

欧拉摆在此之前并没有被相关课题组研究。从研究价值上看这个课题的研究价值并不是很大，但作为本科生的科研训练还是个不错的选择。学生的查找文献、理论建模、相关软件的使用等方面的能力都可以得到很好的训练。可以培养学生的动手能力和解决问题的能力。同时初步了解科研实践的具体流程是什么样的。

本题选自IYPT2023的第八题，题目的表述是这样的：

### Euler's Pendulum 欧拉摆

Take a thick plate of non-magnetic material and fix a neodymium magnet on top of it. Suspend a magnetic rod (which can be assembled from cylindrical neodymium magnets) underneath it. Deflect the rod so that it touches the plate only with highest edge and release it. Study the motion of such a pendulum under various conditions.

取一块厚的、无磁性材料制成的板，并在其上面固定一个钕磁铁。在板的下方悬挂一根磁性杆（可以由多块圆柱形钕磁铁组装制成）。使杆偏转至它只有最顶部的边沿接触到板，然后将其释放。研究这种摆在各种条件下的运动。

## 1 理论推导

### 1.1 磁场

根据现代量子力学的基本观点，永磁体的磁性主要来源于带电粒子在轨道上运动产生的轨道电流和由其自旋产生的自旋电流。它们在永磁体内的分布是十分复杂的。但总体来说，形状及充磁方向一致的永磁体磁场分布大致相同，不同的是相对强度的大小。对于圆柱体永磁体，我们假设其磁化电流均匀分布在侧面，磁化电流密度为 $i'$ 。我们用毕奥-萨伐尔定律来计算磁场的空间分布。

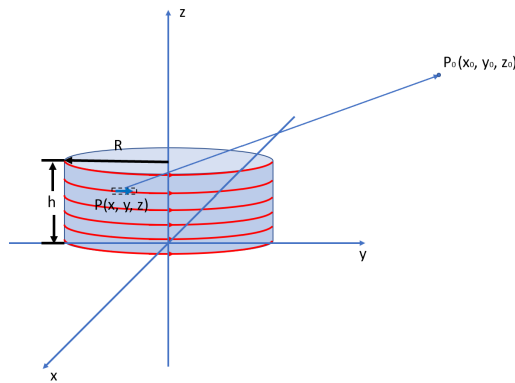


图 1: magneticfield

毕奥-萨伐尔定律为：

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1)$$

在图magneticfield中:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \\ d\mathbf{l} &= (dx, dy, 0)\end{aligned}\quad (2)$$

因此:

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & 0 \\ x_0 - x & y_0 - y & z_0 - z \end{vmatrix} = (z_0 - z)dy\mathbf{i} - (z_0 - z)dx\mathbf{j} + [(y_0 - y)dx - (x_0 - x)dy]\mathbf{k} \quad (3)$$

对 $x, y, z$ 使用极坐标变化, 并带入上式, 就可以得到 $P_0$ 点的磁感应分量:

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = R\sin\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z, & 0 \leq z \leq h \\ K = [(x_0 - R\cos\theta)^2 + (y_0 - R\sin\theta)^2 + (z_0 - z)^2]^{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} B_x = \frac{\mu_0 i'}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{(z_0 - z)R\cos\theta}{K} d\theta dz \\ B_y = \frac{\mu_0 i'}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{(z_0 - z)R\sin\theta}{K} d\theta dz \\ B_z = \frac{\mu_0 i'}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{-(y_0 - R\sin\theta)R\sin\theta - (x_0 - R\cos\theta)R\cos\theta}{K} d\theta dz \end{cases}$$

$$I = i' dz$$

经调查 [?]:

$$i' = \frac{B_\gamma}{\mu_0} \quad (5)$$

其中,  $B_\gamma$ 是剩余磁化强度, 这是永磁体的一个重要参数, 在后面实验部分将提到它的测量。

## 1.2 平面复摆运动

平面复摆运动的可行性可以被推导:

对于我们研究的系统, 介质板可以被视为是无限大的, 这样磁场就是轴对称的。如图force on currentloop, 我们取任意关于运动平面(我们假设它是平面运动, 只要没有垂直于平面的分力, 摆动就是在平面内的)位置对称的电流元 $I d\mathbf{l}_1 = I(x_0, y_0, z_0)$ ,  $I d\mathbf{l}_2 = I(x_0, -y_0, -z_0)$ , 这两点处的磁感应强度分别为 $B_1 = (B_x, B_y, B_z)$ ,  $B_2 = (-B_x, B_y, B_z)$ 。我们可以得到 $I d\mathbf{l}_1 \times B_1 + I d\mathbf{l}_2 \times B_2 = 0\mathbf{i} + 2(z_0 B_x - x_0 B_z)\mathbf{j} + 2(x_0 B_y - y_0 B_x)\mathbf{k}$ 。所以棒是可以在平面运动的。

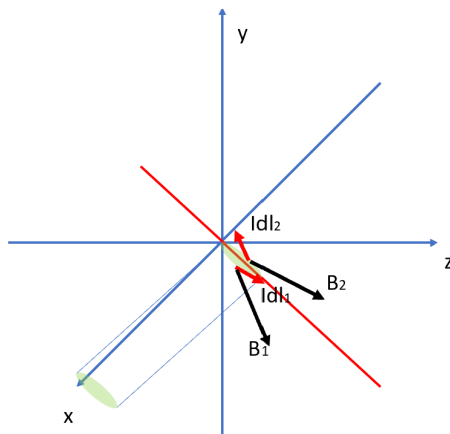


图 2: force on currentloop

### 1.2.1 顶点位置

上面的推导是建立在开始时棒的轴与磁铁的轴重合的基础上的，但这是有条件的。只有当介质板的厚度达到一定程度才可以实现。实验上可以得到这个结果，在附录A中这个问题将给出数值上的推导。

### 1.2.2 转动惯量

转动惯量可用定义及平行轴定理算出：

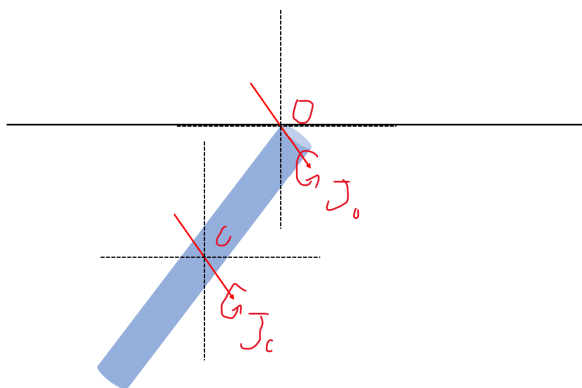


图 3: rotation inertia

设棒的半径为 $R$ ，长为 $l$ ，密度均匀且为 $\rho$ ，质量 $m = \rho\pi R^2 l$ 。则：

$$\begin{aligned}
 J_c &= \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho \, dx \, dy \, dz \\
 &= \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2 + y^2) \, dz \, dx \, dy \\
 &= \rho\pi R^2 l \left( \frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right) \\
 &= m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

于是：

$$J_o = m \left( \frac{5R^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right) \tag{7}$$

### 1.2.3 运动方程

要求运动的微分方程，首先要知道受力，其中比较困难的是阻力和磁场力。先分析阻力，一般的处理方法是认为阻力与速度成正比，这里用角速度，与棒有关的那个常数我们计入阻力系数，记为 $\gamma$ ，则 $f = \gamma \times \frac{d\theta}{dt}$ 。

对于磁场力，只能做定性分析，给出解析式比较困难，且后来大概率是用数值解。根据对称性，磁场力是 $\theta$ 的周期函数。可以设为 $\mu(\theta - \varphi)$ 。加上重力，记为 $F(\theta) = mgsin(\theta - \varphi) + \mu(\theta - \varphi)$ 。

考虑 $\frac{1}{4}$ 周期，因为这里涉及到一个碰撞问题：

可以预想，在棒在A、B顶点切换的瞬间会有一个与介质板的碰撞，假设这个碰撞会使垂直于板的动量分量损失；而水平方向上，也会由于摩擦力的作用而使水平动量发生改变。这是必须的，因为要保证质点与顶点的连线与速度方向垂直。这两者的变化并不是独立的，主导作用是垂直方向，因为摩擦力是响应的，它应响应垂直方向的速度变化（它也包含了一个摩擦力的临界问题）。如图collision，于是，我假设它可以类比于一维的碰撞，有个回复系数 $e$ ，这样我们就可以通过观察摆幅的变化来判断 $e$ 的大小，当然，前提是我们得知道势能的空间分布，因为由磁场，所以这会复杂一些。

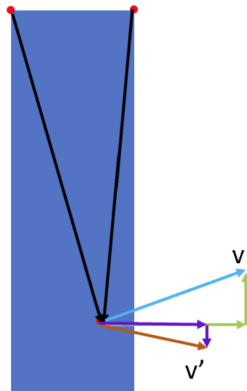


图 4: collision

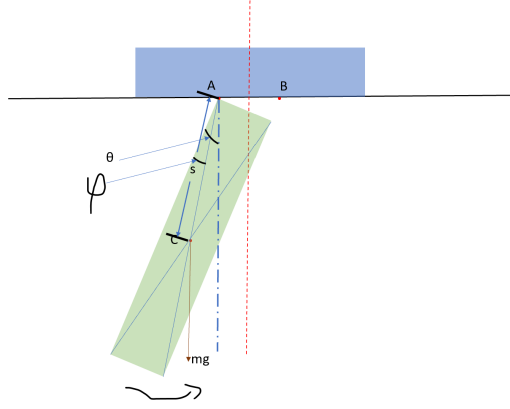


图 5: equation of motion

对于图equation of motion,由转动定理:

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + F(\theta) = 0 \quad (8)$$

对于小角度 (摆动的后期), 我们可以近似  $\sin(\theta - \varphi) = \theta - \varphi$ , 同时令  $\theta - \varphi = \phi$ , 得到下列方程:

$$J_0 \frac{d^2\phi}{dt^2} + \gamma \frac{d\phi}{dt} + mgs\phi = -\mu(\phi) \quad (9)$$

解为:

$$\phi = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} - e^{r_1 t} \int \frac{U_{21}\mu(\phi)}{\det U} d\phi - e^{r_2 t} \int \frac{U_{22}\mu(\phi)}{\det U} d\phi, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 + C_2 t) e^{rt} - e^{rt} \int \frac{U_{21}\mu(\phi)}{\det U} d\phi - t e^{rt} \int \frac{U_{22}\mu(\phi)}{\det U} d\phi, & r_1 = r_2 = r \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $r_1 = (-P + \sqrt{P^2 - 4Q})/2, r_2 = (-P - \sqrt{P^2 - 4Q})/2, P = \frac{\gamma}{J_0}, Q = \frac{mgs}{J_0}$ ,

$$U = \begin{cases} \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix}, & r_1 \neq r_2 \\ \begin{bmatrix} e^{rt} & t e^{rt} \\ r e^{rt} & (1 + rt) e^{rt} \end{bmatrix}, & r_1 = r_2 = r \end{cases}, U_{ij} \text{ 是 } U \text{ 的代数余子式。}$$

上面的方程用来计算是比较困难的, 下面进行简化:

假设能量的损失主要发生在碰撞上面, 忽略空气阻力等阻尼, 于是我们给出运动方程:

$$J_0 * \frac{d^2\alpha}{dt^2} + F_L(\alpha) = 0 \quad (11)$$

其中  $J_0$  已由上面计算给出, 为  $m(\frac{5R^2}{4} + \frac{l^2}{3})$ 。

下面我们来给出  $F_L(\alpha)$ :

用  $x, y, z$  来代替  $x_0, y_0, z_0$ ,  $z$  用  $w$  代替, 则磁场为:

$$\begin{cases} B_x = \frac{\mu_0 i'}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{(z-w)R \cos\theta}{K} d\theta dw \\ B_y = \frac{\mu_0 i'}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{(z-w)R \sin\theta}{K} d\theta dw \\ B_z = \frac{\mu_0 i'}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{-(y-R \sin\theta)R \sin\theta - (x-R \cos\theta)R \cos\theta}{K} d\theta dw \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $K = [(x - R\cos\theta)^2 + (y - R\sin\theta)^2 + (z - w)^2]^{\frac{3}{2}}$

P点的坐标:  $P(0, r + \mu\sin\alpha, -d - \mu\cos\alpha)$

同理,  $Q(0, r + \mu\sin\alpha - r * \cos\alpha, -d - \mu\cos\alpha - r * \sin\alpha)$

$R(r * \sin\alpha, r + \mu\sin\alpha - r * \cos\alpha + r * \cos\beta * \cos\alpha, -d - \mu\cos\alpha - r * \sin\alpha + r * \cos\beta * \sin\alpha)$

$d\mathbf{l} = (r * \cos\beta, -r * \sin\beta * \cos\alpha, -r * \sin\beta * \sin\alpha) * d\beta$

于是,

$$\begin{cases} F_x = i'' * \int_0^l \int_0^{2\pi} (dl_y \times B_z - dl_z \times B_y) d\beta du \\ F_y = i'' * \int_0^l \int_0^{2\pi} (dl_z \times B_x - dl_x \times B_z) d\beta du \\ F_z = i'' * \int_0^l \int_0^{2\pi} (dl_x \times B_y - dl_y \times B_x) d\beta du \end{cases} \quad (13)$$

由上面的对称性分析可以得到  $F_x = 0$ , 于是  $F_L(\alpha) = i'' * \int_0^l \int_0^{2\pi} z * (dl_z \times B_x - dl_x \times B_z) + y * (dl_x \times B_y - dl_y \times B_x) d\beta du - mg(\frac{l}{2} * \cos\alpha + r * \sin\alpha)$

于是角加速度为

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{F_L(\alpha)}{J_0} = -\frac{i' * i''}{J_0} * \frac{F_L(\alpha)}{i' * i''} + \frac{g}{\frac{5R^2}{4} + \frac{l^2}{3}} * (\frac{l}{2} * \cos\alpha + r * \sin\alpha) \quad (14)$$

未知量有恢复系数e。(α<sub>0</sub>为90度)。

这个积分非常复杂, 它是两个二重积分的结合, 用数学软件可以给出数值解, 但却无法给出运动方程的解, 可用费曼教的迭代算法。根据实验可取  $\psi = 0.001s$

$$\begin{cases} \alpha(t + \psi) = \alpha(t) + \psi * w(t + \psi/2) \\ w(t + \psi/2) = w(t - \psi/2) + \psi * \beta(t) \\ \beta(t) = \beta(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = 90 \\ w(\psi/2) = w(0) + \psi/2 * \beta(0) \end{cases} \quad (15)$$

### 1.3 圆锥摆

除了复摆这种简单的运动形式外, 还有圆锥摆这种运动形式。对于上面提到的两种圆锥摆动形式, 都可以根据向心力公式  $F_c = \int_{\Omega} \rho \omega^2 r d\Omega$ , 其中Ω表示棒占据的空间, 来计算圆锥摆在稳定时的位置。而这只是在理想条件下的: 对顶点做圆周运动的摆动形式, 受力得是对称的, 这要求转轴与上方磁铁的轴共线。对于顶点不变的摆动, 可能存在也可能不存在这样的位置。具体的方法是可以算出在某角度下转动的稳定速度。

### 1.4 其他摆动形式及因素

上述的摆动形式实在理想的情况下才能观察到, 实际很难看到; 下面将定性分析实际中的复杂摆动。

### 1.4.1 进动、章动与过渡

由于棒与板之间存在摩擦，摆动的能量就会损耗，这会使圆锥摆向复摆过渡；这种过渡的结果就是产生了进动和章动。因为圆锥摆会退化为平面的摆动，但它很难达到不偏离轴平面（我们定义通过轴的平面为轴平面），于是根据上面的受力分析，会有一个指向轴的磁场力，这回产生一个力矩，这个力矩的作用效果就是使棒进动。但如果它大了或小了，那么就变成了章动。

### 1.4.2 微小因素

除了重力、磁力等比较大的影响因素外，还有许多微小的影响因素，这里我列举三个。

第一，地磁场的作用。这个在要求精度不高的情况下完全可以忽略。地磁场的大小为 $0.5 - 0.6Gs$ ，而钕磁铁一般为 $12200 - 14800Gs$ ，相比之下，可以忽略地磁。

第二，科氏力。由于地球是非惯性系，棒在运动过程中会受到科氏力的作用。我们去最大的角度使 $F_k = 2v\omega$ ，这样近似结果约为 $10^{-4}N$ 。在控制无垂直于振动面的速度情况下，摆顺逆时针的情况都存在。说明科氏力的影响比较小。

第三，电磁感应。在摆运动的过程中，它产生的磁场会反复磁化介质板和上方磁铁，这会产生电磁波。我们想要的使它非常小，不然问题将会十分复杂；如果忽略它对我们实验结果没有什么影响，那么我们就暂时没有必要考虑它。

### 1.4.3 其他

我们上面考虑的是上方圆柱形磁铁的情形，其他形状的磁铁只需重新计算磁场即可，其他可以类比。对于顶点的位置，实际是可以移动的，它趋向于轴。而像板的厚度，材料，棒的长度等影响因素其实包含在了微分方程中，他们是作为参数的形式起作用的。

## 2 附录

附录A



附录B 本附录为实验的数值数据。

基本数据 (记号S5S51C——S-sound声频数据, 5板号, S磁铁号, S棒号, 1重复次数、C-complex复摆)									
亚克力板									
号码 (代号) //次数 (单位cm)	1	2	3	均值					
1	0.387	0.386	0.389	0.387					
3	0.792	0.789	0.789	0.790					
5	1.015	1.014	0.984	1.004					
磁铁									
直径 (长、宽) 厚度/cm									
大/L	2.900	1.946							
小/m	2.450	1.916							
方/s	0.850	0.978							
棒									
直径/cm	0.950								
长/cm	7.600								
记号	短、中-S、M (2个)								
质量/g									
	44.2968								
	44.3012								
	44.2959								
	44.29796667	44.3							

图 6: data 0

[illegible]

图 7: data 1

[illegible]

图 8: data 2

## 参考文献

- [1] 周恩权, 郑仲桥, 张燕红, and 王奇瑞, “圆柱形永磁体磁场建模及仿真研究,” 河南科技, vol. No.623, no. 139-143, 2017.