Condiciones de Optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Actividad sobre el análisis de las condiciones KKT en problemas de optimización convexa.

Jean Carlos William Huancoillo Rojas
Universidad Nacional del Altiplano Puno
Facultad de Ingeniería de Estadística e Informática
Docente: Torres Cruz Fred
Fecha: [04/02/2025]

article amsmath, amssymb

1 Ejercicio 1

1.1 Problema de Optimización

Dado el problema de minimización:

$$\min_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 \tag{1}$$

queremos encontrar el punto óptimo utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

1.2 Paso 1: Cálculo del Gradiente

Las condiciones KKT en un problema sin restricciones se reducen a encontrar los puntos críticos mediante la derivada de la función objetivo:

$$\nabla f(x_1,x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \tag{2}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2. \tag{4}$$

1.3 Paso 2: Encontrar los Puntos Críticos

Igualamos a cero para encontrar los puntos estacionarios:

$$2x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \tag{5}$$

$$4x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0. \tag{6}$$

Por lo tanto, el único punto crítico es:

$$(x_1,x_2) = (0,0). \tag{7}$$

1.4 Paso 3: Condición de Segundo Orden

Para confirmar que el punto encontrado es un mínimo, calculamos la matriz hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Los valores propios de la matriz hessiana son 2 y 4, ambos positivos, lo que indica que la función es **convexa** y el punto crítico es un **mínimo global**.

1.5 Conclusión

Dado que la matriz hessiana es definida positiva, concluimos que el punto $(0,0)$ es el mínimo global del problema de optimización.

2 Ejercicio 2

2.1 Planteamiento

Minimizar la función:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 \tag{9}$$

Sujeto a la restricción:

$$x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0. \tag{10}$$

2.2 Definición del Lagrangiano

El Lagrangiano para este problema se define como:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 3), \tag{11}$$

donde $\lambda \geq 0$ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción.

2.3 Condiciones KKT

Las condiciones de KKT son:

1. **Condiciones de estacionariedad**:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda = 0. \tag{13}$$

2. **Condición de factibilidad**:

$$x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0. \tag{14}$$

3. **Condición de complementariedad**:

$$\lambda(x_1 + 2x_2 - 3) = 0. \tag{15}$$

4. **Condición de no negatividad**:

$$\lambda \geq 0. \tag{16}$$

2.4 Resolución

De la ecuación (6) tenemos:

$$\lambda = -2x_1. \tag{17}$$

De la ecuación (7):

$$\lambda = -2x_2. \tag{18}$$

Comparando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$x_1 = x_2. \tag{19}$$

Sustituyendo en la restricción:

$$x_1 + 2x_1 - 3 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 1. \tag{20}$$

Calculando λ:

$$\lambda = -2(1) = -2. \tag{21}$$

Dado que $\lambda \geq 0$ no se cumple, no hay una solución factible en KKT.

3 Problema 2

3.1 Planteamiento

Minimizar:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \tag{22}$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \tag{23}$$

$$x_1 \geq 0. \tag{24}$$

3.2 Definición del Lagrangiano

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2) - \mu x_1. \tag{25}$$

donde $\lambda, \mu \geq 0$ son los multiplicadores de Lagrange.

3.3 Condiciones KKT

1. **Condiciones de estacionariedad**:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda - \mu = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0. \tag{27}$$

2. **Condiciones de factibilidad**:

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \quad x_1 \geq 0. \tag{28}$$

3. **Condición de complementariedad**:

$$\lambda(x_1 + x_2 - 2) = 0, \quad \mu x_1 = 0. \tag{29}$$

4. **Condición de no negatividad**:

$$\lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0. \tag{30}$$

3.4 Resolución

De la ecuación (22):

$$\lambda = -2x_2. \tag{31}$$

Como $\lambda \geq 0$, se tiene que $x_2 \leq 0$. Asumimos $x_2 = 0$.
Sustituyendo en la restricción:

$$x_1 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2. \tag{32}$$

Ahora, resolvemos:

$$2(2) + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow 4 + \lambda - \mu = 0. \tag{33}$$

Como $x_1 > 0$, se deduce que $\mu = 0$, por lo que:

$$\lambda = 4. \tag{34}$$

3.5 Conclusión

El óptimo es:

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad \lambda^* = 4, \quad \mu^* = 0. \tag{35}$$

4 Conclusiones

- En el primer problema, la restricción no es activa en el óptimo, por lo que no hay solución válida en KKT.
- En el segundo problema, el punto óptimo se encuentra en la frontera de la restricción con un valor óptimo de $\lambda = 4$.

5 Ejercicio 3

5.1 Formulación del Problema

El problema de maximización dado es:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & f(x_1,x_2) = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & g_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0 \\ & g_2(x_1) = -x_1 \leq 0 \\ & g_3(x_2) = -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

5.2 Formulación del Lagrangiano

El Lagrangiano del problema es:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) =& 3x_1 + 4x_2 + \lambda(9 - x_1^2 - x_2^2) \\ & + \mu_1(-x_1) + \mu_2(-x_2) \end{aligned}$$

donde:

- $\lambda \geq 0$ es el multiplicador de Lagrange para la restricción $x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0$.
- $\mu_1 \geq 0$ y $\mu_2 \geq 0$ son los multiplicadores para $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, respectivamente.

5.3 Condiciones de KKT

Las Condiciones KKT requieren que se cumplan:

5.3.1 Condiciones de Estacionariedad

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 3 - 2\lambda x_1 - \mu_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 4 - 2\lambda x_2 - \mu_2 = 0 \end{aligned}$$

5.3.2 Condiciones de Factibilidad

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 - 9 &\leq 0 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

5.3.3 Condiciones de Complementariedad

$$
\begin{aligned}
\lambda(x_1^2 + x_2^2 - 9) &= 0 \\
\mu_1 x_1 &= 0 \\
\mu_2 x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

5.3.4 Condiciones de No Negatividad

$$
\begin{aligned}
\lambda &\geq 0 \\
\mu_1 &\geq 0 \\
\mu_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

5.4 Resolución del Sistema

La restricción $x_1^2 + x_2^2 \leq 9$ sugiere que la solución óptima estará en el borde, es decir:

$$x_1^2 + x_2^2 = 9$$

De las ecuaciones de estacionariedad:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{3 - \mu_1}{2x_1} \\
\lambda &= \frac{4 - \mu_2}{2x_2}
\end{aligned}
$$

Como la solución está en el borde, tenemos $\lambda > 0$, lo que implica:

$$
\begin{aligned}
\mu_1 = 0 \quad \text{si} \quad x_1 > 0 \\
\mu_2 = 0 \quad \text{si} \quad x_2 > 0
\end{aligned}
$$

Para maximizar $3x_1 + 4x_2$ en el círculo $x_1^2 + x_2^2 = 9$, consideramos la parametrización:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3\cos\theta \\
x_2 &= 3\sin\theta
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la función objetivo:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= 3(3\cos\theta) + 4(3\sin\theta) \\
&= 9\cos\theta + 12\sin\theta
\end{aligned}
$$

La función $9\cos\theta + 12\sin\theta$ se maximiza cuando:

$$\tan\theta = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$$

Por lo que los valores óptimos de x_1, x_2 son:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 3\cos\theta = 3 \times \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{9}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5} \\ x_2^* &= 3\sin\theta = 3 \times \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Finalmente, evaluamos la función objetivo:

$$\begin{aligned} f(x_1^*, x_2^*) &= 3 \times \frac{9}{5} + 4 \times \frac{12}{5} \\ &= \frac{27}{5} + \frac{48}{5} = \frac{75}{5} = 15 \end{aligned}$$

5.5 Solución Final

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{9}{5} \\ x_2^* &= \frac{12}{5} \\ f(x_1^*, x_2^*) &= 15 \end{aligned}$$

Los multiplicadores de Lagrange quedan:

$$\begin{aligned} &\lambda^* = \frac{3}{2x_1^*} = \frac{3}{2(9/5)} = \frac{3\times 5}{2\times 9} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \\ &\mu_1^* = 0 \\ &\mu_2^* = 0 \end{aligned}$$

Como la función objetivo es cóncava y las restricciones son convexas, las condiciones KKT son suficientes, garantizando que la solución encontrada es óptima globalmente.

article amsmath, amssymb

6 Ejercicio 4 Relación entre las condiciones KKT y la dualidad de Lagrange en problemas de optimización convexa

6.1 Introducción

El análisis de la relación entre las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) y la dualidad de Lagrange en problemas de optimización convexa es fundamental para comprender cómo se pueden resolver estos problemas mediante la formulación dual.

6.2 Condiciones KKT y la Dualidad de Lagrange

Las condiciones KKT son un conjunto de condiciones necesarias para que una solución sea óptima en un problema de optimización no lineal con restricciones. Estas condiciones son clave en la optimización convexa, ya que se derivan del uso del método de Lagrange para resolver problemas con restricciones.

6.3 Condiciones KKT

Consideramos un problema de optimización convexa de la forma:

$$\min_x f(x)$$

sujeto a:

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p$$

donde $f(x)$ es una función convexa, $g_i(x)$ son funciones convexas, y $h_j(x)$ son funciones lineales.

Las condiciones KKT para este problema incluyen:

1. **Estacionariedad**: El gradiente de la Lagrangiana debe ser cero en el punto óptimo.

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

2. **Condición de primal factibilidad**: Las restricciones originales deben ser satisfechas.

$$g_i(x^*) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, p$$

3. **Condición de dual factibilidad**: Los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de desigualdad deben ser no negativos.

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

4. **Condición de complementariedad**: Los multiplicadores de Lagrange deben cumplir que:

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Esto significa que si la restricción $g_i(x)$ es estrictamente activa ($g_i(x^*) = 0$), entonces el multiplicador asociado puede ser positivo; pero si la restricción no está activa ($g_i(x^*) < 0$), entonces el multiplicador debe ser cero.

6.4 Dualidad de Lagrange

En el enfoque de dualidad de Lagrange, el problema primal se convierte en un problema dual a través de la construcción de la Lagrangiana. Para el problema original, se define la Lagrangiana como:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$$

El problema dual se obtiene maximizando el valor mínimo de la Lagrangiana con respecto a los multiplicadores de Lagrange (λ y μ):

$$\max_{\lambda \geq 0, \mu} \min_{x} L(x, \lambda, \mu)$$

7 Dualidad Fuerte y Débil

7.1 Dualidad Débil

La dualidad débil establece que el valor óptimo del problema dual es siempre un límite inferior al valor óptimo del problema primal. Es decir:

$$\text{Valor óptimo dual} \leq \text{Valor óptimo primal}$$

7.2 Dualidad Fuerte

La dualidad fuerte ocurre cuando el valor óptimo del problema dual es igual al valor óptimo del problema primal. Es decir:

$$\text{Valor óptimo dual} = \text{Valor óptimo primal}$$

La dualidad fuerte se cumple generalmente en problemas convexos bajo ciertas condiciones, como la *slater's condition* (condición de Slater) para problemas con restricciones de desigualdad.

8 Ejemplos Ilustrativos

8.1 Ejemplo 1: Problema Convexo de Programación Lineal (PL)

Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\min\ c^T x$$

sujeto a:

$$Ax \geq b, \quad x \geq 0$$

Este es un problema de optimización convexo, y su dualidad es fuerte bajo condiciones generales (como la condición de Slater). El problema dual asociado es:

$$\max\ b^T y$$

sujeto a:

$$A^T y \leq c, \quad y \geq 0$$

Aquí, la dualidad fuerte se cumple.

8.2 Ejemplo 2: Problema de Optimización Convexa con Restricciones No Lineales

Consideremos el siguiente problema:

$$\min\ f(x)$$

sujeto a:

$$g_1(x) \leq 0, \quad g_2(x) \leq 0$$

donde $f(x)$ y $g_i(x)$ son convexas. Las condiciones KKT aseguran que la solución cumple con las condiciones de optimalidad, y dependiendo de la naturaleza de las restricciones, se podría verificar si la dualidad fuerte se cumple.

9 Análisis de la Dualidad Fuerte y Débil

9.1 Caso de Dualidad Fuerte

En problemas convexos con funciones convexas $f(x)$ y $g(x)$ y bajo la *condición de Slater* (es decir, existe un punto factible interior a todas las restricciones), la dualidad fuerte siempre se cumple. Esto implica que el valor óptimo del problema primal y el problema dual coinciden.

9.2 Caso de Dualidad Débil

Si el problema no es estrictamente convexo o no cumple con la condición de Slater, la dualidad débil puede ocurrir, y el valor óptimo del problema dual será un límite inferior del valor óptimo primal, pero no necesariamente igual.

10 Conclusión

La relación entre las condiciones KKT y la dualidad de Lagrange en problemas de optimización convexa es esencial para resolver estos problemas mediante métodos duales. La dualidad fuerte se cumple generalmente bajo condiciones de convexidad y la condición de Slater, mientras que la dualidad débil se aplica cuando estas condiciones no se cumplen. La comprensión de estas relaciones es crucial para la aplicación de métodos de optimización eficientes.