



# Tarea Examen Jesús Urrutia - Jesus Alberto Urrutia Camacho (urcajeal@gmail.com)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS

ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Diseño de Experimentos

Tarea 4

Ciudad de México  
8 de junio de 2021



Cabe destacar que el anterior resultado se compara con un  $t$  teórica. Dado que el cuantil que se busca es  $t_{\alpha/2, n-p-1} = t_{0.025, 51-3-1}$

```
t95 <- qt(0.975, 47)
t95
```

```
## [1] 2.011741
```

Ahora, se contrastan la hipótesis nula con la siguiente expresión:  $|t_o| > t_{\alpha/2, n-p-1}$ .

```
tfinal > t95
```

```
## [1] FALSE    NA  TRUE  TRUE
```

Dado lo anterior, es posible rechazar la hipótesis nula para  $\beta_{ZC_i}$  y para  $\beta_{ZA_i}$  al 95 % de confianza. Es decir, las variables ZC y ZA sí tienen una relación lineal con la respuesta.

Finalmente, si se realiza la pregunta “¿Y si se usa el nivel de significancia del 10 %?”.

```
t90 <- qt(0.95, 47)
tfinal > t90
```

```
## [1] FALSE    NA  TRUE  TRUE
```

Luego de realizar el cálculo, es posible sostener que las mismas variables que son significativas ,continúan siendolo al 90 % de confianza.

B. Construya un intervalo del 95 % de confianza para  $\beta_2$  (ZC) y otro para  $\beta_3$ (ZA).

Tal como afirma Juarez (2021), “al buscar acotar a alguno de los coeficientes de la regresión en particular, se hablará de intervalor de confianza, sin embargo, al buscar acotar al vector de parámetros  $\beta$  se hablará de regresiones de confianza”. Por tal razón, se procede a contruir Intervalos para  $\beta_2$  (ZC) y otro para  $\beta_3$ (ZA) de forma individual.

Un intervalo de  $(1 - \alpha)100$  de confianza para  $\beta_j$  tiene la forma de

$$\hat{\beta}_j \pm t_{\alpha/2, n-p-1} \sqrt{\hat{\sigma}^2 A_j}$$

.

Entonces,

```
ZC <- betas[3]
ZA <- betas[4]
ZC * c(1, -1) * t95 * cociente[4]
```

```
## [1] 0.5689009 -0.5689009
```

```
0.14^2
```

```
## [1] 0.0196
```

Con  $p^t = p + 1$ . Donde  $p$  es igual al número de variables independientes.

## 2. Para un conjunto de empresas pertenecientes a cierto sector económico se ha ajustado la siguiente función de producción:

Para que el modelo sea lineal, se toma el logaritmo obteniendo el siguiente modelo transformado

A. Realice las pruebas de hipótesis individuales para determinar la significancia de  $\beta_1$  y  $\beta_2$  la prueba de significancia conjunta.

B. La estimación de los modelos de regresión lineal simple de  $\ln(Q)$  en función de  $\ln(L)$  y de  $\ln(Q)$  en función de  $\ln(K)$  produjo los siguientes resultados.

Realice las pruebas de hipótesis para evaluar la significancia de en cada uno de los modelos. Explique la aparente contradicción entre los resultados obtenidos del inciso A) y con los obtenidos en este inciso.

3. Utilizando el estadístico de Mallows como referencia, seleccione que modelo(s) es (son) el (los) mejor para predecir el puntaje de un estudiante en un examen. Suponga que un profesor quisiera utilizar las horas de estudio, exámenes de prueba tomados y el actual promedio como variables para predecir el puntaje que obtendrá un estudiante en un examen. El profesor realiza el ajuste con siete distintos modelos y obtiene el coeficiente de Mallows para cada uno.

El estadístico de Mallows depende de la cantidad de independientes, donde su esperanza es igual al número de parámetros. Es decir :

$$C_p = \frac{SSE}{\sigma^2} - (n - 2p)$$

Con esperanza  $E(C_p) \approx p$ . Por lo que se esperaría que el modelo que mejor ajuste tenga un  $C_p$  con valor similar al número de variables independientes.

**Cuadro 1:** Comparación modelos con  $C_p$  de Mallows

Variables	Pmás1	P	$C_p$ _Mallows	Mejor
Horas			45.5	7
Exámenes de prueba	2	1	31.4	6
PRomedio			29.3	5
Horas y examanes de prueba			3.4	4
Horas y promedio	3	2	2.9	2
Exámenes de prueba y promedio			2.7	1
Las tres juntas	4	3	4.0	3

Por lo tanto, se posible afirmar que el mejor subconjunto de variables que ajustan el modelo es cuando están las variables “Exámenes de prueba y promedio” en conjunto, ya que tienen un  $C_p = 2.7$ , y el valor de  $P = 2$ . En segundo lugar, las varibales “Horas y promedio” (  $P = 2$ ) son el segundo mejor subconjunto, con  $C_p = 2.9$ . En tercer lugar, las tres variables juntas se llevan el tercer lugar. En contraste, el modelo exclusivamente que tiene la variables “Horas” es el que más variación tendría, es decir el de peor desempeño. Además, la colmna “mejor” indica qué modelo es el que mejor ajusta en función del estadístico de Mallows.

Finalmente, cabe destacar que se busca “predecir el puntaje de un estudiante”, para lo cuál el estadístico de Mallows no es la mejor herramienta. Ya que el  $C_p$  es una medida de sesgos y variación de las las betas del modelo. Si bien esto permitirá evaluar el modelo, se sugiere complementar con pruebas de hipótesis, para poder predecir mejor, y también con la suma de cuadrados de errores predichos (PRESS).

#### 4. Considere el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + e_i$$

$$ConVAR(e_i) = \frac{\sigma^2}{z_i}$$

A. ¿Qué hipótesis del modelo de regresión lineal múltiple viola este modelo?

Este modelo viola en principio de homocedasticidad, el cuál afirma que los errores tienen varianza constante, en los modelos de regresión. Esta violación se puede deber a que hay problemas de especificación, de muestreo o propios del fenómeno a tratar. Cabe recordar que los coeficientes de regresión continúen siendo insesgados, por el método de mínimos cuadrados ordinarios (OLS, por sus siglas en Inglés). Pero no son los mejores, pues su varianza no es la mínima.

B. ¿Qué expresión tendría el modelo ponderado que corrige este modelo?

Una forma de corregir el anterior problema es al aplicar el método de mínimos cuadrados *generalizados* (GLS). El cuál aplica una “transformación al modelo original para que se cumpla el supuesto de homocedasticidad y encontrar los mejores estimadores” (Juarez, 2021). Entonces, se parte de la ecuación inicial:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + e_i$$

Dado que se conocen las varianza heterocedástica, la cuál es:  $VAR(e_i) = \frac{\sigma^2}{z_i}$ . Es posible, multiplicar el modelo por  $\frac{z_i}{\sigma^2}$ . Lo que generaría la siguiente expresión:

$$Y_i \frac{z_i}{\sigma^2} = \beta_0 \frac{z_i}{\sigma^2} + \beta_1 X_{1i} \frac{z_i}{\sigma^2} + \beta_2 X_{2i} \frac{z_i}{\sigma^2} + e_i \frac{z_i}{\sigma^2}$$

De esta forma,

$$VAR(e_i) = \frac{\sigma^2}{z_i}$$

Y al aplicar la transformación:

$$VAR(e_i^*) = \frac{\sigma^2}{z_i} \frac{z_i}{\sigma^2} = 1$$

. Lo cuál cumple con los supuestos para los mejores estimadores, según el Teorema de Gauss-Markov, pues los errores tendrían varianza constante.

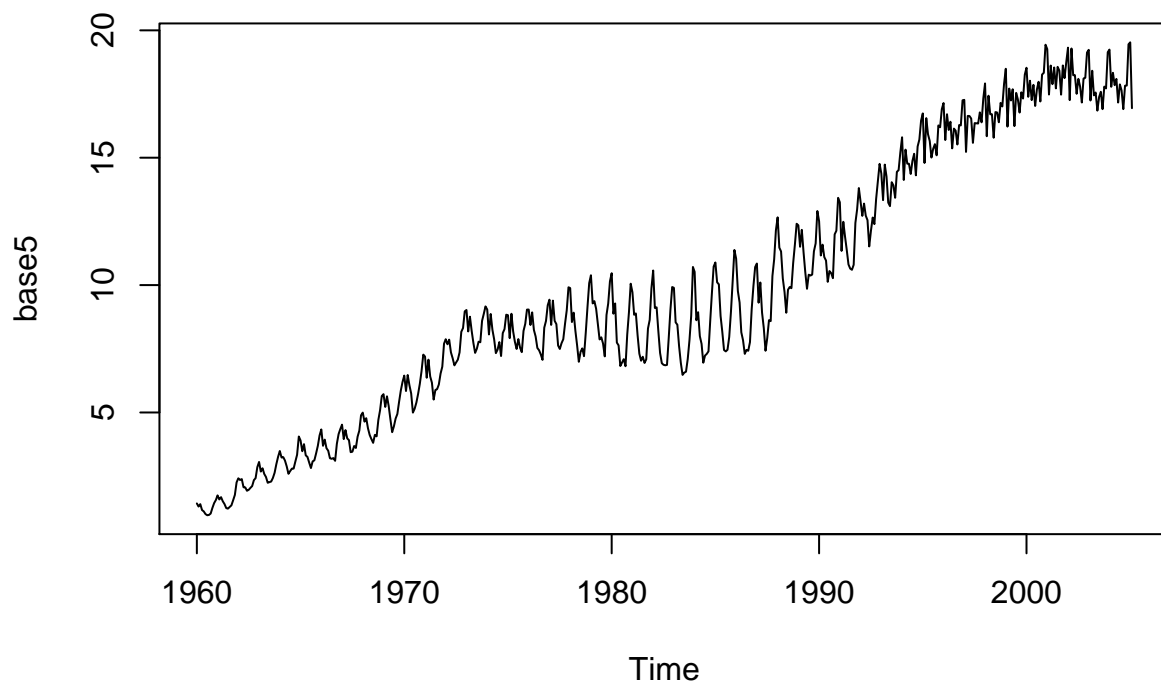
C. Compruebe que el modelo ponderado del inciso anterior es heterocedástico.

Dado que se busca minimizar la función de los errores:

$$\sum_{i=1}^n (\epsilon_i^*)^2 = \sum [Y_i \frac{z_i}{\sigma^2} - \beta_0 \frac{z_i}{\sigma^2} - \beta_1 X_{1i} \frac{z_i}{\sigma^2} - \beta_2 X_{2i} \frac{z_i}{\sigma^2}]^2$$

#### 5. Utilizando el conjunto de datos cangas del paquete expsmooth responda: ¿por qué la transformación de Box-Cox no es de verdadera ayuda?

La base de datos describe una serie de tiempo desde 1960 hasta el año 2005. Se puede percibir que conforme pasan los años, el valor de la variable también aumenta, lo cuál se visualiza en la siguiente gráfica.



Respecto a la transformación BoxCox, ésta es de gran utilidad cuando se busca transformar los datos hacia una distribución normal y generar una varianza constante. Además, esta transformación busca “encontrar una relación lineal cuando esta es una curva”. Desafortunadamente, la gráfica permite visualizar que la hay ciclos en la tendencia, y no solo una curva (Juarez, 2021).

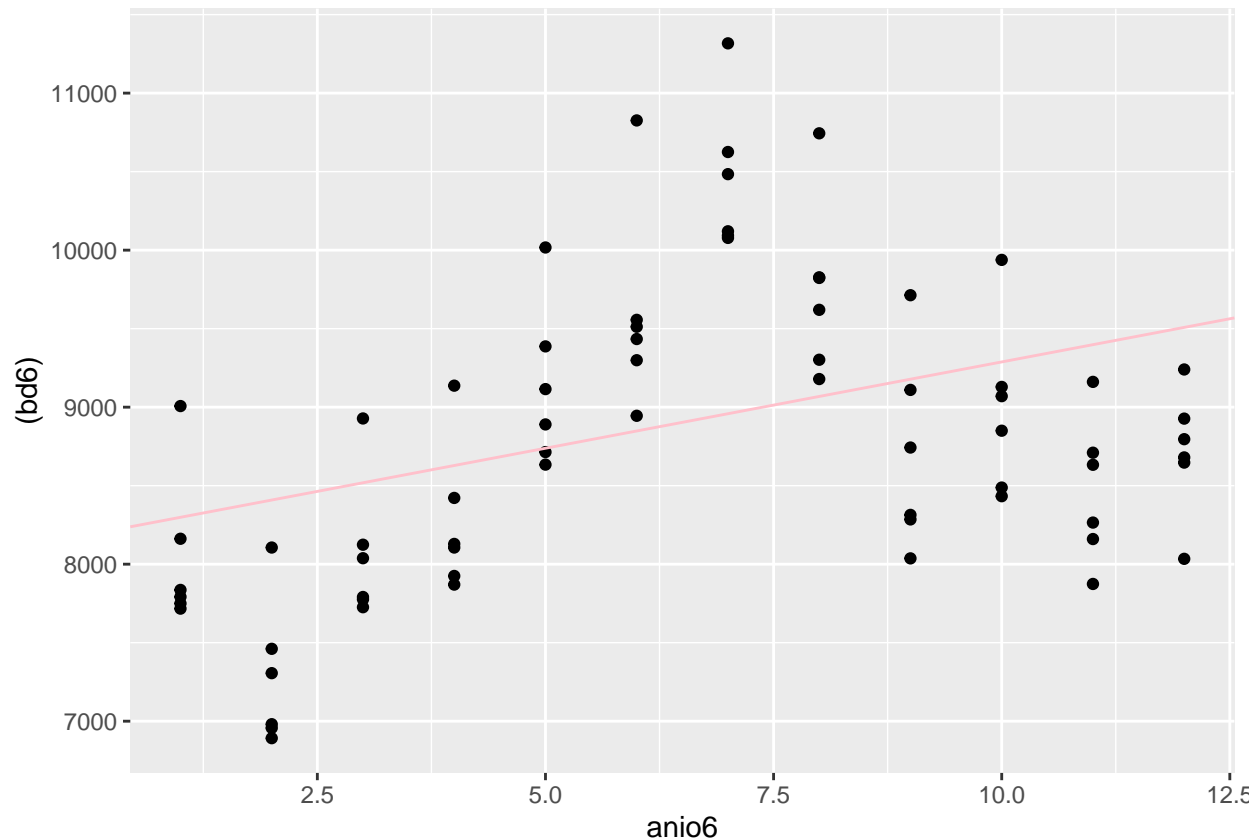
REVISAR CÓMO SE VEN LOS DATOS CON HETEROSCEDASTICIDAD Y SUPONER METER LA BOXCOX

## 6. Para el conjuntos de datos usdeaths del paquete fma

A. GRafique los datos

```
## [1] 72
```

```
## [1] 6
```



Es evidente que se trata de una base de datos de información temporal. Si se traza una recta de regresión, es evidente que hay gran distancia entre las observaciones y la recta, lo cuál podría llevar a pensar que el modelo no ajusta bien.

```
summary(bd6)
```

```
##      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##      6892   8089   8728   8788   9323   11317
```

```
str(bd6)
```

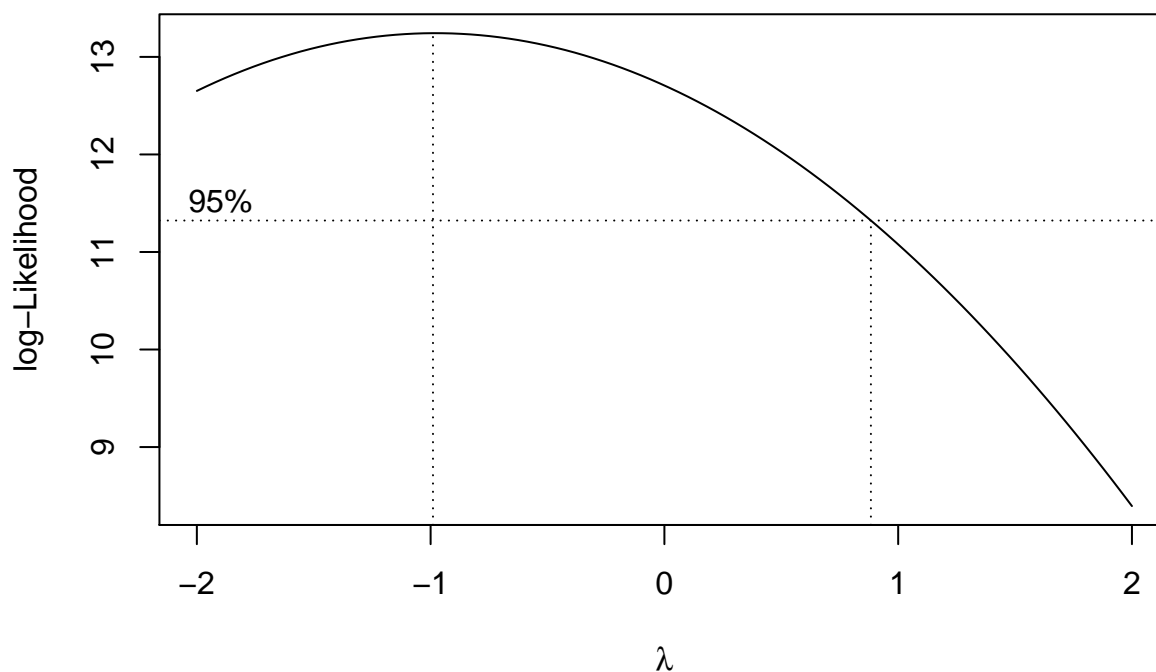
```
## Time-Series [1:72] from 1973 to 1979: 9007 8106 8928 9137 10017 ...
```

Lo anterior se confirma con la función `str`, la cual describe que los datos son recogidos entre 1973 a 1979. Y el tamaño es de 72 unidades, donde cada año observado es integrado por 12 meses, por lo que hay 6 años en la base.

B. Si cree que es apropiado realizar una transformación para ajustar un modelo lineal, aplíquela y describa los efectos de su aplicación.

Se aplica un modelo de regresión lineal simple. A pesar de que los estimadores son estadísticamente significativos, el coeficiente de determinación es *muy mal*, pues es de 0.13. Respecto a los supuestos básicos, es posible identificar que los datos son normales, pero los extremos se alejan; parece que no hay datos *outliers* influyentes; parece que no hay heteroscedasticidad, pero que los datos con identificación 7, 6, y 8 podrían incidir en la curva central roja; finalmente, parece haber tendencia entre los residuales y los datos ajustados, lo que se muestra como una *colina*, y los mismos datos (6,7,8), son los más incluyentes. Entonces, se procede a realizar una transformación para mejorar el ajuste del modelo, y comprobar la relación entre residuales y datos.

```
bc6 <- boxcox(mod6)
```



```
bc6$x[ which(bc6$y==max(bc6$y)) ] # -0.989899
```

```
## [1] -0.989899
```

```
mod6new <- lm(((bd6^-0.989899)-1)/-0.989899 ~ anio6)
```

```
summary(mod6new)
```

```
##
```

```
## Call:
```

```
## lm(formula = ((bd6^-0.989899) - 1)/-0.989899 ~ anio6)
```

```
##
```

```
## Residuals:
```

```
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.541e-05 -8.797e-06 -1.567e-06  9.861e-06  2.853e-05
```

```
##
```

```
## Coefficients:
```

```
##              Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.010e+00  3.134e-06  3.223e+05  < 2e-16 ***
## anio6        1.646e-06  4.259e-07  3.866e+00  0.000245 ***
```

```
## ---
```

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
##
```

```
## Residual standard error: 1.247e-05 on 70 degrees of freedom
```

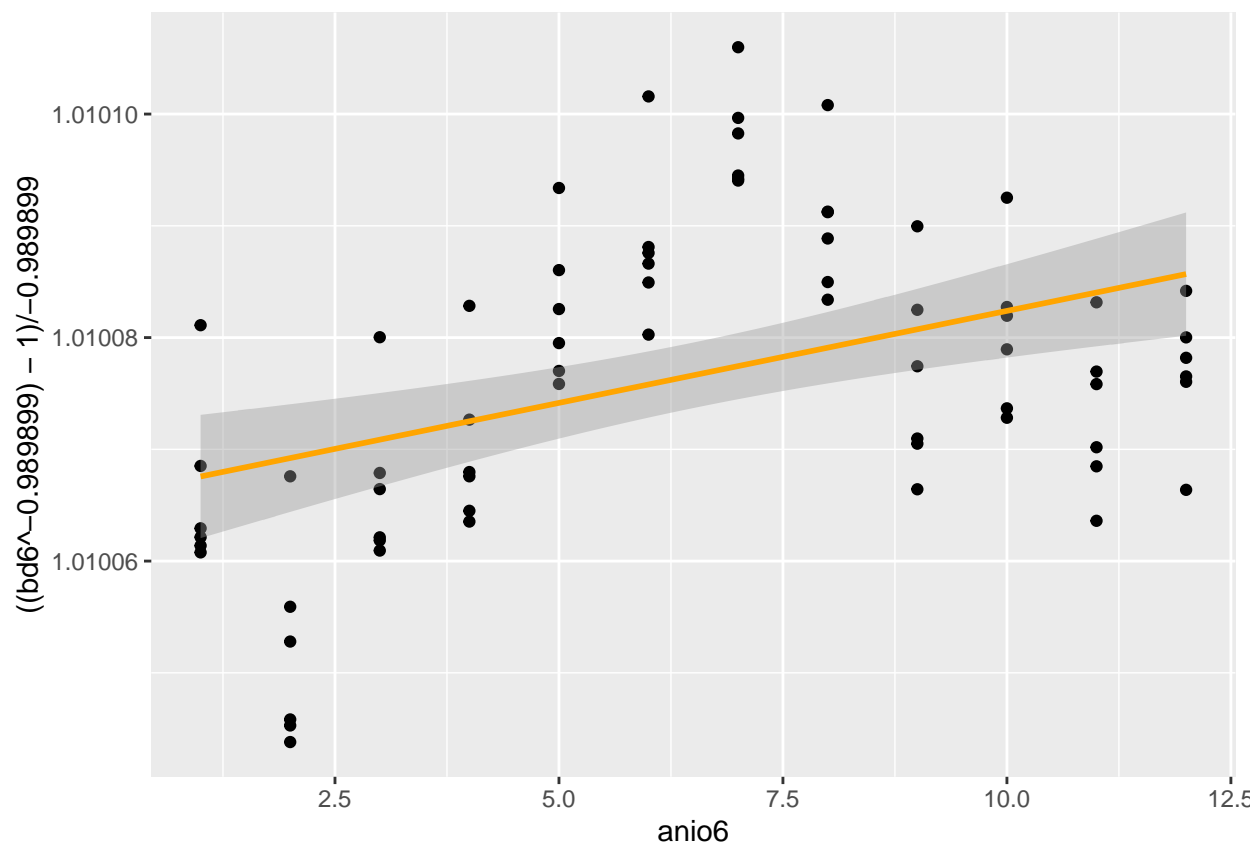
```
## Multiple R-squared:  0.1759, Adjusted R-squared:  0.1642
```



```
## F-statistic: 14.95 on 1 and 70 DF, p-value: 0.0002448
```

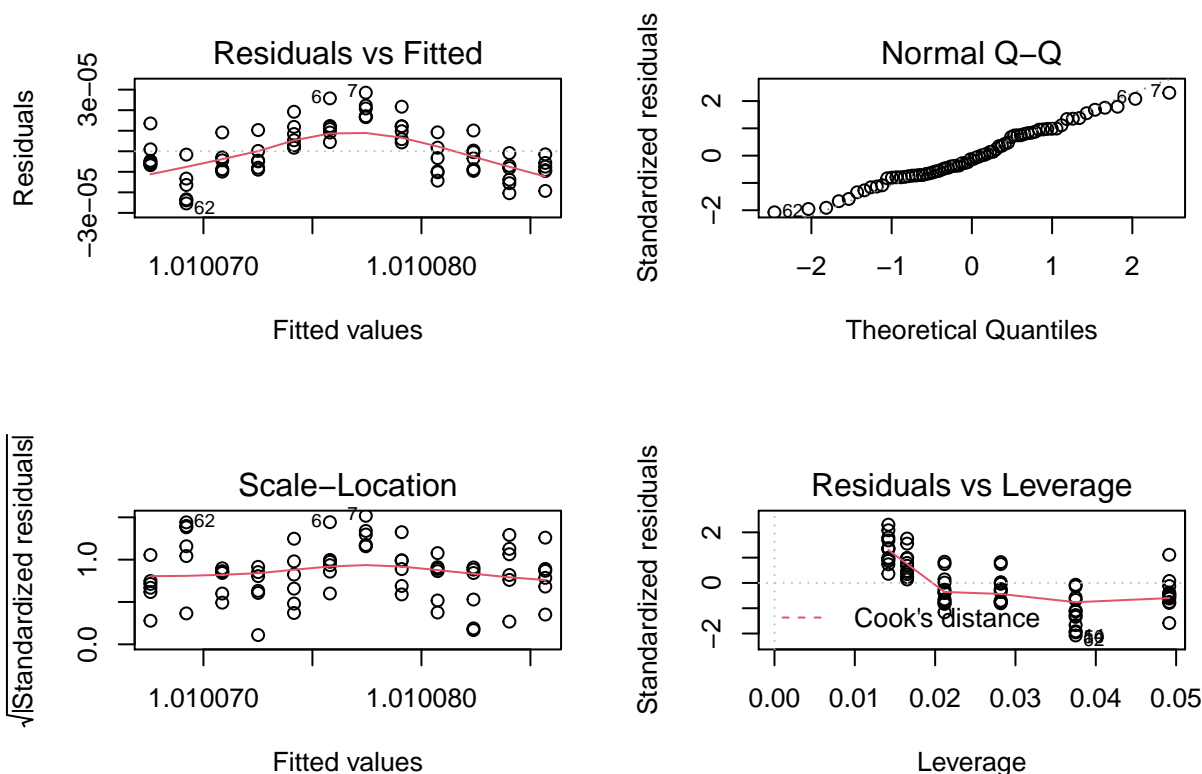
```
ggplot(bd6df, aes(x=anio6, y=((bd6^-0.989899)-1)/-0.989899)) +  
  geom_point() +  
  geom_smooth(method = "lm", se=T, col="orange")
```

```
## `geom_smooth()` using formula 'y ~ x'
```



Primero se realiza una transformación box-cox, con  $y_i^\lambda = y_i^{-0.989899}$ . Aunque los estimadores continúan siendo significativos al 95 % de confianza, con P valores de 0.0000 y 0.0002, es evidente que el modelo de mejora su ajuste, pues la  $R^2 = 0.17$ . Además, se grafica la recta de regresión y es visible la gran distancia entre los datos y la recta.

```
par(mfrow=c(2,2))  
plot(mod6new)
```



```
bptest(mod6new)
```

```
##
## studentized Breusch-Pagan test
##
## data: mod6new
## BP = 0.21444, df = 1, p-value = 0.6433
```

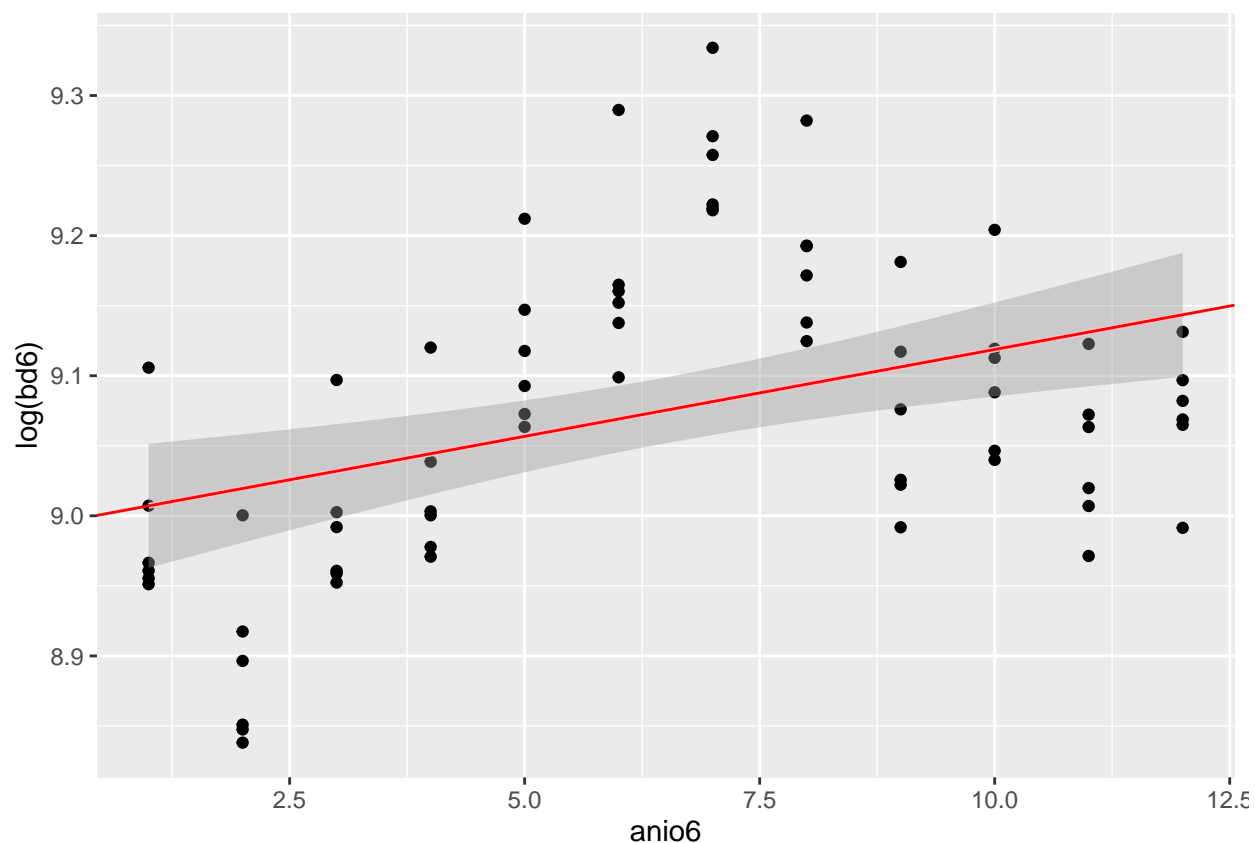
```
dwtest(mod6new)
```

```
##
## Durbin-Watson test
##
## data: mod6new
## DW = 0.7024, p-value = 1.1e-10
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

Respecto a los supuestos, parece que los supuestos de normalidad, outliers influyentes y homocedasticidad permanecen constantes, pero la correlación de residuales continúa siendo violada. Por lo que se procede a realizar pruebas de hipótesis. Se realiza la prueba Breush Pagan y no se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad con un P valor de 0.6433. Pero sí se rechaza la hipótesis nula de no correlación de errores con la prueba Durbin-Watson al 95 % de confianza, y un P valor de 0.0000.

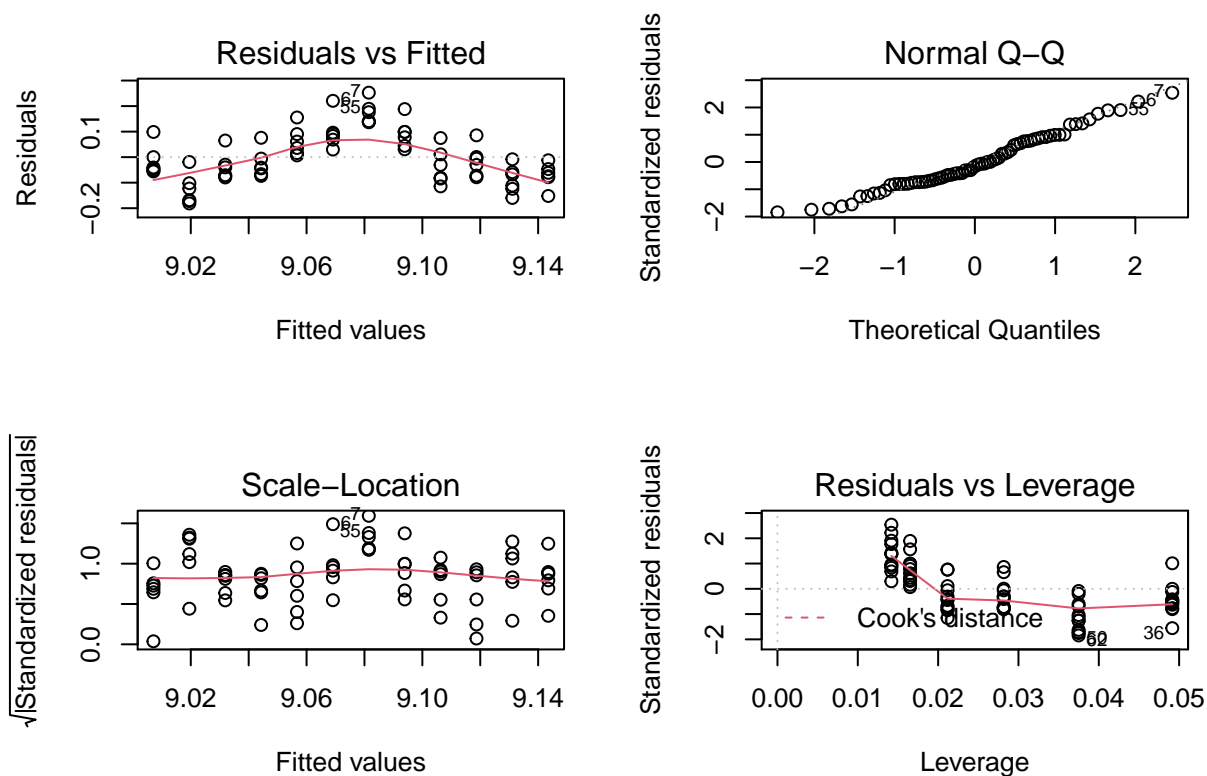
```
##
## Call:
## lm(formula = log(bd6) ~ anio6)
##
## Residuals:
```

```
##      Min      1Q   Median      3Q      Max
## -0.18139 -0.07250 -0.01567  0.07626  0.25256
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  8.99471    0.02517 357.324 < 2e-16 ***
## anio6        0.01240    0.00342   3.625 0.000544 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.1002 on 70 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.1581, Adjusted R-squared:  0.146
## F-statistic: 13.14 on 1 and 70 DF,  p-value: 0.0005438
## `geom_smooth()` using formula 'y ~ x'
```



Segundo, se realiza la transformación del logaritmo a la variable respuesta, y el escenario es similar a los anteriores: el  $R^2 = 0.15$ , pero los estadísticos siguen siendo significativos. También, la gráfica con la recta de regresión parece haber gran distancia entre los datos y la recta.

```
par(mfrow=c(2,2))
plot(mod6log)
```



```
bptest(mod6log)
```

```
##
## studentized Breusch-Pagan test
##
## data: mod6log
## BP = 0.0014583, df = 1, p-value = 0.9695
```

```
dwtest(mod6log)
```

```
##
## Durbin-Watson test
##
## data: mod6log
## DW = 0.66132, p-value = 1.863e-11
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

Respecto a los supuestos, parece que los supuestos de normalidad, outliers influyentes y homocedasticidad siguen constantes, empero la correlación de residuales es incumplida todavía. Por lo que se procede a hacer pruebas de hipótesis. Se realiza la prueba Breusch Pagan y no se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad con un P valor de 0.9695. Pero sí se rechaza la hipótesis nula de no correlación de errores con la prueba Durbin-Watson al 95 % de confianza, y un P valor de 0.0000.

Finalmente, a pesar de que el modelo de regresión con los datos originales y en las dos transformaciones muestran que los estimadores son estadísticamente significativos, hay coeficientes de determinación muy bajos, entre el 0.1 al 0.2. Esto se debe a que los errores están correlados, pues los datos son temporales, y esto se comprueba con las pruebas de Durbin-Watson. El efecto que tiene esto en el modelo es que sí es posible estimar los parámetros, pero sus varianzas no son las mínimas, ya que éstas dependen de  $Cov(e_i, e_j) \neq 0$ ,

y por lo tanto no son los mejores estimadores por Gauss-Markov. Esto también se debe a que los datos al ser temporales tienen varianzas que dependen del tiempo. Además, esto repercute en que los Intervalo de confianza serán amplios y las pruebas no serán *confiables*. Para arreglar esto, sugiere aplicar mínimos cuadrados generalizados, aumentar el tamaño de la muestra y utilizar técnicas propias para datos temporales.

## 7. Utilice el conjunto de datos `seatpos` del paquete `faraway` para encontrar el mejor modelo lineal que describa a la variable `hipcenter`. Compare este modelo con el modelo que incluye a todas las variables independientes del conjunto.

```
## 'data.frame': 38 obs. of 9 variables:
## $ Age : int 46 31 23 19 23 47 30 28 23 29 ...
## $ Weight : int 180 175 100 185 159 170 137 192 150 120 ...
## $ HtShoes : num 187 168 154 190 178 ...
## $ Ht : num 185 166 152 187 174 ...
## $ Seated : num 95.2 83.8 82.9 97.3 93.9 92.4 87.7 96.9 91.4 85.2 ...
## $ Arm : num 36.1 32.9 26 37.4 29.5 36 32.5 35.8 29.4 26.6 ...
## $ Thigh : num 45.3 36.5 36.6 44.1 40.1 43.2 35.6 39.9 35.5 31 ...
## $ Leg : num 41.3 35.9 31 41 36.9 37.4 36.2 43.1 33.4 32.8 ...
## $ hipcenter: num -206.3 -178.2 -71.7 -257.7 -173.2 ...

##      Age      Weight      HtShoes      Ht
## Min.   :19.00   Min.   :100.0   Min.   :152.8   Min.   :150.2
## 1st Qu.:22.25   1st Qu.:131.8   1st Qu.:165.7   1st Qu.:163.6
## Median :30.00   Median :153.5   Median :171.9   Median :169.5
## Mean   :35.26   Mean   :155.6   Mean   :171.4   Mean   :169.1
## 3rd Qu.:46.75   3rd Qu.:174.0   3rd Qu.:177.6   3rd Qu.:175.7
## Max.   :72.00   Max.   :293.0   Max.   :201.2   Max.   :198.4
##      Seated      Arm      Thigh      Leg
## Min.   : 79.40   Min.   :26.00   Min.   :31.00   Min.   :30.20
## 1st Qu.: 85.20   1st Qu.:29.50   1st Qu.:35.73   1st Qu.:33.80
## Median : 89.40   Median :32.00   Median :38.55   Median :36.30
## Mean   : 88.95   Mean   :32.22   Mean   :38.66   Mean   :36.26
## 3rd Qu.: 91.62   3rd Qu.:34.48   3rd Qu.:41.30   3rd Qu.:38.33
## Max.   :101.60   Max.   :39.60   Max.   :45.50   Max.   :43.10
##      hipcenter
## Min.   : -279.15
## 1st Qu.: -203.09
## Median : -174.84
## Mean   : -164.88
## 3rd Qu.: -119.92
## Max.   :  -30.95
```

La base de datos está compuesta por 9 variables, donde la variables **hipcenter** es la endógena y describe la “distancia horizontal del punto medio de la cadera desde una ubicación fija en el carro medida en milímetros” (Faraway, 2004). Todas son numéricas o de valores enteros.

A continuación se muestra un correlograma, donde se tacha a las correlaciones que no son significativas al 95 % de confianza. Cabe destacar, a excepción de *age*, todas las variables están fuertemente correlacionadas con **hipcenter**, y también entre sí. Esto podría ser un indicio para excluir a la variable *age* del modelo de regresión, para que ajuste bien.

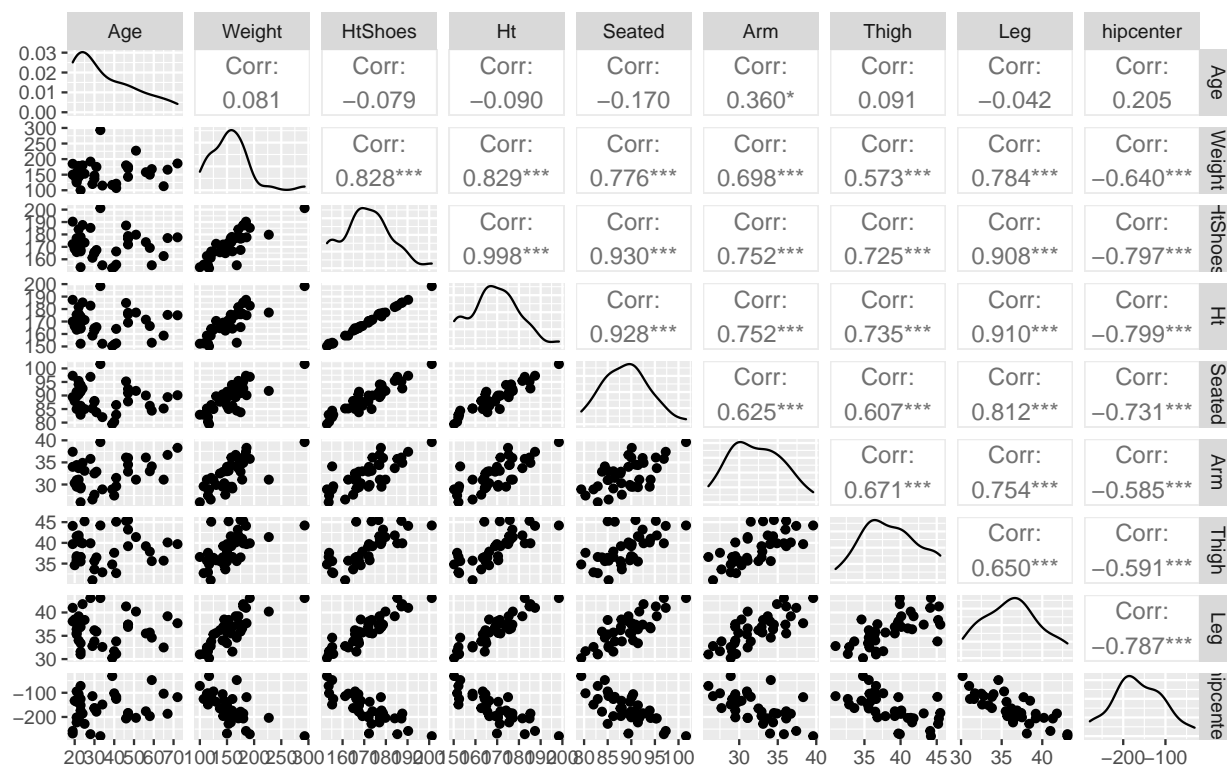
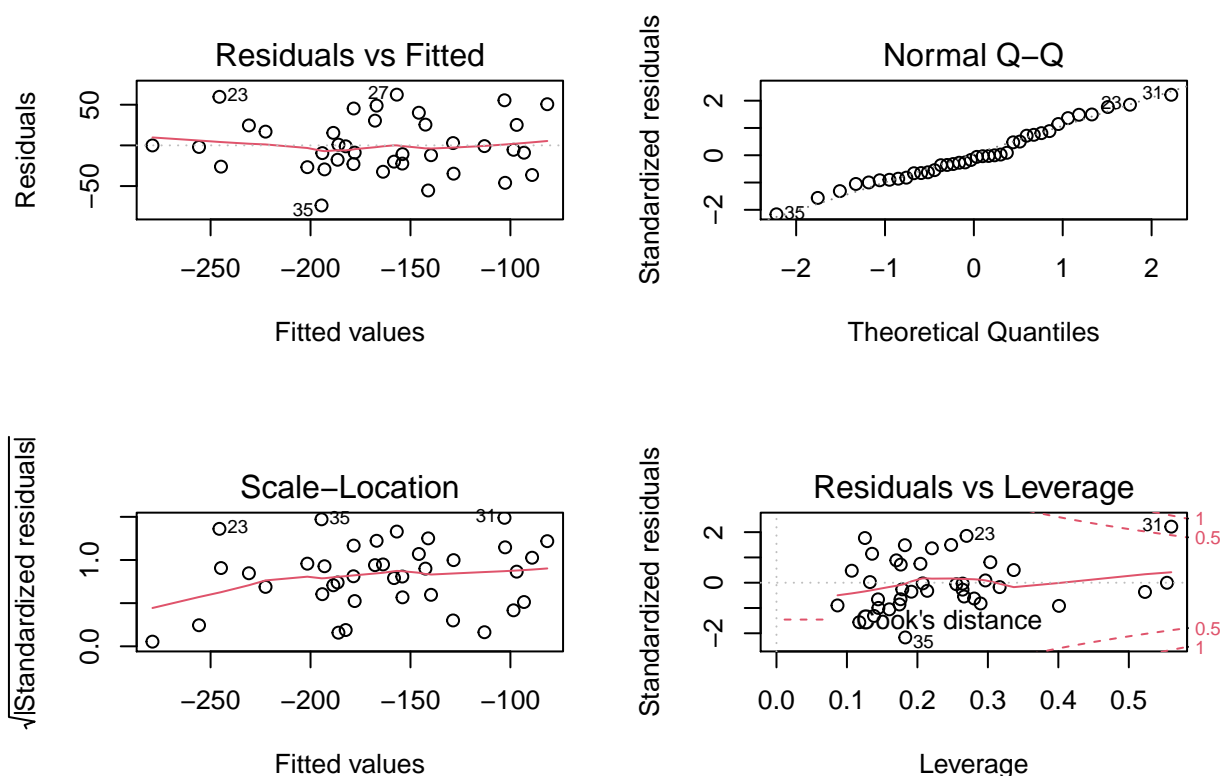


Figura 1: Correlograma con significancia

```
##
## Call:
## lm(formula = hipcenter ~ ., data = bd7, x = T, y = T)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -73.827 -22.833  -3.678  25.017  62.337
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  436.43213   166.57162    2.620   0.0138 *
## Age           0.77572    0.57033    1.360   0.1843
## Weight        0.02631    0.33097    0.080   0.9372
## HtShoes       -2.69241    9.75304   -0.276   0.7845
## Ht            0.60134   10.12987    0.059   0.9531
## Seated        0.53375    3.76189    0.142   0.8882
## Arm          -1.32807    3.90020   -0.341   0.7359
## Thigh        -1.14312    2.66002   -0.430   0.6706
## Leg          -6.43905    4.71386   -1.366   0.1824
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 37.72 on 29 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.6866, Adjusted R-squared:  0.6001
## F-statistic:  7.94 on 8 and 29 DF, p-value: 1.306e-05
```



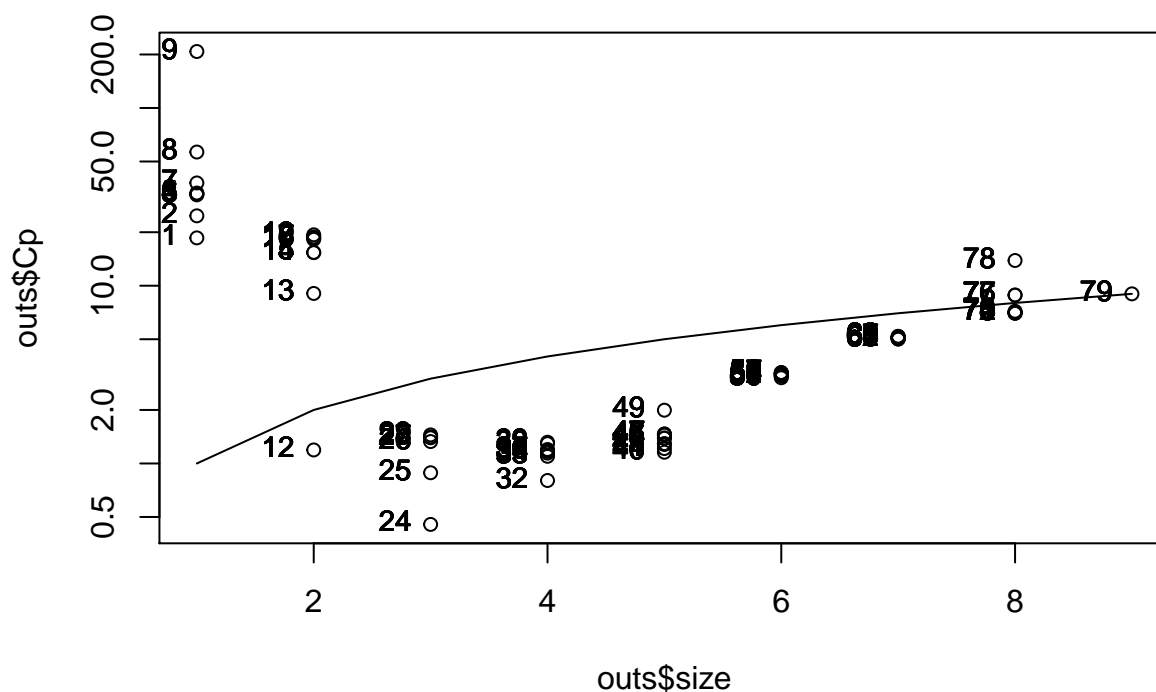
Luego de aplicar una regresión múltiple con todas las variables independientes, el modelo tiene un coeficiente de regresión bajo, y a excepción del intercepto, ningún coeficiente de regresión parcial es significativo. También, el rango de los residuos recorre desde -73 hasta 62, lo que se puede considerar un amplio margen. Esto se podría deber a errores de especificación de las variables que describen el modelo. Respecto a los supuestos, gráficamente parece haber independencia de residuos, y también cumplir laxamente la normalidad y homoscedasticidad. Sin embargo, sí hay outliers influyentes, el cuál es el punto 31, 35 y 23. Se procede a realizar pruebas para los anteriores supuestos.

```
##
## studentized Breusch-Pagan test
##
## data: complet7
## BP = 14.037, df = 8, p-value = 0.0808
##
## Durbin-Watson test
##
## data: complet7
## DW = 1.7688, p-value = 0.2441
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

El test con hipótesis nula No correlación no se rechaza, con un P valor de 0.244. La prueba de hipótesis nula de homoscedasticidad no se rechaza, pero está en la frontera con un P valor de 0.08. Cabe recordar que este último problema se puede deber a outliers influyentes, errores de especificación, entre otros.

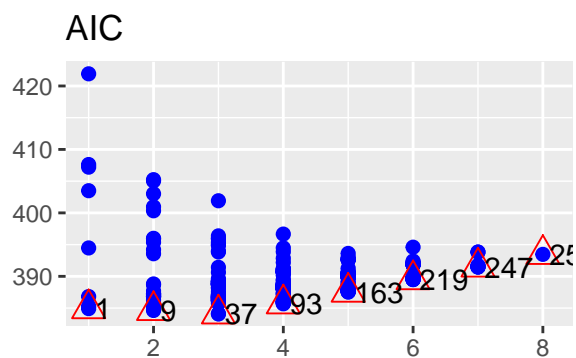
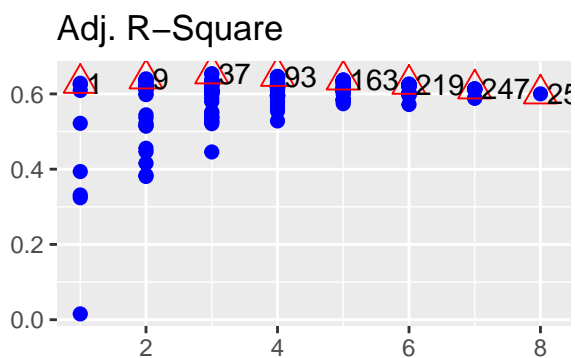
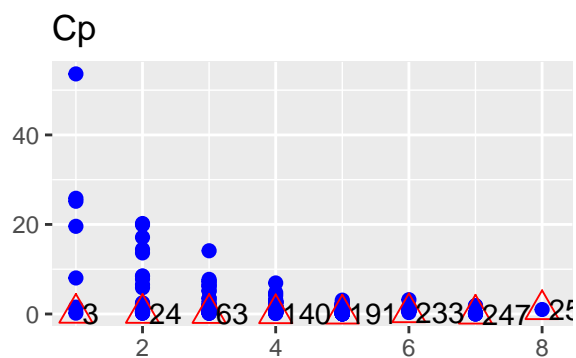
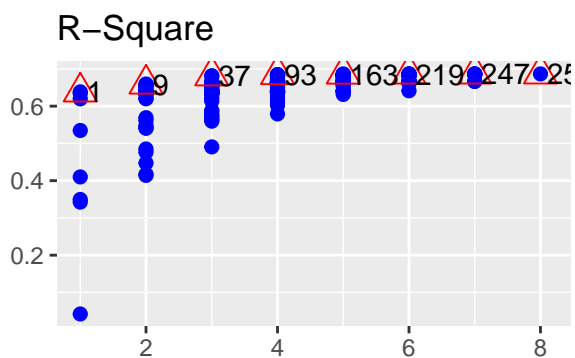
Entonces, a continuación se procede a encontrar el mejor modelo. Cabe señalar que se debería de modelar con respaldo de un experto de área, y este debería ser el principal criterio para crear modelos. Sin embargo, se procede a seleccionar el modelo a través de . . .

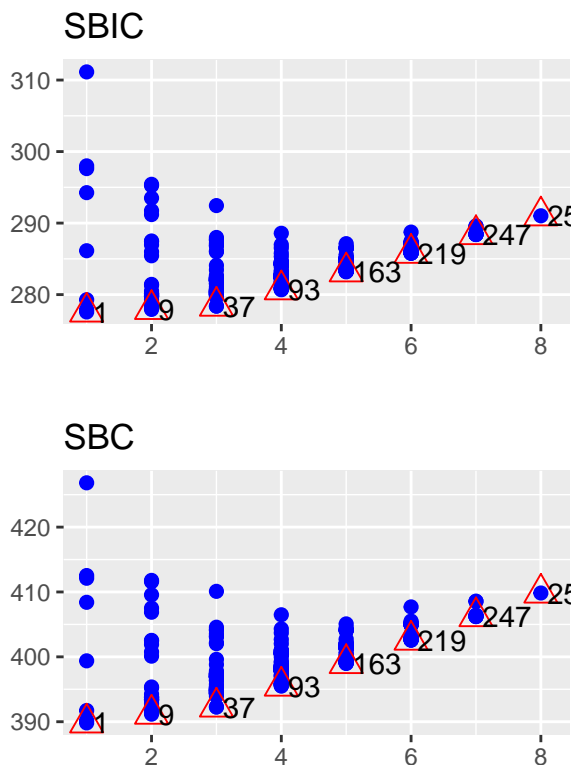
```
outs<-leaps(complet7$x, bd7$hipcenter, int=FALSE) #output: que V.A. incluye modelo, $labels son los var
plot(outs$size,outs$Cp, log="y",cex=0.9)
lines(outs$size,outs$size)
text(outs$size, outs$Cp, labels=row(outs$which), cex=0.9, pos=2)
```



El análisis con la  $C_p$  de Mallows implica que se seleccionará aquel número cuyo valor sea similar a la cantidad de parámetros del modelos, ya que  $E(C_p) \approx p$ . En este sentido, y según la gráfica, los modelos 12, 75, 79, 72, 78 son los mejores para este criterio. # {r} # #DATAFRAME de Cp vs tamaño modelos, y comporarlos en una dataframe # outs\$Cp[79] # # outs\$size[79] #







Por otra parte, es necesario comparar más que solamente un indicador como la  $C_p$  de Mallows. Afortunadamente la anterior gráfica muestra comparaciones para diferentes indicadores (como la  $R^2_{ajust}$ , la  $C_p$ , o el criterio AIC). Es posible visualizar lo siguiente:

1. Cuando se tienen todos los parámetros (sin incluir  $\beta_0$ ), el modelo “25” es el mejor. Ya que es el único.
2. Cuando se tienen 7 parámetros (sin incluir  $\beta_0$ ), el mejor modelo es el “247”. Esto lo afirman los criterios de  $C_p$ ,  $R$  cuadrada ajustada y el criterio AIC. Este modelo está integrado por las variables: Age, Weight, HtShoes, Arm, Thigh, Leg.
3. Al poseer 6 parámetro (sin incluir  $\beta_0$ ), el modelo “219”, el mejor según los criterios  $R$  cuadrada ajustada y el criterio AIC. Este modelo está integrado por las variables: Age, HtShoes, Seated, Arm, Thigh, Leg.
4. Al poseer 5 parámetro (sin incluir  $\beta_0$ ), el modelo “163”, el mejor según los criterios  $R$  cuadrada ajustada y el criterio AIC. Este modelo está integrado por las variables: Age, HtShoes, Arm, Thigh, Leg.

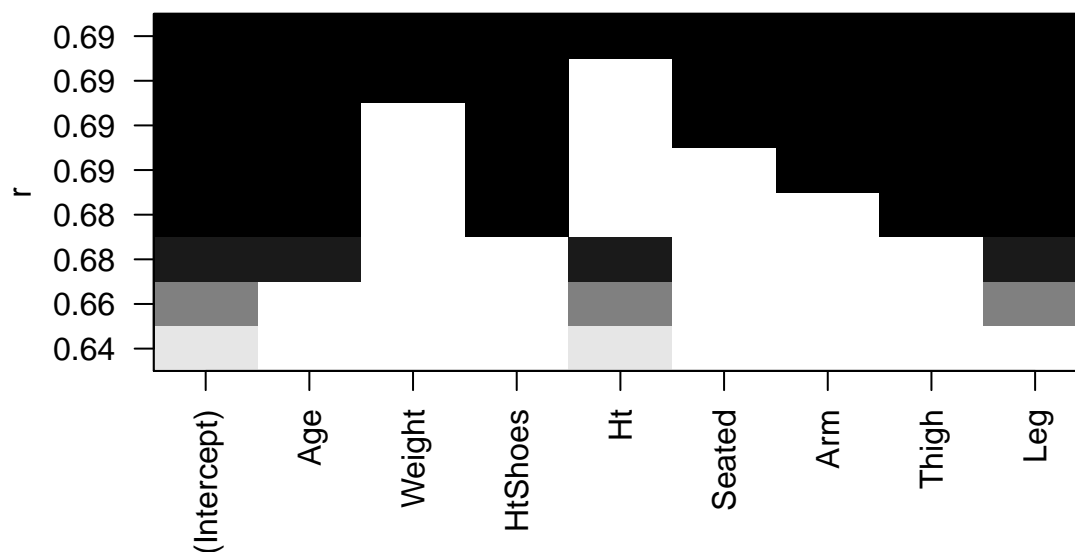
Curiosamente, las variables Age, HtShoes, Arm, Thigh, Leg se mantienen en los 4 modelos anteriores.

```
best7 <- regsubsets(hipcenter ~ . , data = bd7)
summary(best7)

## Subset selection object
## Call: regsubsets.formula(hipcenter ~ . , data = bd7)
## 8 Variables (and intercept)
##           Forced in Forced out
## Age           FALSE          FALSE
## Weight         FALSE          FALSE
## HtShoes        FALSE          FALSE
## Ht             FALSE          FALSE
```

```
## Seated      FALSE      FALSE
## Arm         FALSE      FALSE
## Thigh       FALSE      FALSE
## Leg         FALSE      FALSE
## 1 subsets of each size up to 8
## Selection Algorithm: exhaustive
##           Age Weight HtShoes Ht  Seated Arm Thigh Leg
## 1 ( 1 ) " " " " " " " " " " " " " "
## 2 ( 1 ) " " " " " " " " " " " "
## 3 ( 1 ) "*" " " " " " " " " " "
## 4 ( 1 ) "*" " " " " " " " " " "
## 5 ( 1 ) "*" " " " " " " " " " "
## 6 ( 1 ) "*" " " " " " " " " " "
## 7 ( 1 ) "*" "*" " " " " " " " "
## 8 ( 1 ) "*" "*" " " " " " " " "
```

```
plot(best7, scale = "r")
```



Tal como se indicó con el análisis de los indicadores, las variables: Age, HtShoes, Arm, Thigh, Leg también aparecen en el modelo de 5 coeficientes de regresión parcial (sin incluir  $\beta_0$ ). Sin embargo, si se buscara solamente 4 coeficientes, se podría excluir el  $\beta_{arm}$ , esto en función de los resultados brindados por el análisis con la función *regsubsets*.

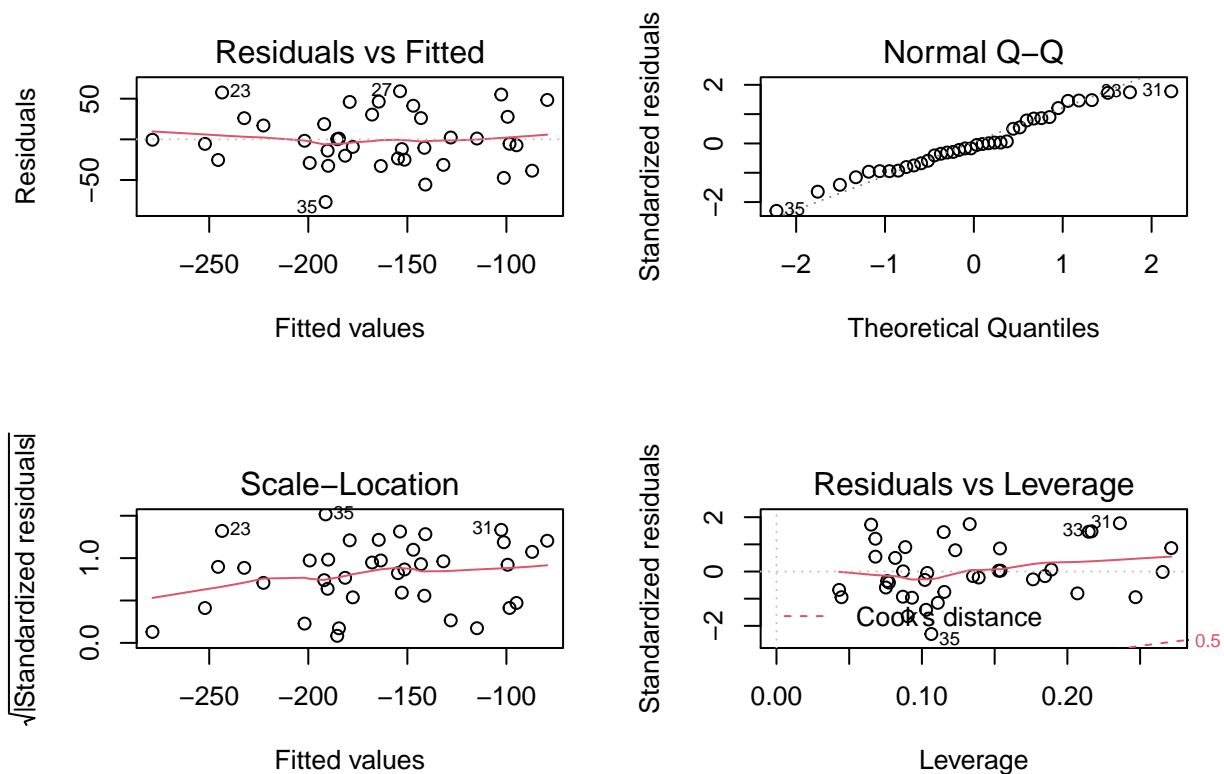
```
## [1] "Age"      "Weight"    "HtShoes"   "Ht"        "Seated"    "Arm"
## [7] "Thigh"    "Leg"       "hipcenter"

##
## Call:
```

```
## lm(formula = hipcenter ~ Age + HtShoes + Thigh + Leg, data = bd7)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -77.069 -24.643  -3.584  26.092  59.182
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  445.7977   105.1452   4.240  0.00017 ***
## Age           0.6525    0.3910   1.669  0.10462
## HtShoes       -1.9171    1.4050  -1.365  0.18164
## Thigh         -1.3732    2.2392  -0.613  0.54391
## Leg           -6.9502    4.1118  -1.690  0.10040
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 35.46 on 33 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.6849, Adjusted R-squared:  0.6467
## F-statistic: 17.93 on 4 and 33 DF,  p-value: 6.535e-08
```

Al comparar los modelos de cuatro y cinco variables sin “Arm”, es evidente que el modelo de 4 variables, tiene un coeficiente de determinación ligeramente mayor, y en ambos casos solamente  $\beta_0$  es estadísticamente significativo.

```
par(mfrow=c(2,2))
plot(mod74)
```



```
names(bd7)
```

```
## [1] "Age"      "Weight"    "HtShoes"   "Ht"        "Seated"    "Arm"
## [7] "Thigh"    "Leg"       "hipcenter"
```

Esto aún puede deberse a que había outliers influyentes y a que el supuesto de homoscedasticidad esté en la *frontera*. Pero al graficar los supuestos, ya no se observan outliers. Y al realizar la prueba, ya el supuesto de homoscedasticidad ha mejorado con un P valor de 0.1265.

```
##
## studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  mod74
## BP = 7.1835, df = 4, p-value = 0.1265
##
## Durbin-Watson test
##
## data:  mod74
## DW = 1.8079, p-value = 0.2863
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
##
## Call:
## lm(formula = hipcenter ~ ., data = bd7, x = T, y = T)
##
## Coefficients:
## (Intercept)      Age      Weight      HtShoes      Ht      Seated
## 436.43213    0.77572    0.02631   -2.69241    0.60134    0.53375
##      Arm      Thigh      Leg
## -1.32807   -1.14312   -6.43905
##
##
## Selection Summary
## -----
##      Variable      Adj.
## Step Entered  R-Square R-Square  C(p)      AIC      RMSE
## -----
## 1      Ht          0.6383  0.6282  -0.5342  384.9060  36.3684
## 2      Leg          0.6594  0.6399  -0.4889  384.6191  35.7909
## 3      Age          0.6814  0.6533  -0.5247  384.0811  35.1208
## -----
```

Se parte del modelo con una sola variable explicativa: “Ht”, con un  $R^2 = 0.799$ , y con un P valor de 0.051. Lo cual es coherente con los modelos anteriores, donde Ht era seleccionado para modelos con menos de 3 variables independientes. Posteriormente, se incorpora la variables *Leg*, cabe destacar que el coeficiente de determinación ya converge al que se ha presentado previamente, pues  $R^2_{adj} = 0.659$ , desafortunadamente el significancia se va hasta 0.15. Luego, se agrega la variable Age. Pero en este punto las variables ya no son significativas, y el  $R^2$  no supera el 0.68. Y así termina la modelación *forward*.

```
##
##
## Elimination Summary
## -----
##      Variable      Adj.
## Step Removed  R-Square R-Square  C(p)      AIC      RMSE
## -----
```

```
##      1      Ht          0.6865      0.6134      7.0035      391.4680      37.0885
##      2      Weight      0.6864      0.6257      5.0113      389.4782      36.4903
##      3      Seated      0.6862      0.6371      3.0360      387.5105      35.9309
##      4      Arm          0.6849      0.6467      1.1569      385.6684      35.4559
##      5      Thigh        0.6813      0.6531     -0.5108      384.0990      35.1291
## -----
```

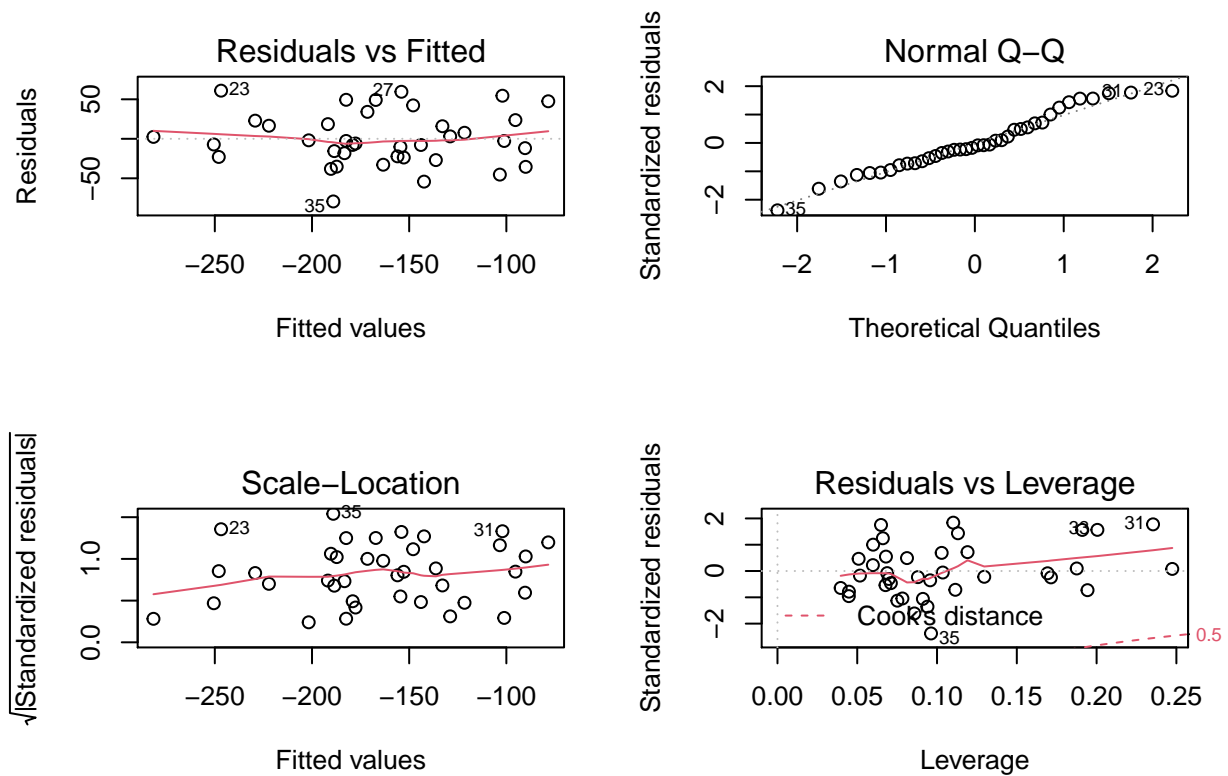
Respecto al método “hacia atrás”, la primer variable en ser eliminada es *Ht*. Cabe señalar, que ninguna de las variables independientes son estadísticamente significativas. Posteriormente se quitan las variables *Weight*, *Seated*, *Arm*, y *Thigh* en ese orden. El valor de  $R^2$  varía entre 0.61 a 0.65. Finalmente, el modelo seleccionado está integrado por Age, HtShoes, y Leg. Con un  $R^2_{adj} = 0.65$

```
mod73 <- lm(hipcenter ~ Age + HtShoes + Leg, data = bd7)
summary(mod73)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = hipcenter ~ Age + HtShoes + Leg, data = bd7)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -79.269 -22.770  -4.342   21.853   60.907
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  456.2137    102.8078   4.438 9.09e-05 ***
## Age           0.5998     0.3779   1.587  0.1217
## HtShoes       -2.3023     1.2452  -1.849  0.0732 .
## Leg          -6.8297     4.0693  -1.678  0.1024
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 35.13 on 34 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.6813, Adjusted R-squared:  0.6531
## F-statistic: 24.22 on 3 and 34 DF,  p-value: 1.437e-08
```

Se muestra que el modelo de tres variables: Age, HtShoes y Leg, tiene un coeficiente de determinación de 0.6531. Y que solamente la variables HtShoes es significativamente al 90 %. Además, si se verifican los residuales, se puede evidenciar que el rango recorre desde -79 hasta 60, lo cuál se puede considerar un rango amplio.

```
par(mfrow=c(2,2))
plot(mod73)
```



Al comprobar gráficamente los supuestos, no aparecen outliers que sean influyentes, y parece que los tres supuestos restantes se cumplen someramente bien.

**Cuadro 2:** Comparación modelos con R ajustada y AIC

Indicador	ModeloCompleto	Modelo4variables	Modelo3variables	Modelo2varialbes
R Ajustada	0.6001	0.6467	0.6531	0.6399
AIC	393.4634	384.0990	385.6684	384.6191



Finalmente, es posible arguir que el modelo de tres variables es el que presenta mejores indicadores. Ya tiene el coeficiente de determinación más alto, y el un punto más alto que los modelos con 2 y 4 variables. Asimismo, los modelos reducidos no cuentan con los problema de outliers influyentes ni de homoscedasticidad en la frontera del P value. Sin embargo, se evidenció que en ningún modelo, las variables son estadísticamente significativas al 95 %. Esto se puede deber a falta de especificación, es decir que ninguna variables describe de forma correcta a *hipcenter*. Además, se mostró que los residuales tienen un amplio rango. Entonces, se sugiere que haya un especialista de área que oriente la formulación del modelo.

---

## Referencias

- [1] Faraway, J. J., *Extending the linear model with R: generalized linear, mixed effects and nonparametric regression models*, CRC press. (2016)
- [2] OMS, *COVID-19: cronología de la actuación de la OMS*, obtenido el 20 de noviembre de 2020 desde <https://www.who.int/es/news/item/27-04-2020-who-timeline—covid-19>