— Total differential (전미분)

$z = f(x,y)$, $\exists\, f_x, f_y$: conti.

$P(x,y) \longrightarrow Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ $\Rightarrow$ z의 증분 Δz.

$$\Rightarrow \quad \Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$
$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

평균값정리 사용

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \quad 0<\theta_1, \theta_2<1$$

f_x, f_y : 연속

$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) + \varepsilon_1, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1 = 0.$$
$$f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y) + \varepsilon_2, \quad \lim_{\Delta y\to 0}\varepsilon_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta z = f_x(x,y)\Delta x + \varepsilon_1 + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_2.$$

$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 는 0로 수렴 즉 아주 작은 값 이다.
($f_x(x,y)\Delta x$, $f_y(x,y)\Delta y$ 에 비하여)

$$\therefore \quad \Delta z \fallingdotseq f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y = dz.$$

: total differential.

i.e. $dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$.

$z = f(x,y) = x$, $z = f(x,y) = y$ $\Rightarrow$ $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

$$\therefore \quad dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

<Rmk> (1) $f(x,y)$, $\exists\, f_x, f_y$: conti
$\Rightarrow$ $f(x,y)$: total differentiable (전미분가능)

(2) $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$\Rightarrow \quad dz = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2 + \cdots + f_{x_n}dx_n.$$

exam $z = ax^2 + by^2 \Rightarrow$ 전미분.

(풀이)

$z_x = 2ax \quad z_y = 2by.$

$dz = 2ax\,dx + 2by\,dy = 2(ax\,dx + by\,dy).$

exam. $x = 4,\ y = -2,\ \Delta x = 0.2,\ \Delta y = -0.2$

$z = x^2 - xy + y^2 \Rightarrow \Delta z$ 와 dz.

(풀이)

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$= (x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2 - (x^2 - xy + y^2)$

$= 2(x\cdot\Delta x + y\cdot\Delta y) - (x\cdot\Delta y + y\cdot\Delta x) + (\Delta x)^2 - \Delta x\Delta y + (\Delta y)^2$

$= 3.72.$

$z_x = 2x - y \qquad z_y = -x + 2y.$

$dz = z_x\,dx + z_y\,dy = (2x-y)\,dx + (-x+2y)\,dy$

$= 3.6.$

$\therefore\ \Delta z \fallingdotseq dz.$

<Rmk> $z = f(x,y)$: (x_0, y_0)에서 전미분 가능이면

점 (x_0, y_0, z_0)을 지나는 곡면 $z = f(x,y)$의 접평면 식은

$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$ 이다.

exam $z = x^2 + y^2 + xy$ 상의 점 $(1, 2, f(1,2))$에서의 접평면을 구하라.

$f(1,2) = 7,\quad f_x = 2x + y,\quad f_y = 2y + x.$

$f_x(1,2) = 4,\quad f_y(1,2) = 5$

$z - 7 = 4\cdot(x-1) + 5(y-2) \Rightarrow z = 4x + 5y - 7.$

— 이변수 함수의 극대, 극소 —

$f(x,y)$ 가 (a,b) 의 근방에서 정의되어 있고

~~$\forall (x,y) \in (a\pm h, b\pm h)$~~ (x,y) 가 (a,b) 근방의 점일 때.

① $f(x,y) < f(a,b) \Rightarrow f(x,y)$는 (a,b)에서 극대
$f(a,b)$ 를 극대값.

② $f(x,y) > f(a,b) \Rightarrow f(x,y)$는 (a,b)에서 극소.
$f(a,b)$ 를 극소값.

Thm $f(x,y)$ 가 (a,b) 의 근방에서 연속이고
$\exists\ f_x(a,b),\ f_y(a,b)$, $f(x,y)$ 가 (a,b) 에 극값을 가지면

$\Rightarrow f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$.

Thm — 극값 판정법 —

$f(x,y)$ 가 연속인 2차 편도함수를 가지고
$f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ 일 때 (a,b) 에 대한 판정

(1) $f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) < 0$

① $f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow f(x,y)$는 (a,b)에서 극대이고 극대값 $f(a,b)$
를 가진다.

② $f_{xx} > 0 \Rightarrow f(x,y)$는 (a,b)에서 극소이고 극소값 $f(a,b)$
를 가진다.

(2) $f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) > 0 \Rightarrow$ 극값을 가지지 않는다.

exm $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + x - 5y$ 의 극값을 조사하라.

$f_x = 2x+2y+1$ $f_y = 2x+4y-5$, $f_x=0,\ f_y=0$ 을 만족하는 (x,y)를
구하라.

$2x+2y+1=0$, $2x+4y-5=0 \Rightarrow y=3$, $x=-\frac{7}{2}$

$\therefore\ (-\frac{7}{2}, 3)$ 에 대하여 판정.

$f_{xx}=2$ $f_{xy}=2$ $f_{yy}=4$.

$f_{xy}^2 - f_{xx}\cdot f_{yy} = 4-2\cdot 4 = -4 < 0$ $\therefore$ 극값을 가진다.

$f_{xx}=2>0$ 이므로 $(-\frac{7}{2},3)$ 에서 극소이고
극소값은 $f(-\frac{7}{2},3) = -\frac{37}{4}$

$f(x,y)=0.$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y} \quad (f_y\neq 0)$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=0 \quad \Rightarrow \quad f_x(x,y)=0.$

$\therefore \quad f(x,y)=0, \quad f_x(x,y)=0$ 를 만족하는 (x,y) 를 구한다.

$\Downarrow (a,b)$

$f_{xx}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}-2f_{xy}\cdot\frac{dy}{dx}+f_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{f_y} \quad \xLeftarrow{\text{대입}} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$

$=-\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$

$f(x,y)=0$, $f_x=0$ 대입 $\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}}{f_y}.$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}}{f_y}<0 \quad \Rightarrow$ $x=a$ 에서 극대를 가지고 극대값 b ~~$f(a,b)$~~

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}}{f_y}>0 \quad \Rightarrow$ $x=a$ 에서 극소를 가지고 극소값 b ~~$f(a,b)$~~

<u>exm</u> $\quad x^3-3xy+y^3=3 \quad \Rightarrow$ 극값 ?

put $f(x,y)=x^3-3xy+y^3-3=0$

$f_x(x,y)=3x^2-3y=0 \qquad y=x^2$

$\Rightarrow \quad x^3-3x^3+x^6-3.=x^6-2x^3-3$

$=(x^3-3)(x^3+1)=0.$

$x=\sqrt[3]{3}, \quad x=-1$

$(-1,1) \quad (\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^2})$

$f_{xx}=6x \quad f_y=-3x+3y^2 \qquad f_{xx}(-1,1)=-6$

$f_y(-1,1)=6$

$\frac{f_{xx}(-1,1)}{f_y(-1,1)}=\frac{-6}{6}<0 \quad \Rightarrow$ $x=-1$ 에서 극소값을 가지고

극소값은 1 이다.

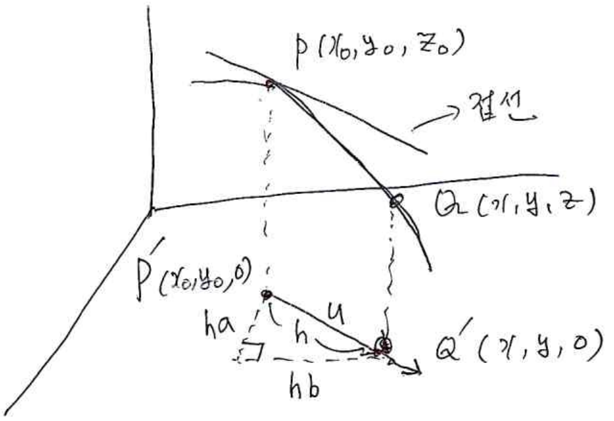
$(\sqrt[3]{3}\ ,\ \sqrt[3]{3^2})$ 일 때.

$f_{xx}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^2}) = 6\sqrt[3]{3}$.

$f_y(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^2}) = -3\sqrt[3]{3} + 3\cdot 3\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$

$\therefore \dfrac{f_{xx}}{f_y} = 1 > 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$ 에서 극대값은 $\sqrt[3]{3^2}$ 을 갖는다.

— 방향도함수 와 기울기 벡터



x 축, y 축 방향이 아닌 vector u 방향으로의 도함수를 생각해보자.

$hu = (ha, hb) = ha\,e_1 + hb\,e_2$.

$x - x_0 = ha \quad , \quad y - y_0 = hb$

$\therefore \quad x = x_0 + ha \quad , \quad y = y_0 + hb$

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{\Delta z}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z - z_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

; f 의 u 방향에 대한 방향도함수

denote $\quad D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$

$u = (a, b)$; 단위 vector.