Bachelorarbeit

Die Sätze von Paley-Wiener und Titchmarsh

Jens Fischer

Datum der Abgabe: 12.10.2015

Betreuung: Prof. Dr. Roland Schnaubelt, Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung des Karlsruher Instituts für Technologie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet habe.

Karlsruhe, den

Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle einigen Personen meinen Dank dafür aussprechen, dass sie mich beim Verfassen dieser Arbeit sowohl fachlich als auch moralisch unterstützt haben.
Zunächst geht mein Dank an meine beiden Betreuer Herr Prof. Dr. Schnaubelt und Herr Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz, die mich bei meiner ersten wissenschaftlichen Arbeit mit ausgesprochen konstruktiven Vorschlägen begleitet und mir dadurch viel beigebracht haben. Insbesondere dafür, dass ich bei problematischen Teilen immer zeitnah mit Unterstützung rechnen konnte, auch wenn es mehrfach dasselbe Problem war, möchte ich mich bedanken.
Mein weiterer Dank geht an alle meine Korrektur-Kobolde, die sich die Mühe gemacht haben, diese Arbeit auf Rechtschreib-, Layout- und Satzbaufehler zu untersuchen, besonders da das für Fachfremde bei einer Mathematik-Arbeit nicht ganz einfach zu sein scheint.
Abschließend möchte ich mich noch bei meinen Eltern und Großeltern bedanken, die mich mit einem kontinuierlichen Strom aus Nervennahrung versorgt und mir dadurch so manchen verlängerten Nachmittag versüßt haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 6

2 Die Sätze von Paley-Wiener 7
- 2.1 Satz von Paley-Wiener für Funktionen . . . 7
- 2.2 Satz von Paley-Wiener für Distributionen . . . 11
- 2.3 Satz von Paley-Wiener für Funktionen: Weitere Anwendung . . . 14

3 Satz von Titchmarsh 15
- 3.1 Grundlegende Aussagen . . . 16
- 3.2 Beweis von Titchmarshs Theorem . . . 18

4 Fazit 23

5 Grundlagen der Fouriertransformation und der Distributionen 24

1 Einleitung

Ein zentrales Thema der Mathematik ist und bleibt die Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen. Verwendet man beispielsweise in den Ingenieurswissenschaften häufig die Fourier- oder Laplace-Transformation als Lösungsmethode, so fehlte es in der Vergangenheit oft noch an der notwendingen mathematischen Rechtfertigung, dass diese Methoden zulässig sind. Das korrekte Ergebnis rechtfertig dann meistens das Mittel. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist das Heaviside-Kalkül, das Oliver Heaviside um 1899 ausarbeitete und dazu verwendete elektrotechnische Probleme seiner Zeit zu lösen. Im Wesentlichen nutzte er aus, den Ableitungsoperator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ als einen Operator p aufzufassen und die Ableitung einer Funktion f über $f' = p \cdot f$ zu beschreiben. Auf diese Weise erreichte Heaviside, dass die von ihm betrachteten Differentialgleichungen algebraisch gelöst werden konnten. Die notwendige Begründung hierfür seitens Heavisides blieb an dieser Stelle jedoch aus.[1]
Dieser Ansatz stellte sich jedoch als mathematisch unzureichend herraus und erlaubte außerdem keine Verallgemeinerung auf beliebige Differentialgleichungen. Da man aus mathematischer Sicht jedoch eher an der Charakterisierung und Verallgemeinerung solcher Methoden interessiert ist, wurde Heavisides Operatorkalkül gegen 1950 von Jan Mikusińskis Operatorkalkül abgelöst, das, mathematisch korrekt aufgearbeitet, Heavisides Ansatz umsetzt.

Diese Arbeit soll zur Hinführung auf Mikusinskis Operator-Kalkül dienen. Im ersten Teil werden wir uns dazu mit einer Kombination aus der Fourier-Transformation und der Laplace-Transformation befassen, die suggestiv als Fourier-Laplace-Transformation bezeichnet wird. Insbesondere die Eigenschaften ganzer Funktionen, die als Fourier-Laplace-Transformierte von Testfunktionen resultieren, werden hier untersucht und unter dem Satz von Paley-Wiener für Funktionen zusammengefasst. Tatsächlich lässt sich mittels der Glattheit und dem Abfallverhalten der Ausgangsfunktion eine obere Schranke an ihre Fourier-Laplace-Transformierte finden. Insbesondere formuliert der Satz von Paley-Wiener für Funktionen eine Äquivalenzaussage, sodass jede ganze Funktion, die einer gewissen Beschränkung genügt, auch als Fourier-Laplace-Transformierte einer Testfunktion aufgefasst werden kann.
Mit diesem Satz kann dann eine Aussage über der Träger der Faltung zweier Testfunktionen gemacht werden, die dann auf den Satz von Titchmarsh überleitet, der sich mit dem Verschwinden der Faltung zweier stetiger Funktionen befasst. Da nur die Stetigkeit der Funktionen gefordert wird, sind Methoden wie die Fourier-Transformation nicht anwendbar, die das Verschwinden der Faltung durch Anwendung des Faltungstheorems gut handhabbar macht. Alternative Charakterisierungen zu entwickeln, wird ein zentraler Bestandteil des zweiten Teils dieser Arbeit sein. Der Satz von Titchmarsh motiviert dann im Wesentlichen eine abschließende Eindeutigkeitsaussage, die essentiell für Mikusiński Operatorkalkül ist.
Inhaltlich folgt diese Arbeit hauptsächlich den Kapiteln IV.4 und IV.5 von Kôsaku Yoshidas Buch „Functional Analysis“ in der dritten Ausgabe von 1971, für diese Arbeit Quelle [4], dem auch die Formulierungen der beiden Sätze entnommen sind. Yoshidas Buch lehnt sich an Lars Hörmanders Werk „The analysis of linear partial differential operators I“ von 1983 an, das dieser Arbeit auch als Quelle diente und mit Quelle [2] bezeichnet wird.

[1] In Walter Amelings Buch „Laplace-Transformation“ von 1984, erschienen im Vieweg+Teubner Verlag, geht der Autor im Kapitel 9.1 ausführlich auf Heavisides Idee und ihre Umsetzung ein.

2 Die Sätze von Paley-Wiener

Im ersten Abschnitt dieser Bachelorarbeit wird der Satz von Paley-Wiener diskutiert, der sich mit der Fourier-Laplace-Transformation von Testfunktionen aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzw. von Distributionen mit kompaktem Träger aus $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ befasst.

Die Gleichung

$$F(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\mathrm{d}x, \qquad z \in \mathbb{C}^n, \tag{2.1}$$

mit der sich die Fourier-Laplace-Transformierte von $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ beschreiben lässt, wird im ersten Teil eine zentrale Rolle spielen. Dabei handelt es sich bei F um eine ganze Funktion, also holomorph auf ganz $\mathbb{C}^n$. Dies folgt daraus, dass f kompakten Träger hat und beschränkt ist. Somit ist der Integrant für ein festes $z \in \mathbb{C}^n$ in x beschränkt. Aus den Eigenschaften der e-Funktion ergibt sich dann direkt, dass F ganz ist.
Der Satz von Paley-Wiener charakterisiert diejenigen ganzen Funktionen F, die eine Darstellung wie (2.1) besitzen, durch eine Wachstumsbedingung.
Eine ähnliche Aussage wird im zweiten Teil für Distributionen $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ hergeleitet.
Zum Abschluss dieses Kapitels wird dann der Zusammenhang des Satzes von Paley-Wiener für Funktionen mit Titchmarsh Theorem dagestellt.

2.1 Satz von Paley-Wiener für Funktionen

Satz 2.1. *Sei F eine ganze Funktion. Genau dann ist F die Fourier-Laplace-Transformierte von $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in der Form*

$$F(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\mathrm{d}x, \qquad z \in \mathbb{C}^n, \tag{2.2}$$

mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{B_r(0)}$ *für ein $r > 0$, wenn für alle $N \in \mathbb{N}_0$ ein $C_N > 0$ so existiert, dass*

$$|F(z)| \leq C_N(1 + |z|)^{-N} \mathrm{e}^{r|\mathrm{Im} z|} \tag{2.3}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^n$ gilt.

Beweis: Wir beginnen mit einer Vorbereitung. Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Nach dem Multinomialtheorem gilt

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha, \tag{2.4}$$

wobei der Multinomialkoeffizient durch

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}$$

definiert ist.
Aus (2.4) und $|z| \leq \sum_{j=1}^n |z_j|$ sowie dem binomischen Lehrsatz folgt insgesamt

$$(1 + |z|)^N \leq \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \prod_{j=1}^n |z_j|^{\alpha_j}. \tag{2.5}$$

1) Sei die ganze Funktion F wie in (2.2) gegeben. Mit (2.5) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}(1+|z|)^N|F(z)| &\leq \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\sum_{|\alpha|=k}\binom{k}{\alpha}\prod_{j=1}^{n}|z_j|^{\alpha_j}|F(z)| \\ &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\sum_{|\alpha|=k}\binom{k}{\alpha}\prod_{j=1}^{n}|(\mathrm{i}z_j)^{\alpha_j}F(z)| \\ &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\sum_{|\alpha|=k}\binom{k}{\alpha}\left|(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{B_r(0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}D^\alpha f(x)\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

Wir schätzen den letzten Term durch

$$\begin{aligned}|(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{B_r(0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}D^\alpha f(x)\mathrm{d}x| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{B_r(0)}|e^{-\mathrm{iRe}(z)x}||e^{\mathrm{Im}(z)x}||D^\alpha f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,\lambda(B_r(0))\,\max_{|x|\leq r}|D^\alpha f(x)|\,e^{|\mathrm{Im}(z)|r}\end{aligned}$$

ab. Diese Abschätzung liefert mit der Konstanten

$$C_N := \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\sum_{|\alpha|=k}\binom{k}{\alpha}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,\lambda(B_r(0))\,|\max_{|x|\leq r}|D^\alpha f(x)|$$

und Division durch $(1+|z|)^N$ die Behauptung (2.3).

2) Umgekehrt nehmen wir nun an, dass F eine ganze Funktion ist, für die ein $r>0$ und für alle $N\in\mathbb{N}_0$ ein $C_N>0$ so existiert, dass

$$|F(z)| \leq C_N(1+|z|)^{-N}\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}(z)|r}. \tag{2.6}$$

Es ist zu zeigen, dass F die Fourier-Laplace-Transformierte von $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in der Form (2.2) mit $\mathrm{supp}(f)\subseteq\overline{B_r(0)}$ ist. Aufgrund von (2.6) ist F auf $\mathbb{R}^n$ integrierbar. Somit können wir

$$f(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2.7}$$

definieren und erhalten $f\in\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Weiter ist nach (2.6) die Funktion $\xi^\beta F(\xi)$ für jedes $\beta\in\mathbb{N}_0^n$ in ξ integrierbar. Somit ist f nach einem Korollar des Satzes von Lebesgue unendlich oft differenzierbar.

Um die Kompaktheit des Trägers von f nachzuweisen, zeigen wir zunächst für $\eta\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ und $x\in\mathbb{R}^n$, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{ix(\xi+\mathrm{i}\eta)}F(\xi+\mathrm{i}\eta)\mathrm{d}\xi. \tag{2.8}$$

Mit dem Satz von Fubini und $\xi=(\xi_1,\bar{\xi})$ ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi_1,\bar{\xi})}F(\xi_1,\bar{\xi})\mathrm{d}\bar{\xi}\mathrm{d}\xi_1.$$

Aufgrund von (2.6) lässt sich dies iterieren. Es genügt also (2.8) für den eindimensionalen Fall zu zeigen.
Die Verwendung desselben Arguments kann dann auf alle anderen Koordinaten übertragen werden.

Seien $x \geq 0$, $R > 0$ und $\kappa > 0$. Durch

$$\begin{aligned}\Gamma :=& \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) = R, 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq \kappa\} \cup \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) = -R, 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq \kappa\} \\ & \cup \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) = \kappa, -R \leq \mathrm{Re}(z) \leq R\} \cup \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) = 0, -R \leq \mathrm{Re}(z) \leq R\}\end{aligned}$$

beschreiben wir den Rand eines Rechtecks in $\mathbb{C}$ mit Seitenlängen $2R$ und κ.

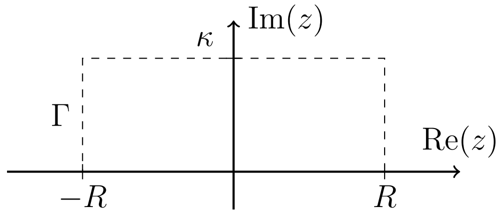

Abbildung 1: Darstellung der Menge Γ

Wir nutzen dieses Rechteck, um die Gleichung (2.8) herzuleiten, wobei insbesondere ausgenutzt wird, dass das Wegintegral über f entlang der rechten und linken Kante verschwindet. Dazu parametrisieren wir die einzelnen Kanten des Rechtecks durch die folgenden vier Wege

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, && \gamma_1(t) = t, \\
&\gamma_2 : [0, \kappa] \to \mathbb{C}, && \gamma_2(t) = R + \mathrm{i}t, \\
&\gamma_3 : [-R, R] \to \mathbb{C}, && \gamma_3(t) = -t + \mathrm{i}\kappa, \\
&\gamma_4 : [0, \kappa] \to \mathbb{C}, && \gamma_4(t) = -R + \mathrm{i}(\kappa - t)
\end{aligned}$$

und erhalten den zusammengesetzten Weg

$$\phi_R : [-R, 3R + 2\kappa] \to \mathbb{C}, \ \phi_R(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [-R, R], \\ \gamma_2(t - R) & \text{für } t \in [R, R + \kappa], \\ \gamma_3(t - 2R - \kappa) & \text{für } t \in [R + \kappa, 3R + \kappa], \\ \gamma_4(t - 3R - 2\kappa) & \text{für } t \in [3R + \kappa, 3R + 2\kappa], \end{cases}$$

der den Rand des Rechtecks parametrisiert. Der Weg ϕ_R ist damit eine stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung von Γ. Da F nach Voraussetzung holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, ist auch $\mathrm{e}_{\mathrm{i}x}F$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Damit gilt nach dem Integralsatz von Cauchy

$$0 = \int^{\phi_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xz} F(z) \mathrm{d}z \tag{2.9}$$

für alle $x \geq 0$ und mit einfachen Integraltransformationen resultiert

$$\begin{aligned}
0 &= \int^{\phi_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xz} F(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi+\mathrm{i}\kappa)} F(\xi+\mathrm{i}\kappa)\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad + \mathrm{i}\int_{0}^{\kappa} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(R+\mathrm{i}\eta)} F(R+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\eta + \mathrm{i}\int_{\kappa}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(-R+\mathrm{i}\eta)} F(-R+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\eta.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Um den eindimensionalen Fall von (2.8) zu zeigen wird nun der Grenzwert für $R \to \infty$ bestimmt. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int^{\phi_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xz} F(z)\,\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi+\mathrm{i}\eta)} F(\xi+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\xi \right| \\
&\leq \left| \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} F(\xi) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi+\mathrm{i}\eta)} F(\xi+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} F(\xi) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi+\mathrm{i}\eta)} F(\xi+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\xi \right| \\
&\quad + \left| \int_{0}^{\kappa} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(R+\mathrm{i}\eta)} F(R+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\eta + \int_{\kappa}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(-R+\mathrm{i}\eta)} F(-R+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\eta \right|.
\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert wegen (2.6) für $R \to \infty$ gegen 0. Mit (2.6) schätzen wir den zweiten Summanden durch

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{0}^{\kappa} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(R+\mathrm{i}\eta)} F(R+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\eta + \int_{\kappa}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(-R+\mathrm{i}\eta)} F(-R+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\eta \right| \\
&\leq \int_{0}^{\kappa} \mathrm{e}^{-x\eta} C_N (1+|R+\mathrm{i}\eta|)^{-N} \mathrm{e}^{\kappa|\eta|}\,\mathrm{d}\eta + \int_{0}^{\kappa} \mathrm{e}^{-x\eta} C_N (1+|-R+\mathrm{i}\eta|)^{-N} \mathrm{e}^{\kappa|\eta|}\,\mathrm{d}\eta \\
&\leq \int_{0}^{\kappa} C_N (1+\sqrt{R^2+\eta^2})^{-N} \mathrm{e}^{\kappa^2}\,\mathrm{d}\eta + \int_{0}^{\kappa} C_N (1+\sqrt{R^2+\eta^2})^{-N} \mathrm{e}^{\kappa^2}\,\mathrm{d}\eta \\
&\leq 2\kappa C_N \, \frac{1}{(1+R^2)^N}\, \mathrm{e}^{\kappa^2}
\end{aligned}$$

ab, wobei wir $x \geq 0$ und $\eta \in [0,\kappa]$ verwendet haben. Da C_N und κ Konstanten sind, ergibt sich

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{0}^{\kappa} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(R+\mathrm{i}\eta)} F(R+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\eta + \int_{\kappa}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(-R+\mathrm{i}\eta)} F(-R+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\eta \right| = 0.$$

Somit folgt aus (2.10) für $n = 1$ die Behauptung (2.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi+\mathrm{i}\eta)} F(\xi+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\xi$$

für $x \geq 0$. Den Fall $x < 0$ behandelt man analog mit $\kappa < 0$.
Damit ist die Gleichung (2.8) für $n = 1$ bewiesen und mit Fubini, wie bereits angemerkt, erhalten wir auch

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi+\mathrm{i}\eta)} F(\xi+\mathrm{i}\eta)\,\mathrm{d}\xi$$

für alle $x, \eta \in \mathbb{R}^n$. Wir wählen nun $\eta = \alpha \dfrac{x}{|x|}$ für ein $\alpha > 0$ und $x \neq 0$. Aus der Ungleichung (2.6) mit $N = n+1$ folgt dann

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(\xi+\mathrm{i}\eta)} F(\xi + \mathrm{i}\eta) \mathrm{d}\xi \right| \\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-x\eta} |F(\xi + \mathrm{i}\eta)| \mathrm{d}\xi \\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} C_N \mathrm{e}^{r|\eta| - x\eta} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{-(n+1)} \mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} C_N \mathrm{e}^{r\alpha - |x|\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{-n-1} \mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

wobei wir die Relationen $\eta|x| = \alpha x$, $|\eta| = \alpha$ und $|\xi + \mathrm{i}\eta| \geq |\xi|$ benutzt haben.
Mit der Konstanten

$$\tilde{C}_N := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} C_N \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{-N} \mathrm{d}\xi < \infty$$

resultiert die Abschätzung

$$|f(x)| \leq \tilde{C}_N e^{(r-|x|)\alpha}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da $\tilde{C}_N$ unabhängig von α ist, kann der Grenzwert $\alpha \to \infty$ betrachtet werden. Wir nutzen dies aus, um den Träger von f zu bestimmen.
Sei dazu $|x| > r$. Dann gilt

$$\lim_{\alpha \to \infty} \tilde{C}_N e^{(r-|x|)\alpha} = 0.$$

Damit wird der Funktionswert von f außerhalb einer Kugel mit Radius r konstant null und wir schließen

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{B_r(0)}.$$

Insgesamt gehört f also zu $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es bleibt noch zu zeigen, dass F die Fourier-Laplace-Transformierte von f ist. Da $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, ist f insbesondere auch auf $\mathbb{R}^n$ integrierbar. Wir können also in (2.7) den Fourierinversionssatz anwenden und erhalten (2.2) für $z \in \mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung ist F holomorph. Die rechte Seite von (2.2) ist ebenfalls holomorph, wie nach (2.1) begründet wurde. Durch holomorphe Fortsetzung in der ersten Variablen folgt (2.2) für $z \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Dies lässt sich iterieren und (2.2) ist gezeigt.

□

2.2 Satz von Paley-Wiener für Distributionen

Eine ähnliche Version des Satzes von Paley-Wiener, wie zuvor für Funktionen vorgestellt, existiert auch in folgender Fassung für Distributionen T in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Satz 2.2. *Sei F eine ganze Funktion. Genau dann ist F die Fourier-Laplace-Transformierte einer Distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, falls für gewisse $\overline{N} \in \mathbb{N}$, $r > 0$ und $\overline{C} > 0$*

$$|F(z)| \leq \overline{C}(1 + |z|)^{\overline{N}} \mathrm{e}^{r|\mathrm{Im} z|} \tag{2.11}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Beweis: 1) Sei zunächst F die Fourier-Transformation von $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Für $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ gibt es nach [4], I.13, Satz 2 eine Konstante $\overline{N} \in \mathbb{N}$, $\tilde{C} > 0$ und eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ so, dass
$$|T(\phi)| \leq \tilde{C} \sup_{|\alpha| \leq \overline{N},\, x \in K} |D^\alpha \phi(x)| \tag{2.12}$$
für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Zusätzlich ist nach [4], IV.3, Satz 4 für alle $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformierte eine reguläre Distribution mit

$$\hat{T}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} T(\mathrm{e}_{-i\xi}).$$

Folglich gilt $F = \hat{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ und unter Verwendung der obigen Ungleichung ergibt sich für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |F(z)| &= |\hat{T}(z)| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |T(\mathrm{e}_{-\mathrm{i}z})| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{C} \left| \sup_{|\alpha| \leq \overline{N},\, x \in K} D_x^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz} \right|. \end{aligned}$$

Da K kompakt ist, existiert ein $r > 0$ mit $K \subseteq B_r(0)$. Weiter gilt für $z = \xi + i\eta$

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{C} \sup_{x \in K} \left| D_x^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz} \right| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{C} \sup_{|x| \leq r,\, |\alpha| \leq \overline{N}} \left| D_x^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz} \right| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{C} \sup_{|x| \leq r,\, |\alpha| \leq \overline{N}} \left| \prod_{j=1}^n (-i)^{|\alpha|} {z_j}^{\alpha_j} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{e}^{x\eta} \right| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{C} \sup_{|x| \leq r,\, |\alpha| \leq \overline{N}} |z^\alpha| \, \mathrm{e}^{|x\eta|} \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{C} \sup_{|x| \leq r,\, |\alpha| \leq \overline{N}} |z|^{|\alpha|} \, \mathrm{e}^{r|\mathrm{Im}(z)|} \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{C} (1 + |z|)^{\overline{N}} \mathrm{e}^{r|\mathrm{Im}(z)|}. \end{aligned}$$

Also ist die erste Implikation in der Behauptung gezeigt.

2) Wir zeigen nun die umgekehrte Richtung der Behauptung. Sei also F eine ganze Funktion, die die Ungleichung (2.11) erfüllt. Es ist zu zeigen, dass dann ein $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ existiert, sodass
$$F(z) = \hat{T}(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} T(\mathrm{e}_{-iz}) \tag{2.13}$$
für alle $z \in \mathbb{C}^n$ gilt. Ein geeignetes T finden wir mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dazu bemerken wir, dass nach (2.11) insbesondere

$$|F(x)| \leq C(1 + |x|)^{\overline{N}}, \tag{2.14}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $\overline{N} \in \mathbb{N}$ gilt. Somit kann $F\big|_{\mathbb{R}^n}$ als reguläre temperierte Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden. Also existiert $\mathcal{F}^{-1}\left(F\big|_{\mathbb{R}^n}\right) =: T$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Um zu zeigen, dass T kompakten Träger hat, betrachten wir die Regularisierung

$$T_\varepsilon := T * \phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

von T. Definiere $\hat{\phi}_\varepsilon$ als die Fourier-Laplace-Transformierte von ϕ_ε und $\hat{\phi}_{\varepsilon,\, \mathbb{R}^n}$ als die Fourier-Transformierte von $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty$. Offenbar gilt $\hat{\phi}_{\varepsilon,\, \mathbb{R}^n} = \hat{\phi}_\varepsilon\big|_{\mathbb{R}^n}$. Weiter ist $\hat{\phi}_\varepsilon$ holomorph mit

$\operatorname{supp}(\phi_\varepsilon) \subseteq \overline{B_\varepsilon(0)}$. Folglich genügt $\hat{\phi}_\varepsilon$ nach dem zuvor bewiesenen Satz von Paley-Wiener für Funktionen für alle $N \in \mathbb{N}$ und gewisse $C_N > 0$ der Ungleichung

$$|\hat{\phi}_\varepsilon(z)| \leq C_N(1+|z|)^{-N}\mathrm{e}^{\varepsilon|\mathrm{Im}(z)|} \tag{2.15}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^n$.

Nach dem Faltungstheorem gilt

$$\mathcal{F}(T_\varepsilon) = \hat{T}_\varepsilon = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{T}\hat{\phi}_{\varepsilon,\,\mathbb{R}^n} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}F\big|_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}_{\varepsilon,\,\mathbb{R}^n}.$$

Die Funktion $F\big|_{\mathbb{R}^n}\hat{\phi}_{\varepsilon,\,\mathbb{R}^n}$ hat die analytische Fortsetzung $F\hat{\phi}_\varepsilon$ auf $\mathbb{C}^n$ und wir wenden die Ungleichungen (2.11) und (2.15) auf $F\hat{\phi}_\varepsilon$ an. Dadurch ergibt sich

$$|(2\pi)^{\frac{n}{2}}(F\hat{\phi}_\varepsilon)(z)| \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}}C_N C(1+|z|)^{\overline{N}}(1+|z|)^{-N}\mathrm{e}^{r+\varepsilon|\mathrm{Im}(z)|}$$

mit den Konstanten und Vorgaben der verwendeten Gleichungen.
Im Folgenden soll diese Ungleichung auf die Form von (2.11) gebracht werden. Sei dazu $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq \overline{N}$. Wähle $N = 2m$ und setze $C'_m := C_{2m}C$. Damit ergibt sich

$$|(F\hat{\phi}_\varepsilon)(z)| \leq C'_m(1+|z|)^{-m}\mathrm{e}^{r+\varepsilon|\mathrm{Im}(z)|} \tag{2.16}$$

für alle $m \geq \overline{N}$ und $z \in \mathbb{C}^n$.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \overline{N}$. Dann folgt aus (2.16)

$$|(F\hat{\phi}_\varepsilon)(z)| \leq C'_{\overline{N}}(1+|z|)^{-N}\mathrm{e}^{r+\varepsilon|\mathrm{Im}(z)|} \leq C'_{\overline{N}}(1+|z|)^{-m}\mathrm{e}^{r+\varepsilon|\mathrm{Im}(z)|}.$$

Folglich existiert für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Konstante C'_m so, dass

$$|(F\hat{\phi}_\varepsilon)(z)| \leq C'_m(1+|z|)^{-m}\mathrm{e}^{r+\varepsilon|\mathrm{Im}(z)|} \tag{2.17}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^n$ gilt.
Da $F\hat{\phi}_\varepsilon$ eine holomorphe Funktion ist und obiger Ungleichung genügt, folgt aus dem Satz von Paley-Wiener für Funktionen, dass $F\hat{\phi}_\varepsilon$ die Fourier-Laplace-Transformierte einer $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ Funktion f mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq B_{r+\varepsilon}(0)$ ist. Mit $F\hat{\phi}_\varepsilon = \hat{T}_\varepsilon$ hat T_ε folglich kompakten Träger in $B_{r+\varepsilon}(0)$, sodass T_ε in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ gilt.
Weiterhin halten wir fest, dass aufgrund der Eigenschaften der Regularisierung

$$T_\varepsilon(\phi) \to T(\phi) \text{ für } \varepsilon \to 0 \text{ und alle } \phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

gilt, wie in [4], IV.3, Satz 1 bewiesen wird.

Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{supp}T \subseteq \overline{B_r(0)}$. Wir nehmen dazu an, dass $\operatorname{supp}T \nsubseteq \overline{B_r(0)}$. Es gibt dann einen Punkt x_0 in $\operatorname{supp}T$ mit $x_0 \notin \overline{B_r(0)}$. Folglich existiert nach Definition des Trägers einer Distribution für alle offenen Umgebungen U von x_0 ein $\phi \in \mathcal{D}(U)$, sodass $T(\phi) \neq 0$. Sei U_0 eine offene Umgebung von x_0 mit $U_0 \cap \overline{B_r(0)} = \emptyset$. Wir wählen ϕ_0 aus $\mathcal{D}(U_0)$ mit $T(\phi_0) \neq 0$. Da $\overline{B_r(0)}$ kompakt und U_0 offen sind, existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass

$$U_0 \cap B_{r+\varepsilon}(0) = \emptyset \tag{2.18}$$

für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Da aber für $\varepsilon > 0$ der Träger $\operatorname{supp}T_\varepsilon$ in $\overline{B_{r+\varepsilon}(0)}$ liegt, erhalten wir $T_\varepsilon(\phi_0) = 0$ für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Insgesamt ergibt sich damit für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$

$$0 = T_\varepsilon(\phi_0) \to T(\phi_0) \neq 0, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{2.19}$$

und damit liegt ein Widerspruch vor. Es ist also $\operatorname{supp}T \subseteq \overline{B_r(0)}$. □

2.3 Satz von Paley-Wiener für Funktionen: Weitere Anwendung

Zuvor haben wir bereits gesehen, dass der Satz von Paley-Wiener für Funktionen wesentlich im Beweis der Version für Distributionen eingeht. In diesem Abschnitt wenden wir die eindimensionale Version des Satzes von Paley-Wiener für Funktionen an, um eine Aussage über den Träger von Faltungen von Testfunktionen zu folgern.

Proposition 2.3. *Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $r > 0$ die kleinste positive reelle Zahl mit* $\mathrm{supp} f \subseteq [-r, r]$. *Dann ist $R = 2r$ die kleinste positive reelle Zahl mit*

$$\mathrm{supp}(f * f) \subseteq [-R, R].$$

Beweis: Seien f und r wie im Satz gegeben. Dann folgt wegen

$$\mathrm{supp}(f * f) \subseteq \mathrm{supp} f + \mathrm{supp} f$$

und $\mathrm{supp} f \subseteq [-r, r]$ gerade, dass

$$\mathrm{supp}(f * f) \subseteq [-R, R] \tag{2.20}$$

mit $R := 2r$. Es bleibt zu zeigen, dass R die kleinste positive reele Zahl ist, sodass (2.20) erfüllt ist. Angenommen es existiert ein $r_0 > 0$ und $r_0 < R$ mit

$$\mathrm{supp}(f * f) \subseteq [-r_0, r_0].$$

Dann folgt mit dem Faltungstheorem und dem Satz von Paley-Wiener für Funktionen für alle $N \in \mathbb{N}_0$ die Existenz eines C_N so, dass

$$|\hat{f}(z)|^2 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} |\widehat{f * f}| \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C_N (1 + |z|)^{-N} \mathrm{e}^{r_0 |\mathrm{Im}(z)|}$$

erfüllt ist. Durch Wurzelziehen erhalten wir die äquivalente Abschätzung

$$\begin{aligned} |\hat{f}(z)| &\leq (2\pi)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{C_N} (1 + |z|)^{-\frac{N}{2}} \mathrm{e}^{\frac{r_0}{2} |\mathrm{Im}(z)|} \\ &\leq \bar{C}_N (1 + |z|)^{-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \mathrm{e}^{\frac{r_0}{2} |\mathrm{Im}(z)|}. \end{aligned}$$

wobei $\bar{C}_N := (2\pi)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{C_N}$. Wieder mit dem Satz von Paley-Wiener für Funktionen folgt, dass $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $\mathrm{supp}(f) \subseteq [-\frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{2}]$. Da aber $\frac{r_0}{2} < r$ und r nach Vorgabe die kleinste positive reelle Zahl ist, für die $\mathrm{supp}(f) \subseteq [-r, r]$ gilt, liegt hier ein Widerspruch zur Annahme vor und der Beweis ist folglich erbracht. □

Aus Proposition 2.3 folgt insbesondere, dass $\mathrm{supp}(f * f) \neq \emptyset$, falls $\mathrm{supp} f \neq \emptyset$. Der Satz von Paley-Wiener für Funktionen gibt uns somit die Möglichkeit den Träger der Faltung einer Funktion f mit sich selbst zu charakterisieren. Es ergibt sich die Frage, ob dies auch für zwei unterschiedliche Funktionen f und g möglich ist und ob diese aus $C_c^\infty(\mathbb{R})$ stammen müssen oder auch schwächere Bedingungen an sie gestellt werden können. Dieser Fragestellung werden wir im nächsten Kapitel nachgehen, wobei insbesondere das Verschwinden des Trägers untersucht wird.

3 Satz von Titchmarsh

Zunächst wollen wir die Frage aus dem vorherigen Kapitel aufgreifen, ob eine Charakterisierung des Trägers wie in der Proposition 2.3 für verschiedene f und g möglich ist. Wir betrachten dafür $f, g \in C_c^\infty([0,\infty))$ und diskutieren den folgenden Satz.

Satz 3.1. *Seien $f, g \in C_c^\infty([0,\infty))$, wobei $f, g \neq 0$ erfüllt sei. Dann gilt auch für die Faltung von f und g, dass*

$$f * g \neq 0. \tag{3.1}$$

Dieser Satz lässt sich für den Fall $f = g$ mittels der Fourier-Transformation schnell beweisen.

Beweis: Wir betrachten den Fall $f = g$ und nehmen an, dass $f * f = 0$ gilt. Damit gilt nach dem Faltungstheorem

$$0 = \widehat{f * f} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \hat{f}^2 \tag{3.2}$$

und folglich $f = 0$, sodass der Fall $f = g$ gezeigt ist.

Der Beweis des Falls $f \neq g$ verläuft identisch wie im Beweis des folgenden Satzes. Allerdings muss dafür noch der Satz von Lerch diskutiert werden, sodass an dieser Stelle zunächst der Satz 3.1 verallgemeinert werden soll und der restliche Beweis später formuliert wird. □

Wir erhalten als Resultat aus dem Satz 3.1 also, dass der Träger einer Faltung $f * g$ zweier Funktionen $f, g \in C_c^\infty([0,\infty))$ niemals leer sein kann, wenn nicht bereits der Träger einer der beiden Funktionen leer ist.

Wir verallgemeinern nun den Satz 3.1 für $f, g \in C([0,\infty))$ und formulieren ihn wie folgt um.

Satz 3.2. *Seien f, $g \in \mathrm{C}([0,\infty))$. Falls*

$$0 = (f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_0^x f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = (g * f)(x) \tag{3.3}$$

für alle $x \in [0,\infty)$, so gilt entweder $f = 0$ oder $g = 0$.

Diese Version ist bis auf die Erweiterung auf die stetigen Funktionen äquivalent zu der Formulierung im Satz 3.1 und ist unter dem Namen Satz von Titchmarsh, nach Edward Charles Titchmarsh, bekannt. Er wird im folgenden Kapitel diskutiert und bewiesen.

Wir halten fest, dass der Satz 3.2 im Gegensatz zum Satz 3.1 keine Bedingung an das Wachstumsverhalten der Funktionen f und g stellt. Diese sind nur als stetig vorgegeben und können somit mitunter auch unbeschränkt sein, sodass die Fourier-Transformation nicht anwendbar ist.

Zum Beweis des Satzes werden daher einige Aussagen benötigt, die zunächst vorgestellt und bewiesen werden. Die diskutierten Resultate beziehen sich dabei insbesondere auf das Verschwinden bzw. die Beschränktheit von Integralen deren Integranden Exponentialterme bzw. Polynome enthalten.

3.1 Grundlegende Aussagen

Lemma 3.3. *(nach Phragmén)*

Seien $T > 0$, $g \in \mathrm{C}([0,T])$ und $0 \le t \le T$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T \mathrm{e}^{kx(t-u)} g(u)\mathrm{d}u = \int_0^t g(u)\mathrm{d}u. \tag{3.4}$$

Beweis. Für feste $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \mathrm{e}^{kx(t-u)} &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} \mathrm{e}^{kx(t-u)} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{e}^{x(t-u)})^k}{k!} - 1 \\ &= 1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig für alle $u \in [0,T]$. Folglich sind die Integration und Summation in (3.4) vertauschbar und es ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T \mathrm{e}^{kx(t-u)} g(u)\mathrm{d}u = \int_0^T \left(1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)\right) g(u)\mathrm{d}u\,. \tag{3.6}$$

Da $1 \ge \mathrm{e}^{-x(t-u)} > 0$ für alle $u \in [0,\infty)$, folgt

$$|1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right) g(u)| \le |g(u)|,\ u \in [0,\infty). \tag{3.7}$$

Für den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)$ erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)\right) = \begin{cases} 0, & u > t \\ 1, & u < t. \end{cases} \tag{3.8}$$

Der Satz über die majorisierte Konvergenz, (3.6) und (3.8) liefern nun

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T \mathrm{e}^{kx(t-u)} g(u)\mathrm{d}u &= \int_0^T \lim_{x\to\infty} \left(1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)\right) g(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t \lim_{x\to\infty} \left(1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)\right) g(u)\mathrm{d}u \\ &\quad + \int_t^T \lim_{x\to\infty} \left(1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{x(t-u)}\right)\right) g(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t g(u)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.4. *Sei $f \in \mathrm{C}([0,T])$, $T > 0$ und*

$$\int_0^t f(T-u)\mathrm{d}u = 0 \qquad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{3.9}$$

Dann ist bereits $f(t) = 0$ für alle $t \in [0,T]$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für jedes $t \in [0,T]$

$$0 = \int_0^t f(T-u)\mathrm{d}u = \int_{T-t}^T f(v)\mathrm{d}v.$$

Die Behauptung folgt dann, indem wir die rechte Seite nach $t \in [0,T]$ ableiten. $\square$

Dieses Lemma 3.4 wird benötigt, um das folgende, für den Beweis des Satzes von Titchmarsh relevante Lemma 3.5 zu beweisen. Die Behauptung aus Lemma 3.5 wird auf die Ausgangssituation im Lemma 3.3 zurückgeführt und dann mit diesem bewiesen.

Lemma 3.5. *Seien $f \in \mathrm{C}([0,T])$ und $M > 0$, sodass*

$$\left|\int_0^T \mathrm{e}^{nt} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq M \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Dann gilt bereits $f = 0$.

Beweis. Seien k, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left|\int_0^T \mathrm{e}^{knt} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq M$$

nach Voraussetzung. Mit einer Substitution und Lemma 3.3 folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \mathrm{e}^{kn(t-T)} \left|\int_0^T \mathrm{e}^{kn(T-u)} f(T-u)\mathrm{d}u\right| &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \mathrm{e}^{kn(t-T)} \\ &= M\left(1 - \exp\left(\mathrm{e}^{-n(T-t)}\right)\right).\end{aligned}$$

Für $t < T$ konvergiert $1 - \exp\left(\mathrm{e}^{-n(T-t)}\right)$ für $n \to \infty$ gegen 0. Lemma 3.3 impliziert dann

$$\int_0^t f(T-u)\mathrm{d}u = 0 \qquad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{3.11}$$

Mit Lemma 3.4 folgt dann die Behauptung. $\square$

Lemma 3.6. *Sei $f \in C\left([1,T]\right)$. Existiert $N > 0$, sodass*

$$\left|\int_1^T t^n f(t)\mathrm{d}t\right| \leq N \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.12}$$

dann gilt bereits $f(t) = 0$ für $t \in [1,T]$.

Beweis: Definiere $g(x) := \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)$ für $x \in [0,X]$ mit $X := \ln(T)$. Da $T > 1$ folgt aus der Monotonie des Logarithmus $X = \ln(T) > 0$. Mit der Substitution $t = \mathrm{e}^x$ folgt

$$N \geq \left|\int_1^T t^n f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^X \mathrm{e}^{xn}\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^X \mathrm{e}^{xn}\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x\right|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Lemma 3.5 zeigt nun $g(x) = 0$ für alle $x \in [0,X]$ und folglich $tf(t) = 0$ für alle $t \in [1,T]$, woraus sich die Behauptung ergibt. $\square$

Lemma 3.7. *(Satz von Lerch)*
Sei $f \in C([0,T])$ und

$$\int_0^T t^n f(t)\mathrm{d}t = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Dann gilt bereits $f = 0$.

Beweis: Sei q_n ein Polynom vom Grad n mit der Darstellung

$$q_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k, \qquad \alpha_k \in \mathbb{R},\ k \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.14}$$

Mit der Voraussetzung (3.13) folgt

$$\int_0^T q_n(t) f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_0^T t^k f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Somit lässt sich die Vorausetzung auf beliebige Polynome q_n fortsetzen.

Da f stetig und reell- beziehungsweise komplexwertig auf dem Intervall $[0,T]$ ist, existiert nach dem Weierstraßschen Approximationssatz eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, sodass

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \overline{f},$$

wobei es sich um gleichmäßige Konvergenz handelt. Im komplexen Fall wendet man den Approximationssatz auf $\mathrm{Re}(\overline{f})$ und $\mathrm{Im}(\overline{f})$ an. Für diese Polynome erhalten wir

$$0 = \int_0^T p_n(t) f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit auch

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^T p_n(t) f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t. \tag{3.15}$$

Da $|f|^2 \geq 0$ und f stetig ist, ist die Gleichung (3.15) genau dann erfüllt, wenn $f = 0$ gilt und damit ist die Behauptung gezeigt. □

3.2 Beweis von Titchmarshs Theorem

Da nun die notwendigen Hilfsmittel zusammengetragen sind, kann der Satz von Titchmarsh bewiesen werden. Im Beweis werden zwei Fälle unterschieden, $f = g$ und $f \neq g$. Zunächst wird mit dem Lemma 3.5 der Fall $f = g$ gezeigt, wobei der zentrale Punkt darin besteht, eine Schranke an

$$\left| \int_0^T \mathrm{e}^{nt} f(t)\mathrm{d}t \right| \tag{3.16}$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zu finden. Für den Fall $f \neq g$ wird dann signifikant der Fall $f = g$ sowie der Satz von Lerch einfließen, der bereits vorgestellt wurde.

Beweis: Es werden zunächst die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ betrachtet, die im Beweis des Sonderfalles $f = g$ für die Integration relevant werden.

$$G_+ := \{(v,w) \in \mathbb{R}^2 |\ v + w \geq 0, -T \leq v \leq T, -T \leq w \leq T\};$$
$$G_- := \{(v,w) \in \mathbb{R}^2 |\ v + w \leq 0, -T \leq v \leq T, -T \leq w \leq T\}$$

Wir setzen weiter $G := G_+ \cup G_-$.

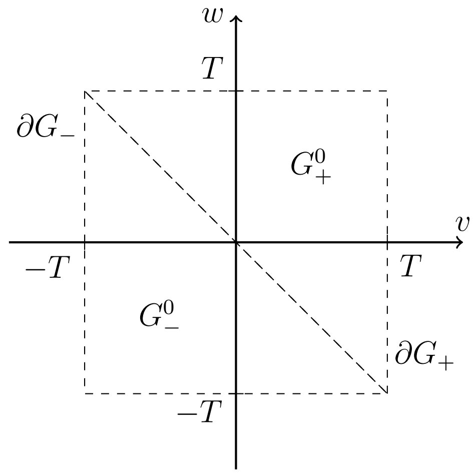

Abbildung 2: Darstellung der Mengen G_- und G_+ in $\mathbb{R}^2$

Wir benötigen noch die Ränder ∂G_+ und ∂G_- und definieren die Menge G_+^0 bzw. G_-^0 als das Innere von G_+ bzw. G_-. Die Ränder sind Nullmengen des zweidimensionalen Lebesguemaßes.

Fall 1: Sei $f = g$ und wähle ein $T > 0$. Nach Voraussetzung des Satzes gilt dann

$$\int_0^t f(t-u)f(u)\mathrm{d}u = 0 \qquad \text{für alle } 0 \leq t \leq 2T\,. \tag{3.17}$$

Damit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2T} \mathrm{e}^{n(2T-t)} \int_0^t f(t-u)f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}t = 0\,, \tag{3.18}$$

da das innere Integral im Intervall $[0, 2T]$ identisch verschwindet. Wir definieren außerdem

$$\Phi : G_+^0 \to \mathbb{R}^2,\ \Phi(v,w) = \begin{pmatrix} T \\ 2T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

sowie

$$H^0 := \{(u,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < u < t,\ 0 < t < 2T\}.$$

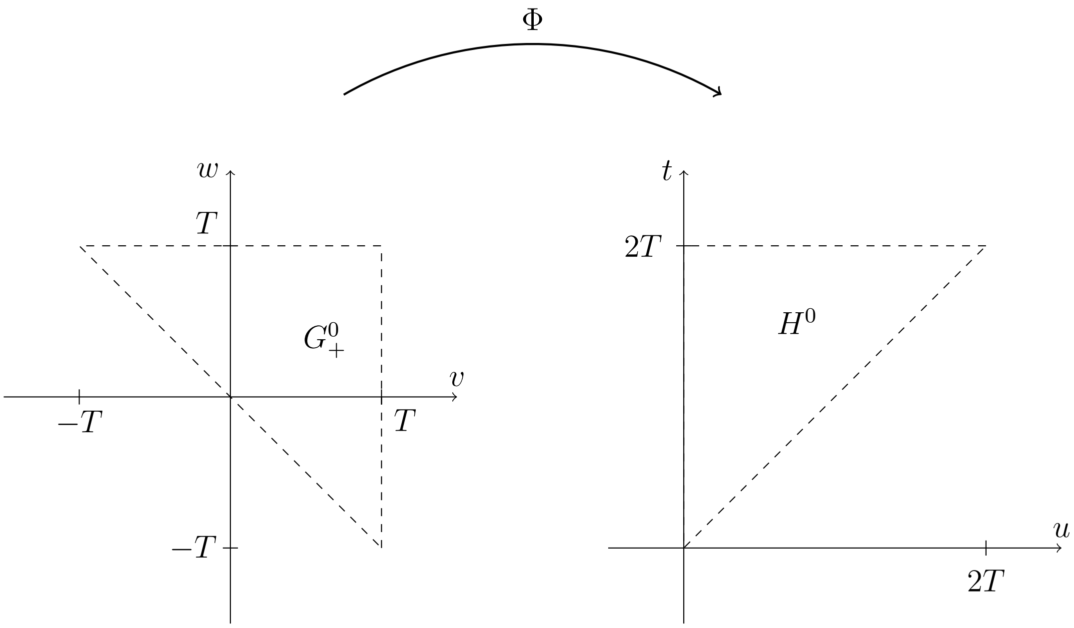

Abbildung 3: Transformation von G^0_+ durch Φ

Wir haben $D\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und somit $|\det(D\Phi)| = 1$. Per Definition von Φ gilt

$$\begin{aligned} u &= \Phi_1(v,w) = T - v = T - v + T - T < T - v + T - w = t, \\ u &= \Phi_1(v,w) = T - v > T - T = 0, \\ t &= \Phi_2(v,w) = 2T - v - w = 2T - (v+w) < 2T, \\ t &= \Phi_2(v,w) = 2T - v - w > 2T - T - T = 0 \end{aligned}$$

für alle $(v,w) \in G^0_+$. Folglich gilt $\Phi(G^0_+) \subseteq H^0$. Sei nun $(u_0,t_0) \in H^0$ und wir definieren

$$(v_0, w_0) := (-u_0 + T, u_0 - t_0 + T).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} v_0 + w_0 = 2T - t_0 &> 2T - 2T = 0, \\ v_0 = u_0 - t_0 + T &< t_0 - t_0 + T = T, \\ v_0 = u_0 - t_0 + T &> 0 - 2T + T = -T, \\ w_0 = -u_0 + T &> -t_0 + T > -2T + T = -T, \\ w_0 = -u_0 + T &< 0 + T = T \end{aligned}$$

und somit $(v_0, w_0) \in G^0_+$. Außerdem erfüllt (v_0, w_0) die Gleichung

$$\Phi((v_0, w_0)) = (u_0, t_0), \tag{3.20}$$

sodass zu jedem $(u_0, t_0) \in H^0$ ein $(v_0, w_0) \in G^0_+$ existiert, das die Gleichung (3.20) erfüllt. Folglich ist auch die umgekehrte Inklusion $H^0 \subseteq \Phi(G^0_+)$ gezeigt und es folgt die Mengengleichheit $H^0 = \Phi(G^0_+)$. Mit $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_n(u,t) := \mathrm{e}^{n(2T-t)} f(u) f(t-u)$ für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich aus (3.18) und der Transformation Φ, dass

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2T} \mathrm{e}^{n(2T-t)} \int_0^t f(t-u)f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}t = \iint_{H^0} g_n(u,t)\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&= \iint_{G_+^0} g_n(\Phi(v,w))\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \iint_{G_+} \mathrm{e}^{n(v+w)} f(T-v)f(T-w)\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Für $(v,w) \in G_-$ gilt $v+w \leq 0$, woraus $\mathrm{e}^{n(v+w)} \leq 1$ für alle $(v,w) \in G_-$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt.

Mittels der Transformation ist es folglich gelungen einen e-Term, ähnlich dem im Lemma 3.4, im Integranden zu erzeugen. Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass die Menge G_+ gerade die „schlechtere“ Teilmenge von G war, denn auf dieser wächst die e-Funktion, wie sie im betrachteten Integranden vorhanden ist, an. Im Gegensatz dazu ist die e-Funktion auf G_-, wie bereits bemerkt, durch 1 beschränkt.
Da das Integral über G_+ aber verschwindet, hebt sich der problematische, also anwachsende Teil der e-Funktion auf.

Im Folgenden wollen wir mit Hilfe dieser Erkenntnis das Integral

$$
\left| \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{nu} f(T-u)\mathrm{d}u \right|
$$

beschränken. Durch Quadrieren und dem Satz von Fubini erhalten wir dabei ein mehrdimensionales Integral über G_-. In der Tat impliziert (3.21), dass

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{nu} f(T-u)\mathrm{d}u \right|^2 &= \left| \iint_G \mathrm{e}^{n(v+w)} f(T-v)f(T-w)\mathrm{d}v\mathrm{d}w \right| \\
&\leq \iint_{G_-} |f(T-v)f(T-w)| \,\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&\leq \left(\sup_{t\in[0,2T]} |f(t)| \right)^2 \iint_{G_-} 1 \,\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&= M^2\, 2T^2,
\end{aligned}
$$

wobei $M := \sup\limits_{t\in[0,2T]} |f(t)|$. Folglich ergibt sich mit obiger Definition von M

$$
\left| \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{nu} f(T-u)\mathrm{d}u \right| \leq \sqrt{2}MT, \qquad (3.22)
$$

Weiterhin haben wir

$$
\left| \int_{-T}^{0} \mathrm{e}^{nu} f(T-u)\mathrm{d}u \right| \leq T \int_{-T}^{0} |f(T-u)| \,\mathrm{d}u \leq MT. \qquad (3.23)
$$

Mit (3.22) und (3.23) ergibt sich damit

$$
\left| \int_{0}^{T} \mathrm{e}^{nu} f(T-u)\mathrm{d}u \right| = \left| \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{nu} f(T-u)\mathrm{d}u - \int_{-T}^{0} \mathrm{e}^{nu} f(T-u)\mathrm{d}u \right| \leq (1+\sqrt{2})TM.
$$

Hierauf lässt sich nun Lemma 3.5 anwenden, sodass $f(t) = 0$ für $t \in [0,T]$ gefolgert werden kann und der Beweis des Falls $f = g$ folglich erbracht ist.

Es wird nun der allgemeine Fall mit $f \neq g$ von Titchmarshs Theorem betrachtet.
Fall 2: Dieser Fall kann genau so auf den Beweis von Satz 3.1 übertragen werden.
Sei $f \neq g$. Wir zeigen zunächst induktiv, dass die Bedingung des Satzes von Lerch mit

$$\int_0^t f(t-u)u^n g(u)\mathrm{d}u = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt wird. Wir definieren dazu $f_1(t) := tf(t)$ und $g_n(t) := t^n g(t)$ für alle $t \in [0,\infty)$. Der Induktionsanfang $n = 0$ gilt nach Voraussetzung des Satzes

$$\int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{d}u = 0 \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

Wir formulieren die Induktionsvoraussetzung, dass ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass

$$\int_0^t f(t-u)u^n g(u)\mathrm{d}u = 0. \tag{3.24}$$

Es folgt nun der Induktionsschritt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle $t \in [0,\infty)$

$$0 = t\int_0^t f(t-u)u^n g(u)\mathrm{d}u = \int_0^t (t-u)f(t-u)u^n g(u)\mathrm{d}u + \int_0^t f(t-u)u^{n+1}g(u)\mathrm{d}u.$$

Nach Definition von g_n lässt sich die Gleichung umschreiben zu

$$(f_1 * g_n) + (f * g_{n+1}) = 0.$$

Seien $h,\ \phi \in C[0,\infty)$ und ist $h = 0$ oder $\phi = 0$, so gilt auch $h * \phi = 0$. Die Faltung von $(f_1 * g_n) + (f * g_{n+1})$ mit einer beliebigen stetigen Funktion ist also gleich 0. Daraus ergibt sich folgende Gleichung.

$$[f * \{g_{n+1} * (f_1 * g_n + f * g_{n+1})\}] = 0.$$

Diese Gleichung ergibt umgeformt nach den Rechenregeln für Faltungen wiederrum

$$[(f * g_n) * (f_1 * g_{n+1})] + [(f * g_{n+1}) * (f * g_{n+1})] = 0.$$

Unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung $(f * g_n) = 0$ und dem Fall 1 folgt

$$0 = (f * g_{n+1})(t) = \int_0^t f(t-u)u^{n+1}g(u)\mathrm{d}u \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Also ergibt sich induktiv, dass

$$\int_0^t f(t-u)u^n g(u)\mathrm{d}u = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } t \geq 0. \tag{3.25}$$

Nach Lemma 3.7 folgt nun zunächst

$$f(t-u)g(u) = 0 \qquad \text{für alle } 0 \leq u \leq t < \infty. \tag{3.26}$$

Existiert nun ein u_0 mit $g(u_0) \neq 0$, dann gilt $f(t-u_0) = 0$ für alle $t \geq u_0$ und folglich $f(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Damit ist entweder $f = 0$ oder $g = 0$ und somit der Beweis erbracht. $\square$

4 Fazit

Wir betrachten nochmals das zuvor bewiesene Resultat in Form von Titchmarshs Theorem.

Satz 4.1. *Seien f, $g \in \mathrm{C}([0,\infty))$. Falls*

$$(g * f)(x) = 0 = (f * g)(x)$$

für alle $x \in [0,\infty)$, so gilt entweder $f = 0$ oder $g = 0$.

Seien dazu $u, v, w \in \mathrm{C}([0,\infty))$ und wir betrachten die Faltungen $u * v$ beziehungsweise $u * w$. Mittels des Satzes von Titchmarsh ergibt sich direkt, dass die Gleichung

$$u * v = u * w$$

für $u \neq 0$ erfüllt ist, wenn bereits $v = w$ gilt, denn es gilt

$$0 = u * v - u * w = u * (v - w),$$

falls $u = 0$ oder $v - w = 0$. Folglich gilt $v = w$, falls $u \neq 0$, und es folgt die Eindeutigkeit der Faltung.
Jan Mikusiński nutze um 1950 diese Tatsache, um einen nullteilerfreien Ring $\mathcal{C}$ von stetigen Funktionen zu definieren, der mit der üblichen Addition von Funktionen sowie der Faltung als Multiplikation versehen ist. Die Eigenschaften eines Ringes werden dabei direkt durch die Faltung und ihre Eigenschaften erfüllt, das Distributiv- und Assoziativgesetz sind sogar wesentlich in den zweiten Teil des Beweises von Satz von Titchmarsh eingegangen. Für diesem Ring definierte Mikusiński den zugehörigen Quotientenkörper, wobei er den Quotienten zweier Funktionen $u, v \in \mathcal{C}$ dadurch beschreibt, dass $w = \frac{u}{v}$, falls $u = w*v$ gilt. Dieser Quotientenkörper bildet die Grundlage für das Operatorkalkül nach Mikusiński, das im Bereich der Lösung von Differentialgleichungen Anwendung findet und bereits in der Einleitung angesprochen wurde. Insbesondere das Element, das von $1 \in \mathcal{C}$ erzeugt wird und hier entsprechend der Notation in [4], VI.6, mit h bezeichnet wird, spielt eine zentrale Rolle, denn für $f \in \mathcal{C}$ gilt

$$(h * f)(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s. \tag{4.1}$$

Das Element h kann also als „Integrationsoperator“ aufgefasst werden, sodass das Inverse zu h, das wir mit h^{-1} bezeichnen, also der „Ableitungsoperator“ ist. Damit lässt sich die von Heaviside vorgeschlagene Schreibweise $f' = p \cdot f$ mathematisch korrekt begründen, wobei $p = h^{-1}$ und die Multiplikation gerade die Faltung ist. Um beliebige Anfangswertprobleme lösen zu können, erweiterte Mikusiński die Gleichung noch um Anfangswerte, was an dieser Stelle aber zu weit gehen würde, dies zu diskutieren. Ich möchte hervorheben, dass der Ausgangspunkt tatsächlich Methoden waren, die in der Lösung von Differentialgleichung ihre Anwendung finden, sprich die Fourier- und die Laplace-Transformation, und die Motivation von Mikusińskis Operatorkalkül doch im Bereich der Differentialgleichungen liegt, auch wenn sich die vorliegende Arbeit eher mit strukturtheoretischen Themen befasst.
Im Rahmen dieser Arbeit konnte also die Hinführung auf das Operatorkalkül nach Mikusiński dargestellt werden, das das Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen, wie es von Heaviside motiviert und verwendet wurde, ablöste. Auf diese Form der Operatorrechnung wird auch in der Vorlage dieser Arbeit, sprich Kôsaku Yosida, „Functional Analysis“, Kapitel VI.6., eingegangen und die vollständige Theorie dargelegt.

5 Grundlagen der Fouriertransformation und der Distributionen

In diesem Abschnitt sollen kurz einige Resultate aufgeführt werden, die in der Arbeit verwendet aber nicht bewiesen wurden, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde.

Definition 5.1. *Wir bezeichnen für alle $z \in \mathbb{C}^n$ mit e_z die Funktion*

$$\mathrm{e}_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ \mathrm{e}_z(x) = \mathrm{e}^{zx}.$$

Definition 5.2. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{C}^m$. Die Abbildung f heißt holomorph, falls für $f = (f_1, \ldots, f_m)$ jede Komponentenfunktion f_j mit $j \in 1, \ldots, m$ in jeder Variablen holomorph ist.*

Definition 5.3. *Sei in obiger Definition $U = \mathbb{C}^n$ und f holomorph. Dann heißt f ganz.*

Diese Aussagen werden im Beweis des Satzes von Paley-Wiener für Funktionen benötigt.

Die nächsten Aussagen beziehen sich auf Eigenschaften von Distributionen $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ beziehungsweise $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und werden im Beweis des Satzes von Paley-Wiener für Distributionen Anwendung finden. Definieren wir aber zunächst $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ beziehungsweise $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und dann die korrespondierenden Räume $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ beziehungsweise $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definition 5.4. *Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \big| \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^\infty : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty\} \tag{5.1}$$

heißt Schwartz-Raum oder Raum der schnell-fallenden Funktionen. Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ trägt die durch die Familie von Halbnormen

$$p_{\alpha,\beta}(\phi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \phi(x) \right| \tag{5.2}$$

induzierte Metrik.

Definition 5.5. *Der Raum $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ wird definiert als*

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{5.3}$$

Auf $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ wird durch die Familie der Halbnormen

$$\sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_n(x)| \tag{5.4}$$

eine Metrik erzeugt, wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige kompakte Menge und $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist. Eine Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ konvergiert also in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ gegen 0, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_n(x)| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{5.5}$$

Wir bezeichnen $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ als den Raum der glatten Funktionen.

Definition 5.6. *Wir definieren die Räume $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ beziehungsweise $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ als die der stetigen linearen Abbildungen $T : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, beziehungsweise $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$.*

Definition 5.7. *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $x_0 \in \operatorname{supp} T$, falls für alle offenen Umgebungen U von x_0 ein $\phi \in \mathcal{D}(U)$ existiert, sodass $T(\phi) \neq 0$.*

Definition 5.8. *Eine Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt regulär, falls eine lokal integrierbare Funktion f existiert, sodass*

$$T(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{5.6}$$

Proposition 5.9. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine lokal integrierbare Funktion. Gilt*

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^m$$

fast überall für ein $C > 0$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}$, so induziert f eine reguläre temperierte Distribution.

Beweis: Vergleiche [4], VI.2, Proposition 2. □

Proposition 5.10. *Sei $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann existieren $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$ und ein kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass*

$$|T(f)| \leq C \sup_{|j| \leq k,\, x \in K} |D^j f(x)| \text{ für alle } f \in C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{5.7}$$

Beweis: Siehe [4], I.13. Satz 2 □

Definition 5.11. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt folgende Formel für die Fourier-Transformation*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.8}$$

Ist $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so definiert

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} g(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.9}$$

die inverse Fourier-Transformation von g.

Satz 5.12. *Die Fouriertransformationen $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind bijektiv.*

Beweis: Vergleiche [3], 11. IV. und 11.X. . □

Definition 5.13. *Die Fourier-Transformatierte $\hat{T}$ einer Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist durch*

$$\hat{T}(\phi) = T(\hat{\phi}), \qquad \text{für alle } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{5.10}$$

definiert.

Satz 5.14. *Die Fourier-Transformation einer Distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ist durch die Funktion*

$$\hat{T}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} T\left(\mathrm{e}_{-\mathrm{i}\xi}\right) \tag{5.11}$$

gegeben.

Beweis: Siehe [4], VI.3, Satz 4. □

Definition 5.15. *Sei $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist für alle $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ die Faltung $T * \phi$ durch*

$$(T * \phi)(y) := T(\phi(y - \cdot)), \qquad y \in \mathbb{R}^n \tag{5.12}$$

definiert.

Wird in [4], VI.3, Definition, eingeführt.

Proposition 5.16. *Seien $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $(T * \phi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\mathrm{supp}(T * \phi) \subseteq \mathrm{supp}T + \mathrm{supp}\phi. \tag{5.13}$$

Beweis: Siehe [4], VI.3, Proposition 1. □

Satz 5.17. *Seien $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\widehat{(T * \phi)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{\phi}\hat{T}. \tag{5.14}$$

Beweis: Siehe [4], VI.3, Satz 6. □

Definition 5.18. *Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ nicht-negativ,* $\mathrm{supp}(\phi) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n |\ |x| \leq 1\}$ *und* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi \mathrm{d}x = 1$. *Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\phi_\varepsilon := \varepsilon^{-n}\phi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$. Dann heißt $T * \phi_\varepsilon$ die Regularisierung von $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bzw. $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ durch ϕ_ε.*

Satz 5.19. *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bzw. $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (T * \phi_\varepsilon)(\psi) = T(\psi), \qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ bzw. } \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n). \tag{5.15}$$

Beweis: Siehe [4], VI.3, Satz 1. □

Literatur

[1] Walter Ameling. *Laplace-Transformation*. Studienbücher Naturwissenschaft und Technik. Vieweg+Teubner Verlag, Braunschweig and Wiesbaden, 1984.

[2] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1983-1985.

[3] Wolfgang Walter. *Einführung in die Theorie der Distributionen*. BI-Wiss.-Verl., Mannheim, 1994.

[4] Kôsaku Yoshida. *Functional analysis*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.