



兰州大学

结项论文

论文题目（中文） 磁约束下的永磁体棒复摆运动探究

论文题目（英文） Complex Pendulum Motion of permanent magnet-rod under magnetic field confinement

学生姓名 王佳栋，李石宣，王喜波，姜国文

指导教师 白雪

学 院 物理科学与技术学院

专 业 物理学

年 级 2022

磁约束下的永磁体棒的复摆运动

中文摘要

摘要：磁场的约束是一个非常重要的研究课题，但同时也是个十分复杂的问题；目前还没有求解复杂磁场系统力学的解析方法，只能通过数值计算来求解，于是如何设计算法就成了不可避免地问题，现有的数值分析方法在低算力下很难对这个问题进行求解。通过实验对永磁体在磁场约束下的复摆运动进行分析，可以给出一些有用的规律。

关键词：磁场；复摆；数值分析

中图分类号：O59 文献标识码：A

Complex Pendulum Motion of permanent magnet-rod under magnetic field confinement

Abstract

Magnetic field confinement is a very important research topic, but it is also a very complicated problem. At present, there is no analytical method to solve the mechanics of complex magnetic field systems, which can only be solved by numerical calculation, so how to design the algorithm becomes an inevitable problem, and the existing numerical analysis methods are difficult to solve this problem under low computational force. By analyzing the complex pendulum motion of permanent magnet constrained by magnetic field, some useful rules can be given.

Keywords: magnetic field; complex pendulum; numerical analysis

目 录

中文摘要	II
英文摘要	III
第一部分 实验原理.....	1
1.1 磁场分布	1
1.2 运动方程	1
1.2.1 转动惯量.....	1
1.2.2 运动学微分.....	1
第二部分 实验	2
2.1 实验装置及方法	2
2.2 实验数据及结论	2
第三部分 数值计算与仿真模拟.....	2
第四部分 结束语	3
参考文献	
致谢	5

磁约束下的永磁体棒的复摆运动

王佳栋¹,李石宣¹,姜国文¹,王喜波¹

(1. 兰州大学, 甘肃 兰州 730000)

摘要: 磁场的约束是一个非常重要的研究课题,但同时也是个十分复杂的问题;目前还没有求解复杂磁场系统力学的解析方法,只能通过数值计算来求解,于是如何设计算法就成了不可避免地问题,现有的数值分析方法在低算力下很难对这个问题进行求解。通过实验对永磁体在磁场约束下的复摆运动进行分析,可以给出一些有用的规律。

关键词: 磁场; 复摆; 数值分析

中图分类号: O59 **文献标识码:** A

通过改变磁场的大小、介质板的厚度以及永磁体棒的长度,研究永磁体棒的摆动周期,进而得出定性的结论;通过数值积分对这个问题进行理论上的计算,研究理论推演得出的结论以及数值分析方法的漏洞。整个研究过程有利于加深对物理图像的把握,理解数值算法的漏洞。

1 实验原理

1.1 磁场分布

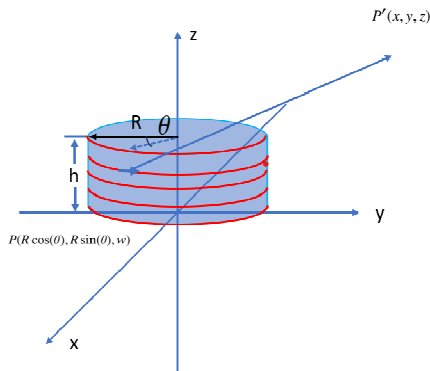


图1 圆柱形永磁体的参数

根据现代量子力学的基本观点,永磁体的磁性主要来源于带电粒子在轨道上运动产生的轨道电流和由其自旋产生的自旋电流。它们在永磁体内的分布是十分复杂的。但总体来说,形状及充磁方向一致的永磁体磁场分布大致相同,不同的是相对强度的大小。对于圆柱体永磁体,假设其磁化电流均匀分布在侧面,磁化电流密度为*i'*。参数如图1,用毕奥-萨伐尔定律可以给出磁场的空间分布:

$$\begin{cases} B_x = \frac{\mu_0 i'}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{(z-w)R \cos(\theta)}{K} d\theta dw \\ B_y = \frac{\mu_0 i'}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{(z-w)R \sin(\theta)}{K} d\theta dw \\ B_z = \frac{\mu_0 i'}{4\pi} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{-(y-R \sin(\theta))R \sin(\theta) - (x-R \cos(\theta))R \cos(\theta)}{K} d\theta dw \\ K = [(x-R \cos(\theta))^2 + (y-R \sin(\theta))^2 + (z-w)^2]^{3/2} \end{cases} \quad (1)$$

经调查^[1]:

$$i' = \frac{B_y}{\mu_0} \quad (2)$$

1.2 运动方程

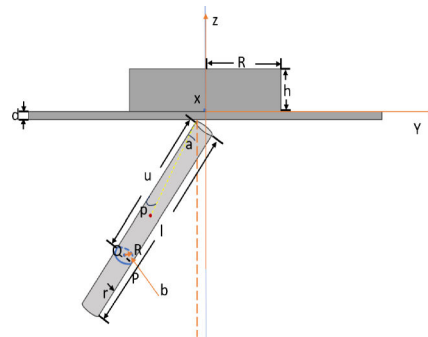


图2 运动相关参数

1.2.1 转动惯量

运用转动惯量的定义以及平行轴定理可以给出永磁体棒的转动惯量:

$$J_0 = m \left(\frac{5R^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right) \quad (3)$$

1.2.2 运动学微分方程

要求运动的微分方程,首先要知道受力,其中比较困难的是阻力和磁场力。

先分析阻力,一般的处理方法是认为阻力与速度成正比,这里用角速度,与棒有关的那个常数计入阻力系数,记为*γ*,则:

$$f = \gamma \times \frac{da}{dt} \quad (4)$$

对于磁场力，做定性分析。根据对称性，磁场力是 a 的周期函数。可以设为 $\mathbf{u}(a)$ 。加上重力，记为 $\mathbf{F}_L(a) = \mathbf{r} \times (m\mathbf{g} + \mathbf{u}(a))$ 。

这个问题还涉及到一个碰撞问题：可以预想，永磁体棒在顶点切换的瞬间会有一个与介质板的碰撞，假设这个碰撞会使垂直于板的动量分量损失；而水平方向上，也会由于摩擦力的作用而使水平动量发生改变。这是必须的，因为要保证质点与顶点的连线与速度方向垂直。这两者的变化并不是独立的，主导作用是垂直方向，因为摩擦力是约束力（不考虑临界摩擦力问题）。碰撞会损失多少动量也是一个问题，假设碰撞的回复系数为 e 。

因此定义周期为两次碰撞之间的时间间隔。

由转动定理：

$$J_0 \frac{d^2 a}{dt^2} + \gamma \frac{da}{dt} + F_L(a) = 0 \quad (5)$$

这个方程是可以解的，为了方便计算，假设能量损失全部在碰撞，则：

$$J_0 \frac{d^2 a}{dt^2} + F_L(a) = 0 \quad (6)$$

在图 2 中：

$$\begin{cases} P(0, r + u \sin a, -d - u \cos a) \\ Q(0, r + u \sin a - r \cos a, \\ -d - u \cos a - r \sin a) \\ R(-r \sin b, r \cos b \cos a + r + u \sin a - r \cos a, \\ r \cos b \sin a - d - u \cos a - r \sin a) \\ d\mathbf{l}(-r \cos b, -r \sin b \cos a, -r \sin b \sin a) \end{cases} \quad (7)$$

于是：

$$\begin{cases} F_x = \frac{B_y}{\mu_0} \int_0^l \int_0^{2\pi} (B_z dl_y - B_y dl_z) db du \\ F_y = \frac{B_x}{\mu_0} \int_0^l \int_0^{2\pi} (B_x dl_z - B_z dl_x) db du \\ F_z = \frac{B_y}{\mu_0} \int_0^l \int_0^{2\pi} (B_y dl_x - B_x dl_y) db du \end{cases} \quad (8)$$

根据体系的对称性， $F_x = 0$ ，则有：

$$\begin{aligned} F_L(a) = i \int_0^l \int_0^{2\pi} z(B_x dl_z - B_z dl_x) \\ + y(B_y dl_x - B_x dl_y) db du \\ - mg \left(\frac{l \cos a}{2} + r \sin a \right) \end{aligned} \quad (9)$$

这样角加速度也得到了求解，通过迭代算法就可以得到周期的解：

$$\begin{cases} a(0) = 90^\circ \\ b(t) = b(a(t)) \\ w(\psi/2) = w(0) + \frac{\psi}{2} b(0) \\ a(t + \psi) = a(t) + \psi w(t + \frac{\psi}{2}) \\ w(t + \frac{\psi}{2}) = w(t - \frac{\psi}{2}) + \psi b(t) \end{cases} \quad (10)$$

其中 ψ 是迭代的时间间隔，理论上越小越精确。

2 实验

2.1 实验装置及方法

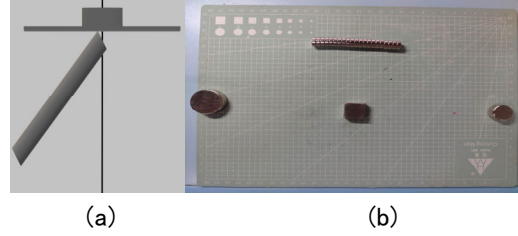


图 3 实验装置概念图(a)及部分实物图(b)

实验采用三种规格的亚克力板和 N35 钕磁铁若干，磁棒由相同的小磁铁组成，实验通过改变磁棒单元的个数（1 个和 2 个）来改变磁棒的长度。具体参数如下表：

表 1 实验器材参数（置信概率为 0.68）

(a) 亚克力板					
序号\厚度 cm	1	2	3	均值 /cm	绝对误差/cm
1	0.387	0.386	0.389	0.387	0.001
2	0.792	0.789	0.789	0.790	0.001
3	1.015	1.014	0.984	1.004	0.014

(b) 磁铁				
序号	直径 (边长) /cm	误差 /cm	高/cm	误差 /cm
L	2.900	0.001	1.946	0.001
m	2.450	0.001	1.916	0.001
S	0.850	0.001	0.978	0.001

(c) 单位磁棒（S 代表一个，M 代表两个的组合）			
次数	质量/g	均值/g	误差/g
1	44.2968		
2	44.3012	44.2980	0.0002
3	44.2959		
长/cm	误差 /cm	直径 /cm	误差 /cm
7.600	0.001	0.950	0.001

由于磁棒由多个小磁铁连接而成，相对位移不可避免，实验采用了“滚动准直法”（图 4）进行矫正：

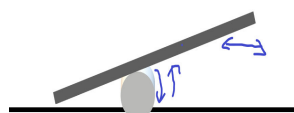


图4 滚动准直法

对于周期的测量，经过摄像法与声波法比对，采取声波法；即采集实验过程中的音频，对频谱进行分析得到周期，如图5：

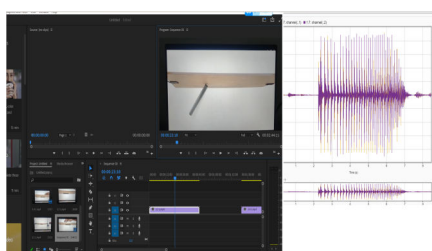
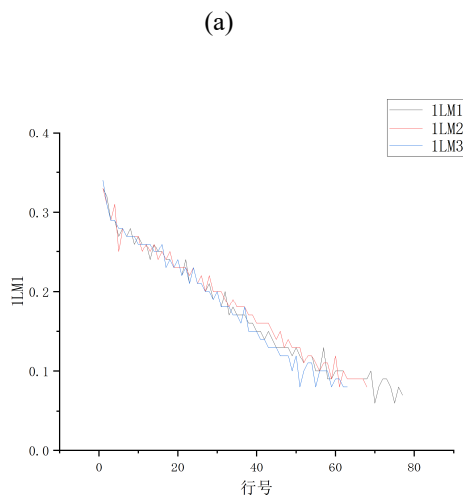


图5 摄像法（左）和声波法（右）

2.2 实验数据及结论

实验得到的结果如图6，首先实验的稳定性可由(a)看出是比较好的；其次可以看出，在精度要求不高的情况下，周期衰减可近似为线性。其中图注中的字母代表上面对应的器材，(a)中最后的数字代表实验的次数。



(b)

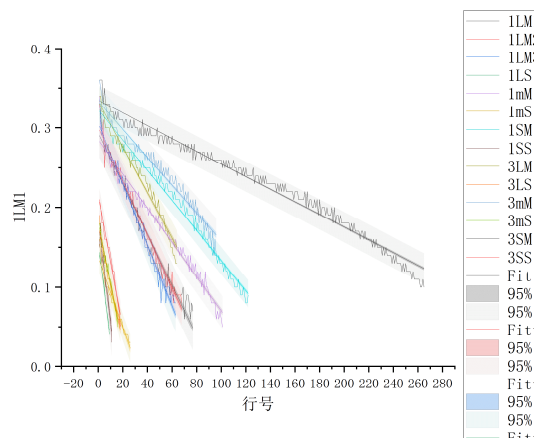


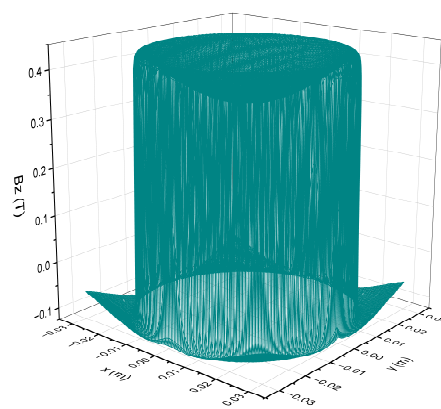
图6 稳定性验证(a)及周期数据(b)

对数据进行分类对比，研究得到以下结论：

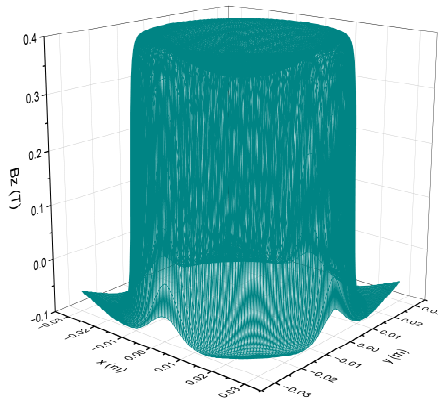
- 1.板越厚，相同倾角，摆动的周期越大；且周期衰减的越慢；
- 2.相同的磁铁组，其周期衰减的趋势大致相同；
- 3.很明显，棒越长，周期越大，周期衰减越慢；
- 4.磁铁越大，周期越短；
- 5.周期的衰减可以近似为线性的。

3 数值计算与仿真模拟

除以上结论，研究还发现当板的厚度并不是很厚的时候，磁棒的稳定平衡点并不是上方磁铁的中轴线，而是边界部分，这是边缘效应的直接结果。图7将给出数值计算对以上效应的半定量分析。研究发现随着距离的增加，边缘磁场强度与中心磁场强度的差距在变小，即边缘效应的影响在变小，选取合适的板厚可以规避这种效应。



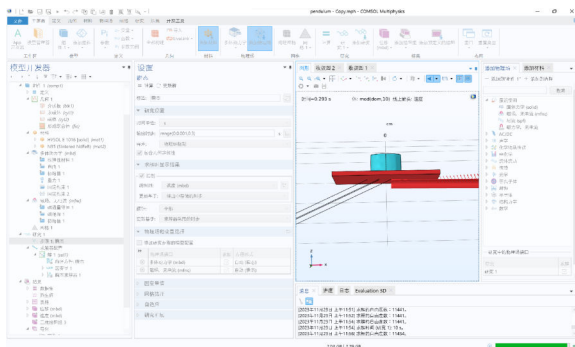
(a)Z=0.1mm



(b) $Z=0.5\text{mm}$

图 7 边缘效应

研究还用 COMSOL 进行了粗糙的模拟，计算了从开始释放到第一次与板碰撞的时间。如图 8：



得到了表 2 的结果：

表 2 仿真模拟结果

型号	开始到第一次碰撞的时间/s
1LM	0.190
1LS	0.137
3LM	0.190
3LS	0.137

当棒长较短时，与实验结果较为符合。在棒长较长时的不符有待进一步的研究。

研究编写的代码及相关文件均已在 GitHub 上面开源，网址 https://github.com/jdw-heaven/Euler_Pendulum。

4 结束语

研究利用多种方法对欧拉摆这个复杂的物理体系进行分析，得到了许多有用的结果。但由于实

验器材、个人计算机算力等问题，得到的结果都十分粗糙，理论得不到完备的检验，模拟结果与实验的不符也难以进一步分析。总体来说有以下几个问题：

1. 算力不够导致磁场的数值解只能精确 mT 的量级，无法满足力场计算的要求，因此数值上无法对周期进行求解。

2. 对 COMSOL 并不熟练，导致出现了接触点处贯穿的现象。

3. 数值算法本身近似的缺点导致磁场本有的对称性破坏，对结果造成很难预测的结果。

4. 数值算法难以处理奇点问题，毕奥-萨法尔定律的缺陷在数值计算中是存在的，即电流元模型在距离很近时是不成立的。

期待进一步的研究解决它们。

参考文献：

- [1] 周恩权, 郑仲桥, 张燕红, 王奇瑞. 圆柱形永磁体磁场建模及仿真研究[J]. 河南科技, 2017, 21: 139-143.

致 谢

在本次创新创业的实践中，我学到了很多东西。也有很多要感谢的人。

首先是我的指导老师白雪，在我申请项目的过程中，白老师细心地指导我计划书的写作，及时指出我不规范的地方。

其次，感谢学校给予我的支持，包括但不限于实验室的使用，资金支持。这些琐事主要是王心华老师负责，很感谢他的付出。

最后，感谢在我前行过程中帮助我的人，有我的组员，乔亮老师……