UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS (ESPE)

LABORATORIO N°4

Janeth Katherine Oyasa Sepa, Juan Daniel Tixi Yupa
Departamento de Eléctrica y Electrónica, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Autopista General Rumiñahui S/N y Ambato, Sangolquí 171103.

E-mail: jkoyasa@espe.edu.ec, jdtixi@espe.edu.ec

(Recibido el martes 2 de febrero de 2021, aceptado el martes 9 de febrero de 2021)

I. Introducción

Hasta ahora hemos analizado circuitos en DC, esto es circuitos en donde las fuentes de tensión y de corriente no varían en el transcurso del tiempo, pero debemos estudiar circuitos en donde, tanto como la corriente y el voltaje van a variar en el transcurso de tiempo. Comenzamos en el análisis de circuitos en AC, pero antes de entrar al propio análisis de circuitos debemos comprender el concepto de fasor, con el cual representamos precisamente esas variaciones u oscilaciones de una forma gráfica. El fasor nos ayudara a resolver todos los problemas que se presenten de aquí en adelante, por lo tanto, es muy importante interiorizarlo y saberlos manejarlos a la perfección.

Objetivo General

Estudiar los números complejos, dándole una definición, y ver sus diversas formas de representación tanto como su expresión polar como rectangular, y proceder a realizar las operaciones fundamentales con los complejos, como son suma resta, multiplicación y división.

Objetivos Específicos

Evaluar y explicar la definición de un fasor

Representar un numero complejo en su forma polar y rectangular

Elaborar varias operaciones aritméticas con los números complejos

I. Marco Teórico

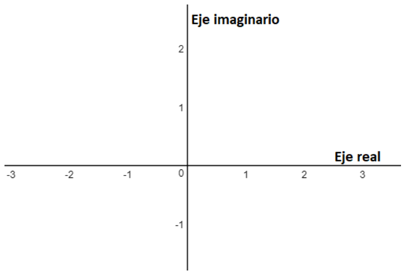
Uno de los conceptos más importantes dentro de la formación educativa de los ingenieros electrónicos es el de fasores pues supone una simplificación al estudio de ecuaciones al trabajar con números complejos, para clarificar el tema de fasores se presentarán conceptos a tomar en cuenta durante el desarrollo de ejercicios propuestos:

1.3.1. DEFINICIONES BÁSICAS

1.3.1.1. Números Complejos

En el uso de matemáticas dentro de la ingeniería eléctrica no solo usamos números reales sino también aplicamos números complejos especialmente al tratarse de fuentes sinusoidales dependientes de la frecuencia y vectores. Entonces vemos la introducción de los números complejos como una manera de permitir ecuaciones complejas que hay que resolver con los números que son las raíces cuadradas de números negativos, para identificarlos en la ingeniería eléctrica podemos usar el nombre de “número imaginario” y lo distinguimos agregando la letra “j”, conocido usualmente como el j-operador.

Así los números complejos se componen de un número real más un operador y el número imaginario, además pueden ser representados en dos dimensiones donde el eje real (números reales) corresponde al eje horizontal mientras que el eje imaginario (números imaginarios) corresponde al eje vertical.



Un número complejo se puede expresar en dos sistemas coordenados: cartesiano y polar, representados a continuación:

$$z = x + j\,y$$

$$z = r \angle \phi = re^{j\phi}$$

Donde:

z = Número Complejo.
x = Parte Real.
y = Parte Imaginaria.
r = Magnitud del Número Imaginario.
ϕ = Fase o el Ángulo formado entre x e y.

Existe una relación entre la forma rectangular y la polar. Cuando partimos de un número complejo en su forma rectangular, se usa las siguientes operaciones para transformarla a coordenadas polares:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Al igual que si se partiera de un número complejo en su forma polar para transformarlo se tiene que:

$$x = r \,.\, cos(\phi)$$

$$x = r \,.\, sen(\phi)$$

Una representación del número complejo entonces podría ser:

$$\boldsymbol{z = x + j\,y = r \llcorner \phi = r\,.(cos(\phi) + j\,sen(\phi))}$$

1.3.1.2. Operaciones básicas de números complejos

Resta:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Multiplicación:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \underline{/\phi_1 + \phi_2}$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \underline{/\phi_1 - \phi_2}$$

Inverso:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \underline{/-\phi}$$

Raíz cuadrada:

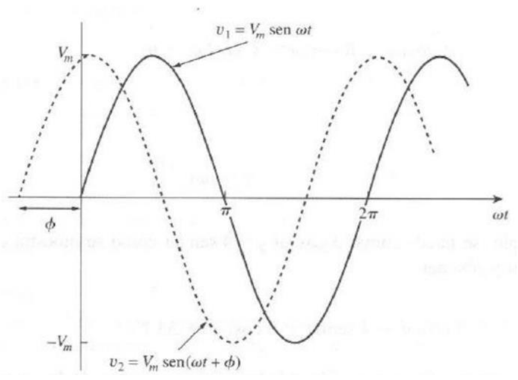
$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, \underline{/\phi/2}$$

Conjugado complejo:

$$z^* = x - jy = r\underline{/-\phi} = re^{-j\phi}$$

Senoide

La peculiaridad de la corriente alterna es la forma en que se propaga la señal, pues en este tipo de energía aparecen las senoides dado que la tensión o corriente varían con el tiempo. Entonces podemos decir que las senoides representan la forma más frecuente en la naturaleza y ahí radica su importancia dentro de la energía de este tipo pues tienen una forma fácil de generar y transmitir. Un senoide es una señal que tiene la forma de la función seno o coseno, recordando que ambas tienen la misma geometría y lo que cambia es su punto de partida. Además, los cálculos de estos suelen ser más sencillos de manejar.



Una tensión senoidal tiene la forma siguiente en el dominio temporal:

$$\boldsymbol{V_{(t)} = V_m\ sen\,(\omega\, t +\ \emptyset)}$$

El método más corto para la suma de voltajes y corrientes alternos de un circuito eléctrico es el uso del vector radial en rotación. A este vector radial se le llama fasor que mantiene una magnitud constante con un extremo fijo en el origen.

1.3.1.3. Fasor

Un fasor es un número complejo que representa la magnitud y la fase de una senoide. Para comprender mejor el concepto supongamos que queremos sumar dos voltajes que varían en el tiempo, $V_{1(t)}\ y\ V_{2(t)}$, los cuáles están representados matemáticamente por las expresiones en $[V]$:

$$\boldsymbol{V_{1\,(t)} = 2\ \ sen\,(\omega\, t +\ 90°)\quad ;\quad V_{2\,(t)} =\ sen\,(\omega\, t)}$$

En el caso del voltaje (o la corriente), la transformación fasorial se manifiesta de la siguiente manera:

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ (Representación en el dominio temporal)	$\Leftrightarrow$	$\mathbf{V} = V_m\underline{/\phi}$ (Representación en el dominio fasorial)

Usando la forma polar y regresando al ejemplo dado anteriormente, la suma de los voltajes se expresa de la siguiente manera en el dominio fasorial:

$$\boldsymbol{V_l} = \boldsymbol{V_1} + \boldsymbol{V_2}$$

$$\boldsymbol{V_l} = (\,\mathbf{2} \llcorner \mathbf{90}°) + (\,\mathbf{1} \llcorner \mathbf{0}°)$$

Fasor en su forma rectangular y polar además de su representación gráfica.

En otras palabras, podemos decir que el fasor puede considerarse como un equivalente matemático de una senoide en la dependencia del tiempo.

Representación en el dominio temporal	Representación en el dominio fasorial
$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi - 90°$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$I_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta - 90°$

II. Diseño y Cálculos

Transforme a su forma polar los siguientes números complejos.

Lista de componentes

Cantidad	Material o Equipo
1	Calculadora Científica
1	Hoja de Excel
2	Hoja a cuadros para los cálculos

a) 2+3j

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3.61$$

$$\tan\theta = \frac{3}{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{2}$$

$$\theta \approx 56.30$$

por tanto $z = 3.61\angle 56.31°$

directamente en calculadora:

$$z = 3.61\angle 56.31°$$

$$Error = \frac{3.61\angle 56.31° - 3.61\angle 56.31}{3.61\angle 56.31°}$$

$$Error = 0\%$$

b) -8+6.2j

$$r = \sqrt{8^2 + 6.2^2} = \sqrt{\frac{2561}{25}}$$

$$= 10.12$$

$$\tan\theta = \frac{6.2}{-8}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{6.2}{-8}$$

$$\theta \approx -37.77$$

como el vector está en el segundo cuadrante tenemos:

$$\theta \approx 180 - 37.77$$

$$\theta \approx 142.23$$

por tanto $z = 10.12\angle 142.23°$

directamente en calculadora:

$$z = 10.12\angle 142.23°$$

$$Error = \frac{10.12\angle 142.23° - 10.12\angle 142.23°}{10.12\angle 142.23°}$$

$$Error = 0\%$$

c) 4.3-2.8j

$$r = \sqrt{4.3^2 + 2.8^2} = \sqrt{\frac{2633}{100}}$$

$$\approx 5.13$$

$$\tan\theta = \frac{-2.8}{4.3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-2.8}{4.3}$$

$$\theta \approx -33.07$$

por tanto $z = 5.13\angle -33.07°$

Calculado directamente en calculadora:

$$z = 5.13\angle -33.07°$$

$$Error = \frac{5.13\angle -33.07° - 5.13\angle -33.07°}{5.13\angle -33.07°}$$
$Error$ =0%

d) -6-3.2j

$$r = \sqrt{6^2 + 3.2^2} = \sqrt{\frac{1156}{25}}$$
$$= 6.8$$
$$\tan\theta = \frac{3.2}{6}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{8}{15}$$
$$\theta \approx 28.07$$
Como el vector está en el tercer cuadrante:
$$\theta = -180 + 28.07$$
$$\theta = -151.93$$

por tanto $z = 6.8\angle -151.93°$

Calculado directamente en calculadora:
$$z = 6.8\angle -151.92°$$

$$Error = \frac{6.8\angle -151.93 - 6.8\angle -151.92°}{6.8\angle -151.93}$$
$$Error = 1.52\ 10^{-6}$$

Transforme a su forma rectangular

a) 36 | -10°

$$y = 36\sin(-10)$$
$$y = -6.25$$
$$x = 36\cos(-10)$$
$$x \approx 35.45$$
$$z = 35.45 - 6.25j$$
Valor calculado directamente:
$$z = 35.45 - 6.25j$$
$$Error = 0\%$$

b) 28.7 | 135°

$$y = 28.7\sin(135)$$
$$y \approx 20.29$$
$$x = 28.7\cos(135)$$
$$x \approx -20.29$$
$$z = -20.29 + 20.29j$$
Valor calculado directamente:
$$z = -20.29 + 20.29j$$
$Error$ =0%

c) 11.2 | 28°

$$y = 11.2\sin(28)$$
$$y \approx 5.26$$
$$x = 11.2\cos(28)$$
$$x \approx 9.88$$
$$z = 9.88 + 5.26j$$
Valor calculado directamente:
$$z = 9.88 + 5.26j$$
$$Error = 0\%$$

d) 45 | -117.9°

$$y = 45\sin(-117.9)$$
$$y \approx -39.77$$
$$x = 45\cos(-117.9)$$
$$x \approx -21.06$$
$$z = -21.06 - 39.77j$$
Valor calculado directamente:
$$z = -21.06 - 39.77j$$
$$Error = 0\%$$

Realice las siguientes operaciones paso a paso, y represente el resultado tanto en su
forma rectangular como en su forma polar.

a) **(10 + 3 j) /2j - (7 + 2 j) (3 |-115°) =**

$$(3\ |{-115°}) = -1.26 - 2.71\text{j}$$

$$=\frac{(10+3\text{ j})}{2j} - (7+2\text{ j})(-1.26-2.71\text{j})$$

$$=\frac{3}{2} - 5\text{ j} - (7+2\text{ j})(-1.26-2.71\text{j})$$

$$z = 1.5 - 5j - (-3.4 - 21.49j)$$

$$z = 1.5 - 5j + 3.4 + 21.49j$$

$$z = 4.9 + 16.49j$$

$$z = 17.20\angle 73.45°$$

Directamente en calculadora

$$z = 4.93 + 16.56j$$

$$z = 17.27\angle 73.42°$$

b) $\mathbf{6.8\angle 125.5}° + \frac{\mathbf{4.5\angle{-11.5}}}{\mathbf{7.6-1.2j}}=$

$$6.8\angle 125.5° = -3.94 + 5.53j$$

$$4.5\angle - 11.5° = 4.40 - 0.88j$$

$$z = -3.94 + 5.53j + 0.5827 - 0.023j$$

$$z = -3.36 + 5.50j$$
$$z = 6.45\angle 121.42°$$

Directamente en calculadora

$$z = -3.36 + 5.51j$$

$$z = 6.45\angle 121.42°$$

c) $\frac{\mathbf{34+28.5j}}{\mathbf{4\angle{-20.8}}} - \mathbf{51.2\angle 215}° =$

$$51.2\angle 215° = -41.94 - 29.36j$$

$$4\angle - 20.8° = 3.73 - 1.42j$$

$$= \frac{34 + 28.5j}{3.73 - 1.42j} - (-41.94 - 29.36j)$$

$$= 5.42 + 9.704 + 41.94 + 29.36j$$

$$z = 47.36 + 39.06j$$

$$z = 61.38\angle 39.51°$$

Directamente en calculadora

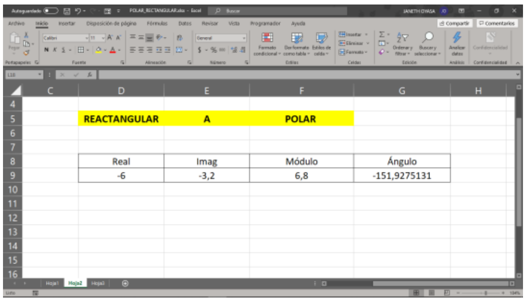
$$z = 47.35 + 39.04j$$

$$z = 61.36\angle 39.51°$$

III. Pruebas de funcionamiento

5. Explicación

Para esta práctica se ha usado los conocimientos básicos de algebra y la teoría de operación con números complejos.
Los cálculos en este documento fueron realizados con calculadora que admite operaciones con números complejos, digitando correctamente cada uno de los números, asociando correctamente la parte real con la parte imaginaria en cada uno de ellos, con el fin de obtener los resultados que son los correctos.



Sea adjunta el link de una página web donde se comprueban todos los cálculos realizados mediante un proceso computacional

http://www.learningaboutelectronics.com/Articulos/Calculadora-de-conversion-de-forma-rectangular-a-polar.php#respuesta

Introduzca el Número Real 2

Introduzca el Número Imaginario 3 j

Respuesta: **Forma polar: 3,61 < 56,31°**

Calcular

7. Descripción de prerrequisitos y configuración

Para esta práctica el instrumento de cálculo usado fue la calculadora Casio 570ES Plus, esta calculadora admite el modo complejo, es decir realiza sin dificultad y de manera correcta las operaciones elementales de complejos como son la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Para esto la calculadora se la pone en el modo complejo usando la tecla en el siguiente orden:

[MODE][2](CMPLX)

Ya realizada esta configuración previa se opera tranquilamente, además este modo permita la transformación rápida de la forma polar a la forma rectangular.

La calculadora web no necesita alguna configuración previa para realizar los caculos de los números complejos, por otros lados, al trabajar en Excel debemos definir bien las columnas que vamos a usar, y digitar correctamente cada una de las fórmulas para hallar los diferentes resultados, saber asociar bien los datos a fin de evitar errores, si deseamos escribir los números complejos en la hoja de cálculo, realizamos lo siguiente:

Se define una columna para la parte imaginaria, en este caso la columna A, para la parte compleja designamos la columna B, y simplemente por representación, se usa la columna Z.

Una vez tenemos esto, procedemos a llamar a la función Complejo, que su fórmula en Excel está dada por:

=COMPLEJO (CELDA1; CELDA2)

Y ya tendremos listo el numero complejo en nuestra hoja del cálculo.

C2 =COMPLEJO(A2;B2)

	A	B	C	D
1	a	b	Z	Fórmula
2	7	3	7+3i	=COMPLEJO(A2;B2)
3	2	5	2+5i	=COMPLEJO(A3;B3;"i")
4			1+3i	1+3i

7. Conclusiones

Concluimos que un fasor es de suma importancia para la comprensión y estudio de la corriente alterna, ya que no solamente nos facilita los cálculos, por otro lado, la facilidad de transformar un número complejo a una forma polar nos da una idea bien cercana al concepto real de las variaciones de las corrientes y voltajes.

Apreciamos que los numero complejos pueden ser representados en un plano (al que llamamos complejo) gráficamente al igual que un vector, y por lo tanto es claro que tendrá su forma polar bien definida.

En cuanto a las operaciones elementales con los números complejos, hallamos que son sencillos de realizar conociendo la teoría y la manera correcta de proceder al momento de hacer las operaciones, además que actualmente existen muchas herramientas que no ayudan con las operaciones, que a veces resultan tediosas.

10Bibliografia

[1] W. McAllister, «Los elementos de los circuitos,» 2016. [En línea]. Available: https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic#circuit-elements.

[2] S. Llanos, *Leyes de Kirchhoff,* 2015.

[3] J. Delgado, *Leyes de Kirchhoff,* 2020.

[4] Anónimo, «Mí física tres,» [En línea]. Available: https://lolala7.wordpress.com/tercer-corte/.

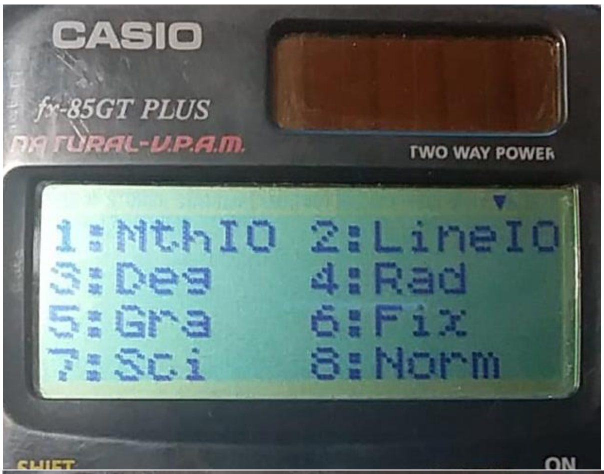
[5] S. M. Alexander, Fundamento de Circuitos Eléctricos, vol. 3ra Edición, The McGraw-Hill Companies Inc., 2006.

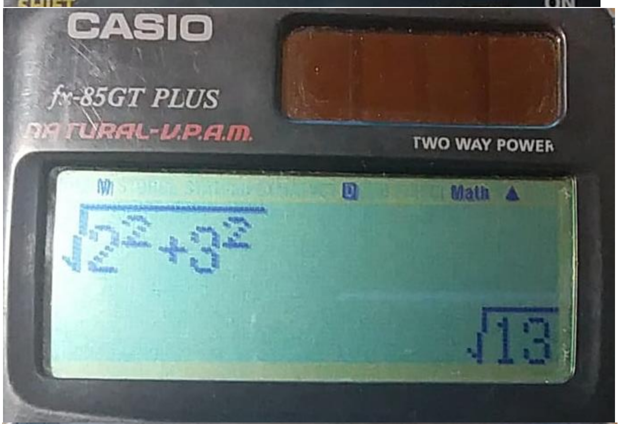
[6] E. FP, *Método de las mallas,* 2017.

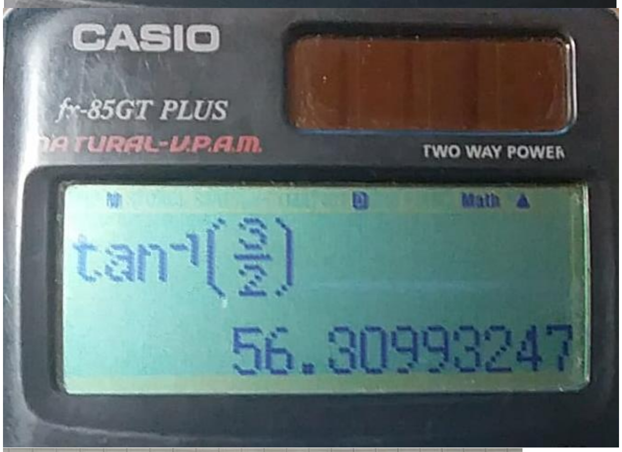
[7] EcuRed, *Método de las corrientes de mallas.*

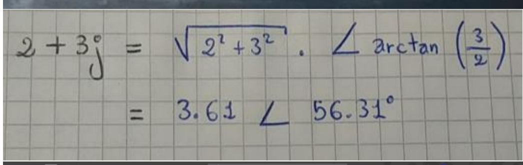
[8] A. García González, *Ley de los voltajes de Kirchhoff: Método de Mallas,* 2013.

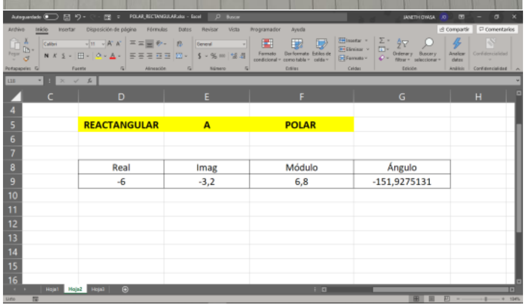
11Anexos











Introduzca el Número Real	2	
Introduzca el Número Imaginario	3	j

Respuesta: **Forma polar: 3,61 < 56,31°**

Calcular