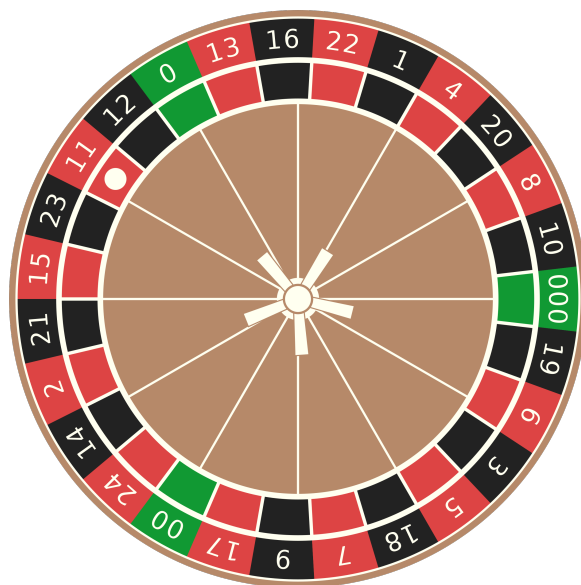


Année académique 21/22  
Rapport de projet 3

## Survie du casino à la roulette



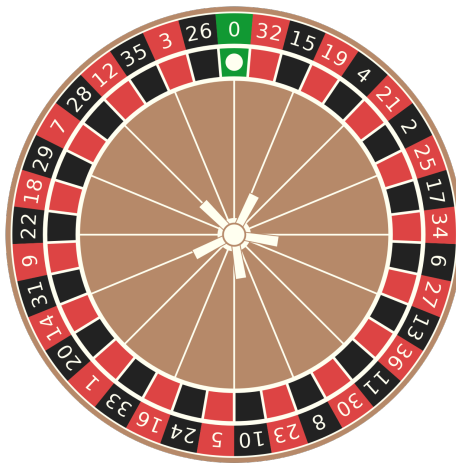
Option	2MAU3MAY
Étudiant	Jean HEIBIG
Enseignants responsables	Robert EYMARD et Jacques PRINTEMS
Date	26 mars 2023

1	Simulations Monte-Carlo	2
2	Résolution mathématique	5
3	Comparaison des résultats	10

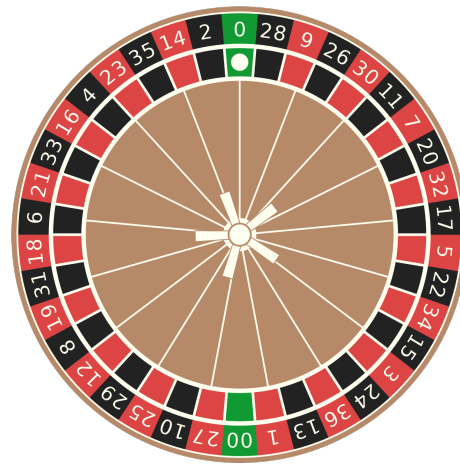
# 1 Simulations Monte-Carlo

## 1.1 Modélisation du jeu

Nous considérons le jeu de la roulette. Nous modélisons le jeu à l'aide de deux paramètres, le nombre de numéros strictement positifs, noté  $n \geq 2$  et le nombre de zéros  $z \geq 1$ . Traditionnellement, à la roulette française, le casino utilise un seul zéro, tandis qu'à la roulette américaine, le casino en utilise deux, notés 0 et 00. Dans les deux cas, il y a le même nombre de numéros non-nuls  $n = 36$ . Un *lancer* consiste à faire tourner la roulette avec une bille à l'intérieur, jusqu'à ce que la bille s'arrête sur un des  $n + z$  numéros.



(a) Roulette française



(b) Roulette américaine

FIGURE 1 – Plateaux traditionnels de la roulette au casino

Les zéros représentent la part de marge du casino. De fait, chaque numéro a la même probabilité de tomber lors d'un lancer, soit  $p = \frac{1}{n+z}$  uniforme, et le casino ne paie pas à  $n + z - 1$  contre 1, mais seulement à  $n - 1$  contre 1. De même, lorsqu'un joueur fait un pari sur plusieurs numéros à la fois, notons le nombre de numéros misés  $m$ , alors le casino paie à  $d := \frac{n}{m} - 1$  contre 1, ainsi une mise sur rouge ( $m = 18$ ) joue à 1 contre 1.

Les joueurs ont à leur disposition plusieurs possibilités de mises, les plus courantes sont :

- le numéro plein, 35 : 1
- la mise à cheval, 17 : 1
- la transversale, 11 : 1
- le carré, 8 : 1
- le sixain, 5 : 1
- la colonne, 2 : 1
- les chances simples, 1 : 1

Nous nous plaçons du point de vue du casino. Nous notons  $F_t$  sa fortune à l'instant  $t \in \mathbb{N}$ . Nous notons  $p_d$  la probabilité de devoir payer  $d$  au joueur et  $p_g = 1 - p_d$  la probabilité de gain du casino. Le jeu rapporte à chaque tour de roulette  $\Delta F_k := F_k - F_{k-1}$ , qui vaut en moyenne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Delta F_k) &= 1p_g - dp_d \\ &= \frac{n+z-m}{n+z} - \frac{n-m}{m} \frac{m}{n+z} \\ &= \frac{n+z-m-(n-m)}{n+z} \\ &= \frac{z}{n+z}\end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E}(F_t) = F_0 + \sum_{k=1}^t \Delta F_k = F_0 + \frac{z}{n+z}t$ , car les tirages sont indépendants. Donc

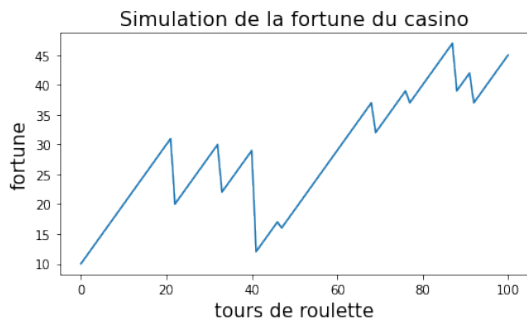
$$\mathbb{E}(F_t) = F_0 + \frac{z}{n+z}t$$

Nous retrouvons par ce calcul que les marges des casinos liées au nombre de zéros sur la roulette, et que la roulette américaine est presque deux fois plus avantageuse pour le casino que sa contrepartie européenne.

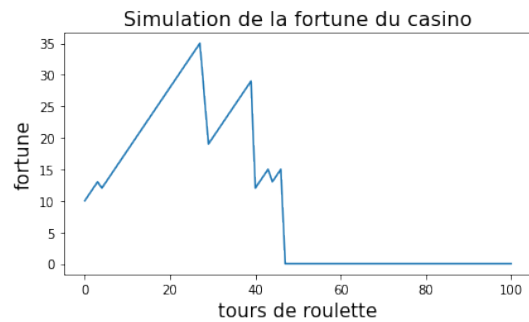
## 1.2 Probabilité de survie

Nous définissons une trajectoire grâce à la réalisation de plusieurs lancers successifs indépendants qui permettent de tracer l'évolution de la fortune du casino. Nous considérons tantôt des trajectoires à horizon fini  $N$ , tantôt infini.

Nous parlons de banqueroute lorsque la fortune du casino est négative ou nulle, et alors nous considérons que le casino fait défaut et donc sa trajectoire devient stationnaire à zéro. À l'inverse, le casino survit tant que sa fortune reste strictement positive.



(a) Trajectoire de survie

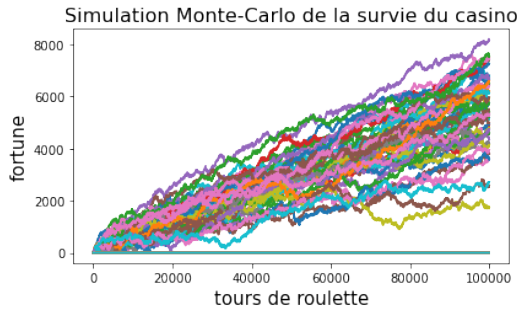


(b) Trajectoire de banqueroute

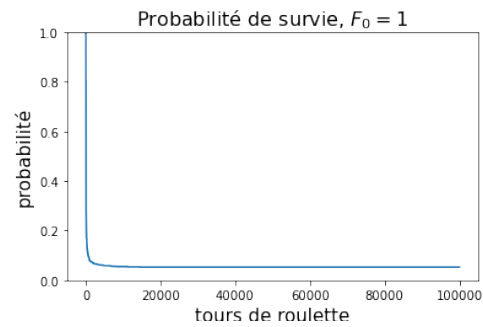
FIGURE 2 – Exemples de trajectoires pour cent lancers de roulette

Pour simuler la probabilité de survie par Monte-Carlo, notée  $q_k$  où  $k \in \mathbb{N}$  désigne la fortune initiale  $F_0$  du casino, nous réalisons plusieurs trajectoires, et nous rapportons le nombre de trajectoires qui ont fait banqueroute par rapport au nombre total de trajectoires.

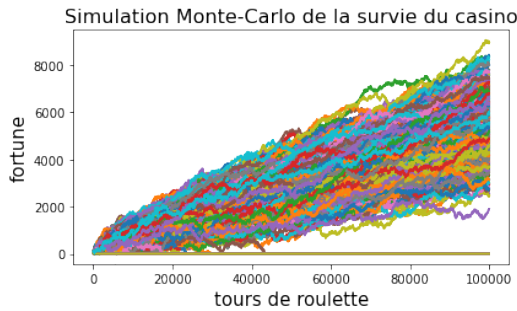
Deux paramètres influencent le résultat obtenu. Tout d'abord, le nombre de trajectoires distinctes à simuler détermine la vitesse de convergence (TCL). Mais aussi l'horizon de temps, qui est fini lors des simulations, alors qu'il est infini dans la résolution mathématique, doit être pris assez grand afin de permettre aux trajectoires survivantes de s'éloigner clairement de la banqueroute (cf. variance du MB).



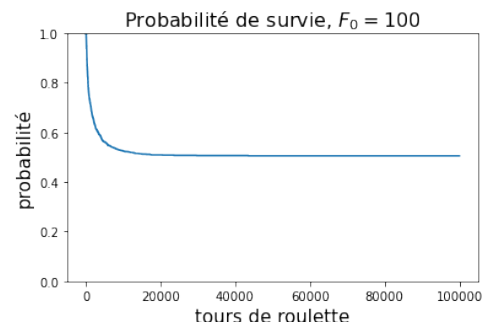
(a) Mille trajectoires différentes



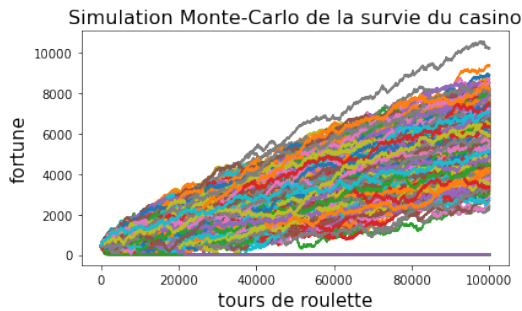
(b) Probabilité estimée  $\bar{q}_1 = 0.052$



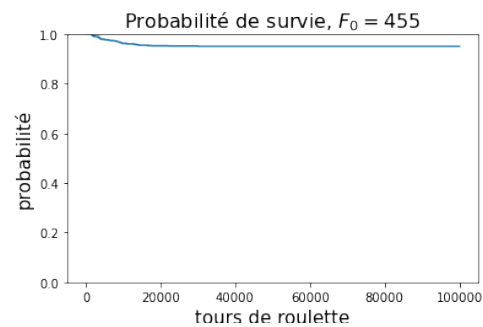
(c) Mille trajectoires différentes



(d) Probabilité estimée  $\bar{q}_{100} = 0.505$



(e) Mille trajectoires différentes



(f) Probabilité estimée  $\bar{q}_{455} = 0.951$

FIGURE 3 – Détail de l'estimation de la probabilité de survie

## 2 Résolution mathématique

### 2.1 Calcul de $q_1$

Nous voulons prouver que dans le cadre de la roulette française, la probabilité de survie du casino à horizon infini, notée  $q_1$  vaut

$$q_1 = \frac{1}{36}$$

*Démonstration.* L'évolution de la fortune  $F$  est décrite (cf. [Bou64]) par la relation de récurrence suivante :

$$F_{m+1} = F_m + \Delta F_{m+1}$$

$(\Delta F_{m+1})_{m \in \mathbb{N}}$  désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées selon la loi suivante :

$$\Delta F_{m+1} = \begin{cases} -d & \text{avec probabilité } f_d p_d, d \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ 1 & \text{avec probabilité } p_g \end{cases}$$

Les  $(f_d)_{d \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$  désignent les fréquences de mise des joueurs, et

$$\sum_{d=1}^{n-1} f_d = 1$$

À la roulette française, les valeurs de mise autorisées<sup>1</sup> sont  $d \in \{1/2, 1, 2, 5, 8, 11, 17, 35\}$ .

Les  $(p_d)_{d \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$  désignent les probabilités de gain de la somme  $d$  par le joueur, avec

$$\forall d \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, p_d = \frac{n}{(d+1)(n+z)}$$

Inversement,  $p_g$  désigne la probabilité de gain du casino, vérifiant

$$p_g + \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d = 1$$

---

1. Règles du jeu

Vérifions que l'espérance du casino est positive :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(T_m) &= p_g - \sum_{d=1}^{n-1} df_d p_d \\
 &= 1 - \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d - \sum_{d=1}^{n-1} df_d p_d \\
 &= 1 - \sum_{d=1}^{n-1} (d+1) f_d p_d \\
 &= 1 - \sum_{d=1}^{n-1} (d+1) f_d \frac{n}{(d+1)(n+z)} \\
 &= 1 - \frac{n}{(n+z)} \sum_{d=1}^{n-1} f_d \\
 &= \frac{z}{(n+z)} \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

Rappelons que nous notons  $q_k$  la probabilité de survie du casino, sachant qu'il a  $k$  jetons à l'instant initial.

Alors

$$\begin{cases} \forall k \geq 1, q_k = p_g q_{k+1} + \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d q_{k-d} \\ \forall k \in \llbracket 0, -(n-2) \rrbracket, q_k = 0 \end{cases}$$

Ce système revient à dire que la probabilité de survie peut se calculer avec une relation de récurrence. Calculons l'équation caractéristique associée à cette suite récurrente :

$$1 = p_g r + \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d r^{-d}$$

L'inconnue est  $r$  et les solutions sont les  $(r_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  avec  $r_0 = 1$ . Nous notons aussi  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_i = 1/r_i$  où les  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  sont solutions du polynôme

$$P(X) = \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d X^{d+1} - X + p_g$$

Nous remarquons que  $P(X) = (X-1)Q(X)$  avec

$$Q(X) = \sum_{l=1}^{n-1} c_l X^l - p_g \text{ où } \forall l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, c_l = \sum_{d=l}^{n-1} f_d p_d$$

Montrons que les racines de  $Q$  sont de module strictement supérieur à 1. De fait, supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in \mathbb{C}$  tel que  $Q(x) = 0$  et  $|x| \leq 1$ .

Alors

$$\begin{aligned}
 Q(x) = 0 &\implies \sum_{l=1}^{n-1} c_l x^l - p_g = 0 \\
 &\implies \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{d=l}^{n-1} f_d p_d x^l + \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d = 1 \\
 &\implies \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{l=1}^d f_d p_d x^l + \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d = 1 \\
 &\implies \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d \sum_{l=0}^d x^l = 1
 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 1 &= \left| \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d \sum_{l=0}^d x^l \right| \\
 &\leq \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d \sum_{l=0}^d |x^l| \\
 &\leq \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d (d+1) \\
 &= \frac{n}{n+z} \\
 &< 1
 \end{aligned}$$

Absurde.

Donc,  $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, 1 < |x_i|$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, |r_i| < 1$ .

Supposons les  $(r_j)_{j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$  distincts, alors  $q_k = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i r_i^k$ . Or,  $\mathbb{E}(T_m) > 0$ , donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 1$ . Et comme

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} q_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i r_i^k \\
 &= \mu_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i r_i^k \\
 &= \mu_0
 \end{aligned}$$

Nous déduisons  $\mu_0 = 1$  et donc  $q_k = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i r_i^k$ .

Nous déterminons les  $n-1$  autres coefficients  $(\mu_i)_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$  grâce aux conditions initiales  $\forall k \in \llbracket 0, -(n-2) \rrbracket, q_k = 0$ . Nous pouvons écrire ces conditions sous la forme de la matrice suivante :  $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i^k = -1 &\implies \begin{cases} \mu_1 x_1^0 + \cdots + \mu_{n-1} x_{n-1}^0 &= -1 \\ \vdots &\vdots \\ \mu_1 x_1^{n-2} + \cdots + \mu_{n-1} x_{n-1}^{n-2} &= -1 \end{cases} \\
&\implies \begin{bmatrix} x_1^0 & \cdots & x_{n-1}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\implies VM = -1_{(n-1) \times 1} \\
&\implies M = -V^{-1}1_{(n-1) \times 1}
\end{aligned}$$

Où  $V = (x_j^{i-1})_{i,j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$  désigne la matrice de Vandermonde associée aux  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ , inversible puisque nous avons supposé les racines simples, d'inverse  $V_i^{-1} = L_i(X)$  polynôme interpolateur de Lagrange associé aux  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ . Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mu_i = -L_i(1) = - \prod_{j \neq i} \frac{1 - x_j}{x_i - x_j}$$

Calculons  $q_1$ , la probabilité de survie en commençant avec un seul jeton.

$$\begin{aligned}
q_1 &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i r_i \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i}{x_i} \\
&= 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \prod_{j \neq i} x_j}{\prod x_j} \\
&= 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \prod_{j \neq i} x_j}{(-1)^{n-1} Q(0)}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\prod_{j \neq i} x_j &= \frac{(-1)^{n-1}}{x_i} \left[ (-1)^{n-1} \prod x_j \right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{x_i} [Q(0) - Q(x_i)] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{x_i} \left[ - \sum_{l=1}^{n-1} c_l x_i^l \right] \\
&= (-1)^n \sum_{l=1}^{n-1} c_l x_i^{l-1}
\end{aligned}$$



Donc

$$\begin{aligned}
 q_1 &= 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (-1)^n \sum_{l=1}^{n-1} c_l x_i^{l-1}}{(-1)^{n-1} Q(0)} \\
 &= 1 - \frac{\sum_{l=1}^{n-1} c_l \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i^{l-1}}{Q(0)} \\
 &= 1 + \frac{\sum_{l=1}^{n-1} c_l}{Q(0)} \\
 &= \frac{Q(1)}{Q(0)} \\
 &= - \frac{\sum_{l=1}^{n-1} \sum_{d=l}^{n-1} f_d p_d - 1 + \sum_{d=1}^{n-1} f_d p_d}{p_g} \\
 &= \frac{1 - \sum_{d=1}^{n-1} (d+1) f_d p_d}{p_g} \\
 &= \frac{z}{p_g(n+z)}
 \end{aligned}$$

Finalement, en considérant la roulette française,  $n = 36$ ,  $z = 1$ , et un joueur qui mise uniquement des numéros simples ( $f_{35} = 1$  et donc  $p_g = 36/37$ ), nous obtenons

$$q_1 = \frac{1}{\frac{36}{37}(36+1)} = \frac{1}{36}$$

□

## 2.2 Calcul de $\sim_{\infty} q$

Nous avons de plus une racine dominante,  $r_0$  dont le module est strictement plus grand que celui du reste des racines du polynôme caractéristique.

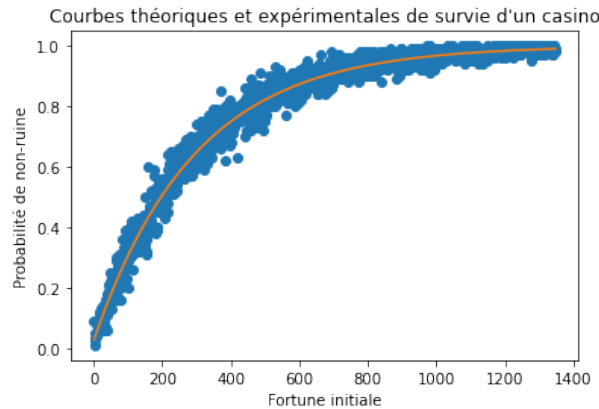
Nous renvoyons sur cette page [GitHub](#) pour une démonstration de ce résultat basée sur le théorème de Rouché.

Alors

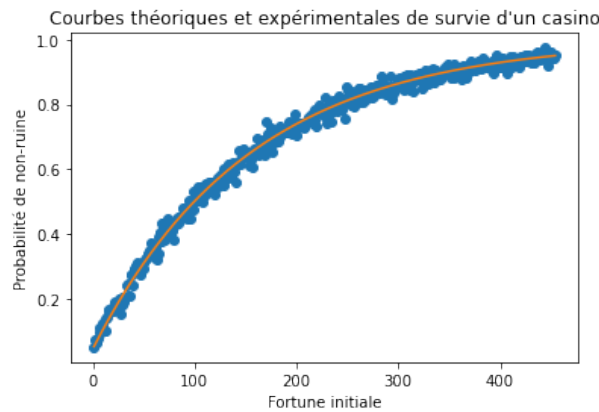
$$q_k \sim_{k \rightarrow \infty} 1 + \mu_0 r_0^k$$

Ce résultat prévoit que la courbe théorique de la probabilité de survie se comporte comme une exponentielle pour des fortunes initiales assez grandes.

### 3 Comparaison des résultats



(a) 100 trajectoires, horizon  $10^5$



(b) 500 trajectoires, horizon  $10^5$

FIGURE 4 – Comparaison de courbes théorique (orange) et Monte-Carlo (bleu)

Ci-dessus la comparaison entre les valeurs théoriques  $q_k$  et simulées  $\bar{q}_k$ . Nous avons utilisé une roulette française pour la courbe du dessus, ce qui a provoqué plus de banqueroutes pour la casino, tandis que la courbe du dessous provient d'une roulette américaine (cf. code python), ce qui explique une probabilité de survie plus importante.

Nous notons aussi l'effet du nombre de trajectoires sur la dispersion des points bleus empiriques autour de leur moyenne théorique orange, expliqué par le TCL, tandis qu'avec un horizon de cent mille, la quasi-totalité des trajectoires sont soit en banqueroute, soit en survie définitive.

### Références

[Bou64] Jean BOUZITAT. *Mathématiques et sciences humaines*. T. 9. 1964, p. 15-30.