Question

1. 分别用Givens和Householder变换写出幺正矩阵U使得$U\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$，并将你得到的Givens矩阵写为Householder矩阵的乘积。
2. 编写程序：
   随机生成$\mathbb{C}^n$中非零向量$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$，要求$\|\boldsymbol{\xi}\|=\|\boldsymbol{\eta}\|$，分别用Givens变换和Householder变换计算幺正矩阵U,使$U\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}$。
   要求：
   - n 是函数参数,可以是任意正整数;
   - 非零向量$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$作为函数参数;
   - 确认矩阵U是幺正矩阵;
   - 用函数实现, 例如:

     ```
     int Givens(int n, Complex* xi, Complex* yita, Complex* U)
       {
       }
     ```

     这里Complex也可以写为complex<double>。
   - 随机产生3组n, $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$，调用函数计算相应的矩阵$U$，并验算你的结果。
   - 写文档详细介绍你的算法以及运行结果;
   - 如果取实数域中的向量,此题最多给9分;
   - 要求程序在linux下面可以运行;
   - 自作业发布之日起两周内交作业.

Question1

Note:题目中要求的是幺正矩阵，但由于涉及到的向量均属于$\mathbb{R}^2$空间（$\mathbb{C}^2$的子空间），所以实际要求的是正交矩阵。（所有的正交矩阵都是幺正的）

1. Givens矩阵
   Givens矩阵U可以表示为：$U=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，则$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta+\sin\theta\\-\sin\theta+\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$，可以解得$\theta=\pi/4$.

综上，Givens矩阵$U=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$.

2. Householder矩阵

   记$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$，则$\mathbf{H}=\mathbf{I}-2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\intercal}$, 其中$\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathbf{a-b}}{\|\mathbf{a-b}\|}$.

   综上，Householder矩阵$U=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

Question2

理论基础

Givens 变换

- 引理：有$x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)^{\intercal}\in\mathbb{C}^n$, 当$|\xi_i|^2+|\xi_k|^2\neq 0$时，令$c=\frac{|\xi_i|}{\sqrt{|\xi_i|^2+|\xi_k|^2}},s=\frac{|\xi_k|}{\sqrt{|\xi_i|^2+|\xi_k|^2}},\theta_1=-arg\xi_i,\theta_2=-arg\xi_k,\mathbf{y}=\mathbf{U_{ik}x}=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)^{\intercal}$, 其中$\begin{cases}\eta_i=\xi_i ce^{j\theta_1}+\xi_k se^{j\theta_2}\\ \eta_k=-\xi_i se^{j\theta_2}+\xi_k ce^{j\theta}\\ \eta_t=\xi_t(t\neq i,k)\end{cases}$，则有$\eta_i=\sqrt{|\xi_i|^2+|\xi_k|^2}>0,\eta_k=0$。

  这个引理很好证明，直接带进去验算即可，这里就不展开去算了。

对于$\mathbb{C}^n$中的向量$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$, 如果$\eta_n\neq 0$,那么我们可以得到线性无关集$\{\boldsymbol{\eta},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},...,\mathbf{e_n}\}$。使用上一次作业中施密特正交化可以得到一个坐标变换矩阵$T=[\boldsymbol{\mu_1}\quad\boldsymbol{\mu_2}\quad\dots\quad\boldsymbol{\mu_n}]$, 其中$\boldsymbol{\mu_1}=\boldsymbol{\eta}/|\boldsymbol{\eta}|$.

非常重要的一点是T是幺正矩阵，即$T^{\dagger}T=TT^{\dagger}=I$.

这样就有$\boldsymbol{\xi'}=T\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta'}=T\boldsymbol{\eta}=(|\boldsymbol{\eta}|,0,0,...,0)^{\intercal}$，于是我们可以通过引理，进行最多n-1次（如果$\boldsymbol{\eta}$含有0分量的话，那一次就不用转了）的Givens旋转使$\boldsymbol{\xi'}$变成$\boldsymbol{\eta'}$。即$U'\boldsymbol{\xi'}=\boldsymbol{\eta'}$.

通过坐标变换可以得到$T^{\dagger}U'TT^{\dagger}\boldsymbol{\xi'}=T^{\dagger}\boldsymbol{\eta'}$, 即$T^{\dagger}U'T\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}$;这样我们就得到了$U=T^{\dagger}U'T$.

Householder 变换

非零向量$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$满足$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta}$, 如果$\boldsymbol{\eta}=e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}$, 令$U=e^{i\theta}I$, 则$U\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}$.

否则，令$\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\eta}=e^{i\theta}|\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\eta}|$, 定义$\boldsymbol{\omega}=\frac{e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}}{|e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|}$.

则$e^{i\theta}(I-2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^\dagger)\boldsymbol{\xi}=e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}-(e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\frac{2e^{i\theta}(e^{-i\theta}\boldsymbol{\xi}^\dagger-\boldsymbol{\eta}^\dagger)\boldsymbol{\xi}}{(e^{-i\theta}\boldsymbol{\xi}^\dagger-\boldsymbol{\eta}^\dagger)(e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})}=e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}-(e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\frac{2\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\xi}-2e^{i\theta}\boldsymbol{\eta}^\dagger\boldsymbol{\xi}}{2\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\xi}-e^{-i\theta}\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\eta}-e^{i\theta}\boldsymbol{\eta}^\dagger\boldsymbol{\xi}}=\boldsymbol{\eta}$。

综上$U=e^{i\theta}(I-\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^\dagger)$,其中$\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\eta}=e^{i\theta}|\boldsymbol{\xi}^\dagger\boldsymbol{\eta}|$, $\boldsymbol{\omega}=\frac{e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}}{|e^{i\theta}\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|}$.