Thm. $z = f(x,y)$; 전미분 가능

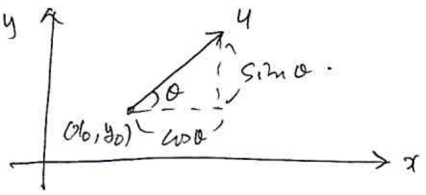
$u = (a, b)$ $(= ae_1 + be_2)$; 단위 vector

$\Rightarrow$ f의 u 방향으로의 방향도함수는

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b$$

이다.

<Rmk> u 가 x 축과 각을 이루면



$u = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta.$$

exm. ~~Thm~~ $f(x,y) = x^2 - 2xy^3$ 일 때 점 $(-2,1)$ 에서 벡터 $u = (3,4)$ 방향으로의 f의 방향도함수를 구하라.

(sol)

u 방향의 단위 vector를 구하자 $\frac{u}{|u|}$ 이므로.

$|u| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

$\therefore \frac{u}{|u|} = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$f_x(x,y) = 2x - 2y^3$ $\quad f_y(x,y) = -6xy^2$

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cdot\frac{3}{5} + f_y(x,y)\cdot\frac{4}{5}$$
$$= 2(x-y^3)\cdot\frac{3}{5} - 6xy^2\cdot\frac{4}{5}$$

$$\therefore D_u f(-2,1) = 2(-2-1)\cdot\frac{3}{5} - 6\times(-2)\times 1\cdot\frac{4}{5}$$
$$= -6\times\frac{3}{5} + 12\cdot\frac{4}{5} = -\frac{18}{5} + \frac{48}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

ex예 $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ 이고 단위 vector u 와 x 축이 이루는 각 θ 가 $\frac{\pi}{6}$ 일 때 $D_u f(1,2)$ 를 구하라.

(풀이)

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x+8y)\cdot\frac{1}{2}$$

$$D_u f(1,2) = (3-6)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3+16)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{13}{2}$$

ex예 평평한 금속판 위의 온도는 평면위의 점 $(x,y)\ (\neq(0,0))$ 에서 $T(x,y) = \frac{100}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 이다.
점 $P(2,6)$ 에서 점 $Q(4,2)$ 방향으로 점 $P(2,6)$ 에서 온도 T 의 변화율을 구하라.

<sol> P 에서 Q 로의 단위 vector.

$$u = \frac{(4-2,\ 2-6)}{\sqrt{(4-2)^2+(2-6)^2}} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{20}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$D_u T(x,y) = T_x(x,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + T_y(x,y)\cdot\frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$T_x(x,y) = \frac{-100x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T_y(x,y) = \frac{-100y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\ D_u T(2,6) = \frac{-200}{(4+36)\sqrt{4+36}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-600}{40\cdot 2\sqrt{10}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{-200}{80\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1200}{80\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1000}{80\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1000\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}{4000} = \frac{\sqrt{50}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore$ 온도 T가 $\overrightarrow{PQ}$ 방향으로 P 에서 단위거리당 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^\circ C$ 증가함.

<Def> $f(x,y)$에 대한 f의 기울기 벡터는.
벡터함수 $\nabla f(x,y)$로써 다음과 같이 정의한다.

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2$$

∇f : grad f 쓰고, del f 라 읽는다
그레디언트

<Rmk> (1) 다변수 함수에서 미분계수에 해당하는 것이 기울기 Vector이다.
(2) 기울기 Vector 와 Vector의 내적 (inner product)
를 이용하면 방향도함수를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\, a + f_y(x,y) \cdot b$$
$$= (f_x(x,y), f_y(x,y)) \cdot (a, b) = \nabla f(x,y) \cdot u.$$

exm $f(x,y) = x^2 - xy$ 일 때.
(1) 점 $p(3,-2)$에서의 기울기 Vector ∇f를 구하라
(2) 점 $p(3,-2)$에서 점 $Q(4,1)$ 방향으로의
점 $p(3,-2)$에서의 f의 방향도함수를 ∇f를 이용하여
구하라

(○,○) (1) $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = f_x(x,y) e_1 + f_y(x,y) e_2$

$$= (2x-y, -x) = (2x-y) e_1 - x e_2.$$

$$\nabla f(3,-2) = 8 e_1 - 3 e_2$$

(2) $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ 라 두면

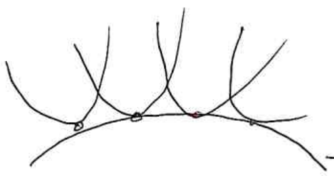
$$\vec{a} = (4-3, 1-(-2)) = (1,3) = e_1 + 3e_2.$$

$$\therefore \text{ 단위 Vector } u = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(1,3)}{\sqrt{1+9}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$D_u f(3,-2) = \nabla f(3,-2) \cdot u = (8, -3)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$
$$= \frac{8}{\sqrt{10}} - \frac{9}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

- 포락선 -

$f(x,y,\alpha)=0$ 는 곡선족을 가리킨다.



$f(x,y,\alpha)=0$

→ 포락선. (모양은 다르나 $f(x,y,\alpha)=0$ 의 해~~解~~되는 것).

- 포락선을 구하는 방법 -

$f(x,y,\alpha)=0$ 와 $f_\alpha(x,y,\alpha)=0$ 에서 α를 소거하여 만든 것이 포락선과 특이점을 포함하는 식이 나온다.

특이점인 경우는 $f_x=f_y=0$ 이므로. 나머지가 포락선이다.

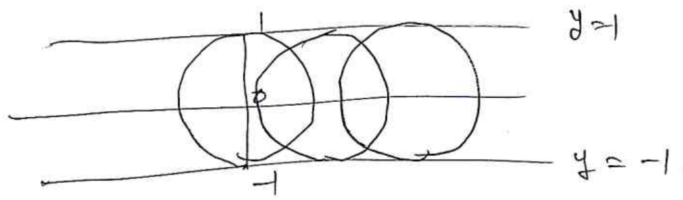
Ex1) $(x-\alpha)^2+y^2-1=0$ 의 포락선을 구하라.

(풀) put $f(x,y,\alpha)=(x-\alpha)^2+y^2-1=0$.

$f_\alpha(x,y,\alpha)=-2(x-\alpha)=0$

$\therefore x=\alpha$. 를 $f(x,y,\alpha)=0$ 에 대입.

$y^2-1=0 \qquad \therefore y=\pm 1$.



Ex) $f(x,y,\alpha)=(y-\alpha)^2-x(x-1)^2=0$ 의 포락선 ?

$f_\alpha(x,y,\alpha)=-2(y-\alpha)=0 \qquad y=\alpha$.

$\therefore -x(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=0,\ x=1$

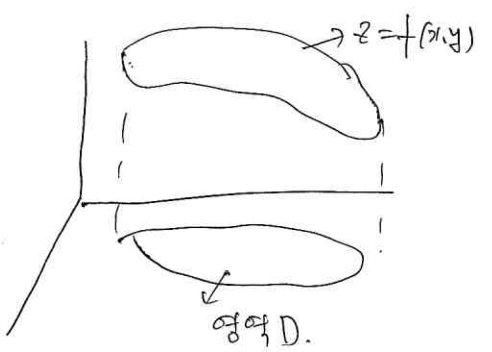
$$
\begin{aligned}
f_x(x,y,\alpha) &= -(x-1)^2-2x(x-1) = -x^2+2x-1-2x^2+2x \\
&= -3x^2+4x-1 \\
&= -(3x^2-4x+1) \qquad \Rightarrow x=1,\ x=\tfrac{1}{3} \\
&= -(x-1)(3x-1)=0
\end{aligned}
$$

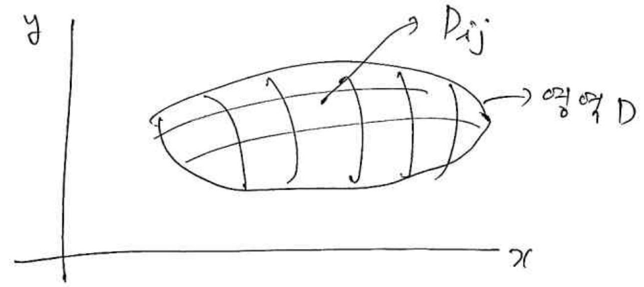
$\therefore x=1$: 특이점. (만약 $f_x=0$ 에서 판별되지 않으면 $f_y=0$ 을 구하여 본다).

$x=0$: 포락선

- 중적분 (교과서 13장)

정적분을 이변수함수 $f(x,y)$로 확장해보자.





D_{ij}의 면적을 ΔS_{ij} 하자.

D_{ij} 안의 점 $P_{ij}(x_i, y_j)$를 잡아서.

$$\sum_{i,j} f(x_i,y_j)\Delta S_{ij}$$

put $\Delta S = \max\{\Delta S_{ij}\}$

$$\exists \lim_{\Delta S \to 0} \sum f(x_i,y_j)\Delta S_{ij} = \iint_D f(x,y)\,dS = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx$$

D : 적분영역.

Rem

$D=\{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ 상의 $z=f(x,y)$의 적분은.

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ 로 표현된다.

Thm $f(x,y)$: conti. on D $\Rightarrow$ $f(x,y)$는 D 상에서 적분가능(integrable)

Rmk $f(x,y)=1$ $\Rightarrow$ $\iint_D f(x,y)\,dy\,dx = \iint_D dy\,dx$: D의 면적.

Thm $f(x,y)$, $g(x,y)$: conti. on D

$$\Rightarrow \iint_D (f(x,y) \pm g(x,y))\,dy\,dx = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx + \iint_D g(x,y)\,dy\,dx.$$

Thm $f(x,y)$: conti. on D, k : 상수

$$\iint_D k f(x,y)\,dy\,dx = k\iint_D f(x,y)\,dy\,dx.$$

Thm $D = D_1 \sqcup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \phi$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dy\,dx = \iint_{D_1} f(x,y)\,dy\,dx + \iint_{D_2} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Thm $f(x,y)$, $g(x,y)$: conti. on D.

$g(x,y) \leq f(x,y)$ on D.

$$\Rightarrow \iint_D g(x,y)\,dy\,dx \leqq \iint_D f(x,y)\,dy\,dx.$$

Thm $$\left|\iint_D f(x,y)\,dy\,dx\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dy\,dx.$$

Thm $\displaystyle\sup_{(x,y)\in D} f(x,y) = M$ $\displaystyle\inf_{(x,y)\in D} f(x,y) = m$, S : D의 면적

$$\Rightarrow mS \leq \iint_D f(x,y)\,dy\,dx \leq MS$$

Thm — 적분의 평균값 정리 —

$f(x,y)$: conti. on D. (폐곡선). S : D의 면적

$\Rightarrow \exists\ (x_0,y_0)$ s.t. $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dy\,dx = f(x_0,y_0)\,S$ (직육면체의 부피로 계산)

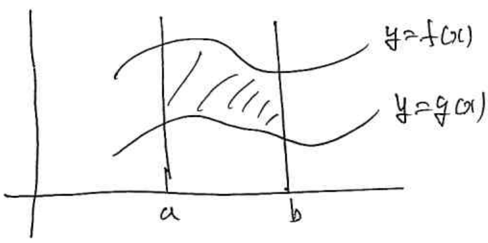
exm. $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ 3 \leq y \leq 5\}$ 위의 평면 $z = f(x,y) = x+2y$ 아래에 놓인 $\underbrace{\text{부피}}_{\text{입체의}}$를 구하라

$$\int_1^2\int_3^5 (x+2y)\,dy\,dx = \int_1^2 \left[xy + y^2\right]_3^5 dx.$$

$$= \int_1^2 (5x + 25 - 3x - 9)\,dx = \int_1^2 (2x+16)\,dx$$

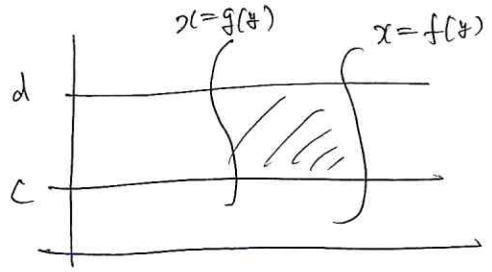
$$= \left[x^2 + 16x\right]_1^2 = (4 + 32 - (1+16)) = 19$$

적분영역이 다음과 같을 때 적분을 생각하자.



$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dy\,dx$$

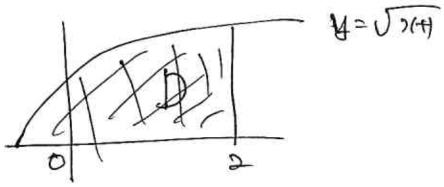
$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$= \int_c^d \int_{g(y)}^{f(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

exm

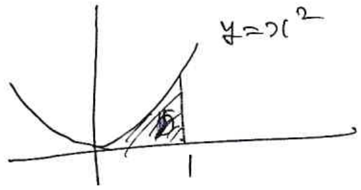


(1) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x+1}} x\,y\,dy\,dx.$

$$= \int_0^2 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$= \int_0^2 \left(x \cdot \frac{x+1}{2} \right) dx. = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2+x)\,dx.$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + 2 \right)$$



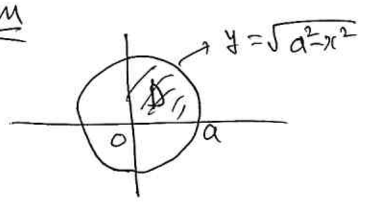
(2) $\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx.$

$$= \int_0^1 \left[x\,e^{\frac{y}{x}} \right]_0^{x^2} dx.$$

$$= \int_0^1 (x \cdot e^x - x)\,dx.$$

$$= \left[xe^x - e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(e - e - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2}$$

exm



$$\iint_D xy\,dy\,dx.$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,y\,dy\,dx.$$

$$= \int_0^a \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx.$$

$$= \int_0^a \frac{x(a^2-x^2)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a.$$

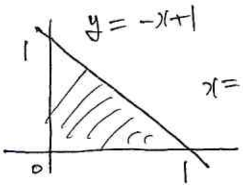
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{a^4}{8}.$$

RmK $$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_\alpha^\beta \int_{\varphi^{-1}(y)}^{\psi^{-1}(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

적분 순서교환.

Exm $D=\{(x,y) \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$ 일 때

$\iint_D (x^2+y^2)\,dy\,dx$ 를 구하고 적분순서를 바꾸어 계산하시오



$$\int_0^1 \int_0^{-x+1} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{-x+1} dx.$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) dx.$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1-3x+3x^2-x^3) \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (3x^2 - 3x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (-4x^3+6x^2-3x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[-x^4+2x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(-1+2-\frac{3}{2}+1\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 \int_0^{-y+1} (x^2+y^2)\,dx\,dy. = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_0^{-y+1} dy.$$

계산하면 같은 값이 나온다.

<RmK> $D=\{(x,y) \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$: 직사각형이면

(1) $\iint_D f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy. = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$

(2) 만약 $f(x,y) = \psi(x)\phi(y)$ 형이면

$$\iint_D f(x,y) = \int_a^b \int_c^d \psi(x)\phi(y)\,dy\,dx = \left(\int_a^b \psi(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d \phi(y)\,dy\right)$$

Exm $$\int_0^a \int_0^b e^{px+qy}\,dy\,dx = \left(\int_0^a e^{px}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^b e^{qy}\,dy\right)$$

$$= \left[\frac{e^{px}}{p}\right]_0^a \cdot \left[\frac{e^{qy}}{q}\right]_0^b = \frac{1}{pq}\left(e^{pa}-1\right)\left(e^{qb}-1\right)$$