Juan Tixi
EDO

Foro EDO Segundo Parcial

Método del Anulador

Definición:

El anulador hace uso del concepto de operador D, el cual deriva la función a la que se le aplica (es el mismo concepto que y')

$$D[y] = y' = \frac{dy}{dx}$$

Pero el anulador es un operador especial de la función y es aquel que no solamente reduce a cero el grado de la función, sino que lo transforma en cero, en otras palabras lo anula, si denotamos El Anulador como D_A tendremos:

$$D_A[y] = 0$$

A tomar en cuanta, pospuesto que la función en la cual se aplica el operador debe ser derivable en su dominio de definición, el operador anulador siempre tendrá un exponente mayor o igual a 1, Si n es el exponente del anulador entonces notamos que el operador anulador de una función no es único, ósea que a partir de un n todos los exponentes r en el anulador de la forma r=n+k (donde r, k, n pertenecen a los naturales) son anuladores de la función.

Este concepto puede ser usador para la resolución de ecuaciones diferenciales no homogéneas de orden superior, ya que buscaríamos reducir el segundo miembro de la ecuación a cero y por lo tanto obtener una ecuación homogénea.

Primero tengamos en cuenta lo siguiente

Operador Anulador de Funciones Trascendentales:

Anulador para la función e^{ax}:

Para esta función trascendental se debe aplicar el operador anulador $(D - a)$ [y]

Ejemplo:

$$si\ y = e^x$$

$$D[y] = e^x, \qquad con\ a = n = 1;$$

$$(D - 1)\ [y] = 0$$

Distribuyendo a la función

$$D[y] - y = 0$$

Como $D[y] = e^x$

$$e^x - e^x = 0$$

Para las funciones de la forma $y(x) = x^n e^{ax}$

Su operador nulo es $(D - a)^{n+1}[y] = 0$

Para las funciones $\sin(ax)$, $\cos(ax)$

Tenemos el anulador de la siguiente forma:

$$(D^2 + a^2)[y] = 0$$

Pero si las funciones están acompañadas por la exponencial y un polinomio, es decir de la forma general: $y(x) = x^n e^{ax}$sen (bx), $y(x) = x^n e^{ax}$ cos(bx)

Entonces su anulador tendrá la forma:

$$(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2))^{n+1}[y] = 0$$

Anuladores de Suma de funciones:

En una suma de funciones polinómicas:

Partimos de que tenemos una función y=k (k es constante), esto es con la variable x elevado al exponente cero, luego el anulador de la función k es D, ya que si aplicamos D[k] objetemos 0.

Así mismo el anulador de la función y=x es D^2 ya que $D^2[x] = 0$, con el mismo razonamiento tenemos un anulador para x^n que es $D^{n+1}[y] = 0$. Pero en el caso de tener u polinomio de la forma:

$$y = x^{n-1} + \cdots x^2 + x^1$$

Basta saber cuál es el anulador del monomio del mayor exponente, en este caso x^{n-1} es anulado por D^n y los demás monomios son anulados por el operador.

Lo mismo pasa con la suma de funciones de la forma $y(x) = e^{ax} + xe^{ax} + \cdots + x^{n-1}e^{ax}$ al cual le anula $(D - a)^n$ al monomio de mayos exponente y en consecuencia anula los demás monomios en dicha función.

EDO que se obtiene al aplicar el método de la solución:

Teniendo una EDO no homogénea de grado superior con coeficientes constantes de la siguiente forma:

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D \quad + a_0 \quad = g(x)$$

Que se puede denotar de la forma:

$$L[y] = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D \quad + a_0$$

Reduciéndonos la EDO no Homogénea a: $L[y] = g(x)$ (1)

Además, g(x) es una función expresada como combinación lineal de las funciones:

$$k, x^n, x^n e^{ax}, x^n e^{ax} \sin(ax), x^n e^{ax} \cos(ax)$$

Tenemos que saber que el operador que anula la función g(x) está dado por la multiplicación de los operadores que anulan cada una de las funciones que componen g(x), estos son: $D^n, (D - a)^n, (D^2 - 2aD + (a^2 + b^2))^n$, por lo tanto obtenemos un anulador de g(x) que lo expresaremos así $D_A[g(x)] = D^n\ (D - a)^n \left(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)\right)^n = 0$

Este operador resultante lo aplicamos a ambos de (1), obtendremos:

$$D_A\boldsymbol{L}[\boldsymbol{y}] = D_A[g(x)]$$

$$D_A\boldsymbol{L}[\boldsymbol{y}] = 0$$

Obteniendo una EDO Homogénea de coeficientes constantes, que se puede resolver por el método de coeficientes indeterminados aprendida en clase.

Bibliografía

Salas, A. B. (s.f.). *Academia.* Obtenido de https://www.academia.edu/33488227/Apuntes_de_Metodo_del_Anulador_y_de_Variacion_de_Parametros