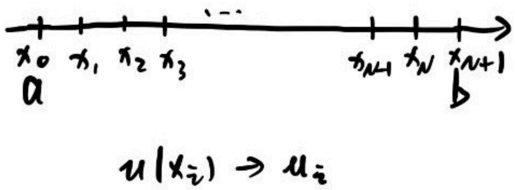
# 兰州大学数学物理方法2小课题

Github web address

## 通用理论

### 1. (非)均匀齐次Helmholtz方程的有限差分法(Finite Difference Method)(1st B.C.)

#### a. 1-dimension




对于非均匀的Helmholtz方程：

$$-f(x)\Delta u(x) = k^2 u(x)$$

我们可以采用差分的形式来表示，如上图1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}|_i &= \frac{u|_{i+\frac{1}{2}} - u|_{i-\frac{1}{2}}}{\delta x} \\ so, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_i &= \frac{\frac{u|_{i+1}-u|_i}{\delta x} - \frac{u|_i - u|_{i-1}}{\delta x}}{\delta x} \\ &= \frac{u|_{i+1} + u|_{i-1} - 2*u|_i}{(\delta x)^2} \end{aligned}$$

因此非均匀Helmholtz方程可以写为：

$$-f|_i * \frac{u|_{i+1} + u|_{i-1} - 2*u|_i}{(\delta x)^2} = k^2 * u|_i$$

考虑边界条件我们可以得到：

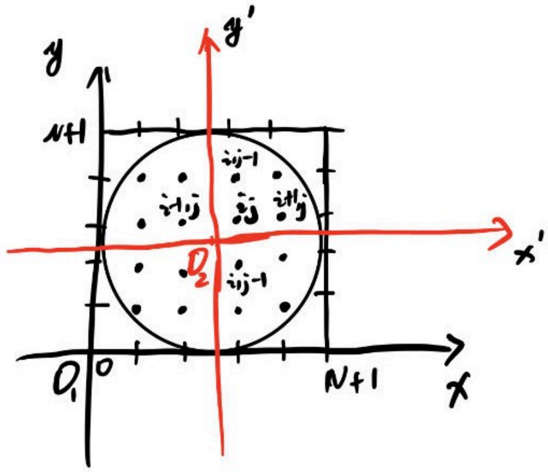
$$\begin{aligned} & u|_0 = u|_{N+1} = 0 \\ so \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_1 = \frac{u|_2 - 2*u|_1}{(\delta x)^2} \\ and \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_N = \frac{u|_{N-1} - 2*u|_N}{(\delta x)^2} \end{aligned}$$

综上，我们可以得到N个线性无关的线性方程组，写成矩阵形式即为：

$$\frac{1}{\delta x^2}\begin{bmatrix} 2f_1 & -f_1 & & & \\ -f_2 & 2f_2 & -f_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & -f_{N-1} & 2f_{N-1} & -f_{N-1} \\ & & & -f_N & 2f_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = k^2 * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}$$

通过这个方程的本征解我们可以得到非线性(线性)Helmholtz方程本征解的近似解。这种方法我们称为有限差分法。

**b. 2-dimension**



对于二维的非线性(线性)Helmholtz方程：

$$-f(x,y)\Delta u(x,y)=k^2u(x,y)$$

重复上面的操作，我们可以得到：

$$-f|_{ij}*(\frac{u|_{i+1,j}+u|_{i-1,j}-2*u|_{i,j}}{(\delta x)^2}+\frac{u|_{i,j+1}+u|_{i,j-1}-2*u|_{i,j}}{(\delta y)^2})=k^2*u|_{ij}$$

我们同样可以写成矩阵方程的形式，只不过会比较大，这里只给出向量参数的形式：

$$\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} & u_{21} & \dots & u_{2N} & \dots & u_{N1} & \dots & u_{NN}\end{pmatrix}^\top$$

以上就是有限差分法的基本原理，处理具体问题的时候还需要一定的计算技巧。

## 2. 一维有限区域齐次Helmholtz方程的解(1st B.C.)

$$\begin{aligned}&\Delta u(x)+k^2u(x)=0, x\in[a,b]\\&u(a)=u(b)=0\end{aligned}$$

这是一个可解问题，PDE理论有完美的解释。其对应的本征多项式为$\lambda^2+k^2=0\rightarrow\lambda=\pm ik$。通解可以表示为：

$$u=C_1e^{ik(x-a)}+C_2e^{-ik(x-a)}$$

如果我们只考虑实数域上的，上面的通解可以转换为：

$$u=C_1\cos k(x-a)+C_2\sin k(x-a)$$

将边界条件代入我们可以得到：

$$\begin{aligned}&u(a)=C_1=0\\&u(b)=C_1\cos k(b-a)+C_2\sin k(b-a)=0\end{aligned}$$

即

$$u=C\sin\frac{n\pi}{b-a}(x-a),\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

## 3. 二维圆形区域齐次Helmholtz方程的解(1st B.C.)

$$\begin{aligned}&(\Delta+k^2)u(\rho,\varphi)=0,\quad\rho<b;\varphi\in[0,2\pi)\\&u(b,\varphi)=0\end{aligned}$$

将上面的式子展开并考虑物理的情况：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0\\&u(b,\varphi)=0,u(\rho,\varphi)|_{\rho=0}\text{有限}\\&u(\rho,\varphi)=u(\rho,\varphi+2\pi)\end{aligned}$$

令$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$，轴向方程为：

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+m^2\Phi(\varphi)=0;\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$$

在实数域中，其通解可以表示为：

$$\varphi(m)=\cos m\varphi,\sin m\varphi \quad m=0,\pm1,\pm2,\dots$$

径向方程可以表示为：

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho})+(k^2-\frac{m^2}{\rho^2})R(\rho)=0\to BesselEquation\\ R(b)=0,R(0)\text{有限}$$

Bessel方程的解为：

$$R^{(m)}(\rho)=C_mJ_m(k\rho)+D_mN_m(k\rho)$$

将边界条件和物理条件代入可得：

$$R(0)\text{有限}\to D_m=0\\ R(b)=0\to J_m(k\rho)=0$$

因此，这个问题的本征值和本征解为：

$$[k_n^{(m)}]^2=[\frac{x_n^{(m)}}{b}]^2,\quad n=1,2,3,\dots\\ R_n^{(m)}(\rho)=J_m(\frac{x_n^{(m)}}{b}*\rho),\quad n=1,2,3,\dots$$

## 4. (非)均匀齐次Helmholtz方程的谱方法(Spectral Method)(1st B.C.)

### a. 1-dimension

$$(f(x)\Delta+k^2)u(x)=0\\ \to -f(x)\Delta(x)=k^2u(x)$$

设$(\Delta+k^2)u(x)=0$的本征解为$\{\varphi_n,n=1,2,\dots\}$，对应的的本征值为$\widetilde{k_n}$。令$u(x)=\sum_n c_n\varphi(x)$。

$$\text{左侧：}\quad -f(x)\Delta u(x)=-f(x)\sum_n c_n\widetilde{k_n^2}\varphi_n(x)\\ \text{右侧：}\quad k^2\sum_n c_n\varphi_n(x)$$

分别与$\varphi_m$做内积：

$$\begin{aligned}\text{左侧：}\quad &\left\langle\varphi_m,-f(x)\sum_n c_n\widetilde{k_n^2}\varphi_n(x)\right\rangle\\ &=-\sum_n c_n\widetilde{k_n^2}\left\langle\varphi_m,f(x)\varphi_n(x)\right\rangle\\ &=-\sum_n M_{mn}\widetilde{k_n^2}c_n\quad \text{令}\left\langle\varphi_m,f(x)\varphi_n(x)\right\rangle=M_{mn}\\ \text{右侧：}\quad &\left\langle\varphi_m,k^2\sum_n c_n\varphi_n(x)\right\rangle\\ &=k^2\sum_n c_n\left\langle\varphi_m,\varphi_n(x)\right\rangle\\ &=k^2\sum_n c_n\delta_{mn}\left\langle\varphi_m,\varphi_m\right\rangle\\ &=k^2N_mc_m\quad \text{令}\left\langle\varphi_m,\varphi_m\right\rangle=N_m\end{aligned}$$

由上面的推到我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
&-\sum_n M_{mn}\widetilde{k_n^2}c_n = k^2 N_m c_m \\
&\Rightarrow -\sum_n \frac{M_{mn}\widetilde{k_n^2}}{N_m}c_n = k^2 c_m \\
&\Rightarrow \sum_n \widetilde{M}_{mn}c_n = k^2 c_m
\end{aligned}
$$

这又是一个矩阵方程，我们可以通过对角化的方式求出对应的特征值和特征向量：

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{M}_{mn}) = \widetilde{M}, (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top = C \\
&\widetilde{M}C = k^2 C \\
\Rightarrow &\widetilde{M}C_\alpha = \lambda_\alpha C_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots
\end{aligned},
$$

综上，非线性(线性)齐次Helmholtz方程的解为：

$$
\begin{aligned}
&k_\alpha^2 = \lambda_\alpha, k_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}, C_\alpha = (c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \dots, c_{\alpha_n})^\top \\
&u_\alpha(x) = \sum_n c_{\alpha n}\varphi_n(\lambda)
\end{aligned}
$$

# 补充内容

## 1. Romeberg积分方法

在谱方法中我们需要用到数值积分公式，由于我们使用的是C语言，没有现成的函数供我们使用，因此决定自己编写目前最具效率的积分方法——Romberg积分。这里只给出伪代码；推导过程可以在任何一本数值积分教材中找到(下面的伪代码来自《数值计算方法与算法》)，具体的程序会有一些技巧，以具体程序为准。**例如，在判断是否退出循环前至少需要迭代几次，大部分情况都是没问题的，但也有少部分特殊情况；不要问我怎么知道的😭😭😭😭😭😭**

step1 输入区间端点 $a$，$b$，精度控制值 $e$，循环次数 $M$，定义函数 $f(x)$，取 $n=1$，$h=b-a$

step 2 $R_{1,1}=(f(a)+f(b))h/2$

step 3 for $k=2$ to $M$

$\{R_{k,1}=\left(R_{k-1,1}+h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}}f(a+(2i-1)h_k)\right)/2 \quad !h_k=h/2^{k-1}$

for $j=2$ to $k$

$\{R_{k,j}=R_{k,j-1}+(R_{k,j-1}-R_{k-1,j-1})/(4^{j-1}-1)\}$

if $|R_{k,k}-R_{k-1,k-1}|<e$ 退出循环

}

step 4 输出 $R_{k,k}$.

## 2. packages

### a. LAPACK

程序会涉及到矩阵的对角化，我们使用矩阵运算库LAPACK。访问官网请点击here。

### b. GNU Scientific Library

这个库应该比较强大，除了涉及一些特殊函数外还有很多其他的东西，但我暂时没有时间爱你深究，引入它是因为我们需要用到柱函数的解；也就是Bessel函数，其他功能以Bessel函数的使用方法可以参考官网上的Docs。

## 3.Bessel 函数及其导数的零点

在第一类边界条件、二维圆区域问题中，Helmholtz方程的本征值实际上就是Bessel函数的零点，下面我们给出Bessel函数零点的参考值,引自[1]。

TABLE

| | Mode* $l$–$m$ | Value† | | Mode* $l$–$m$ | Value† |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | TE 1–1 | 1.841184 | (48 | TM 1–4 | 13.323692 |
| 2 | TM 0–1 | 2.404826 | (49 | TE 0–4 | 13.323692 |
| 3 | TE 2–1 | 3.054237 | 50 | TM 9–1 | 13.354300 |
| (4 | TM 1–1 | 3.831706 | 51 | TM 6–2 | 13.589290 |
| (5 | TE 0–1 | 3.831706 | 52 | TE 12–1 | 13.878843 |
| 6 | TE 3–1 | 4.201189 | 53 | TE 5–3 | 13.987189 |
| 7 | TM 2–1 | 5.135622 | 54 | TE 8–2 | 14.115519 |
| 8 | TE 4–1 | 5.317553 | 55 | TM 4–3 | 14.372537 |
| 9 | TE 1–2 | 5.331443 | 56 | TM 10–1 | 14.475501 |
| 10 | TM 0–2 | 5.520078 | 57 | TE 3–4 | 14.585848 |
| 11 | TM 3–1 | 6.380162 | 58 | TM 2–4 | 14.795952 |
| 12 | TE 5–1 | 6.415616 | 59 | TM 7–2 | 14.821269 |
| 13 | TE 2–2 | 6.706133 | 60 | TE 1–5 | 14.863589 |
| (14 | TM 1–2 | 7.015587 | 61 | TE 13–1 | 14.928374 |
| (15 | TE 0–2 | 7.015587 | 62 | TM 0–5 | 14.930918 |
| 16 | TE 6–1 | 7.501266 | 63 | TE 6–3 | 15.268181 |
| 17 | TM 4–1 | 7.588342 | 64 | TE 9–2 | 15.286738 |
| 18 | TE 3–2 | 8.015237 | 65 | TM 11–1 | 15.589848 |
| 19 | TM 2–2 | 8.417244 | 66 | TM 5–3 | 15.700174 |
| 20 | TE 1–3 | 8.536316 | 67 | TE 4–4 | 15.964107 |
| 21 | TE 7–1 | 8.577836 | 68 | TE 14–1 | 15.975439 |
| 22 | TM 0–3 | 8.653728 | 69 | TM 8–2 | 16.037774 |
| 23 | TM 5–1 | 8.771484 | 70 | TM 3–4 | 16.223466 |
| 24 | TE 4–2 | 9.282396 | 71 | TE 2–5 | 16.347522 |
| 25 | TE 8–1 | 9.647422 | 72 | TE 10–2 | 16.447853 |
| 26 | TM 3–2 | 9.761023 | (73 | TM 1–5 | 16.470630 |
| 27 | TM 6–1 | 9.936110 | (74 | TE 0–5 | 16.470630 |
| 28 | TE 2–3 | 9.969468 | 75 | TE 7–3 | 16.529366 |
| (29 | TM 1–3 | 10.173468 | 76 | TM 12–1 | 16.698250 |
| (30 | TE 0–3 | 10.173468 | 77 | TM 6–3 | 17.003820 |
| 31 | TE 5–2 | 10.519861 | 78 | TE 15–1 | 17.020323 |
| 32 | TE 9–1 | 10.711434 | 79 | TM 9–2 | 17.241220 |
| 33 | TM 4–2 | 11.064709 | 80 | TE 5–4 | 17.312842 |
| 34 | TM 7–1 | 11.086370 | 81 | TE 11–2 | 17.600267 |
| 35 | TE 3–3 | 11.345924 | 82 | TM 4–4 | 17.615966 |
| 36 | TM 2–3 | 11.619841 | 83 | TE 8–3 | 17.774012 |
| 37 | TE 1–4 | 11.70600$\underline{5}$ | 84 | TE 3–5 | 17.788748 |
| 38 | TE 6–2 | 11.734936 | 85 | TM 13–1 | 17.80143$\bar{5}$ |
| 39 | TE 10–1 | 11.770877 | 86 | TM 2–5 | 17.959819 |
| 40 | TM 0–4 | 11.791534 | 87 | TE 1–6 | 18.015528 |
| 41 | TM 8–1 | 12.225092 | 88 | TE 16–1 | 18.063261 |
| 42 | TM 5–2 | 12.338604 | 89 | TM 0–6 | 18.071064 |
| 43 | TE 4–3 | 12.681908 | 90 | TM 7–3 | 18.287583 |
| 44 | TE 11–1 | 12.826491 | 91 | TM 10–2 | 18.433464 |
| 45 | TE 7–2 | 12.932386 | 92 | TE 6–4 | 18.637443 |
| 46 | TM 3–3 | 13.015201 | 93 | TE 12–2 | 18.745091 |
| 47 | TE 2–4 | 13.170371 | 94 | TM 14–1 | 18.899998 |

* TM designates a zero of $J_l(x)$; TE designates a zero of $J'_l(x)$; in each case $l$ corresponds to the order of the Bessel function and $m$ is the number of the root.

† $\bar{5}$ in last place indicates higher value and $\underline{5}$ indicates lower value in rounding off for fewer decimal places.

1. Beattie, C. L. (1957). Table of first 700 zeros of Bessel functions -Jl(x) and J'l(X). ↩