- 행렬 (matrix) -

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$i = 1, 2, \cdots, m$: 행

$j = 1, 2, \cdots, n$: 열.

$m \times n$ - matrix

$A = (a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n})$: $1 \times n$ - matrix 또는 n차 행 vector.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$: $m \times 1$ - matrix 또는 m차 열 vector.

$A = (a_{ij})_{n \times n}$: 정방행렬 (square matrix)

i.e. 행과 열의 수가 같은 행렬.

Definition (정의) : 용어의 수학적 설명

<Def> 라 쓰기로 함.

<Def> $A = (a_{ij})_{n \times n}$: 정방행렬

: 단위행렬 (unit matrix)

$\Leftrightarrow$ (if and only if) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

→ Remark (주의)

<Rmk> 즉 $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ 대각성분만 1 이고 나머지는 모두 0인 행렬.

$I_3 = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n차 단위행렬 $\Rightarrow$ I_n or E_n 으로 표현.

<Def> $A = (a_{ij})_{m \times n}$: zero matrix

$\Leftrightarrow$ $a_{ij} = 0$

(*) 모든 원소가 0 인 행렬을 영행렬이라 한다.

<Def> $A=(a_{ij})_{m\times n}$

A^t or A' : transposed matrix (전치행렬) of A

$\iff$ $A^t=(a_{ji})_{n\times m}$: 행과 열을 바꾼 행렬.

예 (example)

<exm>

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$

<Def> $A=(a_{ij})_{n\times n}$: 대칭행렬

$\iff$ $a_{ij}=a_{ji}$

즉: 대각선을 중심으로 대칭인 행렬.

<exm>

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}$$

<Def> $A=(a_{ij})_{n\times n}$: 교대행렬

$\iff$ $a_{ij}=-a_{ji}$

<Rmk> 대각선을 중심으로 절대값는 같고 부호가 다른 행렬

대각성분 $a_{ii}=-a_{ii}$ 이므로 $a_{ii}=0$.

<exm>

$$\begin{pmatrix}0&-3\\3&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{pmatrix}$$

<문제>

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5\\3&4&6\\5&7&3\end{pmatrix}$$ 일 때 A^t (전치행렬) 를 구하시오.

1. 행열의 상등

$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{p\times q}$

$A=B$

$\Leftrightarrow$ ① $m=p$, $n=q$

② $a_{ij}=b_{ij}$

<RmK> 두 행열이 같다는 것은 모양과 대응하는 원소가 같은 경우.

<활용예>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 4 & y & 6 \\ 7 & 8 & z \end{pmatrix} \Rightarrow x=1 , y=5 , z=9$$

2. 행열의 덧셈.

행열의 덧셈은 같은 모양의 행열 끼리만 가능하다.

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}$.

$\Rightarrow$ $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

<exm> $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+1 & 3+2 \\ 4+3 & 5+4 & 6+5 \end{pmatrix}$$

<exm>

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+0 & 1+2 \\ 1+3 & 1+4 & 1+5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

분해하는 경우에도 사용함.

<문제> $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

일때 $A+B=$?

3. 행렬의 스칼라 곱.

c : 상수 , $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

$\Rightarrow \quad cA = (c\cdot a_{ij})_{m\times n}$.

<exm> $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$2\cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

이 것을 활용하면 두 행렬의 차를 정의 할수 있음.

$$A - B = A + (-1)\cdot B = (a_{ij} - b_{ij})$$

<exm> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A - B = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-1 \\ 4-3 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-2 \\ 3-4 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

<Rmk> 일반적으로

$A - B \neq B - A$.

<문제> $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A-B$ 와 $B-A$ 를 구하시오.

4. 행열의 곱.

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \qquad B=(b_{kt})_{p\times q}$$

A·B 곱이 가능할려면 $n=p$ 이어야 한다.

앞의 행렬의 열의 갯수와 뒤의 행렬의 행의 갯수가 같을 때만 행렬의 곱이 정의된다.

<Def> $A=(a_{ij})_{m\times n} \quad B=(b_{jk})_{n\times p}$

$$\Rightarrow \quad A\cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\right)_{m\times p}.$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jp} \end{pmatrix}$$

<exm> $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1\times1+2\times2+3\times3 & 1\times1+2\times0+3\times-1 \\ 0\times1+1\times2+-1\times3 & 0\times1+1\times0+-1\times-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

<문제> B·C, C·A 를 구하라.

<Rmk> $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B \neq B\cdot A.$$

<Thm> $A = (a_{ij})_{m\times n}$

$B = (b_{jk})_{n\times p}$

$C = (C_{kl})_{p\times q}$.

$\Rightarrow \quad (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ (결합법칙)

<pf> $A\cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)_{m\times p}$

$$(A\cdot B)\cdot C = \left(\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) C_{kl}\right)_{m\times q}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} C_{kl}\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} C_{kl}\right)\right)$$

$$= A\cdot(B\cdot C)$$

< Thm > $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

$B = (b_{jk})_{n\times p}$

$C = (C_{jk})_{n\times p}$

$\Rightarrow \quad A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ (배분법칙 or 분배법칙)

<pf> $B+C = (b_{jk}+C_{jk})_{m\times p}$.

$$A\cdot(B+C) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(b_{jk}+C_{jk})\right)_{m\times p}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{jk}\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{jk}\right)$$

$$= A\cdot B + A\cdot C$$

<u>exm</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

일 때 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ 임을 보이라.

<sol>

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1+4+9 & 1+0-3 \\ 0+2-3 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -16 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -16 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

<u>exm</u> 위의 예제에서 $(A^t + B) \cdot C = A^t \cdot C + B \cdot C$ 임을 보이라.

<sol>

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^t + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$