미분방정식

1705645 수학과

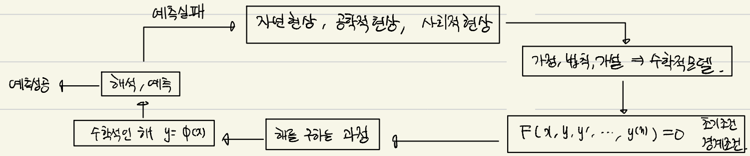
설제훈.

미분방정식

출석 20 중간 30
과제 20 기말 30

2022/3/3

*개론



* ex) - 인구문제

$y=y(t)$: 시간 t에서 국가총인구.

Δt: 시간구간

출생수 $=\alpha\, y\,\Delta t$ 사망수 $=\beta\, y\,\Delta t$ (α,β : constant)

Δt 구간에서 인구증가수 Δy ⊗인구크기는 시간크기에 비례한다.

$\Delta y=\alpha y\Delta t-\beta y\Delta t=(\alpha-\beta)y\Delta t$ put $\alpha-\beta=\gamma$

$=\gamma y\Delta t$

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta t}=\gamma y$

$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\gamma y$ 수학적모델.

1차미분이므로 상미분 수준 (1차미분 이니까 쉬움)

<Def> * 상미분 방정식 (ordinary differential equation) : 독립변수가 1개

ex) $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+y=g(x)$

* 편미분방정식 (partial differential equation) : 독립변수가 2개이상.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial y}+z=g(x,y)$

<Def> order (계수) : 종속변수의 최고차 도함수 계수

ex) $y''+ay'+y=g(x)$: 2계

$(y')^2+by=c$: 1계

$F(x,y,y',y''\cdots y^{(n)})=0$

$\Rightarrow y^{(n)}=G(x,y',y''\cdots,y^{(n-1)})$

$\Rightarrow a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}\cdots+a_{n-1}y'=\sim$

<Def> linear D.E : 종속변수와 도함수가 1차

non linear D.E : 〃 〃 1차가 아닌경우

ex) $(y')^2$ $y^3\cdots$

$a_n(x)y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$

$a_i(x)$: 계수 $a_i(x)$: 상수계수

① $g(x)=0$ ⇒ 제차 미분방정식 (homogeneous D.E)

② $g(x)\neq0$ ⇒ 비제차미분방정식 (non homogeneous D.E)

↳ 항상 ①을 구하고 ②를 구한다.

1.2. Solutions of D.E

$\{y=g(x;c_1,c_2,\cdots c_n)\mid c_1,c_2,\cdots c_n$: constants$\}$

: n-parameter ; family of curves.
↳ 곡선족.

$y=g(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$: n-th differentiable.
n번 미분한 등식 n개가 나온다.

$y'=\frac{d}{dx}g(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$

$y''=\frac{d^2}{dx^2}g(x,c_1,c_2\cdots,c_n)$

$\vdots$

$y^{(n)}=\frac{d^n}{dx^n}g(x,c_1,c_2\cdots,c_n)$

$c_1,c_2,c_3\cdots c_n$를 소거

$\psi(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$

$y^{(n)}=\chi(x,y,y'\cdots,y^{(n-1)})$

ex) $y=ce^{3x}$

$y'=3ce^{3x}$

⊗ c를소거 ; $y'=3\cdot y \Rightarrow y'-3y=0$

$3ce^{3x}-3ce^{3x}=0$

$y^2-cx=1$

$2yy'-c=0 \Rightarrow y^2-2yy'x=1$

2022/3/3

<Rmk> $y=g(x)$: sol of $\varphi(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$

$I(x,y)\neq 0$ $\quad I(x,y)\varphi(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$

0이 아니면 나눌 수 있다.

<Rmk> $a_n(x)y^{(n)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$

$y=0$: trivial solution (자명한 해),

$y\neq 0$: non trivial solution (비자명한 해) → 우리는 주로 이것을 한다.

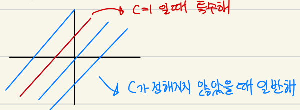
<Def> $C_1, C_2, \dots, C_n$: 독립적인 임의 상수 ⊗ linear independent 다시공부.

(1) ⇒ $y=g(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$

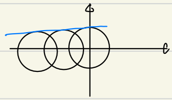
$G(x,y;c_1,c_2,\dots,c_n)=0$: General solution (일반해)

(2) $C_1,C_2,\dots,C_n$에 특정값 대입한 해 : particular solution. (특수해)

ex) $y=x+C$



(3) g.s도 p.s도 아닌 해 : 특이해 (Singular solution)



$(x-a)^2+y^2=$

2022/3/8

Recall) $G(x,c_1,c_2,c_3,\dots,c_n)=0$: g.s

$c_1,c_2,c_3,\dots,c_n$ 이 정해져있을때 : P.S

* initial value problem (초기값문제). → 특수해를 구하기 위함.

$y^n = f(x,y,y^2,\dots,y^{(n-1)})$

$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$

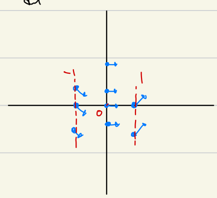
* boundary value problem (경계값문제)

$y^n+ay=0$

1계 미분방정식.

2.1. 방향장 ; direction field. 부정적분과 유사.

$\frac{dy}{dx}=2x \longrightarrow x^2+C$



$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ $\quad \frac{dx}{dy}=\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$ $\quad dx\,M(x,y)=dy\,N(x,y)$.

위의 3가지 형태는 다 같은 종류의 방정식이다.

2.1.2. 포락선과 특이해.

<Def> $H(x,y)=0$: differentiable (매끄러운 곡선)

: envelope of $G(x,y,c)=0$

⟺ (1) $\exists^{e}(x_p,y_p)$ (임의) on $H(x,y)=0$.

⇒ $\exists_1 C_p$ (유일하게 존재) : Constant.

s.t. (such that) $G(x,y,C_p)=0$ $H(x,y)=0$ 은 (x_p,y_p)에서 접한다.

Todo: 편미분해서 공부.

g.s 까지는 여기까지

p.s는 왜? → C를 구하기 위한 과정.

2022/3/8

(2) 주) k : constant, $G(x, y, k) = 0$, $H(x, y) = 0$ 은

단 하나의 점에서 접한다. (x_p, y_p)

$(x(c), y(c))$: $G(x, y, c) = 0$ $H(x, y) = 0$ 의 접점.

$\Rightarrow G(x(c), y(c), c) = 0$

c에 관하여 편미분.

$$\frac{\partial G(x(c), y(c), c)}{\partial x}\frac{dx}{dc} + \frac{\partial G(x, y, c)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dc} + \frac{\partial G(x, y, c)}{\partial c} = 0$$

$\left(f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \right)$

$\frac{\partial G(x, y, c)}{\partial c} = 0$ $G(x, y, c) = 0$ 에서 c를 소거한 것이 $H(x, y) = 0$

exm) $y' = \sqrt{y-1}$

$\Rightarrow$ g.s : $y = \frac{1}{4}(x+c)^2 + 1$ → $G(x, y, c) = 0$

$0 = \frac{1}{2}(x+c)$

exm) $yy' = -\sqrt{1-y^2}$

g.s. $(x-c)^2 + y^2 = 1$

$-2(x-c) = 0$ $\therefore x - c = 0 \Rightarrow y^2 = 1$ $y = \pm 1$

exm) $y' = ay$

$\Rightarrow$ g.s $y = ce^{ax}$

$0 = ace^{ax}$ $e^{ax} = 0 \Rightarrow$ 모순

└ 포락선이 존재하지 않는다.

2.2. Seperatable form (변수분리형)

$\frac{dy}{dx} + \frac{M(x)}{N(y)} = 0$ $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

$N(y)dy + M(x)dx = 0$ $f(x)dx = g(y)dy$

$\int N(y)dy + \int M(x)dx = 0.$ $\int f(x)dx = \int g(y)dy.$

exm) (1) $\frac{dy}{dx} = ay$

$\frac{1}{y}dy = a\,dx \rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int a\,dx$

$\ln y = ax + c$

$y = e^{ax+c} \rightarrow y = e^c e^{ax} = c_1 e^{ax}$

(2) $y = c_1 e^{ax}$: g.s

$y(x_0) = y_0 = c_1 e^{ax_0}$ $c_1 = y_0 e^{-ax_0}$

$y = y_0 e^{a(x-x_0)}$: p.s

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y(x_0) = y_0 \neq 0$

$\int y\,dy = -\int x\,dx + c$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$

$\frac{1}{2}(x^2+y^2) = c$ $x^2+y^2 = 2c_1$

$(x_0^2 + y_0^2)^2 = c_1$

exm) $(1+x)y + (1-y)x\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{y}{1-y} + \frac{x}{1+x}\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{x}{1+x}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}\cdot\frac{1+x}{x}$

$dy\cdot\frac{y-1}{y} = \frac{1+x}{x}dx$

$\int(1-\frac{1}{y})dy = \int(1+\frac{1}{x})dx$

$y - \ln y = x + \ln x$

$y - x = \ln xy + c$

$xy = e^{y-x}\cdot c_1$

exm) $\frac{dy}{dx} = a(1-\frac{y}{k})y$

$\int \frac{dy}{(1-\frac{y}{k})y} = \int a\,dx$

$\int \frac{k}{(k-y)y}dy = \int a\,dx$

$k\left(\int \frac{1}{k-y}dy + \int\frac{1}{y}dy\right) = a\,dx$

— 변수분리형으로 변형되는 경우 —

1. $dy = f(px+qy+r)dx$ → 여기서 r은 상수?

put $px+qy+r = t$

diff x $p + q\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{q}\left(\frac{dt}{dx} - p\right)$

$\frac{dy}{dx} = f(t)$

$x\left(\frac{dy}{dx}+1\right) + \tan(x+y) = 0$

put $x+y = t \rightarrow x\left(\frac{dy}{dx}+1\right) + \tan t = 0$

diff x $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$x\cdot\frac{dt}{dx} + \tan t = 0$

$x\frac{dt}{dx} = -\tan t$ $\frac{dx}{x\,dt} = -\frac{1}{\tan t}$

Q $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ 도 동차형?

$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = aB - bA$ 맞나?

맞음 (행렬식)

$x = X + x_0$ 미분

$dx = dX$ 돼?

$$\frac{dy}{dx} = (2x+y)^2 - 1$$

put $t = 2x + y$

$$\frac{dt}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} - 2 = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} - 2 = t^2 + 1$$

2. 동차형.

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

ex) $x^2 + xy + y^2$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

put $\frac{y}{x} = t \rightarrow y = xt$

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$$

$$t + x\frac{dt}{dx} = f(t)$$

$x\frac{dt}{dx} = f(t) - t$; 변수분리형.

$$\int \frac{1}{f(t) - t}\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$

exm) $(x^2 + y^2) - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$

$$\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) - 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = 0$$

put $\frac{y}{x} = t \quad y = xt$

$$\frac{dy}{dt} = t + x\frac{dt}{dx}$$

$$(1 + t^2) - 2t\left(t + x\frac{dt}{dx}\right) = 0$$

$$(1 - t^2) - 2tx\frac{dt}{dx} = 0$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-2t}{1-t^2}\,dt = C.$$

$$\ln x + \ln(1 - t^2) = C$$

$$\ln x(1 - t^2) = C \rightarrow x(1 - t^2) = e^C = C_1$$

$x^2 - y^2 = C_1 x \quad \therefore$ g.s

exm) $xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

put $\frac{y}{x} = t \quad y = xt$

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$$

$$\cancel{t} + x \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} + \cancel{t}$$

$$\int e^t\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$

$$e^t = \ln x + C$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \ln x + C$$

- 동차형으로 변형되는 케이스.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + C}{Ax + By + C}\right)$$

① $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$ 교점이 존재한다.

$$\left.\begin{aligned} ax + by + C &= 0 \\ Ax + By + C &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{교점 } (x_0, y_0)$$

put $x = X + x_0 \qquad y = Y + y_0$

$dx = dX \qquad dy = dY.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

$$a(X + x_0) + b(Y + y_0) + C = 0$$

$$= aX + bY + (ax_0 + by_0 + C) = aX + bY.$$

$$A(X + x_0) + B(Y + y_0) + C = AX + BY$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{AX + BY}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{Y}{X}}{A + B\frac{Y}{X}}\right)$$

put $\frac{Y}{X} = t \quad Y = Xt$, X에 대하여 미분.

$$\frac{dY}{dX} = t + X\frac{dt}{dX}$$

$t + X\frac{dt}{dX} = f\left(\frac{a + bt}{A + Bt}\right) \rightarrow$ 동차형.

Todo. 변수분리형, 동차형, 동차형변형 ① ② 각각 3개씩 풀어보기.

감마, 베타함수 알아보기.

exm) $(6x-2y-3)\,dx + (-2x-2y+1)\,dy = 0$

$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12-(-4) = -8 \neq 0$

$6x-2y-3=0$

$-2x-2y+1=0$

$8x = 4 \quad x=\frac{1}{2} \quad y=0$

$x = X+\frac{1}{2} \quad y = Y+0$ 이 과정 맞음?

$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} \qquad \frac{dx}{dX} = 1 \quad \frac{dy}{dY} = 1$

$(6X-2Y)\,dX + (-2X-2Y)\,dY = 0$

$(3X-Y)\,dX + (-X-Y)\,dY = 0$

$\left(3-\frac{Y}{X}\right)dX = \left(1+\frac{Y}{X}\right)dY$

$\frac{Y}{X} = t \quad Y = Xt \quad \frac{dY}{dX} = t + \frac{dt}{dX}\cdot X$

$\frac{3-t}{1+t} = t + X\frac{dt}{dX}$

② $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0 \quad$ put $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = k.$

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(AX+BY)+C}{AX+BY+C}\right)$

put $AX+BY = t$

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{kt+C}{t+C}\right) \to f(t)$ 형태이다.

$A + B\frac{dY}{dX} = \frac{dt}{dX}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{B}\left(\frac{dt}{dx} - A\right)$

$\frac{1}{B}\left(\frac{dt}{dx} - A\right) = f\left(\frac{kt+C}{t+C}\right)$

정리 ; $\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x = X+x_0 \quad y = Y+y_0$

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ 교점 $\Rightarrow$ 동차형 $\Rightarrow$ 변수분리형.

$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = k$

$\Rightarrow$ 변수분리형.

exm) $(x-y+3) - (2x-2y+5)\frac{dy}{dx} = 0$

$x-y = t \quad 1-\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \frac{dy}{dx} = 1-\frac{dt}{dx}$

$(t+3) - (2t+5)\left(1-\frac{dt}{dx}\right) = 0$

$(t+3) - (2t+5) + (2t+5)\frac{dt}{dx} = 0.$

$-(t+2) + (2t+5)\frac{dt}{dx} = 0$

$-\int dx + \int \frac{2t+5}{t+2}\,dt = C.$

$-x + \int 2+\frac{1}{t+2}\,dt = C$

$-x + 2t + \ln(t+2) = C.$

$-x + 2(x-y) + \ln(x-y+2) = C.$

(Report 문제)

(1) $(x-2y+5)\,dx + (2x-y+4)\,dy = 0$

(2) $(2x-y+2)\,dx + (4x-2y-1)\,dy = 0$

(3) $(4x+3y-4)\,dx + (3x-7y-3)\,dy = 0$

(4) $(2x+y)\,dx - (4x+2y-1)\,dy = 0$

— 변수변환으로 해결가능한 경우.

(1) $f(x^2, y^2)\,x\,dx + g(x^2, y^2)\,y\,dy = 0$

put $u = x^2 \quad v = y^2$

$du = 2x\,dx \quad dv = 2y\,dy$ 대입.

$f(u,v)\,\frac{1}{2}du + g(u,v)\,\frac{1}{2}dv.$

; 동차형으로 변형가능. $\longrightarrow$ 변수분리형.

※ 전미분 공부해오기.

exm) $(2x^2+3y^2-7)x\,dx - (3x^2+2y^2-8)y\,dy = 0$

$x^2 = p \qquad y^2 = q$

$2x\,dx = dp \qquad 2y\,dy = dq$.

$(2p+3q-7)\cancel{\frac{1}{2}}dp - (3p+2q-8)\cancel{\frac{1}{2}}dq = 0$

$2p+3q-7 - (3p+2q-8)\frac{dq}{dp} = 0$.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-9 \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} 2p+3q-7=0 \\ 3p+2q-8=0 \end{array}\right\}$ 교점 : $(1, 2)$

put $p = P+1 \qquad q = Q+2$.

$(2P+3Q) - (3P+2Q)\frac{dP}{dQ} = 0$.

$(2+3t) - (3+t)(t+Q\frac{dt}{dQ}) = 0$.

⋮ 이하생략.

답 : $(x^2-y^2-1)^5 = c(x^2+y^2-3)$