Contingencia e información en la explicación del comportamiento[1]

Día 1. Teoría de la información

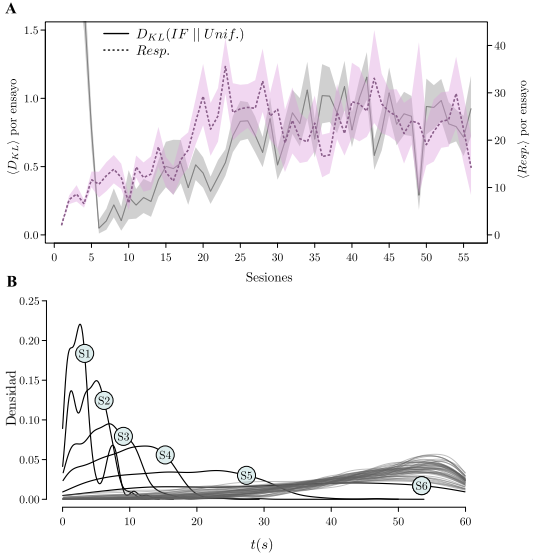
Emmanuel Alcalá

[1]Ciclo de charlas auspiciado por la Universidad panamericana, campus Guadalajara y Universidad de Guadalajara-CEIC, con financiamiento CONACyT-320943

Temas

1. Preliminares
2. Información y entropía

Motivación


A
$D_{KL}(IF \,||\, Unif.)$
$Resp.$
$\langle D_{KL} \rangle$ por ensayo
$\langle Resp. \rangle$ por ensayo
Sesiones
B
Densidad
S1
S2
S3
S4
S5
S6
$t(s)$

Funciones

Las funciones tienen datos de entrada y datos de salida. Entre la entrada y la salida existe una transformación, que es lo que llamamos "función". La función $f(x) = y$ se denota por

$$f : X \mapsto Y$$

la función f mapea valores de X (input) a Y (output)

Funciones

Las funciones tienen datos de entrada y datos de salida. Entre la entrada y la salida existe una transformación, que es lo que llamamos "función". La función $f(x) = y$ se denota por

$$f : X \mapsto Y$$

la función f mapea valores de X (input) a Y (output)

Por ejemplo, la función $y = 5x + 2$ nos dice que por cada valor de x, y valdrá 5 veces x más 2. Si $x = (1, 2, 3)$, la función transforma a x en la colección de valores

$$y = (1 * 5 + 2, 2 * 5 + 2, 3 * 5 + 2)$$

Operador Σ

Σ - Suma de i elementos hasta n, donde i el índice de sumación

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Donde m es el límite inferior de la suma, y n el límite superior de la suma.

Operador Σ

Σ - Suma de i elementos hasta n, donde i el índice de sumación

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Donde m es el límite inferior de la suma, y n el límite superior de la suma.
Ejemplo: sumar los valores de x del 1 al 4

$$x = \{1_{[1]}, 8_{[2]}, 3_{[3]}, 5_{[4]}\}$$

$$\sum_{i=2}^{4} = 8 + 3 + 5 = 10$$

En corchete coloco *el orden* (el índice) del elemento

Conjuntos (brevísima)

Un conjunto es una colección de distintos objetos. A es un subconjunto de B si todo elemento de A es también incluido en B, que se simboliza como $A \subset B$.

- El conjunto vacío, denotado $\emptyset$, es el conjunto que no contiene nada.
- Denotamos por $|S|$ a la cardinalidad (maomeno *el número de sus elementos*) de S. Por ejemplo, $|\emptyset| = 0$.
- $x \in A$ es "x es un miembro del conjunto A". En probabilidad, los eventos se tratan como conjuntos de valores. Si lanzas una moneda 10 veces, el evento "veces que cae águila" es un conjunto de valores.

Probabilidad

Si todos los resultados son igualmente posibles, la probabilidad de A

$$\Pr_{\text{naïve}}(A) = \frac{\text{veces que sale } A}{\text{total de resultados (i.e., } A \cup A^c)} = \frac{|A|}{|S|}$$

Donde por $|\cdot|$ entendemos la *cardinalidad*, o el número de elementos.

Probabilidad

Si todos los resultados son igualmente posibles, la probabilidad de A

$$\Pr_{\text{naïve}}(A) = \frac{\text{veces que sale } A}{\text{total de resultados (i.e., } A \cup A^c)} = \frac{|A|}{|S|}$$

Donde por $|\cdot|$ entendemos la *cardinalidad*, o el número de elementos.
Existen diferentes interpretaciones de la probabilidad. La más usada, la frecuentista, la define formalmente como el valor límite de $\Pr(A)$ cuando $|S|$ tiende a infinito.

Probabilidad

Si todos los resultados son igualmente posibles, la probabilidad de A

$$\Pr_{\text{naïve}}(A) = \frac{\text{veces que sale } A}{\text{total de resultados (i.e., } A \cup A^c)} = \frac{|A|}{|S|}$$

Donde por $|\cdot|$ entendemos la *cardinalidad*, o el número de elementos.
Existen diferentes interpretaciones de la probabilidad. La más usada, la frecuentista, la define formalmente como el valor límite de $\Pr(A)$ cuando $|S|$ tiende a infinito.
Por ejemplo, la probabilidad de obtener caras al lanzar una moneda es el límite de

$$\Pr(caras) = \frac{\#caras}{N}$$

cuando el número de lanzamientos $N \to \infty$.

Variables y espacios:

Variable aleatoria: es una función que mapea los resultados de un experimento aleatorio al conjunto de los números reales. Se suele representar con letra mayúscula (e.g., X). Existen variables aleatorias discretas (sus valores son finitos o infinitos contables, como $(0, 1, 2, ...)$), y continuas (sus valores son infinitos no contables).

Variables y espacios:

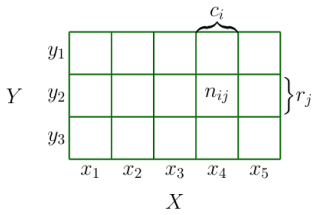
Variable aleatoria: es una función que mapea los resultados de un experimento aleatorio al conjunto de los números reales. Se suele representar con letra mayúscula (e.g., X). Existen variables aleatorias discretas (sus valores son finitos o infinitos contables, como $(0, 1, 2, ...)$), y continuas (sus valores son infinitos no contables).
Espacio muestral: El conjunto de todos los resultados posibles. Se suele representar con Ω. De este conjunto la X mapea a los reales: $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Es decir, le asigna a cada elemento de Ω asigna un número real.

Variables y espacios:

Variable aleatoria: es una función que mapea los resultados de un experimento aleatorio al conjunto de los números reales. Se suele representar con letra mayúscula (e.g., X). Existen variables aleatorias discretas (sus valores son finitos o infinitos contables, como $(0, 1, 2, ...)$), y continuas (sus valores son infinitos no contables).
Espacio muestral: El conjunto de todos los resultados posibles. Se suele representar con Ω. De este conjunto la X mapea a los reales: $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Es decir, le asigna a cada elemento de Ω asigna un número real.
Evento: Subconjunto de Ω, usualmente representado por una vocal mayúscula, e.g., A. Si lanzamos una moneda dos veces, $\Omega = \{HH, HT, TT, TH\}$. El evento "la primera moneda cae H'' es $A = \{HH, HT\}$.
Distribución de probabilidad: función que asigna a cada valor de X un valor entre 0 y 1. Nos dice qué tan frecuentemente encontraremos un valor de X.

Algunas propiedades de $\Pr$ son:

1. $0 \leq \Pr(A) \leq 1$ y $\sum \Pr(A) = 1$
2. Si $\emptyset$ es un conjunto nulo, entonces $\Pr(\emptyset) = 0$.
3. Si $A \subset B$, entonces $\Pr(A) \leq \Pr(B)$.
4. Si A^c denota el complemento de A, entonces $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$.
5. Si $A \cap B = \emptyset$ denota la intersección nula de A y B, entonces $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$, $\Pr$ es aditiva para eventos disjuntos.
6. De otra manera, para eventos arbitrarios A, B, $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$.
7. Dos eventos A y B son independientes si $\Pr(A \cup B) = \Pr(A)\Pr(B)$.



Reglas

1. $p(x_2, y_1) = \frac{n_{21}}{N}$ (probabilidad conjunta de x_2 y y_1).
2. $c_i = \sum_{j=1}^{3} n_{ij}$ (suma de todos los n_{ij} con i fijo).
3. $p(x_i) = \frac{c_i}{N} = \sum_{j=1}^{5} p(x_i, y_j)$ (probabilidad marginal de x_i; **regla de la suma**).
4. $p(y_j|x_i) = \frac{n_{ij}}{c_i}$ (probabilidad condicional de y_j *dado* que x_i ocurrió).
5. $p(x_i, y_i) = \frac{n_{ij}}{N} = \frac{n_{ij}}{c_i}\frac{c_i}{N} = p(y_j|x_i)p(x_i)$ (**regla del producto**)

Operador esperanza $\mathrm{E}[X]$

Valor esperado - (a.k.a. *media*, *esperanza*, o *promedio*) es una suma ponderada de los posibles resultados de nuestra variable aleatoria. Matemáticamente, si $x_1, x_2, x_3, ...$ son todas distintos posibles valores que X puede tomar, el valor esperado de X es

$$\mathrm{E}[X] = \sum_i x_i p(X = x_i), \text{ si } x \text{ es discreta}$$

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx, \text{ si } x \text{ es continua}$$

La multiplicación $x_i p(X = x_i)$ es el valor de x_i por la probabilidad de que x_i ocurra. Por brevedad, podemos simplemente escribir $p(x_i)$ para el caso discreto. Para el caso continuo, $f(x)$ denota la función de densidad de probabilidad.

Si tenemos n datos, todos con la misma probabilidad de ser tomados por X, entonces la esperanza es simplemente la media aritmética:

$$\mathsf{E}[X] = \frac{1}{n} \sum_i x_i$$

Con $p(x_1) = p(x_2) = ... = p(x_n) = 1/n$. Por ejemplo, si $X = (1, 5, 9, 10)$, todos con probabilidad $p(x) = 1/4$,

$$\mathsf{E}[X] = \frac{1}{n} \sum_i x_i = \frac{1}{4} \times (1 + 5 + 9 + 10)$$

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos solo están definidos para los números reales

$$\log_b(x) = a, \forall x \in \mathbb{R} > 0$$

Que se lee "para todos los x del conjunto $\mathbb{R}$ mayores que 0".
Un logaritmo se puede definir como el valor al que hay que elevar la base b para obtener x.

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos solo están definidos para los números reales

$$\log_b(x) = a, \forall x \in \mathbb{R} > 0$$

Que se lee "para todos los x del conjunto $\mathbb{R}$ mayores que 0".
Un logaritmo se puede definir como el valor al que hay que elevar la base b para obtener x.
Por ejemplo, $\log_2(16) = 4$ ('4 es el logaritmo base 2 de 16'). Por lo tanto, para obtener 16 de nuevo elevamos 2 a la cuarta, $2^4 = 16$.

Propiedad 1 $log_b(x \times y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

En palabras, esto significa que el logaritmo base b del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de esos números.

Propiedad 2 $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$

Esta propiedad es simplemente la operación inversa de la **Propiedad 1**. Esta propiedad permite expresar las razones (o proporciones) en términos de diferencias.

Si, por ejemplo, $x > y$, el rango de valores que puede tomar x/y va desde 1 a infinito. Por otro lado, si $x \leq y$, el rango de valores está entre 0 y 1. Las razones no son funciones simétricas.

Los logaritmos sí. Si $x > y$, $\log_b(x/y) > 1$, si $x < y$, $\log_b(x/y) < 0$. Si $x = y$, $\log_b(x/y) = 0$. El último resultado implica que $\log_b(1) = 0$

Propiedad 3 $\log_b(x^a) = a \log_b(x)$

Esto se sigue de la **Propiedad 1**. Supongamos que $a = 3$, entonces $\log_b(x^a) = \log_b(x^3) = \log_b(x \times x \times x)$, lo que es lo mismo a escribir $\log_b(x) + \log_b(x) + \log_b(x)$, y dado que $\log_b(x)$ se repite 3 veces, la expresión $\log_b(x) + \log_b(x) + \log_b(x)$ es igual a $3 \log_b(x)$.

Propiedad 4 Si $x < y$, $\log_b(x) < \log_b(y)$.

En palabras, esto significa que el $\log_b(x)$ es una función monotónica y estrictamente creciente de x: si x crece, $\log_b(x)$ también crece.

Interludio: ejercicios

1. Suponiendo que lanzar dos veces una moneda *justa* son eventos independientes, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos caras? Es decir, $p(x_1 = cara \cap x_2 = cara)$. Hint: la probabilidad de una sola cara es $p(cara) = 1/2$.
2.

Y \ X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	0.01	0.02	0.03	0.1	0.1
y_2	0.05	0.1	0.05	0.07	0.2
y_3	0.1	0.05	0.03	0.05	0.04

   - ¿Cuál es la probabilidad $p(y_1, x_1)$?
   - ¿Cuál es la probabilidad $p(y_1)$?
   - ¿Cuál es la probabilidad $p(x_1|y_1)$?

Información y entropía

Podemos hablar de la información en un sentido instrumental (como una unidad de comunicación), o como *algo* que permite a un remitente o transmisor provocar un resultado en un receptor.

El problema es que no siempre se desambiguan estos dos usos, lo cual ha llevado a un abuso del concepto.

Información y entropía

Podemos hablar de la información en un sentido instrumental (como una unidad de comunicación), o como *algo* que permite a un remitente o transmisor provocar un resultado en un receptor.

El problema es que no siempre se desambiguan estos dos usos, lo cual ha llevado a un abuso del concepto.

Se describirá primero la teoría matemática de la información, que descansa sobre el primer uso (la información como un *estadístico*). En la siguiente charla se hablará sobre cómo ha sido usada para formalizar una noción de contingencia como dependencia.

- La teoría de la información moderna tiene sus orígenes en *A Mathematical Theory of Comunication*, de Claude Shannon en 1948.

- La teoría de la información moderna tiene sus orígenes en *A Mathematical Theory of Comunication*, de Claude Shannon en 1948.
- En ella mostró que cualquier señal puede ser codificada como una serie de símbolos discretos y transmitidos con perfecta fidelidad entre transmisor y receptor a través de un canal, incluso si el canal es ruidoso.

- La teoría de la información moderna tiene sus orígenes en *A Mathematical Theory of Comunication*, de Claude Shannon en 1948.
- En ella mostró que cualquier señal puede ser codificada como una serie de símbolos discretos y transmitidos con perfecta fidelidad entre transmisor y receptor a través de un canal, incluso si el canal es ruidoso.
- A la teoría no le importaba el *significado* de lo transmitido.

Usualmente, por *información* nos referimos coloquialmente a la cantidad de datos que son guardados, enviados, recibidos o manipulados por algún medio.

Usualmente, por *información* nos referimos coloquialmente a la cantidad de datos que son guardados, enviados, recibidos o manipulados por algún medio.

Otra forma de concebir la información es como reducción de incertidumbre.

Usualmente, por *información* nos referimos coloquialmente a la cantidad de datos que son guardados, enviados, recibidos o manipulados por algún medio.

Otra forma de concebir la información es como reducción de incertidumbre.

Por ejemplo, antes de leer un libro su contenido es desconocido. En ese sentido, nuestra incertidumbre es alta. La primera vez que lo leemos, esa incertidumbre con respecto al contenido disminuye y, al mismo tiempo, podríamos decir que una gran cantidad de información fue transmitida (menos que en una segunda lectura).

Contenido de información

La noción de información que necesitamos debe tener dos propiedades deseables:

- **La información debe ser extensiva y aditiva**. La combinación de dos conjuntos de información con la misma cantidad duplican la información.

Contenido de información

La noción de información que necesitamos debe tener dos propiedades deseables:

- **La información debe ser extensiva y aditiva**. La combinación de dos conjuntos de información con la misma cantidad duplican la información.
- **La información reduce la incertidumbre**. La cantidad de información es una función monotónica estrictamente decreciente de la incertidumbre de un evento. Cuanto más probable es un evento, menos información conlleva; cuanto menos probable, más información conlleva.

Contenido de información

La noción de información que necesitamos debe tener dos propiedades deseables:

- **La información debe ser extensiva y aditiva**. La combinación de dos conjuntos de información con la misma cantidad duplican la información.
- **La información reduce la incertidumbre**. La cantidad de información es una función monotónica estrictamente decreciente de la incertidumbre de un evento. Cuanto más probable es un evento, menos información conlleva; cuanto menos probable, más información conlleva.

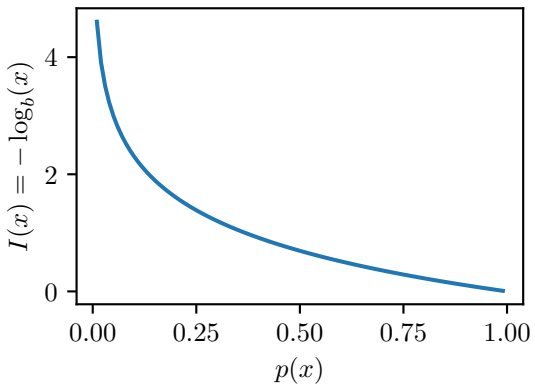
Contenido de información

La noción de información que necesitamos debe tener dos propiedades deseables:

- **La información debe ser extensiva y aditiva**. La combinación de dos conjuntos de información con la misma cantidad duplican la información.
- **La información reduce la incertidumbre**. La cantidad de información es una función monotónica estrictamente decreciente de la incertidumbre de un evento. Cuanto más probable es un evento, menos información conlleva; cuanto menos probable, más información conlleva.

La única función que satisface esos dos requerimientos es

$$I(x) = -\log_b(p(x)) = \log_b \frac{1}{p(x)}$$


4
2
0
$I(x) = -\log_b(x)$
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
$p(x)$

Sistema de comunicación

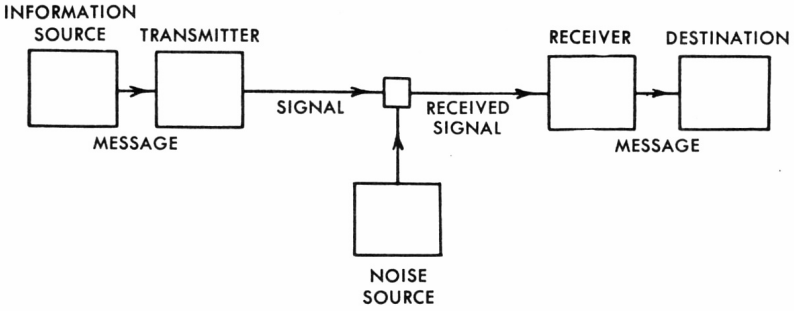


Fig. 1. — Schematic diagram of a general communication system.

Su la fuente quiere transmitir un mensaje con n caracteres, la incertidumbre acerca de los posibles 'mensajes' (es decir, de los caracteres, su orden, etc.) es un promedio de la información de cada uno de los n caracteres. A esta cantidad se le llamó entropía

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i I(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_b \frac{1}{p_i}$$

Donde n son los posibles mensajes (cada caracter en su posición i), y p_i es la probabilidad del i mensaje.

Notar que la ecuación para $H(x)$ tiene la misma estructura que nuestro viejo amigo $E[X] = \sum_i p_i x_i$, es por ello que $H(x)$ se suele describir como *la incertidumbre promedio* asociada a un mensaje.

En el diagrama de Shannon, debe existir un transmisor que *codifique* el mensaje en términos de fluctuaciones de una cantidad física (e.g., eléctrica) y que se envíe de una fuente a un receptor.

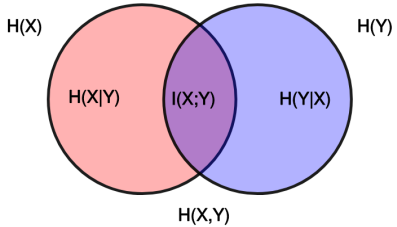
En el diagrama de Shannon, debe existir un transmisor que *codifique* el mensaje en términos de fluctuaciones de una cantidad física (e.g., eléctrica) y que se envíe de una fuente a un receptor.

Esta es una de las partes más discutidas en, por ejemplo, neurociencias cognitivas. Se hace uso extensivo de teoría de la información para describir las capacidades computacionales del cerebro, pero se ha fallado en encontrar un *código* que haría de esa descripción formal adecuada según Shannon.

¿Cuánta información de la fuente es transmitida? A esta cantidad Shannon le llamó *información mutua*.

¿Cuánta información de la fuente es transmitida? A esta cantidad Shannon le llamó *información mutua*.

Pensémoslo así: antes de recibir un mensaje se tiene una entropía, y luego de recibir el mensaje se tiene otra. A la diferencia es a lo que le llamamos información mutua.



Si X es el mensaje de la fuente, y Y el del receptor, ¿cuánta incertidumbre se reduce de X al conocer Y?

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

En donde $H(X|Y)$ es la *entropía condicional* de X dado Y. Esta entropía mide la incertidumbre promedio que queda sobre X una vez que Y es conocido.

$$H(X|Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log_b \frac{1}{p(x,y)}$$

Si X y Y son independientes, la entropía condicional de X dado Y es la entropía de X, dado que Y no conlleva información sobre X al ser independiente. Por lo tanto, $I(X;Y) = 0$. Esto debido a que $H(X|Y)$ es la entropía de $p(x|y)$.

La información mutua nos puede decir, entonces, relaciones de dependencia entre dos distribuciones.

Importante: a diferencia de otras métricas de dependencia, como la correlación, permite conocer relaciones de dependencia *no lineal*.