



Projektarbeit

# Simulation und Stabilität nichtlinearer Hawkes-Prozesse

Jens Fischer

25. September 2018

Betreuung: Prof. Dr. Matthias Holschneider, Prof. Dr. Wilhelm Huisenga

Fakultät für Mathematik

Universität Potsdam

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung der Universität Potsdam zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet habe.

Potsdam, den 25. September 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Vorwort</b>	<b>4</b>
<b>2 Lineare Hawkes-Prozesse</b>	<b>5</b>
2.1 Definition und Eigenschaften . . . . .	5
2.2 Simulation Linearer Hawkes-Prozesse . . . . .	6
2.2.1 Simulation inhomogener Poisson-Prozesse . . . . .	7
2.2.2 Simulation im Fall der Poisson-Identifikation . . . . .	9
2.3 Thinning Algorithmen . . . . .	12
<b>3 Nichtlineare Hawkes-Prozesse</b>	<b>15</b>
3.1 Definition und Eigenschaften . . . . .	15
3.2 Vom linearen zum nichtlinearen Hawkes-Prozess . . . . .	16
3.2.1 Poisson-Identifikation im linearen Fall . . . . .	16
3.2.2 Verwerfen der Poisson-Identifikation . . . . .	18
3.3 Existenzresultat von Bremaud und Masoulié . . . . .	18
3.4 Diskussion des Resultats von Bremaud und Masoulié . . . . .	19
3.4.1 Veranschaulichung der Punktdichte linearer Hawkes Prozesse . . . . .	21
3.4.2 Simulationsbeispiel für glatte, Lipschitz-stetige Nichtlinearität . . . . .	22
3.4.3 Simulationsbeispiel für sublinear anwachsende Nichtlinearität . . . . .	24
3.4.4 Simulation für exponentielle Nichtlinearität . . . . .	25
<b>4 Ausblick</b>	<b>28</b>
<b>Literatur</b>	<b>29</b>

# 1 Vorwort

Stabilitätsanalysen bilden einen zentralen Punkt in der Untersuchung sowohl deterministischer als auch stochastischer, wie sie beispielsweise im Kontext der chemischer Reaktionskinetik auftreten. Um theoretische Resultate effektiv kommunizieren zu können, ist es notwendig diese Dynamiken zu simulieren und graphisch festzuhalten, um theoretische Ansätze zu komplementieren und zugänglicher zu machen. Diese Arbeit setzt sich mit der Simulation und Stabilitätsanalyse von linearen und ausgewählten nichtlinearen Hawkes-Prozessen auseinander und lässt sich somit im Feld stochastischer Punkt-Prozesse verarbeiten.

Hawkes und Oakes legten in ihrer Arbeit „A Cluster Process Representation of a Self-Exciting Process“ [Oak74] den Grundstein für diese Prozesse, die sich durch ihre selbstverstärkende Natur auszeichnen. Ein selbstverstärkender Prozess wird dadurch charakterisiert, dass jedes Ereignis  $\tau$  in einem gewissen Zeitraum nach dem Eintreten die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Folgeereignisses beeinflusst. Inhibition, also die verringerte Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Folgeereignises, wird aber eher in neueren Arbeiten thematisiert [Tra18]. Der zentrale Bestandteil des Prozesses ist dabei die Intensität, die für Hawkes Prozesse beispielsweise in [Pol15] eingeführt wird.

Die Intensität kann als Maßdafür gesehen werden, wie schnell Ereignisse aufeinander folgen. Eine hohe Intensität führt dabei mit hoher Wahrscheinlichkeit zu kurzen Zeiten zwischen aufeinander folgenden Ereignissen. Dieser Zusammenhang macht die selbstverstärkende Eigenschaft von Hawkes Prozessen aus, die in dieser Arbeit diskutiert werden wird und auch [Pol15] thematisiert. Dabei analysieren wir in Kapitel 2 zunächst die von Hawkes und Oakes in [Oak74] eingeführte Intensität, die heute als Intensität eines linearen Hawkes Prozesses bezeichnet wird. In Kapitel 3 betrachten wir dann Verallgemeinerungen des linearen Hawkes Prozesses, der dann als nichtlinearer Hawkes Prozess bezeichnet wird.

Zur Simulation werden wir im linearen Fall zwei Algorithmen präsentieren, zum einen auf Basis der Identifikation des Hawkes-Prozesses mit einem Poisson-Verzweigungsprozesses, etabliert von Hawkes und Oaks im Jahr 1974 [Oak74], und zum anderen einen Thinning Algorithmus nach Ogata [Oga81], [VJ03]. Letzterer eignet sich zur Simulation von Punkt-Prozessen, deren Intensität bekannt ist und Bedingungen bezüglich ihrer Vorhersagbarkeit genügt, die insbesondere für deterministische Intensitäten immer erfüllt sind. Der Thinning Algorithmus wird dann auch dazu verwendet nichtlineare Hawkes-Prozesse zu veranschaulichen, da für diese die Poisson-Identifikation verworfen werden muss [Mas96], wie in Kapitel 3.2 eingehend diskutiert wird.

Anhand der aus den Simulationen gewonnenen Erkenntnissen diskutieren wir abschließend Stabilitätsresultate von Bremaud und Masoulié [Mas96] und gehen auch über deren Vorgaben hinaus, um mögliche Ansätze für weitere Untersuchungen aufzuzeigen.

## 2 Lineare Hawkes-Prozesse

### 2.1 Definition und Eigenschaften

In diesem Kapitel möchten wir alle notwendigen Definitionen und Resultate zusammentragen, auf die sich im weiteren Verlauf des ersten Teils der Arbeit immer wieder bezogen wird. Dazu gehören die Definition von Punktprozessen auf der reellen Achse sowie von zunächst linearen Hawkes-Prozessen.

**Definition 2.1.** *Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $T$  eine Menge von Zufallsvariablen mit Werten in  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ . Wir nennen  $T$  einen Punktprozess, falls  $\mathbb{P}$  fast sicher für alle beschränkten Intervalle  $I \subset \mathbb{R}^+$  gilt*

$$\text{card}(I \cap T) < \infty. \quad (2.1)$$

Wir definieren den zu  $T$  assoziierten Zählprozess  $N : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  als

$$N_t := \sum_{\tau \in T} \mathbb{1}_{\tau \leq t}, \quad (2.2)$$

wobei  $\mathbb{1}$  die Indikatorfunktion beschreibt. Im Folgenden bezeichnen wir sowohl den Punktprozess als auch den assoziierten Zählprozess mit  $N$ , sofern es nicht notwendig ist, hervorzuheben, dass wir explizit über die Menge  $T$  der zufälligen Punkte sprechen.

**Definition 2.2.** *[Pol15] Sei  $T$  ein Punktprozess und  $N$  der assozierte Zählprozess wie zuvor definiert. Falls für alle  $t \geq 0$  der Grenzwert*

$$\lambda(t | \sigma(N_s : s \in [0, t))) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}[N_{t+h} - N_t | \sigma(N_s : s \in [0, t))]}{h} \quad (2.3)$$

*existiert, so nennen wir  $\lambda$  die bedingte Poisson Intensität von  $T$ , wobei  $\sigma(N_s : s \in [0, t))$  die von  $(N_s)_{s \in [0, t]}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra ist.*

Für die Definition eines Hawkes Prozesses als Punktprozess halten wir uns an [DK13].

**Definition 2.3.** *Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $T$  ein Punktprozess auf diesem. Wir nennen  $T$  einen Hawkes-Prozess, charakterisiert durch das Tripel von Funktionen  $(\phi, h, g)$  mit*

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

*falls die bedingte Poisson Intensität (siehe auch [RS72]) zur Zeit  $t \geq 0$  erfüllt*

$$\lambda(t) = \phi \left( g(t) + \sum_{0 \leq \tau < t, \tau \in T} h(t - \tau) \right). \quad (2.4)$$

*Wir nennen  $h$  den Kern von  $\lambda$ .*

Im Kapitel 3 werden wir uns in dieser Allgemeinheit mit Hawkes-Prozessen befassen. Nun schränken wir uns aber darauf ein, den Sonderfall  $\phi(x) = x + \mu$  mit  $\mu > 0$ ,  $g = 0$  zu betrachten, um qualitative Eigenschaften des Prozesses anhand der Simulationen aufzuzeigen. Zusätzlich

betrachten wir in der gesamten Arbeit nur Kerne  $h$  mit

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, t \mapsto h(t) \begin{cases} \geq 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ = 0, & t < 0 \end{cases}, \quad (2.5)$$

Diese Einschränkungen führen auf die folgende Definition.

**Definition 2.4.** Sei  $T$  ein Hawkes Prozess wie in Definition 2.3. Dann bezeichnen wir  $T$  als linearen Hawkes Prozess, falls die bedingte Poisson Intensität  $\lambda$  für  $\mu > 0$  und  $h$  wie in Gleichung 2.5 die folgende Form hat.

$$\lambda(t) = \mu + \sum_{0 \leq \tau < t, \tau \in T} h(t - \tau) \quad (2.6)$$

Hawkes and Oakes zeigten in ihrer Arbeit im Jahr 1974 die Existenz solcher Prozesse und etablierten die Eigenschaft, dass sie mit Poisson-Verzweigungsprozessen identifiziert werden können [Oak74], sofern

$$\int_0^\infty h(s)ds < 1. \quad (2.7)$$

Diese Eigenschaft wird in Kapitel 3.2.1 eingehender diskutiert.

## 2.2 Simulation Linearer Hawkes-Prozesse

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Simulation linearer Hawkes-Prozesse befassen. Die bedingte Poisson Intensität, die wir ab sofort schlicht als Intensität bezeichnen, des Hawkes Prozesses hat entsprechend Definition 2.4 die Form

$$\lambda(t) = \mu + \sum_{0 \leq \tau < t, \tau \in T} h(t - \tau), \quad (2.8)$$

mit  $\mu$  und  $h$  wie in Definition 2.4. Die für die folgende Simulation relevante Annahme entspricht dem Resultat von Hawkes und Oakes, dass für

$$\int_0^\infty h(s)ds < 1 \quad (2.9)$$

der Hawkes-Prozess mit einem Poisson-Verzweigungsprozess identifiziert werden kann. Das Problem der Simulation reduziert sich dadurch auf die Simulation eines Poisson-Prozesses mit stochastischer Intensität  $\lambda$ , d.h.  $\lambda$  bildet selbst einen stochastischen Prozess. Wir können daher auf eine der üblichen Techniken zur Simulation eines Poisson-Prozesses zurückgreifen. Dabei gehen wir in den folgenden Schritten vor.

Simulierte zunächst einen zweidimensionalen Poisson-Prozess  $P$  mit Intensität 1 auf einem Gebiet  $\mathbb{W} = [0, t] \times [0, I] \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Anschließend wird in diesem Gebiet die Intensitätskurve konstruiert, die  $\mathbb{W}$  dann in die folgenden Mengen teilt:

$$\mathbb{W}_1 = \{(\tau, y) | \tau \in [0, t], 0 \leq y \leq \lambda(\tau)\}, \quad \mathbb{W}_2 = \{(\tau, y) | \tau \in [0, t], I \geq y > \lambda(\tau)\}. \quad (2.10)$$

Wähle daraufhin alle Realisierungen von  $P$  aus, die in  $\mathbb{W}_1$  liegen. Diese fassen wir in der Menge

$$\mathcal{K} = \{(t_\kappa, x_\kappa) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ | (t_\kappa, x_\kappa) \in \mathbb{W}_1, (t_\kappa, x_\kappa) \text{ Realisierung von } P\}$$

zusammen. Die Realisierungen des linearen Hawkes-Prozesses sind dann die Projektionen  $t_\kappa$  eines Elements  $(t_\kappa, x_\kappa) \in \mathcal{K}$  auf die erste Komponente.

### 2.2.1 Simulation inhomogener Poisson-Prozesse

Die Simulation eines Poisson-Prozesses kann ausgehend von einem räumlichen Poisson-Prozess mit Intensität 1, auch mit „Complete Spatial Randomness“ bezeichnet und in Abbildung 1 dargestellt, konstruiert werden. Wir verstehen dabei unter einem räumlichen Poisson-Prozess

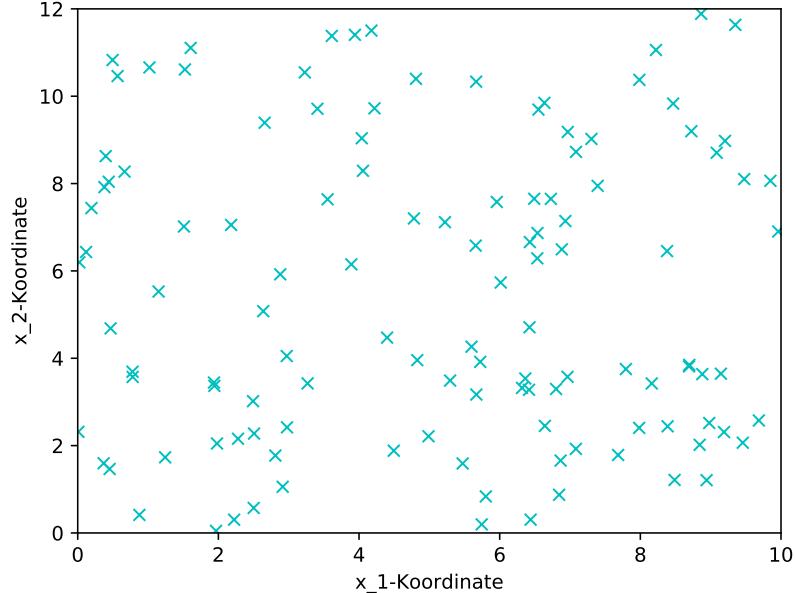


Abbildung 1: „Complete Spatial Randomness“. Die Kreuze sind Realisierungen des Zufallsvektors  $(X_n)_{n=0}^Z$ .

mit Intensität 1 eine Zufallsvariable  $P$  über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit den folgenden Eigenschaften

- $\forall \omega \in \Omega : P(\cdot, \omega)$  ist Maß auf  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ .
- $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : P(A, \cdot) \sim \text{Poiss}(\nu(A))$ , wobei  $\nu$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^2$  ist.
- Seien  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  disjunkt, so sind  $P(A_1, \cdot), \dots, P(A_n, \cdot)$  unabhängig.

Wir nennen ein solches  $P$  im Folgenden zufälliges Maß. Sei  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $\nu(A) < \infty$ , so lässt sich ein Poisson-Maß  $N$  wie folgt simulieren.

1. Ziehe die Anzahl  $Z$  der Punkte in  $A$  entsprechend  $Z \sim \text{Poiss}(\nu(A))$ .
2. Sei  $(X_n)_{n=0}^Z$ ,  $X_0 \sim \mathcal{U}(A)$  i.i.d. Folge von Zufallsvariablen
3.  $N = \sum_{n=0}^Z \delta_{X_n}$  ist dann ein Poisson-Maß

Wählen wir uns ein hinreichend großes Gebiet  $\mathbb{W} = [0, t] \times [0, I]$  und simulieren die Folge  $(X_n)_{n=0}^Z$  auf  $\mathbb{W}$ , so erhalten wir eine Realisierung eines räumlichen Poisson-Prozesses innerhalb des Fens-ters  $\mathbb{W}$ .

**Definition 2.5.** [VJ03] Wir nennen einen Punktprozess mit assoziertem Zählprozess  $N$  :  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0$  über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  einen homogenen Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda > 0$ , falls

1.  $N_0 = 0$   $\mathbb{P}$  fast sicher,
2. für alle  $s < t \leq v < w$  sind  $N_s - N_t$  und  $N_v - N_w$  unabhängig,
3.  $N_t \sim \text{Poiss}(\lambda t)$ .

Wir nennen  $N$  inhomogenen Poisson-Prozess mit Intensitätsfunktion  $\gamma$ , falls

1.  $N_0 = 0$   $\mathbb{P}$  fast sicher,
2. für alle  $s < t \leq v < w$  sind  $N_s - N_t$  und  $N_v - N_w$  unabhängig,
3. für alle  $0 \leq s, t$  gilt  $N(t + s) - N(s) \sim \text{Poiss}(m(t + s) - m(s))$ , wobei  $m(t) = \int_0^t \gamma(s)ds$ .

Hiervon ausgehend können wir im Folgenden zunächst den homogenen Poisson-Prozess mit konstanter Intensität  $\lambda$  konstruieren, anschließend den inhomogenen Poisson-Prozess mit Intensitätsfunktion  $\gamma$ , um dann zum Fall einer zufälligen Intensität für den Fall des Hawkes-Prozesses überzugehen. Der Zählprozess des homogenen Poisson-Prozesses  $\bar{N}$  mit Intensität  $\lambda > 0$  ergibt sich nun über

$$\bar{N}_t = P([0, t) \times [0, \lambda]), \quad t \geq 0$$

wobei  $P$  das zuvor beschriebe Zufallsmaß ist.

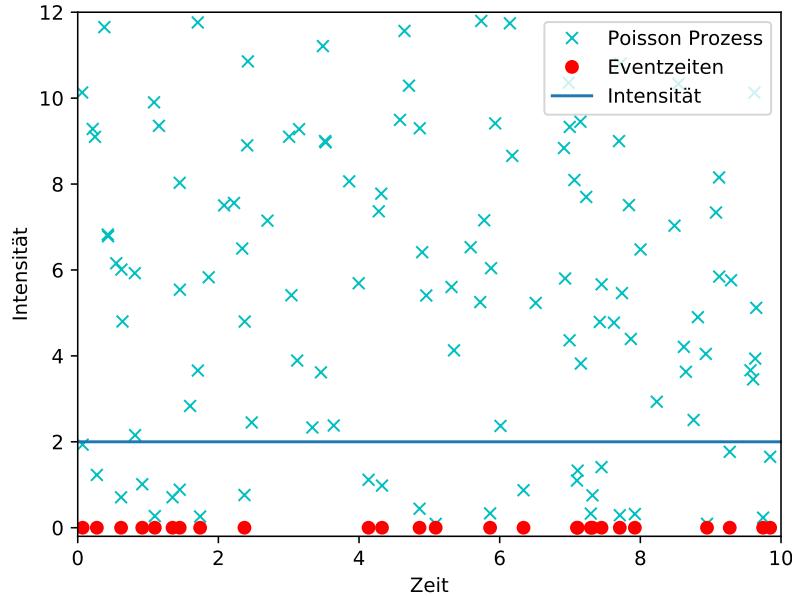


Abbildung 2: Simulation eines homogenen Poisson-Prozesses  $\bar{N}$  mit  $\lambda = 2$  vor Zeit  $t = 10$ . Die Punkte auf der waagerechten Achse bilden die Realisierungen von  $\bar{N}$ .

Eine Realisierung des Prozesses  $\bar{N}$  zählt folglich alle Realisierungen der Zufallsvariablen  $(X_i)_{i=1}^Z$ , die sich unterhalb der Geraden  $y = \lambda$  und vor dem Zeitpunkt  $t$  befinden, wie in Abbildung 2 dargestellt.

Der Übergang zum inhomogenen Poisson-Prozess  $\hat{N}$  und damit zu einem Prozess mit nicht-konstanter Intensität  $\gamma$  ergibt sich durch die Betrachtung der Fläche unterhalb der Kurve  $(t, \gamma(t))_{t \in [0, \infty)}$  (vgl. Abbildung 3).

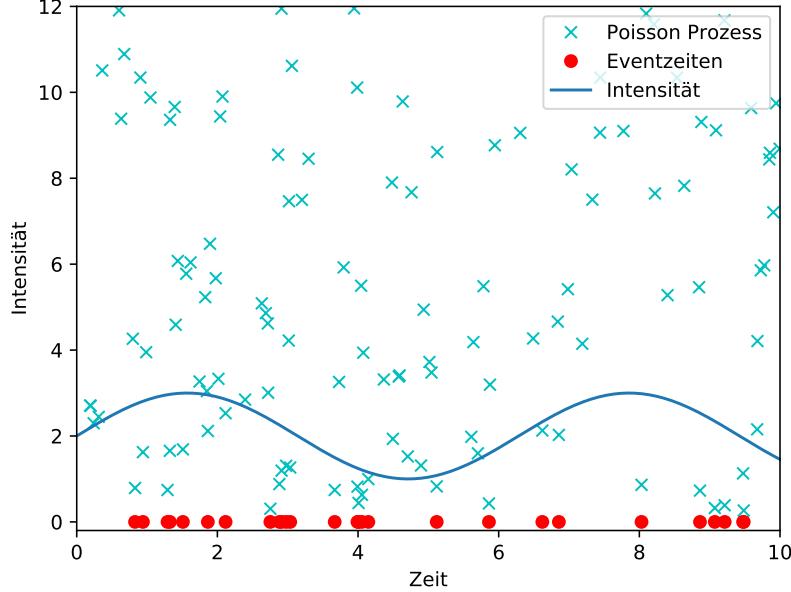


Abbildung 3: Simulation eines inhomogenen Poisson-Prozesses  $\hat{N}$  mit  $\lambda(t) = 2 + \sin(t)$  vor Zeit  $t = 10$ . Die roten Punkte auf der waagerechten Achse bilden die Realisierungen von  $\hat{N}$ .

Sei  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  die Intensität von  $\hat{N}$ , dann gilt für den Zählprozess des inhomogenen Poisson-Prozesses gerade

$$N_t = P(\{(\tau, y) | \tau \in [0, t], 0 \leq y \leq \lambda(\tau)\}), \quad t \geq 0.$$

### 2.2.2 Simulation im Fall der Poisson-Identifikation

Basierend auf der vorherigen Argumentation möchten wir nun einen Hawkes-Prozess  $N$  entsprechend Definition 2.4 mit Intensität

$$\lambda(t) = \mu + \sum_{0 \leq \tau < t, \tau \in T} h(t - \tau) \tag{2.11}$$

simulieren. Bei der Intensität handelt es sich nun allerdings selbst um einen stochastischen Prozess, da sie wesentlich von den zufälligen Zeiten  $\tau$  abhängt. Solange diese die Bedingung

$$\int_0^\infty h(s)ds < 1 \tag{2.12}$$

erfüllt und somit nach [Oak74] mit einem Poisson-Cluster-Process auf  $\mathbb{R}$  identifiziert werden kann, können wir  $N$  dennoch anhand inhomogener Poisson Prozesse simulieren. Die zentrale Eigenschaft dabei ist, dass jedes Ereignis  $\tau$  einen inhomogenen Poisson Prozess  $N_\tau$  auf  $[\tau, \infty)$

mit Intensität  $\gamma_\tau$  induziert, wobei

$$\gamma_\tau : [\tau, \infty) \rightarrow [0, \infty), t \mapsto h(t). \quad (2.13)$$

Bezeichne  $\mathcal{S}_v$  den Shift-Operator um  $v \in \mathbb{R}$ , d.h. für eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$S_v f(x) = f(x - v), x \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Der inhomogene Poisson Prozess auf  $[0, \infty)$  definiert durch die Intensität

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} \mathcal{S}_\tau \gamma_\tau(t), & t \geq \tau \\ 0, & t \in [0, \tau) \end{cases}$$

ist dann nicht unterscheidbar von  $N_\tau$ .

**Definition 2.6.** [RB11] Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  und  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  reellwertige stochastische Prozesse auf  $\Omega$ . Dann heißen  $X$  und  $Y$  nicht unterscheidbar, falls

$$\mathbb{P}[\forall t \geq 0 : X_t = Y_t] = 1. \quad (2.15)$$

Wir können  $N_\tau$  daher als Prozess auf  $[0, \infty)$  mit Intensität  $\hat{\gamma}$  auffassen. Hawkes und Oakes zeigten in [Oak74] außerdem, dass für  $\tau_1 \neq \tau_2$  die Prozesse  $N_{\tau_1}$  und  $N_{\tau_2}$  unabhängig sind, sofern Bedingung 2.12 erfüllt ist. Somit können wir den Hawkes Prozess  $N$  mit Intensität

$$\lambda(t) = \mu + \sum_{0 \leq \tau < t, \tau \in T} h(t - \tau) \quad (2.16)$$

als die Summe von unabhängigen inhomogenen Poisson Prozessen  $N_\tau$  mit Intensität  $\hat{\gamma}$  für jedes  $\tau$  auffassen und einen von diesen unabhängigen homogenen Poisson Prozess  $\bar{N}$  mit Intensität  $\mu$  hinzuaddieren, sodass

$$N' = \bar{N} + \sum_{\tau \in T} N_\tau \quad (2.17)$$

dieselbe Intensität hat wie  $N$ . Eine Simulation von  $N'$  kann folglich auch als Simulation des Hawkes-Prozesses  $N$  verstanden werden.

Wir betrachten weiterhin das Gebiet  $\mathbb{W}$ , interpretieren die erste Koordinate dessen von nun an aber explizit als Zeitkoordinate, um die Vorstellung zu vereinfachen. Der Zeitpunkt  $t_{\max}$  legt den Zeitraum  $[0, t_{\max})$  fest, über den wir simulieren wollen. Die aktuell betrachtete Zeit beschreiben wir durch  $t_{\text{current}}$  und mit  $\nu$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^2$ . Des Weiteren beschreiben wir für jedes  $n = 0, \dots, Z$  den zufälligen Vektor  $X_n$  durch seine Komponenten  $X_n^{(1)}$  und  $X_n^{(2)}$ , sodass für alle  $n = 0, \dots, Z$  gilt  $X_n^{(1)} \in [0, t_{\max})$ .

Ein möglicher Algorithmus zur Simulation eines Hawkes Prozesses lautet dann:

---

**Algorithm 1** Simulation eines Hawkes-Prozesses

---

**Require:** Maximalzeit  $t_{max}$ , Intensitätsfunktion  $\gamma$ ,  $I = [0, a]$ ,  $a > 0$   
 Generiere  $Z \sim \mathcal{P}(\mu([0, t_{max}) \times I))$ ,  $(X_n)_{n=0}^Z$  i.i.d.,  $X_0 \sim \mathcal{U}([0, t_{max}) \times I)$   
 Initialisiere  $t_{current} = 0$ ,  $k = 0$ ,  $T = []$

**while**  $k \leq Z$  **do**

- $i_1 = \min\{n \in \mathbb{N} | X_n^{(1)} > t_{current}\}$
- $t_{eval} = X_{i_1}^{(1)}$
- if**  $\gamma(t_{eval}) > X_{i_1}^{(2)}$  **then**

  - $T = [T, X_{i_1}^{(1)}]$
  - $k = k + 1$
  - $t_{current} = X_{i_1}^{(1)}$

- else**

  - $k = k + 1$
  - $t_{current} = t_{eval}$

- end if**

**end while**

**return**  $T$  Simulation der Event-Zeiten eines Hawkes-Prozesses.

---

Anhand der Realisierungen von  $(X_n)_{n=0}^Z$ , in Abb. 4 dargestellt in Form von Kreuzen, können die Sprünge und damit der Zuwachs der Intensität nachvollzogen werden, der als selbstverstärkendes Verhalten des Prozesses interpretiert werden kann. Die tatsächliche Realisierung des Hawkes-

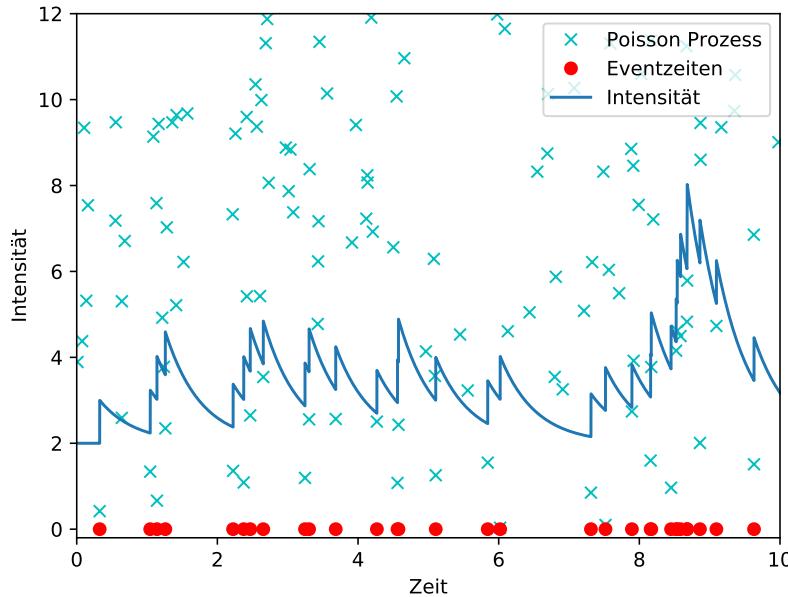


Abbildung 4: Simulation eines Hawkes-Prozesses  $N_t$  mit  $\mu = 2$ ,  $h(x) = \exp(-2x)$  für  $t_{max} = 10$ . Die roten Punkte auf der waagerechten Achse bilden die Realisierungen von  $N_t$ .

Prozesses ist aber die Projektion  $(X_n^{(1)})_{n=0}^Z$  der  $(X_n)_{n=0}^Z$ , welche in Abbildung 4 durch rote Kreise dargestellt wird.

Es ist zu beachten, dass diese Simulation nur ein sinnvolles Ergebnis liefert, sofern der Hawkes-Prozess mit einem Poisson-Cluster-Prozess identifiziert werden kann. Der Algorithmus kann aber für Kerne  $h$ , die Gleichung 2.5 erfüllen, und sogar zeitabhängiges  $\mu$  angewendet werden und

schließt damit auch die Möglichkeiten zur Simulation eines homogenen wie auch inhomogenen Poisson-Prozesses mit ein.

### 2.3 Thinning Algorithmen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einem Algorithmus befassen, der es uns erlaubt, einen Hawkes-Prozess zu simulieren, der nicht mit einem Poisson-Cluster-Prozess identifiziert werden kann. Wir werden dafür einen möglichst allgemeinen Algorithmus zur Simulation von Punkt-Prozessen verwenden, den Thinning-Algorithmus nach Ogata [VJ03], [Oga81]. Dieser kommt im Wesentlichen mit der Intensitätsfunktion  $\lambda$  aus und erlaubt es uns, nicht mehr auf die Poisson Identifikation angewiesen zu sein. Dafür müssen wir allerdings eine Bedingung an das Verhalten der Intensität nach einem Event stellen, auf die wir später näher eingehen werden.

Im Folgenden werden wir zunächst die Notation einführen, die zur Formulierung des Algorithmus relevant ist. Anschließend gehen wir auf die oben erwähnten Bedingungen ein, um dann abschließend den Algorithmus zu formulieren sowie die Unterschiede zum zuvor dargestellten Algorithmus 1 zu diskutieren.

Wir betrachten weiterhin einen Hawkes-Prozess  $N$  mit Intensität

$$\lambda(t) = \mu + \sum_{0 \leq \tau < t, \tau \in T} h(t - \tau) \quad (2.18)$$

mit  $\mu \in R^+$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  und wir erinnern an Gleichung 2.5, dass der Kern  $h$  erfüllt

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, t \mapsto h(t) \begin{cases} \geq 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ = 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (2.19)$$

Außerdem benötigen wir noch einen Begriff, der die Vergangenheit des Prozesses erfasst.

**Definition 2.7.** Sei  $T$  ein Punktprozess und  $t > 0$ . Dann bezeichnen wir als Historie von  $T$  zur Zeit  $t$  die  $\sigma$ -Algebra, die von den Zufallsvariablen  $\tau \in T$  vor der Zeit  $t$  generiert wird und notieren

$$\mathcal{H}_t = \sigma(T \cap (-\infty, t)).$$

Im Folgenden werden wir annehmen, dass wir die Vergangenheit des Prozesses  $T$  vor der Zeit  $t$  kennen, d.h.  $\mathcal{H}_s$  ist gegeben für  $0 < s < t$ . Damit sind die Ereignisse von  $T$  vor  $t$  festgelegt und wir können sie wie positive reelle Zahlen behandeln.

Sei  $t > 0$ ,  $0 < s < t$  und gegeben  $\mathcal{H}_s$  bezeichne  $n$  die Anzahl  $n = \text{card}(T \cap (-\infty, s))$  der Elemente in  $T_s = T \cap (-\infty, s)$ . Dann können wir gegeben  $\mathcal{H}_s$  die Elemente  $T_1, \dots, T_n \in T_s$  anordnen, sodass

$$T_1 < \dots < T_n.$$

Gegeben  $\mathcal{H}_s$  verläuft die Intensitätskurve für  $i = 1 \dots n$  auf dem Intervall  $[T_{i-1}, T_i]$  deterministisch. Dadurch lässt sich die Intensitätsfunktion  $\lambda$  wie folgt zerlegen

$$\lambda(t|\mathcal{H}_s) = \begin{cases} \mu, & t \in [0, T_1) \\ h_i(t|\mathcal{H}_s), & t \in [T_i, T_{i+1}), i = 1, \dots, n-1, \\ h_n(t|\mathcal{H}_s), & t \geq T_n \end{cases} \quad (2.20)$$

mit

$$h_i(t|\mathcal{H}_s) = \mu + \sum_{k=1}^i h(t - T_k), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.21)$$

und

$$h_n(t|\mathcal{H}_s) = \mu + \sum_{k=1}^n h(t - T_k) + \sum_{\tau \in T, s < \tau \leq t} h(t - \tau). \quad (2.22)$$

**Bedingung 2.8.** Es existieren Funktionen  $M(\cdot|\mathcal{H}_\cdot)$ ,  $L(\cdot|\mathcal{H}_\cdot)$ , sodass für alle  $t \in [0, \infty)$  und für  $n = \text{card}(T \cap (-\infty, t))$  gilt

$$h_n(t+u|\mathcal{H}_t) \leq M(t|\mathcal{H}_t) \quad (2.23)$$

für  $t > T_n$  gegeben  $\mathcal{H}_t$  und  $0 \leq u < L(t|\mathcal{H}_t)$ .

Diese Bedingung gibt uns nun eine Schranke an das Wachstumsverhalten von  $h_n$  auf einem Intervall nach dem Ereignis  $T_n$ . Die Schranke  $M(t|\mathcal{H}_t)$  muss nicht nur  $h_n(t|\mathcal{H}_t)$  beschränken, sondern auch  $h_n$  auf einem Intervall nach  $t$ . Da  $h_n$  aber nach einem Ereignis bis zum nächsten Ereignis deterministisch verläuft, genügt es, eine Schranke an  $h$  zu finden. Wir fordern also eine Vorhersagbarkeit des Wachstums von  $h$  und die beiden Größen  $M$  und  $L$  sind in Abhängigkeit von  $h$  zu bestimmen. Zur Veranschaulichung betrachten wir den Kern

$$h(t) = \begin{cases} t \cdot \exp(-t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (2.24)$$

$M'$  wurde in diesem Fall als

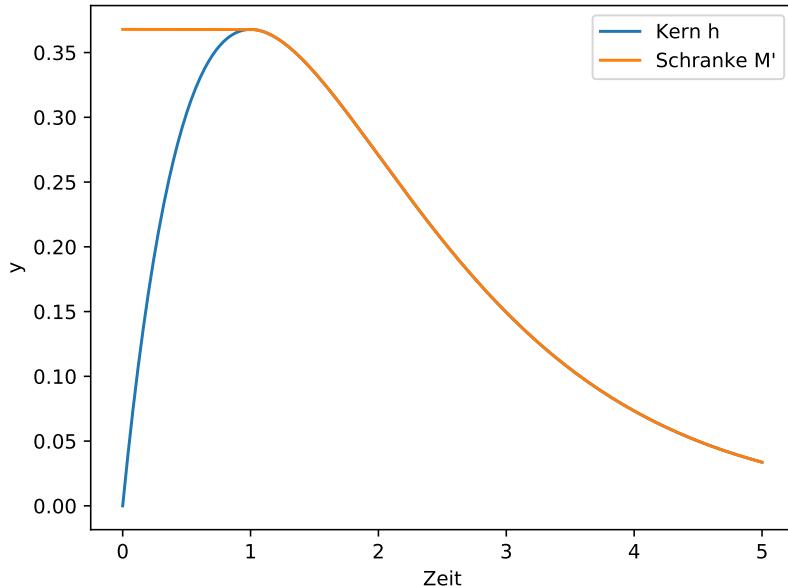


Abbildung 5: Kern  $h$  und Schranke  $M$

$$M'(t) = \begin{cases} \exp(-1), & 0 \leq t < 1 \\ h(t), & t \geq 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

gewählt. Damit beschränkt  $M'$  den Kern  $h$  und für jedes  $u > 0$  auch  $\mathcal{S}_{-u}h$ , wobei wir die Notation aus Gleichung 2.14 verwenden.  $M(t|\mathcal{H}_t) := M'(t) + h_{n-1}(t|\mathcal{H}_t)$  stellt damit eine mögliche Wahl dar.

Monoton fallende Kerne  $h$  bilden eine weitere Klasse von Kernen, für die eine einfache Lösung gefunden werden kann, da in diesem Fall

$$M(t|\mathcal{H}_t) = \lim_{t \rightarrow T_n^+} h_n(t)$$

eine hinreichend gute Wahl darstellt. Dies entspricht dem Wert der Intensität direkt nach einem Sprung. Diese Bedingung ist bis zum nächsten Ereignis erfüllt, sodass in diesem Fall die Bedingung durch  $L$  gelassen werden kann.

Allerdings sollte an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass dies nicht die beste Wahl im Hinblick auf Rechenzeit ist, da potentiell viele Events  $\tau$ , die im Algorithmus generiert werden, verworfen werden, wenn der Term  $M^{-1}\lambda(t+\tau)$  sehr klein wird. Unter der Annahme, dass  $\lambda$  die Bedingung 2.23 erfüllt, können wir den Thinning Algorithmus nach Ogata [Oga81] nutzen.

---

### Algorithm 2 Thinning Algorithmus nach Ogata

---

**Require:** Maximalzeit  $t_{max}$ , Maximalanzahl  $N$ , Intensitätsfunktion  $\lambda$

```

Initialisiere  $t = 0, i = 0$ 
while  $t \leq t_{max}$  und  $i \leq N$  do
     $M = M(t|\mathcal{H}_t)$ 
     $L = L(t|\mathcal{H}_t)$ 
    Generiere  $\tau \sim \mathcal{E}(1/M)$ 
    Generiere  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ 
    if  $\tau > L$  then
         $t = t + L$ 
    else if  $\tau \leq L$  und  $\frac{\lambda(t+\tau)}{M} > U$  then
         $t = t + L$ 
    else
         $i = i + 1$ 
         $t_i = t + \tau$  und  $t = t + \tau$ 
    end if
end while
return  $\{t_i\}$  Simulation der Event-Zeiten eines Hawkes-Prozesses.
```

---

Dieser generiert dann die Menge der Event-Zeiten  $T_{\leq t_{max}} = \{t_i | t_i \text{ aus Algorithmus}\}$  vor der Zeit  $t_{max}$  bzw. maximal  $N$  Event-Zeiten. Die Tatsache, dass die Schleife sowohl die Endzeit  $t_{max}$  der Simulation als auch die Obergrenze  $N$  der Anzahl der Events als Abbruchkriterium verwendet, ermöglicht Prozesse  $T$  zu simulieren, von denen nicht bekannt ist, ob sie tatsächlich auf ganz  $\mathbb{R}^+$  einen Punktprozess bilden, d.h. ob ein beschränktes Intervall  $I$  existiert, sodass  $\text{card}(I \cap T) = \infty$ . Dieser Umstand wird eingehender in Kapitel 3 unter dem Begriff der Stabilität diskutiert. Zentraler Unterschied zwischen Abbildung 6 und Schaubild 4 ist, dass im Gegensatz zu Abbildung 4 in Abbildung 6 die Konstruktion nicht über einen zugrunde liegenden räumlichen Poisson-Prozess entsteht und damit die Kreuze aus Abbildung 4 in Abbildung 6 nicht mehr vorkommen.

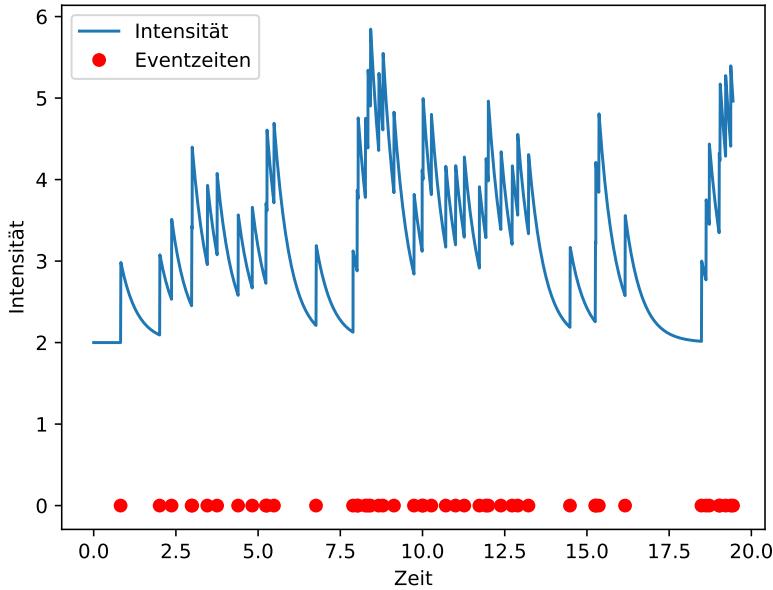


Abbildung 6: Simulation eines Hawkes-Prozesses  $N_t$  mit  $\mu = 2$ ,  $h(x) = \exp(-2x)$  für  $N = 30$ . Die Punkte auf der waagerechten Achse bilden die Realisierungen von  $N_t$ .

### 3 Nichtlineare Hawkes-Prozesse

#### 3.1 Definition und Eigenschaften

In diesem Kapitel wollen wir die Simulation des linearen Hawkes-Prozess auf den nichtlinearen Fall übertragen. Daher behandeln wir nun den Hawkes Prozess in der Allgemeinheit wie in Definition 2.3 gegeben als ein Punktprozess charakterisiert durch das Tripel von Funktionen  $(\phi, h, g)$  mit

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

und bedingter Poisson Intensität zur Zeit  $t \geq 0$

$$\lambda(t) = \phi \left( g(t) + \sum_{0 \leq \tau < t, \tau \in T} h(t - \tau) \right). \quad (3.1)$$

Jetzt sind demnach auch Kerne  $h$  zugelassen, die negative Werte annehmen können, die Anwendung von  $\phi$  sichert aber, dass die Intensität weiterhin positiv bleibt. Gleichzeitig wirkt sich das Wachstumsverhalten von  $\phi$  auf den Zuwachs der Intensität aus. Daher stellen sich nach Fragen Existenz solcher Prozesse beziehungsweise ob sie mit positiver Wahrscheinlichkeit in endlicher Zeit unendliche viele Ereignisse generieren können und damit nicht Definition 2.1 eines Punktprozesses genügen. Sollte ein Prozess mit positiver Wahrscheinlichkeit unendlich viele Ereignisse in endlicher Zeit aufweisen, so sagen wir, dass der Prozess explodiert. Wir setzen im Folgenden  $g = 0$ .

Bremaud und Masoulié haben Hawkes Prozesse in nach Definition 2.3 für Lipschitz-stetige Nichtlinearitäten  $\phi$  in ihrer Arbeit [Mas96] untersucht und dabei eine Verbindung zur Regularität des Kerns aufgezeigt, worauf wir in Abschnitt 3.3 näher eingehen werden. In dieser Veröffentli-

chung von Bremaud und Masoulié merken die Autoren auch an, dass die Poisson-Identifikation aus dem vorangegangenen Kapitel nichtmehr zur Verfügung steht. Dies werden wir im Abschnitt 3.2.2 diskutieren. Daher steht uns ausschließlich der Thinning-Algorithmus nach Ogata [Oga81] für die Simulation nichtlinearer Hawkes-Prozesse zur Verfügung. Abschließend werden Stabilitätseigenschaften dieser Prozesse betrachtet, wobei wir unter Stabilität verstehen, dass der Prozess nicht in endlicher Zeit explodiert. Außerdem sprechen wir in diesem Kapitel von Explosion eines Prozesses, wenn die simulierten Trajektorien in einem vorgegebenen Zeitraum ein bestimmtes Niveau überschreiten, da dann die Ereignisse des Prozesses so dicht aufeinander folgen, dass, aufgrund der selbstverstärkenden Natur von Hawkes Prozessen, die Folgeereignisse noch dichter aufeinander folgen werden.

Zur Veranschaulichung von Stabilitätseigenschaften folgen wir der Arbeit von Bremaud und Masoulié aus dem Jahr 1996.

## 3.2 Vom linearen zum nichtlinearen Hawkes-Prozess

### 3.2.1 Poisson-Identifikation im linearen Fall

Die Poisson-Identifikation dient im linearen Fall als zentrales Werkzeug zur Simulation beziehungsweise zur Stabilitätsanalyse [Pol15]. Dabei wird ein weiteres Resultat von Hawkes und Oakes verwendet, dass die Ereignisse des Hawkes-Prozesses über eine stammbaumartige Struktur zusammenhängen, wenn

$$\int_0^{\infty} h(s)ds < 1.$$

Diese Eigenschaft wird als Verzweigungseigenschaft bezeichnet, die wir anhand einer Simulation basierend auf einem räumlichen Poisson-Prozess veranschaulichen wollen. Die Verzweigungseigenschaft liefert einen interpretativen Zusammenhang der Ereignisse als eine Vorfahren-Kinder-Beziehung, wobei die mittlere Anzahl an Kindern pro Vorfahre gerade durch  $\int_0^{\infty} h(s)ds$  gegeben ist [Pol15].

In Abbildung 7 sind neben den Realisierungen des räumlichen Poisson-Prozesses, dargestellt durch Kreuze, und den Realisierungen des Hawkes-Prozess, dargestellt durch Punkte, noch mehrere Kurven zu sehen. Die einhüllende Kurve in Abbildung 7 zeigt den Verlauf der Intensität des Hawkes-Prozesses über die Zeit. Die übrigen Kurven stellen den Verlauf der Intensitätskurve ausgehend von einem bestimmten Ereignis dar, falls nach diesem Ereignis keine weiteren Ereignisse mehr auftreten würden. Des weiteren kann man anhand der Kreuze erkennen, welche Realisierungen des räumlichen Poisson-Prozesses für die Sprünge der Intensitätskurve verantwortlich sind. Die gestrichelten Verbindungen stellen gesehen als Stammbäume die Abhängigkeiten der einzelnen Ereignisse als Vorfahren-Kinder-Beziehung dar, die sich aufgrund der Poisson-Identifikation ergibt. Die zeitlich zuerst auftretenden Ereignisse werden dabei als Vorfahren interpretiert. Zusätzlich werden alle Ereignisse, die sich aus Realisierungen des räumlichen Poisson Prozess ergeben, die unterhalb der Anfangsintensität  $\mu$  liegen, als Vorfahren betrachtet. Sie weisen keine Verbindungen zu zeitlich vorangegangenen Ereignissen auf.

In Abbildung 7 betrachten wir dazu die Realisierung  $X'$ , von der drei gestrichelte Linien ausgehen. Diese ist verantwortlich für den dritten Sprung der Intensitätskurve. Die mit ihr verbundenen Kreuze liegen nur unter der Intensitätskurve, da der passende Sprung der Kurve durch  $X'$  generiert wurde. Es lässt sich also eine Beziehung zwischen den drei Ereignissen herstellen. Die Ereignisse weisen wiederum teilweise Nachkommen auf, wie anhand der gestrichelten Linien

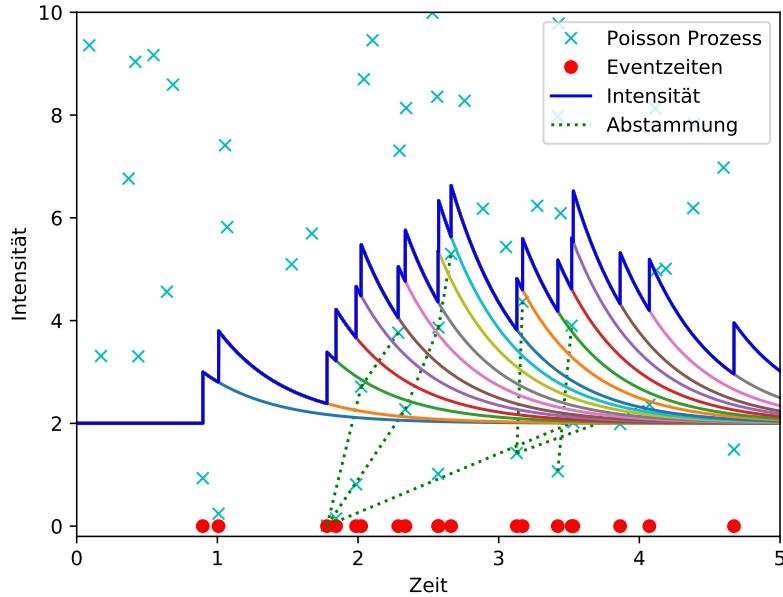


Abbildung 7: Veranschaulichung der Verzweigungseigenschaft für einen Hawkes-Prozesses  $N$  mit  $\mu = 2$ ,  $h(x) = \exp(-2x)$  für  $t_{max} = 5$ .

dargestellt, sodass sich ein Stammbau ausgehend von  $X'$  ergibt.

Allgemein interpretieren wir für  $t > 0$  gegeben  $\mathcal{H}_t$  ein Ereignis  $\tau < t$  des linearen Hawkes Prozesses als Nachfahre eines vorangegangenen Events  $\tau_m < \tau$ , falls  $h_{m-1}(\tau|\mathcal{H}_t) \leq x_2 \leq h_m(\tau|\mathcal{H}_t)$ , wobei  $x_2$  so gewählt ist, dass  $(\tau, x_2)$  Realisierung des räumlichen Poisson Prozesses  $P$  ist. Dabei ist  $h_m$  wie in Gleichung 2.21 definiert. Des weiteren sind die Flächen

$$M_i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | h_i(x_1|\mathcal{H}_t) - \mu \geq x_2 \geq h_{i-1}(x_1|\mathcal{H}_t) - \mu\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

disjunkt, mit der Definition von  $h_i$  wie in 2.21 und  $h_0(\cdot|\mathcal{H}_t) = \mu$ . Da die  $M_i$  disjunkt sind, sind damit  $(P(M_i))_{i=1}^n$  eine endliche Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit Erwartungswert gleich dem Flächeninhalt von  $M_i$ , der gerade durch  $\mathbb{E}$  gegeben ist, d.h.

$$\text{area}(M_i) = \mathbb{E}. \quad (3.3)$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass für  $t > 0$  gegeben  $\mathcal{H}_t$  die Gleichung  $\text{area}(M_i) = \mathbb{E}$  erfüllt ist. Sei  $i \in \{1, \dots, n\}$ , mit  $n = \text{card}(T \cap (-\infty, t))$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{area}(M_i) &= \int_{\mathbb{R}} h_i(s|\mathcal{H}_t) - \mu - (h_{i-1}(s|\mathcal{H}_t) - \mu) \, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu + h(s - T_i) + \sum_{k=1}^{i-1} h(s - T_k) - \mu - (h_{i-1}(s|\mathcal{H}_t) - \mu) \, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(s - T_i) \, ds = \int_{\mathbb{R}} h(s) \, ds = \int_0^\infty h(s) \, ds = \mathbb{E} \end{aligned}$$

□

Die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen lässt die Interpretation zu, dass ein Ereignis, also

die Projektion eines Kreuzes auf die erste Koordinate, in  $M_i$  genau einen Vorfahren hat, der durch Projektion eines Kreuzes in  $M_k$  für ein  $1 \leq k < i$  entsteht. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 7 durch die gestrichelten Verbindungen dargestellt.

Aufgrund der Vorgabe, dass für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt  $\mathbb{E} < 1$  und da  $\text{area}(M_i) = \mathbb{E}$ , ergibt sich die Interpretation, dass jeder Vorfahre im Mittel weniger als ein Kind hat und die Theorie von Verzweigungsprozessen liefert, dass der Prozess damit nicht explodiert, wie Hawkes und Oaks im Jahr 1974 formal gezeigt haben [Oak74].

### 3.2.2 Verwerfen der Poisson-Identifikation

Im linearen Fall waren, wie vorangegangen dargestellt, die zentralen Eigenschaften, dass für  $t > 0$  gegeben  $\mathcal{H}_t$  die Flächenstücke  $M_i$  disjunkt sind und die Flächeninhalte  $\text{area}(M_i)$  identisch und kleiner als eins sind. Ausgehend von der vorangegangenen Argumentation folgt direkt, dass für  $t > 0$  gegeben  $\mathcal{H}_t$

$$\int_{\mathbb{R}} h_i(s|\mathcal{H}_t) - \mu \, ds = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^i h(s - T_k) \, ds = i \cdot \mathbb{E}. \quad (3.4)$$

Das Volumen der Menge  $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0, x_2 \in [\lambda(0|\mathcal{H}_t), \lambda(x_1|\mathcal{H}_t)]\}$  gegeben durch Gleichung 3.4 wächst damit linear in der Anzahl  $i$  der Events.

Im Fall des nichtlinearen Hawkes-Prozesses ändert sich die Summe  $\sum_{\tau \leq t} h(t - \tau)$  in der Definition

des Hawkes-Prozesses zu  $\phi \left( \sum_{\tau \leq t} h(t - \tau) \right)$ , sodass gegeben  $\mathcal{H}_t$  das Volumen von  $V$ , generiert durch die Ereignisse  $\{T_k, k = 1, \dots, i\}$  und wie oben definiert, erfüllt

$$V = \int_0^\infty \phi \left( \sum_{k=1}^i h(s - T_k) \right) - \phi(0) \, ds. \quad (3.5)$$

Das Integral hängt nun nichtmehr linear von der Anzahl  $i$  der Events ab, sondern wächst in  $i$  entsprechend dem Wachstumsverhalten von  $\phi$ . Wächst  $\phi$  also schneller als linear, so bewirkt das Auftreten neuer Ereignisse einen wesentlich stärkeren Zuwachs der Intensität, der wiederum aufgrund der Form der Intensität zu einer verringerten Zeit zwischen den Ereignissen führt, wodurch der Prozess explodieren kann. Im Folgenden stellen wir Vorgaben an das Wachstumsverhalten von  $\phi$ , um Aussagen im Fall nichtlinearer  $\phi$  treffen zu können. Dabei wird sich zeigen, dass ähnliche Bedingungen wie in Bedingung 2.12 im Fall Lipschitz-stetiger  $\phi$  Existenzresultate liefern.

### 3.3 Existenzresultat von Bremaud und Masoulié

Wir betrachten zunächst das Resultat nach Bremaud und Masoulié, 1996, auf Basis dessen im Folgenden Simulationen nichtlinearer Hawkes-Prozesse erstellt und ausgewertet werden.

**Definition 3.1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $T$  ein Punktprozess über  $\Omega$  mit assoziiertem Zählprozess  $N$ . Wir sagen, dass  $T$  eine stationäre Verteilung hat, falls für das von  $T$  induzierte zufällige Maß

$$\delta_T = \sum_{\tau \in T} \delta_\tau \quad (3.6)$$

auf  $\mathcal{B}([0, \infty))$  für alle  $B \in \mathcal{B}([0, \infty))$  und  $h > 0$  gilt

$$\mathbb{P}[\delta_T(B) = k] = \mathbb{P}[\delta_T(B + h) = k]$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , wobei  $B + h = \{x + h | x \in B\}$

Die Existenz einer stationären Verteilung liefert die Eigenschaft, dass der Hawkes-Prozess nicht in endlicher Zeit explodieren kann, denn würde dies passieren, so existiert ein endliches offenes Intervall  $I \in \mathcal{B}([0, \infty))$ , das mit positiver Wahrscheinlichkeit unendlich viele Punkte enthält. Damit gilt  $\mathbb{P}[\delta_T(I) = \infty] > 0$ . Wählen wir ein  $h_0 > 0$ , sodass  $I_0 := I \cap (I + h_0) \neq \emptyset$ , dann gilt  $\mathbb{P}[\delta_T(I_0) = \infty] > 0$  oder  $\mathbb{P}[\delta_T(I \setminus I_0) = \infty] > 0$ . Da  $I_0 \subsetneq I$  und  $I \setminus I_0 \subsetneq I$ , haben wir damit mindestens ein echtes Teilstück von  $I$  gefunden, das mit positiver Wahrscheinlichkeit unendlich viele Punkte enthält. Iterativ finden wir so ein beliebig kleines Intervall  $I_b \subsetneq I$ , mit  $\mathbb{P}[\delta_T(I_b) = \infty] > 0$ . Aufgrund der Stationarität der Verteilung von  $T$  gilt dann aber für jedes beliebig kleine Intervall  $I'_b \subset [0, \infty)$

$$\mathbb{P}[\delta_T(I'_b) = \infty] > 0.$$

Sei  $N$  der zu  $T$  assozierte Zählprozess und definiere  $\tau_1 := \inf\{t \in [0, \infty) | N_t = 1\}$ . Dann gilt  $T \cap [0, \tau_1) = \emptyset$  fast sicher und damit  $\delta_T([0, \tau_1)) = 0$  fast sicher.

Sei  $I'_b \subset [0, \infty)$ , sodass  $\mathbb{P}[I'_b \subset [0, \tau_1)] > 0$ . Dann gilt

$$0 = \mathbb{E}[\delta_T([0, \tau_1))] > \mathbb{E}[\delta_T(I'_b)] = \infty.$$

Das ist ein Widerspruch, sodass eine Explosion in endlicher Zeit im Falle einer stationären Verteilung nicht eintreten kann.

Das Resultat nach Bremaud und Masoulié, 1996, [Mas96] liefert eine ebensolche Eigenschaft der Verteilung.

**Theorem 3.2.** Sei  $\phi$  eine  $\alpha$ -Lipschitz-stetige Funktion für ein  $\alpha > 0$  und  $h$  derart, dass

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^+} |h(t)| dt < 1. \quad (3.7)$$

Dann existiert eine eindeutige stationäre Verteilung des nichtlinearen Hawkes Prozess  $T$  definiert durch  $(\phi, 0, h)$ .

Die Bedingung 3.7 zeigt die Verbindung zwischen der Regularität von  $\phi$  und  $h$ . Betrachten wir nochmals den linearen Fall, also für  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x + \mu$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Dann ist  $\phi$  1-Lipschitz-stetig und die Bedingung 2.12 ist äquivalent zu Gleichung 3.7.

Zur Diskussion des Theorems 3.2 betrachten wir im Folgenden Simulationen der Intensität, die, unter Bedingung 3.7, beschränkt bleibt und im Falle, dass Bedingung 3.7 nichtmehr erfüllt ist, mit positiver Wahrscheinlichkeit gegen unendlich strebt, wie wir im Folgenden sehen werden.

### 3.4 Diskussion des Resultats von Bremaud und Masoulié

In diesem Kapitel setzen wir den Fokus auf die Diskussion des Theorems 3.2 von Bremaud und Masoulié . Wir werden im Rahmen der folgenden Betrachtung insbesondere die Stabilitätseigenschaften des Prozesses über die Punktfolge  $D = (D_t)_{t \geq 0}$  untersuchen.

**Definition 3.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $T$  ein Punktprozess über  $\Omega$  mit assoziiertem Zählprozess  $N$ . Wir nennen den Prozess  $D = (D_t)_{t \geq 0}$  definiert als

- $D_0 = 0$   $\mathbb{P}$  fast sicher

- $D_t = \frac{N_t}{t}$  für  $t > 0$

die Punktdichte von  $T$  bzw.  $N$ .

Diese liefert Aufschluss über die Dichte von Punkt-Clustern im Punktprozess, die, falls „zu dicht“, aufgrund der selbstverstärkenden Natur von Hawkes-Prozessen zur Explosion des Prozesses führen können. Insbesondere kann  $D$  als Werkzeug für Asymptotik verwendet werden, wie an folgendem Ergebnis für die Punktdichte von Poisson-Prozessen zu sehen ist.

**Theorem 3.4.** [JFC93] Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $T$  ein Punktprozess über  $\Omega$  mit assoziiertem Zählprozess  $N$ .

1. Sei  $T$  homogener Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$ . Dann gilt für die Punktdichte  $D$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_t = \lambda \text{ fast sicher.}$$

2. Sei  $T$  inhomogener Poisson-Prozess mit Intensitätsfunktion  $\gamma$ . Dann gilt für die Punktdichte  $D$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \gamma(s) ds}{t} \text{ fast sicher,}$$

sofern der Grenzwert existiert oder unendlich ist.

Dabei interessieren wir uns für Beschränktheit für alle Zeiten und positive Wahrscheinlichkeit für Explosion in endlicher Zeit. Eine Simulation von 100 Punktdichten von verschiedenen Realisierungen homogener Poisson-Prozesse mit Intensität  $\lambda = 2$  ist in Abbildung 8 dargestellt. Man erkennt, dass alle Kurven, trotz großer Fluktuationen für kleine Zeiten, sich für  $t > 100$  im Intervall  $[1, 3]$  bewegen und mit wachsendem  $t$  näher an den Wert 2 rücken. Dieses Bild erwarten wir auch für Hawkes Prozesse, die für alle Zeiten existieren, da für wachsende  $t$  nur ein Anstieg in der Dichte zu sehen ist, falls die Anzahl der Punkte schneller als linear wächst. Dies ist im Fall nichtlinearer Hawkes Prozesse möglich, wie in Abschnitt 3.2.2 diskutiert. Ein Streben der Dichte gegen unendlich wird dann ein Hinweis auf Explosion des Prozesses sein. Diese Möglichkeiten werden wir zunächst im nächsten Abschnitt anhand linearer Hawkes-Prozesse veranschaulichen. Zur Simulation verwenden wir wieder den Thinning Algorithmus nach Ogata, siehe Abschnitt 2.3, und legen aufgrund mangelnder Stabilitätsresultate die maximale Anzahl an Ereignissen, die simuliert werden sollen, fest. Wir beschränken uns außerdem aus Gründen der Einfachheit auf den Fall der monoton wachsenden Nichtlinearitäten und eines Exponentialkernes

$$h(s) = \begin{cases} a \cdot \exp(-b \cdot s), & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}, \quad a > 0, b > 0 \quad (3.8)$$

sodass für  $\alpha$ -Lipschitz-stetige Nichtlinearitäten mit

$$\alpha \cdot \frac{a}{b} < 1, \quad (3.9)$$

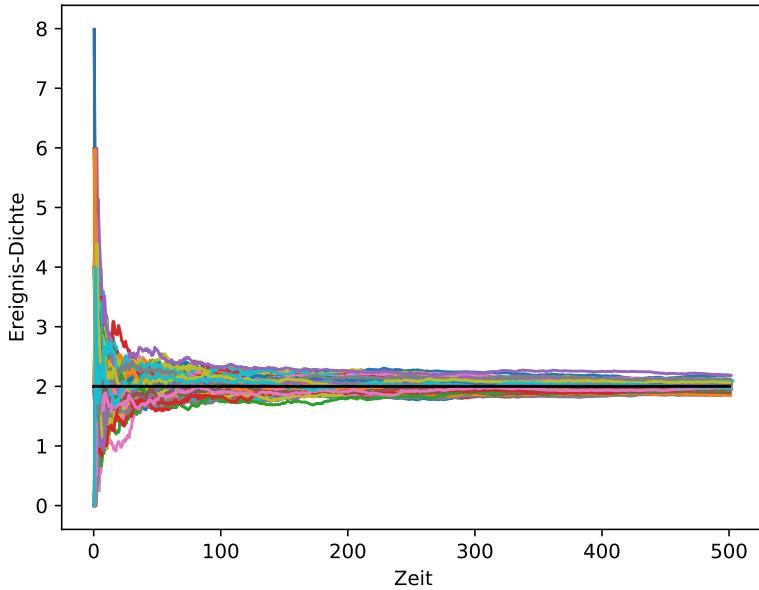


Abbildung 8: Simulation von 100 Trajektorien der Punktdichte eines homogenen Poisson Prozesses mit Intensität  $\lambda = 2$ .

Ungleichung 3.7 gilt und somit Stabilitätsresultate vorhanden sind. Wir halten dann in der Diskussion jeweils eine gewählte  $\alpha$ -Lipschitz-stetige Nichtlinearität fest und variieren die Parameter  $a$  und  $b$ , um den Prozess auf Explosion zu untersuchen.

### 3.4.1 Veranschaulichung der Punktdichte linearer Hawkes Prozesse

Wir betrachten nochmals den linearen Hawkes Prozess  $N$  mit Intensität

$$\lambda(t) = \mu + \sum_{0 \leq \tau < t, \tau \in T} h(t - \tau) \quad (3.10)$$

und Kern

$$h(s) = \begin{cases} a \cdot \exp(-b \cdot s), & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}, \quad a > 0, b > 0. \quad (3.11)$$

Für diesen Fall ergibt sich durch das Resultat von Hawkes und Oakes [Oak74] die Unterscheidung in die beiden Fälle  $a/b < 1$  und  $a/b \geq 1$ , wobei im ersten Fall der Prozess für alle Zeiten existiert und im zweiten Fall explodiert. Das Verhalten der Punktdichte in den beiden Fällen ist in den Abbildungen 9 a) beziehungsweise b) dargestellt. Wir bemerken, dass in a) die simulierten Trajektorien der Punktdichte immer beschränkt bleiben und sich für große Zeiten im Intervall  $[6, 12]$  befinden. Die Simulation der Trajektorien in Abbildung 9 b) bricht ab, sobald die Trajektorie für  $t > 1$  das Niveau 100 überschreitet. Um einen Ansatz für das Explodieren eines Hawkes-Prozesses zu erhalten, betrachten wir das Mittel aller simulierter Trajektorien zu jedem Zeitpunkt, wobei in b) das Mittel nur bis zu  $t_0$ , an dem die erste Trajektorie das Niveau 100 überschreitet, gebildet wird. Die resultierenden Graphen sind in Abbildung 10 dargestellt.

Aus den Abbildungen 9 und 10 können wir uns nun ein Kriterium für die Explosion von

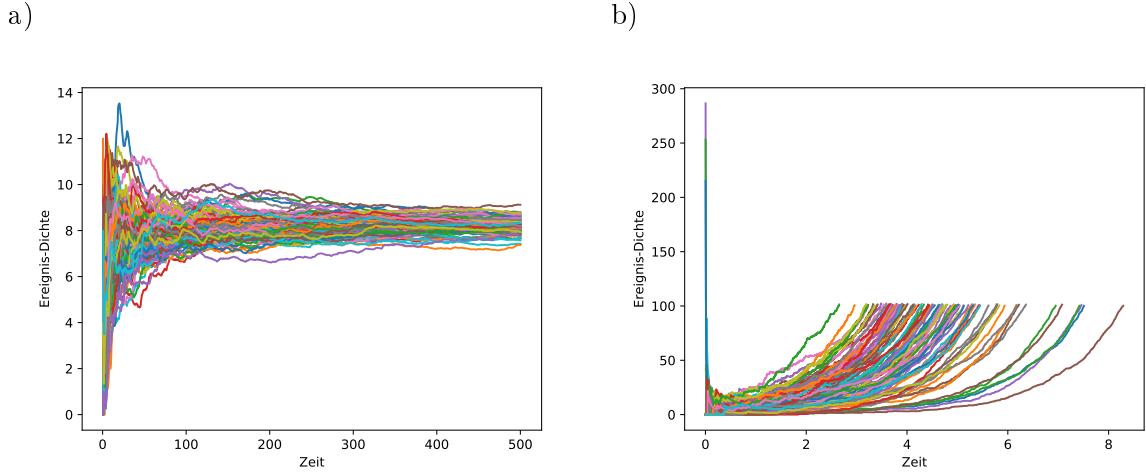


Abbildung 9: 100 Simulationen der Punktdichte von  $N$ . In a) mit Parametern  $a = 1$  und  $b = 2$ , daher  $a/b < 1$ . Hier bleiben alle 100 Trajektorien beschränkt. In b) für  $a/b > 1$  wurden  $a = 2$  und  $b = 1$  gewählt, wodurch alle 100 Trajektorien anwachsen.

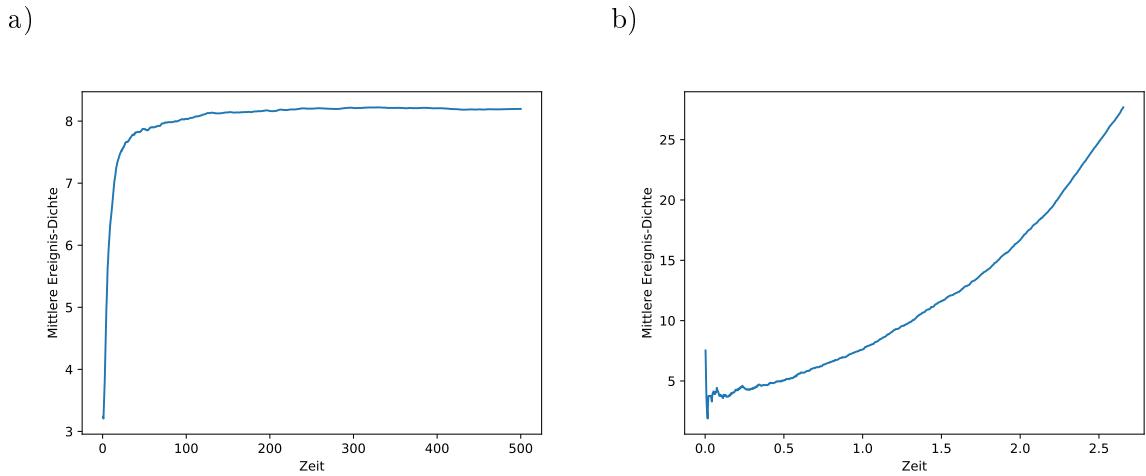


Abbildung 10: Mittlere Trajektorie der Punktdichte von  $N$  mit Parametern wie in Abbildung 9.

Hawkes-Prozessen ableiten. Aufgrund der selbstverstärkenden Verhalten von Hawkes Prozessen, wenn der Kern positiv ist, wird bei anwachsender Punktdichte auch die Intensität anwachsen, wodurch wiederum mehr Ereignisse auftreten, die die Dichte weiter erhöhen. Das Wachstum des Punktdichte wird daher im Fall von Explosion schneller als linear anwachsen, was durch das Mittel der simulierten Trajektorien der Punktdichten in Abbildung 10 dargestellt ist.

Wir können daher das Mittel der simulierten Trajektorien der Punktdichten verwenden, um aus den Simulationen Vermutungen über das Verhalten von nichtlinearen Hawkes Prozessen für die Fälle zu bilden, die nicht durch die Resultate von Hawkes und Oakes [Oak74] und Bremaud und Masoulié [Mas96] abgedeckt sind.

### 3.4.2 Simulationsbeispiel für glatte, Lipschitz-stetige Nichtlinearität

Wir verwenden als Nichtlinearität die Funktion

$$\phi(s) = \frac{(1+s)^2}{2+s}. \quad (3.12)$$

Diese ist für  $s \geq 0$  sowohl positiv als auch monoton wachsend und zusätzlich 1-Lipschitz-stetig, sodass sie die Vorgabe des Theorems erfüllt. Da der untersuchte Kern immer positiv ist, genügen diese Eigenschaft für unsere Untersuchung. Wir führen zunächst zwei Simulationen durch, die einmal die Bedingung des Theorems  $a/b < 1$  einhalten und einmal nicht. Zwei mögliche Trajektorien der Intensitätsfunktion sehen dann aus wie in Abbildung 11 dargestellt. Wir betrachten nun die Mittel der

a)

b)

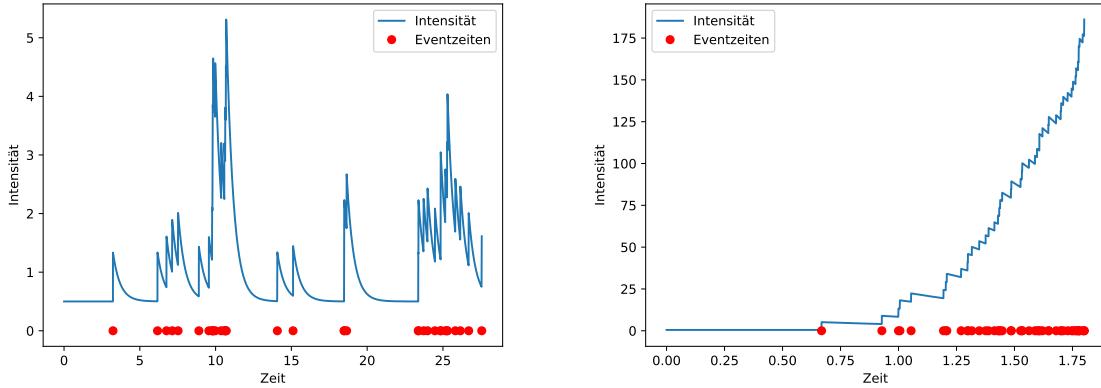


Abbildung 11: Trajektorien der Intensität des nichtlinearen Hawkes Prozesses definiert durch  $(\phi, 0, h)$ .

Mit Parametern  $a = 1$  und  $b = 2$  werden in a) die Bedingungen von Bremaud und Masoulié eingehalten. In b) mit  $a = 5$  und  $b = 1$  ist dies nicht der Fall.

Punktdichten für die Parameterwahlen  $a = 1$  und  $b = 2$  sowie  $a = 5$  und  $b = 1$ . Das Bild, das wir aufgrund des Existenzresultats von Bremaud und Masoulié für die Wahl  $a = 1, b = 2$  erwarten, entspricht Abbildung 10 a). Für zweitere Wahl,  $a = 5$  und  $b = 1$ , sollte sich eher ein Bild entsprechend 10 b) ergeben. In Abbildung 12 werden diese Vorstellungen bestätigt. Da das Mittel der

a)

b)

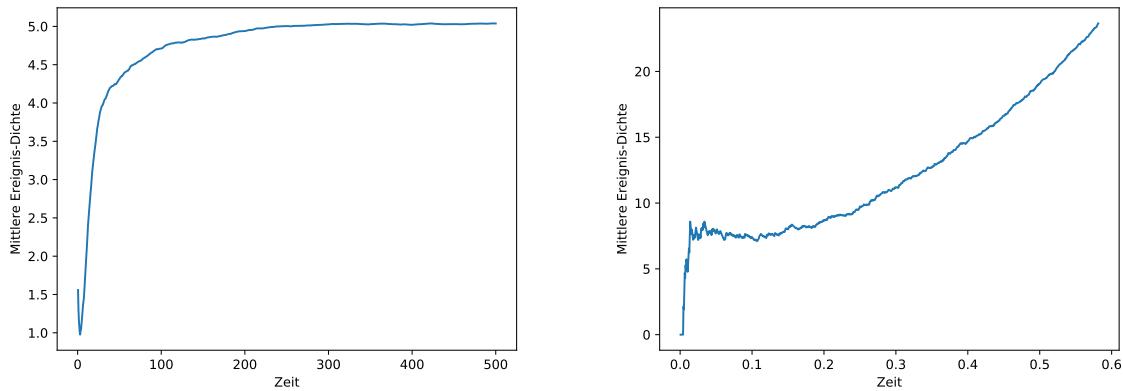


Abbildung 12: Mittlere Trajektorie der Punktdichte von  $N$  mit Parametern wie in Abbildung 11.

Dichtetrajektorien, in Abbildung 12 dargestellt, monoton anwächst, liegt die Vermutung nahe, dass der Prozess explodieren wird. Eine anwachsende Dichte korreliert, wie bereits erwähnt, aufgrund der Struktur des Hawkes-Prozess mit einer Verkürzung der Zeit zwischen den Ereignissen. Verhält sich die mittlere Dichte wie ein beschränktes Wachstum, wie bspw. in Abbildung 12 a), so spricht das für eine im Mittel konstante Zeit zwischen den Ereignissen, sodass es nicht zur Explosion kommt, wie auch durch das Theorem von Bremaud und Masoulié untermauert.

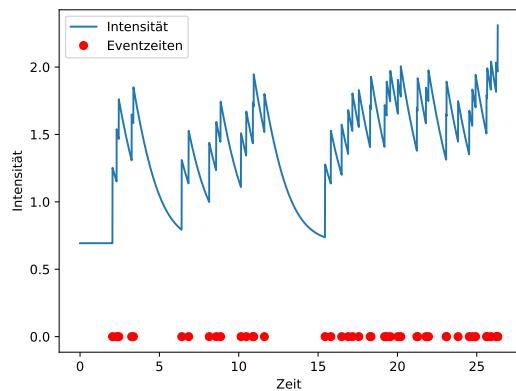
### 3.4.3 Simulationsbeispiel für sublinear anwachsende Nichtlinearität

Betrachten wir nun die Nichtlinearität

$$\phi(s) = \ln(s + 2). \quad (3.13)$$

Auch in diesem Fall ist  $\phi$  für  $s \geq 0$  positiv und monoton wachsend. Weiterhin ist sie  $\frac{1}{2}$ -Lipschitzstetig, sodass die Koeffizienten  $a$  und  $b$  nun der Bedingung  $a < 2 \cdot b$  genügen müssen, um das Theorem nach Bremaud und Masoulié anzuwenden. Allerdings wächst die Nichtlinearität  $\phi$  nun logarithmisch und damit langsamer als linear. Wir betrachten wieder die beiden Fälle  $a < b$  und  $a > b$ . Die Trajektorie, die in Abbildung 13 a) dargestellt ist, entspricht wieder den Erwartungen,

a)



b)

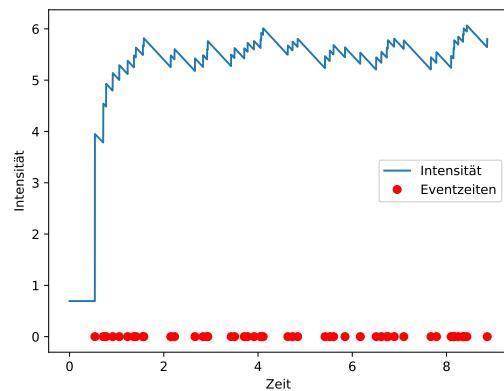


Abbildung 13: Trajektorien der Intensität des nichtlinearen Hawkes Prozesses definiert durch  $(\phi, 0, h)$ .

Mit Parametern  $a = 3/2$  und  $b = 1$  werden in a) die Bedingung des Resultats von Bremaud und Masoulié eingehalten. In b) mit  $a = 50$  und  $b = 1$  ist dies nicht der Fall, der Prozess scheint aber nicht zu explodieren.

da sie die Intensität eines Hawkes Prozesses darstellt, der durch das Theorem von Bremaud und Masoulié abgedeckt ist. Entsprechend bilden sich aufgrund der Natur von Hawkes Prozessen Cluster von Punkten, die Intensität über diesen klingt aber hinreichend schnell ab, sodass es zu keiner Explosion kommt.

Für die zweite Trajektorie haben wir die Parameter  $a = 50$  und  $b = 1$  gewählt. Damit ist  $a$  wesentlich größer als  $2 \cdot b$ . Dennoch vermittelt die Trajektorie nicht den Eindruck, dass es zu einer Explosion des Prozesses kommen wird. Sie schwankt für  $t > 2$  im Intervall  $[4, 7]$  und jedes neue Event bewirkt nur einen geringfügigen Anstieg der Intensität. Auch beide Mittel der Trajektorien der simulierten Punktdichten weisen dasselbe qualitative Verhalten auf. Aufgrund dessen liegt die Vermutung nahe, dass der Prozess für die Wahl  $a = 50$  und  $b = 1$  nicht explodiert, obwohl diese weit außerhalb der Bedingung von Bremaud und Masoulié liegt. Eine Klasse von Hawkes Prozessen, die damit für weitere Untersuchungen interessant sein könnte, ist die, die sublinear anwachsende Nichtlinearitäten verfügt und damit schwächere Bedingungen an die Parameter fordern muss und damit eine größere Klasse an Kernen zulässt als Bremaud und Masoulié in ihrem Resultat.

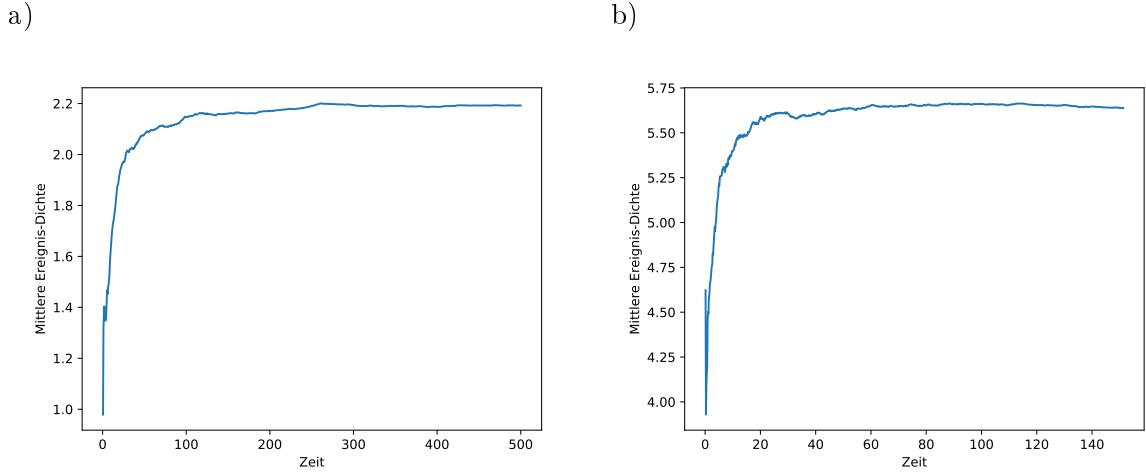


Abbildung 14: Mittlere Trajektorie der Punktdichte von  $N$  mit Parametern wie in Abbildung 13.

### 3.4.4 Simulation für exponentielle Nichtlinearität

Abschließend betrachten wir eine Nichtlinearität, die nicht Lipschitz-stetig ist, aber monoton und positiv. Sei  $\phi$  gegeben durch

$$\phi(s) = \exp(s). \quad (3.14)$$

Aus der aktuellen Literatur sind derzeit keine Resultate über Stationarität, Langzeitexistenz und sonstige Stabilitäts- und Existenzaussagen eines solchen Prozesses bekannt. Simulieren wir diesen anhand des Thinning Algorithmus, so ergeben sich folgende Bilder für das Mittel der Trajektorien der Punktdichten. Abbildung 15 a) zeigt, wie alle simulierten Trajektorien der Punktdichte

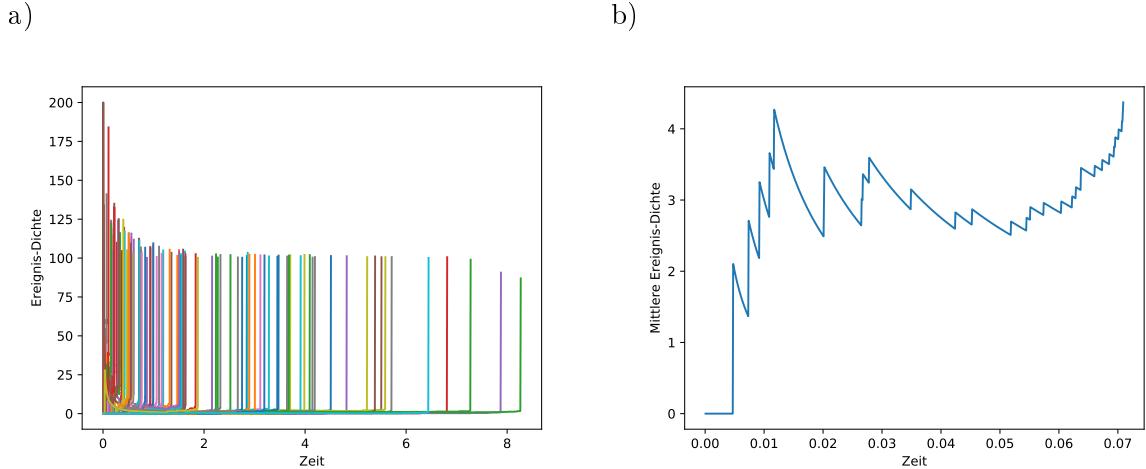
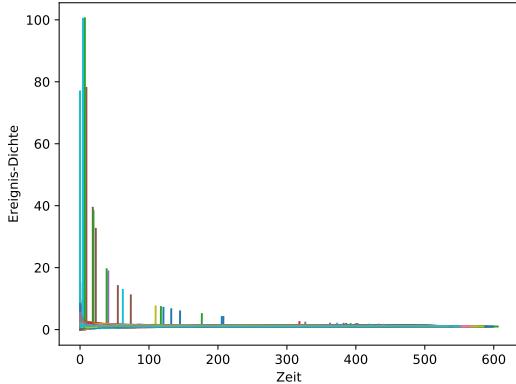


Abbildung 15: Simulation der Trajektorien der Punktdichte eines nichtlinearen Hawkes Prozesses definiert durch  $(\phi, 0, h)$ . Mit Parametern  $a = 1$  und  $b = 2$  hat die erste Trajektorie der Punktdichte nach ca. 0,07 Zeiteinheiten das Niveau 100 überschritten.

ab einem gewissen Zeitpunkt einen fast senkrechten Anstieg aufweisen. Untermalt durch Abbildung 15 b) und anhand der selbstverstärkenden Natur des Hawkes-Prozesses ist zu erwarten, dass die Trajektorien im vorliegenden Fall gegen unendlich streben wird. Die Kürze der Zeit,  $t \approx 0,076$ , zu der bereits die erste simulierte Trajektorie der Punktdichte das Niveau 100 überschreitet, lässt die Vermutung zu, dass der Prozess in endlicher Zeit explodieren wird. Reduzieren wir nun den Parameter  $b$  auf  $b = 20$  und simulieren 1000 Trajektorien, so ergeben sich die Kurven

a)



b)

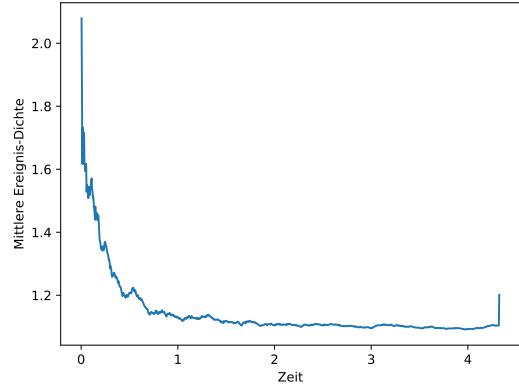
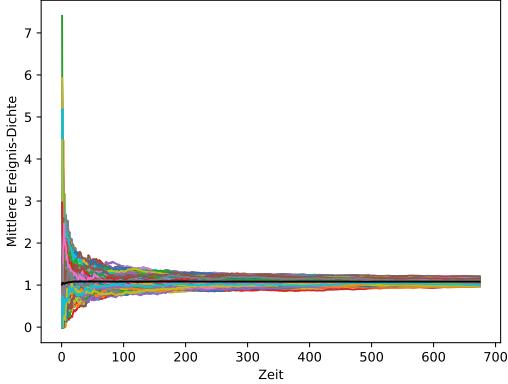


Abbildung 16: Simulation der Trajektorien der Punktdichte eines nichtlinearen Hawkes Prozesses definiert durch  $(\phi, 0, h)$ . Mit Parametern  $a = 1$  und  $b = 20$  werden 1000 Trajektorien simuliert. Man beachte den sprunghaften Anstieg im Mittel der Dichten in b) kurz bevor die erste Trajektorie das Niveau 100 erreicht.

wie in Abbildungen 16 dargestellt. Einige der Trajektorien in Abbildung 16 a) weisen auch im Fall dieser Parameterwahl ab einem gewissen Punkt einen fast senkrechten Anstieg auf. Aufgrund der selbstverstärkenden Natur der Hawkes Prozesse, ist davon auszugehen, dass diese Trajektorien auch weiterhin einen starken Anstieg aufweisen werden. Die Explosion des Prozesses ist damit in diesem Fall auch nicht auszuschließen, allerdings erstreckt sich die Zeitachse in diesem Fall über einen wesentlich größeren Zeitraum als in Abbildung 15 a). Die Vergrößerung des Parameters  $b$  von  $b = 2$  auf  $b = 20$  bewirkt also, dass sich die Zeitpunkte, an denen sich die Dichte stark erhöht wesentlich nach hinten verschieben, wie auch aus den Abbildungen 15 b) und 16 b) anhand der Zeitpunkte von  $t \approx 0,076$  beziehungsweise  $t \approx 4,3$ , an denen die jeweils erste Trajektorie das Niveau 100 überschreitet, zu erkennen ist.

Alternativ ändern wir nun auch den Wert von  $a$ , sodass aber weiterhin wie im Fall von Abbildung 16 gilt  $a/b = 0.05$ . Eine Wahl, die wir im folgenden verwenden, ist  $a = 1/4$  und  $b = 5$ . Die sich ergebenden Bilder sind in Abbildung 17 dargestellt. Obwohl der Quotient der Parameter  $a/b$

a)



b)

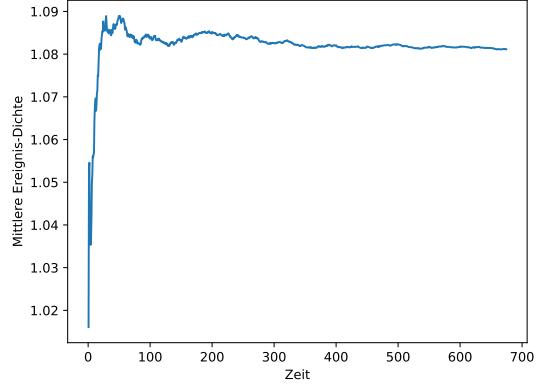


Abbildung 17: Mit Parametern  $a = 1/4$  und  $b = 5$  werden 1000 Trajektorien wie in Abb. 16 simuliert.

im Vergleich zum Quotienten der Parameter in Abbildung 16 identisch ist, nämlich 0,05, können wir eine starke Änderung im Verhalten beobachten. Es sind in Abbildung 17 a) keine Trajektorien

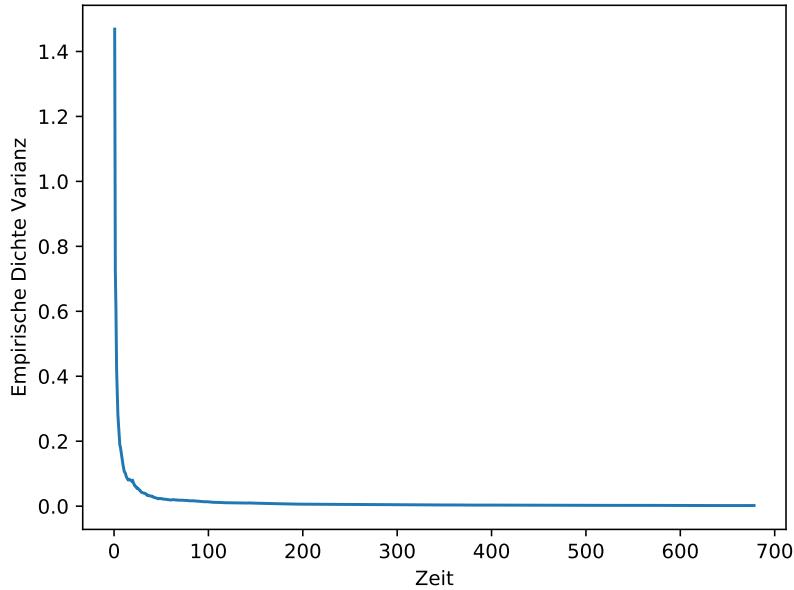


Abbildung 18: Empirische Varianz der simulierten Trajektorien

der Punktdichte mehr vorhanden, die einen fast senkrechten Anstieg aufweisen, sondern es liegen alle simulierten Trajektorien für  $200 < t < 700$  im Intervall  $[0, 2]$ . In Abbildung 18 können wir außerdem die empirische Varianz der simulierten Trajektorien sehen, die für wachsende  $t$  gegen 0 strebt. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, dass die Menge der zulässigen Parameter, für die der Hawkes-Prozess nicht explodiert, eine komplexere Struktur als für den Fall Lipschitz-stetiger Nichtlinearitäten aufweist. Die Bedingung an die Parameter  $\eta$  könnte dann formuliert werden als

$$\psi_{\phi,h}(\eta) < 1, \quad (3.15)$$

wobei  $\psi_{\phi,h}$  im Fall  $\alpha$ -Lipschitz-stetiger Nichtlinearitäten  $\phi$  und dem hier verwendeten Exponentiellkern  $h$ , mit  $\eta = (a, b)$ , gerade die Form

$$\psi_{\phi,h}(a, b) = \alpha \int_0^\infty |h(s)| ds = \alpha \frac{a}{b} \quad (3.16)$$

hat.

## 4 Ausblick

In dieser Arbeit wurden Wege aufgezeigt, lineare und nichtlineare Hawkes-Prozesse zu simulieren. Dafür wurde im linearen Fall die Poisson-Identifikation verwendet und eine Alternative in Form des Thinning Algorithmus nach Ogata aufgezeigt. Letzterer wurde dann im nichtlinearen Fall zur Simulation verwendet, wobei der Kern immer eine exponentielle Form hatte. Von Interesse war, wie sich monoton wachsende Nichtlinearitäten auswirken. Dafür wurden linear, logarithmisch und exponentiell anwachsende Nichtlinearitäten untersucht. Die Simulationen gaben dann die Möglichkeit mithilfe der Punktedichte des Zählprozesses die Grenzfälle der Stabilitätseigenschaften zu untersuchen. Der lineare Fall diente dabei als Anhaltspunkt, welcher Verlauf der Trajektorien der Punktdichte im Fall von Stabilität beziehungsweise Explosion zu erwarten ist.

Für den linearen Fall kann die Definition des Hawkes-Prozesses noch um einen räumliche Komponente ergänzt werden, wobei diese durch beispielsweise eine Mannigfaltigkeit geben sein kann. Dadurch erhält man sowohl ein zeitliches als auch ein räumliches Anhäufen von Events, wobei räumliche und zeitliche Komponenten miteinander interagieren können [Rei17].

Im zweiten Teil der Arbeit ist ausgehend vom Wachstumsverhalten der Nichtlinearität  $\phi$  für den nichtlinearen Fall präsentiert worden, dass ein Zusammenhang zwischen den Regularitätsbedingungen der Nichtlinearität  $\phi$  und dem Kern  $h$  besteht. Simulationen können hier hilfreich sein, die Minimalbedingungen an  $h$  zu bestimmen, wenn eine spezielle Klasse von Nichtlinearitäten untersucht werden sollen. Die Bestimmung der Bedingung  $\psi_{\phi,h}$  an  $h$  kann unterstützt werden durch Betrachtung der Simulation des Mittels der Punktdichte.

In der Definition der nichtlinearen Hawkes-Prozesse sind wie bereits in Abschnitt 3.1 auch Kerne zugelassen, die negative Werte annehmen. Kerne solcher Art wurden in dieser Arbeit nicht betrachtet, diese können aber interessant sein, um beispielsweise hemmende Mechanismen zu modellieren, da negative Werte des Kernes dazu führen, dass die Intensität kleiner wird. In [Tra18] befassen sich die Autor\*innen mit dieser Form der Kerne und diskutieren Existenz des nichtlinearen Hawkes Prozesses für die Nichtlinearität  $\phi(x) = \max\{0, x\}$ .

Die Möglichkeit, mittels Hawkes-Prozessen zeit-räumliche Modelle aufzustellen und auch hemmende Mechanismen zu modellieren, erlauben beispielsweise Bewegungen von Amöben zu modellieren oder die Integration der räumlichen Komponente des Gehirns in neurowissenschaftliche Modelle.

Die Struktur des Raumes, beispielsweise gegeben durch seine Krümmung oder den Rand, kann, zusätzlich zu den Eigenschaften des Kerns, Auswirkungen auf Stabilität und Verhalten des Prozesses haben, sodass diese dann in die Stabilitätsanalyse miteinfließen müssen.