NATIN - MBO

NATUURTECHNISCH INSTITUUT
MIDDELBARE BEROEPSOPLEIDINGEN

WISKUNDE VOOR HET NATIN

2^{e} leerjaar

Samensteller: *Autar Sanjay* (Sectiehoofd Wiskunde)

Voorwoord

Onderwijs is een dynamisch proces en in het kader hiervan alsook met het oog op de certificering van het Natuur Technisch Instituut heb ik gemeend dat het tijd is voor verandering en verbetering. Dit diktaat is bedoeld als naslagwerk voor iedereen die het vak Wiskunde op het Natin verzorgd , meernog voor de uniformiteit van de te behandelen leerstof. Het bestaat uit vier delen voor de vier respectievelijke leerjaren en is opgebouwd uit de volgende onderdelen:

Voor het 1ste leerjaar :

- Goniometrie
- Lijnen in R2
- Metriek
- Vectoren in R2

Voor het 2de leerjaar :

- Machten
- Exponentiele functies
- Logaritmen
- Differentiaalrekening
- Polynoomfuncties

Voor het 3de leerjaar:

- Rationale functies
- Samengestelde functies
- Wortel functies
- Integraalrekening

Voor het 4de leerjaar:

- Goniometrie
- Limieten en Continuiteit
- Afgeleide functies

De samenstelling is practisch en ondersteunend voor de verscheidene richtingvakken die op dit instituut aangeboden worden. Het is ook bedoeld om het wiskunde onderwijs op het Natin in goede banen te geleiden. De nieuwe docenten zullen er zeker iets aan hebben. Verder wil ik een dankwoord uitbrengen aan de sectie Wiskunde maar in het bijzonder aan Mw. Doelsaman die opgaven heeft helpen verzamelen die hebben bijgedragen tot de totstandkoming van dit diktaat. Ik hoop dat ik met dit diktaat heel wat heb kunnen bijdragen tot de verdere ontwikkeling van het vak Wiskunde op het Natin.

Als laatst, wil ik een ieder die zal werken uit dit diktaat succes toewensen en zie ik graag alle aanbevelingen, opmerkingen en eventuele correcties tegemoet om deze te verwerken in herziene uitgave.

Autar Sanjay

Inhoud

Hoofdstuk 1
Machten

1. Definities en Rekenregels

Macht: a^n = a.a.a.a………a (n factoren a) : a tot de macht n

a^n → n: exponent : geeft aantal gelijke factoren aan.

→ a: grondtal

Regels: $a^0 = 1$ en $a^1 = a$

Rekenregels:

1	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	Voorwaarde: $a, b \in R\backslash\{0\}$ $m, n \in Q$
2	$a^m : a^n = a^{m-n}$	
3	$(a^m)^n = a^{m.n}$	
4	$a^{-m} = \frac{1}{a^m} = (\frac{1}{a})^m$	
5	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0$	
6	$(a \times b)^m = a^m \times b^m$	
7	$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$	

Opdracht 1

Vul in:

a. $4 = 2^{....}$

b. $16 = 2^{....}$

c. $\frac{1}{9} = 3^{....}$

d. $4^x = 2^{....}$

e. $9^{3x+3} = 3^{....}$

f. $\frac{1}{3}^{-x+3} = 3^{....}$

Opdracht 2

Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten

a. $b^{\frac{1}{2}} =$

b. $p^{\frac{2}{3}} =$

c. $a^{-\frac{3}{4}} =$

d. $a^{2\frac{1}{3}} =$

e. $p^{-3\frac{1}{2}} =$

f. $x^{3\frac{2}{3}} =$

Opdracht 3

Schrijf als machten

a. $\sqrt[5]{a^4} =$

b. $a\sqrt{a} =$

c. $\frac{1}{p\sqrt{p}} =$

d. $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{a^3} =$

e. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a}} =$

f. $\frac{x^2}{\sqrt{x}} =$

g. $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} =$

h. $\frac{2}{4a\sqrt{a^3}} =$

Opdracht 4

Bereken m.b.v. de rekenregels bij machten

a. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt{a} =$

b. $a\sqrt{a} \times \sqrt[4]{a^3} =$

c. $a^2 : \sqrt{a} =$

d. $a\sqrt[3]{a^2} : a\sqrt{a} =$

e. $\left(\sqrt[5]{a^3}\right)^{-2} : a^{-2} =$

Opdracht 5

Bereken m.b.v. de rekenregels bij machten

a. $\frac{1}{2a\sqrt{a}} \times 4a^2 =$

b. $\frac{1}{a\sqrt{a}} : a^2\sqrt{a} =$

c. $\sqrt[3]{a^4b^2} \times \sqrt[6]{ab^2} =$

d. $\left(\sqrt[8]{a}\right)^6 : \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3 =$

e. $\frac{2}{3a^2\sqrt{b}} : \left(\sqrt[6]{ab}\right)^3 =$

Opdracht 6

Werk uit:

a. $(2^x + 3^y)(2^x - 3^y) =$

b. $(2^x + 3^y)^2 =$

c. $(4a^x b^y)^3 =$

d. $(3^x - 4^y)^2 =$

e. $(2a^x + 3b^2c^y)^2 =$

f. $(-2a^x b^{2y})^2 =$

g. $(-4a^{2x} b^y c^{-3z})^3 =$

2. Exponentiele vergelijkingen

Een vergelijking zoals $2^x = 8$, waarin de onbekende in de exponent voorkomt , noemen we een exponentiële vergelijking.

Regel: $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$

Opdracht 1

Los op:

a. $8^x = 4^{2x-6}$

b. $6^{4x} = 36^{-2x-8}$

c. $(\frac{1}{2})^{x-4} = (\frac{1}{2})^{2x+1}$

d. $3^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+5}$

e. $4^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

f. $(4\sqrt{2})^{-x+2} = (\sqrt{8})^{x-4}$

Opdracht 2

Los op:

a. $2^{x} = 2^{x^2-2x}$

b. $(2^{x} - 1)(2^{x} - 4\sqrt{2}) = 0$

c. $(3^{x} - 27)(3^{x} + 9) = 0$

d. $3^{2x} - 4 . 3^{x} + 3 = 0$

e. $2^{2x} - 2^{x+1} - 48 = 0$

f. $e^{x^2-x} - 1 = 0$ $(e \approx 2{,}7)$

3. Ongelijkheden

Bij ongelijkheden van de vorm $a^{m} > a^{n}$ is het belangrijk om op het grondtal te letten.

Als $a > 1$, gelden de volgende regels:
- Als $a^{m} > a^{n}$, dan $m > n$
- Als $a^{m} < a^{n}$, dan $m < n$

Als $0 < a < 1$, gelden de volgende regels:
- Als $a^{m} > a^{n}$, dan $m < n$
- Als $a^{m} < a^{n}$, dan $m > n$

Opdracht 1

Los op:

a. $4^{x+1} < 2^{\frac{1}{2}x-1}$

b. $(\frac{1}{2})^{x-4} > (\frac{1}{2})^{2x+1}$

c. $3^{x-1} \leq 9^{2x-6}$

d. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-4} \geq 9^{x+2}$

e. $4^{3x-4} < 8^{x-6}$

f. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} > 1$

Opdracht 2

Los op:

a. $3^{x^2-4x+3} \leq 1$

b. $3^{2x} - 4 . 3^{x} + 3 > 0$

c. $0 < 2^{-x-3} \leq 8$

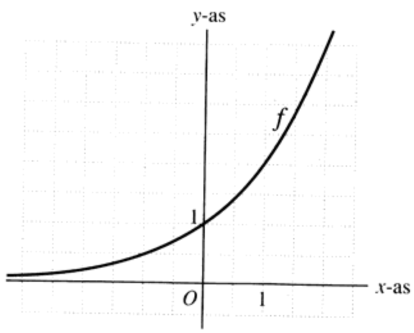
d. $\frac{1}{5}\sqrt{5} \leq 5^{2x-1} \leq 5\sqrt{5}$

e. $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x} < 9$

Hoofdstuk 2
Exponentiële functies

1. Standaardfuncties

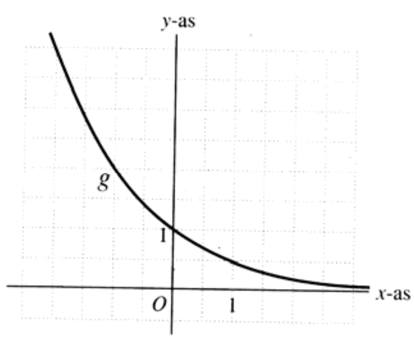
f: x → a ^{x}
a > 1 :



- f stijgend : $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- snijpunt met de x-as: geen
- snijpunt met de y-as: (0,1)
- Asymptotisch gedrag: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Horizontale asymptoot(HA): y = 0
- Domein = R , Bereik = R $^+$

g: x → a ^{x}
0 < a < 1 :



- g dalend : $x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$
- snijpunt met de x-as: geen
- snijpunt met de y-as: (0,1)
- Asymptotisch gedrag: $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \Leftrightarrow$ Horizontale asymptoot(HA): y = 0

  $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$
- Domein = R , Bereik = R $^+$

Opmerking: - de grafieken van f en g zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de y-as

<u>Opdracht 1</u>

a. Teken de grafiek van f: $x \rightarrow 2^{x}$.

b. Teken de grafiek van g: $x \rightarrow (\frac{1}{2})^{x}$.

c. Hoe ontstaat de grafiek van f uit die van g?

2. Transformaties

$a^{x} \xrightarrow{S_{y-as}} \left(\frac{1}{a}\right)^{x} = a^{-x}$

$a^{x} \xrightarrow{S_{x-as}} -a^{x}$

$a^{x} \xrightarrow{T\binom{p}{0}} a^{x-p}$

$a^{x} \xrightarrow{T\binom{0}{q}} a^{x} + q$ (HA: y = q)

$a^{x} \xrightarrow{T\binom{p}{q}} a^{x-p} + q$ (HA: y = q)

$a^{x} \xrightarrow{Verm...tov...y-as...,..k=\frac{1}{r}} a^{rx}$

$a^{x} \xrightarrow{Verm...tov..x-as..,..k=r} r.a^{x}$

<u>Opdracht 1</u>

Geef alle stappen aan hoe onderstaande functies ontstaan uit $f(x) = 3^{x}$.

a. $f(x) = 3^{x-2} + 4$

b. $f(x) = 4.\,3^{-2x}$

c. $f(x) = 5 + 3^{2-x}$

d. $f(x) = 4(\frac{1}{3})^{x-2} + 3$

e. $f(x) = 3 - 2\,.\,3^{-x+6}$

<u>Opdracht 2</u>

Vul in:

a. $f(x) = 5^{x} \xrightarrow{T\binom{-2}{4}} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{S_{x-as}} f(x) = \ldots\ldots\ldots$

$\xrightarrow{Verm....tov...y-as..,k=\frac{1}{4}} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b. $f(x) = 2^{-x+1} \xrightarrow{T\binom{2}{-6}} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{S_{y-as}} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\xrightarrow{Verm....x-as....,k=3} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Het tekenen van grafieken

Opdracht 1

Bepaal het asymptotisch gedrag van de onderstaande functies

a. $f(x) = 2 - (\frac{1}{3})^{-x+2}$

b. $f(x) = -3 + 2^{-2x-1}$

Opdracht 2

Gegeven de functie $f(x) = -2 + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

a. Bereken de snijpunten met de x-as en de y-as.
b. Bepaal het asymptotisch gedrag van f.
c. Bepaal het bereik van f .
d. Teken de grafiek van f.
e. Geef aan hoe de grafiek van $f(x)$ ontstaat uit die van $h(x) = 3^{x}$.

Opdracht 3

Gegeven de functies $f(x) = 2^{-x+2} - 2$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+4} - 2$

a. Bereken van f en g de snijpunten met de coördinaat-assen.
b. Bepaal het asymptotisch gedrag van f en g.
c. Bepaal het bereik van f en g.
d. Teken de grafieken van f en g in één assenstelsel.
e. Bereken het snijpunt van f en g.
f. Geef aan hoe de grafiek van $g(x)$ ontstaat uit die van $h(x) = 2^{x}$.

Opdracht 4

Gegeven de functie $f(x) = e^{2-x} - 1$

a. Bereken de snijpunten met de x-as en de y-as.
b. Bepaal het asymptotisch gedrag van f.
c. Bepaal het bereik van f.
d. Teken de grafiek van f.
e. Geef aan hoe de grafiek van $f(x)$ ontstaat uit die van $h(x) = e^{x}$.

Hoofdstuk 3
Logaritmen

1. Definitie Logaritmen

Logaritmen zijn exponenten.

Definitie: $^{a}\log b = c \Leftrightarrow a^{c} = b$

Voorwaarde : a is grondtal : $a > 0 \wedge a \neq 1$
b is argument : $b > 0$
c is de logaritme : $c \in R$

Opdracht 1

Bereken:

a. $^{5}\log 125 =$ e. $^{3}\log \frac{1}{3}\sqrt{3} =$ i. $^{5}\log \frac{1}{5\sqrt{5}} =$

b. $^{3}\log 27 =$ f. $^{5}\log 5\sqrt{5} =$ j. $^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{4} =$

c. $^{4}\log 64 =$ g. $^{2}\log 8\sqrt{2} =$ k. $^{3}\log \frac{1}{81} =$

d. $^{2}\log 16 =$ h. $^{10}\log 10000 =$ ℓ. $^{3}\log \sqrt[3]{9} =$

Opdracht 2.

Bereken *x:*

a. $x = {}^{3}\log 27$ e. $x = {}^{10}\log 1000$ i. $x = {}^{2}\log \sqrt[3]{4}$

b. $x = {}^{2}\log 16$ f. $x = {}^{100}\log 10$ j. $x = {}^{\sqrt{3}}\log \frac{1}{3}$

c. $x = {}^{6}\log 6$ g. $x = {}^{3}\log \frac{1}{\sqrt{27}}$ k. $x = {}^{6}\log \frac{1}{36}$

d. $x = {}^{64}\log 4$ h. $x = {}^{5}\log \frac{\sqrt{25^{-1}}}{125}$ ℓ . $x = {}^{16}\log 2$

Opdracht 3.

a. Schrijf 3 als een logaritme met grondtal 10
b. Schrijf 2 als een logaritme met grondtal 3
c. Schrijf 2 als een logaritme met grondtal 10

Opm: (1) Natuurlijke logaritmen: grondtal is $e \approx 2,7$

Dus: $^{e}\log b = \ln b = c \Leftrightarrow e^{c} = b$

(2) Briggse logaritmen : grondtal is $a = 10$

Dus: $^{10}\log b = \log b = c \Leftrightarrow 10^{c} = b$

2. Rekenregels van logaritmen

Rekenregels	
1	$^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log bc$
2	$^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log \frac{b}{c}$
3	$^a\log b^p = p.\,{}^a\log b$
4	$^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$
5	$a^{{}^a\log b} = b$
6	$^{a^p}\log b = \frac{1}{p}\,{}^a\log b$

Definities:

1. $^a\log a = 1$; $\ln e = 1$
2. $^a\log 1 = 0$; $\ln 1 = 0$
3 $^{\frac{1}{a}}\log b = -\,{}^a\log b$
4. $^a\log a^p = p.\,{}^a\log a = p$
5. $\ln a^p = p$
6. $e^{\ln b} = b$

Opdracht 1

Bereken:

a. $^2\log 4 + {}^2\log 8 =$

b. $^2\log 64 - {}^2\log 8 =$

c. $2.\,{}^3\log 9 =$

d. $^3\log 3 =$

e. $^2\log 1 =$

f. $2^{{}^2\log 5} =$

g. $^{\frac{1}{3}}\log 9 =$

h. $^4\log 5 =$

i. $\ln 4 + \ln 6 =$

j. $\ln 100 - \ln 25 =$

Opdracht 2

Herleid:

a. $^2\log 4 + 2.\,{}^2\log 3 - {}^2\log 2 =$

b. $\frac{1}{2}.\,{}^3\log 3 + 4.\,{}^3\log \sqrt{3} =$

c. $^5\log 4 - {}^5\log 3\sqrt{7} + {}^5\log 1\frac{3}{4} =$

d. $^2\log x^4 - 3.\,{}^2\log x + {}^2\log \frac{1}{x} =$

e. $\dfrac{^{\frac{1}{2}}\log a. + {}^2\log a^3}{^2\log \sqrt{a}} =$

f. $\dfrac{^2\log a \bullet {}^a\log b^6}{^{\frac{1}{2}}\log a \bullet {}^a\log a^2} =$

Opdracht 3

Herleid:

a. $\log b^2.d^2 =$

b. ${}^2\log \frac{ac}{d^2} =$

c. ${}^{\frac{1}{3}}\log \sqrt{a^2b} =$

d. ${}^6\log \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a}} =$

e. $ln\ (a^2.b : c) =$

f. $ln\ \frac{a+b}{a-b} =$

g. ${}^{\frac{1}{4}}\log \frac{a}{p^2q^2} =$

3. Het bepalen van definitie gebied of werkruimte of domein

${}^a\log b = c$

Voorwaarde : $a > 0 \wedge a \neq 1$

$b > 0$

$c \in R$

Opdracht 1

Bepaal het definitie gebied van:

a. ${}^2\log(3x - 9)$

b. ${}^2\log(-2x + 8)$

c. ${}^4\log(x^2 - 2x - 3)$

. d. $\ln(x^2 - 6x + 8)$

e. ${}^{x+2}\log(-4x + 8)$

f. ${}^{2x+4}\log(x^2 + 5x + 4)$

g. ${}^{-x+3}\log(-x^2 + 2x + 3)$

4. Logaritmische vergelijkingen

Regels: ${}^a\log p = {}^a\log q \Leftrightarrow p = q$

Opdracht 1

Los op:

a. ${}^2\log x = {}^2\log 4$

b. ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 3) = {}^{\frac{1}{2}}\log(-3x - 9)$

c. ${}^5\log x^2 = {}^5\log 4$

d. ${}^3\log(-x + 6) = {}^3\log 12$

e. ${}^4\log(2x - 4) = 0$

f. ${}^6\log(x^2 - x) = 1$

g. ${}^4\log(x^2 - 2x - 7) = 0$

<u>Opdracht 2</u>

Los op:

a. $^{2}\log 3x = 1$

b. $^{\frac{1}{2}}\log x = 2$

c. $^{3}\log 4 \;+\; ^{3}\log 2 \;=\; ^{3}\log x$

d. $^{\frac{1}{2}}\log x \;-\; ^{\frac{1}{2}}\log 2 = \,^{\frac{1}{2}}\log 16$

e. $^{2}\log 64 \;-\; ^{2}\log 8 = \,^{2}\log 2x$

f. $(^{2}\log x - 2)\,(^{2}\log x - 4) \;=\; 0$

<u>Opdracht 3</u>

Los op:

a. $^{2}\log x = 2 - \,^{2}\log 5$

b. $^{3}\log(x-2) - 1 = \,^{3}\log 8$

c. $^{3}\log(x-1)^{2} \;=\; ^{3}\log x^{2}$

d. $^{4}\log(x-3) \;+\; ^{4}\log(x+3) = \,^{4}\log 16$

e. $^{2}\log(x+1) \;+\; ^{2}\log(x+5) = 5$

f. $\ln(-2x+8) = \ln x^{2}$

g. $^{3}\log^{2} x \;+\; 2.\,^{3}\log x \;-\; 3 \;=0$

h. $^{\frac{1}{2}}\log^{2} x \;-\; 2.\,^{\frac{1}{2}}\log x \;=\; 8$

i. $\ln^{2} x \;-\; 3\ln x \;+\; 2 \;=0$

<u>Opdracht 4</u>

Los op:

a. $^{x}\log 10 = \frac{1}{2}$

b. $^{7}\log(2x-5) = 0$

c. $^{x}\log 2 = \frac{1}{3}$

d. $^{x}\log 8\sqrt{2} = 3\frac{1}{2}$

e. $^{5}\log(x-3) = 2$

f. $^{\frac{1}{4}}\log x = 8$

<u>Opdracht 5</u>

Los op:

a. $^{2}\log(x+2) = 1 + \,^{2}\log(x-1)$

b. $^{\frac{1}{3}}\log(2x-1) = 2 + \,^{\frac{1}{3}}\log(x+8)$

c. $^{6}\log(x^{2} - x) = 1$

d. $^{\frac{1}{2}}\log(x+1) - 3 = \,^{\frac{1}{2}}\log x$

e. $\ln(x+1)(x-3) = \ln(x+1) + \ln(x+3)$

f. $\ln(x+2)(x-2) = \ln(3x - 8)$

g. $^{4}\log(x^{2} - 2x - 7) = 0$

5. Ongelijkheden

$a > 1$: ${}^{a}\log p < {}^{a}\log q \Leftrightarrow p < q$
${}^{a}\log p > {}^{a}\log q \Leftrightarrow p > q$

$0 < a < 1$: ${}^{a}\log p < {}^{a}\log q \Leftrightarrow p > q$
${}^{a}\log p > {}^{a}\log q \Leftrightarrow p < q$

Opdracht 1

Los op:

a. ${}^{2}\log 2x > {}^{2}\log 6$
b. ${}^{\frac{1}{3}}\log(-x + 6) < {}^{\frac{1}{3}}\log(x + 4)$
c. ${}^{3}\log x > 3$
d. ${}^{\frac{1}{2}}\log x \geq 2$
e. ${}^{4}\log(x - 3) < 0$
f. ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x - 3) > -2$

Opdracht 2

Los op:

a. ${}^{4}\log(x^{2} - 9) > 2$
b. ${}^{2}\log(x^{2} - 6x) \leq 4$
c. ${}^{3}\log(-x^{2} + 6x) < 2$
d. ${}^{2}\log(-x^{2} + 4) \leq {}^{2}\log(2x + 1)$
e. ${}^{\frac{1}{2}}\log x + {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 5) > {}^{\frac{1}{2}}\log(2x + 4)$

Opdracht 3

Los op:

a. ${}^{2}\log^{2}x - 5.{}^{2}\log x + 4 \leq 0$
b. ${}^{\frac{1}{2}}\log^{2} x + 2.{}^{\frac{1}{2}}\log x \geq 15$
c. $\ln(2x - 14) < \ln(x^{2} - 5x - 14)$
d. ${}^{2}\log(x - 2) + {}^{2}\log(x + 2) > 5$
e. $\ln^{2}x - 3\ln x + 2 < 0$
f. ${}^{\frac{1}{2}}\log^{2} x + 2.{}^{\frac{1}{2}}\log x \leq 8$

Opdracht 4

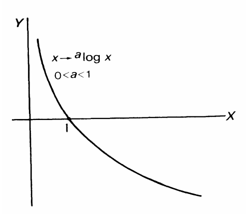
Los op:

a. ${}^{9}\log(2x + 1) > \frac{1}{2}$
b. ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 3) < -1$
c. ${}^{2}\log(5 - x) \geq 1$
d. ${}^{\frac{1}{2}}\log x \leq 0$
e. ${}^{\frac{1}{2}}\log(x + 3) < {}^{\frac{1}{2}}\log(2x - 1)$
f. ${}^{2}\log(3x + 1) + {}^{2}\log(3 - x) > 3$
g $1 + {}^{3}\log(x + 3) \geq {}^{3}\log(x^{2} - 1)$
h. $2 + {}^{2}\log(x + 2) > {}^{2}\log(x - 1)$

6. Logaritmische functies (standaard grafieken)

$f(\mathrm{x}) = {}^a\log \mathrm{x}$ met $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

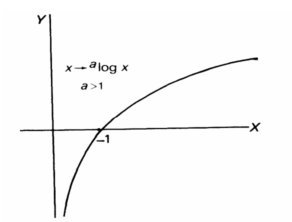
(1) $0 < a < 1$



* $a^x \xrightarrow{S_{y=x}} {}^a\log x$ (elkaars inverse)
* f is dalend: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
* Snijpunt met de x-as: (1,0)
* Snijpunt met de y-as: geen
* Asymptotisch gedrag: $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^a\log x = \infty \Leftrightarrow x = 0$: Verticale Asymptoot (VA)

  $\lim\limits_{x \to \infty} {}^a\log x = -\infty$

(2) $a > 1$



* $a^x \xrightarrow{S_{y=x}} {}^a\log x$ (elkaars inverse)
* f is stijgend: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
* Snijpunt met de x-as: (1,0)
* Snijpunt met de y-as: geen
* Asymptotisch gedrag: $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^a\log x = -\infty \Leftrightarrow x = 0$: Verticale Asymptoot (VA)

  $\lim\limits_{x \to \infty} {}^a\log x = \infty$

Opdracht 1

a. Onderzoek en teken de grafiek van $f(x) = {}^2\log x$.

b. Hoe onstaat de grafiek van f uit $g(x) = 2^x$.

Opdracht 2

a. Onderzoek en teken de grafiek van $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$.

b. Hoe onstaat de grafiek van f uit $g(x) = \frac{1}{2}^x$.

7. Transformaties

$a^{x} \xrightarrow{S_{y=x}} {}^{a}\log x$

$e^{x} \xrightarrow{S_{y=x}} \ln x$

${}^{a}\log x \xrightarrow{S_{x-as}} {}^{\frac{1}{a}}\log x = -{}^{a}\log x$

${}^{a}\log x \xrightarrow{Verm...tov..x-as..,..k=p} p.\,{}^{a}\log x$

${}^{a}\log x \xrightarrow{S_{y-as}} {}^{a}\log(-x)$

${}^{a}\log x \xrightarrow{Verm...tov...y-as...,..k=\frac{1}{p}} {}^{a}\log(px)$

${}^{a}\log x \xrightarrow{T\binom{b}{0}} {}^{a}\log(x-b)$

${}^{a}\log x \xrightarrow{T\binom{0}{c}} {}^{a}\log x + c$

${}^{a}\log x \xrightarrow{T\binom{b}{c}} {}^{a}\log(x-b) + c$

Opdracht 1

Geef alle stappen aan hoe onderstaande functies ontstaan uit $f(x) = {}^{2}\log x$.

a. $f(x) = {}^{2}\log(x-2) - 4$

b. $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(-x+4) + 5$

c. $f(x) = 3.\,{}^{2}\log(x.-7) + 6$

d. $f(x) = -{}^{2}\log(-x) - 1$

e. $f(x) = 3 - 2.\,{}^{2}\log(x + 5)$

Opdracht 2

Vul in:

b. $f(x) = {}^{2}\log x \xrightarrow{T\binom{-2}{4}} f(x) =$ …………………… $\xrightarrow{S_{x-as}} f(x) =$ …………….

$\xrightarrow{Verm....tov...y-as..,k=\frac{1}{4}} f(x) =$ …………………..

b. $f(x) = {}^{2}\log(-x+3) \xrightarrow{T\binom{2}{-6}} f(x) =$ ……………… $\xrightarrow{S_{y-as}} f(x) =$ ………………….

$\xrightarrow{Verm....x-as....,k=3} f(x) =$ ……………………

c. $f(x) = 2^{x} \xrightarrow{S_{y=x}} f(x) =$ ……….. $\xrightarrow{Verm...tov...y-as...,..k=\frac{1}{3}} f(x) =$…………….

$\xrightarrow{Verm....x-as....,k=4} f(x) =$………………… $\xrightarrow{T\binom{-2}{7}} f(x) =$………………………

8. Het tekenen van grafieken

Opdracht 1

Gegeven de functies $f(x) = {}^2\log(x + 2)$ en $g(x) = {}^2\log x$.

a. Bepaal het domein van f.
b. Bepaal de snijpunten van f met de coordinaatassen.
c. Onderzoek f op stijgen , dalen en bepaal het asymptotisch gedrag.
d. Teken de grafiek van f.
e. Bepaal het bereik van f.
f. Geef alle stappen aan hoe f uit g ontstaat.
g. Los op: $f(x) < 3$

Opdracht 2

Gegeven de functies $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log(x - 2)$ en $g(x) = {}^2\log x$.

a Bepaal het domein van f.
b Bepaal de snijpunten van f met de coordinaatassen.
c Onderzoek f op stijgen , dalen en bepaal het asymptotisch gedrag.
d Teken de grafiek van f.
e Bepaal het bereik van f.
f Geef alle stappen aan hoe f uit g ontstaat.
g. Los op: $f(x) \geq -2$

Opdracht 3

Gegeven de functies $f(x) = {}^2\log(x - 2)$ en $g(x) = 1 - {}^2\log(x - 3)$.

a Bepaal het domein van f en g.
b Bepaal de snijpunten van f en g met de coordinaatassen.
c Bepaal het asymptotisch gedrag van f en g.
d Teken de grafiek van $f$en die van g in een figuur.
e. Los op: $f(x) \leq g(x)$
f. Los op: $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 1$
g. Geef alle stappen aan hoe g uit f ontstaat.

Opdracht 4

Gegeven de functies $f(x) = {}^2\log(x + 6)$ en $g(x) = 3 + {}^2\log(-x + 2)$.

a Bepaal het domein van f en g.
b Bepaal de snijpunten van f en g met de coordinaatassen.
c Bepaal het asymptotisch gedrag van f en g.
d Teken de grafieken van f en g in een figuur.
e Bepaal het bereik van f en g.
f. Los grafisch op: $f(x) > g(x)$

Opdracht 5

Gegeven de functie $f(x) = \ln(-x + 1)$

a. Onderzoek en teken de grafiek van f.
b. Los grafisch op: $f(x) \geq 0$
c. Geef alle stappen aan hoe f ontstaat uit die van $g(x) = \ln x$

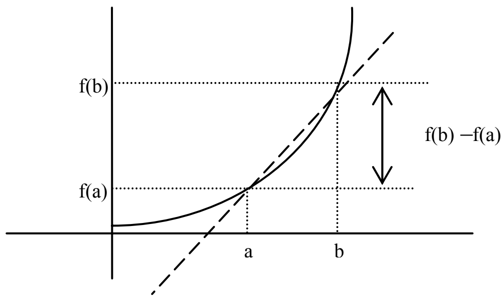
Opdracht 6

Gegeven de functie $f(x) = \ln(x - e)$

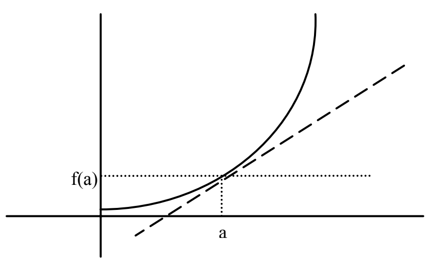
a. Onderzoek en teken de grafiek van f.
b. Los grafisch op: $f(x) \geq 1$
c. Geef alle stappen aan hoe f ontstaat uit die van $g(x) = e^x$

Hoofdstuk 4
Differentiaalrekening.

1 Het differentiaalquotiënt en differentiequotiënt.



Een functie f is gedefinieerd op het domein R.
We bekijken een lijn door twee vlak bij elkaar liggende punten op de grafiek van f: (a,f(a)) en (b,f(b))
Noem: b – a = Δx : de differentie van x.
f(b) – f(a) = Δf(x) :de differentie van f(x)
De helling (*richtingscoefficient*) van de lijn door de twee punten is: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{df}{dx}$.
Dit wordt het *differentiaalquotiënt* genoemd.
$\Delta x = b - a \Leftrightarrow b = a + \Delta x \Leftrightarrow \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{b-a}$

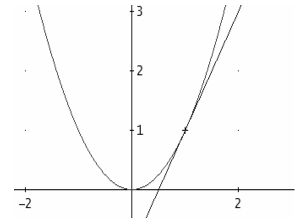


Als we Δx kleiner maken, dan komt b dichter bij a te liggen. Zo kan je een lijn trekken door het punt (a,f(a)). Deze lijn noemen we de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (a,f(a)).

We schrijven dat Δx zo klein mogelijk maken in de wiskunde als een zogenaamde limiet:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{b-a} = f'(x)$$
We korten deze schrijfwijze af met f'(x) en noemen dat het *differentiequotiënt* of de *afgeleide van f(x).*
Het bepalen van de afgeleide noemen we *differentieren.*

Meestal schrijven we het differentiequotiënt in de vorm (limiet definitie):
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \qquad \text{of} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Meetkundige betekenis:
De raaklijn aan de grafiek van de functie f in het punt (a,f(a)) heeft als richtingscoefficient f'(a)



Opdracht 1

a. Bepaal m.b.v. de limiet definitie de afgeleide functie van $f(x) = x^2$
b. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt x = 1.

Opdracht 2

a. Bepaal m.b.v. de limiet definitie de afgeleide functie van $f(x) = 2x^3$
b. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt x = 1.

Opdracht 3

Bepaal m.b.v. de limiet definitie de afgeleide functie $f'(x)$ van:

a. $f(x) = x^2 + 8x - 6$
b. $f(x) = 3x^2 - 6px + 2$
c. $f(x) = -2x^3 + 3x.$

Opdracht 4

Gegeven $f{:}x \to -\frac{1}{3}x^2 - 2x$, $x \in R$.

a. Bepaal het differentiequotient op $[-2, 1]$.
b. Bepaal het differentiequotient op $[x, x + \Delta x]$.
c. Bepaal de afgeleide functie op $[x, x + \Delta x]$.
d. Bepaal $f'(4)$

2 Standaard afgeleiden.

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax	a
x^n	$n.\,x^{n-1}$
$a.x^n$	$a.n.\,x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Opdracht 1

Differentieer de volgende functies:

a. $f{:}x \to 5$
b. $f{:}x \to 6x$
c. $f{:}x \to -7x^5$
d. $f{:}x \to 4x^3$
e. $f{:}x \to \frac{-2}{x^4}$
f. $f{:}x \to \frac{4}{2x^3}$

Opdracht 2

Differentieer de volgende functies:

a. $f{:}x \to 2\sqrt{x}$
b. $f{:}x \to \sqrt[3]{x^2}$
c. $f{:}x \to x^2\sqrt[3]{x^2}$
d. $f{:}x \to \frac{6}{\sqrt[4]{x^3}}$

3 Rekenregels voor differentieren

Somregel	s(x) = a(x) + b(x)	s’(x) = a’(x) + b’(x)
Verschilregel	v(x) = a(x) – b(x)	v’(x) = a’(x) – b’(x)
Produktregel	p(x) = a(x).b(x)	p’(x) = a’(x).b(x) + a(x).b’(x)
Quotiëntregel	q(x) = $\frac{T}{N}$	q’(x) = $\frac{T'.N-T.N'}{N^2}$

Opdracht 1

Differentieer de volgende functies

a. $s{:}x \rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

b $p{:}x \rightarrow 4x^2 . \sqrt{x}$

c. $q{:}x \rightarrow \frac{2x^4+4x}{3x-5}$

Opdracht 2

Differentieer de volgende functies

a. $f{:}x \rightarrow 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1$

b. $f{:}x \rightarrow \sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x} + 3x - 2$

c. $f{:}x \rightarrow \frac{3x^2+5}{x^3+4x}$

d. $f{:}x \rightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 2x + 2a + x^2\sqrt{x}$

Opdracht 3

Differentieer de volgende functies

a. $f{:}x \rightarrow (-5x^3 + 2)^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b. $f{:}x \rightarrow \frac{1}{6}x^2 - 5a^2x + 2a^4$

c. $f{:}x \rightarrow \frac{x^3-x^2+x-10}{2x}$

d. $f{:}x \rightarrow \sqrt{x} - x\sqrt[5]{x^3} + \frac{2}{x^3} - \frac{6a}{x^2}$

Opdracht 4

a. $f{:}x \rightarrow \frac{4x^2-3x}{6-10x^3} + (5x^3 - 2)\sqrt{x}$

b. $f{:}x \rightarrow \sqrt[3]{3x^2} - \frac{9-x^2}{(x+3)^2}$

c. $f(t) \rightarrow 2\frac{1}{3}t^6 - \frac{3}{2t^2} + 2t^2\sqrt[3]{t} + 1$

d. $f(t) \rightarrow (\frac{t}{p} + 2at - 2q).\frac{1}{\sqrt[3]{t}}$

Opdracht 5

Gegeven de functie $h{:}t \rightarrow \frac{t^2+2}{3-t^2}$.

a. Toon aan dat $h'(t) = \frac{10t}{(3-t^2)^2}$

b. Bepaal de raaklijn in het punt waarvoor geldt t = 1.

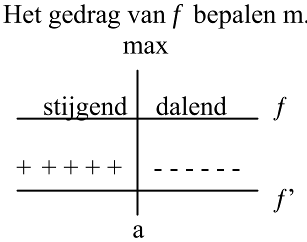
Hoofdstuk 5
Het onderzoeken van polynoomfuncties

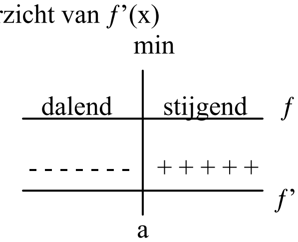
1. Werkschema

1. **Domein van *f***
2. **Snijpunten met de coördinaat-assen**: – $f \cap$ x-as : Los op: $f(x) = 0$ (nulpunten)
   – $f \cap$ y-as: Bereken: $f(0) =$ ......

3. **Uiterste waarden / extreme waarden** : Los op: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$
   $x = a \Rightarrow f(a)$ is een uiterste waarde van f

   Het gedrag van f bepalen m.b.v het tekenoverzicht van $f'(x)$





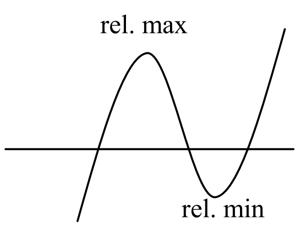
Opmerkingen : – f is stijgend $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(x) > 0$

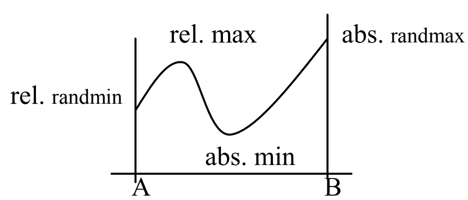
$\Leftrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

– f is dalend $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(x) < 0$

$\Leftrightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Extremen/randextremen (relatief/absoluut – minimum/maximum)

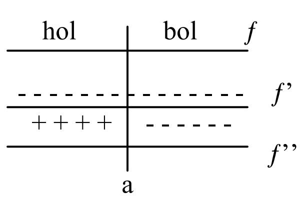


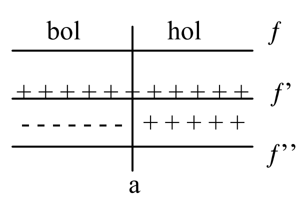


4. **Buigpunten**: Los op: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$

   Type 1:

   $x = a \Rightarrow$ het punt $(a , f(a))$ is een buigpunt(BP) van f als:





Horizontale buigraaklijn(HBR) in x =a met als verg: $y = f(a)$

Type 2:

x = b $\Rightarrow$ het punt (b , f(b)) is een buigpunt(BP) van f als:

hol	bol	f
+++++++	--------	f'
++++	------	f''
b		

bol	hol	f
------------	++++++++	f'
-------	+++++	f''
b		

Scheve buigraaklijn(SBR) in x = b met als verg : y = px + q

5. Bereik van *f*
6. Grafiek tekenen

Opmerkingen:
- De grafiek van f is puntsymmerisch t.o.v. het punt (p,q) als $\frac{f(p-h)+f(p+h)}{2} = q$
- De grafiek van f is lijnsymmerisch in de lijn x = p als $f(p-h) = f(p+h)$
- Als $f'(a) = 0$,dan heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn in het punt (a,f(a)).

Opdracht 1

Onderzoek en teken de grafiek van de functie $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

Opdracht 2

Gegeven de functie $f:x \rightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^3$

a. Bepaal de snijpunten met de coordinaat-assen.
b. Bepaal de uiterste waarde(n)
c. Bepaal het (de) buigpunt(en)
d. Bepaal de vergelijking(en) van de buigraaklijn(en)
e. Teken de grafiek van *f*.

Opdracht 3

Gegeven de functie $f:x \rightarrow -x^3 + 3x^2$, $x \in [-1 , 3]$

a. Bepaal de snijpunten met de coordinaat-assen.
b. Bepaal de uiterste waarde(n)
c. Bepaal het (de) buigpunt(en)
d. Bepaal de vergelijking(en) van de buigraaklijn(en)
e. Teken de grafiek van *f*.

Opdracht 4

Gegeven de functie $f:x \rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x$

a. Bepaal de snijpunten met de coordinaat-assen.
b. Bepaal de uiterste waarde(n)
c. Bepaal het (de) buigpunt(en)
d. Bepaal de vergelijking(en) van de buigraaklijn(en)
e. Teken de grafiek van *f*.

Opdracht 5

Gegeven f:x $\rightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2$, x$\in$ R.

a. Bereken de snijpunten met de x-as en de y-as.
b. Bepaal f'(x) en toon aan dat f(x) drie extremen heeft.
c. Bepaal de intervallen waarop f stijgt en daalt.
d. Geef de vergelijking van de symmetrie-as aan.
e. Bereken de buigpunten.
f. Teken de grafiek van f.

Opdracht 6

Onderzoek de volgende functies op buigpunten:

a. f:x $\rightarrow x^5 - 4x^3$
b. f:x $\rightarrow -x^4 + 6x^2$

Opdracht 7

Gegeven f:x $\rightarrow -\frac{1}{2}x^4 + x^2$, x$\in$ [– 2 , 2].

a. Bereken de nulpunten van f.
b. Bepaal f'(x) en de intervallen waarop f stijgt en daalt.
c. Bepaal alle extremen van f.
d. Ga na of f puntsymmetrisch is.
e. Bepaal de buigpunten.
f. Teken de grafiek nauwkeurig.
g. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt waarvoor x = – 2.

2. Gemengde opdrachten

Opdracht 1

Onderzoek en teken de grafiek van de volgende functies:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2$
b. $f(x) = 4x^2 - 2x^4$
c. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Opdracht 2

Gegeven f:x $\rightarrow x^2 - 2ax + 2a$, a$\in$ R.

a Bepaal m.b.v. het differentiequotient de afgeleide functie f'(x).
b Bereken a als $f'(3) = 4$
c Bereken a als f(x) een minimum –3 heeft

Opdracht 3

Gegeven f:x $\rightarrow x^3 + 2x^2 + 1$.

a. Bepaal f'(1) en de raaklijn in het punt K waarvoor geldt x = 1.
b. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen die evenwijdig lopen aan de lijn m: y = – x + 2.
c. Bereken de punten op de grafiek waar de raaklijnen evenwijdig zijn aan de x-as.

Opdracht 4

Gegeven de functie $f(x) = x.(x^2 - 8)$ op $[-3 , 3½]$

a. Bereken de coördinaten van de snijpunten met de x-as en de y-as.
b. Geef aan op welk interval $f(x) > 0$ en $f(x) < 0$.
c. Onderzoek op welke intervallen f stijgend of en dalend is.
d. Bepaal alle extremen en hun aard , als ook eventuele buigpunten indien die aanwezig zijn.
e. Onderzoek de aanwezigheid van een eventueel punt van symmetrie.
f. Teken de grafiek van $f(x)$.

Opdracht 5

Gegeven de functie $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$.

a. Bereken $f'(x)$
b. $f'(1)$ is de rc van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt P.
   Bereken het punt P en de vergelijking van de raaklijn.
c. Bereken de vergelijking van de raaklijn k aan de grafiek van f in het punt A met $x = -2$.

Opdracht 6

Gegeven de functie $f: x \to px^2 + qx + r$ (p , q en r $\in$ R)
f gaat door (0,2) en raakt in het punt A waarvoor geldt $x = 1$ aan de lijn t: $y = 3x + 1$.
Bereken p , q en r.

Opdracht 7

Gegeven de functie $f(x) = x^2 + ax + b$, met $a,b \in R$.
De lijn met vergelijking $y = 5x - 7$ raakt de grafiek van f in het punt T(2,3).
Bereken a en b.

Opdracht 8

Gegeven de functie $f(x) = x^3 + px + q$, met $p,q \in R$
De lijn $y - 6x + 3 = 0$ is de raaklijn aan f in het punt waarvoor $x = -1$.

a. Bereken p en q.
b. Neem $p = -12$ en $q = 0$.
   Onderzoek in welk(e) punt(en) de grafiek van f (een) horizontale raaklijn(en) heeft.
   Bepaal de vergelijking(en) van deze raaklijn(en).

Opdracht 9

Gegeven $f: x \to ax^5 + bx^4$.
f heeft in het punt waarvoor geldt $x = 2$ een buigraaklijn k: $y = 8x - 10$.
Bereken a en b.