.

Los modos  $k$  que son solución también se nombran por los subíndice  $u$  que indica que el modo es contrapropagante, o que se mueven en dirección opuesta al fluido (recordar que el fluido por convención se mueve hacia la izquierda); con  $k > 0$ , existen tanto para  $v_1$  como para  $v_2$  modos contrapropagantes. Para  $k < 0$  solo para  $v_2$  se tienen los modos  $u_l$  y  $u_r$ , que se distinguen porque el primero se mueve hacia la izquierda y el segundo hacia la derecha en el marco comóvil. Las etiquetas con subíndice  $v$  indican modos copropagantes y existen solo cuando  $k < 0$  y se mueven en la misma dirección del fluido.



**Figura 3.1:** (a) Relación de dispersión en el marco comóvil. En morado se encuentra la rama que contiene modos contrapropagantes, mientras de azul la rama con modo copropagantes. La solución gráfica para dos perfiles de velocidad: una subsónica  $v_1$  (rosa) y otra supersónica  $v_2$  (verde). Aquí  $v_1 = -1$ ,  $k_0 = 2$ ,  $c = 1$ ,  $v_2 = -2$ , y  $\omega = 1$ . (b) Perfil de velocidades del fluido  $v(x)$  para las tres regiones, I y III con velocidad subsónica y II con velocidad supersónica [Bermudez and Leonhardt, 2018].

El BHL es una configuración donde el flujo de velocidad cambia de una velocidad subsónica  $v_1$  (región I) a una supersónica  $v_2$  (región II) en una región finita  $L$  del espacio y regresa a una velocidad  $v_1$  (región III). Su parametrización está dada en el perfil de velocidad que se representa en la figura 3.1(b). Como se mencionó en la sección 2.3, la región supersónica representa el interior de la cavidad y es donde la radiación de Hawking se amplificará. Para cualquier  $0 < \omega < ck_0$  existe un dominio de  $v_1$  y  $v_2$  donde las soluciones en el marco comóvil tienen el comportamiento mostrado en la figura 3.1(a). Los puntos donde el flujo de velocidad cambia son llamados horizontes y la única condición que se debe cumplir es que  $|v_1| < c < |v_2|$ . En la figura 3.1(b) al lado izquierdo tenemos un horizonte de agujero blanco (WH) y a la derecha, un horizonte de agujero negro (BH).

### 3.1.1. Dirección de viaje

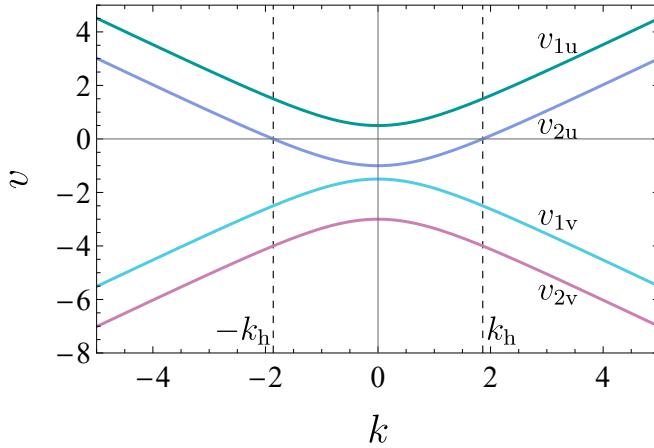
La dirección de viaje de las autofunciones del problema está dada por:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \frac{1 + 2k^2/k_0^2}{\sqrt{1 + k^2/k_0^2}}, \quad (3.1.2)$$

y considerando la velocidad del flujo negativa para cada una de las regiones  $v_1$  y  $v_2$ , se obtienen las velocidades de grupo en el marco del laboratorio para los modos contrapropagantes (u) y copropagantes (v)

$$v_{1u}(k) = v_g(k) + v_1, \quad v_{1v}(k) = -v_g(k) + v_1, \quad (3.1.3)$$

$$v_{2u}(k) = v_g(k) + v_2, \quad v_{2v}(k) = -v_g(k) + v_2. \quad (3.1.4)$$



**Figura 3.2:** Velocidad de grupo en el marco de laboratorio para los modos  $k$ . Para  $v_1 = -1/2$  y  $v_2 = -2$ . De mayor a menor son:  $v_{1u}$  (azul),  $v_{2u}$  (naranja),  $v_{1v}$  (verde),  $v_{2v}$  (rojo). Los horizontes  $\pm k_h$  están marcados por líneas verticales entrecortadas [Bermudez and Leonhardt \[2018\]](#).

Cada una de estas velocidades son mostradas en la figura 3.2. Como es de esperar, la velocidad de los modos copropagantes ( $v$ ) siempre es negativa (son modos que se mueven con el flujo). Para los modos contrapropagantes (modos (u)), en la región subsónica ( $v_1$ ), la velocidad es siempre positiva, pero en la región supersónica ( $v_2$ ) existe una región finita en los valores del número de onda  $k$  donde la velocidad es negativa. La región de flujo opuesto para  $v_{2u}$  está marcada por líneas discontinuas en la figura 3.2 y los valores límites se conocen como horizontes  $\pm k_h$ . Para cálculos numéricos se usarán unidades adimensionales. En este caso, significa normalizar las velocidades  $v$  con respecto a la velocidad del sonido, es decir,  $v/c$ .

### 3.1.2. Horizonte

Hemos definido el horizonte como el límite espacial que separa dos regiones del espacio-tiempo donde puede existir el campo o fluctuación. Este límite fácilmente se encuentra al igualar la velocidad de la fluctuación con la velocidad del medio en movimiento. En el caso de no tener dispersión, como es el caso astrofísico, el horizonte está bien definido, es decir, cualquier frecuencia del campo siente el horizonte en el mismo lugar del espacio-tiempo, pero cuando se tiene dispersión como en el análogo acústico o más adelante en el caso óptico, el horizonte es difuso en el sentido que para cada frecuencia existe un horizonte.

Teniendo en cuenta lo anterior, definimos el horizonte  $k_h$  como el número de onda para el cual la velocidad de grupo  $v_g$  de los modos contrapropagantes es igual a la velocidad del flujo externo  $v$ . Esto es solo posible para los modos contrapropagantes

(u) en la región supersónica ( $v_2$ ) la cual es solo la curva para  $v_{2u}(k)$  que se hace cero para ciertos valores  $k_h$ , ver figura 3.2. La anterior definición se expresa como:

$$v_{2u}(k)|_{k=k_h} = 0. \quad (3.1.5)$$

La solución general para este valor es:

$$k_h = \pm \frac{k_0}{2^{3/2}} \sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 4 \pm \frac{v}{c} \sqrt{\frac{v^2}{c^2} + 8}}, \quad (3.1.6)$$

este es el mismo resultado encontrado en [Larré et al., 2012], [Macher and Paren-tani, 2009]. Para una velocidad suficientemente alta hay dos soluciones reales, por ejemplo, para  $v_2 = -2$  se obtienen los valores  $k_h$  que se muestran en la figura 3.2. Para velocidades bajas no hay soluciones reales, como en el caso de  $v_1$  en este ejemplo. Esto es correcto, ya que no hay horizonte para velocidades subsónicas. Observe que en este sistema creado en condensados la velocidad supersónica y subsónica no tienen restricción en sus valores, salvo que sea  $|v_1| < c$  y  $|v_2| > c$ .

### 3.1.3. Velocidad transónica

Como se acaba de observar, dadas  $\omega$  y  $k_0$  existe una velocidad mínima necesaria para alcanzar el horizonte, esta no es la velocidad del sonido  $c$ , sino la velocidad mínima para la cual las soluciones  $k_{2ur}$  y  $k_{2ul}$  existen (son reales) e iguales, esta es la velocidad *transónica*  $v_t$ . Esta velocidad define las regiones subsónica ( $v_t < v < 0$ ) y supersónica ( $v < v_t$ ) para cada  $\omega$ , y existe por que se toma en cuenta la dispersión del medio donde se propagan los modos.

Esta velocidad puede ser encontrada analíticamente con una función auxiliar  $q(k_0, \omega)$  definida como

$$q^3 = 729 \frac{k_0^4 c^4}{\omega^4} + 270 \frac{k_0^2 c^2}{\omega^2} + 3^{3/2} \frac{k_0 c}{\omega} \left( 27 \frac{k_0^2 c^2}{\omega^2} - 4 \right)^{3/2} - 2, \quad (3.1.7)$$

con

$$v_t^2 = c^2 \left( 1 + \frac{\omega^2}{3k_0^2 c^2} (2^{-1/3} q - 1) + \frac{2^{1/3}}{3q} \left( \frac{\omega^2}{k_0^2 c^2} + 54 \right) \right) \quad (3.1.8)$$

y para este caso, tomando el negativo de la raíz cuadrada. Para  $c = 1$ ,  $k_0 = 2$ , y  $\omega = 1$ , se obtiene  $v_t = -1.9002$ .

## 3.2. Método analítico: BHL con frecuencias complejas

En esta sección se aplicará la teoría de inestabilidades al BHL, para ello obtendremos primero las raíces de la ec. (3.1.1) para  $\omega$  real y  $k$  complejo y luego generalizamos las

soluciones para números de onda  $k$  y frecuencias  $\omega$  complejos teniendo así las inestabilidades espacio-temporales. Recordemos que la forma canónica de una ecuación de cuarto orden como la de la relación de dispersión dada en la ec. (3.1.1) es

$$k^4 + dk^3 + ek^2 + fk + g = 0, \quad (3.2.1)$$

con los siguientes coeficientes

$$d = 0, \quad e = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)k_0^2, \quad f = \frac{2v\omega k_0^2}{c^2}, \quad g = \frac{-\omega^2 k_0^2}{c^2}. \quad (3.2.2)$$

Este tipo de ecuaciones con  $d = 0$  pueden ser reducidas a una ecuación auxiliar cúbica

$$k^3 + \frac{e}{2}k^2 + \frac{e^2 - 4g}{16}k - \frac{f^2}{64} = 0, \quad (3.2.3)$$

donde sus soluciones  $p_1, p_2$  y  $p_3$  otorgan la solución a la ecuación de cuarto orden dada en la ec. (3.1.1) inicial

$$k_1 = \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3}, \quad k_2 = \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2} - \sqrt{p_3}, \quad (3.2.4)$$

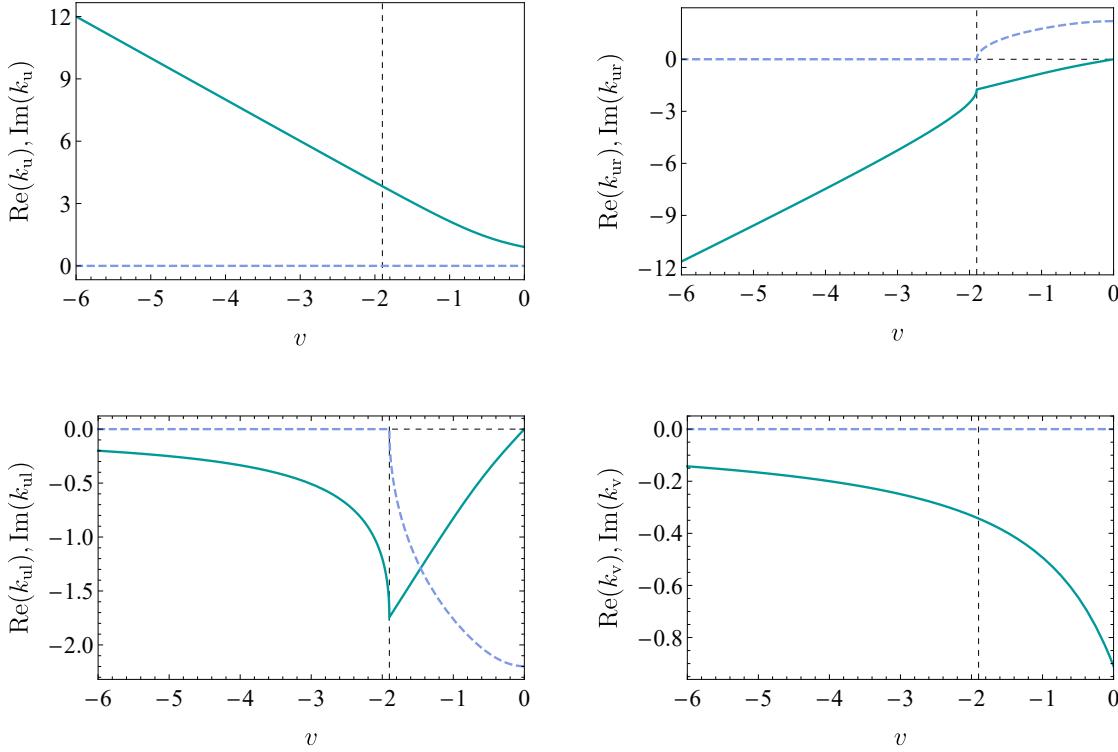
$$k_3 = -\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} - \sqrt{p_3}, \quad k_4 = -\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3}. \quad (3.2.5)$$

Aunque las soluciones explícitas son demasiado largas para escribirlas, se pueden usar en cálculos analíticos. De esta manera se obtienen cuatro soluciones para cada flujo de velocidad, i.e., para cada región del BHL. El comportamiento de las cuatro soluciones complejas cuando varía la velocidad del flujo se muestra en la figura 3.3. En esta gráfica se marca la velocidad transónica  $v_t$  con una línea vertical que indica en qué velocidad se vuelven complejas las soluciones  $k_{ur}$  y  $k_{ul}$ . Las soluciones del número de onda  $k$  para la región subsónica  $v_1$  y supersónica  $v_2$  mostradas en las figuras 2.1 y 3.3 se retoman en la figura 3.4, que es la representación del espacio complejo del número de onda.

Comparando con las soluciones del método numérico, se obtienen los mismos resultados reales, cuatro en la región supersónica y dos en la subsónica. Además, se obtienen dos soluciones extras, las cuales son complejas conjugadas entre sí y no aparecen en el tratamiento habitual del sistema BHL mostrado en la sección 3.1. Estas dos soluciones adicionales en la parte subsónica tienen número de onda  $k$  complejo, lo que genera un aumento o disminución exponencial para ciertas regiones del espacio.

$$\exp[ikx] = \exp[i(k_R + ik_I)x] = \exp[-k_Ix] \exp[ik_Rx]. \quad (3.2.6)$$

Tal que, si  $k_I > 0$ , la solución decae a la derecha ( $x > 0$ ), y si  $k_I < 0$ , la solución decae a la izquierda ( $x < 0$ ).



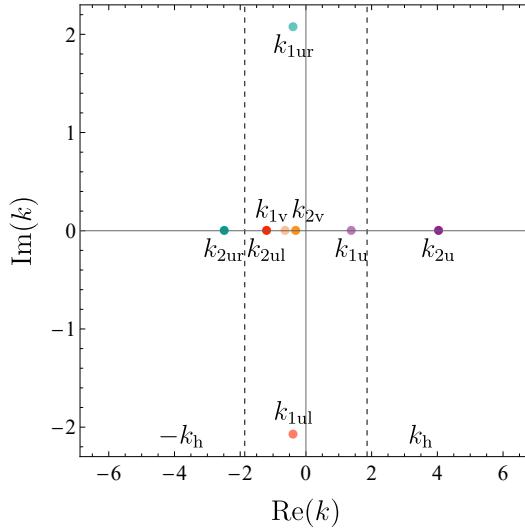
**Figura 3.3:** Las cuatro soluciones analíticas en función de la velocidad del flujo variable  $v$ , la parte real (línea continua verde) y la parte imaginaria (línea discontinua morada) se muestran para  $k_0 = 2$  y  $\omega = 1$ . La vertical discontinua corresponde a la velocidad transónica  $v_t = 1.9002$ . Podemos ver que  $k_u$  y  $k_v$  son reales para todas las velocidades, mientras que  $k_{ur}$  y  $k_{ul}$  son reales solo para velocidades supersónicas [Bermudez and Leonhardt, 2018].

### 3.2.1. Descripción cualitativa y cuantitativa

Ahora se desea encontrar las inestabilidades espacio-temporales en el BHL, es decir, encontrar las funciones propias del sistema con frecuencias complejas  $\omega = \omega_R + i\omega_I$ , con la parte imaginaria positiva, esto implica que la amplitud incrementa exponencialmente con el tiempo

$$\exp[-i\omega t] = \exp[-i(\omega_R + i\omega_I)t] = \exp[\omega_I t] \exp[-i\omega_R t]. \quad (3.2.7)$$

Al tomar la configuración del BHL como un todo se considera la situación donde los únicos modos permitidos en la región subsónica sean aquellos que decaen exponencialmente lejos de la cavidad. Del comportamiento de las soluciones para los modos  $k$  mostradas en la figura 3.4, se observa que la solución etiquetada como  $k_{1ur}$  decae exponencialmente a la derecha ( $x \rightarrow \infty$ ) y  $k_{1ul}$  (complejo conjugado de  $k_{1ur}$ ) decae exponencialmente a la izquierda ( $x \rightarrow -\infty$ ). Lo anterior se puede resumir de manera formal de la siguiente manera: Si dividimos el campo cuántico  $\phi$  en tres regiones I,



**Figura 3.4:** Soluciones analíticas para  $v_1 = -1/2$  y  $v_2 = -3$  en el espacio  $k$  complejo. Se obtienen las seis soluciones reales originales más dos complejas nuevas completando las ocho soluciones al problema, cuatro pertenecen a la región subsónica y otras cuatro a la supersónica. Las líneas en  $k_h$  ayudan a encontrar la dirección de desplazamiento de los modos:  $k_{2u}$ ,  $k_{2ur}$  y  $k_{2ul}$  [Bermudez and Leonhardt, 2018].

II y III, en cada región, el campo  $\phi$  está definido por

$$\phi_I = \mathbf{A} \cdot \exp(i\mathbf{k}_1 x), \quad \phi_{II} = \mathbf{B} \cdot \exp(i\mathbf{k}_2 x) \quad \phi_{III} = \mathbf{C} \cdot \exp(i\mathbf{k}_1 x), \quad (3.2.8)$$

donde

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4), \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4), \quad \mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4), \quad (3.2.9)$$

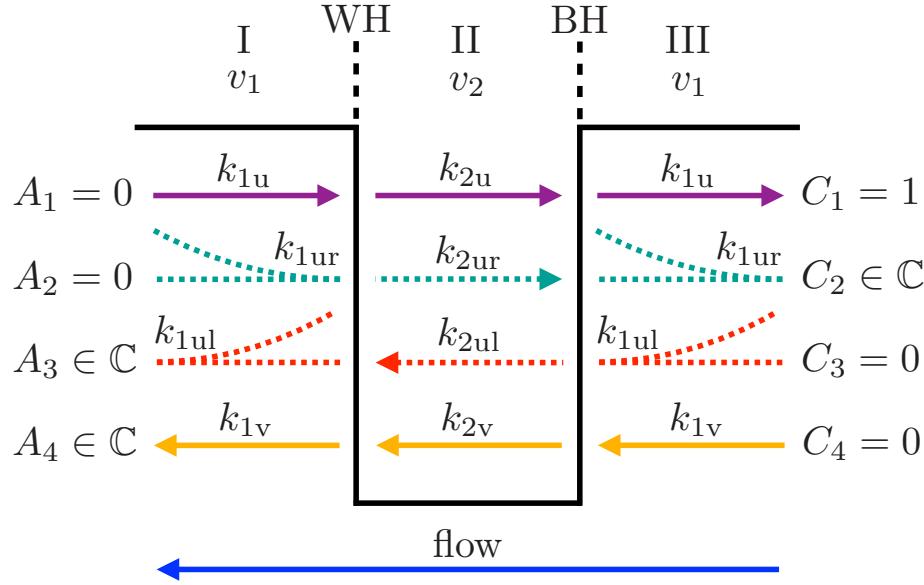
y

$$\begin{aligned} \exp(i\mathbf{k}_1 x) &= (\exp(ik_{11}x), \exp(ik_{12}x), \exp(ik_{13}x), \exp(ik_{14}x)), \\ \exp(i\mathbf{k}_2 x) &= (\exp(ik_{21}x), \exp(ik_{22}x), \exp(ik_{23}x), \exp(ik_{24}x)). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

En la configuración del láser, los modos entrantes y salientes están permitidos siempre que el campo  $\phi$  sea una función de cuadrado integrable, razón por la cual en el párrafo anterior se pide que su comportamiento sean exponenciales que decaen fuera de la cavidad. Esto significa que la configuración de BHL es  $A_1 = A_2 = C_3 = C_4 = 0$ , como se indica en la figura 3.5. Los otros coeficientes se deben encontrar para definir por completo el campo cuántico en la configuración BHL.

### 3.2.2. Matriz de transferencia

Para resolver este problema se aplicará el método de matriz de transferencia. Se puede emplear este método porque el perfil de velocidad es constante en todas las regiones excepto en las interfaces, donde se debe condicionar la continuidad del campo



**Figura 3.5:** Diagrama de modos de una BHL con inestabilidades. Los modos  $k_{1ur}$  y  $k_{1ul}$  son exponencialmente decayentes o crecientes en alguna de las regiones subsónicas. Los coeficientes mostrados  $A_j$  y  $C_j$  describen la solución para que el campo  $\phi$  sea una función de cuadrado integrable [Bermudez and Leonhardt, 2018].

cuántico  $\phi(x)$  y sus tres primeros derivadas  $\phi'(x), \phi''(x), \phi'''(x)$  (ya que tenemos una ecuación diferencial de cuarto orden, la ec. (2.2.26)).

Definiendo las matrices de transferencia o salto de la región I a la región II como ( $M_1$ ) y de la región II a la región III como ( $M_2$ ) usamos las matrices auxiliares  $m_1$  y  $m_2$  cuyas entradas serán coeficientes del campo y sus derivadas ( $\phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \phi'''(x)$ )

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_{11} & ik_{12} & ik_{13} & ik_{14} \\ -k_{11}^2 & -k_{12}^2 & -k_{13}^2 & -k_{14}^2 \\ -ik_{11}^3 & -ik_{12}^3 & -ik_{13}^2 & -ik_{14}^3 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_{21} & ik_{22} & ik_{23} & ik_{14} \\ -k_{21}^2 & -k_{22}^2 & -k_{23}^2 & -k_{24}^2 \\ -ik_{21}^3 & -ik_{22}^3 & -ik_{23}^2 & -ik_{24}^3 \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

El primer subíndice en  $k_{ij}$  corresponde a la velocidad  $v_1$  o  $v_2$ , el segundo especifica la solución de 1-4. Es posible seleccionar cualquier orden para las soluciones de  $k$  siempre y cuando se mantenga el orden escogido, aquí se ha ordenado como u, ur, ul y v como se muestra en la figura 3.5. Entonces las matrices de tranferencia son simplemente

$$M_1 = m_2^{-1} m_1, \quad M_2 = m_1^{-1} m_2 = M_1^{-1}, \quad (3.2.12)$$

también es conveniente definir las matrices de propagación para trasladar la solución entre las interfaces de la cavidad. Éstas son

$$\begin{aligned} P_L &= \text{diag}(\exp(-ik_{21}L), \exp(-ik_{22}L), \exp(-ik_{23}L), \exp(-ik_{24}L)), \\ P_R &= \text{diag}(\exp(ik_{21}L), \exp(ik_{22}L), \exp(ik_{23}L), \exp(ik_{24}L)). \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Finalmente, la matriz de transferencia ( $M$ ) de la región III a la región I está dada por

$$M = M_1 P_L M_2 = m_2^{-1} m_1 P_L m_1^{-1} m_2. \quad (3.2.14)$$

De manera similar, para pasar de la región III a la región I se tiene  $M^{-1}$ . Usando  $M$ , se pueden tener los coeficientes  $\mathbf{A}$  en términos de los  $\mathbf{C}$ , a través de

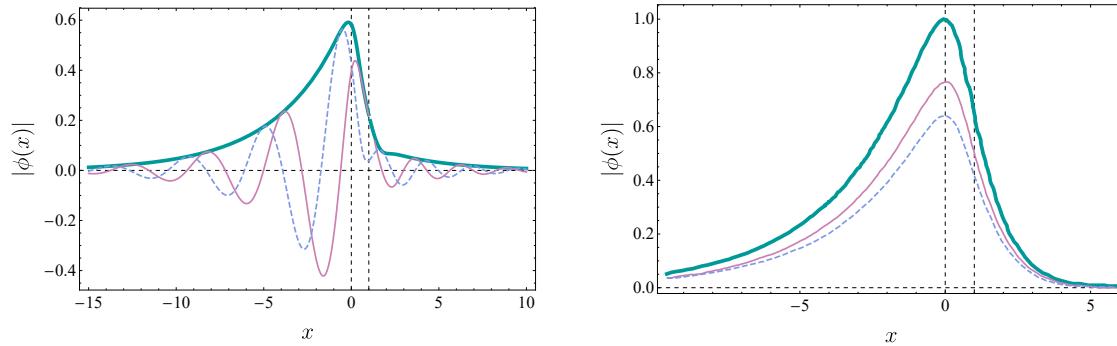
$$\phi_I = M\phi_{III}. \quad (3.2.15)$$

Para cada  $\omega$  existirá un conjunto de cuatro números de onda  $k$  en la región subsónica  $\mathbf{k}_1$  y otros cuatro en la región supersónica  $\mathbf{k}_2$ , este problema se puede resolver analíticamente. A partir de los cuatro coeficientes  $\mathbf{C}$  (o  $\mathbf{A}$ ) para cualquier frecuencia compleja se pueden determinar los ocho números de onda complejos correspondientes  $\mathbf{k}_1(\omega)$  y  $\mathbf{k}_2(\omega)$  y finalmente calcular los cuatro coeficientes  $\mathbf{A}$  (o  $\mathbf{C}$ ).

### 3.3. Estados confinados

Definimos un modo inestable del láser como un modo de la cavidad donde el campo  $\phi(x)$  es una función de cuadrado integrable con  $\omega_I > 0$ . Esta es la situación mostrada en la figura 3.5, donde  $A_1 = A_2 = C_3 = C_4 = 0$ . Iniciando con  $\phi_{III}(x)$  dado por los coeficientes  $\mathbf{C} = (1, \rho, 0, 0)$  con  $\rho \in \mathbb{C}$ . Con esto, se obtiene  $\phi_I(x)$  usando el método de matriz de transferencia. La solución con un coeficiente nulo se puede encontrar analíticamente, pero con un segundo, el problema tiene que ser resuelto numéricamente. Por ejemplo, si se toma  $v_1 = -1/2$ ,  $v_2 = -3$  y  $L = 1$ , hay una solución única dada por  $\omega_l = 2.4613 + i0.5667$ , donde el subíndice  $l$  indica que es un modo inestable. El campo cuántico  $\phi$  para estas condiciones que el perfil de velocidades mostrado figura 3.1(b), junto a otro perfil de velocidades dado por  $v_1 = -1/2$  y  $v_2 = -3$ , se muestran en la figura 3.6. Aquí se grafica el módulo del campo  $|\phi(x)|$ , su parte real e imaginaria, mostrando que cada una de sus partes son funciones continuas y decaen lejos de la cavidad. También se verifica que las tres primeras derivadas son continuas en los horizontes.

Ahora, se necesita verificar que el comportamiento cualitativo de esta nueva solución compleja es solución del problema planteado. En particular, se necesita verificar que los modos decaen de forma correcta en ambos lados de la cavidad. De los ocho valores de  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$  mostrados en la figura 3.7, donde  $\text{Re}(\omega_l)$  se deja fija y se cambia suavemente la parte imaginaria de la frecuencia de 0 a  $\text{Im}(\omega_l)$ , nos interesan para ver el comportamiento asintótico de la solución aquellos modos que se encuentran en la región subsónica. De la ec. (3.2.6) la parte imaginaria del número de onda domina el comportamiento asintótico de la solución, por tanto, los modos  $k_{1u}$  y  $k_{1ul}$  con

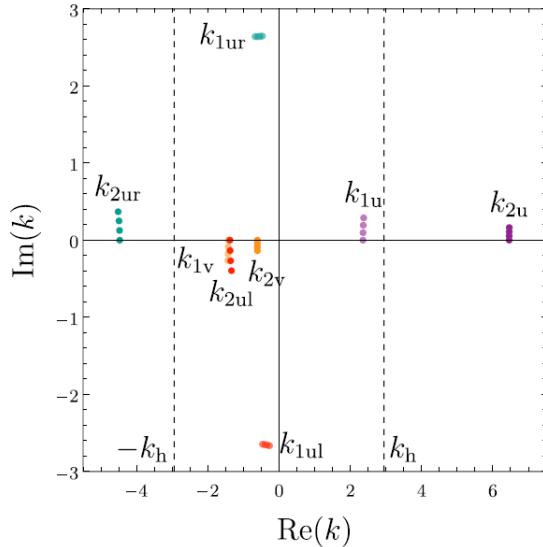


**Figura 3.6:** Campo cuántico  $\phi(x)$  para una cavidad formada entre  $x = 0$  y  $x = L = 1$ . La gráfica  $|\phi(x)|$  (línea gruesa verde),  $\text{Re}(\phi)$  (línea delgada rosa),  $\text{Im}(\phi)$  (línea discontinua azul) para  $v_2 = -2$  (izquierda) y  $v_2 = -3$  (derecha) [Bermudez and Leonhardt, 2018].

parte imaginaria del número de onda mayor que cero deben existir en la región III, mientras que para los modos  $k_{1\text{ul}}$  y  $k_{1v}$  con parte imaginaria en el número de onda menor que cero deben existir solo en la región I. Esta información es congruente con las condiciones impuestas a los coeficientes **A** y **C** en la figura 3.5.

La forma en que decae el campo  $\phi(x)$  mostrado en la figura 3.6 indica que la radiación se está propagando fuera de la cavidad. Además, dicho campo muestra una simetría en la parte espacial: la mayor parte de la radiación se propaga en la misma dirección en la que se propaga el flujo de fondo. Por ejemplo, para  $v_1 = -1/2$  y  $v_2 = -3$ , los coeficientes fuera de la cavidad para un modo del láser son  $\mathbf{A} = (0, 0, -1.2149 + i0.3174, 5.1095 + i3.9008)$  en la región I, y  $\mathbf{C} = (1, 1.1497 + i0.3824, 0, 0)$  en la región III. Esto muestra que la radiación transplanckiana en el modo  $k_{1v}$ , con amplitud  $A_4$ , logra escapar del BHL, producto del tunelamiento del campo que se encuentra dentro de la cavidad. Este último comportamiento es típico de la RH, que es radiación que logra escapar de los horizontes.

Numéricamente, se puede encontrar una única solución (una sola frecuencia  $\omega_l$ ) para las velocidades supersónicas cercanas a la velocidad transónica  $v_t$ , por ejemplo para  $v_2 = -3$ . Sin embargo, podemos encontrar más soluciones si se eligen valores más negativos, por ejemplo para  $v_2 = -5$  hay dos soluciones. Esto genera de forma inmediata una pregunta: ¿es posible saber cuántas soluciones se pueden encontrar para un valor arbitrario de  $v_2$ ? En la siguiente sección compararemos las soluciones encontradas a través de la teoría de inestabilidades con un modelo simple, respondiendo con esto la pregunta antes mencionada.



**Figura 3.7:** Cambio de  $\mathbf{k}_1$  y  $\mathbf{k}_2$  para  $\text{Re}(\omega_l)$  fijo, e incrementando el valor de  $\text{Im}(\omega)$  de 0 a  $\text{Im}(\omega_l)$  en pequeños pasos para  $v_1 = -1/2$  y  $v_2 = -3$  [Bermudez and Leonhardt, 2018].

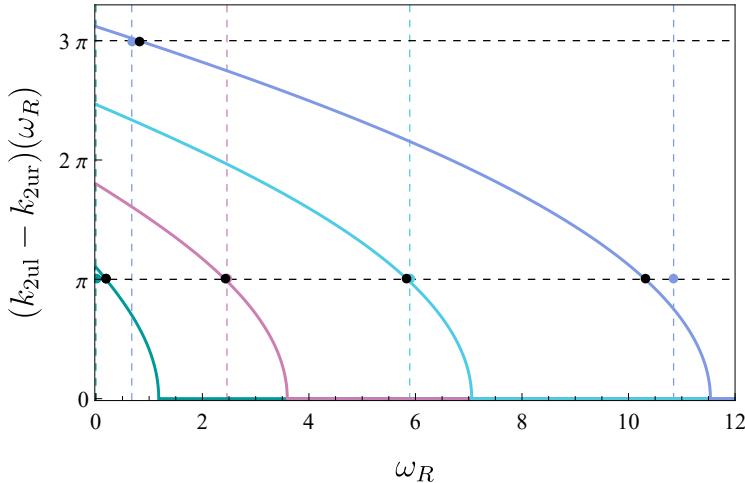
### 3.4. Comparación del modelo de inestabilidades con el método simple

En la sección anterior se mostró que por teoría de inestabilidades se pueden encontrar los modos del BHL. Variando  $v_1$  y  $v_2$  para un  $L$  fijo se encuentra numéricamente las soluciones para uno o más modos. Ahora se usará un modelo simple para obtener una mejor imagen de la dinámica de los modos láser  $k(\omega_l)$  con frecuencia compleja  $\omega_l = \omega_R + i\omega_I$ , pero considerando que  $\omega_I \rightarrow 0$ , que es la versión de una inestabilidad neutra o un modelo de onda plana con números de onda reales  $k(\omega_R)$ .

Recordando que en la evolución usual de los modos del BHL (ver las secciones 2.3 y 3.1), dos de los modos atrapados en la cavidad son  $k_{2ul}$  que se mueve hacia la izquierda y  $k_{2ur}$  que se mueve hacia la derecha en el marco comóvil los cuales permiten la creación en cada ciclo de un modo  $k_{1u}$  que logra salir de la cavidad, además en cada *rebote* con los horizontes se logra amplificar la radiación que se encuentra en la configuración del BHL. Con el modelo de ondas planas se puede demostrar que las soluciones de número de onda  $k_{2ul}$  y  $k_{2ur}$  siguen una condición de resonancia en cada ciclo [Leonhardt and Philbin, 2007].

#### 3.4.1. Condición de resonancia

Se produce una resonancia cuando la diferencia de fase de la radiación atrapada después de un ciclo ida y vuelta es un múltiplo entero de  $2\pi$ . Además, se producen dos reflexiones en los horizontes durante cada ciclo con un cambio de fase de  $\pi/2$  cada



**Figura 3.8:** Diferencia de fase  $(k_{2ul} - k_{2ur})(\omega_R)$  considerando el modelo de onda plana para  $v_2 = \{-2(\text{verde}), -3(\text{rosa}), -4(\text{azul}), -5(\text{morado})\}$ . Las diferencias de fase de  $\pi$  y  $3\pi$  predichas por el modelo están marcados por puntos negros. Las líneas discontinuas verticales marcan el valor de  $\omega_R$  encontrado por la teoría de inestabilidades y su intersección con la fase son los puntos de color.

uno. Entonces, la diferencia de fase entre los modos atrapados  $k_{2ul}$  y  $k_{2ur}$  debería ser  $\Delta kL = (2n + 1)\pi$ , (con  $L = 1$ ). En la figura 3.8 se muestra la diferencia de fase ( $\Delta k = k_{2ul} - k_{2ur}$ ) con el modelo de ondas neutras ( $\omega_I = 0$ ) para diferentes valores de  $v_2$ . Los puntos negros en la figura 3.8 indican las predicciones para  $\omega_R$  del modelo simple, mientras los puntos de color que son las intersecciones entre las lineas verticales y discontinuas horizontales son las predicciones del modelo de inestabilidades. Todas las predicciones del modelo simple son cercanas a los resultados encontrados con el modelo de frecuencias complejas, los valores difieren por un error menor a 10 %. Esto significa que el modelo de onda plana para frecuencias reales es lo suficientemente bueno como para darnos una aproximación a la parte real de  $\omega_I$ . Además, refuerza la interpretación dada de la solución con frecuencias complejas para el campo  $\phi(x)$  obtenido en la sección 3.2. De hecho, se puede concluir que el continuo rebote de los modos  $k_{2ul}$  y  $k_{2ur}$  con los horizontes son los responsables de la amplificación del campo confinado y a su vez esto es producto de una inestabilidad, i.e., de que el campo  $\phi$  posea una frecuencia compleja donde su parte real es mayor que cero.

Los resultados obtenidos por teoría de inestabilidades no solo logran obtener la condición de resonancia en una buena aproximación con los resultados que se obtienen con el modelo simple, sino que además predicen que hay modos que logran propagarse fuera de los horizontes de manera similar a la radiación de Hawking expuesta en el capítulo 1. Para frecuencias reales estas ondas no podrían escapar de la cavidad, pero cuando se generaliza el problema a poseer una inestabilidad espacio-temporal de forma natural aparece que los modos de la cavidad se amplifican en el tiempo y

pueden *tunelar* y alejarse de ella, un comportamiento típico de la RH, que es radiación que logra escapar de los horizontes.

# RADIACIÓN DE HAWKING ANÁLOGA EN SISTEMAS ÓPTICOS

---

Desde un punto de vista práctico, la luz en medios dieléctricos proporciona un atractivo sistema experimental para observar la radiación de Hawking análoga. Sin embargo, en estos sistemas el medio no se mueve, entonces ¿cómo se crea en este caso un horizonte?, ¿es necesario mover físicamente un medio para establecer un horizonte? Recordemos que la existencia de un horizonte es uno de los ingredientes esenciales para que exista el proceso de Hawking. En el caso de los análogos ópticos, lo que realmente importa son solo las propiedades efectivas del medio que indican cómo se propagan las ondas en el interior del material.

Tales ideas se pueden discutir desde el marco de la óptica no lineal, particularmente como un pulso de luz muy intenso al propagarse en el interior de una fibra óptica modifica sus propiedades ópticas debido al efecto Kerr óptico [Agrawal, 2013]. El índice de refracción original de la fibra  $n_0$  gana una contribución adicional  $\delta n$  que es proporcional a la intensidad  $I$  del pulso, pero como el pulso se mueve a través del material, esta contribución al  $n_0$  se moverá a la misma velocidad estableciendo así un medio en movimiento, aunque no se desplaza nada material. Este medio efectivo se mueve naturalmente a la velocidad de la luz dentro de la fibra, porque está hecho por luz misma.

En este capítulo haremos un análisis similar al expuesto en el capítulo 2, encontrando la ecuación dinámica que sigue un campo cuántico cuando se propaga en el interior de una fibra óptica, posteriormente linealizaremos la ecuación diferencial que rige la dinámica de este campo para ver la relación de dispersión para una fluctuación que se propaga sobre dicho campo. Por último, explicaremos la idea de horizontes

en óptica para concluir con el sistema de láser óptico de agujeros negros.

## 4.1. Óptica no lineal

La óptica no lineal estudia la respuesta de los medios dieléctricos a campos ópticos. Cuando la intensidad de los campos es lo suficientemente alta, la respuesta del medio es no lineal, i.e., la polarización, que es el momento dipolar por unidad de volumen en el medio, no es una función lineal del campo eléctrico aplicado. En la descripción de la polarización hay un término lineal pero también términos que contienen potencias mayores del campo eléctrico que conducen a nuevos tipos de comportamiento. Uno de los más notables es que las frecuencias de estos nuevos campos sean armónicos de la frecuencia del campo de entrada. Los medios lineales no cambian la frecuencia de la luz que incide sobre ellos, de hecho, la primera observación de un efecto óptico no lineal fue la generación del segundo armónico [Franken et al., 1961], donde un haz de luz láser que entra en un medio no lineal produce un segundo haz al doble de la frecuencia del original. Otro tipo de comportamiento que se hace posible en medios no lineales es que el índice de refracción sea una función de la intensidad de la luz y de la frecuencia, lo que permite construir un medio móvil análogo a un fluido en movimiento y así reproducir las ideas mencionadas en los capítulos 2 y 3.

La mayoría de los efectos ópticos no lineales se pueden describir utilizando campos electromagnéticos clásicos, y de hecho, la teoría inicial de la óptica no lineal se realizó con campos clásicos [Armstrong et al., 1962]. Sin embargo, cuando los campos se cuantizan surgen una serie de nuevos efectos. Los campos cuantizados son necesarios para describir radiación que se origina a partir de la *emisión espontánea*. Por ejemplo, en un proceso conocido como conversión descendente paramétrica espontánea o en inglés *spontaneous parametric down conversion* (SPDC), un fotón atraviesa un cristal no lineal y en el proceso se producen un par de fotones a la mitad de la frecuencia del original debido a una emisión espontánea. Por otro lado, el efecto Hawking es una emisión espontánea, por tanto requiere que la descripción de los campos sea cuántica.

Cuando un campo eléctrico es aplicado a un medio dieléctrico, una polarización es creada en el medio. Las ecuaciones de Maxwell para materiales no magnéticos en ausencia de cargas y corrientes externas que incluyen la polarización son

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (4.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \partial_t \mathbf{D}, \quad (4.1.2)$$

aquí  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  es el campo de desplazamiento y  $\mathbf{P}$  la polarización, i.e., un momento dipolar por unidad de volumen y es dado por

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left[ \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right]. \quad (4.1.3)$$

Si las no linealidades en el medio son de origen electrónico, entonces los efectos no lineales deberían ser importantes cuando el campo aplicado es del mismo orden que el campo eléctrico de un átomo. El campo en un átomo  $E_{\text{átomo}} \sim e/(4\pi\epsilon_0 a_0^2)$ , donde  $a_0$  es el radio de Bohr, el cual es aproximadamente  $5 \times 10^{11} V/m$ . Esto puede usarse para estimar el tamaño de las susceptibilidades  $\chi^{(i)}$ , para campos de esta magnitud los términos en la expansión para la polarización serán de aproximadamente el mismo tamaño. Utilizando el hecho de que  $\chi^{(1)}$  es de orden 1, entonces se encuentra que:

$$\chi^{(2)} \sim \frac{1}{E_{\text{átomo}}} \approx 2 \times 10^{-12} \frac{m}{V}, \quad (4.1.4)$$

$$\chi^{(3)} \sim \frac{1}{E_{\text{átomo}}^2} \approx 4 \times 10^{-24} \frac{m^2}{V^2}. \quad (4.1.5)$$

La ecuación de onda cuando se tiene polarización es

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t^2 \mathbf{P}, \quad (4.1.6)$$

nuestro interés en este capítulo es describir la ecuación anterior cuando los campos son cuantizados. ¿Qué pasa con la polarización en este caso? ¿Qué ecuación dinámica sigue una perturbación en un medio no lineal y con dispersión? Para responder estas preguntas usaremos como guía los capítulos 2 y 4 del libro [Drummond and Ficek \[2013\]](#).

## 4.2. Cuantización del campo electromagnético en medios no lineales

Nuestro propósito es cuantizar el campo electromagnético en un medio no lineal con dispersión. Para ello supondremos inicialmente que el medio no tiene pérdidas y es no dispersivo, pero puede ser no homogéneo, i.e., las susceptibilidades pueden ser función de la posición. Con esto procedemos a encontrar un lagrangiano que reproduzca las ecs. (4.1.1), para ello elegimos las variables dinámicas adecuadas que nos permitan abordar el problema. De forma natural existen dos posibles potenciales vectoriales que reproducen las ecuaciones de Maxwell, el vector potencial  $A = (A_0, \mathbf{A})$  y el potencial vector dual  $\Lambda = (\Lambda_0, \mathbf{\Lambda})$ .

Usar el potencial dual como el campo básico de la teoría facilita la cuantización del campo electromagnético, como veremos explícitamente en esta sección. Recapitulando, el potencial dual  $\Lambda = (\Lambda_0, \mathbf{\Lambda})$  es definido tal que [Drummond and Ficek, 2013]:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left[ \partial_t \mathbf{\Lambda} + \nabla \Lambda_0 \right], \quad \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{\Lambda}. \quad (4.2.1)$$

Note que esta definición de  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  en términos de  $\Lambda$  y  $\Lambda_0$  ya garantiza las dos primeras ecuaciones de Maxwell.

Antes de continuar, observamos que la expresión dada para la polarización en términos del campo eléctrico ec. (4.1.3) ya no es conveniente. La relación entre  $\mathbf{E}$  y  $\Lambda$  es complicada, mientras que la relación entre  $\mathbf{D}$  y  $\Lambda$  es relativamente simple. Por lo tanto, es mejor expresar la polarización como expansión en  $\mathbf{D}$ , pero para ello observe que

$$E_i = \eta_{ij}^{(1)} D_j + \eta_{ijk}^{(2)} D_j D_k + \dots \quad (4.2.2)$$

donde los tensores  $\eta^{(i)}$  se expresan en términos del tensor de susceptibilidad como

$$\eta^{(1)} = [\epsilon_0(1 + \chi^{(1)})]^{-1}, \quad (4.2.3)$$

$$\eta_{imn}^{(2)} = -\epsilon_0 \eta_{ij}^{(1)} \eta_{km}^{(1)} \eta_{ln}^{(1)} \chi_{jkl}^{(2)}. \quad (4.2.4)$$

Con esto la polarización dada en la ec. (4.1.3) se expresa como

$$\mathbf{P} = \eta^{(1)} \cdot \mathbf{D} + \eta^{(2)} : \mathbf{DD} + \eta^{(3)} : \mathbf{DDD} + \dots \quad (4.2.5)$$

Ahora necesitamos una densidad lagrangiana que nos permita encontrar el resto de las ecuaciones de Maxwell. Si asumimos que los tensores  $\eta^j$  son simétricos, entonces la densidad lagrangiana se escribe como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}^2 \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \eta^{(1)} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{3} \mathbf{D} : \eta^{(2)} : \mathbf{DD} + \dots \right). \quad (4.2.6)$$

Las ecuaciones de movimiento que provienen de esta densidad lagrangiana están dadas por

$$\partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Lambda_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_\mu} = 0, \quad (4.2.7)$$

donde  $\{\mu, \nu\} = 0, 1, 2, 3$ . Haciendo  $\mu = 0$  se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.2.8)$$

mientras que las otras tres ecuaciones otorgan

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}. \quad (4.2.9)$$

Con lo que se completa la formulación lagrangiana.

El siguiente paso es encontrar la formulación hamiltoniana, para ello calculamos los momentos canónicos dados por

$$\Pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Lambda_0)} = 0, \quad \Pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Lambda_j)} = B_j. \quad (4.2.10)$$

La densidad hamiltoniana es entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \Pi_j(\partial_t \Lambda_j) - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}^2 \right) - \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(1)} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{3} \mathbf{D} : \boldsymbol{\eta}^{(2)} : \mathbf{D} \mathbf{D} + \dots \right) - \mathbf{B} \cdot \nabla \Lambda_0. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Con el objetivo de cuantizar la teoría se imponen las relaciones de commutación canónicas a tiempos iguales

$$[\Lambda_j(\mathbf{x}, t), \Pi_k(\mathbf{x}', t)] = [\Lambda_j(\mathbf{x}, t), B_k(\mathbf{x}', t)] = i\hbar \delta_{jk}^{(tr)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.2.12)$$

Se ha usado  $\delta^{tr}$  la distribución delta transversa<sup>1</sup>, porque esta elección hace que la ecuación anterior sea consistente con  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . En este punto es conveniente reescribir los campos en términos de los operadores de creación y aniquilación, ver definición en el capítulo 1 para modos de ondas planas

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\alpha} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (4.2.13)$$

donde  $\alpha = 1, 2$  representan los distintos estados de polarización y los vectores  $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},1}$  y  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},2}$  forman un conjunto ortonormal de vectores.

Los operadores de aniquilación son combinaciones lineales de los campos  $\mathbf{\Lambda}$  y  $\mathbf{B}$ , dicha combinación lineal exacta se elegirá con dos requisitos en mente. En primer lugar, queremos obtener las relaciones de commutación habituales entre los operadores de creación y aniquilación. Si definimos

$$a_{\mathbf{k},\alpha} = \int d^3x \mathbf{u}_\alpha^*(\mathbf{k}) \cdot \left( c_{\mathbf{k}} \mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, t) + \frac{i}{2\hbar c_{\mathbf{k}}} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (4.2.14)$$

donde  $c_{\mathbf{k}}$  es una constante real, reemplazando la relación anterior en la ec. (4.2.12)

$$[a_{\mathbf{k},\alpha}, a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger] = i\hbar \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\alpha,\alpha'}. \quad (4.2.15)$$

---

<sup>1</sup>Para definir la función delta transversal, se asume que se cuantizan los campos en una caja de volumen  $V$  con condiciones de contorno periódicas. Entonces podemos expresar la delta transversa como:  $\delta_{lm}^{(tr)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} (\delta_{lm} - \hat{k}_l \hat{k}_m) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ , donde  $k_i = 2\pi n_i / L_i$ , es la componente  $i$ -ésima del vector de onda,  $V = L_x L_y L_z$  es el volumen y  $n_i$  es un número entero.

Tomando la ec. (4.2.14) y su autoadjunto podemos despejar los campos

$$\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left( \frac{\hbar}{2\mu_0 \omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}, \alpha} (\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] a_{\mathbf{k}, \alpha} + \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] a_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger), \quad (4.2.16)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left( i \frac{\mu_0 \hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}, \alpha} (\exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] a_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger + \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] a_{\mathbf{k}, \alpha}). \quad (4.2.17)$$

Una descripción realista de la propagación de un campo en un medio no lineal debe incluir los efectos de dispersión lineal, los efectos de la dispersión no lineal son pequeños por lo cual serán ignorados. Sin embargo, la dispersión es difícil de incorporar en esta formulación estándar, porque es un efecto no local en el tiempo.

### 4.2.1. Dispersión

Primero veamos que la no localidad es debida a que la polarización del medio es una función del tiempo  $t$ . No solo depende del campo eléctrico en el tiempo  $t$ , sino también de sus valores en tiempos anteriores [Landau and Lifshitz, 1960]:

$$\mathbf{P}(t) = \int_0^\infty d\tau \chi^{(1)}(\tau) \cdot \mathbf{E}(t - \tau). \quad (4.2.18)$$

Existen dos aproximaciones para construir una teoría cuántica de la propagación de un campo en un medio no lineal al cual se le incorpora dispersión. La primera es una aproximación fenomenológica y es la que vamos a tratar aquí, la segunda es una aproximación microscópica o más fundamental, la cual requiere de un modelo para cada medio Drummond and Hillery [2014].

Nuestra variable dinámica sigue siendo el potencial dual y está relacionada con el campo eléctrico por

$$E_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty d\tau \eta_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) D_j(\mathbf{x}, t - \tau), \quad (4.2.19)$$

donde  $\mathbf{D} = \nabla \times \boldsymbol{\Lambda}$ . Para simplificar el problema, supongamos que el medio es isotrópico, lo que implica que  $\eta_{ij}^{(1)}$  es un escalar, simplificándose la ecuación de Maxwell que relaciona  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  a

$$\nabla \times \int_0^\infty d\tau \eta(\mathbf{x}, \tau) [\nabla \times \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}, t - \tau)] = \mu_0 \partial_t^2 \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{x}, t). \quad (4.2.20)$$

Esta ecuación claramente es no local en el tiempo. Ahora si suponemos que  $\boldsymbol{\Lambda}^\nu$  es un campo con un ancho de banda que está centrado en la frecuencia  $\omega_\nu$  (esto es  $\boldsymbol{\Lambda}^\nu \sim \exp[-i\omega_\nu t]$ ) y  $\boldsymbol{\Lambda}$  puede ser expresado como

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^\nu + \boldsymbol{\Lambda}^{-\nu} \quad (4.2.21)$$

donde  $\Lambda^{-\nu} = (\Lambda^\nu)^*$ . El campo  $\Lambda^\nu$  también cumple la ec. (4.2.20). Si trabajamos en el espacio de Fourier se tiene

$$\eta^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^\infty d\tau \exp[i\omega\tau] \eta^{(1)}(\mathbf{x}, \tau), \quad (4.2.22)$$

recordando que  $\eta^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) = 1/\epsilon(\mathbf{x}, \omega)$  es la función dieléctrica habitual del medio y depende de la frecuencia. Debido a que nuestro interés son frecuencias alrededor de  $\omega_\nu$ , expandimos en series de Taylor a segundo orden en  $\omega - \omega_\nu$

$$\eta_\nu(\mathbf{x}, \omega) \cong \eta_\nu(\mathbf{x}) + \omega\eta'_\nu(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\omega^2\eta''_\nu(\mathbf{x}), \quad (4.2.23)$$

donde

$$\eta_\nu(\mathbf{x}) \equiv \eta^{(1)}(\mathbf{x}, \omega_\nu) - \omega_\nu \frac{d\eta^{(1)}}{d\omega}(\mathbf{x}, \omega_\nu) + \frac{1}{2}\omega_\nu^2 \frac{d^2\eta^{(1)}}{d\omega^2}(\mathbf{x}, \omega_\nu), \quad (4.2.24)$$

$$\eta'_\nu(\mathbf{x}) \equiv \frac{d\eta^{(1)}}{d\omega}(\mathbf{x}, \omega_\nu) - \omega_\nu \frac{d^2\eta^{(1)}}{d\omega^2}(\mathbf{x}, \omega_\nu), \quad (4.2.25)$$

$$\eta''_\nu(\mathbf{x}) \equiv \frac{d^2\eta^{(1)}}{d\omega^2}(\mathbf{x}, \omega_\nu). \quad (4.2.26)$$

Ahora consideremos la ecuación de onda que satisface  $\Lambda^\nu$  y la cantidad  $\exp(-i\omega_\nu\tau)$  como una función que varía lentamente en  $\tau$ , entonces expandimos en una serie de Taylor en  $\tau$  hasta segundo orden. Haciendo esto se encuentra

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\tau \eta^{(1)}(\tau) \exp[i\omega_\nu\tau] \left[ \exp(-i\omega_\nu\tau) \nabla \times \Lambda^\nu(t-\tau) \right] \\ & \cong \int_0^\infty d\tau \eta^{(1)}(\tau) \exp(i\omega_\nu\tau) \nabla \times \left[ \Lambda^\nu(t) - \tau[\dot{\Lambda}^\nu(t) - i\omega_\nu \Lambda^\nu(t)] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\tau^2[\ddot{\Lambda}^\nu(t) + 2i\omega_\nu \dot{\Lambda}^\nu(t) - \omega_\nu^2 \Lambda^\nu(t)] \right] \\ & \cong \eta_\nu \Lambda^\nu(t) + i\eta'_\nu \dot{\Lambda}^\nu(t) - \frac{1}{2}\eta''_\nu \ddot{\Lambda}^\nu(t). \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Sustituyendo esta expansión en la ecuación de onda ec. (4.2.20) se obtiene

$$-\ddot{\Lambda} = \nabla \times [\eta_\nu \nabla \times \Lambda^\nu + i\eta'_\nu \nabla \times \dot{\Lambda}^\nu - \frac{1}{2}\eta''_\nu \ddot{\Lambda}^\nu], \quad (4.2.28)$$

la cual es una ecuación local para  $\Lambda^\nu$  que a su vez puede derivarse de una densidad lagrangiana local.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [2\mu_0(\dot{\Lambda}^{-\nu}) \cdot \dot{\Lambda}^\nu - 2(\nabla \times \dot{\Lambda}^{-\nu}) \cdot \eta_\nu(\nabla \times \Lambda^\nu) - i(\nabla \times \Lambda^{-\nu}) \cdot \eta'_\nu(\nabla \times \dot{\Lambda}^\nu) \\ & + i(\nabla \times \Lambda^\nu) \cdot \eta'_\nu(\nabla \times \dot{\Lambda}^{-\nu}) - (\nabla \times \Lambda^{-\nu}) \cdot \eta''_\nu(\nabla \times \dot{\Lambda}^\nu)]. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

La ecuación de movimiento para  $\Lambda^\nu$  se obtiene haciendo variaciones sobre la acción, o lo que es lo mismo

$$\delta \int dt \int d^3x \mathcal{L} = 0. \quad (4.2.30)$$

Con ello las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Lambda}_j^\nu} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Lambda_j^\nu)} \right) + \sum_k^3 \partial_t \partial_k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \partial_k \Lambda_j^\nu)} \right) = 0. \quad (4.2.31)$$

El momento canónico  $\Pi^\nu$  está dado por

$$\Pi^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Lambda}_j^\nu} - \sum_k \partial_k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \dot{\Lambda}_j^\nu)} \right), \quad (4.2.32)$$

con lo cual

$$\Pi^\nu = \mu_0 \dot{\Lambda}^{-\nu} - \frac{1}{2} \nabla \times [\eta_\nu'' (\nabla \times \dot{\Lambda}^{-\nu}) + i \eta'_\nu (\nabla \times \Lambda^{-\nu})]. \quad (4.2.33)$$

Finalmente, de la lagrangiana y el momento canónico se encuentra la densidad hamiltoniana

$$\mathfrak{H} = \Pi^\nu \cdot \dot{\Lambda}^\nu + \Pi^{-\nu} \cdot \dot{\Lambda}^{-\nu} - \mathcal{L}. \quad (4.2.34)$$

Integrando esta ecuación sobre el volumen a cuantizar se obtiene el hamiltoniano

$$H = \int d^3x [\mu_0 \dot{\Lambda}^{-\nu} \cdot \dot{\Lambda}^\nu + (\nabla \times \Lambda^{-\nu} \cdot \eta_\nu (\nabla \Lambda^\nu) - \frac{1}{2} (\nabla \times \dot{\Lambda}^{-\nu} \eta''_\nu (\nabla \times \dot{\Lambda}^\nu))]. \quad (4.2.35)$$

Este hamiltoniano es la energía de un campo clásico en un medio dieléctrico lineal y dispersivo. ¿Qué pasa si el medio es no lineal? En este caso se puede considerar que los términos de orden superior de la susceptibilidad están libres de dispersión, por lo cual no se tienen los problemas de no localidad que se trajeron anteriormente con el término lineal y es posible generalizar el hamiltoniano de la ec. (4.2.35) agregando los términos

$$-\int d^3x \left[ \frac{1}{3} \mathbf{D} : \eta^{(2)} : \mathbf{DD} + \frac{1}{4} \mathbf{D} : \eta^{(3)} : \mathbf{DDD} \right]. \quad (4.2.36)$$

En este punto puede ser intuitivo imponer una relación de conmutación similar a la ec. (4.2.12):

$$[\Lambda_j^\nu(\mathbf{x}, t), \Pi_{j'}^\nu(\mathbf{x}', t)] = i \delta_{jj'}^{(tr)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.2.37)$$

Sin embargo, para que esto se cumpla, los campos deben tener componentes de Fourier de frecuencias arbitrarias, pero al inicio para evitar la no localidad impusimos que  $\Lambda^\nu$  tuviera un ancho de banda, es decir, está restringido a tomar valores de frecuencias alrededor de  $\omega_\nu$ . Una alternativa es expandir el campo en términos de modos espaciales y utilizar los coeficientes de la expansión como coordenadas. Uno encuentra el momento canónico correspondiente para cada coordenada y luego impone la relación habitual de conmutación entre coordenadas y momentos.

Como nuestro propósito es describir la propagación de un campo a través de una fibra óptica, supongamos que el campo consiste en ondas planas que se propagan en la dirección  $x$  y están polarizadas en la dirección  $y$ . En este caso, el campo  $\Lambda(x, t)$  es una función escalar de una sola coordenada espacial, esto significa que  $\nabla \times \Lambda$  se convierte en  $\partial_x \Lambda \hat{z}$  y las integrales sobre el volumen de cuantización se reemplazan por  $A \int_0^l dx$ , donde  $V = l^3$  y  $A = l^2$ . Si además suponemos que la no linealidad presente está descrita por  $\eta^{(3)}$  (materiales donde  $\eta^{(2)} = 0$ , los cuales son llamados centrosimétricos) y el medio es homogéneo, encontramos que el hamiltoniano es

$$H = A \int dx \left[ \mu_0 \dot{\Lambda}^{-\nu} \dot{\Lambda}^\nu + \eta_\nu (\partial_x \Lambda^\nu) (\partial_x \Lambda^{-\nu}) - \frac{1}{2} \eta''_\nu (\partial_x \dot{\Lambda}^\nu) (\partial_x \dot{\Lambda}^{-\nu}) + \frac{1}{4} \eta^{(3)} [\partial_x (\Lambda^\nu + \Lambda^{-\nu})]^4 \right]. \quad (4.2.38)$$

Como se mencionó, el campo  $\Lambda$  es una superposición de la forma

$$\Lambda^\nu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \lambda_k \exp(ikx). \quad (4.2.39)$$

Reescribimos la densidad lagrangiana en términos de  $\lambda_k$ , como

$$\mathcal{L}_0 = \sum_k [\dot{\lambda}_k^* (\mu_0 - \frac{1}{2} k^2 \eta''_\nu) \dot{\lambda}_k - k^2 \lambda_k^* \eta_\nu \lambda_k - \frac{i}{2} k^2 \eta'_\nu (\lambda_k^* \dot{\lambda}_k - \dot{\lambda}_k^* \lambda_k)]. \quad (4.2.40)$$

Tratando a  $\lambda_k$  y  $\lambda_k^*$  como coordenadas independientes se encuentra que sus momentos canónicos conjugados de  $\lambda_k$  son

$$\pi_k = (\mu_0 - \frac{1}{2} k^2 \eta''_\nu) \dot{\lambda}_k^* - \frac{i}{2} k^2 \eta'_\nu \lambda_k^*, \quad (4.2.41)$$

$$\pi_k^* = (\mu_0 - \frac{1}{2} k^2 \eta''_\nu) \dot{\lambda}_k + \frac{i}{2} k^2 \eta'_\nu \lambda_k. \quad (4.2.42)$$

respectivamente. Ahora, la teoría se cuantiza imponiendo

$$[\lambda_k, \pi_{k'}] = i\hbar \delta_{k,k'} \quad [\lambda_k^*, \pi_{k'}^*] = i\hbar \delta_{k,k'}, \quad (4.2.43)$$

con lo cual, es posible definir dos conjuntos de operadores de creación y aniquilación

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ A_k \lambda_k + i \left( \frac{i}{A_k^*} \right) \pi_k^* \right], \quad b_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[ A_k \lambda_k - i \left( \frac{i}{A_k^*} \right) \pi_k^* \right], \quad (4.2.44)$$

donde  $A_k = [(\mu_0 - k^2 \eta''_\nu / 2) k^2 \eta_{nu} + k^4 (\eta'_\nu)^2]^{1/4}$ . Si expandemos la parte lineal en el hamiltoniano de la ec. (4.2.1) con la definición de los operadores dados en la ecuación anterior se tiene

$$H_0 = \hbar \sum_k [\omega_+(k) a_k^\dagger a_k + \omega_-(k) b_k^\dagger b_k], \quad (4.2.45)$$

las frecuencias  $\omega_{\pm}$  son solución a la ecuación

$$\mu_0\omega_{\pm}^2 = k^2(\eta_{\nu} \pm \omega_{\pm}\eta_{\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\pm}^2\eta_{\nu}''). \quad (4.2.46)$$

Note que la expresión entre paréntesis es similar a la expansión de  $\eta^{(1)}(\omega)$  en la ec. (4.2.23) si el signo positivo es usado. Debido que  $\eta^{(1)}(\omega) = 1/\epsilon(\omega)$ , para  $\omega_+$  es aproximadamente lo mismo que [Drummond and Ficek, 2013]:

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu_0\epsilon(\omega)}}, \quad (4.2.47)$$

que es la relación usual entre  $\omega$  y  $k$  para un campo que se propaga en un medio dieléctrico lineal. De forma inmediata nos podemos preguntar: ¿qué se puede decir de  $\omega_-$  y  $b_k$ ? De la ec. (4.2.44) se deduce que

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{\hbar}}{A_k\sqrt{2}}(a_k + b_k^{\dagger}), \quad (4.2.48)$$

mientras que de la ec. (4.2.45) se deduce que  $b_k \sim \exp(-i\omega_- t)$ . Ahora recordemos que las frecuencias de interés son alrededor de  $\omega_{\nu}$ , lo que implica que el término  $b_k^{\dagger}$  en  $\lambda_k$  tiene una dependencia temporal dada aproximadamente por  $\exp(i\omega_{\nu}t)$ . Esto lo coloca fuera del ancho de banda del campo  $\Lambda^{\nu}$ . Para ser consistentes con la teoría debemos asumir que todos los modos  $b_k$  están en el estado de vacío y por tanto se pueden eliminar. Esto implica que el hamiltoniano completo es

$$H = \hbar \sum_k \omega_+(k) a_k^{\dagger} a_k + \frac{1}{4} \eta^{(3)} \int dx [\partial_x (\Lambda^{\nu} + \Lambda^{\nu\dagger})]^4, \quad (4.2.49)$$

de la ec. (4.2.48) se reescribe la definición de  $\Lambda^{\nu}$  dada en la ec. (4.2.39)

$$\Lambda^{\nu} = \frac{\hbar}{2V} \sum_k \frac{1}{A_k} a_k \exp(ikx). \quad (4.2.50)$$

La cantidad  $A_k$  se puede calcular en términos de la velocidad de grupo  $v_{gk} = d\omega_+/dk$ . Como vimos,  $\omega_+$  es una solución a la ecuación  $k^2\eta^{(1)}(\omega_+) = \mu_0\omega_+^2$ , donde  $\eta^{(1)}$  es dado por la ec. (4.2.23). Derivando ambos lados con respecto a  $\omega_+$  se tiene

$$k\eta^{(1)}(\omega_+) = \left( \mu_0\omega_+ - \frac{1}{2}k^2 \frac{d\eta^{(1)}}{d\omega_+} \right) \frac{d\omega_+}{dk}, \quad (4.2.51)$$

y haciendo uso de la ec. (4.2.46) y la definición de  $A_k$  se encuentra que

$$\mu_0\omega_+ - \frac{1}{2}k^2 \frac{d\eta^{(1)}}{d\omega_+} = \omega_+ (\mu_0 - \frac{1}{2}k^2\eta_{\nu}'') - \frac{1}{2}k^2\eta_{\nu}' = A_k^2, \quad (4.2.52)$$

de lo cual concluimos que

$$A_k = \sqrt{\frac{k\eta^{(1)}(\omega_+)}{v_{gk}}}. \quad (4.2.53)$$

Finalmente los campos son reescritos como

$$\mathbf{A}(x, t) = \sum_k \left[ \frac{\hbar e(\omega_+) v_{gk}}{2V k} \right]^{1/2} (a_k \exp(ikx) + a_k^\dagger \exp(-ikx)) \hat{y}, \quad (4.2.54)$$

$$\mathbf{B}(x, t) = i \sum_k \left[ \frac{\hbar e(\omega_+) v_{gk}}{2V} \right]^{1/2} (a_k \exp(ikx) - a_k^\dagger \exp(-ikx)) \hat{z}. \quad (4.2.55)$$

Con esto ya tenemos una teoría que es capaz de describir la propagación de un campo cuántico en un medio no lineal homogéneo, dispersivo y con susceptibilidad de tercer orden. Un material con estas características es una fibra óptica, la cual será usada para construir un medio móvil en el cual se propaga una perturbación.

Asumamos que el campo tiene componentes del número de onda alrededor de  $k_1$ . Primero, definimos el campo

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \exp[i(k - k_1)x + i\omega_1 t] a_k, \quad (4.2.56)$$

donde  $\omega_1 = \omega(k_1)$ . El campo cumple una relación de commutación similar a la ec. (2.2.1),

$$[\Psi(x, t), \Psi^\dagger(x', t)] = \tilde{\delta}(x - x'), \quad (4.2.57)$$

donde  $\tilde{\delta}$  es una versión suave de la delta de Dirac, debido a que el campo tiene un ancho de banda. Invirtiendo la relación de  $\Psi(x, t)$  se obtiene

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \int dx \exp[-i(k - k_1)x + \omega_1 t] \Psi(x, t). \quad (4.2.58)$$

Podemos usar esta expresión en el hamiltoniano ec. (4.2.45) para expresarlo en términos del campo  $\Psi(x, t)$ . Para ello note que

$$\sum_k \omega(k) \exp[i(k - k_1)(x - x')] = \frac{1}{L} \int dx \int dx' \left[ \sum_k \omega(k) \exp[i(k - k_1)(x - x')] \right] \Psi^\dagger(x, t) \Psi(x', t).$$

Expandiendo  $\omega(k)$  alrededor de  $k_1$  se tiene

$$\omega(k) = \omega_1 + (k - k_1)v_1 + \frac{1}{2}(k - k_1)^2 \omega''_1 + \dots. \quad (4.2.59)$$

Recuerde que  $v_1$  es la velocidad de grupo en  $k_1$  y  $\omega''_1$  es la segunda derivada de  $\omega(k)$  evaluada en  $k_1$ . Esto permite

$$\begin{aligned} \sum_k \omega(k) \exp[i(k - k_1)(x - x')] \\ \cong \sum_k [\omega_1 + \frac{i}{2}v_1(\partial_x - \partial_{x'}) + \frac{1}{2}\omega''_1\partial_x\partial_{x'}] \exp[i(k - k_1)(x - x')] \\ \cong [\omega_1 + \frac{i}{2}v_1(\partial_x - \partial_{x'}) + \frac{1}{2}\omega''_1\partial_x\partial_{x'}]\delta(x - x'), \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

y a su vez escribir la parte lineal del hamiltoniano de la forma

$$H_L = \hbar \int dx \left[ \omega_1 \Psi^\dagger \Psi + \frac{i}{2}v_1 \left( (\partial_x \Psi^\dagger) \Psi - \Psi^\dagger (\partial_x \Psi) \right) + \frac{1}{2}\omega''_1 \partial_x \Psi^\dagger \partial_x \Psi \right], \quad (4.2.61)$$

además la parte no lineal del hamiltoniano como

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\eta^{(3)}A \int dx \mathbf{D}^4 \cong \frac{1}{4}\eta^{(3)}A \left[ \left( \frac{\hbar}{2V} \right) k_1 v_1 \epsilon L \right]^2 \int dx [\exp[i(k_1 x - \omega_1 t)] \Psi(x, t) \\ - \exp[-i(k_1 x - \omega_1 t)] \Psi^\dagger(x, t)]^4, \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

manteniendo sólo los términos que varían lentamente, obtenemos

$$H_{NL} \cong \frac{3\eta^{(3)}}{8A} (\hbar k_1 v_1 \epsilon)^2 \int \Psi^\dagger \Psi^\dagger \Psi \Psi. \quad (4.2.63)$$

El hamiltoniano total es entonces la suma de los dos términos  $H = H_L + H_{NL}$ .

### 4.3. Solitón cuántico

Como veremos en breve, el hamiltoniano anterior da lugar a solitones cuánticos. Un solitón es un pulso que se propaga sin cambiar su forma en un medio dispersivo y no lineal [Kivshar and Agrawal, 2003], en nuestro caso el medio es una fibra óptica. Para resolver el hamiltoniano anterior como primer paso trabajemos en el marco de interacción donde

$$H_0 = \hbar \int dx \omega_1 \Psi^\dagger \Psi \quad (4.3.1)$$

y definiendo los operadores

$$\Psi_I = \exp(-iH_0t/\hbar)\Psi \exp(iH_0t/\hbar), \quad H_I = \exp(-iH_0t/\hbar)H \exp(iH_0t/\hbar), \quad (4.3.2)$$

con esto se encuentra que

$$H_I = \frac{\hbar}{2} \int dx \left\{ iv_1 \left[ (\partial_x \Psi_I^\dagger) \Psi_I - \Psi_I^\dagger (\partial_x \Psi_I) \right] + \frac{1}{2}\omega''_1 \partial_x \Psi_I^\dagger \partial_x \Psi_I - \kappa \Psi_I^\dagger \Psi_I^\dagger \Psi_I \Psi_I \right\}, \quad (4.3.3)$$

donde se ha establecido la constante

$$\kappa = \frac{\hbar n_2 \omega_1^2 v_1^2}{Ac}, \quad (4.3.4)$$

$n_2$  es el cambio del índice de refracción por unidad de intensidad de campo que une este fenómeno con el efecto Kerr óptico<sup>2</sup> y  $A$  es el área transversal efectiva del material por donde se propaga el mismo.

El índice de refracción del material depende de si los átomos están en su estado fundamental o excitado. Además del índice de refracción (lineal) del material, aparece un segundo índice de refracción (no lineal) que depende de la intensidad del pulso incidente. Por tanto el efecto Kerr óptico es el resultado de la interacción de la luz con la materia. Al pasar un pulso óptico dentro de un material se excitan sus átomos, que más tarde se relajan a su estado fundamental. La constante  $\kappa$  representa el acoplamiento no lineal, similar a la constante  $g$  en BECs que indica la intensidad del acople no lineal entre los átomos en el condensado.

Usando las ecuaciones (4.3.2) y (4.3.3) se obtiene la ecuación de movimiento para el campo  $\Psi_I$

$$(\partial_t + v\partial_x)\Psi_I = \left[ \frac{i\omega''}{2}\partial_x^2\Psi_I + i\kappa\Psi_I^\dagger\Psi_I \right] \Psi_I. \quad (4.3.5)$$

De aquí en adelante, eliminaremos el subíndice  $I$  en el entendimiento de que todos los operadores están definidos en el marco de interacción. La combinación de derivadas de primer orden en la ec. (4.3.5) sugiere fuertemente la utilidad de la siguiente transformación de coordenadas

$$\tau = t - x\beta_1, \quad x' = x, \quad (4.3.6)$$

$\beta_1$  es simplemente el inverso de la velocidad de grupo del pulso<sup>3</sup>, esta es una transformación que introduce un marco de referencia que se mueve con el pulso; más adelante discutiremos brevemente esta transformación. Las derivadas parciales de las diversas coordenadas se relacionan de la siguiente manera

$$\partial_x = \partial_{x'} - \beta_1\partial_\tau, \quad \partial_t = \partial_\tau. \quad (4.3.7)$$

Sustituyendo lo anterior en la ec. (4.3.5) y teniendo en cuenta que siempre que  $x \gg t/\beta_1$ , la derivada espacial puede ser despreciable [Drummond and Hillery, 2014]:

---

<sup>2</sup>En óptica se tiene que el índice de refracción es  $n = n_0 + n_2 I$ , donde  $n_0$  es el índice de refracción lineal y  $n_2$  es el índice de refracción no lineal y da cuenta del estado electrónico de los electrones en el material.

<sup>3</sup>La relación de dispersión en óptica es  $\beta(\omega)$  con  $\beta$  el número de onda, mientras en BEC es  $\omega(k)$ . En óptica  $\beta$  rara vez se conoce de forma exacta, por tanto es conveniente expandir en series de Taylor alrededor de una frecuencia de interés  $\omega_1$ , tal que  $\beta(\omega) \approx \beta_0 + (\omega - \omega_1)\beta_1 + (\omega - \omega_1)^2\beta_2/2$ . Con  $\beta_1 = \partial_\omega\beta = v_1^{-1}$ , y  $\beta_2 = -\omega''\beta_1^3$ .

$$i\partial_{x'}\Psi - \frac{\beta_2}{2}\partial_{\tau}^2\Psi + \kappa\beta_1\Psi^+\Psi\Psi = 0. \quad (4.3.8)$$

Esta es una ecuación que posee una forma muy similar a la ecuación de Schrödinger con un potencial que depende de la densidad de fotones  $\Psi^+\Psi$ . Por esta razón, usualmente se conoce como ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) que describe la evolución de un campo cuántico en un medio no lineal con susceptibilidad de tercer orden y efectos dispersivos.

La NLSE dada en la ec. (4.3.8) es equivalente a la ecuación de Gross-Pitaevskii (2.2.6) cuando no hay potencial externo e invirtiendo los papeles de las coordenada del espacio y el tiempo. Observe que la anterior equivalencia entre ecuaciones nos permite expandir los análogos de radiación de Hawking en el contexto de sistemas acústicos al contexto de sistemas ópticos.

Como se mencionó antes, una de las propiedades más importantes de la NLSE es que admite soluciones estables cuyas formas no cambian durante su evolución, logrando un equilibrio entre los efectos dispersivos y no lineales del material. Estas soluciones son posibles cuando  $\beta_2 < 0$ . Una solución estable es de la forma

$$\Psi(x', \tau) = \sqrt{n} \operatorname{sech} \left( \frac{\tau}{T_s} \right) \exp \left( \frac{i|\beta_2|}{2T_s^2} x' \right), \quad (4.3.9)$$

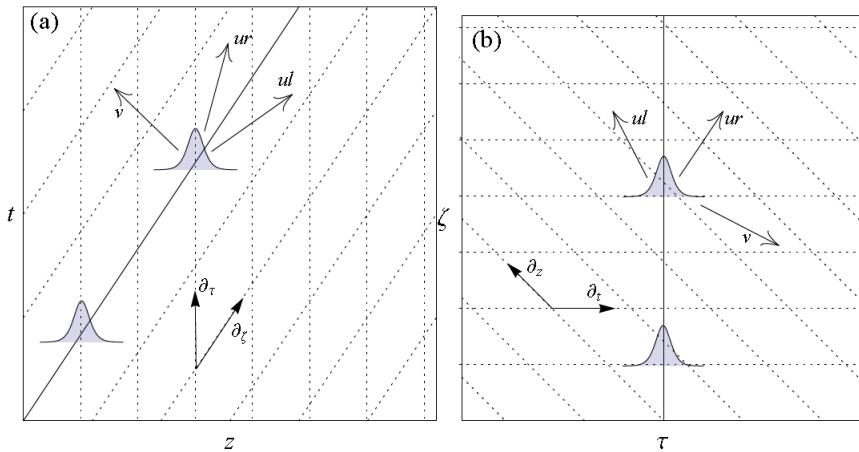
donde  $n = |\beta_2|/\kappa\beta_1 T_s^2$ , representa la densidad de probabilidad de encontrar el campo con  $n$  número de fotones. El parámetro  $T_s$  caracteriza el “ancho” temporal del solitón. Como  $\beta_1, \beta_2$  y  $\kappa$  son fijos para cada material, la intensidad máxima del solitón está completamente determinada por  $T_s$ , siendo mayor a medida que  $T_s$  es menor. Así, los solitones varían entre pulsos largos y débiles y pulsos cortos e intensos.

### 4.3.1. Transformación entre marcos de referencia

Examinemos la configuración de un pulso intenso que se propaga en una fibra óptica y su efecto sobre un fluctuación o linealización a una solución de la ec. (4.3.8). Estudiar la relación de dispersión de esta fluctuación es mucho más fácil en un marco de referencia en el que el pulso es estacionario. Dicho marco se construyó a través de la siguiente transformación coordenadas dada en las ecs. (4.3.6) pero en óptica es mucho más útil escalar la distancia de propagación  $x$  a un tiempo de propagación  $\zeta$  de la forma

$$\tau = t - x\beta_1, \quad \zeta = x\beta_1, \quad (4.3.10)$$

$\tau$  suele llamarse el tiempo de retardo. En la figura 4.1 se muestra cómo es la evolución de un solitón descrito en las coordenadas  $(x, t)$  y  $(\zeta, \tau)$ . Esta transformación



**Figura 4.1:** Solitón propagándose en el interior de una fibra óptica descrito con las coordenadas  $(x, t)$  de las ecs. (4.3.6)(a) y  $(\zeta, \tau)$  de las ecs. (4.3.10). Estas imágenes fueron tomadas de [Robertson, 2011].

es muy similar a una transformación galileana, diferenciándose en que los roles del espacio y tiempo se han invertido.

Las derivadas parciales en el marco comóvil  $(\zeta, \tau)$  y de laboratorio  $(x, t)$  están entonces relacionadas a partir de

$$\partial_x = \beta_1(\partial_\zeta - \partial_\tau) \quad \partial_t = \partial_\tau. \quad (4.3.11)$$

Esto nos permite reescribir la ec. (4.3.8) como

$$i\partial_\zeta\Psi - \frac{\beta_2}{2\beta_1}\partial_\tau^2 + \kappa\Psi^\dagger\Psi\Psi = 0. \quad (4.3.12)$$

Además, fácilmente podemos calcular la relación entre frecuencias o efecto Doppler entre los diferentes marcos haciendo uso de la ec.(4.3.11). Para ello, escribamos los operadores en derivadas parciales bajo la transformada de Fourier, es decir,  $\partial_x = i\beta$ ,  $\partial_t = -i\omega$  y  $\partial_\zeta = -i\omega'$ . Reemplazando lo anterior en la ec. (4.3.11) se obtiene

$$\omega' = \omega - \frac{\beta(\omega)}{\beta_1} = \omega - u\beta(\omega). \quad (4.3.13)$$

En la última expresión se ha usado la convención de llamar la velocidad de grupo del pulso por  $u = \beta_1^{-1}$ . Se demostrará más adelante que  $\omega'$ , representa la frecuencia en el marco comóvil y que es la variable conjugada de la coordenada  $\zeta$ , es una cantidad conservada y es la razón principal de describir la evolución de un solitón en  $\zeta$  y no en  $x$ .

### 4.3.2. Linealización

Consideremos la propagación un campo dentro de la fibra óptica tal que su dinámica está descrita por la ec. (4.3.8). En el caso de que la radiación que ingresa al material no lineal sea una onda continua, comúnmente llamada pulso de bombeo, su amplitud  $\Phi(x, \tau)$  es independiente de  $\tau$  en el extremo de la fibra, es decir, en  $x = 0$ . Suponiendo que su amplitud permanece independiente de  $\tau$  también en el interior de la fibra, esta onda puede ser escrita como

$$\Phi = \sqrt{n} \exp(i\kappa\beta_1 nx). \quad (4.3.14)$$

¿Será esta solución estable ante pequeñas fluctuaciones? Para responder a esta pregunta, perturbamos el estado estable ligeramente tal que

$$\Psi(x, \tau) = \Phi + \exp(i\kappa\beta_1 nx)\phi(x, \tau) = \exp(i\kappa\beta_1 nx) \left[ \sqrt{n} + \phi(x, \tau) \right], \quad (4.3.15)$$

y examinamos la propagación de la fluctuación  $\phi(x, \tau)$  en la ec. (4.3.8).

Observe que

$$\partial_x \Psi = i\kappa n \beta_1 \exp[i\kappa n \beta_1 x] \left[ \sqrt{n} + \phi(x, \tau) \right] + \exp(i\kappa n \beta_1 x) \phi, \quad (4.3.16)$$

$$\partial_\tau^2 \Psi = \exp(i\kappa n x) \partial_\tau^2 \phi, \quad (4.3.17)$$

$$|\Psi|^2 \Psi = \exp(i\kappa n \beta_1 x) \left[ n\sqrt{n} + 2n\phi + n\phi^* + \sqrt{n}|\phi|^2 + \sqrt{n}\phi^2 \right], \quad (4.3.18)$$

reemplazando la ec. (4.3.15) y los resultados obtenidos en la ec. (4.3.8) y aproximando a orden lineal en la perturbación  $\phi$  se encuentran dos ecuaciones, la primera

$$i\partial_x \Phi + \kappa\beta_1 |\Phi|^2 \Phi = 0, \quad (4.3.19)$$

es la ecuación que sigue la onda continua al propagarse en el interior de la fibra, la segunda

$$i\partial_x \phi - \frac{\beta_2}{2} \partial_\tau^2 \phi + \kappa\beta_1 n(\phi + \phi^*) = 0, \quad (4.3.20)$$

es la ecuación que sigue una fluctuación lineal que se propaga sobre un campo de fondo representado por  $n = |\Phi|^2$ . Igual que se realizó en el caso acústico, se buscan soluciones de ondas planas de la forma

$$\phi(x, \tau) = a_1 \exp[i(\beta x - \omega\tau)] + a_2^* \exp[-i(\beta x - \omega\tau)]. \quad (4.3.21)$$

Primero calculemos los términos

$$\begin{aligned} \partial_x \phi &= ia_1 \beta \exp[i(\beta x - \omega\tau)] - i\beta a_2^* \exp[-i(\beta x - \omega\tau)] \\ \partial_\tau^2 \phi &= -\omega^2 a_1 \exp[i(\beta x - \omega\tau)] - \omega^2 a_2^* \exp[-i(\beta x - \omega\tau)]. \end{aligned}$$

Reemplazando las ecs. (4.3.21) y ecs. (4.3.22) en (4.3.20) se obtiene

$$\begin{aligned} & \kappa\beta_1 n \left( (a_1 + a_2) \exp[(\beta x - \omega\tau)] + (a_1^* + a_2^*) \exp[-(\beta x - \omega\tau)] \right) \\ & - \frac{\beta_2}{2} \left( -\omega^2 a_1 \exp[(\beta x - \omega\tau)] - \omega^2 a_2^* \exp[-(\beta x - \omega\tau)] \right) \\ & - \beta a_1 \exp[(\beta x - \omega\tau)] + \beta a_2^* \exp[-(\beta x - \omega\tau)] = 0. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Separando en términos linealmente independientes o por frecuencias negativas y positivas se tiene, para  $\exp[i(\beta x - \omega\tau)]$

$$-\beta a_1 + \frac{\beta_2}{2} \omega^2 a_1 + \kappa\beta_1 n a_1 + \kappa\beta_1 n a_2 = 0, \quad (4.3.23)$$

y para  $\exp[-i(\beta x - \omega\tau)]$

$$\beta a_2^* + \frac{\beta_2}{2} \omega^2 a_2^* + \kappa\beta_1 n a_2^* + \kappa\beta_1 n a_1^* = 0. \quad (4.3.24)$$

Reescribiendo lo anterior en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -\beta + \frac{\beta_2}{2} \omega^2 + \kappa\beta_1 n & \kappa\beta_1 n \\ \kappa\beta_1 n & \beta + \frac{\beta_2}{2} \omega^2 + \kappa\beta_1 n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.25)$$

Los términos por fuera de la diagonal mezclan modos de frecuencia negativa con modos de frecuencia positiva que es un ingrediente necesario para el proceso Hawking. El anterior problema tiene soluciones no triviales cuando el determinante es nulo, lo cual se cumple cuando

$$\beta^2 = \beta_2 \kappa \beta_1 n \omega^2 + \frac{\beta_2^2}{4} \omega^4, \quad (4.3.26)$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (b_1^2 + b_2 \omega^2), \quad (4.3.27)$$

donde  $b_1^2 = c^2 \beta_2 \kappa \beta_1 n$  y  $b_2 = c^2 \beta_2^2 / 4$  caracterizan la relación de dispersión a partir de constantes propias del material y la velocidad de grupo del pulso que entra al mismo. Este tipo de dispersión se conoce en la literatura como dispersión normal<sup>4</sup> y será una de las diferencias principales al comparar el análogo óptico con el acústico. La ec. (4.3.27) es la ec. (9) en [Gaona-Reyes and Bermudez \[2017\]](#). En este artículo,  $b_1$  y  $b_2$  son los parámetros que ajustan la mejor curva alrededor de la frecuencia de horizonte para la relación de dispersión encontrada experimentalmente para un material como las fibras de cristal fotónico (PCF).

---

<sup>4</sup>Un material tiene dispersión normal cuando la velocidad de grupo ( $\partial\omega/\partial\beta$ ) para un modo decrece a medida que la frecuencia crece.

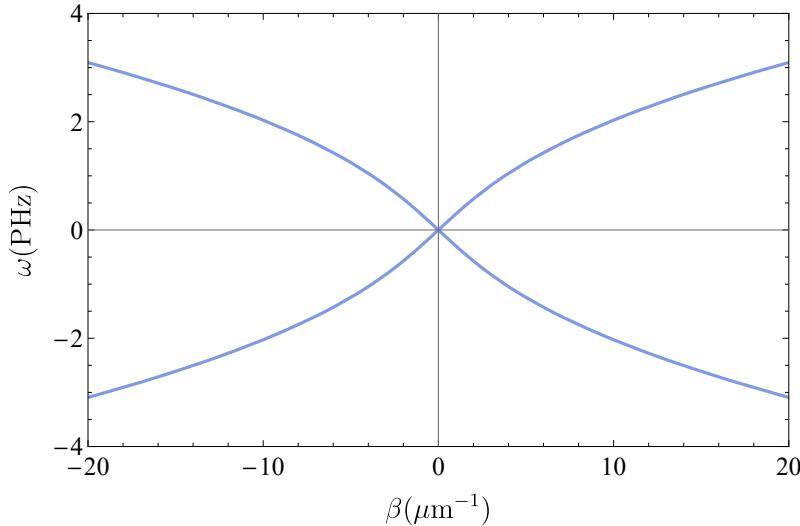


Figura 4.2: Relación de dispersión normal dada por la ec. (4.3.27).

### 4.3.3. Relación de dispersión

El propósito es encontrar la frecuencia  $\omega'$  en el marco comóvil cuando se considera el efecto de una perturbación en el índice de refracción<sup>5</sup>. Usando la relación de efecto Doppler en la ec. (4.3.13) e ignorando por ahora el factor de Lorentz, se puede escribir

$$\omega' = \omega - u(\beta + \frac{\omega}{c}\delta n) = \omega - u\frac{\omega}{c}\left(\sqrt{b_1^2 + b_2\omega^2} + \delta n\right). \quad (4.3.28)$$

Reorganizando la última ecuación se encuentra la relación de dispersión

$$\left[W' - Wv(\tau)\right]^2 = W^2 + \frac{W^4}{\Omega_0^2}, \quad (4.3.29)$$

donde  $W = b_1\omega$ , las constantes  $W'$  y  $\Omega_0$  son dadas por las relaciones  $W' = \omega'n_{g0}$ ,  $\Omega_0^2 = b_1^4/b_2$  y definimos la *velocidad* del medio óptico como  $v(\tau) = (-n_{g0} + \delta n)/b_1$  que es el cambio del índice de refracción escalado por  $b_1$ , llamamos a esta cantidad adimensional *velocidad*, en analogía con el caso acústico. Aquí hemos empleado la definición usual del índice de grupo  $n_{g0} = c/u$ . Con esto surge la pregunta, ¿qué es lo que fluye en el medio? Observe que aquí realmente no hay un medio en movimiento, el cambio de velocidad se debe ahora a la dispersión. En la sección 4.4 el perfil de velocidades es nuevamente negativo, y con éste se analizará la configuración de láser óptico de agujeros negros en la siguiente sección. Reorganizar la relación de dispersión de la ec. (4.3.29) nos permite mostrar que tiene la misma estructura que el caso acústico con BEC. Para no saturar la notación en lo que sigue, absorberemos

<sup>5</sup>Es común definir el óptica, el número de onda en términos del índice de refracción:  $\beta = n(\omega)\omega/c$ , tal que un cambio en el índice, ocasiona que el número de onda se vea afectado de la forma  $\beta = (n(\omega) + \delta n)\omega/c$ .

la constante  $n_{g0}$  en  $\omega'$  teniendo así  $W' \rightarrow \omega'$  y haremos sin pérdida de generalidad  $b_1 = 1$ , de que aquí en adelante la relación de dispersión en el caso óptico será

$$\left[ \omega' - \omega v(\tau) \right]^2 = \omega^2 + \frac{\omega^4}{\Omega_0^2}, \quad (4.3.30)$$

toda la información de la no linealidad del sistema está contenida en  $\Omega_0$ , que representa la escala de dispersión del mismo modo que  $k_0$  en el caso acústico.

En el caso acústico, donde  $\omega$  era la frecuencia de una perturbación generada en el sistema, ésta se mantiene constante en el marco de laboratorio. En el caso óptico, la frecuencia que se mantiene constante es  $\omega'$  que mide las oscilaciones de la perturbación en el marco comóvil y es la razón fundamental por la cual trabajar dicho marco.

Por último, dado que la relación de dispersión es cuártica en  $\omega$ , indica que un modo a  $\omega'$  fija es

$$\phi = \exp[-i\omega'\zeta] \sum_j A_j \exp[-i\omega_j \tau]. \quad (4.3.31)$$

Alternativamente, es útil derivar la misma relación de dispersión a partir de una acción

$$S_\phi = \int d\zeta \mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d\zeta d\tau \left\{ [(\partial_\zeta - v(\tau)\partial_\tau)\phi]^2 + \phi \left( \partial_\tau^2 - \frac{\partial_\tau^4}{\Omega_0^2} \right) \phi \right\}, \quad (4.3.32)$$

aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange se produce la siguiente ecuación de movimiento

$$[\partial_\zeta - \partial_\tau v(\tau)][\partial_\zeta - v(\tau)\partial_\tau]\phi = \left( \partial_\tau^2 - \frac{\partial_\tau^4}{\Omega_0^2} \right) \phi. \quad (4.3.33)$$

Suponiendo que el perfil de velocidades es constante en cierta región del espacio se pueden proponer soluciones de ondas planas ec. (4.3.31) y encontrar la relación de dispersión dada en la ec. (4.3.30).

Cuando el campo escalar  $\phi$  en la acción ec. (4.3.32) es complejo, su lagrangiana  $\mathcal{L}$  es invariante con respecto a las transformaciones de norma  $\phi' = \exp[i\lambda]\phi$ . Por tanto existe una corriente conservada, de tal manera que su componente  $\zeta$  puede usarse para definir el siguiente producto interno

$$(\phi_1, \phi_2) = \frac{i\epsilon_0 c^2}{u\hbar} \int d\tau [\phi_1^*(\partial_\zeta - v(\tau)\partial_\tau)\phi_2 - \phi_2(\partial_\zeta - v(\tau)\partial_\tau)\phi_1^*], \quad (4.3.34)$$

el cual satisface  $\partial_\zeta(\phi, \phi) = 0$ , que es la conservación de la norma. Este producto interno coincide con el definido por Philbin et al. [2008] y Robertson [2011] excepto por el factor  $-1$ . Esta convención suele ser elegida para que los signos de la norma y frecuencia coincidan en el marco del laboratorio.

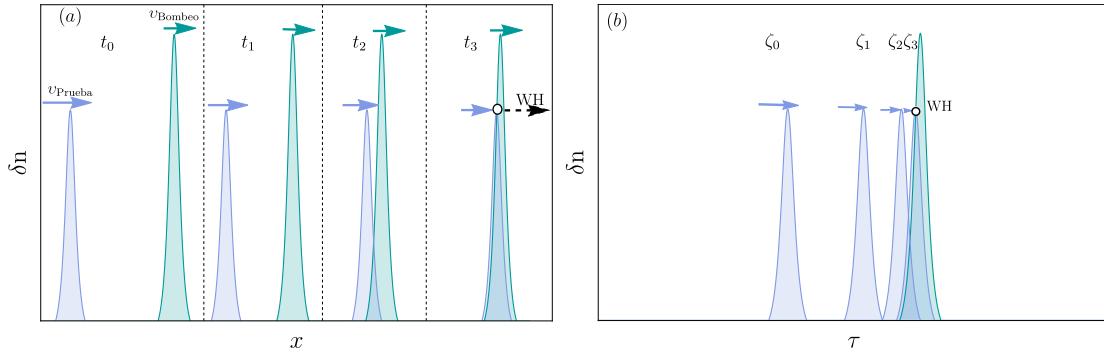
## 4.4. Configuración de un láser óptico de agujeros negros (OBHL)

En el capítulo 2 observamos que en sistemas acústicos la radiación de Hawking análoga confinada en el interior de dos horizontes sufre un proceso de autoamplificación. ¿Será posible obtener el mismo proceso de amplificación para la radiación cambiando de un sistema acústico a uno óptico? La respuesta es tratada en [Faccio et al. \[2012\]](#) y [Gaona-Reyes and Bermudez \[2017\]](#) y se describirá brevemente aquí. Se requiere una cavidad óptica resonante que actúe como amplificador y una relación de dispersión normal como la encontrada en la ec. (4.3.27). El análogo gravitatorio a esta cavidad podría ser el espacio-tiempo entre los horizontes de eventos de un agujero negro y un agujero blanco. Sin embargo, en lugar de agujeros astrofísicos se podrían utilizar sus análogos. Con una fibra óptica se pueden fabricar tanto agujeros negros (BH) ópticos como agujeros blancos (WH). El análogo óptico para horizontes más prometedor fue propuesto por [Philbin et al. \[2008\]](#) en pulsos de luz propagándose en una fibra óptica; donde los horizontes se obtienen en las ondas de choque que aparecen en los frentes de pulsos ópticos intensos en un material refractivo no lineal. Cabe destacar que con esta forma de crear horizontes en los análogos ópticos sólo se ha podido medir la RH de forma estimulada [[Drori et al., 2019](#)], pero aún continúa el reto de verificar el proceso espontáneo que es realmente el mecanismo de Hawking. El láser óptico de agujeros negros (OBHL) solo puede funcionar si la predicción de Hawking es correcta, lo que significa que si en un laboratorio se logra fabricar este tipo de láser se habrá demostrado la existencia de la RH en un experimento análogo.

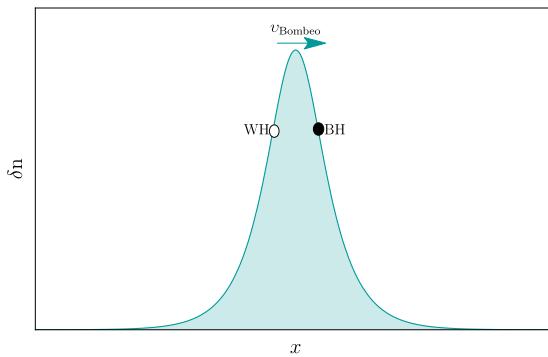
Para crear los horizontes en óptica se envía un *pulso de bombeo* a través de un material óptico no lineal en el que el índice de refracción depende de la intensidad del pulso que se propaga en el medio. Esta dependencia es de la forma

$$n(\omega, \tau) = n_0(\omega) + n_2 I(\tau) = n_0(\omega) + \delta n(\tau). \quad (4.4.1)$$

Por tanto, el índice efectivo  $n(\omega, \tau)$  depende tanto de la posición del pulso como de la frecuencia. Si además se envía un segundo pulso denominado *pulso de prueba* en la misma dirección que el primero y con una velocidad de grupo mayor pero cercana a la velocidad de grupo del pulso de bombeo, el segundo pulso al acercarse al primero disminuirá su velocidad ya que siente un índice de refracción que aumenta a medida que se propaga. Esta disminución en la velocidad puede ser tal que el segundo pulso nunca adelante al primero, creándose un análogo de WH. Para un observador sobre el pulso de bombeo el pulso de prueba se acerca a él pero nunca lo alcanza, i.e., existe una región en el espacio que es imposible de alcanzar para el pulso de prueba. En la figura 4.3 se muestra el comportamiento de los pulsos para un observador en los marcos de laboratorio y comóvil que se mueve con el pulso de bombeo.



**Figura 4.3:** Comportamiento para el pulso de prueba al acercarse al pulso de bombeo visto desde el marco de laboratorio (a) y desde el marco comóvil (b).

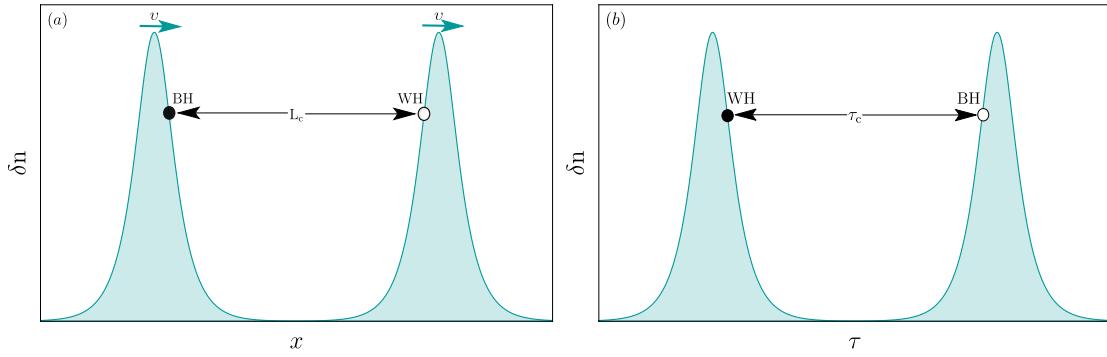


**Figura 4.4:** Un pulso de prueba propagándose en el interior del material no lineal genera un WH en el frente anterior y el BH estado en el frente posterior del pulso .

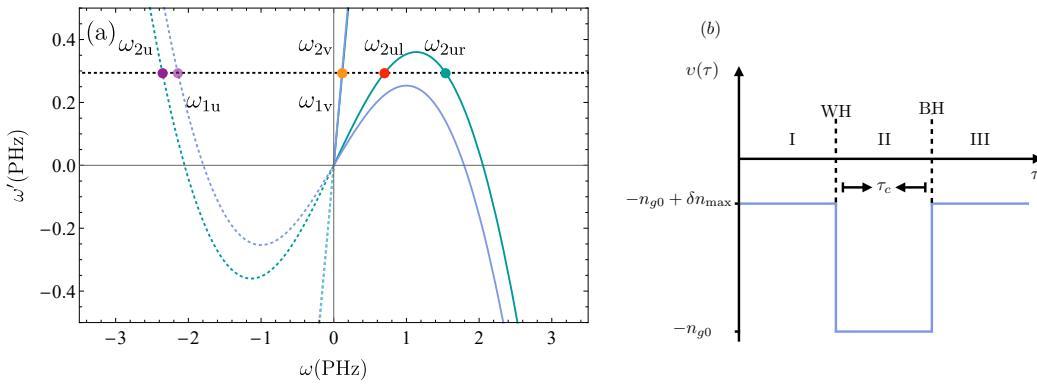
De forma similar se puede crear el análogo de BH cuando el pulso de prueba se envia en dirección opuesta al pulso de bombeo. Con este método el pulso de bombeo genera ambos horizontes, el WH en el frente anterior y el BH en el frente posterior del pulso, en la figura 4.4 se muestra esta situación.

Ahora que sabemos cómo crear horizontes por medio de pulsos ópticos es posible construir una cavidad para la configuración de OBHL. Esta se crea enviando dos pulsos con las mismas características en el interior de la fibra óptica, los pulsos deben de estar separados uno de otro una distancia  $L_c$  o un tiempo de retardo  $\tau_c$ . La cavidad será entonces la región entre los pulsos que se mueven en el interior de la fibra con la velocidad que se propagan los pulsos tal como se muestra en la figura 4.5(a). En un marco que se mueve con los pulsos la cavidad permanece en reposo. Matemáticamente esto se logra bajo el cambio de coordenadas dado en la ec. (4.3.10). Observe que el orden de los horizontes se intercambia tal como se muestra en la figura 4.5(b).

La cavidad es entonces una región entre un WH y BH que por simplicidad consideramos con  $\delta n = 0$  mientras que el exterior a la cavidad será la región con  $\delta n = \delta n_{\max}$ .



**Figura 4.5:** Cavidad formada por dos solitones vista en el marco de laboratorio (a) con coordenadas  $(x, t)$  y desde el marco comóvil (b) dado por las coordenadas  $(\tau, \zeta)$ . Observe que en el marco comóvil el orden de los horizontes se cambia y esto se debe al cambio de coordenadas dado en la ec. (4.3.10).



**Figura 4.6:** (a) Relación de dispersión en el marco comóvil. (b) Perfil de velocidad simplificado.

De la ec. (4.3.29) que es la relación de dispersión que sigue una fluctuación al propagarse en un medio no lineal y con dispersión, vemos que al aplicarse a la configuración de OBHL la cantidad  $v(\tau)$  define dos regiones: una región lenta que es el exterior de la cavidad y donde las fluctuaciones sienten un cambio del índice de refracción dado por  $v(\tau) = -n_{g0} + \delta n_{\max}$  y una región rápida donde la fluctuación se mueve a la velocidad de los pulsos que crearon la cavidad porque sienten que  $v(\tau) = -n_{g0}$ . Observe que  $v(\tau)$  representa un perfil de velocidad negativo y adimensional del medio no lineal y las fluctuaciones ópticas se propagan sobre este medio en movimiento tal como se estudio en el capítulo 2 con las fluctuaciones acústicas propagándose sobre un fluido en movimiento. Se presenta en la figura 4.6(a) la relación de dispersión de la ec. (4.3.29) cuando  $v(\tau)$  solo toma dos posibles dados en la figura 4.6(b), que es el perfil de velocidades más simple para analizar la dinámica de una fluctuación en la configuración de OBHL, que será el tema a tratar en el capítulo 5.

Por último, la construcción de la cavidad óptica se puede realizar también cambiando los dos solitones por un solitón oscuro o *dark soliton* [Weiner et al., 1988], el cual permite reproducir dos regiones con un índice de refracción diferente.



# RADIACIÓN DE HAWKING ANÁLOGA COMO UNA INESTABILIDAD EN UN OBHL

---

La propagación de la luz en medios no lineales como las fibras ópticas permite la existencia de solitones, i.e., pulsos de luz cuyo perfil de intensidad no cambia a lo largo del medio donde se propagan. La no linealidad del material permite la interacción entre estos pulsos y un paquete de ondas de menor intensidad (pulso de prueba) permitiendo así construir un análogo de horizonte de eventos, similar a los existentes en el contexto de gravitación.

Una predicción notable que surgió del estudio de los análogos de gravedad es que la combinación de un horizonte de agujero negro junto a un horizonte de agujero blanco lleva a un proceso de amplificación de la radiación que se encuentra entre ellos, muy similar a un láser, en donde la radiación rebota continuamente entre la cavidad teniendo como resultado la amplificación del campo.

El láser de agujeros negros (BHL) se propuso inicialmente para sistemas que exhiben una dispersión superlumínica o anómala, en los que la velocidad de grupo aumenta con la frecuencia, relación que cumplen los análogos acústicos como los condensados de Bose-Einstein (BECs) [Corley and Jacobson, 1999]. En estos sistemas, la cavidad donde el campo bosónico se amplifica se construye a partir de un cambio en la velocidad del fluido. Para llevar estas ideas al caso óptico, se requiere una relación de dispersión normal [Gaona-Reyes and Bermudez, 2017] y construir una cavidad no con un medio en movimiento, si no mediante las propiedades mismas que siguen las ondas al propagarse por el medio.

La radiación confinada en la cavidad formada por los dos horizontes de BH y WH son modos resonantes que en cada reflexión con la cavidad aumentan su amplitud para conservar la frecuencia comóvil y la norma en su evolución [Robertson, 2011]. Este comportamiento se puede analizar a partir de teoría de inestabilidades.

Como se presentó en la sección 2.2.3 y el capítulo 3, las inestabilidades son inherentes en el análisis de la dinámica una fluctuación generada en un fluido con movimiento [Charru, 2011]. Hemos descrito el campo o fluctuación que se genera en un medio con movimiento a partir de los modos normales en que éste oscila. Estos modos son ondas planas de la forma  $\exp[-i(\omega\tau + \omega'\zeta)]$ , donde  $\omega$  denota la frecuencia del modo en el marco de laboratorio y  $\omega'$  la frecuencia en el marco comóvil. Usualmente estas frecuencias toman valores reales cuando describen una onda, pero en el vocabulario de inestabilidades hidrodinámicas, estas ondas se denominan *ondas neutrales* y pueden ser generalizadas permitiendo que  $\omega$  y  $\omega'$  sean cantidades complejas con el fin de predecir los procesos de amplificación de una fluctuación cuando se propaga en un fluido en movimiento.

En el caso de  $\omega \in \mathbb{R}$  y  $\omega' = \omega'_R + i\omega'_I \in \mathbb{C}$  se tiene una *inestabilidad temporal* y corresponde a la situación física donde se impone un forzamiento al flujo (en nuestro caso es tener un perfil de velocidades para el medio). Si hay una frecuencia para el cual  $\omega'_I(\omega) > 0$  entonces la perturbación crece exponencialmente y el flujo se considera linealmente inestable. Un modo con  $\omega'_I = 0$  se llama *neutral*, que es el caso típico, mientras que un modo con  $\omega'_I < 0$  se conoce como *amortiguado* o *estable* [Gallaire and Brun, 2017]. Los modos neutrales se han usado para describir la amplificación de un campo  $\phi$  y encontrar las frecuencias  $\omega'$  en que se obtienen resonancias en la configuración de un láser óptico de agujeros negros (OBHL) [Faccio et al., 2012] y [Gaona-Reyes and Bermudez, 2017]. Pero, ¿es posible predecir estos mismos resultados describiendo los modos en que oscila  $\phi$  como inestabilidades temporales? En este capítulo se dará respuesta a esta pregunta. Para ello se iniciará considerando el modelo simple para un OBHL, se analiza la relación de dispersión de forma clásica, i.e., usando el método gráfico donde solo se permite que  $\omega$  y  $\omega'$  sean reales, luego se generaliza el problema permitiendo que las frecuencias en el marco de laboratorio y comóvil sean complejas, teniendo como requerimiento que el campo que describe los modos de la cavidad sea de cuadrado integrable.

Por último, se comparan los resultados obtenidos del problema generalizado con los que se esperan por un método simple, verificando que la radiación resonante en la cavidad puede ser vista como el producto de una inestabilidad temporal. Con el modelo de inestabilidades no solo se reproducen los resultados ya conocidos, sino que además nos permite predecir un nuevo comportamiento del campo que no se obtie-

ne con el modelo simple, como es que la radiación atrapada entre los horizontes que forman la cavidad puede tunelar y escapar de ella, similar al comportamiento habitual de la radiación de Hawking. Solo para condiciones muy específicas se pueden obtener modos para los cuales hay una mayor probabilidad de encontrar el campo dentro de la cavidad que fuera de ella. Este último resultado está de acuerdo con los monomodos que se propagan en una guía de onda temporal expuesta en [Plansinis et al. \[2016\]](#).

## 5.1. Método gráfico: OBHL con frecuencias reales

La idea básica de un OBHL es atrapar un pulso de prueba que será una fluctuación del vacío en una cavidad formada por dos solitones separados una distancia  $L_c$  (o tiempo  $\tau_c$ ) dentro de la fibra. En el contexto de óptica no lineal esta configuración es conocida como guía de ondas temporal [[Plansinis et al., 2016](#)].

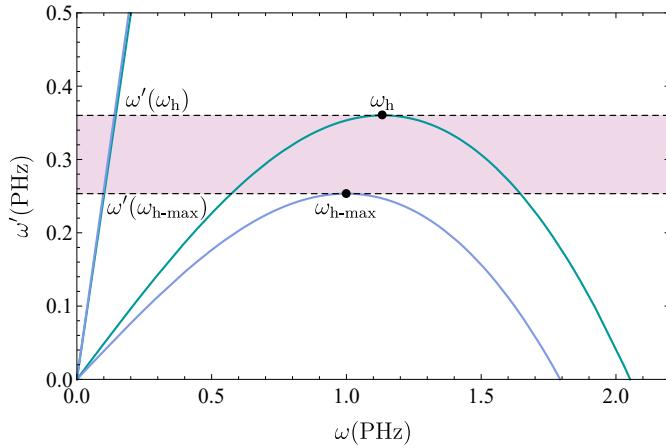
La configuración del OBHL solo existe para ciertos valores de  $\omega'$ , aquellos que quedan delimitados por los valores máximos de las relaciones de dispersión definidas en la región lenta con  $\delta n = \delta n_{\max}$  y la región rápida con  $\delta n = 0$ , es decir, el rango de frecuencias en el marco comóvil está dado por  $(\omega'(\omega_{h-\max}), \omega'(\omega_h))$ , donde  $\omega_{h-\max}$ ,  $\omega_h$  son frecuencias en el marco de laboratorio. En la figura 5.1 se muestra la relación de dispersión ec. (5.1.1) para frecuencias positivas donde es válida la configuración del OBHL.

Iniciemos recordando que la relación de dispersión que debe cumplir una fluctuación en el interior de la fibra óptica es

$$(\omega' - v(\tau)\omega)^2 = \omega^2 + \frac{\omega^4}{\Omega_0^2}, \quad (5.1.1)$$

donde  $v(\tau) = -n_{g0} + \delta n$  indica el índice de refracción efectivo que sienten los modos al moverse en la configuración del OBHL. Esta cantidad será una velocidad adimensional negativa e indica la *velocidad* con la que se mueve la fibra óptica (recuerde que en el análogo óptico el medio en movimiento se consigue por medio de las propiedades no lineales del material y no modificando la velocidad del medio).

Si en el interior de la cavidad se genera de forma espontánea una fluctuación del vacío con frecuencia  $\omega_{2ul}$ , su frecuencia en el marco comóvil  $\omega'(\omega_{2ul})$  se conserva, por tanto puede dispersarse en cuatro modos posibles en el interior de la cavidad y dos más en el exterior de ella. Estos modos se muestran en la figura 5.2(a) y son las posibles soluciones de la relación de dispersión de la ec. (5.1.1) por el método gráfico cuando la velocidad  $v(\tau)$  toma dos posibles valores:  $v_1 = -n_{g0} + \delta n_{\max}$  y

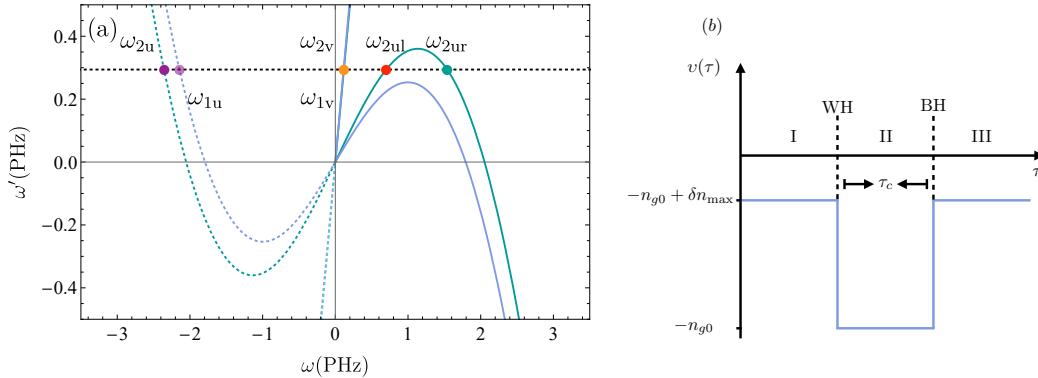


**Figura 5.1:** Relación de dispersión en el marco comóvil para frecuencias positivas. La franja rosa indica el intervalo en frecuencias del marco comóvil donde es permitida la configuración del OBHL, la curva morada indica la relación de dispersión que siguen los modos que se mueven en la región lenta  $\delta n = \delta n_{\max} = 0.1$  en la ec. (5.1.1) y la curva verde es la relación de dispersión para los modos en la región rápida, donde  $\delta n = 0$ .

$v_2 = -n_{g0}$ , donde  $v_1$  es el perfil que sienten las fluctuaciones en las regiones I y III fuera de la cavidad, mientras que  $v_2$  es el índice de grupo en el interior de la cavidad o región II.

De igual modo que en el sistema acústico trabajado en el capítulo 3,  $v_1$  define la región *lenta*, y es la zona donde la velocidad de las fluctuaciones es menor que la velocidad con la que fluye el medio, mientras que  $v_2$  representa la región *rápida* y es donde las fluctuaciones se mueven sin ver un índice de refracción extra, i.e., solo sienten el índice de grupo de la fibra  $n_{g0}$ . Esto hace que en el caso óptico solo sea posible variar  $v_1$  y  $v_2$  se mantiene fijo.

Los modos  $\omega$  que son solución a la ec. (5.1.1) están etiquetados por los subíndices 'u' o 'v', que indican si el modo está en la rama contrapropagante o copropagante respectivamente. En la figura 5.2(a), la rama copropagante para el rango de frecuencias  $\omega'$  en que funciona el OBHL es una línea recta, indicando que estos modos no sufren dispersión cuando se propagan en el material, mientras que la rama contrapropagante es la línea curva que indica que los efectos dispersivos alteran más a estos modos. Con  $\omega < 0$ , existen para  $v_1$  y  $v_2$  soluciones etiquetadas  $\omega_{1u}$  y  $\omega_{2u}$  y representan los modos de frecuencia y norma negativas definidos al final de la sección 4.3.3. Para  $\omega > 0$  y  $v_1$  solo es encuentra una solución en la rama copropagante  $\omega_{1v}$ , mientras que para  $v_2$  existen tres modos, uno copropagante  $\omega_{2v}$  y dos contrapropagantes  $\omega_{2ul}$  y  $\omega_{2ur}$ , el subíndice (l) y (r) en estas dos últimas soluciones indican que los modos se mueven a la izquierda y derecha en el marco comóvil, respectivamente.



**Figura 5.2:** (a) Relación de dispersión en el marco comóvil. Se encuentran cuatro modos  $\omega_{2u}$ ,  $\omega_{2v}$ ,  $\omega_{2ur}$  y  $\omega_{2ul}$  para la relación de dispersión con  $\delta n = 0$  (línea verde) que define la región rápida. Para la relación de dispersión con  $\delta n = \delta n_{\max}$  (línea morada) que define la región lenta se encuentran solo dos modos  $\omega_{1u}$  y  $\omega_{1v}$  con  $\omega' = 0.294\text{GHz}$ ,  $\Omega_0 = 1.861\text{GHz}$ ,  $n_{g0} = 1.488$ , estos son parámetros reales para una fibra de cristal fotónico (PFC) y  $\delta n_{\max} = 0.1$ . (b) Perfil de velocidad  $v(\tau)$  que define el OBHL.

Ahora la configuración de OBHL se logra cuando el flujo de velocidad creado por el cambio del índice de refracción varía de una región lenta  $v_1$  (región I) a un régión rápida  $v_2$  (región II) en un rango finito  $\tau_c$  y regresa de nuevo a una velocidad  $v_1$  (región III), lo cual se logra con el perfil de velocidades dado en la figura 5.2(b). La región II representa el interior de la cavidad. En ella los modos que son solución a la relación de dispersión se amplificarán. En particular, los modos  $\omega_{2ul}$  y  $\omega_{2ur}$  cumplen una condición de resonancia que permite obtener estados confinados en la cavidad.

## 5.2. Dirección de viaje

La dirección de viaje para modos que son solución a la relación de dispersión en el marco de laboratorio está dada por

$$v_g(\omega, \delta n) = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{c}{\delta n + \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}} \left( \frac{2\omega^2 + \Omega_0^2}{\omega^2 + \Omega_0^2} \right)}, \quad (5.2.1)$$

los modos contrapropagantes (u) se moverán con velocidad positiva, recuerde que por convención el flujo con que se mueve el medio es negativo,

$$v_g^u(\omega, \delta n) = v_g(\omega, \delta n). \quad (5.2.2)$$

Cuando  $\delta n = \delta n_{\max}$  se tienen los modos en la región lenta (1u), mientras que si  $\delta n = 0$  se tienen los modos de la región rápida (2u). Los modos copropagantes (v), por otro lado se mueven en la misma dirección del fluido, por tanto su velocidad es negativa, así

$$v_g^v(\omega, \delta n) = -v_g(\omega, \delta n), \quad (5.2.3)$$

nuevamente, cuando  $\delta n = \delta n_{\max}$  se tienen los modos en la región lenta (1v), mientras que si  $\delta n = 0$  se tienen los modos de la región rápida (2v). La velocidad normalizada con la velocidad de la luz  $c$  para estos modos en el marco de laboratorio se muestra en la figura 5.3(a). Observe que debido a que el régimen de dispersión es normal, a medida que la frecuencia aumenta la velocidad disminuye.

En el marco comóvil el número de onda  $\beta'$  transforma como

$$\beta' = \beta - \frac{u}{c^2}\omega, \quad (5.2.4)$$

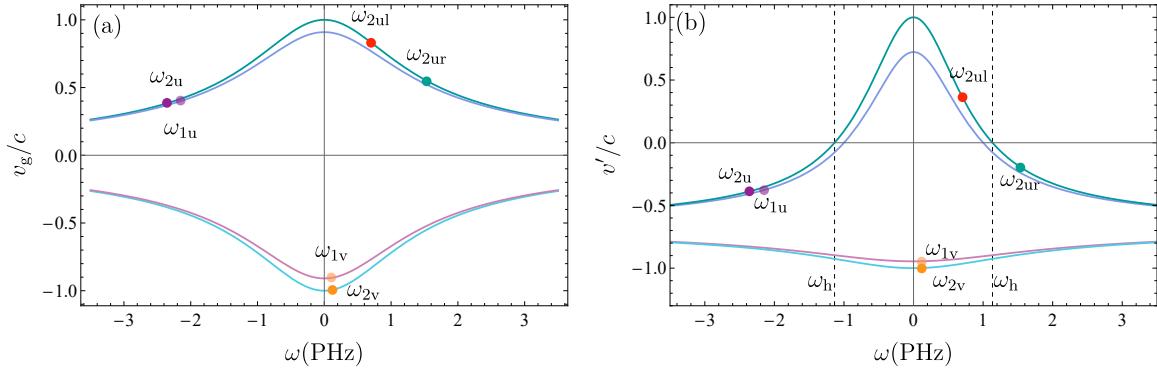
por tanto

$$\begin{aligned} v'_{1u} &= \frac{v_g^u(\omega, \delta n_{\max}) - u}{1 - v_g^u(\omega, 0)u/c^2}, & v'_{2u} &= \frac{v_g^u(\omega, 0) - u}{1 - v_g^u(\omega, 0)u/c^2}, \\ v'_{1v} &= \frac{v_g^v(\omega, \delta n_{\max}) - u}{1 - v_g^v(\omega, 0)u/c^2}, & v'_{2v} &= \frac{v_g^v(\omega, 0) - u}{1 - v_g^v(\omega, 0)u/c^2}. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Cada una de estas velocidades normalizadas con  $c$  son mostradas en la figura 5.3(b). Como es de esperar todas cumplen la regla de adición de velocidades de Einstein. A diferencia del caso sónico estudiado en el capítulo 3, ahora las frecuencias bajas son las que cambian de dirección, esto es debido a que en el caso sónico la dispersión era anómala para obtener un BHL, su velocidad aumenta con la frecuencia. En este caso tenemos una dispersión normal, cuya velocidad disminuye con la frecuencia. Por tanto, la región de frecuencias que cambia de dirección se invierte. La región para la cual la dirección de los modos 2u se invierte está marcada por líneas discontinuas verticales en la figura 5.3(b) y los valores límites se conocen como horizontes  $\pm\omega_h$ .

### 5.3. Horizontes

Hemos definido el horizonte como el límite espacial que separa dos regiones del espacio-tiempo donde puede existir el campo o fluctuación. Este límite fácilmente se encuentra al igualar la velocidad de la fluctuación con la velocidad del medio en movimiento. En el caso de no tener dispersión, como es el caso astrofísico, el horizonte está bien definido, es decir, cualquier frecuencia del campo siente el horizonte en el mismo lugar del espacio-tiempo, pero cuando se tiene dispersión como en el análogo acústico u óptico, el horizonte es difuso en el sentido de que para cada frecuencia existe un horizonte.



**Figura 5.3:** Velocidad de grupo para los modos  $\omega$  en el marco de laboratorio (a) y en el marco comóvil (b). Los horizontes  $\pm\omega_h$  están marcados por líneas verticales entrecortadas. En ambas gráficas la línea verde indica la velocidad de modos 2u, la línea morada la velocidad de modos 1u, la línea rosa la velocidad de modos 1v y la línea azul la velocidad de modos 2v. Los puntos de color indican las soluciones encontradas por el método gráfico.

Teniendo en cuenta lo anterior definimos el horizonte  $\omega_h$  como la frecuencia para la cual la velocidad con respecto a la cavidad de los modos  $\omega_{2u}$  es nula, es decir, no se mueven con respecto a la cavidad. La definición anterior se expresa como

$$v_{2u}(\omega)|_{\omega=\omega_h} = 0. \quad (5.3.1)$$

Resolviendo la anterior ecuación se encuentra como solución general:

$$\omega_h = \pm \frac{\Omega_0}{2\sqrt{2}} \sqrt{v^2 - 4 \pm v\sqrt{v^2 + 8}}, \quad (5.3.2)$$

donde  $v = -n_{g0} + \delta n$  es el término del perfil de velocidad mostrado en la figura 5.2(b). Si se cambia  $\Omega_0 \rightarrow k_0$  la anterior ecuación es equivalente a la ec.(3.1.6) encontrada en el caso acústico y la ec. (3.4) de [Bermudez and Leonhardt \[2018\]](#).

## 5.4. Velocidad translumínica

Ahora nos planteamos si dados  $\omega'$ ,  $n_{g0}$  y  $\Omega_0$  existe un velocidad  $v(\tau)$  mínima para alcanzar el horizonte, i.e., ¿cuál es la velocidad adimensional para que los modos  $\omega_{2ur}$  y  $\omega_{2ul}$  existan (son reales) y sean iguales? Llamemos a esta *velocidad translumínica*  $v_t = -n_{g0} + \delta n_t$  con  $\delta n_t$  el cambio de índice de refracción translumínico. Esta cantidad puede ser encontrada analíticamente con una función auxiliar  $q(\omega', \Omega_0)$ ,

$$q = 270 \frac{\Omega_0^2}{\omega'^2} + 729 \frac{\Omega_0^4}{\omega'^4} + \frac{3^{3/2} \Omega_0}{\omega'} \left( 27 \frac{\Omega_0^2}{\omega'^2} - 4 \right)^{3/2} - 2, \quad (5.4.1)$$

con

$$\delta n_t = \sqrt{1 + \frac{\omega'^2}{3\Omega_0^2} \left( \frac{q^{1/3}}{2^{1/3}} - 1 \right) + \frac{2^{1/3}}{3q^{1/3}} \left( \frac{\omega'^2}{\Omega_0^2} + 54 \right)}. \quad (5.4.2)$$

Para el caso en que  $\Omega_0 = 1.862\text{PHz}$ ,  $\omega' = 0.294\text{PHz}$ ,  $\delta n_t = 0.06 < \delta n_{\max} = 0.1$ .

## 5.5. Método analítico: OBHL con frecuencias complejas

En esta sección se aplicará la teoría de inestabilidades al láser óptico de agujeros negros. Para esto es necesario generalizar las soluciones para frecuencias  $\omega$  y  $\omega'$  a complejas. Notemos que la forma canónica de la ec. (5.1.1) es

$$\omega^4 + d\omega^3 + e\omega^2 + f\omega + g = 0, \quad (5.5.1)$$

con los siguientes coeficientes:

$$d = 0, \quad e = (1 - v^2)\Omega_0^2, \quad f = 2v\omega'\Omega_0^2, \quad g = -\omega'^2\Omega_0^2. \quad (5.5.2)$$

Este tipo de ecuaciones con  $d = 0$  pueden ser reducidas a una ecuación cubica auxiliar

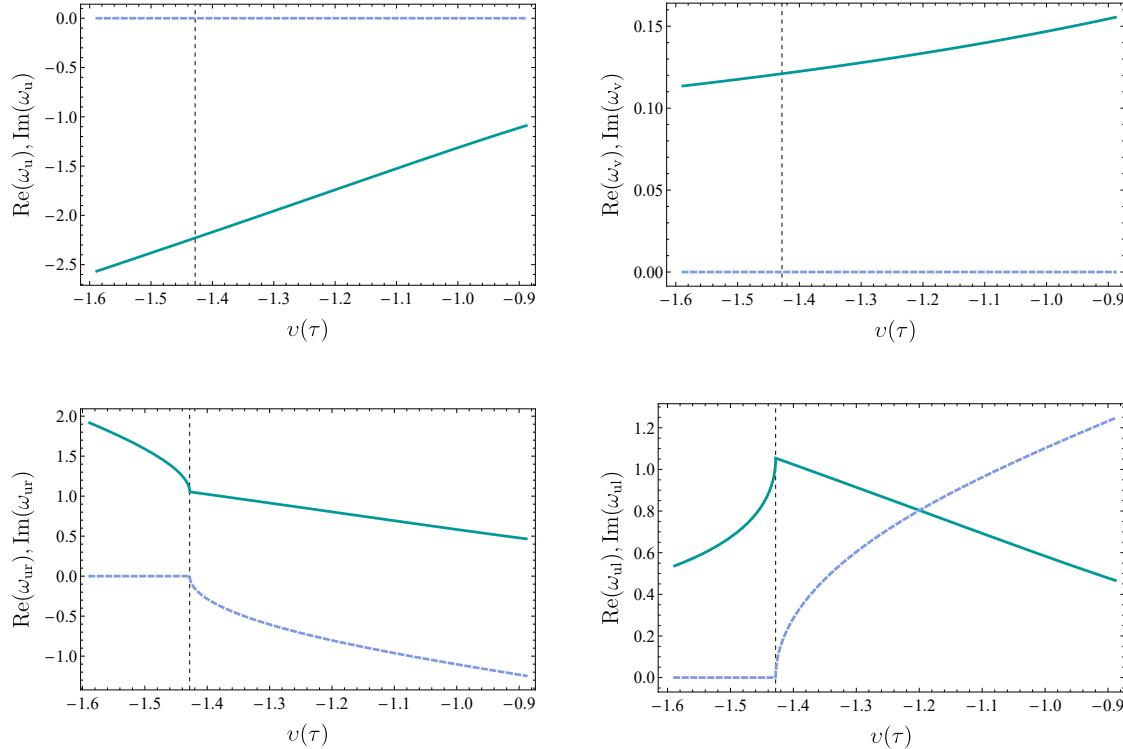
$$\omega^3 + \frac{e}{2}\omega^2 + \frac{e^2 - 4g}{16}\omega - \frac{f^2}{64} = 0, \quad (5.5.3)$$

a partir de sus soluciones  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  se obtienen la soluciones a la ecuación de cuarto orden en que estamos interesados

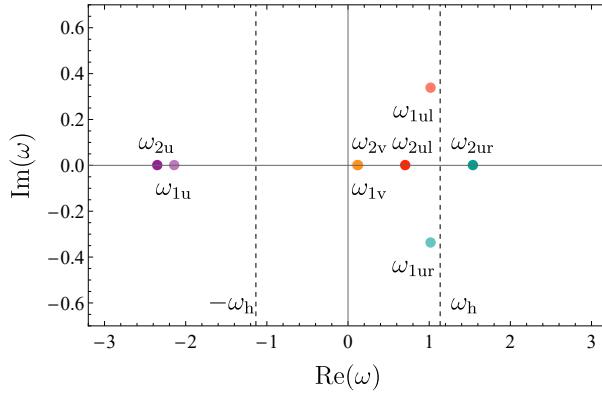
$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3}, & \omega &= \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2} - \sqrt{p_3}, \\ \omega &= -\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} - \sqrt{p_3}, & \omega &= -\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3}. \end{aligned}$$

Éstas son las soluciones analíticas para la relación de dispersión dada en la ec. (5.1.1). Aunque las soluciones explícitas son demasiado largas para escribirlas, se pueden usar para realizar cálculos analíticos con software simbólico. De esta manera se obtienen cuatro soluciones para cada región del OBHL. El comportamiento de las cuatro soluciones complejas cuando se cambia  $v(\tau)$  o el índice de refracción efectivo se muestran en la figura 5.4. En esta gráfica, se marca  $v_t$ , con una línea entrecortada indicando dónde las soluciones  $\omega_{\text{ur}}$  y  $\omega_{\text{ul}}$  se hacen complejas.

Los modos o soluciones permitidas para la región lenta  $v_1$  y la región rápida  $v_2$  que fueron analizadas en la sección 5.1 se retoman mostrándose en la figura 5.5, que es la representación en el espacio complejo para la frecuencia  $\omega$ . Comparando con las soluciones del método numérico, se obtienen los mismos seis resultados: cuatro para



**Figura 5.4:** Las cuatro soluciones analíticas en función de la velocidad  $v$ , la parte real (línea verde continua), las parte imaginaria (línea morada discontinua) se muestran para  $\Omega_0$  y  $\omega'$  fijos. La línea vertical discontinua corresponde a la velocidad translumínica  $v_t$ . Podemos ver que  $\omega_u$  y  $\omega_v$  son reales para todas las velocidades, mientras que  $\omega_{ur}$  y  $\omega_{ul}$  son reales para valores de  $v$  menores a  $v_t$ .



**Figura 5.5:** Soluciones analíticas para  $v_1 = -n_{0g} + \delta n_{\max}$  y  $v_2 = -n_{g0}$  en el espacio  $\omega$  complejo. Se obtienen las seis soluciones reales originales más dos nuevas complejas completando las ocho soluciones al problema, cuatro pertenecen a la región lenta y las otras cuatro a la región rápida. Las líneas en  $\omega_h$  ayudan a encontrar la dirección de desplazamiento de los modos:  $\omega_{2u}$ ,  $\omega_{2ur}$  y  $\omega_{2ul}$ .

la región rápida y dos soluciones reales para la región lenta. Además, se obtienen dos soluciones extra que son complejas conjugadas entre sí y no aparecen en el tratamiento habitual del sistema OBHL. Estas dos soluciones adicionales en la parte lenta tienen frecuencia  $\omega$  compleja, lo que genera un crecimiento o decrecimiento exponencial en los modos dependiendo de la región en la que se encuentren en la configuración OBHL. Tal que, si  $\omega_I > 0$ , la solución decae a la izquierda ( $\tau < 0$ ) y si  $\omega_I < 0$  la solución decae a la derecha ( $\tau > 0$ )

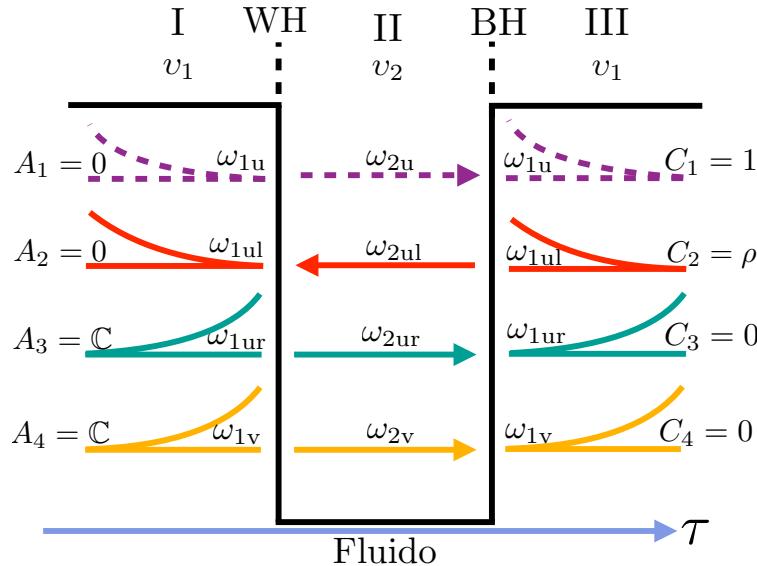
$$\exp[-i\omega\tau] = \exp[-i(\omega_R + i\omega_I)\tau] = \exp[\omega_I\tau] \exp[-i\omega_R\tau]. \quad (5.5.4)$$

### 5.5.1. Descripción cualitativa y cuantitativa

Ahora se desea encontrar las inestabilidades en el OBHL, es decir, encontrar los modos del sistema con frecuencias complejas  $\omega' = \omega'_R + i\omega'_I$ , donde  $\omega'_I > 0$ , esto implica que la amplitud incrementa exponencialmente con el tiempo de propagación

$$\exp[-i\omega'\zeta] = \exp[-i(\omega'_R + i\omega'_I)\zeta] = \exp[\omega'_I\zeta] \exp[-i\omega'_R\zeta]. \quad (5.5.5)$$

Al tomar la configuración del OBHL como un todo se considera la situación donde los únicos modos permitidos en la región lenta sean aquellos que decaen exponencialmente lejos de la cavidad. Del comportamiento de las soluciones para los modos  $\omega$  mostradas en la figura 5.5 se observa que la solución  $\omega_{1ur}$  tiene parte compleja positiva indicando que decae exponencialmente a la izquierda ( $\tau \rightarrow -\infty$ ) y  $\omega_{1ul}$  (complejo conjugado de  $\omega_{1ur}$ ) decae exponencialmente a la derecha ( $\tau \rightarrow \infty$ ). Este comportamiento se espera de forma cualitativa para cambios pequeños de la parte imaginaria cuando  $\omega'_I > 0$ .



**Figura 5.6:** Diagrama de modos de una OBHL con inestabilidades en el marco comóvil, con coordenadas  $(\tau, \zeta)$ . Los coeficientes mostrados  $A_j$  y  $C_j$  describen la solución para que el campo  $\phi$  sea una función de cuadrado integrable. Recordar que en las coordenadas  $(\tau, \zeta)$  las direcciones de velocidades calculadas en la sección 5.2 cambian de sentido debido a la transformación de coordenadas dada en la ec. (4.3.10). Las líneas discontinuas indican modos con norma negativa y las continuas modos con norma positiva.

Lo anterior, se puede resumir de manera formal de la siguiente manera: si dividimos el campo cuántico  $\phi$  en tres regiones I, II y III:

$$\phi_I = \mathbf{A} \cdot \exp[-i\omega_1 \tau], \quad \phi_{II} = \mathbf{B} \cdot \exp[-i\omega_2 \tau] \quad \phi_{III} = \mathbf{C} \cdot \exp[-i\omega_1 \tau], \quad (5.5.6)$$

donde

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4), \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4), \quad \mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4), \quad (5.5.7)$$

y

$$\exp[-i\omega_1 \tau] = (\exp[-i\omega_{11} \tau], \exp[-i\omega_{12} \tau], \exp[-i\omega_{13} \tau], \exp[-i\omega_{14} \tau]), \quad (5.5.8)$$

$$\exp[-i\omega_2 \tau] = (\exp[-i\omega_{21} \tau], \exp[-i\omega_{22} \tau], \exp[-i\omega_{23} \tau], \exp[-i\omega_{24} \tau]). \quad (5.5.9)$$

En la configuración del láser óptico, los modos entrantes y salientes están permitidos siempre que el campo  $\phi$  sea una función de cuadrado integrable, razón por la cual en el párrafo anterior se pide que sean exponenciales que decaen fuera de la cavidad. Esto significa que la configuración de OBHL es  $A_1 = A_2 = C_3 = C_4 = 0$ , como se indica en la figura 5.6. Los otros coeficientes se deben encontrar para definir por completo el campo cuántico en la configuración OBHL.

### 5.5.2. Estados confinados

Para resolver este problema se aplicará el método de matriz de transferencia empleado en la sección 3.2.2. Se puede usar este método porque el perfil de velocidad es constante en todas las regiones excepto en las interfaces, donde se debe condicionar la continuidad del campo cuántico  $\phi(\tau)$  y sus tres primeros derivadas  $\phi'(\tau), \phi''(\tau), \phi'''(\tau)$  (ya que tenemos una ecuación diferencial de cuarto orden ec. (2.2.26)). Para definir las matrices de transferencia o salto de la región I a la región II como  $(M_1)$  y de la región II a la región III como  $(M_2)$  usamos las matrices auxiliares  $m_1$  y  $m_2$  cuyas entradas serán coeficientes del campo y sus derivadas  $(\phi, \phi', \phi'', \phi''')$ :

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\omega_{11} & -i\omega_{12} & -i\omega_{13} & -i\omega_{14} \\ -\omega_{11}^2 & -\omega_{12}^2 & -\omega_{13}^2 & -\omega_{14}^2 \\ i\omega_{11}^3 & i\omega_{12}^3 & i\omega_{13}^2 & i\omega_{14}^3 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\omega_{21} & -i\omega_{22} & -i\omega_{23} & -i\omega_{24} \\ -\omega_{21}^2 & -\omega_{22}^2 & -\omega_{23}^2 & -\omega_{24}^2 \\ i\omega_{21}^3 & i\omega_{22}^3 & i\omega_{23}^2 & i\omega_{24}^3 \end{pmatrix}.$$

El primer subíndice en  $\omega_{ij}$  corresponde a la velocidad  $v_1$  o  $v_2$ , el segundo especifica la solución de 1-4. Es posible seleccionar cualquier orden para las soluciones de  $\omega$  siempre y cuando se mantenga el orden escogido, aquí se ha ordenado como u, ul, ur y v como se muestra en la figura 5.6. Entonces las matrices de tranferencia son simplemente

$$M_1 = m_2^{-1}m_1, \quad M_2 = m_1^{-1}m_2 = M_1^{-1}. \quad (5.5.10)$$

También es conveniente definir las matrices de propagación para tomar la solución entre las interfaces de la cavidad. Éstas son

$$P_L = \text{diag}(\exp[i\omega_{21}\tau_c], \exp[i\omega_{22}\tau_c], \exp[i\omega_{23}\tau_c], \exp[i\omega_{24}\tau_c]), \quad (5.5.11)$$

$$P_R = \text{diag}(\exp[-i\omega_{21}\tau_c], \exp[-i\omega_{22}\tau_c], \exp[-i\omega_{23}\tau_c], \exp[-i\omega_{24}\tau_c]). \quad (5.5.12)$$

Finalmente, la matriz de transferencia ( $M$ ) de la región III a la región I está dada por

$$M = M_1 P_L M_2 = m_2^{-1} m_1 P_L m_1^{-1} m_2. \quad (5.5.13)$$

De manera similar, para pasar de la región III a la región I se tiene  $M^{-1}$ . Usando  $M$ , se pueden tener los coeficientes  $\mathbf{A}$  en términos de los  $\mathbf{C}$ , a través de

$$\phi_I = M\phi_{III}. \quad (5.5.14)$$

Para cada  $\omega'$  existe un conjunto de cuatro números de onda  $\omega$  en la región lenta  $\omega_1$  y otros cuatro en la región rápida  $\omega_2$ .

Este problema se puede resolver analíticamente ya que a partir de los cuatro coeficientes  $\mathbf{C}$  (o  $\mathbf{A}$ ), se pueden determinar los ocho números de onda complejos correspondientes  $\omega_1(\omega')$  y  $\omega_2(\omega')$  para cualquier frecuencia compleja y finalmente calcular

los cuatro coeficientes  $\mathbf{A}$  (o  $\mathbf{C}$ ).

Con las condiciones mostradas en la figura 5.6 definimos un modo espontáneo del láser óptico como un modo del OBHL donde el campo  $\phi(\tau)$  es una función de cuadrado integrable con frecuencia compleja y parte imaginaria positiva. La solución con un coeficiente nulo se puede encontrar analíticamente, pero con un segundo, el problema tiene que ser resuelto numéricamente. Variando los parámetros  $\delta n_{\max}$  y  $\tau_c$  con los que se construye la cavidad se logra encontrar los modos propios  $\omega'_l$  de la cavidad, aquí el subíndice  $l$  indica que es un modo del láser. En la tabla 5.1 se muestra el *número de inestabilidades* ( $N_{ins}$ ) o frecuencias complejas que se obtienen para un mismo conjunto de parámetros de la cavidad, siendo estos:  $\tau_c = \{6, 13, 20\text{fs}\}$ , y  $\delta n_{\max} = \{0.01, 0.05\}$ . Además se calcula la *probabilidad de confinamiento*  $P_c$  que indica la probabilidad de encontrar el campo  $\phi$  en el interior de la cavidad y es definida como

$$P_c = \int_0^{\tau_c} d\tau |\phi(\tau)|^2, \quad (5.5.15)$$

siendo  $|\phi|^2$  normalizada a la unidad en todo el espacio. En las figuras 5.7 se muestra la densidad de probabilidad  $|\phi|^2$  para los modos de la cavidad expuestos en la tabla 5.1. Observe que  $N_{ins}$  indica el número de excitaciones posibles para un estado de la cavidad caracterizado por  $\tau_c$  y  $\delta n_{\max}$  y a su vez las posibles resonancias del modo cuando se analiza por un modelo simple (ver sección 5.6.1).

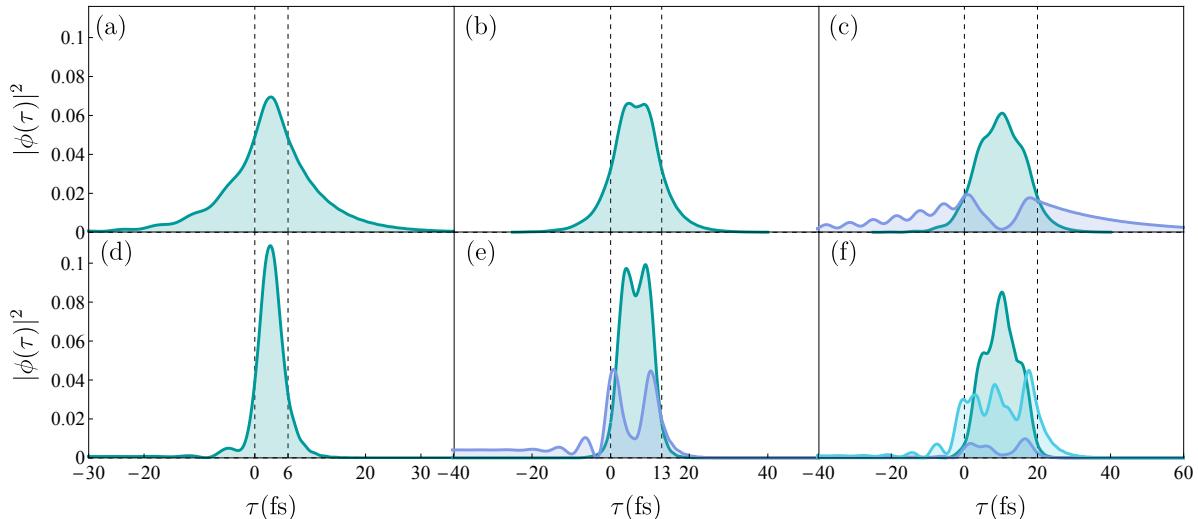
Observe que para las soluciones encontradas en general  $P_c < 100\%$ , esto significa que existe una probabilidad de que el campo logre tunelar y escapar de los horizontes, un comportamiento típico de la radiación de Hawking. Este mismo comportamiento se observa en los sistemas acústicos como el tratado en el capítulo 3 y [Bermudez and Leonhardt \[2018\]](#), y también reportados en [Curtis et al. \[2019\]](#) y [Coutant et al. \[2019\]](#). Aunque no es posible suprimir este comportamiento que es propio de la HR, existen parámetros para la construcción de la cavidad con los que se encuentra que  $P_c$  es cercano al 100 % indicando que es posible confinar luz con luz dentro de una fibra óptica. Lo anterior expresa a nivel cualitativo el comportamiento de una guía de onda temporal para pulsos ópticos expuesta en [Plansinis et al. \[2016\]](#).

De la tabla 5.1 y las figuras 5.7 se observa que el estado base aumenta su confinamiento a medida que hacemos más grande la cavidad, i.e., el incrementar  $\tau_c$  y  $\delta n_{\max}$  incrementa  $P_c$ .

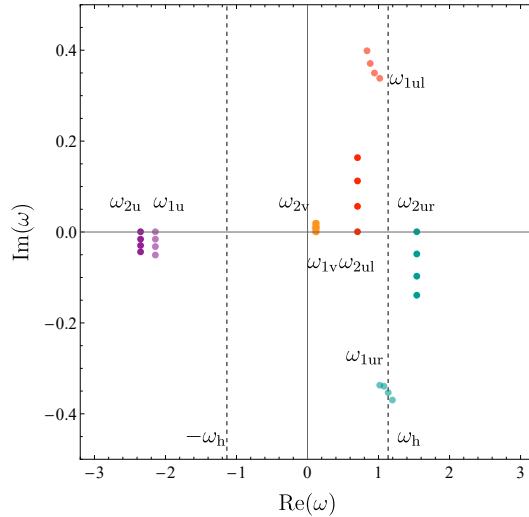
Numéricamente se ha encontrado un conjunto discreto de modos  $\omega'_l$  para alguna condición  $\delta n_{\max}$  y  $\tau_c$ . En la tabla 5.1 solo se muestran algunos casos particulares encontrados por teoría de inestabilidades, pero ¿es posible saber cuántos modos discretos o inestabilidades se pueden encontrar dados  $\delta n_{\max}$  y  $\tau_c$ ? En la siguiente sección

$\tau_c$ (fs)	$\delta n_{\max}$	$N_{ins}$	$\omega'_l$ (PHz)	$P_c$ (%)	$x_f$ (m)
6	0.01	1	$0.351 + i1.64 \times 10^{-6}$	36	9.23
	0.05	1	$0.333 + i6.12 \times 10^{-5}$	47	0.251
13	0.01	1	$0.355 + i9.6 \times 10^{-7}$	74	1.32
	0.05	2	$0.350 + i1.45 \times 10^{-5}$	95	0.09
20			$0.32 + i4.8 \times 10^{-5}$	36	0.31
0.01	2	$0.356 + i4.78 \times 10^{-7}$	87	2.58	
		$0.349 + i5.08 \times 10^{-7}$	21	2.52	
0.05	3	$0.354 + i5.02 \times 10^{-6}$	96	0.26	
		$0.337 + i2.58 \times 10^{-5}$	11	0.063	
		$0.312 + i1.16 \times 10^{-5}$	60	0.12	

**Tabla 5.1:** Parámetros encontrados para las condiciones impuestas en la figura 5.6 para una cavidad con  $\tau = \{6, 13, 20\}$  fs, y  $\delta n_{\max} = \{0.01, 0.05\}$ .



**Figura 5.7:** Densidad de probabilidad  $|\phi(\tau)|^2$  para modos de la cavidad encontrados por teoría de inestabilidades y con parámetros dados en la tabla 5.1. Se grafica en verde el estado base o primera resonancia, en morado el primer estado excitado o segunda resonancia y en azul el segundo estado excitado o tercera resonancia para (a)  $\tau_c = 6$  y  $\delta n_{\max} = 0.01$ , (b)  $\tau_c = 13$  y  $\delta n_{\max} = 0.01$ , (c)  $\tau_c = 20$  y  $\delta n_{\max} = 0.01$ , (d)  $\tau_c = 6$  y  $\delta n_{\max} = 0.05$ , (e)  $\tau_c = 13$  y  $\delta n_{\max} = 0.05$  (f)  $\tau_c = 20$  y  $\delta n_{\max} = 0.05$ .



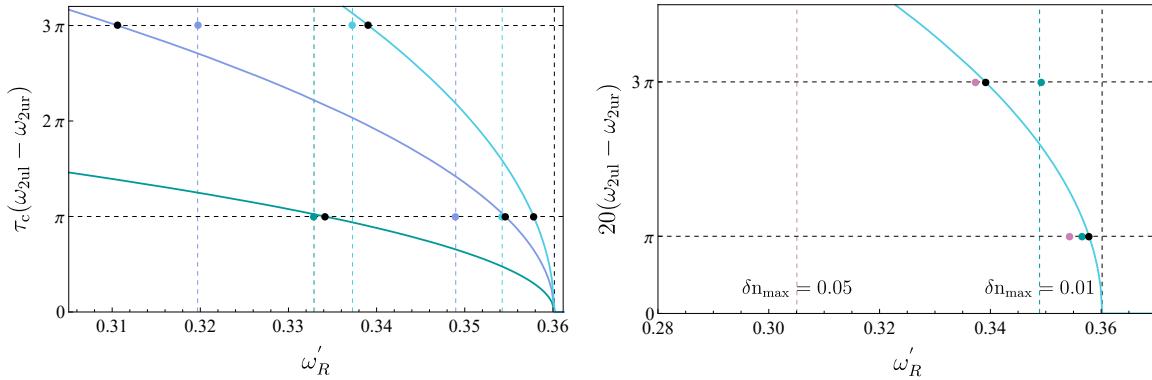
**Figura 5.8:** Cambio de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para  $\text{Re}(\omega'_l)$  fijo, e incrementando el valor de  $\text{Im}(\omega')$  de 0 a  $\text{Im}(\omega'_l)$  en pequeños pasos.

compararemos las soluciones encontradas a través de la teoría de inestabilidades con un modelo simple, respondiendo a esta pregunta.

## 5.6. Comparación del modelo de inestabilidades con el método simple

En la sección anterior se mostró que por teoría de inestabilidades se pueden encontrar los modos del OBHL. En este modelo variando las dimensiones de la cavidad  $\delta n_{\max}$  y  $\tau_c$  se encuentra numéricamente un conjunto discreto de soluciones o inestabilidades que son los modos del láser. Ahora se usará un modelo simple para obtener una mejor imagen de la solución de los modos  $\omega(\omega'_l)$  con frecuencia compleja  $\omega'_l = \omega'_R + i\omega'_I$ , pero considerando que  $\omega'_I \rightarrow 0$ , que es la versión de una inestabilidad neutra o un modelo de onda plana con frecuencia real  $\omega(\omega'_R)$ .

Recordando la evolución usual de los modos del OBHL (ver las secciones 2.3 y 3.1), los modos atrapados en la cavidad son  $\omega_{2\text{ur}}$  que se mueve a la derecha y  $\omega_{2\text{ul}}$  que se mueve a la izquierda en el marco comóvil, permiten la creación en cada ciclo de un modo que logra salir de la cavidad  $\omega_{1\text{u}}$  y a su vez amplificar los modos confinados como los que escapan de la cavidad en cada periodo. Con el modelo de onda plana se puede verificar si las soluciones de número de onda  $\omega$  siguen una condición por ciclo para una resonancia [Leonhardt and Philbin, 2007], [Gaona-Reyes and Bermudez, 2017].



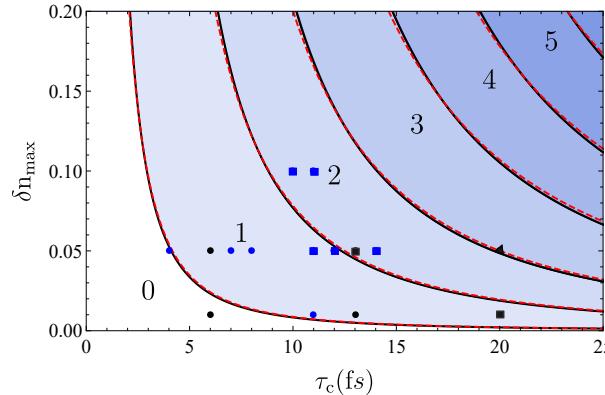
**Figura 5.9:** Diferencia de fase  $\Delta\omega\tau_c$ . (a) Considerando el modelo de ondas planas cuando se fija  $\delta n_{\max} = 0.05$  y se varía  $\tau_c = \{6(\text{verde}), 13(\text{morado}), 20(\text{azul})\}$  fs. Las diferencias de fase de  $\pi$  y  $3\pi$  predichas por el modelo clásico son marcadas con puntos negros. Las líneas verticales discontinuas marcan el valor de  $\omega_R$  encontrado por teoría de inestabilidades y su intersección con la fase son los puntos de color. (b) Manteniendo fijo  $\tau_c = 20$  fs y variando  $\delta n_{\max} = \{0.05(\text{verde}), 0.01(\text{rosa})\}$ . Los puntos negros son las predicciones por el modelo clásico, los puntos de color representan la solución por el modelo de inestabilidades.

### 5.6.1. Condición de resonancia

Se produce una resonancia cuando la diferencia de fase de la radiación atrapada después de un periodo de oscilación es un múltiplo entero de  $2\pi$ . Se debe considerar que se producen dos reflexiones durante cada ciclo en los horizontes, cada una produce un cambio de fase de  $\pi/2$ . Entonces, la diferencia de fase entre los modos atrapados  $\omega_{2\text{ul}}$  y  $\omega_{2\text{ur}}$  debería ser  $\tau_c\Delta\omega = (2n + 1)\pi$ . La primera resonancia que es  $\tau_c\Delta\omega = \pi$  representa en el modelo de inestabilidades el modo del láser en el estado base, la segunda resonancia en el modelo simple es el primer estado excitado encontrado por teoría de inestabilidades y así sucesivamente.

En este punto se puede analizar la condición de resonancia desde dos puntos de vista: manteniendo fijo  $\delta n_{\max}$  y variando  $\tau_c$ , o fijando  $\tau_c$  y variando  $\delta n_{\max}$ . Estos resultados son mostrados en las figuras 5.9. Los puntos negros en las figuras 5.9 indican las predicciones del modelo simple, mientras los puntos de color correspondientes a la curva para la figura 5.9(a) representan las soluciones encontradas por teoría de inestabilidades cuando  $\delta n_{\max} = 0.05$  y  $\tau_c = \{6, 13, 20\}$  fs. Los puntos de igual color a las líneas discontinuas verticales en la figura 5.9(b) representan las soluciones encontradas por teoría de inestabilidades cuando variamos  $\delta n_{\max}$  y  $\tau_c = 20$  fs.

Todas las predicciones del modelo simple son cercanas a los resultados del modelo de frecuencias complejas, los valores difieren por un error menor a 7.5 %. Esta discre-



**Figura 5.10:** Número de soluciones que cumplen la condición de resonancia en el espacio de parámetros. Dados  $\delta n_{\max}$  y  $\tau_c$  el modelo simple indica el número de resonancias. Las figuras geométricas en negro son las soluciones mostradas en la tabla 5.1, siendo  $N_{ins} = 1$  para círculos,  $N_{ins} = 2$  para rectángulos y  $N_{ins} = 3$  triángulos. Las figuras geométricas en azul son otras soluciones encontradas por teoría de inestabilidades. Las líneas discontinuas en rojo indican la cantidad de modos confinados encontrados por el modelo fenomenológico.

pancia podría explicarse debido que la condición de resonancia en el modelo simple no contiene información sobre  $\delta n_{\max}$ , la única información necesaria para que el modelo funcione es imponer un  $\delta n_{\max}$  suficientemente grande tal que para un  $\omega'_R$  dado se cumpla que  $\delta n_{\max} > \delta n_t$ . En la figura 5.10 mostramos el número de soluciones del modelo simple en el espacio de parámetros geométricos de la cavidad  $(\tau_c, \delta n_{\max})$ . Cuando se contrasta este número con el  $N_{ins}$  que se encuentra en los casos particulares mostrados en la tabla 5.1 se observa nuevamente que el modelo simple por no ser lo suficientemente robusto no captura la soluciones para los parámetros  $\tau_c = 6$  y  $\delta n_{\max} = 0.01$  y s  $\tau_c = 20$  y  $\delta n_{\max} = 0.01$  que se encuentra por teoría de inestabilidades.

Una última forma de caracterizar el número de inestabilidades o modos resonantes que puede soportar la cavidad es por medio de un modelo fenomenológico [Agrawal, 2013], el cual esta dado por

$$V = \left( \frac{\omega'(\omega_h)}{2} \right)^2 \tau_c^2 \delta n_{\max}. \quad (5.6.1)$$

El parámetro  $V$  es adimensional y depende de la geometría de la cavidad y el máximo valor de las frecuencias permitidas en el marco comóvil. Esta cantidad se muestra en la figura 5.10 con líneas discontinuas rojas, mostrando evidencia que sus predicciones son una buena aproximación tanto al modelo simple como al de inestabilidades. Con el modelo fenomenológico se puede predecir de forma muy sencilla cuantos modos resonantes se pueden obtener dada la geometría de la cavidad. Por ejemplo, para  $0.028 < V < 0.253$  se obtiene un solo modo.

Con los resultados encontrados podemos concluir que la radiación de Hawking resonante en la configuración de OBHL es producto de un conjunto discreto de inestabilidades. Además, dado que la  $P_c < 100\%$  indica que el campo puede tunelar y escapar de los horizonte, un comportamiento habitual de la radiación de Hawking.

### 5.6.2. Tiempo de propagación

Hasta el momento solo hemos verificado que los modos de la cavidad sean funciones de cuadrado integrable en la variable  $\tau$  o tiempo de retardo y que la parte real de  $\omega'_l$  cumpla la condición de resonancia, pero ¿qué información otorga la parte imaginaria? La parte imaginaria  $\omega'_I$  de la frecuencia en el marco comóvil indica la tasa de amplificación del modo de la cavidad, y a su vez permite calcular el tiempo de propagación  $\zeta_f$  o distancia  $x_f$  que se puede mover este modo en el interior de la fibra antes de que destruya la cavidad. Para ver esto recordemos que la forma general del modo de la cavidad está dada en la ec. (4.3.31), que es

$$\phi(\tau, \zeta) = \exp[-i(\omega'_R + i\omega'_I)\zeta]\phi(\tau) = \exp(\omega'_I\zeta) \exp(-i\omega'_R\zeta) \sum_j A_j \exp(-i\omega_j\tau), \quad (5.6.2)$$

tal que

$$|\phi(\tau, \zeta)|^2 = \exp(2\omega'_I\zeta)|\phi(\tau)|^2. \quad (5.6.3)$$

Dado que  $\omega_I > 0$ , la densidad de fotones  $|\phi(\tau, \zeta)|^2$  (número de fotones por unidad de tiempo de retardo) crecerá exponencialmente a medida que el tiempo de propagación  $\zeta$  avanza, por tanto, entre más grande sea  $\omega_R$  más rápido se amplificará el modo, pero ¿cuánto tiempo puede amplificarse este?, ¿de dónde sale la energía para la amplificación de la fluctuación? El modo solo puede crecer hasta alcanzar la misma densidad de energía que poseen los pulsos que generan la cavidad, y la energía que amplifica la fluctuación proviene del pulso que construye los horizontes conservándose así la energía del sistema .

Lo anterior nos permite construir un modelo simple para calcular el tiempo  $\zeta_f$  en que existe un estado de la cavidad. La densidad de energía total en el sistema  $\rho_S$  debe ser la misma en cualquier tiempo  $\zeta$ . Por tanto

$$\rho_S(\zeta) = \rho_S(0), \quad (5.6.4)$$

donde

$$\rho_S(\zeta) = \rho^l(\zeta) + \rho^c(\zeta). \quad (5.6.5)$$

El primer término a la derecha del igual es la densidad de energía para el modo  $l$  de la cavidad y está determinado por

$$\rho^l(\zeta) = \hbar\omega_l |\phi_{\max}|^2 \exp(2\omega'_I\zeta) = \rho_0^l \exp(2\omega'_I\zeta) \quad (5.6.6)$$

siendo  $\omega_l$  la frecuencia en el marco de laboratorio para el modo con amplitud máxima  $|\phi_{\max}|^2$  que está en el interior de la cavidad. El segundo término es la densidad de energía de los pulsos que construyen la cavidad y es

$$\rho_c(\zeta) = \rho_0^c \exp(-2\omega'_l \zeta), \quad (5.6.7)$$

donde  $\rho_0^c$  es la densidad de energía inicial de la cavidad que se va disipando a la misma tasa en que crece la energía de la fluctuación. Para encontrar la densidad de energía inicial de los pulsos que construyen la cavidad recordemos de la ec. (4.4.1) que el  $\delta n_{\max}$  esta relacionado con la intensidad del pulso, por tanto

$$I = \frac{\delta n_{\max}}{n_2}, \quad (5.6.8)$$

con lo cual

$$\rho_0^c = \frac{\delta n_{\max}}{n_2} A, \quad (5.6.9)$$

donde  $n_2$  es el coeficiente de índice de refracción no lineal y  $A$  es el área de la sección transversal de la fibra óptica en la que se propaga el pulso. Remplazando la ec. (5.6.2) en la ec. (5.6.7) y ec. (5.6.6) y realizando un poco de álgebra se encuentra que

$$\zeta_f = \frac{1}{2\omega'_l} \ln \left( \frac{\rho_0^c}{\rho_0^l} \right), \quad (5.6.10)$$

es el tiempo máximo de propagación o de la ec. (4.3.10) la distancia  $x_f = u\zeta_f$  que puede recorrer un modo de la cavidad al propagarse en el interior de la fibra óptica. Para darnos una idea del orden de magnitud de la distancia  $x_f$  hicimos uso de los parámetros de una PFC con  $n_2 = 2.2 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$  [Agrawal, 2013] y  $A = 7.84 \times 10^{-14} \text{ m}^2$  [Bermudez, 2016], además los pulsos que crean la cavidad se propagan dentro de la fibra con una velocidad de grupo  $u = 0.2014 \mu\text{m}/\text{fs}$ . En la última columna de la tabla 5.1 se reportan las distancias de propagación siendo éstas del orden de metros para cada uno de los estados encontrados.



# CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

---

## 6.1. Conclusiones

En este trabajo se ha encontrado que la radiación de Hawking resonante en la configuración de láser de agujeros negros es producto de un conjunto discreto de inestabilidades, tanto si el sistema es un condensado de Bose-Einstein (BECs) donde la radiación son fonones, como si el sistema son pulsos de luz propagándose en una fibra óptica donde la radiación son fotones. Para llegar a este resultado es necesario aplicar la teoría de inestabilidades al láser de agujeros negros.

Para cumplir este objetivo iniciamos mencionando las propiedades de un campo cuántico al propagarse en un espacio-tiempo curvo como el generado por un agujero negro. Este tipo de curvaturas poseen una región de no retorno que se define como horizonte de eventos y la radiación que logra escapar de ésta se conoce como radiación de Hawking [Hawking, 1974].

Posteriormente mostramos cómo el trabajo de Unruh [1981] abre la posibilidad de explorar la predicción de Hawking en sistemas análogos, donde se comprueba que la dinámica de una fluctuación que se propaga en un fluido en movimiento es equivalente a la dinámica de un campo cuántico en espacio-tiempo curvo. En el fluido debe existir una región que cumpla la definición de horizonte para que se genere el proceso de Hawking.

Desde el trabajo de Unruh, ha habido numerosas propuestas para probar por analogía varias predicciones de gravitación y cosmología entre ellas la radiación de Hawking utilizando experimentos de laboratorio en materia condensada y óptica. Los sistemas más prometedores son BECs y pulsos en fibras ópticas ya que permiten la

construcción de horizontes.

En presencia de dos horizontes, uno interno o agujero blanco y otro externo o agujero negro la radiación de Hawking sufre un proceso de autoamplificación si el campo es bosónico y la relación de dispersión es anómala en el caso de BECs o normal en el caso de fibras ópticas. La estimulación de la radiación de Hawking es una consecuencia del confinamiento de las partículas con frecuencia negativa en la región entre los horizontes y dicha región funciona como una cavidad. Esta configuración es conocida como láser de agujeros negros [Corley and Jacobson, 1999].

La relación de dispersión anómala dada en la ec. (2.2.24) y que describe la dinámica de una fluctuación en un BEC se encuentra linealizando la ecuación de Gross-Pitaevkii (2.2.6), mientras la relación de dispersión normal que siguen fluctuaciones que se propagan en una fibra óptica se encuentra linealizando la ecuación no lineal de Schrödinger (4.3.8).

Analizando por teoría de inestabilidades la dinámica de una fluctuación en la configuración de BHL seguiendo Bermudez and Leonhardt [2018], en el capítulo 3 se logra predecir que los modos resonantes en la cavidad son producto de un conjunto discreto de inestabilidades, i.e., las frecuencias con las que oscila cada modo de la cavidad son complejas, de la forma:  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  con  $\omega_I > 0$ . Este modelo no solo logra obtener los mismos resultados cuando se analiza el sistema con un modelo simple dado en Leonhardt and Philbin [2007], sino que además predice que hay modos que logran propagarse fuera de los horizontes de manera similar a la radiación de Hawking. Para frecuencias reales no se evidencia este comportamiento.

La idea de láser de agujero negro fue explotada inicialmente en sistemas acústicos como los BECs, pero Faccio et al. [2012] y Gaona-Reyes and Bermudez [2017] logran expandir el modelo al caso óptico que es la configuración de OBHL. En este caso al analizar la ec. (4.3.27) por teoría de inestabilidades en la configuración de OBHL se encuentra que la radiación resonante en la cavidad se puede ver como el producto de un conjunto discreto de inestabilidades. Con el modelo de inestabilidades no solo se reproducen los resultados ya conocidos sino que además permite predecir nuevos resultados que no se obtienen con el modelo simple como es que la radiación atrapada entre los horizontes que forman la cavidad puede tunelar y escapar de ella, similar al habitual comportamiento de la radiación de Hawking, encontrado de forma análoga en el caso de las inestabilidades en el sistema acústico.

Además solo para condiciones muy específicas se pueden encontrar modos para los cuales hay una mayor probabilidad de encontrar el campo dentro de la cavidad que

fueras de ella, i.e., es posible confinar luz con luz en un medio no lineal. Este último resultado concuerda a nivel cualitativo con los monomodos que se propagan en una guía de onda temporal expuesta en [Plansinis et al. \[2016\]](#).

Los resultados expuestos aquí reflejan que la construcción de horizontes en sistemas análogos permite estudiar la radiación de Hawking. Por último podemos resumir las diferencias que se encuentran entre el modelo acústico y óptico en la siguiente tabla

Característica	Acústico	Óptico
Radiación	Fonones	Fotones
Sistema	BECs	Fibras ópticas
Ecuación a linealizar	Gross-Pitaevskii	No lineal de Schrödinger
Relación de dispersión	Anómala	Normal
Velocidad en exterior	$v_1 < c$	$v_1 = -n_{g0} + \delta n_{\max}$
Velocidad en interior	$v_2 > c$	$v_2 = -n_{g0}$
Frecuencia conservada	$\omega$	$\omega'$
Coordenadas	$(x, t)$	$(\tau, \zeta)$

**Tabla 6.1:** Diferencias entre el láser de agujeros negros en los caso acústico y óptico.

## 6.2. Perspectivas

En este contexto, la radiación de Hawking se produce cuando el vacío cuántico es dispersado por un horizonte que mezcla modos de frecuencia positiva con modos de frecuencia negativa manteniendo la conservación de la norma. Para ver esto se debe construir una matriz de dispersión y encontrar los modos de salida en términos de los modos de entrada, estos modos se definen de acuerdo a su dirección de propagación cerca del horizonte. Al calcular esta matriz de dispersión se obtendría la probabilidad de mezcla entre modos de frecuencias diferentes en cada horizonte, en otras palabras, se obtendrían los coeficientes de transmisión y reflexión de los horizontes vistos como una interface.

Una variación que se le podría hacer al modelo es cambiar el perfil de velocidad  $v(\tau)$  plano que trabajamos por un perfil secante hiperbólica que asemeje de forma más realista las fronteras de la cavidad formada por los pulsos intensos. Se podría resolver el problema de forma numérica y ver si los modos resultantes son comparables al modelo expuesto en este trabajo.



# BIBLIOGRAFÍA

---

Govind P Agrawal. *Nonlinear fiber optics*. Academic Press, New York, 5th edition, 2013.

Ian JR Aitchison and Anthony JG Hey. *Gauge theories in particle physics: A practical introduction, Volume 2: Non-Abelian Gauge theories: QCD and the electroweak theory*. CRC Press, 2012.

JA Armstrong, N Bloembergen, J Ducuing, and PS Pershan. Interactions between light waves in a nonlinear dielectric. *Physical Review*, 127(6):1918, 1962.

Cosimo Bambi. Astrophysical black holes: A compact pedagogical review. *Annalen der Physik*, 530(6):1700430, 2018.

Carlos Barcelo, Stefano Liberati, and Matt Visser. Analogue gravity. *Living Reviews in Relativity*, 14(1):3, 2011.

David Bermudez. Propagation of ultra-short higher-order solitons in a photonic crystal fiber. *Journal of Physics: Conference Series*, 698:012017, 2016.

David Bermudez and Ulf Leonhardt. Resonant Hawking radiation as an instability. *Classical and Quantum Gravity*, 36(2):024001, 2018.

Ignazio Bombaci. The maximum mass of a neutron star. *Astronomy and Astrophysics*, 305:871, 1996.

François Charru. *Hydrodynamic Instabilities*. Cambridge Texts in Applied Mathematics 37. Cambridge University Press, 2011.

Steven Corley and Ted Jacobson. Hawking spectrum and high frequency dispersion. *Physical Review D*, 54(2):1568–1586, 1996.

Steven Corley and Ted Jacobson. Black hole lasers. *Physical Review D*, 59(12):124011, May 1999.

- Antonin Coutant, Yves Aurégan, and Vincent Pagneux. Slow sound laser in lined flow ducts. *arXiv preprint arXiv:1904.03079*, 2019.
- Jonathan Curtis, Gil Refael, and Victor Galitski. Evanescent modes and step-like acoustic black holes. *Annals of Physics*, 407:148–165, 2019.
- Juan Ramón Muñoz de Nova, Katrine Golubkov, Victor I Kolobov, and Jeff Steinhauer. Observation of thermal hawking radiation and its temperature in an analogue black hole. *Nature*, 569(7758):688, 2019.
- Bryce S DeWitt. Quantum field theory in curved spacetime. *Physics Reports*, 19(6):295–357, 1975.
- Jonathan Drori, Yuval Rosenberg, David Bermudez, Yaron Silberberg, and Ulf Leonhardt. Observation of stimulated hawking radiation in an optical analogue. *Physical Review Letters*, 122(1):010404, 2019.
- Peter D Drummond and Zbigniew Ficek. Quantum squeezing, 2013.
- Peter D Drummond and Mark Hillery. *The quantum theory of nonlinear optics*. Cambridge University Press, 2014.
- Daniele Faccio, Tal Arane, Marco Lamperti, and Ulf Leonhardt. Optical black hole lasers. *Classical and Quantum Gravity*, 29(22):224009, 2012.
- Alan E Franken, CW Peters, and G Weinreich. Generation of optical harmonics. *Physical Review Letters*, 7(4):118, 1961.
- François Gallaire and P-T Brun. Fluid dynamic instabilities: theory and application to pattern forming in complex media. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 375(2093):20160155, 2017.
- Jose Luis Gaona-Reyes and David Bermudez. The theory of optical black hole lasers. *Annals of Physics*, 380:41–58, 2017.
- S W Hawking. Black hole explosions. *Nature*, 248(5443):30–31, 1974.
- S W Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3):199–220, 1975.
- TA Jacobson and GE Volovik. Event horizons and ergoregions in 3He. *Physical Review D*, 58(6):064021, 1998.
- Ted Jacobson. Introductory lectures on black hole thermodynamics. *Given at Utrecht U. in*, 26, 1996.
- Gil Jannes, Philippe Maïssa, Thomas G Philbin, and Germain Rousseaux. Hawking radiation and the boomerang behavior of massive modes near a horizon. *Physical Review D*, 83(10):104028, 2011.

- Yuri S Kivshar and Govind Agrawal. *Optical solitons: from fibers to photonic crystals*. Academic press, New York, 2003.
- EL Koschmieder. Instabilities in fluid dynamics. In *Synergetics*, pages 70–78. Springer, Berlin, Heidelberg, 1977.
- L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon, Oxford, 1960.
- Lifshitz E.M. Landau L.D. *The classical theory of fields*, volume 2. Butterworth Heinemann, 4th edition, 1980.
- P-É Larré, A Recati, Iacopo Carusotto, and N Pavloff. Quantum fluctuations around black hole horizons in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 85(1):013621, 2012.
- Ulf Leonhardt and Thomas G Philbin. Black hole lasers revisited. *Lect. Notes Phys.*, 718:229–245, 2007.
- Jean Macher and Renaud Parentani. Black-hole radiation in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 80(4):043601, 2009.
- Viatcheslav Mukhanov and Sergei Winitzki. *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- Thomas G Philbin, Chris Kuklewicz, Scott Robertson, Stephen Hill, Friedrich König, and Ulf Leonhardt. Fiber-optical analog of the event horizon. *Science*, 319(5868):1367–1370, 2008.
- Brent W Plasiniis, William R Donaldson, and Govind P Agrawal. Temporal waveguides for optical pulses. *Journal of the Optical Society of America B*, 33(6):1112–1119, 2016.
- Scott Robertson. *Hawking radiation in dispersive media* . PhD thesis, St. Andrews, St. Andrews, 2011.
- Jeff Steinhauer. Observation of self-amplifying Hawking radiation in an analogue black-hole laser. *Nature Physics*, 10(11):864–869, 2014.
- Jeff Steinhauer and Juan Ramón Muñoz de Nova. Self-amplifying hawking radiation and its background: A numerical study. *Physical Review A*, 95(3):033604, 2017.
- Leonard Susskind. The paradox of quantum black holes. *Nature Physics*, 2(10):665, 2006.
- M Tettamanti, SL Cacciatori, A Parola, and I Carusotto. Numerical study of a recent black-hole lasing experiment. *EPL (Europhysics Letters)*, 114(6):60011, 2016.
- William G Unruh. Experimental black-hole evaporation? *Physical Review Letters*, 46(21):1351–1353, 1981.

Grigory E Volovik. *The universe in a helium droplet*, volume 117. Oxford University Press on Demand, Oxford, 2003.

AM Weiner, JP Heritage, RJ Hawkins, RN Thurston, EM Kirschner, DE Leaird, and WJ Tomlinson. Experimental observation of the fundamental dark soliton in optical fibers. *Physical Review Letters*, 61(21):2445, 1988.

Ivar Zapata, Mathias Albert, Renaud Parentani, and Fernando Sols. Resonant hawking radiation in Bose–Einstein condensates. *New Journal of Physics*, 13(6):063048, 2011.