Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
Escuela Profesional de Ingeniería de Estadística e Informática

Gauss-Jordan Ejercicios

Curso:

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

Presentado por:

JEAN CARLOS WILLIAM HUANCOILLO ROJAS

Docente:

FRED TORRES CRUZ

Puno – Perú

2025

Ejercicios

1. **Modelo de regresión lineal: Resolver el siguiente sistema para determinar los valores de los pesos del modelo w1, w2, w3:**

2w1 + 3w2 − w3 = 5,
−w1 + 2w2 + 4w3 = 6,
3w1 − w2 + 2w3 = 7.

Sistema como una matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Dividimos la fila 1 entre 2 (el valor del pivote):

$$\text{Fila 1} = \frac{\text{Fila 1}}{2}$$

$$(2, 3, -1, 5) \div 2 = \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

La matriz queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Para la fila 2: Fila 2 = Fila 2 + Fila 1

$$(-1, 2, 4, 6) + (1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) = \left(0, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{17}{2}\right)$$

Para la fila 3: Fila 3 = Fila 3 – 3 * Fila 1

$$3 \cdot (\,1\,, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) = (\,3\,, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{15}{2})$$

Entonces:

$$(\,3\,, -\,1\,, 2\,, 7\,) - (\,3\,, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{15}{2}) = \left(\,0\,, -\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto, la nueva fila 3 queda como:

$$\left(\,0\,, -\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

La matriz queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dividimos la fila 2 entre $\frac{7}{2}$:

$$\text{Fila 2} = \frac{\text{Fila 2}}{\frac{7}{2}}$$

$$\left(\,0\,, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{17}{2}\right) \div \frac{7}{2} = \left(\,0\,, 1\,, 1\,, \frac{17}{7}\right)$$

La matriz queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{17}{7} \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Para la fila 1: $\text{Fila 1} = \text{Fila 1} - \frac{3}{2} \cdot \text{Fila 2}$

$$\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot \left(0, 1, 1, \frac{17}{7}\right) = \left(1, 0, -\frac{2}{7}, \frac{17}{14}\right)$$

- Para la fila 3: $\text{Fila 3} = \text{Fila 3} + \frac{11}{2} \cdot \text{Fila 2}$

$$\left(0, -\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{2} \cdot \left(0, 1, 1, \frac{17}{7}\right) = \left(0, 0, \frac{18}{7}, \frac{85}{14}\right)$$

La matriz queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{17}{14} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & \frac{18}{7} & \frac{85}{14} \end{bmatrix}$$

Dividimos la fila 3 entre $\frac{18}{7}$:

$$\text{Fila 3} = \frac{\text{Fila 3}}{\frac{18}{7}}$$

$$\left(0, 0, \frac{18}{7}, \frac{85}{14}\right) \div \frac{18}{7} = \left(0, 0, 1, \frac{85}{36}\right)$$

La matriz queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{17}{14} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{85}{36} \end{bmatrix}$$

- Para la fila 1: $\text{Fila 1} = \text{Fila 1} + \frac{2}{7} \cdot \text{Fila 3}$

$$\left(1, 0, -\frac{2}{7}, \frac{17}{14}\right) + \frac{2}{7} \cdot \left(0, 0, 1, \frac{85}{36}\right) = \left(1, 0, 0, \frac{263}{84}\right)$$

- Para la fila 2: $\text{Fila 2} = \text{Fila 2} - 1 \cdot \text{Fila 3}$

$$\left(0, 1, 1, \frac{17}{7}\right) - \left(0, 0, 1, \frac{85}{36}\right) = \left(0, 1, 0, \frac{133}{84}\right)$$

La matriz final es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{263}{84} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{133}{84} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{85}{36} \end{bmatrix}$$

Solución del sistema

$$el_1 = \frac{263}{84}, \quad el_2 = \frac{133}{84}, \quad el_3 = \frac{85}{36}$$

Interpretación en el contexto del problema.

Los valores obtenidos corresponden a los pesos del modelo de regresión lineal. Estos pesos (el1,el2,el3) indican la contribución de cada variable independiente al modelo. En este contexto:

La primera fila ya tiene 1 como pivote (a_{11}), por lo que no es necesario escalar.

Eliminación de a_{21} (elemento debajo del pivote en la columna 1):

Multiplicamos la fila 1 por -2 y la sumamos a la fila 2:

$$F2 \leftarrow F2 - 2 \cdot F1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminación de a_{31} (elemento debajo del pivote en la columna 1):

Multiplicamos la fila 1 por 1 y la sumamos a la fila 3:

$$F3 \leftarrow F3 + F1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Escalamos la segunda fila dividiendo por -5:

$$F2 \leftarrow F2 \,/ -5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Eliminación de a_{32} (elemento debajo del pivote en la columna 2):

Multiplicamos la fila 2 por -4 y la sumamos a la fila 3:

$$F3 \leftarrow F3 - 4 \cdot F2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Eliminación de a_{12} (elemento encima del pivote en la columna 2):

Multiplicamos la fila 2 por -2 y la sumamos a la fila 1:

$$F1 \leftarrow F1 - 2 \cdot F2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Escalamos la tercera fila dividiendo por -3:

$$F3 \leftarrow F3 \,/ -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Eliminación de a_{13} (elemento encima del pivote en la columna 3):

Multiplicamos la fila 3 por -1 y la sumamos a la fila 1:

$$F1 \leftarrow F1 - F3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Eliminación de a_{23} (elemento encima del pivote en la columna 3):

Multiplicamos la fila 3 por -1 y la sumamos a la fila 2:

$$\mathrm{F2} \leftarrow \mathrm{F2} - \mathrm{F3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Resultado final

La matriz final indica:

$$incógnita = \frac{8}{3}, \quad y = \frac{8}{3}, \quad el = \frac{4}{3}$$

Interpretación del resultado

En el contexto de **calibración de hiperparámetros** , estos valores (X , y , el) representan los parámetros óptimos ajustados para un modelo o sistema. Al calibrarlos, garantizamos que las ecuaciones dadas sean satisfechas simultáneamente, optimizando el rendimiento del modelo.

3. **Asignación ´optima de recursos: Resolver para a, b, c, que representan las proporciones de recursos asignados a cada módulo, el sistema:**

a + b + c = 6,

2a − b + 3c = 13,

−a + 2b − c = 2.

Expresar este sistema como una matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Convertir el pivote de la primera fila en 1

El elemento en la posición (1,1) ya es 1, por lo que no necesitamos dividir la fila. La matriz sigue igual:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Usamos la fila 1 para eliminar el 2 de la fila 2 y el −1-1−1 de la fila 3:

- Para la fila 2: Fila 2 = Fila 2 – 2*Fila 1

(2,−1,3,13)−2·(1,1,1,6)=(0,−3,1,1)

- Para la fila 3: Fila 3 = Fila 3 + Fila 1

(−1,2,−1,2)+(1,1,1,6)=(0,3,0,8)

La matriz queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Dividimos la fila 2 por −3:

$$(0,-3,1,1) \div -3 = \left(0,1-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

La matriz queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Eliminar los elementos arriba del pivote en la columna 3

- Para la fila 1: Fila 1 = Fila 1 − 4/3 * Fila 3

$$(1,0,\frac{4}{3},\frac{19}{3}) - \frac{4}{3} \cdot (0,0,1,9) = (1,0,0,-1)$$

Para la fila 2: Fila 2 = Fila 2 + 13 * Fila 3

$$(0,1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}) + \frac{1}{3} \cdot (0,0,1,9) = (0,1,0,2)$$

La matriz final es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución del sistema

A = −1, b = 2, c = 9

Interpretación en el contexto del problema

Estos valores representan las proporciones óptimas de recursos asignados a los tres módulos:

- a=−11: Puede interpretarse como un ajuste necesario (como reducción o transferencia de recursos de otro módulo para compensar).
- b=2: Representa el doble de recursos asignados al módulo 2.
- c=9: Indica una asignación significativamente mayor de recursos al módulo 3.

Esto sugiere que el módulo 3 requiere la mayor cantidad de recursos para cumplir con los objetivos establecidos, mientras que el módulo 1 necesita una reevaluación debido a su proporción negativa.

4. Optimización de parámetros de un Bosque Aleatorio: Resolver el siguiente sistema para los hiperparámetros p, q, r:

$$p + 2q + 3r = 10,$$
$$2p - q + 4r = 12,$$
$$3p + 3q - r = 6.$$

Representamos este sistema como una matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

El pivote de la primera fila ya es1, así que no necesitamos escalar.

Eliminación dea_{21}(elemento debajo del pivote en la columna 1):

Multiplicamos la fila 1 por-2y la sumamos a la fila 2:

$$\mathrm{F2} \leftarrow \mathrm{F2} - 2 \cdot \mathrm{F1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & -2 & -8 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Eliminación dea_{31}(elemento debajo del pivote en la columna 1):

Multiplicamos la fila 1 por-3y la sumamos a la fila 3:

$$\mathrm{F3} \leftarrow \mathrm{F3} - 3 \cdot \mathrm{F1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -10 & -24 \end{bmatrix}$$

Escalamos la segunda fila dividiendo por-5:

$$\mathrm{F2} \leftarrow \mathrm{F2} \,/ -5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & -3 & -10 & -24 \end{bmatrix}$$

Eliminación dea_{32}(elemento debajo del pivote en la columna 2):

Multiplicamos la fila 2 por3y la sumamos a la fila 3:

$$\mathrm{F3} \leftarrow \mathrm{F3} + 3 \cdot \mathrm{F2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{44}{5} & -\frac{92}{5} \end{bmatrix}$$

Eliminación dea_{12}(elemento encima del pivote en la columna 2):

Multiplicamos la fila 2 por-2y la sumamos a la fila 1:

$$\mathrm{F1} \leftarrow \mathrm{F1} - 2 \cdot \mathrm{F2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{34}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{44}{5} & -\frac{92}{5} \end{bmatrix}$$

Escalamos la tercera fila dividiendo por$-\frac{44}{5}$:

$$F3 \leftarrow F3 \; / - \frac{44}{5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{34}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eliminación dea_{13}(elemento encima del pivote en la columna 3):

Multiplicamos la fila 3 por$-\frac{11}{5}$y la sumamos a la fila 1:

$$F1 \leftarrow F1 - \frac{11}{5} \cdot F3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eliminación dea_{23}(elemento encima del pivote en la columna 3):

Multiplicamos la fila 3 por$-\frac{2}{5}$y la sumamos a la fila 2:

$$F2 \leftarrow F2 - \frac{2}{5} \cdot F3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resultado final

De la matriz resultante, obtenemos:

$$pag = 0 \,, \quad q = 1 \,, \quad a = 2$$

Interpretación del resultado

En el contexto de **optimización de parámetros de un Bosque Aleatorio** , los valores$pag = 0$,$q = 1$, y$a = 2$representan los valores óptimos de los hiperparámetrospag,q, y$a$del modelo, configurados para cumplir las restricciones impuestas por las ecuaciones. Estos parámetros podrían ser, por ejemplo, la profundidad del árbol, el número de estimadores o el número máximo de muestras consideradas en el modelo.

5. **Estimación de demanda de inventario: Resolver para u, v, w, que representan los coeficientes del modelo de series de tiempo:**

u + v + 2w = 9,
2u − 3v + 4w = 5,
u − 2v + w = 1.

matriz aumentada :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El pivote ya es 1, por lo que no es necesario escalar.

Eliminación de a_{21} (elemento debajo del pivote en la columna 1):

Multiplicamos la fila 1 por -2 y la sumamos a la fila 2:

$$\mathrm{F2} \leftarrow \mathrm{F2} - 2 \cdot \mathrm{F1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminación de a_{31} (elemento debajo del pivote en la columna 1):

Multiplicamos la fila 1 por -1 y la sumamos a la fila 3:

$$\mathrm{F3} \leftarrow \mathrm{F3} - \mathrm{F1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -13 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

Escalamos la segunda fila dividiendo por -5:

$$\mathrm{F2} \leftarrow \mathrm{F2} / -5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & -3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

Eliminación de a_{32} (elemento debajo del pivote en la columna 2):

Multiplicamos la fila 2 por 3 y la sumamos a la fila 3:

$$\mathrm{F3} \leftarrow \mathrm{F3} + 3 \cdot \mathrm{F2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

Eliminación de a_{12} (elemento encima del pivote en la columna 2):

Multiplicamos la fila 2 por -1 y la sumamos a la fila 1:

$$\mathrm{F1} \leftarrow \mathrm{F1} - \mathrm{F2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{32}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

Escalamos la tercera fila dividiendo por -1:

$$\mathbf{F3} \leftarrow \mathbf{F3} \,/\, -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{32}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

Eliminación de a_{13} (elemento encima del pivote en la columna 3):

Multiplicamos la fila 3 por -2 y la sumamos a la fila 1:

$$\mathbf{F1} \leftarrow \mathbf{F1} - 2 \cdot \mathbf{F3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

Resultado final

De la matriz resultante, obtenemos:

$$tú = 2\ , \quad en = \frac{13}{5}, \quad el = \frac{11}{5}$$

Interpretación en el contexto del problema.

Estos valores representan los coeficientes del modelo de serie de tiempo que estiman la demanda de inventario.

- $tú = 2$: Podría ser el término constante que represente un nivel básico de demanda.
- $en = \frac{13}{5}$: Es el peso asignado al efecto de una variable independiente (como tendencia).
- $el = \frac{11}{5}$: Representa el impacto de una variable adicional, como la estacionalidad.