UFMG.ICEx.DCC

Álgebra Linear Computacional/ Análise Numérica

Trabalho de Programação 1: Integração usando o PYTHON

A quadratura de Gauss-Legendre é utilizada para calcular

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_n = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i), \quad x_i = a + \frac{b-a}{2}(t_i+1),$$

onde os zeros t_i do polinômio de Legendre são os autovalores da matriz de Jacobi

$$J_n = \begin{bmatrix} d_1 & \sqrt{s_1} & & & & 0 \\ \sqrt{s_1} & d_2 & \sqrt{s_2} & & & \\ & \sqrt{s_2} & d_3 & \sqrt{s_3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{s_{n-2}} & d_{n-1} & \sqrt{s_{n-1}} \\ 0 & & & & \sqrt{s_{n-1}} & d_n \end{bmatrix},$$

com

$$d_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$s_i = \frac{i^2}{4i^2-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

e os pesos são $\omega_i = 2(v_{1,i})^2$, sendo $v_{1,i}$ o primeiro elemento do autovetor normalizado ($v_i^T v_i = 1$) correspondente ao autovalor t_i.

Fazer um programa em Python que

- leia pelo teclado uma cadeia de caracteres especificando a função $f(x)$, o número de pontos n e os limites de integração a e b;
- chame uma `function` para calcular as abscissas t_i e os pesos ω_i via a matriz de Jacobi (usar uma `function` que calcula autovalor e autovetor no Python);
- chame uma `function` para calcular a integral pela quadratura de Gauss-Legendre e
- escreva o valor da integral no terminal.

Vide verso

Trabalho de Programação 2: complemento

Use o programa elaborado no TP 2 para resolver os exercícios a seguir:

a) Calcular as abscissas e os pesos para $n = 2, 3, 4$ e comparar com os valores tabelados.

b) Verificar que, nos casos acima, a soma dos pesos é igual a 2. Por que?

c) Calcular $\displaystyle\int_0^2 (x^5 - x^3 + x - 1)dx$ para $n = 2, 3, 4$ e explicar os resultados.

d) Calcular $\displaystyle\int_0^\pi \text{sen}(x)dx$ com $n = 3, 4, 5$ e comparar com o valor exato.

e) Seja $f(x) = e^x$,

1. avaliar $f(x)$ em $x_1 = -\sqrt{3}/3$ e $x_2 = \sqrt{3}/3$,
2. determinar o polinômio linear $p_1(x)$ que passa pelos pontos de coordenadas $[x_1, f(x_1)]$ e $[x_2, f(x_2)]$,
3. calcular, analiticamente, $\displaystyle\int_{-1}^1 p_1(x)dx$ e
4. comparar o valor acima com $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x dx$ calculada com $n = 2$. Explicar os resultados.