Ejemplos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Profesor:
Edgar Miguel Vargas Chaparro
Monitores:
Sebastian Guerrero Salinas
Diana Valentina Monroy Molina

Se utilizará el método de sustitución regresiva para resolver el sistema lineal

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 20 \\
-2x_2 + 7x_3 - 4x_4 &= -7 \\
6x_3 + 5x_4 &= 4 \\
3x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

Sistemas lineales triangulares

Despejando x_4 en la última ecuación y se obtiene

$$x_4 = \frac{6}{3} = 2$$

Reemplazando $x_4 = 2$ en la tercera ecuación, obtenemos

$$x_3 = \frac{4 - 5(2)}{6} = -1$$

Sistemas lineales triangulares

Ahora usamos los valores de $x_3 = -1$ y $x_4 = 2$ para despejar x_2 en la segunda ecuación:

$$x_2 = \frac{-7 - 7(-1) + 4(2)}{-2} = -4$$

Finalmente, x_1 se obtiene de la primera ecuación

$$x_1 = \frac{20 + 1(-4) - 2(-1) - 3(2)}{4} = 3$$

Sistemas lineales triangulares

La condición $a_{kk} \neq 0$: es esencial porque en la fórmula

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{N} a_{kj} x_j}{a_{kk}} \qquad k = N-1, N-2, ..., 1$$

hay que dividir entre a_{kk}. Si este requisito no se cumple, entonces o bien no hay solución o bien hay infinitas soluciones.

Eliminación gaussiana y pivoteo

Vamos a expresar el siguiente sistema en forma de matriz ampliada, luego hallaremos un sistema triangular superior que sea equivalente y, finalmente la solución

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 13 \\
2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 28 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20 \\
-3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

Eliminación gaussiana y pivoteo

La matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \underline{\mathbf{1}} & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

La primera fila se usa para eliminar los elementos de la primera columna que están por debajo de la diagonal principal. En este paso, esta primera fila es la fila pivote y su elemento $a_{11} = 1$ es el elemento pivote. Los valores $m_{k1} = a_{k1}/a_{11}$ para $(k = 2, 3, 4)$ son los multiplicadores, o sea, los escalares por los que hay que multiplicar la primera fila para, restando de la fila k-ésima el correspondiente múltiplo de la primera fila, hacer cero el elemento a_{k1}.

Eliminación gaussiana y pivoteo

El resultado de la eliminación es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & \underline{\textbf{-4}} & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\ 0 & 7 & 6 & 14 & 45 \end{array}\right]$$

Ahora, usamos la segunda fila para eliminar los elementos de la segunda columna que están por debajo de la diagonal principal. Esta segunda fila es la fila pivote y los valores $m_{k2} = a_{k2}/a_{22}$ (para $k = 3, 4$) son los multiplicadores.

El resultado de la eliminación es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{\mathbf{-5}} & -7{,}5 & -35 \\ 0 & 0 & 9{,}5 & 5{,}25 & 48{,}5 \end{array}\right]$$

Finalmente, restamos de la cuarta fila la tercera multiplicada por $m_{43} = a_{43}/a_{33} = -1{,}9$.

El resultado es el sistema triangular superior:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7{,}5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right]$$

Usando el algoritmo de sustitución regresiva para resolver el sistema triangular superior anterior se obtiene

$$x_4 = 2, \qquad x_3 = 4, \qquad x_2 = -1, \qquad x_1 = 3.$$

Eliminación gaussiana y pivoteo

- El proceso anterior es la **eliminación gaussiana o método de eliminación de Gauss** pero se debe modificar para que funcione en casi toda ocasión. El problema que se puede dar es que si $a_{kk} = 0$, entonces no se puede usar la fila k-ésima para eliminar los elementos de la columna k-ésima que están por debajo de la diagonal principal.

Eliminación gaussiana y pivoteo

- Lo que se hace es intercambiar la fila k-ésima con alguna fila posterior para conseguir un elemento pivote que no sea cero; si esto no puede hacerse, entonces la matriz de los coeficientes del sistema es singular y el sistema no tiene solución única

Factorización triangular

Se va a resolver

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 21 \\
2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 52 \\
3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 8x_4 &= 79 \\
4x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 6x_4 &= 82
\end{aligned}
$$

Factorización triangular

Usando el método descrito antes y sabiendo que la matriz de los coeficientes admite la factorización triangular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 & 8 \\ 4 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \mathbf{LU}$$

Factorización triangular

Usando el algoritmo de sustitución progresiva resolvemos $\boldsymbol{LY = B}$

$$y_1 = 21$$

Factorización triangular

Usando el algoritmo de sustitución progresiva resolvemos $\boldsymbol{LY = B}$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 21 \\
2y_1 + y_2 &= 52
\end{aligned}
$$

Factorización triangular

Usando el algoritmo de sustitución progresiva resolvemos $\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{B}$

$$\begin{aligned} y_1 &= 21 \\ 2y_1 + y_2 &= 52 \\ 3_{y1} + y_2 + y_3 &= 79 \end{aligned}$$

Factorización triangular

Usando el algoritmo de sustitución progresiva resolvemos $\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 21 \\
2y_1 + y_2 &= 52 \\
3_{y1} + y_2 + y_3 &= 79 \\
4y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 &= 82,
\end{aligned}
$$

Obteniendo $y_1 = 21$, $y_2 = 52 - 2(21) = 10$, $y_3 = 79 - 3(21) - 10 = 6$ e $y_4 = 82 - 4(21) - 10 - 2(6) = -24$, o sea, $\boldsymbol{Y} = \left[\begin{array}{cccc} 21 & 10 & 6 & -24 \end{array}\right]'$.

Factorización triangular

Ahora escribimos el sistema $\boldsymbol{UX} = \boldsymbol{Y}$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 21 \\ 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 10 \\ -2x_3 + 3x_4 &= 6 \\ -6x_4 &= -24 \end{aligned}$$

Con el método de sustitución regresiva, se calcula la solución $x_4 = -24/(-6) = 4$, $x_3 = (6 - 3(4))/(-2) = 3$, $x_2 = (10 - 2(4) + 2(3))/4 = 2$ y $x_1 = 21 - 4 - 4(3) - 2(2) = 1$, o sea $\boldsymbol{X} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]'$

Jacobi

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \quad \textit{Solución}: (2,4,3) \\ -2x + y + 5z = 15 \end{array} \tag{1}$$

Jacobi

Estas ecuaciones las podemos escribir como:

$$\begin{aligned} x &= \frac{7+y-z}{4} \\ y &= \frac{21+4x+z}{8} \\ z &= \frac{15+2x-y}{5} \end{aligned} \tag{2}$$

Lo cual sugiere el siguiente proceso iterativo:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{7+y_k-z_k}{4} \\ y_{k+1} &= \frac{21+4x_k+z_k}{8} \\ z_{k+1} &= \frac{15+2x_k-y_k}{5} \end{aligned} \tag{3}$$

Jacobi

Sustituyendo $\mathbb{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1,2,2)$ en el lado derecho de 3 obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7+2-2}{4} = 1{,}75 \\
y_1 &= \frac{21+4+2}{8} = 3{,}375 \\
z_1 &= \frac{15+2-2}{5} = 3{,}00
\end{aligned}
$$

El nuevo punto $\mathbb{P}_1 = (1{,}75, 3{,}375, 3{,}00)$ está más cerca de $(2, 4, 3)$ que $\mathbb{P}_0$.

k	x_k	y_k	z_k
0	1,0	2,0	2,0
1	1,75	3,375	3,0
2	1,84375	3,875	3,025
3	1,9625	3,925	2,9625
...	...	...	...
15	1,99999993	3,99999925	2,99999993
...	...	...	...
19	2,00000000	4,00000000	3,00000000

- Los puntos $\{\mathbb{P}_k\}$ generados por (3) convergen a (2,4,3).

Jacobi

D.E.D: de (1):

- 1^{ra} fila: $|4| > |-1| + |1|$
- 2^{da} fila: $|-8| > |4| + |1|$
- 3^{ra} fila: $|5| > |-2| + |1|$

Luego, la matriz de coeficientes $\mathbb{A}$ del sistema (1) es de **D.E.D.**

Gauss-Seidel

Consideremos el sistema de ecuaciones de (1) y el proceso iterativo, llamado método de Gauss-Seidel, sugerido por (2):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{7+y_k-z_k}{4} \\ y_{k+1} &= \frac{21+4x_{k+1}+z_k}{8} \\ z_{k+1} &= \frac{15+2x_{k+1}-y_{k+1}}{5} \end{aligned} \qquad (4)$$

Empezamos con $\mathbb{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$.

Gauss-Seidel

Sustituyendo $y_0 = 2$ y $z_o = 2$ en la primera ecuación de (4), obtenemos:

$$x_1 = \frac{7+2-2}{4} = 1{,}75$$

Sustituyendo ahora $x_1 = 1{,}75$ y $z_o = 2$ en la segunda ecuación de (4), obtenemos:

$$y_1 = \frac{21+4(1{,}75)+2}{8} = 3{,}75$$

Gauss-Seidel

Finalmente, sustituyendo $x_1 = 1{,}75$ y $y_1 = 3{,}75$ en la tercera ecuación de (4), obtenemos:

$$z_1 = \frac{15 + 2(1{,}75) - 3{,}75}{5} = 2{,}95$$

El nuevo punto $\mathbb{P}_1 = (1{,}75, 3{,}75, 2{,}95)$ está más cerca de $(2, 4, 3)$ que $\mathbb{P}_0$ y es mejor que el punto obtenido en el ejemplo anterior.

Gauss-Seidel

k	x_k	y_k	z_k
0	1,0	2,0	2,0
1	1,75	3,75	2,95
2	1,95	3,56875	2,98623
3	1,995625	3,99609375	2,99903125
...	...	...	...
8	1,99999985	3,99999988	2,99999996
9	1,99999998	3,99999999	3,00000000
10	2,00000000	4,00000000	3,00000000

- Los puntos $\{\mathbb{P}_k\}$ generados por (4) convergen a (2,4,3).